UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Sobre variedades de Veronese defeituosas e o teorema de Alexander-Hirschowitz

Lucas Mioranci

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Lucas Mioranci

Sobre variedades de Veronese defeituosas e o teorema de Alexander-Hirschowitz

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO
REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Daniel Levcovitz

USP – São Carlos
Julho de 2019

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

M669s Mioranci, Lucas
Sobre variedades de Veronese defeituosas e o
teorema de Alexander-Hirschowitz / Lucas Mioranci;
orientador Daniel Levcovitz. -- São Carlos, 2019.
84 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2019.

1. Geometria Algébrica. 2. Sistemas lineares de
polinômios homogêneos. 3. Variedades secantes. I.
Levcovitz, Daniel, orient. II. Título.

Lucas Mioranci

On defective Veronese varieties and the
Alexander-Hirschowitz theorem

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics
and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance
with the requirements of the Mathematics Graduate
Program, for the degree of Master in Science. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Daniel Levcovitz

USP – São Carlos
July 2019

*Este trabalho foi realizado com o suporte da FAPESP, processo nº 2018/26163-7,
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).*

“Algebra is the offer made by the devil to the mathematician. The devil says: ‘I will give you this powerful machine, it will answer any question you like. All you need to do is give me your soul: give up geometry and you will have this marvellous machine.’”

Michael Atiyah (1929 - 2019)

RESUMO

MIORANCI, L. **Sobre variedades de Veronese defeituosas e o teorema de Alexander-Hirschowitz.** 2019. 82 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

Este trabalho aborda o problema de determinar todas as variedades de Veronese defeituosas, apresentando uma prova dos casos não-defeituosos. Trabalhamos com a formulação equivalente segundo a qual, a menos de uma pequena lista de exceções, k pontos duplos em $\mathbb{P}^n$ impõem condições independentes em polinômios homogêneos de grau d , como demonstrado por J. Alexander e A. Hirschowitz em 1995. Baseamo-nos principalmente no artigo de M. Brambilla e G. Ottaviani, além de adicionar mais detalhes sobre variedades secantes e a relação do teorema com o problema de Waring para polinômios.

Palavras-chave: Geometria Algébrica, Sistemas lineares de polinômios homogêneos, Variedades secantes, Variedades de Veronese.

ABSTRACT

MIORANCI, L. **On defective Veronese varieties and the Alexander-Hirschowitz theorem.** 2019. 82 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2019.

This dissertation deals with the problem of determining all defective Veronese varieties by presenting proof of the non-defective cases. We work on the equivalent formulation which says that, except for a small list of exceptions, k double points on $\mathbb{P}^n$ impose independent conditions on homogeneous polynomials of degree d , as proved by J. Alexander and A. Hirschowitz in 1995. Our main reference is the paper by M. Brambilla and G. Ottaviani, and we included a few more details on secant varieties and the relation to the Waring problem for polynomials.

Keywords: Algebraic Geometry, Linear systems of homogeneous polynomials, Secant varieties, Veronese varieties.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	VARIEDADES SECANTES E VARIEDADES DE VERONESE . . .	19
2.1	Variedades k -secantes	19
2.2	Variedades de Veronese	21
2.3	O Problema de Waring para polinômios	24
3	OS LEMAS DE TERRACINI	27
4	O CASO PLANO	33
5	A SEQUÊNCIA DE CASTELNUOVO E O ARGUMENTO INDUTIVO	37
5.1	A indução de Terracini	37
5.2	Exemplos em $\mathbb{P}^3$	40
6	O CASO DAS CÚBICAS	43
6.1	O grau de um esquema 0-dimensional	43
6.2	O caso das cúbicas	46
7	O CASO GERAL E O ARGUMENTO POR DEGENERAÇÃO	51
7.1	A função de Hilbert e o Lema Curvilinear	51
7.2	O caso geral	57
	REFERÊNCIAS	73
	APÊNDICE A CÁLCULOS COMPUTACIONAIS	75

INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação é apresentar uma prova do celebrado Teorema de Alexander-Hirschowitz, baseada em (ALEXANDER; HIRSCHOWITZ, 1995), a qual foi depois simplificada por Chandler em (CHANDLER, 2000) e por Brambilla e Ottaviani em (BRAMBILLA; OTTAVIANI, 2008), sendo este último artigo a nossa principal referência.

No decorrer deste trabalho vamos sempre supor que trabalhamos sobre um corpo $\mathbf{k}$ algebricamente fechado e de característica zero. Os esquemas projetivos serão sempre subesquemas fechados do espaço projetivo $\mathbb{P}^n$ para algum natural n .

O Teorema de Alexander-Hirschowitz afirma que uma coleção de k pontos duplos em posição geral em $\mathbb{P}^n$ impõe condições independentes nas hipersuperfícies de grau d , com uma pequena lista de exceções. Antes de o enunciarmos, vamos entender porque temos uma dimensão esperada e mínima para o espaço de hipersuperfícies de grau d que passam pelos k pontos duplos.

De fato, escrevendo cada polinômio homogêneo de grau d em $n + 1$ variáveis na forma

$$F = \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n},$$

podemos associar a F o ponto $[\dots : a_{i_0 \dots i_n} : \dots] \in \mathbb{P}^m$, onde $m = \binom{n+d}{n} - 1$, com $i_0 \dots i_n$ percorrendo todas as somas $i_0 + \dots + i_n = d$. Isto é, identificamos o espaço das hipersuperfícies de grau d em $\mathbb{P}^n$ com o espaço projetivo $\mathbb{P}^m$ por meio da bijeção

$$\begin{aligned} \{\text{hipersuperfícies de grau } d \text{ em } \mathbb{P}^n\} &\longleftrightarrow \mathbb{P}^m \\ \sum_{i_0 + \dots + i_n = d} a_{i_0 \dots i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n} = 0 &\longleftrightarrow [\dots : a_{i_0 \dots i_n} : \dots] \end{aligned}$$

Vamos agora impor condições sobre este espaço, supondo que todas as hipersuperfícies devam passar por um ponto duplo $p \in \mathbb{P}^n$, isto é, serem singulares no ponto p . Por uma mudança de coordenadas, podemos supor $p = [0 : \dots : 0 : 1]$. Assim, F é singular em p se, e somente

se, temos $a_{0\dots 0d} = a_{10\dots 0(d-1)} = a_{010\dots 0(d-1)} \cdots = a_{0\dots 01(d-1)} = 0$. Portanto, são impostas $n+1$ condições lineares, e segue que o subespaço das hipersuperfícies de grau d que são singulares em p corresponde a um subespaço linear de codimensão $n+1$ em $\mathbb{P}^m$.

Deste modo, o espaço das hipersuperfícies de grau d que são singulares em k pontos dados em $\mathbb{P}^n$ corresponde à intersecção em $\mathbb{P}^m$ dos k subespaços lineares de codimensão $n+1$. Dizemos então que os k pontos impõem condições independentes quando estes espaços se intersectarem transversalmente, de modo que a codimensão da intersecção é a máxima possível:

$$\min((n+1)k, m+1) = \min\left((n+1)k, \binom{n+d}{n}\right).$$

Podemos agora enunciar o teorema.

Teorema 1.1. (Alexander-Hirschowitz). *Seja X uma coleção geral de k pontos duplos em $\mathbb{P}^n$ (sobre um corpo algebricamente fechado e de característica zero) e seja $S^d V^\vee$ o espaço dos polinômios homogêneos de grau d . Seja $I_X(d) \subseteq S^d V^\vee$ o subespaço dos polinômios que passam por X , isto é, cujas primeiras derivadas parciais se anulam nos pontos de X . Então o subespaço $I_X(d)$ tem codimensão $\min\left((n+1)k, \binom{n+d}{n}\right)$, exceto nos seguintes casos:*

- $d = 2, 2 \leq k \leq n$;
- $n = 2, d = 4, k = 5$;
- $n = 3, d = 4, k = 9$;
- $n = 4, d = 3, k = 7$;
- $n = 4, d = 4, k = 14$.

Neste trabalho será apresentada a prova apenas dos casos positivos do teorema acima, isto é, dos casos em que a dimensão é a esperada. As exceções podem ser demonstradas mais facilmente examinando uma série de exemplos particulares, como encontrado em (BRAMBILLA; OTTAVIANI, 2008).

Este teorema possui uma formulação equivalente em termos da dimensão esperada de k -secantes de variedades de Veronese. Dada uma variedade projetiva Y , definimos sua *variedade k -secante* como o fecho de Zariski da união de todos os subespaços lineares gerados por k pontos em Y :

$$\sigma_k(Y) = \overline{\bigcup_{p_i \in Y} \langle p_1, \dots, p_k \rangle}.$$

Em particular, $\sigma_1(Y) = Y$ e $\sigma_2(Y)$ é a variedade secante usual formada pelo fecho da união das retas que passam por dois pontos de Y .

Considere o mergulho de Veronese de grau d : $\mathbb{P}^n \hookrightarrow V^{d,n} \subset \mathbb{P}^m$ cuja imagem $V^{d,n}$ é a chamada d -ésima variedade de Veronese de $\mathbb{P}^n$ (veja mais no capítulo 2). Visto que $V^{d,n}$

possui dimensão n , temos n graus de liberdade para escolher cada p_i , $1 \leq i \leq k$, os quais para cada escolha geram o espaço $\langle p_1, \dots, p_k \rangle$ de dimensão menor ou igual a $k - 1$. Logo, se os pontos não impõem restrições uns aos outros, a dimensão máxima esperada para $\sigma_k(V^{d,n})$ é $\min(kn + k - 1, m)$. As variedades de Veronese que não atendem a esta dimensão esperada são chamadas de k -defeituosas, e temos a seguinte versão do Teorema 1.1.

Teorema 1.2. *As variedades de Veronese defeituosas são as seguintes:*

- $V^{2,n}$ é k -defeituosa para todo $2 \leq k \leq n$;
- $V^{4,2}$ é 5-defeituosa;
- $V^{4,3}$ é 9-defeituosa;
- $V^{3,4}$ é 7-defeituosa;
- $V^{4,4}$ é 14-defeituosa.

Provaremos a equivalência dos Teoremas 1.1 e 1.2 no capítulo 3.

O teorema possui também uma aplicação direta no problema de Waring para polinômios: podemos interpretar os pontos de $V^{d,n}$ como os polinômios homogêneos de grau d em $n + 1$ variáveis que são potências d -ésimas de formas lineares, de modo que $\sigma_k(V^{d,n})$ corresponde aos que podem ser escritos como somas de k potências d -ésimas.

Sabendo, do Teorema 1.2, que $\sigma_k(V^{d,n}) = \mathbb{P}^m$ para $k \geq \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rceil$, obtemos o valor mínimo de k para o qual todos os polinômios homogêneos de grau d em $n + 1$ variáveis podem ser escritos como soma de k potências d -ésimas lineares. Veja melhor no capítulo 2.

VARIEDADES SECANTES E VARIEDADES DE VERONESE

2.1 Variedades k -secantes

Sejam V um espaço vetorial de dimensão $n + 1$ sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbf{k}$ de característica zero e $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ o espaço projetivo de dimensão n . Para $f \in V \setminus \{0\}$, denotaremos por $[f]$ tanto a reta gerada por f em V quanto o correspondente ponto em $\mathbb{P}^n$.

Seja $\mathbb{G}(1, n)$ a Grassmaniana de retas em $\mathbb{P}^n$, e seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Definimos a aplicação de retas secantes

$$s_2 : (X \times X) \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{G}(1, n)$$

que leva cada par de pontos $x, y \in X$, $x \neq y$, na reta secante $\overline{xy} \in \mathbb{G}(1, n)$. A sua imagem fechada $\mathcal{S}_2(X) \subseteq \mathbb{G}(1, n)$ é chamada a *variedade de retas secantes* a X .

Assumindo que X não é um subespaço linear de $\mathbb{P}^n$, uma reta geral $l = s_2(x, y)$ intersecta X num número finito de pontos, ou seja, a fibra genérica da aplicação s_2 é 0-dimensional, e portanto sempre temos $\dim \mathcal{S}_2(X) = \dim((X \times X) \setminus \Delta) = 2 \dim X$.

Considere agora a correspondência de incidência

$$\Sigma = \{(l, p) | p \in l, l \in \mathcal{S}_2(X)\} \subseteq \mathcal{S}_2(X) \times \mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^n.$$

Temos naturalmente as projeções em cada coordenada

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathcal{S}_2(X) & & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Observe que a projeção π_1 é sobrejetiva com fibras todas de dimensão 1, portanto, $\dim \Sigma = 2 \dim X + 1$.

Definição 2.1. Definimos a *variedade secante* $\sigma_2(X)$ de X como a imagem de Σ pela projeção π_2 , isto é,

$$\sigma_2(X) := \pi_2(\Sigma) = \overline{\bigcup_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} \overline{xy}} \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Em particular, temos que $\dim \sigma_2(X) \leq \dim \Sigma = 2 \dim X + 1$. A igualdade ocorre quando a fibra genérica de π_2 é 0-dimensional, isto é, quando o ponto genérico de $\sigma_2(X)$ pertence a apenas um número finito de retas secantes a X .

Generalizando, seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva de dimensão l . Assuma ainda que X é *não-degenerada*, isto é, que X não está contida em nenhum hiperplano. Note que, para $k \leq n$, $k+1$ pontos genéricos de uma variedade não-degenerada geram um espaço linear de dimensão k . Definimos analogamente a aplicação de k -planos secantes

$$s_{k+1} : X^{k+1} \dashrightarrow \mathbb{G}(k, n),$$

que leva $k+1$ pontos linearmente independentes no k -espaço linear $\langle x_0, \dots, x_k \rangle$ gerado por eles. Sua imagem $\mathcal{S}_{k+1}(X)$ é a *variedade dos k -planos secantes* a X .

Para $k \leq n-l$, podemos mostrar (ver (HARRIS, 1992), p. 146) que um k -espaço gerado por $k+1$ pontos genéricos de X intersecta X em finitos pontos, de forma que a fibra genérica de s_{k+1} é 0-dimensional, e portanto, $\dim \mathcal{S}_{k+1}(X) = \dim X^{k+1} = (k+1) \dim X$.

Novamente, definindo a correspondência de incidência

$$\Sigma_{k+1} = \{(l, p) | p \in l\} \subseteq \mathcal{S}_{k+1}(X) \times \mathbb{P}^n \subseteq \mathbb{G}(k, n) \times \mathbb{P}^n,$$

temos as projeções naturais

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma_{k+1} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathcal{S}_{k+1}(X) & & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Da primeira projeção obtemos que $\dim \Sigma_{k+1} = (k+1) \dim X + k$, pois cada fibra de π_1 possui dimensão k .

Definição 2.2. Definimos então a *variedade $(k+1)$ -secante* de X , $\sigma_{k+1}(X)$, como a imagem da projeção π_2 , isto é,

$$\sigma_{k+1}(X) := \pi_2(\Sigma_{k+1}) = \overline{\bigcup_{\substack{x_i \in X \\ \dim \langle x_1, \dots, x_{k+1} \rangle = k}} \langle x_1, \dots, x_{k+1} \rangle} \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Em particular,

$$\dim \sigma_{k+1}(X) \leq (k+1) \dim X + k.$$

Observe que quando o ponto genérico de $\sigma_{k+1}(X)$ pertence a apenas um número finito de k -espaços secantes temos que a fibra genérica de π_2 é 0-dimensional, e portanto a igualdade $\dim \sigma_{k+1}(X) = (k+1) \dim X + k$ é atingida.

Quando a desigualdade é estrita, dizemos que X é uma *variedade k -defeituosa*, ou ainda, que possui uma $(k+1)$ -secante defeituosa.

Temos em geral o seguinte resultado (ver (HARRIS, 1992), p.144).

Proposição 2.3. *Para $k \leq n-l$, a variedade de k -espaços secantes $\mathcal{S}_{k+1} \subseteq \mathbb{G}(k, n)$ de uma variedade não-degenerada $X \subseteq \mathbb{P}^n$ de dimensão l é irredutível e de dimensão $(k+1)l$.*

A variedade $(k+1)$ -secante $\sigma_{k+1}(X) \subseteq \mathbb{P}^n$ é irredutível e de dimensão menor ou igual a $(k+1)l+k$, com a igualdade sendo atingida se, e somente se, o ponto genérico de um k -espaço secante pertence a somente um número finito de k -espaços secantes a X .

2.2 Variedades de Veronese

Seja $S = \bigoplus_d S^d V$ a álgebra simétrica de V e $S^\vee = \bigoplus_d S^d V^\vee$ sua álgebra dual, com $S^d V^\vee$ correspondente aos polinômios homogêneos de grau d em $n+1$ variáveis.

Definição 2.4. Definimos $V^{d,n}$, a d -ésima variedade de Veronese de $\mathbb{P}^n$, como a imagem do mergulho de Veronese

$$\begin{aligned} v^{d,n} : \mathbb{P}(V) &\longrightarrow \mathbb{P}(S^d V) = \mathbb{P}^m \\ [v] &\longmapsto [v^d] \end{aligned}$$

onde $m = \binom{n+d}{n} - 1$.

Observe que se $v = [x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{P}^n$, então $[v^d]$ tem coordenadas

$$\frac{d!}{\prod_i d_i!} (x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n}).$$

Assim, reescalando $\mathbb{P}^m$ por um automorfismo, obtemos a definição usual de variedade de Veronese como sendo a imagem de $\mathbb{P}^n$ pela aplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^m \\ [x_0 : \cdots : x_n] &\longmapsto [\cdots : (x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n}) : \cdots] \end{aligned}$$

onde $(x_0^{d_0} \cdots x_n^{d_n})$ percorre todos os monômios de grau d em $n+1$ variáveis.

Em particular, no caso $n = d = 2$ temos a clássica *superfície de Veronese* $V^{2,2} \subseteq \mathbb{P}^5$ dada pelo mergulho

$$\begin{aligned} v^{2,2} : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ [x_0 : x_1 : x_2] &\longmapsto [x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2] \end{aligned}$$

A superfície de Veronese $V^{2,2}$ também possui a seguinte descrição determinantal (ver (HARRIS, 1992), p. 24): ela pode ser vista como o lugar geométrico dos pontos $[z_0 : \dots : z_5] \in \mathbb{P}^5$ tais que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} z_0 & z_3 & z_4 \\ z_3 & z_1 & z_5 \\ z_4 & z_5 & z_2 \end{bmatrix}$$

possui posto 1. Em geral, a variedade de Veronese quadrática $V^{2,n}$ pode ser interpretada como os zeros dos menores 2×2 da matriz $(n+1) \times (n+1)$ simétrica cuja entrada (i, j) é $z_{i-1, j-1}$, $i \leq j$.

Como pode ser visto em ((HARRIS, 1992), p.24), se restringirmos o mergulho de Veronese a um subespaço linear $\Lambda \cong \mathbb{P}^l \subseteq \mathbb{P}^n$, obtemos um mergulho de Veronese de $\mathbb{P}^l$, $v^{d,l} : \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{l+d}{d}-1} \subseteq \mathbb{P}^m$. Em particular, sua imagem está contida num subespaço linear de dimensão $\binom{l+d}{d} - 1$ de $\mathbb{P}^m$. Mais ainda, para qualquer subvariedade $Y \subseteq \mathbb{P}^n$, sua imagem é uma subvariedade de $\mathbb{P}^m$.

A superfície de Veronese é o exemplo clássico de variedade 2-defeituosa. Sua variedade secante $\sigma_2(V^{2,2})$ tem dimensão 4, menor que a esperada $\min(2 \dim V^{2,2} + 1, 5) = 5$.

Proposição 2.5. *A superfície de Veronese $V^{2,2}$ tem variedade secante $\sigma_2(V^{2,2})$ de dimensão 4. Em particular, $V^{2,2}$ é 2-defeituosa.*

Primeira prova. Escreva $v = v^{2,2}$ para o mergulho de Veronese. Seja $r \in \mathbb{P}^5$ um ponto geral da variedade secante $\sigma_2(V^{2,2})$, pertencente à reta secante $\overline{v(p)v(q)}$, com $p, q \in \mathbb{P}^2$.

Denote por $L \cong \mathbb{P}^1$ a reta determinada por p e q em $\mathbb{P}^2$. Pela observação acima, v leva L em uma cônica plana $C \subseteq V^{2,2}$. Como $r \in \overline{v(p)v(q)}$, r pertence ao plano Λ que contém C , logo, a reta geral em Λ que passa por r corta C em dois pontos, sendo portanto uma secante de $V^{2,2}$. Assim, mostramos que um ponto geral de $\sigma_2(V^{2,2})$ pertence a infinitas secantes, ou seja, a fibra genérica da projeção π_2 possui dimensão positiva, e portanto, $\dim \sigma_2(V^{2,2}) \leq 4$.

Figura obtida de (HARRIS, 1992), p.144.

Por outro lado, fixado um ponto $x \in V^{2,2}$, o cone $\overline{xV^{2,2}}$ de todas as retas secantes a $V^{2,2}$ que passam por x é uma subvariedade de $\sigma_2(V^{2,2})$ de dimensão 3. Como existem secantes a $V^{2,2}$ que não passam por x , temos que $\overline{xV^{2,2}}$ é uma subvariedade própria de $\sigma_2(V^{2,2})$, e então $\dim \sigma_2(V^{2,2}) > 3$. Portanto, $\dim \sigma_2(V^{2,2}) = 4$. $\square$

Segunda prova. Usaremos a descrição determinantal de $V^{2,2}$. Note que todo ponto de uma reta secante é combinação linear

$$\lambda[a_0 : \dots : a_5] + \mu[b_0 : \dots : b_5], \quad \lambda, \mu \in \mathbf{k},$$

de pontos $[a_0 : \dots : a_5]$ e $[b_0 : \dots : b_5]$ na superfície de Veronese. Correspondem portanto a uma matriz

$$\lambda \begin{bmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_0 & b_3 & b_4 \\ b_3 & b_1 & b_5 \\ b_4 & b_5 & b_2 \end{bmatrix},$$

a qual é soma de duas matrizes de posto 1, e portanto, possui posto no máximo 2. De fato, pensando nas matrizes como operadores lineares, um vetor na imagem da soma é combinação linear de vetores na imagem de cada parcela da soma. Como as duas parcelas têm imagem de dimensão 1, a soma terá imagem de dimensão menor ou igual a 2. Portanto, o ponto $\lambda[a_0 : \dots : a_5] + \mu[b_0 : \dots : b_5]$ pertence à hipersuperfície de equação $\det M = 0$, e assim, $\dim \sigma_2(V^{2,2}) \leq 4$.

Reciprocamente, se um ponto $[a_0 : \dots : a_5]$ pertence à hipersuperfície ($\det M = 0$), então sua matriz associada M_A tem posto no máximo 2. Como ela é simétrica, é diagonalizável (veja (LANG, 2002), p.575): existe uma matriz invertível A tal que $M_A = ADA^T$, onde D é uma matrix diagonal de mesmo posto que M . Podemos então escrever

$$M_A = ADA^T = A \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A^T = A \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A^T + A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A^T = M_1 + M_2,$$

com M_1 e M_2 matrizes de posto menor ou igual a 1. Portanto, $[a_0 : \cdots : a_5]$ pertence à variedade secante $\sigma_2(V^{2,2})$, e concluímos que $\sigma_2(V^{2,2}) = (\det M = 0)$, que possui dimensão 4. $\square$

Proposição 2.6. *Seja $X = V^{d,1} \subseteq \mathbb{P}^d$ a curva normal racional. A variedade secante $\sigma_{k+1}(X)$ possui dimensão $\min(2k+1, d)$. Isto é, a curva normal racional é não-defeituosa.*

Prova. Suponha primeiro que $2k+1 \leq d$. Seja $U \subseteq \mathcal{S}_{k+1}(X)$ um aberto de k -espaços gerados por $k+1$ pontos gerais de X . Note que $U \neq \emptyset$, pois X é não-degenerada (ver (HARRIS, 1992), p. 10). Basta mostrar que um ponto genérico de um k -espaço $\Lambda \in U$ gerado por pontos $p_1, \dots, p_{k+1} \in X$ pertence a somente um k -espaço secante a X . Seja então $\Lambda' \in U$ um outro k -espaço secante a X , gerado por $q_1, \dots, q_{k+1} \in X$. Como pode ser visto em (HARRIS, 1992), p.10, quaisquer $d+1 \geq 2(k+1)$ pontos distintos na curva normal racional são linearmente independentes. Logo, a intersecção $\Lambda \cap \Lambda'$ é o espaço gerado por $\{p_1, \dots, p_{k+1}\} \cap \{q_1, \dots, q_{k+1}\}$. Em particular, é o espaço gerado por um subconjunto próprio de $\{p_1, \dots, p_{k+1}\}$. Portanto, apenas uma união finita de subespaços fechados próprios de Λ contém pontos que pertencem a outros k -espaços secantes, e portanto, o ponto genérico de Λ pertence a apenas um k -espaço secante a X .

Para $2k+1 = d$, temos então que $\dim \sigma_{k+1}(X) = d$, logo $\sigma_{k+1}(X) = \mathbb{P}^d$. E como $\sigma_{k'}(X) \supseteq \sigma_k(X)$ para $k' \geq k$, também temos que $\sigma_k(X) = \mathbb{P}^d$ para $2k+1 > d$. $\square$

A Proposição 2.6 acima demonstra o caso $n = 1$ do Teorema 1.2. Este, por sua vez, é equivalente ao caso $n = 1$ do Teorema 1.1, como mostraremos no Capítulo 3. E de fato, dados k pontos em $\mathbb{P}^1$ o espaço dos polinômios homogêneos F de grau d em 2 variáveis que anulam os k pontos com multiplicidade 2 tem sempre a dimensão esperada:

Se $2k \leq d$, e $[a_i : b_i] \in \mathbb{P}^1$, $i = 1, \dots, k$ são os k pontos, então F se escreve como

$$F = \left(\prod_{i=1}^k (b_i X_0 - a_i X_1)^2 \right) G,$$

onde G é um polinômio homogêneo de grau $d - 2k$ qualquer. Como apenas G está livre, temos então a dimensão vetorial do espaço de polinômios homogêneos de grau $d - 2k$, a qual é igual a $d - 2k + 1$, que de fato é a esperada. Se $2k > d$, então é claro que F não pode ter k raízes duplas, e portanto a dimensão é 0, que é a esperada.

O caso $n = 1$, inclusive, é o único em que a posição dos k pontos não importa, e não precisamos da hipótese de eles serem gerais.

2.3 O Problema de Waring para polinômios

Em Teoria dos Números, o famoso Problema de Waring questiona se, dado um natural d , existe um número k tal que todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de k potências

d -ésimas de inteiros não-negativos. Resolvido positivamente por David Hilbert em 1909, ainda está em aberto encontrar o número mínimo k de d -ésimas potências necessárias para dado d . Denotemos por $g(d)$ este mínimo k .

O Teorema dos Quatro Quadrados de Lagrange (1770) estabelece que $g(2) = 4$, ou seja, todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de quatro quadrados. Já foram demonstrados também que $g(3) = 9$ (Wieferich e A. J. Kempner, 1909 a 1912), $g(4) = 19$ (R. Balasubramanian, F. Dress, e J.-M. Deshouillers, 1986), $g(5) = 37$ (Chen Jingrun, 1964) e $g(6) = 73$ (Pillai, 1940).

Uma versão análoga do Problema de Waring pode ser formulada para polinômios questionando qual é o menor número k necessário para escrever qualquer polinômio de grau d em n variáveis como soma de k potências d -ésimas de polinômios lineares.

Homogeneizando, é equivalente encontrar o menor k tal que todo polinômio homogêneo de grau d em $n + 1$ variáveis pode ser escrito como soma de k potências d -ésimas de formas lineares. Surpreendentemente, este problema equivale a encontrar a menor k -secante $\sigma_k(V^{d,n})$ da variedade de Veronese que ocupa todo o espaço $\mathbb{P}^m$, $m = \binom{n+d}{n} - 1$, de maneira a ser resolvido pelo Teorema 1.2.

Para mostrar esta equivalência, considere o espaço dos polinômios homogêneos de grau d em $n + 1$ variáveis $x_0, \dots, x_n$. Por meio da correspondência

$$a_0 x_0^d + a_1 x_0^{d-1} x_1 + \dots + a_n x_n^d \longmapsto [a_0 : a_1 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^m,$$

podemos interpretá-los como pontos do espaço $\mathbb{P}^m$.

Dada a definição usual do mergulho de Veronese

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^m \\ [x_0 : \dots : x_n] &\longmapsto [\dots : (x_0^{d_0} \dots x_n^{d_n}) : \dots] \end{aligned}$$

temos que a variedade de Veronese $V^{d,n} \subseteq \mathbb{P}^m$ corresponde exatamente aos polinômios que são d -ésimas potências de formas lineares. De fato, cada

$$(a_0 z_0 + \dots + a_n z_n)^d = a_0^d z_0^d + d \cdot a_0^{d-1} a_1 z_0^{d-1} z_1 + \dots + a_n^d z_n^d$$

corresponde ao ponto

$$[a_0^d : \dots : a_n^d] = v^{d,n}([a_0 : \dots : a_n])$$

da variedade de Veronese, e vice-versa.

Observe agora que os pontos da k -secante $\sigma_k(V^{d,n})$ são combinações lineares de k pontos em $V^{d,n}$,

$$\lambda_1 [a_{0,1}^d : \dots : a_{n,1}^d] + \dots + \lambda_k [a_{0,k}^d : \dots : a_{n,k}^d],$$

que corresponde à soma de k potências d -ésimas (quando $\lambda_i = 0$ o termo correspondente da soma é 0)

$$\left(\frac{a_{0,1}}{\lambda_1^{1/d}} x_0 + \cdots + \frac{a_{n,1}}{\lambda_1^{1/d}} x_n \right)^d + \cdots + \left(\frac{a_{0,k}}{\lambda_k^{1/d}} x_0 + \cdots + \frac{a_{n,k}}{\lambda_k^{1/d}} x_n \right)^d.$$

Reciprocamente, se um polinômio homogêneo de grau d em $n+1$ variáveis é soma de k potências d -ésimas de formas lineares, então pela correspondência acima ele pertence à variedade k -secante da variedade de Veronese $V^{d,n}$.

A menos da lista de exceções dada, o Teorema 1.2 afirma que a variedade de Veronese é não-defeituosa, ou seja, $\dim \sigma_k(V^{d,n}) = \min((n+1)k-1, m)$. Com isto, temos que todo polinômio homogêneo de grau d será expresso como soma de k potências d -ésimas se, e somente se, $k \geq \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rceil$, que é quando temos $\sigma_k(V^{d,n}) = \mathbb{P}^m$.

OS LEMAS DE TERRACINI

Definimos o produto não-degenerado natural $S^d V \otimes S^d V^\vee \rightarrow \mathbf{k}$ linearmente a partir de

$$S^d V \otimes S^d V^\vee \longrightarrow \mathbf{k}$$

$$v \otimes x = (v_1 \cdots v_d) \otimes (x_1 \cdots x_d) \longmapsto x_1(v_1) \cdots x_d(v_d) = (v, x)$$

o qual denotaremos por $(\cdot, \cdot)$. Em particular, pensando em $S^\vee = \bigoplus_d S^d V^\vee$ como o espaço de polinômios em $n+1$ variáveis, temos que $[f] \in \mathbb{P}^n$ é zero de $h \in S^d V^\vee \Leftrightarrow (f^d, h) = 0$.

Desta forma, o ideal maximal correspondente ao ponto $[f] \in \mathbb{P}^n$ é

$$m_{[f]} = \{h \in S^\vee \mid h(f) = 0\},$$

o qual é formado por todas as hipersuperfícies que passam pelo ponto $[f]$. Seu quadrado $m_{[f]}^2$ é o ideal de todas as hipersuperfícies que são singulares em $[f]$.

Se $f \in V$, o espaço tangente a $V^{d,n}$ por $[f^d]$ é dado por

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon} (f + \varepsilon g)^d \right]_{\varepsilon=0} = \left[\frac{d}{d\varepsilon} \left(f^d + d f^{d-1} \varepsilon g + O(\varepsilon^2) \right) \right]_{\varepsilon=0} = [d f^{d-1} g] = [f^{d-1} g], \quad g \in V,$$

ou seja, $T_{[f^d]} V^{d,n} = \{[f^{d-1} g] \mid g \in V\}$.

Proposição 3.1. (Lasker). *Dado $T_{[f^d]} V^{d,n}$, seu ortogonal com relação ao produto $(\cdot, \cdot)$ acima $(T_{[f^d]} V^{d,n})^\perp$ consiste em todas as hipersuperfícies de grau d singulares em $[f]$. Mais precisamente, se denotarmos por $C(V^{d,n})$ o cone afim sobre $V^{d,n}$, então*

$$\left(T_{[f^d]} C(V^{d,n}) \right)^\perp = \left(m_{[f]}^2 \right)_d \subseteq S^d V^\vee.$$

Antes de demonstrarmos a proposição, note que o cone afim de um espaço tangente é o espaço tangente do cone afim, isto é, se $[p] \in Y \subset \mathbb{P}^n$, então $C(T_{[p]} Y) = T_p C(Y)$. De fato, Y é

$C(Y)$ são zeros (em $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{A}^{n+1}$, respectivamente) do mesmo conjunto de polinômios homogêneos, logo, $C(T_{[p]}Y)$ e $T_p C(Y)$ são zeros das mesmas formas lineares destes polinômios.

Consequentemente, temos

$$T_{fd}C(V^{d,n}) = C(T_{[fd]}V^{d,n}) = C(\{[f^{d-1}g] | g \in V\}) = \{\lambda f^{d-1}g | g \in V, \lambda \in \mathbf{k}\}.$$

Prova da Proposição. Seja $e_0, \dots, e_n$ a base canônica de V e $x_0, \dots, x_n$ sua base dual. Por uma mudança linear de coordenadas podemos assumir $f = e_0$. Neste caso,

$$m_{[f]} = (x_1, \dots, x_n) \Rightarrow m_{[f]}^2 = (x_1^2, x_1x_2, x_2^2, \dots, x_n^2),$$

logo,

$$\begin{aligned} \left(m_{[f]}^2\right)_d &= (\{\text{monômios de grau } d, \text{ exceto } x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \dots, x_0^{d-1}x_n\}) \\ &= \left(\left\langle e_0^d, e_0^{d-1}e_1, \dots, e_0^{d-1}e_n \right\rangle\right)^\perp = \left(T_{e_0^d}C(V^{d,n})\right)^\perp \end{aligned}$$

pela observação acima. □

Lema 3.2. (*Primeiro Lema de Terracini*). Seja $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Sejam $p_1, \dots, p_k \in Y$ pontos gerais e $z \in \langle p_1, \dots, p_k \rangle$ um ponto geral. Então

$$T_z \sigma_k(Y) = \langle T_{p_1}Y, \dots, T_{p_k}Y \rangle.$$

Prova. Seja $Y(\tau_1, \dots, \tau_n) = Y(\tau)$ uma parametrização local de Y e denote por $Y_j(\tau) = \frac{\partial Y}{\partial \tau_j}(\tau)$ a derivada parcial com relação a τ_j .

Seja $p_i = Y(\tau^i) = Y(\tau_1^i, \dots, \tau_n^i)$, $i = 1, \dots, k$. Então cada $T_{p_i}Y$ é gerado por $\{Y_1(\tau^i), \dots, Y_n(\tau^i)\}$, e seu cone afim por $\{Y(\tau^i), Y_1(\tau^i), \dots, Y_n(\tau^i)\}$. Logo, $\langle T_{p_1}Y, \dots, T_{p_k}Y \rangle$ tem seu cone afim gerado pelas linhas da matriz abaixo.

$$\begin{bmatrix} Y(\tau^1) \\ Y_1(\tau^1) \\ \vdots \\ Y_n(\tau^1) \\ \vdots \\ Y(\tau^i) \\ Y_1(\tau^i) \\ \vdots \\ Y_n(\tau^i) \\ \vdots \\ Y(\tau^k) \\ Y_1(\tau^k) \\ \vdots \\ Y_n(\tau^k) \end{bmatrix}$$

Já os pontos de $\sigma_k(Y)$ são dados por combinações lineares

$$\lambda_1 Y(\tau^1) + \cdots + \lambda_{k-1} Y(\tau^{k-1}) + \lambda_k Y(\tau^k) = \frac{\lambda_1}{\lambda_k} Y(\tau^1) + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} Y(\tau^{k-1}) + Y(\tau^k),$$

para $\lambda_i \in \mathbf{k}$, $\lambda_k \neq 0$. Logo, uma parametrização local de $\sigma_k(Y)$ é dada por

$$\Phi(\tau^1, \dots, \tau^k, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i Y(\tau^i) + Y(\tau^k).$$

Da mesma forma, o espaço tangente de $\sigma_k(Y)$ tem cone afim gerado por $\Phi(\tau^1, \dots, \tau^k, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ e suas derivadas parciais, isto é, pelas linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i Y(\tau^i) + Y(\tau^k) \\ \lambda_1 Y_1(\tau^1) \\ \vdots \\ \lambda_1 Y_n(\tau^1) \\ \vdots \\ \lambda_i Y(\tau^i) \\ \vdots \\ \lambda_i Y_n(\tau^i) \\ \vdots \\ Y_1(\tau^k) \\ \vdots \\ Y_n(\tau^k) \\ Y(\tau^1) \\ \vdots \\ Y(\tau^{k-1}) \end{bmatrix}$$

Assumindo $\lambda_i \neq 0$, $\forall i$ (podemos, pois z é ponto genérico), uma matriz é claramente obtida da outra por operações elementares nas linhas, logo, geram o mesmo espaço. Segue portanto que

$$C(T_z \sigma_k(Y)) = C(\langle T_{p_1} Y, \dots, T_{p_k} Y \rangle) \Rightarrow T_z \sigma_k(Y) = \langle T_{p_1} Y, \dots, T_{p_k} Y \rangle.$$

□

Podemos agora utilizar Lasker e o Lema de Terracini para estabelecer a relação entre os Teoremas 1.1 e 1.2 e mostrar a sua equivalência.

Proposição 3.3. *Os Teoremas 1.1 e 1.2 são equivalentes.*

Prova. Seja $X = \{p_1^2, \dots, p_k^2\}$ coleção de pontos duplos em $\mathbb{P}^n$ e sejam $v_i \in V$ representantes, $[v_i] = p_i$. Por definição, $I_X(d) = \bigcap_{i=1}^k [m_{p_i}^2]_d$. Por Lasker,

$$I_X(d) = \bigcap_{i=1}^k [m_{p_i}^2]_d = \bigcap_{i=1}^k \left(T_{v_i}^d C(V^{d,n}) \right)^\perp = \left(\left\langle T_{v_1}^d C(V^{d,n}), \dots, T_{v_k}^d C(V^{d,n}) \right\rangle \right)^\perp.$$

Então a codimensão de $I_X(d)$ é igual a dimensão de $\langle T_{v_1^d}C(V^{d,n}), \dots, T_{v_k^d}C(V^{d,n}) \rangle$.

Note que

$$\begin{aligned} \langle T_{v_1^d}C(V^{d,n}), \dots, T_{v_k^d}C(V^{d,n}) \rangle &= \langle C(T_{[v_1^d]}V^{d,n}), \dots, C(T_{[v_k^d]}V^{d,n}) \rangle \\ &= C(\langle T_{[v_1^d]}V^{d,n}, \dots, T_{[v_k^d]}V^{d,n} \rangle), \end{aligned}$$

logo, a dimensão de $\langle T_{v_1^d}C(V^{d,n}), \dots, T_{v_k^d}C(V^{d,n}) \rangle$ é igual a (dimensão projetiva)

$$\dim \langle T_{[v_1^d]}V^{d,n}, \dots, T_{[v_k^d]}V^{d,n} \rangle + 1.$$

Portanto, pelo Primeiro Lema de Terracini,

$$\dim \sigma_k(V^{d,n}) + 1 = \text{codim } I_X(d),$$

do que segue a equivalência dos Teoremas 1.1 e 1.2. □

A partir de agora, trabalharemos para provar o resultado na forma do Teorema 1.1. Introduzimos a noção de condições independentes e provaremos o Segundo Lema de Terracini, o qual será a principal ferramenta para resolvermos o problema no caso plano.

Definição 3.4. Diremos que uma coleção X de k pontos duplos impõe *condições independentes* em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ se a codimensão de $I_X(d)$ em $S^dV^\vee$ é

$$\min \left\{ \binom{n+d}{n}, k(n+1) \right\},$$

que é a esperada e máxima possível.

Observe que se $\text{codim } I_X(d) = k(n+1)$ e $X' \subset X$, $|X'| = k'$, então $\text{codim } I_{X'}(d) = k'(n+1)$, pois como cada ponto impõe no máximo $n+1$ restrições, se os pontos de X' não impusessem todos $n+1$, então adicionar mais pontos não nos daria $k(n+1)$ com k pontos.

Se $\text{codim } I_X(d) = \binom{n+d}{n}$ e $X'' \supset X$, então $\text{codim } I_{X''}(d) = \binom{n+d}{n}$, pois $\text{codim } I_{X''}(d) \geq \text{codim } I_X(d)$.

Pela semicontinuidade da função de Hilbert (veja Capítulo 7), dado um conjunto X de k pontos duplos numa posição particular, temos que

$$\text{codim } I_X(d) \leq \text{codim } I_Y(d),$$

onde Y é uma configuração geral de k pontos duplos. Isto é, o caso geral é também o que impõe mais restrições. Dessa forma, para mostrar que k pontos gerais impõem condições independentes, é suficiente encontrar quaisquer k pontos que o façam.

Lema 3.5. (Segundo Lema de Terracini). Seja X uma união de k pontos duplos $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}^n$. Identificamos cada p_i com sua imagem em $V^{d,n}$ segundo o mergulho de Veronese.

Assuma que X não impõe condições independentes em hipersuperfícies de grau d . Então existe uma variedade de dimensão positiva $C \subseteq V^{d,n}$ que passa por $p_1, \dots, p_k$ e tal que se $p \in C$, então $T_p V^{d,n} \subseteq \langle T_{p_1} V^{d,n}, \dots, T_{p_k} V^{d,n} \rangle$. Em particular, toda hipersuperfície de grau d que é singular em cada p_i é também singular em toda C .

Prova. Seja $z \in \langle p_1, \dots, p_k \rangle$ um ponto geral. Pelo Primeiro Lema de Terracini, temos

$$T_z \sigma_k(V^{d,n}) = \langle T_{p_1} V^{d,n}, \dots, T_{p_k} V^{d,n} \rangle.$$

Considere agora, como no capítulo 2, a correspondência de incidência

$$\Sigma_k = \{(l, p) | p \in l\} \subseteq \mathcal{S}_k(V^{d,n}) \times \mathbb{P}^m \subseteq \mathbb{G}(k, m) \times \mathbb{P}^m,$$

junto das projeções naturais

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma_k & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ \mathcal{S}_k(V^{d,n}) & & \sigma_k(V^{d,n}) \subseteq \mathbb{P}^n \end{array}$$

Como vimos, Σ_k tem dimensão $k \dim(V^{d,n}) + (k-1) = (n+1)k-1$, que é a dimensão esperada para $\sigma_k(V^{d,n})$. Por hipótese, $\dim \sigma_k(V^{d,n}) < k(n+1)-1$ é menor que a esperada, logo, a fibra genérica Q_z da projeção π_2 possui dimensão positiva. Observe que $l = \langle p_1, \dots, p_k \rangle \in Q_z$, e para qualquer $\langle q_1, \dots, q_k \rangle \in Q_z$, com $q_i \in V^{d,n}$ temos que

$$T_{q_1} V^{d,n} \subseteq \langle T_{p_1} V^{d,n}, \dots, T_{p_k} V^{d,n} \rangle,$$

pois $T_{q_1} V^{d,n} \subseteq T_z \sigma_k(V^{d,n}) = \langle T_{p_1} V^{d,n}, \dots, T_{p_k} V^{d,n} \rangle$, já que

$$z \in \langle q_1, \dots, q_k \rangle \text{ e } z \in \langle p_1, \dots, p_k \rangle.$$

Considere agora a projeção $\pi : \Sigma_k \rightarrow V^{d,n}$ dada por $\pi(\langle q_1, \dots, q_k \rangle) = q_1$, para $q_i \in V^{d,n}$. Logo, a projeção de Q_z por π é a variedade C procurada. Ela tem dimensão positiva, pois senão haveria apenas finitos q_1 distintos em Q_z e, notando que os q_i são simétricos, teríamos apenas finitos $\langle q_1, \dots, q_k \rangle$ em Q_z , e portanto, Q_z teria dimensão zero.

Por fim, veja que se F é hipersuperfície de grau d singular em $p_1, \dots, p_k$, então pela Proposição 3.1,

$$F \in \bigcap_{i=1}^k (m_{p_i}^2)_d = \bigcap_{i=1}^k (T_{p_i} V^{d,n})^\perp = \left(\langle T_{p_1} V^{d,n}, \dots, T_{p_k} V^{d,n} \rangle \right)^\perp \subseteq (T_p V^{d,n})^\perp = (m_p^2)_d,$$

para todo $p \in C$, ou seja, F é singular em C . □

O CASO PLANO

Neste capítulo, vamos demonstrar o Teorema 1.1 no caso plano $n = 2$, incluindo as duas exceções.

Teorema 4.1. *Uma união geral de pontos duplos $X \subseteq \mathbb{P}^2$ impõe condições independentes em curvas planas de grau d , exceto nos casos*

- $d = 2$, X dado por 2 pontos duplos;
- $d = 4$, X dado por 4 pontos duplos.

Prova. Vamos primeiro resolver alguns casos pequenos.

Apenas por ora, denotemos por $I_k(d) := I_{\{p_1^2, \dots, p_k^2\}}(d)$ para $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{P}^2$ pontos gerais. Denotamos também por $I(p, X \cap Y)$ o índice de intersecção das curvas X e Y no ponto p .

- Para $d = 1$, não há reta com ponto duplo, logo, $\dim I_k(1) = 0$, como esperado.
- Se $d = 2$, temos os casos:

- * $k = 1$. A primeira restrição é sempre independente.
- * $k = 2$. Seja C cônica singular nos pontos p_1 e p_2 e L a reta passando por eles. Como

$$I(p_1, C \cap L) + I(p_2, C \cap L) \geq 2 + 2 = 4 > 2 = \deg C \cdot \deg L,$$

temos pelo Teorema de Bézout que L é componente de C , e portanto, $C = L^2$, que é dupla nos dois pontos.

Temos então que $\dim I_2(2) = 1$, enquanto que dimensão esperada é $\binom{2+2}{2} - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$.

- * $k \geq 3$. Repetindo o argumento acima, vemos que não há cônica por 3 pontos duplos gerais, logo a dimensão é 0, que é a esperada.

• Para $d = 3$ temos:

- * $k \leq 3$. Seja C cúbica singular nos pontos p_1, p_2, p_3 e seja L_1 (respectivamente L_2 e L_3) a reta que passa por p_1, p_2 (respectivamente p_1, p_3 e p_2, p_3). Como

$$I(p_1, C \cap L_1) + I(p_2, C \cap L_1) \geq 2 + 2 = 4 > 3 = \deg C \cdot \deg L,$$

segue por Bézout que L_1 é componente de C . Analogamente para L_2 e L_3 , obtemos que $C = L_1 L_2 L_3$. Portanto, $\dim I_3(3) = 1$, que é a esperada. Além disto, como 3 pontos reduzem a dimensão como esperado, temos que 1 e 2 pontos também impõem condições independentes.

- * $k \geq 4$. Pelo argumento acima, não existe cúbica singular em 4 pontos gerais. Logo, a dimensão é 0, que é a esperada.

• Seja $d = 4$. Antes de examinar os casos, vamos provar a seguinte afirmação

Afirmação. Existe exatamente uma cônica passando por 5 pontos gerais em $\mathbb{P}^2$, e esta cônica é não-singular.

Note que, começando com $\mathbb{P}^5 =$ (o espaço das cônicas em $\mathbb{P}^2$), cada ponto simples que adicionamos como restrição reduz no máximo em 1 a sua dimensão. Logo, 5 pontos reduzem em no máximo 5 a dimensão de $\mathbb{P}^5$, e portanto existe pelo menos uma cônica passando pelos 5 pontos gerais dados (equivalentemente, estamos intersectando 5 hiperplanos em $\mathbb{P}^5$). Além disto, se esta cônica fosse singular, então seria um par de retas, mas como existe apenas um número finito de pares de retas que passam por 4 pontos gerais, o quinto ponto geral não pertence a nenhum dos pares, e portanto, não estaria na cônica.

Para a unicidade, veja que se C_1 e C_2 são cônicas passando pelos 5 pontos gerais $p_1, \dots, p_5$, então

$$\sum_{i=1}^5 I(p_i, C_1 \cap C_2) \geq 5 > 4 = \deg C_1 \cdot \deg C_2,$$

e por Bézout, C_1 e C_2 têm componente em comum. Como são irredutíveis, segue que $C_1 = C_2$.

Deste modo, temos que a dimensão de cônicas passando por 5 pontos distintos é a esperada, o que implica que a dimensão de cônicas por 4 pontos precisa também ser a esperada, que é igual a 1 em $\mathbb{P}^5$ (dimensão projetiva). Ou seja, temos um $\mathbb{P}^1$ de cônicas passando por 4 pontos gerais em $\mathbb{P}^2$.

Vamos agora aos casos:

- * $k \leq 4$. Seja Q quártica singular nos pontos $p_1, \dots, p_4$ e tome C a cônica que passa por $p_1, \dots, p_4$ e por um quinto ponto $p \in Q$. Então

$$\sum_{i=1}^4 I(p_i, Q \cap C) + I(p, Q \cap C) \geq 9 > 8 = \deg Q \cdot \deg C,$$

logo, por Bézout, C e Q têm componente em comum. Se C é irredutível, então C é componente de Q . Caso contrário, $C = LL'$ é um par de retas que passa pelos 4 pontos gerais, com cada reta passando por 2 dos pontos, e uma delas, digamos L , é uma componente de Q . Então $Q = LD$ é o produto de L com uma cúbica D , a qual é singular nos dois pontos em L' . Sejam p_1 e p_2 estes pontos de L' , temos então

$$I(p_1, L' \cap D) + I(p_2, L' \cap D) \geq 4 > 3 = \deg L' \cdot \deg D.$$

Logo, por Bézout, L' é componente de D .

De toda a forma, temos que $Q = CC'$ é o produto de duas cônicas que passam por $p_1, \dots, p_4$. E reciprocamente, todo produto de tais cônicas nos dá uma quártica singular nos 4 pontos. Como temos um $\mathbb{P}^1$ de cônicas passando por $p_1, \dots, p_4$, e podemos escolher C e C' livremente deste $\mathbb{P}^1$, segue que temos um $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de quárticas Q , o que possui dimensão projetiva 2 e afim 3, a qual é a esperada.

- * $k = 5$. Como vimos, uma quártica singular em 4 pontos contém uma cônica que passa por eles, e existe exatamente uma cônica passando por 5 pontos dados. Portanto, a única quártica singular em 5 pontos dados é a cônica dupla. Logo, $\dim I_5(4) = 1$, enquanto a esperada é $\binom{4+2}{2} - 5 \cdot 3 = 15 - 15 = 0$.
- * $k \geq 6$. Pelo argumento acima, 5 pontos gerais determinam a quádrlica, logo não existem quárticas singulares em $k \geq 6$ pontos gerais, isto é, $\dim I_k(4) = 0$, que é a esperada.

Vamos agora lidar com o caso geral. Seja X a união de k pontos duplos gerais e suponha que X não impõe condições independentes em curvas de grau d em $\mathbb{P}^2$.

Pelo Segundo Lema de Terracini, se F é uma curva de grau d que passa por X , então F possui uma componente C , curva dupla de grau $2l$, também passando por X . Temos, claro, $2l \leq d$.

Além disto, pensando em $\mathbb{P}^{l(l+3)/2}$ como o espaço das curvas de grau l (note que $l(l+3)/2 = \binom{l+2}{2} - 1$), a cada ponto geral que impomos que a curva C deve passar, reduzimos sua dimensão de 1, logo, para que exista tal C através de k pontos gerais, precisamos ter $k \leq l(l+3)/2$.

Vendo agora $\mathbb{P}^m$ como o espaço das curvas de grau d , observe que a cada ponto duplo pelo qual F deve passar, a dimensão cai no máximo de $3 = n + 1$. Logo, o número máximo de pontos duplos impondo condições independentes é $\left\lfloor \frac{1}{3} \binom{d+2}{2} \right\rfloor$. Considerando que adicionamos o número máximo de pontos até que a dimensão de $I_k(d)$ caia para 0, podemos supor que $k \geq \left\lfloor \frac{1}{3} \binom{d+2}{2} \right\rfloor$.

Obtemos portanto as desigualdades

$$2l \leq d, \quad k \leq l(l+3)/2 \quad \text{e} \quad k \geq \left\lfloor \binom{d+2}{2} \frac{1}{3} \right\rfloor.$$

Logo,

$$\left\lfloor \frac{1}{6}(d+2)(d+1) \right\rfloor \leq k \leq \frac{l(l+3)}{2} \leq \frac{d}{4} \left(\frac{d}{2} + 3 \right) \quad (4.1)$$

Em particular, temos que

$$\frac{1}{6}(d+2)(d+1) - 1 \leq \frac{d}{4} \left(\frac{d}{2} + 3 \right) \Leftrightarrow d^2 - 6d - 16 \leq 0 \Rightarrow d \leq 8.$$

Testando os casos na desigualdade (4.1) acima, só restam $d \leq 4$, os quais já foram verificados, e $d = 6$.

Para $d = 6$, substituindo em (4.1) temos

$$\left\lfloor \frac{1}{6}(d+2)(d+1) \right\rfloor = 9 = \frac{d}{4} \left(\frac{d}{2} + 3 \right),$$

que é uma igualdade, logo devem ser atingidas igualdades em todas as três desigualdades de (4.1), isto é, temos

$$k = l(l+3)/2 = \frac{d}{4} \left(\frac{d}{2} + 3 \right) = 9.$$

Assim, devemos procurar pelas curvas de grau 6 que são singulares em 9 pontos duplos gerais. Pelo Segundo Lema de Terracini, esta curva possui uma componente dupla passando pelos 9 pontos, a qual deve ser uma cúbica, pois cônicas já são determinadas por apenas 5 pontos. Pelo grau, a curva deve ser a própria cúbica dupla. Além disto, existe apenas uma cúbica por 9 pontos simples gerais, visto que o espaço das cúbicas em $\mathbb{P}^2$ tem dimensão $3 \cdot (3+3)/2 = 9$ e cada ponto simples geral reduz a dimensão em 1. Desta forma, $\dim I_9(6) = 1$, que é a esperada.

Obtemos portanto, por contradição, que k pontos duplos (com $k \geq \left\lfloor \frac{1}{3} \binom{d+2}{2} \right\rfloor$ máximo como escolhido acima) impõem condições independentes, e como para k maiores a dimensão esperada é 0, segue o teorema. $\square$

A SEQUÊNCIA DE CASTELNUOVO E O ARGUMENTO INDUTIVO

5.1 A indução de Terracini

Lembramos que, pela semicontinuidade da função de Hilbert, se um dado conjunto de k pontos impõem condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, então k pontos gerais também impõem. Logo, basta provar que existe uma configuração particular de pontos para os quais $I_X(d)$ tem dimensão esperada.

A partir disto, a ideia do argumento de Terracini é especializar u dos k pontos num hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^n$, onde podemos aplicar indução para estimar a dimensão de $I_X(d)$. Como veremos no Teorema 5.4, este método possibilita a solução de muitos casos, mas encontra problemas aritméticos com o limite das dimensões dos espaços $S^d V^\vee$ ao precisarmos garantir as desigualdades (i) ou (ii) do teorema.

Considere $X \subseteq \mathbb{P}^n$ um subesquema fechado e $H \subseteq \mathbb{P}^n$ um hiperplano. Denotamos por $\mathcal{I}_X$ o feixe de ideais que define X .

Definimos o *traço* de X com relação a H como o esquema $X \cap H$, e o *residual* de X com respeito a H como sendo o esquema fechado $\tilde{X}$ com feixe de ideais $\mathcal{I}_{\tilde{X}} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-H)$.

Vamos calcular o traço e o residual no caso particular de pontos duplos em $\mathbb{P}^n$.

Lema 5.1. *Se $\{p\}^2$ é um ponto duplo com suporte em $p \in H$, então seu traço é o ponto duplo $\{p\}_{|H}^2$ contido em H , e seu residual é o ponto simples $\{p\}$ em $\mathbb{P}^n$.*

Prova. Residual. Tomando uma carta afim que contém p , o ponto duplo corresponde ao ideal maximal ao quadrado $\mathfrak{m}_p^2 \subseteq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{A}^n)$. Vamos denotar por I_X o ideal

afim de um esquema X nesta carta, e também por H a equação do hiperplano H na carta. Então $I_{\widetilde{\{p\}^2}} = \mathfrak{m}_p^2 : (H)$. Como $p \in H$, então $\mathfrak{m}_p \supseteq (H)$, logo $g \in \mathfrak{m}_p \Rightarrow gH \in \mathfrak{m}_p^2$, e portanto, $\mathfrak{m}_p \subseteq \mathfrak{m}_p^2 : (H)$. Por outro lado, $(H) \not\subseteq \mathfrak{m}_p^2$ pois há pontos diferentes de p em H , logo, $H \notin \mathfrak{m}_p^2 \Rightarrow \mathfrak{m}_p^2 : (H) \neq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, e como $\mathfrak{m}_p$ é maximal, segue então que $\mathfrak{m}_p^2 : (H) = \mathfrak{m}_p$, e portanto, $\widetilde{\{p\}^2}$ é o ponto simples $\{p\}$ em $\mathbb{P}^n$.

Traço. Temos direto da definição que (numa carta afim que contém p)

$$I_{\{p\}^2 \cap H, H} = \frac{\mathfrak{m}_p^2 + (H)}{(H)} = \overline{\mathfrak{m}_p^2} \subseteq \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{(H)},$$

que corresponde ao ponto duplo $\{p\}_{|H}^2$ de H . □

Lema 5.2. *Se $\{p\}^2$ é um ponto duplo com suporte fora de H , então seu traço é vazio, e seu residual é o ponto duplo $\{p\}^2$ em $\mathbb{P}^n$.*

Prova. Residual. Novamente, $\{p\}^2$ corresponde ao ideal maximal ao quadrado $\mathfrak{m}_p^2 \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, e $I_{\widetilde{\{p\}^2}} = \mathfrak{m}_p^2 : (H)$. Como $p \notin H$, temos $(H) \not\subseteq \mathfrak{m}_p$. Além disto, $\mathfrak{m}_p^2$ é $\mathfrak{m}_p$ -primário, logo, $FH \in \mathfrak{m}_p^2 \Rightarrow F \in \mathfrak{m}_p^2$ ou $H \in \mathfrak{m}_p^2$ ou $F, H \in \mathfrak{m}_p$, e como no caso $H \notin \mathfrak{m}_p$, temos $F \in \mathfrak{m}_p^2$, e portanto, $\mathfrak{m}_p^2 : (H) \subseteq \mathfrak{m}_p^2$, logo, $\mathfrak{m}_p^2 : (H) = \mathfrak{m}_p^2$, e segue que $\widetilde{\{p\}^2}$ é o ponto duplo em $\mathbb{P}^n$.

Traço. Em H , o ponto duplo $\{p\}^2$ corresponde ao ideal $I_{\{p\}^2 \cap H, H} = \frac{\mathfrak{m}_p^2 + (H)}{(H)} \subseteq \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{(H)}$. Observe que $\mathfrak{m}_p$ é maximal e $H \notin \mathfrak{m}_p$, logo, $\mathfrak{m}_p + (H) = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Assim, existe $m \in \mathfrak{m}_p$ e $a \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ tal que $m + aH = 1 \Rightarrow m = m(m + aH) = m^2 + maH \in \mathfrak{m}_p^2 + (H)$, logo, $1 = m + aH \in \mathfrak{m}_p^2 + (H)$. Isto é, $\frac{\mathfrak{m}_p^2 + (H)}{(H)} = \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{(H)}$, que corresponde ao conjunto vazio em H . □

Em particular, se X é uma união de k pontos duplos, dos quais u pertencem a H , temos que o traço é dado por u pontos duplos em H e o residual por $k - u$ pontos duplos e u pontos simples.

Ao especializar u dos k pontos num hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^n$, para que possamos aplicar indução precisamos de uma maneira de entender como as restrições desses u pontos em H contribuem para as restrições do total de k pontos em $\mathbb{P}^n$. Dessa forma, a *sequência de Castelnuovo* a seguir é fundamental para nosso passo indutivo.

Proposição 5.3. *A seguinte sequência de feixes de ideais é exata.*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\widetilde{X}}(d-1) \longrightarrow \mathcal{I}_X(d) \longrightarrow \mathcal{I}_{X \cap H}(d) \longrightarrow 0.$$

Em particular, tomando as seções globais, obtemos a *Sequência de Castelnuovo*:

$$0 \longrightarrow I_{\widetilde{X}}(d-1) \longrightarrow I_X(d) \longrightarrow I_{X \cap H}(d).$$

A partir da qual temos a desigualdade

$$\dim I_X(d) \leq \dim I_{\tilde{X}}(d-1) + \dim I_{X \cap H}(d).$$

Observe que os k pontos duplos de X impõem no máximo $k(n+1)$ condições lineares independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Da mesma forma, $\tilde{X}$ impõe no máximo $(k-u)(n+1) + u$ condições em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)$ e $X \cap H$ impõe no máximo un condições em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(d)$. Visto que $k(n+1) = (k-u)(n+1) + u + un$, temos que o máximo de condições impostas por $\tilde{X}$ e $X \cap H$ somadas dão o máximo de condições que X pode impor. Portanto, para concluir que X impõe condições independentes por meio da desigualdade acima, precisamos que ambos $\tilde{X}$ e $X \cap H$ imponham condições independentes e que estas condições sejam todas aproveitadas. Para isto ocorrer, temos duas situações:

- (i) $\dim I_{\tilde{X}}$ e $\dim I_{X \cap H}(d)$ não atingem 0. Neste caso, todas as condições impostas por $\tilde{X}$ e $X \cap H$ são bem aproveitadas na soma.
- (ii) $\dim I_{\tilde{X}}$ e $\dim I_{X \cap H}(d)$ atingem 0. Neste caso, mesmo que “desperdicemos” potenciais restrições, já atingimos também 0 para $\dim I_X$.

Examinando cada um destes casos, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 5.4. *Seja X uma união de k pontos duplos de $\mathbb{P}^n$ e fixe um hiperplano $H \subset \mathbb{P}^n$ contendo u destes pontos. Assuma que $X \cap H$ impõe condições independentes em $\mathcal{O}_H(d)$ e que o residual $\tilde{X}$ impõe condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)$. Assuma, além disto, que vale um dos seguintes pares de desigualdades:*

- (i) $un \leq \binom{d+n-1}{n-1}, \quad k(n+1) - un \leq \binom{d+n-1}{n}.$
- (ii) $un \geq \binom{d+n-1}{n-1}, \quad k(n+1) - un \geq \binom{d+n-1}{n}.$

Então X impõe condições independentes no sistema $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Prova. Queremos mostrar que $I_X(d)$ possui a dimensão esperada

$$\max \left(\binom{d+n}{n} - k(n+1), 0 \right).$$

Como $X \cap H$ impõe condições independentes em $\mathcal{O}_H(d)$, temos que

$$\dim I_{X \cap H}(d) = \max \left(\binom{d+n-1}{n-1} - un, 0 \right).$$

E como $\tilde{X}$ impõe condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)$, lembrando que pontos simples impõem 1 condição linear de restrição enquanto pontos duplos impõem $n+1$ cada, temos que

$$\dim I_{\tilde{X}}(d-1) = \max \left(\binom{d-1+n}{n} - (k-u)(n+1) - u, 0 \right).$$

Portanto,

$$\dim I_X(d) \leq \max \left(\binom{d+n-1}{n-1} - un, 0 \right) + \max \left(\binom{d-1+n}{n} - k(n+1) + un, 0 \right).$$

Se vale a desigualdade (i), obtemos

$$\begin{aligned} \dim I_X(d) &\leq \binom{d+n-1}{n-1} - un + \binom{d-1+n}{n} - k(n+1) + un \\ &= \binom{d+n-1}{n-1} + \binom{d-1+n}{n} - k(n+1) = \binom{d+n}{n} - k(n+1). \end{aligned}$$

Se vale (ii), obtemos $\dim I_X(d) \leq 0$.

E visto que sempre vale $\dim I_X(d) \geq \max \left(\binom{d+n}{n} - k(n+1), 0 \right)$, temos o resultado. $\square$

5.2 Exemplos em $\mathbb{P}^3$

Exemplo 5.5. $\dim I_{5,\mathbb{P}^3}(3) = 0 =$ esperada. Isto é, não há superfícies cúbicas em $\mathbb{P}^3$ com 5 pontos duplos gerais.

Basta mostrar que não há superfície cúbica singular em 5 pontos particulares, que vamos tomar $p_1 = [0:0:0:1]$, $p_2 = [0:0:1:0]$, $p_3 = [0:1:0:0]$, $p_4 = [1:0:0:0]$ e $p_5 = [1:1:1:1]$.

Um polinômio homogêneo de grau 3 tem a forma

$$F = \sum_{i_0+i_1+i_2+i_3=3} A_{i_0i_1i_2i_3} X^{i_0} Y^{i_1} Z^{i_2} W^{i_3}.$$

Calculando F no ponto, note que:

- F singular em p_1 implica $A_{0003} = A_{1002} = A_{0102} = A_{0012} = 0$.
- F singular em p_2 implica $A_{0030} = A_{1020} = A_{0120} = A_{0021} = 0$.
- F singular em p_3 implica $A_{0300} = A_{1200} = A_{0210} = A_{0201} = 0$.
- F singular em p_4 implica $A_{3000} = A_{2100} = A_{2010} = A_{2001} = 0$.

Até agora restou $F = A_{1110}XYZ + A_{1101}XYW + A_{1011}XZW + A_{0111}YZW$, que para simplificar a notação vamos chamar de $F = AXYZ + BXYW + CXZW + DYZW$. Para ver sua multiplicidade em p_5 vamos deshomogeneizar com $W = 1$ e abrir em torno de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Temos

$$\begin{aligned}
 F_* = f &= Axyz + Bxy + Cxz + Dyz \\
 &= A((x-1)+1)((y-1)+1)((z-1)+1) + B((x-1)+1)((y-1)+1) \\
 &\quad + C((x-1)+1)((z-1)+1) + D((y-1)+1)((z-1)+1) \\
 &= (\text{ termo de grau } \geq 2 \text{ em } (x-1), (y-1), (z-1)) \\
 &\quad + (x-1)(A+B+C) + (y-1)(A+B+D) + (z-1)(A+C+D) + (A+B+C+D).
 \end{aligned}$$

Logo, F é singular em p_5 se f é singular em $(1, 1, 1)$, que ocorre quando

$$\begin{cases} A+B+C+D = 0 \\ A+B+C = 0 \\ A+B+D = 0 \\ A+C+D = 0 \end{cases}$$

que é um sistema linear com apenas a solução nula $A = B = C = D = 0$.

Da mesma forma, dado um outro conjunto de pontos, podemos calcular a dimensão de $I_X(d)$ apenas resolvendo um sistema linear. O software Magma fornece funções prontas para calcular o sistema linear $I_X(d)$, inclusive com esquemas X mais gerais. A partir de agora, apresentarei apenas uma configuração particular de pontos que impõem condições independentes e deixarei para que o cálculo seja testado no programa. Veja mais detalhes no apêndice.

Exemplo 5.6. $\dim I_{8, \mathbb{P}^3}(4) = 3 = \text{esperada}$.

Para $u = 4$, veja que

$$\begin{aligned}
 (i) \quad un &\leq \binom{d+n-1}{n-1} \Leftrightarrow 4 \cdot 3 = 12 \leq \binom{6}{2} = 15 \\
 \text{e } k(n+1) - un &\leq \binom{d+n-1}{n} \Leftrightarrow 8 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 20 \leq \binom{6}{3} = 20
 \end{aligned}$$

são satisfeitas. Logo, especializamos $u = 4$ pontos como pontos gerais de um hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^3$. Pelo Teorema 4.1, estes 4 pontos impõem condições independentes em $I_{4, \mathbb{P}^2}(3)$ em $H \cong \mathbb{P}^2$.

Por outro lado, devemos mostrar que o residual $\tilde{X}$, formado por 4 pontos duplos gerais em $\mathbb{P}^3$ e 4 pontos simples gerais em H impõem condições independentes em $I_{\tilde{X}}(3)$. Pelo exemplo anterior, 5 pontos duplos gerais impõem condições independentes, logo 4 também impõem. Vamos agora adicionar os pontos simples. Como é esperado que cada um reduza a dimensão em 1, então ao adicioná-lo, ou ele impõe condições independentes, ou a dimensão não reduz, ou seja, todas as hipersuperfícies já passavam por ele. Fixada F uma das hipersuperfícies, se F não contém H , então todo ponto do aberto não-vazio $(H \setminus F)$ de H não pertence a F , e portanto,

o ponto geral de H impõe condições independentes ao sistema. Portanto, a única maneira da dimensão não reduzir é se $H \subset F$, o que não ocorre, pois não existe hipersuperfície cúbica F que é uma união de um plano e uma quádriga singular em 4 pontos gerais de $\mathbb{P}^3$, como podemos mostrar escolhendo os pontos $[0 : 0 : 0 : 1]$, $[0 : 0 : 1 : 0]$, $[0 : 1 : 0 : 0]$ e $[1 : 0 : 0 : 0]$.

Portanto, estamos nas condições do Teorema 5.4 e concluímos que 8 pontos duplos gerais com 4 deles coplanares impõem condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)$, então 8 pontos duplos gerais também impõem. Portanto, $\dim I_{8, \mathbb{P}^3}(4) = \binom{4+3}{3} - 8 \cdot 4 = 3$.

Exemplo 5.7. $I_{14, \mathbb{P}^3}(5) = 0 =$ esperada.

Para $u = 7$,

$$(i) \quad un \leq \binom{d+n-1}{n-1} \Leftrightarrow 7 \cdot 3 = 21 \leq \binom{7}{2} = 21$$

$$\text{e } k(n+1) - un \leq \binom{d+n-1}{n} \Leftrightarrow 14 \cdot 4 - 7 \cdot 3 = 35 \leq \binom{6}{3} = 35$$

são satisfeitas. Por um lado, $u = 7$ pontos duplos gerais num plano $H \cong \mathbb{P}^2$ impõem condições independentes pelo Teorema 4.1. Por outro, devemos verificar que o residual $\tilde{X}$ formado por 7 pontos duplos gerais e 7 pontos simples em H impõem condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)$. Fazemos como antes: 7 pontos duplos impõem condições independentes em quárticas, pois pelo exemplo anterior 8 o fazem. Quanto aos 7 pontos simples, um deles apenas não iria impor se fixada uma quártica, ela contivesse todo H . No entanto, não existe quártica formada pela união de um plano e uma cúbica singular em 7 pontos duplos gerais, pois vimos no primeiro exemplo que não há com 5.

Portanto, podemos aplicar o Teorema 5.4 e concluir que $\dim I_{14, \mathbb{P}^3}(5) = \binom{5+3}{3} - 14 \cdot 4 = 0$.

O CASO DAS CÚBICAS

6.1 O grau de um esquema 0-dimensional

Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ um esquema projetivo. Denote por $S^{(r)}$ o espaço dos polinômios homogêneos de grau r em $\mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]$ e por $I_X(r)$ a parte homogênea de grau r do ideal homogêneo de X . Definimos a *função de Hilbert* de X , que associa a cada r a dimensão do $\mathbf{k}$ -espaço vetorial $S^{(r)}/I_X(r)$:

$$H_X(r) := \dim \frac{S^{(r)}}{I_X(r)}.$$

Temos de ((HARTSHORNE, 1977), p.51 ou (SHAFAREVICH, 1994) p. 102 e 103) o seguinte teorema.

Teorema 6.1. *Existe um único polinômio $P_X(T) \in \mathbb{Q}[T]$, chamado o polinômio de Hilbert de X , tal que $H_X(r) = P_X(r)$ para todo inteiro r suficientemente grande. Além disto, $P_X(T)$ tem grau igual à dimensão de X .*

Definição 6.2. Definimos o grau de X como $(\dim X)!$ vezes o coeficiente líder de $P_X(T)$.

Denotaremos por $\deg X$.

Suponhamos, daqui em diante, que X é um esquema 0-dimensional. Em particular, seu polinômio de Hilbert é constante e igual ao seu grau d .

Tome como hiperplano no infinito um hiperplano que não passa por nenhum dos pontos de X . Podemos então escolher um aberto afim $\mathbb{A}^n$ que contém todos os pontos. Deshomogeneizando os polinômios, podemos ver que $S^{(r)}/I_X(r) \cong V^{(r)}/(V^{(r)} \cap I_X)$, onde $V^{(r)} \subset \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] = \mathbf{k}[\mathbb{A}^n]$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a r e I_X é o ideal afim de X em $\mathbb{A}^n$. Temos então

$$H_X(r) = \dim V^{(r)}/(V^{(r)} \cap I_X) \leq \dim V^{(r+1)}/(V^{(r+1)} \cap I_X) = H_X(r+1),$$

logo, a sequência $(H_X(r))_r$ é não-decrescente e limitada por $\dim \mathbf{k}[\mathbb{A}^n]/I_X$, que é finita pois X é 0-dimensional (veja (FULTON, 1974), Seção 1.7, p.11). Portanto, $H_X(r)$ estabiliza e temos

$$\deg X = P_X(T) = \dim \mathbf{k}[\mathbb{A}^n]/I_X = H_X(r),$$

para r suficientemente grande.

Podemos dar uma outra definição para o grau, que coincide com a acima quando X é 0-dimensional.

Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ esquema projetivo 0-dimensional com suporte em k pontos $\{p_1, \dots, p_k\}$. Então cada anel local $\mathcal{O}_{X,p_i} = \left(\frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X} \right)_{p_i}$ é artiniano local, logo possui comprimento $\text{length}_{\mathcal{O}_{X,p_i}} \mathcal{O}_{X,p_i}$ finito.

Definição 6.3. Definimos então

$$\deg X := \sum_{i=1}^k \text{length}_{\mathcal{O}_{X,p_i}} \mathcal{O}_{X,p_i}.$$

Proposição 6.4. As duas definições dadas para o grau de um esquema 0-dimensional X são equivalentes.

Prova. Primeiramente, usamos o fato (ver (FULTON, 1974), Seção 2.9, p. 27)

$$\frac{\mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]}{I_X} \cong \prod_{i=1}^k \mathcal{O}_{X,p_i}.$$

Em particular,

$$\dim \frac{\mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]}{I_X} = \sum_{i=1}^k \dim \mathcal{O}_{X,p_i}.$$

Precisamos então apenas provar que $\dim \mathcal{O}_{X,p_i} = \text{length}_{\mathcal{O}_{X,p_i}} \mathcal{O}_{X,p_i}$.

Chame $M = \mathcal{O}_{X,p_i}$ e considere

$$M = M_d \supsetneq M_{d-1} \supsetneq \dots \supsetneq M_1 \supsetneq M_0 = 0$$

uma série de composição, com $d = \text{length } M$.

Então cada quociente M_{i+1}/M_i é um M -módulo simples, logo, $\frac{M_{i+1}}{M_i} \cong \frac{M}{\mathfrak{m}} \cong \mathbf{k}$, onde $\mathfrak{m}$ é o ideal maximal de M . Portanto, temos que

$$\dim M = \sum_{i=0}^{d-1} \dim \frac{M_{i+1}}{M_i} = \sum_{i=0}^{d-1} \dim \mathbf{k} = d.$$

□

Exemplo 6.5. (Ponto simples). Um ponto simples tem grau 1.

Dado X como esquema de um ponto simples p em $\mathbb{P}^n$, podemos sem perda de generalidade supor que $p = [1 : 0 : \cdots : 0]$. Tome carta afim $(X_0 = 1)$ e veja que

$$\dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{(X_1, \dots, X_n)} = 1,$$

e que

$$\frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{(X_1, \dots, X_n)} \supsetneq \overline{(0)}$$

é cadeia saturada de comprimento 1. Logo, de ambas as definições segue que o ponto simples $\{p\}$ possui grau 1.

Note também que se antes quocientarmos $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ por um ideal $I_X \subseteq (X_1, \dots, X_n)$ e depois tomarmos o ponto p em X teremos a mesma conclusão. Ou seja, o grau de um ponto simples de qualquer esquema projetivo X é 1.

Exemplo 6.6. (Ponto duplo). Um ponto duplo em $\mathbb{P}^n$ tem grau $n + 1$.

Considere $X = \{p\}^2$ como o ponto duplo com suporte em $p = [1 : 0 : \cdots : 0] \in \mathbb{P}^n$. Novamente, tome a carta afim $(X_0 = 1)$ e veja que

$$\dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{(X_1, \dots, X_n)^2} = \dim \langle 1, X_1, \dots, X_n \rangle = n + 1$$

e que

$$\frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{(X_1, \dots, X_n)^2} \supsetneq \overline{(X_1, \dots, X_n)} \supsetneq \overline{(X_1, \dots, X_{n-1})} \cdots \supsetneq \overline{(X_1)} \supsetneq \overline{(0)}$$

é cadeia saturada de comprimento $n + 1$. Logo, por ambas as definições, o ponto duplo $\{p\} \subseteq \mathbb{P}^n$ tem grau $n + 1$.

Lema 6.7. Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ um esquema 0-dimensional com suporte num único ponto p e $\deg X = d$. Então para todo $1 \leq d' \leq d$, existe subesquema $X' \subseteq X$ com $d' = \deg X'$.

Prova. Escreva $\Gamma(X) = \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X}$ para o anel de coordenadas e note que, como X tem suporte num único ponto, $\Gamma(X)$ já é local, logo localizar em p é trivial: $\Gamma(X) = \mathcal{O}_{X,p}$. Consequentemente, $d = \deg X = \text{length}_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{O}_{X,p} = \text{length}_{\Gamma(X)} \Gamma(X)$.

Dada uma cadeia saturada de $\Gamma(X)$,

$$\Gamma(X) \supsetneq I_{d-1} \supsetneq I_{d-2} \supsetneq \cdots \supsetneq I_1 \supsetneq (0),$$

e quocientando por $I_{d-d'}$ temos que

$$\text{length}_{\Gamma(X)} \Gamma(X)/I_{d-d'} = \text{length}_{\Gamma(X)} \Gamma(X) - \text{length}_{\Gamma(X)} I_{d-d'} = d - (d - d') = d',$$

e $\Gamma(X)/I_{d-d'} = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/I_{d-d'}$. Logo, $I_{d-d'}$ é o ideal de um subesquema de X de grau d' . $\square$

Observação: Como a projeção $\Gamma(X) \rightarrow \Gamma(X)/I_{d-d'}$ é um homomorfismo sobrejetivo, temos que $\text{length}_{\Gamma(X)} \Gamma(X)/I_{d-d'} = \text{length}_{\Gamma(X)/I_{d-d'}} \Gamma(X)/I_{d-d'}$.

6.2 O caso das cúbricas

Vamos agora nos concentrar em resolver o caso $d = 3$ do Teorema 1.1. Este caso será a base do processo indutivo do próximo capítulo, e portanto, precisamos dele resolvido em sua totalidade antes de prosseguirmos.

Dado n , o máximo de pontos duplos que podemos adicionar sem que a dimensão esperada de $I_{k_n, \mathbb{P}^n}(3)$ caia para além de zero é $k_n := \left\lfloor \frac{(n+3)(n+2)}{6} \right\rfloor$, para o qual temos $\delta_n := \dim I_{k_n, \mathbb{P}^n}(3) = \binom{n+3}{3} - k_n(n+1)$.

Observe que quando $n \not\equiv 2 \pmod{3}$, temos $k_n = \frac{(n+3)(n+2)}{6}$ e $\delta_n = 0$, de forma que a dimensão esperada para o espaço das cúbricas singulares em k_n pontos gerais em $\mathbb{P}^3$ é 0.

Já quando $n = 3p + 2$, temos $k_n = \frac{(n+3)(n+2)}{6} - \frac{1}{3} = \frac{(n+4)(n+1)}{6}$ e $\delta_n = p + 1 = \frac{n+1}{3}$, de modo a “sobrar um espaço” de dimensão $\delta_n > 0$ após inserir os k_n pontos duplos.

Proposição 6.8. *Seja $n \geq 5$ e sejam $L, M, N \subseteq \mathbb{P}^n$ subespaços lineares gerais de codimensão 3. Sejam l_i (respectivamente m_i e n_i), $i = 1, 2, 3$, três pontos gerais em L (respectivamente M e N).*

Então não existe hipersuperfície cúbica em $\mathbb{P}^n$ que contém $L \cup M \cup N$ e que são singulares nos nove pontos l_i, m_i, n_i .

Prova. Para $n = 5$ e 6 testamos explicitamente (ver apêndice).

Para $n \geq 7$ faremos por indução. Não existem quádricas que contém $L \cup M \cup N$. De fato, para $n = 7$ mostramos computacionalmente (ver apêndice). Para $n \geq 8$, tome $L : (X_0 = X_1 = X_2 = 0)$, $M : (X_3 = X_4 = X_5 = 0)$ e $N : (X_6 = X_7 = X_8 = 0)$. Uma quádrica tem equação $F = a_0X_0^2 + \dots + a_nX_n^2 + a_{n+1}X_0X_1 + \dots + a_mX_{n-1}X_n$, e se F contém L , devemos ter $F(0, 0, 0, X_3, \dots, X_n) \equiv 0$, ou seja, todos os coeficientes de termos sem X_0, X_1 ou X_2 devem ser nulos. Da mesma forma, se F contém M e N , todos os coeficientes sem X_4, X_5 ou X_6 são nulos e todos os coeficientes sem X_7, X_8 ou X_9 são nulos. Não resta qualquer coeficiente ao final, e portanto, $F \equiv 0$.

Logo, $I_{L \cup M \cup N}(2)$ tem dimensão 0, de maneira que a sequência de Castelnuovo fica com o espaço do residual igual a 0:

$$0 \longrightarrow I_{X \cup L \cup M \cup N, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{(X \cup L \cup M \cup N) \cap H, H}(3),$$

onde especializamos os 9 pontos l_i, m_i, n_i em H . Temos por hipótese de indução que $\dim I_{(X \cup L \cup M \cup N) \cap H, H}(3) = 0$. Portanto,

$$\dim I_{X \cup L \cup M \cup N, \mathbb{P}^n}(3) \leq \dim I_{(X \cup L \cup M \cup N) \cap H, H}(3) + 0 = 0.$$

□

Proposição 6.9. *Seja $n \geq 3$, $n \neq 4$, e sejam $L, M \subseteq \mathbb{P}^n$ subespaços de codimensão 3. Sejam l_i (respectivamente m_i) com $i = 1, \dots, n-2$ pontos gerais em L (respectivamente M).*

Então não existem hipersuperfícies cúbicas em $\mathbb{P}^n$ que contêm $L \cup M$ e são singulares nos $2n-4$ pontos l_i, m_i e em três pontos gerais $p_i \in \mathbb{P}^n$, $i = 1, 2, 3$.

Prova. O caso $n = 3$ impõe que a hipersuperfície passe por 5 pontos duplos gerais em $\mathbb{P}^3$, o qual já foi testado na Seção 5.2.

Para $n = 5$ e 7 fazemos explicitamente pelo computador para um conjunto particular de espaços e pontos; ver apêndice.

Para $n = 6$ ou $n \geq 8$ faremos por indução de $n-3$ para n .

Dado N um terceiro subespaço linear geral de codimensão 3, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow I_{L \cup M \cup N, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{(L \cup M) \cap N, N}(3) \longrightarrow 0,$$

onde os morfismos são a inclusão e a projeção usuais.

Seja X a união dos pontos duplos $\{l_i\}^2, \{m_i\}^2, i = 1, \dots, n-2$ e $\{p_j\}^2, j = 1, 2, 3$. Vamos especializar $n-5$ dos pontos l_i em $L \cap N$, $n-5$ dos pontos em $M \cap N$ e os três pontos p_j em N . Obtemos então a sequência exata

$$0 \longrightarrow I_{X \cup L \cup M \cup N, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{X \cup L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{(X \cup L \cup M) \cap N, N}(3).$$

Visto que $L \cap N$ e $M \cap N$ são subespaços gerais de codimensão 3 de N com $n-5 = (n-3) - 2$ pontos duplos especializados em cada, e os três pontos p_j gerais em N , temos que para N estamos no caso $n-3$, e por hipótese de indução, $\dim I_{(X \cup L \cup M) \cap N, N}(3) = 0$.

Além disto, restam 3 pontos gerais “livres” de X em cada espaço L, M e N de codimensão 3, o que satisfaz as hipóteses da Proposição 6.8, e assim, $\dim I_{X \cup L \cup M \cup N, \mathbb{P}^n}(3) = 0$.

Portanto, pela sequência exata,

$$\dim I_{X \cup L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) \leq \dim I_{(X \cup L \cup M) \cap N, N}(3) + \dim I_{X \cup L \cup M \cup N, \mathbb{P}^n}(3) = 0.$$

□

Proposição 6.10. *Seja $n \geq 3$, $n \neq 4$, e seja $L \subseteq \mathbb{P}^n$ um subespaço linear de codimensão 3.*

- (i) Se $n \not\equiv 2 \pmod{3}$, então não existe hipersuperfície cúbica em $\mathbb{P}^n$ que contém L e é singular em $\frac{n(n-1)}{6}$ pontos l_i gerais em L e em $n+1$ pontos p_i gerais em $\mathbb{P}^n$.
- (ii) Se $n \equiv 2 \pmod{3}$, então não existe hipersuperfície cúbica em $\mathbb{P}^n$ que contém L , é singular em $\frac{(n+1)(n-2)}{6}$ pontos gerais l_i em L , $n+1$ pontos p_i gerais em $\mathbb{P}^n$ e contém um esquema geral η com suporte em $q \in L$ e tal que $\deg \eta = \delta_n$ e $\deg(\eta \cap L) = \delta_n - 1$.

Prova. No caso $n = 3$ estamos considerando o espaço das superfícies cúbicas que são singulares em 5 pontos gerais em $\mathbb{P}^3$, o qual já vimos ser vazio na Seção 5.2.

Para $n = 5$ e 7 testamos explicitamente; ver apêndice.

Para $n = 6$ ou $n \geq 8$ faremos indução de $n-3$ para n . Tomando um subespaço geral M de codimensão 3 obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow I_{L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{L, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{(L \cap M), M}(3) \longrightarrow 0.$$

Denotando por X a união dos pontos duplos $\{l_i\}^2$ e $\{p_j\}^2$ (e do esquema η no caso (ii)), obtemos

$$0 \longrightarrow I_{X \cup L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{X \cup L, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{(X \cup L) \cap M, N}(3).$$

(i) Se $n \not\equiv 2 \pmod{3}$, especializamos $\frac{(n-3)(n-4)}{6}$ dos pontos l_i em $L \cap M$ e $n-2$ dos p_i em M , caindo então no caso $n-3$ para o espaço $M \cong \mathbb{P}^{n-3}$. Logo, por hipótese de indução, $\dim I_{(X \cup L) \cap M, M}(3) = 0$.

Sobram ainda $\frac{n(n-1)}{6} - \frac{(n-3)(n-4)}{6} = n-2$ pontos gerais “livres” em L , $n-2$ pontos gerais em M e 3 pontos gerais em $\mathbb{P}^n$, logo, pela Proposição 6.9 temos que $\dim I_{L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) = 0$.

Portanto,

$$\dim I_{X \cup L, \mathbb{P}^n}(3) \leq \dim I_{(X \cup L) \cap M, M}(3) + \dim I_{L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) = 0.$$

(ii) Se $n \equiv 2 \pmod{3}$, especializamos $\frac{(n-2)(n-5)}{6}$ dos pontos l_i em $L \cap M$, $n-2$ dos pontos p_j em M e o esquema η em M (podemos fazer isto, pois como $n \geq 8$, temos pelo menos um $\mathbb{P}^2$ contido em $L \cap M$).

Note que temos o caso $n-3$ para o espaço M , mas com grau maior para η , visto que $\delta_{n-3} = \delta_n - 1$, e como $\eta \subseteq M$, temos que $\deg(\eta \cap M) = \delta_n$ e $\deg(\eta \cap M \cap L) = \deg(\eta \cap L) = \delta_n - 1$. Logo, por indução, $\dim I_{(X \cup L) \cap M, M}(3) = 0$.

Do outro lado temos $\frac{(n+1)(n-2)}{6} - \frac{(n-2)(n-5)}{6} = n-2$ pontos gerais “livres” em L , $n-2$ pontos gerais em M e $(n+1) - (n-2) = 3$ pontos gerais “livres” em $\mathbb{P}^n$, logo segue da Proposição 6.9 que $\dim I_{X \cup L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) = 0$.

Portanto, da sequência exata obtemos que

$$\dim I_{X \cup L, \mathbb{P}^n}(3) \leq \dim I_{(X \cup L) \cap M, M}(3) + \dim I_{X \cup L \cup M, \mathbb{P}^n}(3) = 0.$$

□

Lembrando que $k_n := \left\lfloor \frac{(n+3)(n+2)}{6} \right\rfloor$ é o máximo de pontos duplos que podemos adicionar impondo $n+1$ restrições cada, e que $\delta_n := \dim I_{k_n, \mathbb{P}^n}(3) = \binom{n+3}{3} - k_n(n+1)$, já estamos em condições de terminar a prova do caso das cúbicas com o seguinte teorema.

Teorema 6.11. *Seja $n \not\equiv 2 \pmod{3}$, $n \neq 4$. Então k_n pontos duplos impõem condições independentes nas cúbicas em $\mathbb{P}^n$.*

Seja $n = 3p + 2$, então k_n pontos duplos e um esquema zero-dimensional de grau δ_n impõem condições independentes nas cúbicas em $\mathbb{P}^n$.

Prova. Fixe um subespaço linear $L \subseteq \mathbb{P}^n$ de codimensão 3. Como antes, o resultado seguirá por indução e pela sequência exata

$$0 \longrightarrow I_{X \cup L, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{X, \mathbb{P}^n}(3) \longrightarrow I_{(X \cap L), L}(3),$$

onde X é o conjunto dos k_n pontos duplos (e do esquema η no caso $n \equiv 2 \pmod{3}$).

Assuma primeiro o caso $n \not\equiv 2 \pmod{3}$. Para a base da indução usamos $n = 3$, já checado na Seção 5.2; e $n = 7$, testado computacionalmente (ver apêndice).

Especializamos em L o número máximo de pontos que podem impor condições independentes em cúbicas em L , isto é, $k_{n-3} = \frac{n(n-1)}{6}$ dos $k_n = \frac{(n+3)(n+2)}{6}$ pontos, restando ainda $k_n - k_{n-3} = n+1$ pontos gerais “livres” em $\mathbb{P}^n$.

Logo, temos da Proposição 6.10(i) que $\dim I_{X \cup L, \mathbb{P}^n}(3) = 0$, e por hipótese de indução em $L \cong \mathbb{P}^{n-3}$, que $\dim I_{X \cap L, L}(3) = 0$.

Portanto,

$$\dim I_{X, \mathbb{P}^n} \leq \dim I_{X \cup L, \mathbb{P}^n}(3) + \dim I_{X \cap L, L}(3) = 0.$$

No caso $n \equiv 2 \pmod{3}$, usamos $n = 2$ como base da indução, já checado no caso plano. Especializamos $k_{n-3} = \left\lfloor \frac{n(n-1)}{6} \right\rfloor = \frac{(n+1)(n-2)}{6}$ dos pontos duplos em L . Especializamos também o esquema η em L de modo que $\eta \cap L$ tem grau $\delta_n - 1 = \delta_{n-3}$. Assim, temos o caso $n-3$ para $L \cong \mathbb{P}^{n-3}$, logo, $\dim I_{X \cap L, L}(3) = 0$ por indução. Sobram ainda $k_n - k_{n-3} = n+1$ pontos gerais “livres” em $\mathbb{P}^n$, logo pela Proposição 6.10(ii) temos $\dim I_{X \cup L, \mathbb{P}^n}(3) = 0$.

Portanto, novamente pela sequência exata,

$$\dim I_{X, \mathbb{P}^n} \leq \dim I_{X \cup L, \mathbb{P}^n}(3) + \dim I_{X \cap L, L}(3) = 0.$$

□

O CASO GERAL E O ARGUMENTO POR DEGENERAÇÃO

7.1 A função de Hilbert e o Lema Curvilinear

Neste capítulo resolveremos o caso geral do Teorema 1.1. Para isto utilizaremos um argumento de degeneração que nos fará “aproveitar melhor” a dimensão que sobra no traço e no residual. Antes, precisaremos desenvolver as ferramentas que nos permitam entender o “peso” de cada ponto duplo como o seu grau e estender essa ideia para esquemas mais gerais, em especial os curvilineares.

Sejam $X, Z \subseteq \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ subesquemas 0-dimensionais, $\mathcal{I}_X$ e $\mathcal{I}_Z$ os feixes de ideais correspondentes e $D = \mathcal{I}_Z(d)$ para algum $d \in \mathbb{N}$.

O espaço vetorial $H^0(D)$ define o sistema linear dos polinômios homogêneos de grau d em $n+1$ variáveis que passam por Z . Às vezes abusaremos um pouco de linguagem chamando o sistema $H^0(D)$ definido por D simplesmente de D .

Definição 7.1. Definimos a *função de Hilbert de X com respeito a D* por

$$h_{\mathbb{P}^n}(X, D) := \dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_X \otimes D),$$

isto é, $h_{\mathbb{P}^n}(X, D)$ nos dá a codimensão do sistema $\mathcal{I}_X \otimes D$ com relação ao sistema D .

Em particular, quando $D = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$, então $H^0(D) = S^d V^\vee$ e $H^0(\mathcal{I}_X \otimes D) = I_X(d)$, e temos

$$h_{\mathbb{P}^n}(X, d) := h_{\mathbb{P}^n}(X, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \dim S^d V^\vee - \dim I_X(d) = \binom{d+n}{n} - \dim I_X(d),$$

ou seja, a codimensão de $I_X(d)$ em $S^d V^\vee$.

Veja que temos a seguinte sequência exata de espaços vetoriais:

$$0 \longrightarrow I_X(d) \cap I_Z(d) \longrightarrow I_Z(d) \longrightarrow \frac{I_X(d) + I_Z(d)}{I_X(d)} \longrightarrow 0. \quad (7.1)$$

Vamos agora fixar uma carta afim que contém os suportes de X e Z e denotar por I_X e I_Z seus ideais nesta carta. Temos então a seguinte sequência exata:

$$0 \longrightarrow \frac{I_Z + I_X}{I_X} \longrightarrow \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X} \longrightarrow \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X + I_Z} \longrightarrow 0. \quad (7.2)$$

Observe que $H^0(D)$ é o espaço dos polinômios homogêneos de grau d que anulam Z , ou seja, $H^0(D) = I_Z(d)$; da mesma forma, $H^0(\mathcal{I}_X \otimes D) = I_X(d) \cap I_Z(d)$ são os que anulam X e Z . Logo, por (7.1) acima temos

$$h_{\mathbb{P}^n}(X, D) = \dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_X \otimes D) = \dim \frac{I_Z(d) + I_X(d)}{I_X(d)}.$$

Note agora que, como no Capítulo 6, temos

$$\frac{I_Z(d) + I_X(d)}{I_X(d)} \cong \frac{V^{(d)} \cap (I_Z + I_X)}{V^{(d)} \cap I_X} \subseteq \frac{I_Z + I_X}{I_X} \subseteq \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X}.$$

Em particular, $\dim \frac{I_Z(d) + I_X(d)}{I_X(d)} \leq \dim \frac{I_Z + I_X}{I_X}$, e segue de (7.2) que

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{P}^n}(X, D) &\leq \dim \frac{I_Z + I_X}{I_X} = \dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X} - \dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X + I_Z} \\ &= \deg X - \deg(X \cap Z) \leq \deg X. \end{aligned}$$

Logo, sempre temos que a codimensão $h_{\mathbb{P}^n}(X, D)$ é menor ou igual ao grau de X , sendo portanto $\deg X$ o máximo de restrições que X pode impor ao sistema D .

Definição 7.2. Dizemos que X *impõe condições independentes em D* se

$$h_{\mathbb{P}^n}(X, D) = \min(\deg X, h^0(D)).$$

Em particular, quando $D = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ e X é a união de k pontos duplos em $\mathbb{P}^n$, esta definição coincide com a do Capítulo 3:

$$h_{\mathbb{P}^n}(X, d) = \min \left(k(n+1), \binom{d+n}{n} \right).$$

Quando temos $h_{\mathbb{P}^n}(X, D) = \deg X$, dizemos que X é *D -independente*. No caso $D = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ dizemos *d -independente*.

De maneira análoga ao que fizemos acima, se $Y \subseteq X$ é subesquema de X e $D' = \mathcal{I}_Y \otimes D$ é o sistema já com as restrições de Y , podemos mostrar que

$$h_{\mathbb{P}^n}(X, D') \leq \deg X - \deg(X \cap Y) = \deg X - \deg Y.$$

Veja também que $h_{\mathbb{P}^n}(X, D) = h_{\mathbb{P}^n}(Y, D) + h_{\mathbb{P}^n}(X, D')$, ou seja, adicionar as restrições de X após as de Y é o mesmo que adicionar todas as de X de uma só vez. De fato,

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{P}^n}(X, D) &= \dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_X \otimes D) \\ &= (\dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_Y \otimes D)) + (\dim H^0(\mathcal{I}_Y \otimes D) - \dim H^0(\mathcal{I}_X \otimes D)) \\ &= (\dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_Y \otimes D)) + (\dim H^0(\mathcal{I}_Y \otimes D) - \dim H^0(\mathcal{I}_X \otimes \mathcal{I}_Z \otimes D)) \\ &= h_{\mathbb{P}^n}(Y, D) + h_{\mathbb{P}^n}(X, D'). \end{aligned}$$

Logo, $h_{\mathbb{P}^n}(X, D) \leq (\deg X - \deg Y) + h_{\mathbb{P}^n}(Y, D)$, e portanto, temos que se X é D -independente, então Y é D -independente.

A função de Hilbert é semicontínua. Isto é, para $t \in \mathbf{k}$, dada uma família plana de esquemas η_t com limite η_0 , temos que existe um aberto O de 0 tal que, para todo $t \in O$,

$$h_{\mathbb{P}^n}(\eta_0, d) \leq h_{\mathbb{P}^n}(\eta_t, d).$$

Portanto, escolhido um esquema η em particular, sempre existe uma vizinhança de esquemas gerais que impõem pelo menos o mesmo número de restrições que η impõe. Em particular, uma configuração geral de k pontos impõe o máximo de restrições que k pontos podem impor, sendo sempre maior ou igual que qualquer outra configuração particular.

Um esquema 0-dimensional é chamado de *curvilinear* quando está contido numa curva não-singular.

Lema 7.3. *Um ponto duplo de uma curva suave possui grau 2. Em particular, um ponto duplo de um esquema curvilinear possui grau menor ou igual a 2.*

Prova. Seja C uma curva não-singular C , e seja $\{p\}^2 \subseteq C$ o ponto duplo em questão. Como C é não-singular, o anel local no ponto p é um domínio de valorização discreta $(\mathcal{O}_{C,p}, \mathfrak{m}_p)$, onde $\mathfrak{m}_p$ é seu ideal maximal. Logo, $\mathcal{O}_{\{p\}^2, p} \cong \frac{\mathcal{O}_{C,p}}{\mathfrak{m}_p^2}$ possui série de composição

$$\frac{\mathcal{O}_{C,p}}{\mathfrak{m}_p^2} \supsetneq \frac{\mathfrak{m}_p}{\mathfrak{m}_p^2} \supsetneq \overline{(0)}$$

de comprimento 2, pois $\mathfrak{m}_p$ é o único ideal não-trivial de $\frac{\mathcal{O}_{C,p}}{\mathfrak{m}_p^2}$. □

Consequentemente, um esquema curvilinear contido numa união de k pontos duplos possui grau menor ou igual a $2k$.

Lema 7.4. *Se um subesquema $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, contido numa união de k pontos duplos, tem suporte num único ponto p e $\deg X = 2$, então X é curvilinear.*

Prova. Queremos mostrar que existe uma curva suave $C \supseteq X$. Tomando o aberto afim $\mathbb{A}^n$ que contém todos os pontos duplos, é suficiente mostrar que $I_C \subseteq I_X$, onde I_C é o ideal da curva em $\mathbb{A}^n$. Faremos por indução em n , mas antes veja que em geral temos

$$\begin{array}{c} \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \\ | \\ \mathfrak{m}_p \\ | \\ I_X \\ | \\ \mathfrak{m}_p^2 \cap \mathfrak{m}_{p_2}^2 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{p_k}^2 \end{array}$$

onde $\{p_2\}^2, \dots, \{p_k\}^2$ são os outros pontos duplos da união que contém X . Além disto,

$$\deg X = 2 \Rightarrow \dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X} = 2.$$

Como $\deg\{p\} = 1$ (ponto simples) e $\deg\{p\}^2 = n + 1 \geq 3$ (ponto duplo em $\mathbb{P}^n$), temos que $I_X \subsetneq \mathfrak{m}_p$ e $I_X \not\subseteq \mathfrak{m}_p^2$. Logo, existe $H \in I_X \setminus \mathfrak{m}_p^2$, $H \in \mathfrak{m}_p$. Supondo sem perda de generalidade que $p = (0, \dots, 0)$, H é uma forma linear $H = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$.

Vamos agora para a indução. Para $n = 2$, tal forma $H = a_1 X_1 + a_2 X_2 \in I_X$ é uma reta, logo é uma curva não-singular que contém X em $\mathbb{A}^2$, e seu fecho projetivo contém $X \subseteq \mathbb{P}^2$. Portanto, X é curvilinear.

Para $n \geq 2$, temos $H \subseteq \mathbb{A}^n$ um hiperplano, pelo qual quocientamos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] & & \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/(H) \\ | & \longrightarrow & | \\ \mathfrak{m}_p & & \mathfrak{m}_p/(H) \\ | & & | \\ I_X & & I_X/(H) \\ | & & | \\ (H) & & (0) \end{array}$$

Como $\dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/(H)}{I_X/(H)} = \dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X} = 2$, ainda temos $\deg X|_H = 2$, logo por hipótese de indução (quando quocientamos por H caímos uma dimensão; pode tomar $(H) = (X_n)$ sem perda de generalidade) $X|_H$ é curvilinear, ou seja, existe $I_C/(H) \subseteq I_X/(H)$ com $H \cap C$ curva não-singular contida em H , e portanto, $I_C \subseteq I_X$ é curva não-singular (contida em H) que contém X . $\square$

Lema 7.5. (Lema Curvilinear)([CHANDLER, 2000](#)) Seja $X \subseteq \mathbb{P}^n$ um esquema 0-dimensional contido numa união finita de pontos duplos gerais e D um sistema linear em $\mathbb{P}^n$. Então X é D -independente se, e somente se, todo subesquema curvilinear de X é D -independente.

Prova. A ida é clara, pois se X é D -independente então todo subesquema Y de X também é D -independente.

Suponhamos então que todo subesquema curvilinear de X é D -independente. Assuma primeiramente o caso em que o suporte de X é um único ponto p . Faremos indução sobre o grau de X . Se $\deg X = 2$, pelo lema anterior temos que X é curvilinear, logo é D -independente.

Suponha então $\deg X > 2$. Se existir $Y \subseteq X$ subesquema satisfazendo

$$\deg Y = \deg X - 1 \text{ e } h_{\mathbb{P}^n}(Y, D) = h_{\mathbb{P}^n}(X, D) - 1,$$

então por hipótese de indução temos $h_{\mathbb{P}^n}(X, D) = h_{\mathbb{P}^n}(Y, D) + 1 = \deg Y + 1 = \deg X$.

Vamos então construir tal esquema. Para isto, considere $\xi \subseteq X$ um subesquema curvilinear de grau 2 de X , que existe pelos Lemas 6.7 e 7.4. Por hipótese, $h_{\mathbb{P}^n}(\xi, D) = 2$, e o ponto simples geral p é sempre D -independente, logo $h_{\mathbb{P}^n}(p, D) = 1$. Logo, existe seção $s \in H^0(D)$ de D tal que s se anula em p mas não em ξ . Defina $Y = X \cap Z$, onde $Z : (s = 0)$ é o esquema de zeros de s .

Afirmção. $\deg Y = \deg X - 1$.

Prova da Afirmção. Pela sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{(s) + I_X}{I_X} \longrightarrow \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X} \longrightarrow \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X + (s)} \longrightarrow 0,$$

temos

$$\deg Y = \dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X + (s)} = \dim \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X} - \dim \frac{(s) + I_X}{I_X} = \deg X - \dim \frac{(s) + I_X}{I_X}.$$

Queremos calcular a dimensão de $\frac{(s) + I_X}{I_X} \subseteq \Gamma(X) = \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X}$, que é o ideal $(\bar{s})$ gerado pelo resíduo $\bar{s}$ de s em $\Gamma(X)$, ou seja, $(\bar{s}) = \{\bar{f} \cdot \bar{s} \mid \bar{f} \in \Gamma(X)\}$.

$$\begin{array}{c} \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \\ | \\ \mathfrak{m}_p \\ | \\ I_X \\ | \\ \mathfrak{m}_p^2 \cap \mathfrak{m}_{p_2}^2 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{p_k}^2 \end{array}$$

Como os $\mathfrak{m}_{p_i}^2 \subseteq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ são dois a dois comaximais, temos pelo Teorema Chinês dos Restos (veja ([ATIYAH; MACDONALD, 1969](#)), p.7) que

$$\frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{m}_{p_i}^2} \cong \prod_{i=1}^k \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{m}_{p_i}^2}.$$

E como X tem suporte apenas em p , então $I_X \not\subseteq \mathfrak{m}_{p_i}$, $2 \leq i \leq k$, logo $I_X + \mathfrak{m}_{p_i}^2 = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, logo, quando quocientamos os $\mathfrak{m}_{p_i}^2$ “somem”: como $\mathfrak{m}_p^2 \cap \mathfrak{m}_{p_2}^2 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{p_k}^2 \subseteq I_X$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X} &\cong \frac{(\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] / \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{m}_{p_i}^2)}{(I_X / \bigcap_{i=1}^k \mathfrak{m}_{p_i}^2)} \cong \prod_{i=1}^k \left(\frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] / \mathfrak{m}_{p_i}^2}{(I_X + \mathfrak{m}_{p_i}^2) / \mathfrak{m}_{p_i}^2} \right) \\ &\cong \prod_{i=1}^k \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X + \mathfrak{m}_{p_i}^2} \cong \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_X + \mathfrak{m}_{p_1}^2}. \end{aligned}$$

Em particular, temos que $I_X + \mathfrak{m}_{p_1}^2 = I_X$.

Note que $s \in \mathfrak{m}_p$ pois anula p , logo, para $\bar{f} \in \overline{\mathfrak{m}_p}$, temos

$$\bar{f} \cdot \bar{s} \in \frac{\mathfrak{m}_p^2 + I_X}{I_X} = (\bar{0}),$$

e portanto, $(\bar{s})$ é formado por elementos da forma $\lambda \bar{s}$, com $\lambda \in \mathbf{k}$, pois como $\mathfrak{m}_p$ é maximal em $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, $\mathbf{k}$ algebricamente fechado, todo $\bar{f}$ se escreve da forma $\bar{f} = \lambda + \bar{g}$, com $g \in \mathfrak{m}_p$, e portanto,

$$\bar{f} \cdot \bar{s} = (\lambda + \bar{g}) \cdot \bar{s} = \lambda \bar{s}.$$

Portanto, $\dim(\bar{s}) = \dim \frac{(s) + I_X}{I_X} = 1$.

Além disto, como s se anula em Y mas não em X , temos que $h_{\mathbb{P}^n}(Y, D) < h_{\mathbb{P}^n}(X, D)$. E como $\deg Y = \deg X - 1$, temos que $h_{\mathbb{P}^n}(X, D) \leq h_{\mathbb{P}^n}(Y, D) + 1$. Portanto, $h_{\mathbb{P}^n}(X, D) = h_{\mathbb{P}^n}(Y, D) + 1$, como queríamos.

Considere agora o caso geral em que o suporte de X é $\{p_1, \dots, p_k\}$. Suponha, por indução, que o lema é verdadeiro para $k - 1$. Defina $A = X \cap \{p_k\}^2$ e $B = X \cap \{p_1, \dots, p_{k-1}\}^2$. Logo X é a união disjunta $A \cup B$.

Considere $D' := \mathcal{I}_B \otimes D$, seja $\zeta \subseteq A$ um subesquema linear de A e $D'' := D \otimes \mathcal{I}_\zeta$.

Observe que, para todo subesquema linear $\eta \subseteq B$ temos

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{P}^n}(\eta, D'') &= \dim H^0(D \otimes \mathcal{I}_\zeta) - \dim H^0(\mathcal{I}_{\zeta \cup \eta} \otimes D) \\ &= (\dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_{\zeta \cup \eta} \otimes D)) - (\dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_\zeta \otimes D)) \\ &= h_{\mathbb{P}^n}(\eta \cup \zeta, D) - h_{\mathbb{P}^n}(\zeta, D) \text{ (são curvilineares, logo } D\text{-independentes)} \\ &= (\deg \zeta + \deg \eta) - \deg \zeta = \deg \eta, \end{aligned}$$

logo, todo subesquema curvilinear de B é D'' -independente. Como B tem suporte em $k - 1$ pontos, por indução segue que B é D'' -independente, isto é $h_{\mathbb{P}^n}(B, D'') = \deg B$.

Da mesma maneira, temos que

$$h_{\mathbb{P}^n}(\zeta \cup B, D) = h_{\mathbb{P}^n}(\zeta, D) + h_{\mathbb{P}^n}(B, D'') = \deg \zeta + \deg B.$$

E por indução, que

$$h_{\mathbb{P}^n}(\zeta, D') = h_{\mathbb{P}^n}(\eta \cup B, D) + h_{\mathbb{P}^n}(B, D) = (\deg \zeta + \deg B) - \deg B = \deg \zeta.$$

Logo, todo subesquema curvilinear de A é D' -independente. Como A tem suporte num único ponto, segue da primeira parte que A é D' -independente.

Portanto, como temos que $\mathcal{I}_A \otimes D' = \mathcal{I}_A \otimes \mathcal{I}_B \otimes D = \mathcal{I}_X \otimes D$, segue que

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{P}^n}(X, D) &= \dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_X \otimes D) = \dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_A \otimes D') \\ &= (\dim H^0(D) - \dim H^0(\mathcal{I}_B \otimes D)) + (\dim H^0(\mathcal{I}_B \otimes D) - \dim H^0(\mathcal{I}_A \otimes D')) \\ &= h_{\mathbb{P}^n}(B, D) + h_{\mathbb{P}^n}(A, D') = \deg B + \deg A = \deg X. \end{aligned}$$

□

7.2 O caso geral

Primeiramente, vamos preparar o que precisamos para calcular a sequência de Castelnuovo que aparece na indução da prova do caso geral.

Lema 7.6. *Seja $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ um hiperplano fixado. Seja η_0 esquema curvilinear de grau 2 com suporte em $\gamma \in \mathbb{P}^{n-1}$ e tal que $\eta_0 \not\subseteq \mathbb{P}^{n-1}$. Então $I_{\eta_0 \cap \mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{P}^{n-1}} = \mathfrak{m}_\gamma$, isto é, o traço de η_0 em $\mathbb{P}^{n-1}$ é o ponto simples γ .*

Prova.

$$\begin{array}{c} \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \\ \downarrow \\ \mathfrak{m}_\gamma \\ \downarrow \quad \searrow \\ I_{\eta_0} \quad \quad (H) \\ \downarrow \quad \quad \nearrow \\ \mathfrak{m}_\gamma^2 \end{array}$$

Numa carta afim que contém γ , temos que $I_{\eta_0} \subseteq \mathfrak{m}_\gamma \subseteq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, onde I_{η_0} e $\mathfrak{m}_\gamma$ são os ideais de η_0 e γ , respectivamente. Seja $H = \mathbb{P}^{n-1}$ o hiperplano, dado na carta por $(H) \subseteq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Então $\eta_0 \not\subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ implica que $I_{\eta_0} \not\subseteq (H)$.

Queremos mostrar que, quotientando por (H) , obtemos $\frac{I_{\eta_0} + (H)}{(H)} = \frac{\mathfrak{m}_\gamma}{(H)}$.

Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{I_{\eta_0} + (H)}{I_{\eta_0}} \longrightarrow \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_{\eta_0}} \longrightarrow \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_{\eta_0} + (H)} \longrightarrow 0.$$

Veja que como $(H) \not\subseteq I_{\eta_0}$, temos que $I_{\eta_0} \not\subseteq I_{\eta_0} + (H)$, logo, $\dim_k \frac{I_{\eta_0} + (H)}{I_{\eta_0}} \geq 1$.

E também que $I_{\eta_0} + (H) \subseteq \mathfrak{m}_\gamma \subsetneq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] \Rightarrow \dim_k \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_{\eta_0} + (H)} \geq 1$.

E como η_0 é curvilinear, temos que $\deg \eta_0 = 2 = \dim_k \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_{\eta_0}}$, portanto, da sequência exata segue que $\dim_k \frac{I_{\eta_0} + (H)}{I_{\eta_0}} = 1 = \dim_k \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_{\eta_0} + (H)}$.

Mas veja que $1 = \dim_k \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{m}_\gamma}$, logo, da sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{\mathfrak{m}_\gamma}{I_{\eta_0} + (H)} \longrightarrow \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{I_{\eta_0} + (H)} \longrightarrow \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{\mathfrak{m}_\gamma} \longrightarrow 0$$

obtemos que $\dim \frac{\mathfrak{m}_\gamma}{I_{\eta_0} + (H)} = 0 \Rightarrow \mathfrak{m}_\gamma = I_{\eta_0} + (H)$. □

Lema 7.7. *Nas mesmas condições do lema anterior, o residual $\widetilde{\eta}_0$ tem grau 1.*

Prova. De fato, no lema anterior mostramos que $I_{\eta_0} + (H) = \mathfrak{m}_\gamma$, e como $(H) \not\subseteq I_{\eta_0}$, temos que $I_{\eta_0} : (H) \neq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, portanto, como $\mathfrak{m}_\gamma$ é maximal, $I_{\eta_0} : (H) = \mathfrak{m}_\gamma$, e segue que $\widetilde{\eta}_0 = \gamma$ é o esquema do ponto simples γ . □

Lema 7.8. *Seja $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ um hiperplano fixado. Seja η_t um esquema curvilinear de grau 2 com suporte em $\delta_{t_1} \notin \mathbb{P}^{n-1}$ e contido na união de pontos duplos $\{\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_\epsilon}\}^2$. Então seu traço com relação a $\mathbb{P}^{n-1}$ é vazio.*

Prova. Basta mostrar, numa carta afim que contém δ_t e H não é o hiperplano do infinito, que $I_{\eta_t \cap \mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{P}^{n-1}} = \frac{\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]}{(H)}$. Equivalentemente, basta mostrar que $I_{\eta_t} + (H) = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.

Como $\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_\epsilon} \notin H$, temos que $(H) \not\subseteq \mathfrak{m}_{\delta_{t_1}}, \dots, \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}}$. Logo, (H) e $(\mathfrak{m}_{\delta_{t_1}} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}})$ não estão contidos num ideal maximal em comum, e portanto, $(H) + (\mathfrak{m}_{\delta_{t_1}} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}}) = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ (ou ainda porque essa soma corresponde à intersecção dos pontos δ_{t_i} com H , a qual é vazia). Lembrando que se ideais I e J são comaximais, $I + J = (1)$, então $I^a + J^b = (1)$ para todo $a, b \geq 1$, segue que $(H) + (\mathfrak{m}_{\delta_{t_1}} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}})^2 = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.

Veja que $(\mathfrak{m}_{\delta_{t_1}} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}})^2 \subseteq \mathfrak{m}_{\delta_{t_i}}^2 \ \forall i$, logo, $(\mathfrak{m}_{\delta_{t_1}} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}})^2 \subseteq \mathfrak{m}_{\delta_{t_1}}^2 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}}^2$. Assim, $(H) + \mathfrak{m}_{\delta_{t_1}}^2 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}}^2 = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.

Por fim, como η_0 está contido em $\{\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_\epsilon}\}^2$, temos que $I_{\eta_0} \supseteq \mathfrak{m}_{\delta_{t_1}}^2 \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\epsilon}}^2$, e portanto, $I_{\eta_0} + (H) = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. □

Lema 7.9. *Nas condições do lema anterior, o residual de η_t com relação a H é o próprio η_t .*

Prova. Queremos mostrar que, numa carta afim adequada, $I_{\tilde{\eta}_t} = I_{\eta_t} : (H) = I_{\eta_t}$.

Como visto na prova do lema anterior, temos que $(H) + \mathfrak{m}_{\delta_{t_1}}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\varepsilon}}^2 = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$, logo, existem $m \in \mathfrak{m}_{\delta_{t_1}}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\varepsilon}}^2$ e $a \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ tais que $m + aH = 1$. Assim, se $x \in I_{\tilde{\eta}_t}$ então $xH = I_{\eta_t}$, logo

$$x = x(m + aH) = xm + axH \in I_{\eta_t},$$

pois $xH = I_{\eta_t}$ e $m \in \mathfrak{m}_{\delta_{t_1}}^2 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{\delta_{t_\varepsilon}}^2 \subseteq I_{\eta_t}$. Portanto, $x \in I_{\eta_t}$, e temos $I_{\tilde{\eta}_t} = I_{\eta_t}$. $\square$

Agora já estamos em condições de aprimorar a indução de Terracini para que cubra todos os casos do Teorema 1.1. Como comentado no Teorema 5.4, para concluir que X impõe condições independentes, precisamos aproveitar a totalidade dos graus de $\tilde{X}$ e $X \cap H$, o que nos gera o problema aritmético de não haver “espaço suficiente” para deixar um ponto no residual nem especializá-lo no traço. Para resolver este problema, precisaremos de um argumento de degeneração que nos permita “quebrar” um ponto em duas partes: uma de grau 1 que ficará no traço e a restante que se manterá no residual.

Antes de especializarmos pontos no traço, gostaríamos de aproveitar o máximo do residual, ou seja, de ter $\deg \tilde{X} = \dim H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1)) = \binom{n+d-1}{n}$. Neste caso, sobra $k(n+1) - \binom{n+d-1}{n}$ do grau de X para o traço. Dividindo por n , temos

$$k(n+1) - \binom{n+d-1}{n} = un + \varepsilon,$$

com $0 \leq \varepsilon < n$. Aqui podemos ver o problema aritmético do Teorema 5.4: podemos especializar u pontos em H , mas se $\varepsilon > 0$, precisaremos especializar mais um ponto, que pode não caber no traço.

O que faremos será considerar para o traço um esquema de u pontos duplos Φ^2 e ε pontos simples Γ , restando $\Gamma_{\mathbb{P}^{n-1}}^2$ e $k - u - \varepsilon$ pontos duplos Σ^2 no residual. Provaremos que estes esquemas são, respectivamente, d e $(d-1)$ -independentes utilizando as hipóteses de indução. Embora não haja uma configuração natural de k pontos duplos em $\mathbb{P}^n$ que nos permita escrever a sequência de Castelnuovo com tais residual e traço, poderemos, nos restringindo a subesquemas curvilineares, e com a ajuda do Lema Curvilinear, obter um esquema de k pontos duplos numa vizinhança de $\Sigma^2 \cup \Phi^2 \cup \Gamma^2$, o qual será d -independente.

Antes de darmos a prova do caso geral, vamos exibir um exemplo particular para ilustrar o método. Vamos provar o Teorema para o caso $d = 6$ em $\mathbb{P}^3$, que é o primeiro exemplo em $\mathbb{P}^3$ para o qual não podemos aplicar o Teorema 5.4 da indução de Terracini. Neste caso, temos $u = 9$ e $\varepsilon = 1$ acima.

Denotaremos por $AH_{n,d}(k)$ a afirmação: *existe uma coleção de k pontos duplos em $\mathbb{P}^n$ que impõe condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.*

Proposição 7.10. *Uma coleção de 21 pontos duplos gerais impõe condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(6)$.*

Prova. Observe que as desigualdades de (i) do Teorema 5.4 se tornam

$$3u \leq \binom{6+3-1}{3-1} = 28 \text{ e } 21 \cdot 4 - 3u \leq \binom{6+3-1}{3}$$

$$\Leftrightarrow u \leq \left\lfloor \frac{28}{3} \right\rfloor = 9 \text{ e } u \geq \left\lceil \frac{28}{3} \right\rceil = 10.$$

Logo, não há escolha de u satisfazendo as condições do Teorema 5.4, e neste caso vamos escolher u máximo satisfazendo $nu < k(n+1) - \binom{d+n-1}{n}$, isto é, $u = 9$. Considere então especializar 9 pontos num plano geral fixado.

Do Teorema 4.1 e do Capítulo 5, temos:

- (i) $AH_{2,6}(9)$, então $\dim I_{9,\mathbb{P}^2}(6) = \binom{2+6}{2} - 9 \cdot 3 = 1$ e $h_{\mathbb{P}^2}(X, 6) = 27$.
- (ii) $AH_{3,5}(12)$, então $\dim I_{12,\mathbb{P}^3}(5) = \binom{3+5}{3} - 12 \cdot 4 = 8$ e $h_{\mathbb{P}^3}(X, 5) = 48$.
- (iii) $AH_{3,4}(11)$ e $\binom{3+4}{3} - 11 \cdot 4 < 0$, logo, $\dim I_{11,\mathbb{P}^3}(4) = 0$, ou seja, não existem quárticas singulares em 11 pontos gerais em $\mathbb{P}^3$.

Passo 1. Fixe um plano $\mathbb{P}^2 \subseteq \mathbb{P}^3$ e $\gamma \in \mathbb{P}^2$ um ponto geral. Seja ainda Σ uma coleção de 11 pontos gerais não pertencentes a $\mathbb{P}^2$.

Por (ii) temos que

$$h_{\mathbb{P}^3}(\{\gamma\}^2 \cup \Sigma^2, 5) = \deg(\{\gamma\}^2 \cup \Sigma^2) = 48,$$

$$\text{logo, } h_{\mathbb{P}^3}(\{\gamma\}_{\mathbb{P}^2}^2 \cup \Sigma^2, 5) = 47.$$

Passo 2. Afirmamos que podemos adicionar 9 pontos simples em $\mathbb{P}^2$ ao esquema $\{\gamma\}_{\mathbb{P}^2}^2 \cup \Sigma^2$, de maneira que o esquema resultante ainda será 5-independente.

De fato, essa conclusão segue se provarmos que não existe hipersuperfície quártica que é a união de um plano e uma quártica por Σ^2 , o que segue de (iii).

Podemos então escolher uma coleção de Φ de 9 pontos simples gerais em $\mathbb{P}^2$ de forma que o esquema $\{\gamma\}_{\mathbb{P}^2}^2 \cup \Sigma^2 \cup \Phi$ é 5-independente, ou seja,

$$h_{\mathbb{P}^3}(\{\gamma\}_{\mathbb{P}^2}^2 \cup \Sigma^2 \cup \Phi, 5) = \deg(\{\gamma\}_{\mathbb{P}^2}^2 \cup \Sigma^2 \cup \Phi) = 47 + 9 = 56.$$

Passo 3. Por (i), temos que $\Phi_{|\mathbb{P}^2}^2 \cup \gamma \subseteq \mathbb{P}^2$ é 6-independente, logo,

$$h_{\mathbb{P}^2}(\Phi_{|\mathbb{P}^2}^2 \cup \gamma, 6) = \deg(\Phi_{|\mathbb{P}^2}^2 \cup \gamma) = 27 + 1 = 28.$$

Aplicamos agora a sequência de Castelnuovo ao esquema $\Phi^2 \cup \Sigma^2$:

$$0 \longrightarrow I_{\Phi \cup \Sigma^2}(5) \longrightarrow I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2}(6) \longrightarrow I_{\Phi_{|\mathbb{P}^2}^2}(6),$$

obtendo que

$$\dim I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2}(6) \leq \dim I_{\Phi \cup \Sigma^2}(5) + \dim I_{\Phi_{|\mathbb{P}^2}^2}(6) \Rightarrow$$

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi^2 \cup \Sigma^2, 6) \geq h_{\mathbb{P}^3}(\Phi \cup \Sigma^2, 5) + h_{\mathbb{P}^2}(\Phi_{|\mathbb{P}^2}^2, 6).$$

Pelos passos 2 e 3 acima, temos que $\Phi \cup \Sigma^2$ é 5-independente e $\Phi_{|\mathbb{P}^2}^2$ é 6-independente, portanto,

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi^2 \cup \Sigma^2, 6) \geq 53 + 27 = 80 = \deg(\Phi^2 \cup \Sigma^2),$$

e portanto, $\Phi^2 \cup \Sigma^2$ é 6-independente.

Agora, para $t \in \mathbf{k}$, escolhemos uma família plana de pontos gerais $\{\delta_t\} \subseteq \mathbb{P}^3$ e uma família de planos $\{H_t\}$ tais que

- $\delta_t \in H_t \forall t$.
- $\delta_t \notin \mathbb{P}^2 \forall t \neq 0$.
- $H_0 = \mathbb{P}^2$ e $\delta_0 = \gamma \in \mathbb{P}^2$.

Como $\Phi^2 \cup \Sigma^2$ é 6-independente, para provar a proposição basta provar a seguinte afirmação.

Afirmação. Existe $t \neq 0$ tal que o esquema $\{\delta_t\}^2$ é independente com relação ao sistema $I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2}(6)$.

Prova da Afirmação. Assuma que a afirmação é falsa por contradição. Então pelo Lema Curvilinear, para todo t existe um par (δ_t, η_t) com η_t um esquema curvilinear de grau 2 com suporte em δ_t e contido em $\{\delta_t\}^2$ tal que

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_t, 6) < \deg(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_t) = (3 + 1)(9 + 11) + 2 = 82.$$

Seja η_0 o limite de η_t , um esquema curvilinear com suporte $\delta_0 = \gamma$ e contido em $\{\gamma\}^2$.

Pela semicontinuidade da função de Hilbert e pela desigualdade anterior obtemos

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_0, 6) \leq h_{\mathbb{P}^3}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_t, 6) < 82. \quad (7.3)$$

Consideremos as duas seguintes possibilidades.

(1) $\eta_0 \not\subseteq \mathbb{P}^2$.

Pelo Lema 7.6, a sequência exata de Castelnuovo com $\Sigma^2 \cup \Phi^2 \cup \eta_0$, fica

$$0 \longrightarrow I_{\Phi \cup \Sigma^2 \cup \widetilde{\eta}_0}(5) \longrightarrow I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_0}(6) \longrightarrow I_{\Phi^2_{|\mathbb{P}^2} \cup \gamma}(6),$$

logo, temos que

$$\begin{aligned} \dim I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_0}(6) &\leq \dim I_{\Phi \cup \Sigma^2 \cup \widetilde{\eta}_0}(5) + \dim I_{\Phi^2_{|\mathbb{P}^2} \cup \gamma}(6) \Rightarrow \\ h_{\mathbb{P}^3}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_0, 6) &\geq h_{\mathbb{P}^3}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup \widetilde{\eta}_0, 5) + h_{\mathbb{P}^2}(\Phi^2_{|\mathbb{P}^2} \cup \gamma, 6). \end{aligned}$$

Pelo Passo 2, $h_{\mathbb{P}^3}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup \{\gamma\}_{|\mathbb{P}^2}^2, 5) = 56$, isto é, $\Phi \cup \Sigma^2 \cup \{\gamma\}_{|\mathbb{P}^2}^2$ é 5-independente, logo, o subesquema $\Phi \cup \Sigma^2 \cup \widetilde{\eta}_0$ também é 5-independente. Como do Lema 7.7 temos que $\widetilde{\eta}_0$ tem grau 1, segue então que

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup \widetilde{\eta}_0, 5) = 54.$$

Pelo Passo 3, $h_{\mathbb{P}^2}(\Phi^2_{|\mathbb{P}^2} \cup \gamma, 6) = 28$. Portanto,

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_0, 6) \geq 54 + 28 = 82,$$

o que contradiz (7.3).

(2) $\eta_0 \subseteq \mathbb{P}^2$.

Pela semicontinuidade da função de Hilbert, existe uma vizinhança aberta O de 0 tal que, $\forall t \in O$,

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup \{\delta_t\}_{|H_t}^2, 5) \geq h_{\mathbb{P}^3}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup \{\gamma\}_{|\mathbb{P}^2}^2, 5) = 56.$$

Em particular, o subesquema $\Phi \cup \Sigma^2 \cup \eta_0 \subseteq \Phi \cup \Sigma^2 \cup \{\gamma\}_{|\mathbb{P}^2}^2$ é 5-independente, e pela semicontinuidade da função de Hilbert, segue que $\Phi \cup \Sigma^2 \cup \eta_t$ é também 5-independente. Então

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup \eta_t, 5) = 9 + 4 \cdot 11 + 2 = 55, \quad \forall t \in O.$$

Pelos Lemas 7.8 e 7.9, a sequência de Castelnuovo no esquema $\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_t$ fica

$$0 \longrightarrow I_{\Phi \cup \Sigma^2 \cup \eta_t, \mathbb{P}^3}(5) \longrightarrow I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_t, \mathbb{P}^3}(6) \longrightarrow I_{\Phi^2_{|\mathbb{P}^2}, \mathbb{P}^2}(6)$$

da qual obtemos que

$$h_{\mathbb{P}^3}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_t, 6) \geq h_{\mathbb{P}^3}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup \eta_t, 5) + h_{\mathbb{P}^2}(\Phi_{|\mathbb{P}^2}, 6) = 55 + 27 = 82,$$

o que contradiz (7.3) novamente. □

Lema 7.11. Fixe inteiros $2 \leq n$, $4 \leq d$, $0 \leq k \leq \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rceil$ e sejam $u \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \varepsilon < n$ tais que $nu + \varepsilon = k(n+1) - \binom{n+d-1}{n}$. Então temos

$$(i) \quad n\varepsilon + u \leq \binom{n+d-2}{n-1};$$

$$(ii) \quad \binom{n+d-2}{n} \leq (k-u-\varepsilon)(n+1);$$

$$(iii) \quad k-u-\varepsilon \geq n+1, \text{ para } d=4 \text{ e } n \geq 10.$$

Prova. (i) Temos $nu + \varepsilon = k(n+1) - \binom{n+d-1}{n} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n} \left(k(n+1) - \binom{n+d-1}{n} - \varepsilon \right) \leq \frac{1}{n} \left(\binom{n+d}{n} - \binom{n+d-1}{n} + (n+1) \right) \\ &= \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} + \frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

logo, como $0 \leq \varepsilon \leq n-1$,

$$n\varepsilon + u \leq n(n+1) + \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} + \frac{n+1}{n}.$$

Note que $\binom{n+d-1}{d-1} = \frac{n+d-1}{d} \binom{n+d-2}{n-1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} n(n+1) + \frac{1}{n} \binom{n+d-1}{n-1} + \frac{n+1}{n} &= n(n+1) + \frac{n+d-1}{nd} \binom{n+d-2}{n-1} + \frac{n+1}{n} \leq \binom{n+d-2}{n-1} \\ \Leftrightarrow \binom{n+d-2}{n-1} \left(1 - \frac{n+d-1}{nd} \right) &\geq n(n+1) + \frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

que é verdadeiro, exceto para $(n, d) = (3, 4), (4, 4), (5, 4)$, casos em que checamos (i) diretamente.

(ii) Basta usar (i) e a definição de u e ε :

$$\begin{aligned} nu + \varepsilon &= k(n+1) - \binom{n+d-1}{n} \Rightarrow k(n+1) = nu + \varepsilon + \binom{n+d-1}{n} \\ (k-u-\varepsilon)(n+1) &= nu + \varepsilon + \binom{n+d-1}{n} - (n+1)u - (n+1)\varepsilon \\ &= \binom{n+d-1}{n} - (u+n\varepsilon) \geq \binom{n+d-1}{n} - \binom{n+d-2}{n-1} = \binom{n+d-2}{n}. \end{aligned}$$

(iii) Pela definição, $u = \frac{k(n+1)}{n} - \frac{1}{n} \binom{n+3}{n} - \frac{\varepsilon}{n}$, logo,

$$\begin{aligned} k-u-\varepsilon &= k - \left[\frac{k(n+1)}{n} - \frac{1}{n} \binom{n+3}{n} - \frac{\varepsilon}{n} \right] - \varepsilon = -\frac{k}{n} + \frac{1}{n} \binom{n+3}{n} - \frac{n-1}{n} \varepsilon \\ &= \frac{1}{n} \left[-k + \binom{n+3}{n} - (n-1)\varepsilon \right] \geq \frac{1}{n} \left[-\frac{1}{n-1} \binom{n+4}{n} - 1 + \binom{n+3}{3} - (n-1)^2 \right], \end{aligned}$$

que é maior ou igual a $n + 1$ para todo $n \geq 10$. $\square$

Teorema 7.12. Fixe inteiros $2 \leq n$, $4 \leq d$, $\left\lfloor \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rfloor \leq k \leq \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rceil$ e sejam $u \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \varepsilon < n$ tais que $nu + \varepsilon = k(n+1) - \binom{n+d-1}{n}$.

Assuma $AH_{n-1,d}(u), AH_{n,d-1}(k-u), AH_{n,d-2}(k-u-\varepsilon)$. Então vale $AH_{n,d}(k)$.

Prova. Construiremos um esquema $\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \Delta_t^2$ de k pontos duplos que impõe condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Passo 1. Escolha um hiperplano $\mathbb{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{P}^n$ e sejam $\Gamma = \{\gamma^1, \dots, \gamma^\varepsilon\}$ uma coleção de ε pontos gerais em $\mathbb{P}^{n-1}$ e Σ uma coleção de $k-u-\varepsilon$ pontos gerais não contidos em $\mathbb{P}^{n-1}$.

Por indução, vale $AH_{n,d-1}(k-u)$, e como $\varepsilon < n$, quaisquer ε pontos em $\mathbb{P}^n$ pertencem a um mesmo hiperplano, ou seja, vale $AH_{n,d-1}(k-u)$ com os ε em $\mathbb{P}^{n-1}$. Temos então

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Gamma^2 \cup \Sigma^2, d-1) = \min \left((n+1)(k-u), \binom{n+d-1}{n} \right),$$

logo,

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Gamma_{\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Sigma^2, d-1) = \min \left((n+1)(k-u) - \varepsilon, \binom{n+d-1}{n} \right).$$

Como $nu + \varepsilon = k(n+1) - \binom{n+d-1}{n}$ e $u \geq 0$, temos

$$\binom{n+d-1}{n} = (n+1)(k-u) - \varepsilon + u \Rightarrow \binom{n+d-1}{n} \geq (n+1)(k-u) - \varepsilon.$$

Logo, $h_{\mathbb{P}^n}(\Gamma_{\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Sigma^2, d-1) = (n+1)(k-u) - \varepsilon$.

Passo 2. Queremos agora adicionar u pontos simples em $\mathbb{P}^{n-1}$ ao esquema $\Gamma_{\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Sigma^2$ de maneira a obtermos um esquema também $(d-1)$ -independente.

Note que $\dim I_{\Gamma_{\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Sigma^2}(d-1) = u$. Logo, basta mostrarmos que não existe hipersuperfície de grau $d-1$ formada pela união de $\mathbb{P}^{n-1}$ e uma hipersuperfície de grau $d-2$ que passa por Σ^2 . E como temos $AH_{n,d-2}(k-u-\varepsilon)$ por indução, segue que

$$\dim I_{\Sigma^2}(d-2) = \max \left(0, \binom{n+d-2}{n} - (k-u-\varepsilon)(n+1) \right) = 0$$

por (ii) do Lema 6.3.

Portanto, podemos escolher uma coleção Φ de u pontos simples em $\mathbb{P}^{n-1}$ de maneira que $\Gamma_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Sigma^2 \cup \Phi$ é $(d-1)$ -independente, e temos

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Gamma_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Sigma^2 \cup \Phi, d-1) = (n+1)(k-u) - \varepsilon + u = \binom{n+d-1}{n}.$$

Dividiremos agora a prova em dois casos.

- *Primeiro caso.* $k(n+1) \leq \binom{d+n}{n}$.

Passo 3. Observe que $k(n+1) \leq \binom{d+n}{n} \Rightarrow k = \left\lfloor \frac{1}{n+1} \binom{d+n}{n} \right\rfloor$ e $nu + \varepsilon \leq \binom{d+n}{n} - \binom{d+n-1}{n} = \binom{d+n-1}{n-1}$.

Como $AH_{n-1,d}(u)$ vale em $\mathbb{P}^{n-1}$, e podemos adicionar pontos simples gerais, temos que $\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Gamma$ é d -independente, logo,

$$h_{\mathbb{P}^{n-1}}(\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Gamma, d) = \min \left(nu + \varepsilon, \binom{d+n-1}{n-1} \right) = nu + \varepsilon.$$

Com isto, e pelo Passo 2, temos que o esquema $\Sigma^2 \cup \Phi$ é $(d-1)$ -independente e o esquema $\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2$ é d -independente. Portanto, aplicando a sequência de Castelnuovo ao esquema $\Sigma^2 \cup \Phi^2$:

$$0 \longrightarrow I_{\Sigma^2 \cup \Phi}(d-1) \longrightarrow I_{\Sigma^2 \cup \Phi^2}(d) \longrightarrow I_{\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2}(d),$$

obtemos

$$\dim I_{\Sigma^2 \cup \Phi^2}(d) \leq \dim I_{\Sigma^2 \cup \Phi}(d-1) + \dim I_{\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2}(d) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{P}^n}(\Sigma^2 \cup \Phi^2, d) &\geq h_{\mathbb{P}^n}(\Sigma^2 \cup \Phi, d-1) + h_{\mathbb{P}^{n-1}}(\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2, d) \\ &= \deg(\Sigma^2 \cup \Phi) + \deg(\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2) = \deg(\Sigma^2 \cup \Phi^2), \end{aligned}$$

e portanto, $\Sigma^2 \cup \Phi^2$ é d -independente.

Agora, para $(t_1, \dots, t_\varepsilon) \in \mathbf{k}^\varepsilon$, escolhemos uma família plana de pontos gerais $\{\delta_{t_1}^1, \dots, \delta_{t_\varepsilon}^\varepsilon\} \subseteq \mathbb{P}^n$ e uma família de hiperplanos $\{H_{t_1}, \dots, H_{t_\varepsilon}\}$ tais que

- $\delta_{t_i}^i \in H_{t_i}, \forall i = 1, \dots, \varepsilon, \forall t_i$;
- $\delta_{t_i}^i \notin \mathbb{P}^{n-1}, \forall t_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, \varepsilon$;
- $H_0 = \mathbb{P}^{n-1}$ e $\delta_0^i = \gamma^i \in \mathbb{P}^{n-1}, \forall i = 1, \dots, \varepsilon$.

E definimos $\Delta_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}^2 := \{\delta_{t_1}^1, \dots, \delta_{t_\varepsilon}^\varepsilon\}^2$ união de pontos duplos. Em particular, $\Delta_{(0, \dots, 0)}^2 = \Gamma^2$.

Como $\Sigma^2 \cup \Phi^2$ é d -independente, para concluirmos este caso basta provar a seguinte afirmação.

Afirmação. Existe $(t_1, \dots, t_\varepsilon)$ tal que o esquema $\Delta_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}^2$ é independente com relação ao sistema $I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2}(d)$.

Prova da Afirmação. Assuma por contradição que é falsa.

Então, pelo Lema Curvilinear, para todo $(t_1, \dots, t_\varepsilon)$ existe subesquema curvilinear η de $\Delta_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}^2$ que não é independente com relação ao sistema $I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2}(d)$. Intersectando η com cada ponto duplo $\{\delta_{t_i}^i\}^2$, e completando cada intersecção para um subesquema curvilinear de grau 2 (se a intersecção tiver grau 0 ou 1 basta tomar um subesquema de grau 2 do ponto duplo, e se já tiver grau 2, tome a própria intersecção), temos que η é subesquema de um subesquema curvilinear $\eta_{t_1}^1 \cup \dots \cup \eta_{t_\varepsilon}^\varepsilon$ de $\Delta_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}^2$ dado como união disjunta de esquemas curvilineares de grau 2, $\eta_{t_i}^i$, $i = 1, \dots, \varepsilon$ com suporte em $\delta_{t_i}^i$ e contidos em $\Delta_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}^2$.

Como η não é $I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2}(d)$ -independente, temos que $\eta_{t_1}^1 \cup \dots \cup \eta_{t_\varepsilon}^\varepsilon$ também não é, ou seja,

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_{t_1}^1 \cup \dots \cup \eta_{t_\varepsilon}^\varepsilon, d) < (n+1)(k-\varepsilon) + 2\varepsilon$$

Seja η_0^i o limite de $\eta_{t_i}^i$ para $i = 1, \dots, \varepsilon$. Defina conjuntos F e G tais que $\eta_0^i \not\subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ para $i \in F \subseteq \{1, \dots, \varepsilon\}$ e $\eta_0^i \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ para $i \in G = \{1, \dots, \varepsilon\} \setminus F$. Dado $t \in \mathbf{k}$, denotamos $Z_t^F := \bigcup_{i \in F} \eta_t^i$ e $Z_t^G := \bigcup_{i \in G} \eta_t^i$. Denote por $\widetilde{\eta_0^i}$ o residual de η_0^i com respeito a $\mathbb{P}^{n-1}$ e por $f := |F|$ e $g := |G|$ as cardinalidades dos conjuntos F e G .

Pela semicontinuidade da função de Hilbert, temos

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup Z_0^F \cup Z_0^G, d) \leq h_{\mathbb{P}^n}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup Z_t^F \cup Z_t^G, d) < (n+1)(k-\varepsilon) + 2\varepsilon. \quad (7.4)$$

Por outro lado, pela semicontinuidade da função de Hilbert, existe uma vizinhança aberta O de 0 tal que para todo $t \in O$,

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup (\bigcup_{i \in F} \widetilde{\eta_0^i}) \cup Z_t^G, d-1) \geq h_{\mathbb{P}^n}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup (\bigcup_{i \in F} \widetilde{\eta_0^i}) \cup Z_0^G, d-1).$$

Como $\Phi \cup \Sigma^2 \cup (\bigcup_{i \in F} \widetilde{\eta_0^i}) \cup Z_0^G \subseteq \Phi \cup \Sigma^2 \cup \Gamma_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2$ é subesquema, pelo Passo 2 é também $(d-1)$ -independente, e temos

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{P}^n}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup (\bigcup_{i \in F} \widetilde{\eta_0^i}) \cup Z_0^G, d-1) &= (n+1)(k-u) - \varepsilon + u - n\varepsilon + f + 2g \\ &= u + (n+1)(k-u-\varepsilon) + f + 2g. \end{aligned}$$

Como $\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup (\bigcup_{i \in F} \gamma^i)$ é subesquema de $\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup \Gamma$, pelo Passo 3 temos que

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Phi_{|\mathbb{P}^{n-1}}^2 \cup (\bigcup_{i \in F} \gamma^i), d-1) = nu + f.$$

Aplicamos agora a sequência de Castelnuovo ao esquema $\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup Z_0^F \cup Z_t^G$, que pelos Lemas 7.6-7.9 fica:

$$0 \longrightarrow I_{\Phi \cup \Sigma^2 \cup (\cup_{i \in F} \widetilde{\eta}_0^i) \cup Z_t^G, \mathbb{P}^n}(d-1) \longrightarrow I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup Z_0^F \cup Z_t^G, \mathbb{P}^n}(d) \longrightarrow I_{\Phi^2_{\mathbb{P}^{n-1}} \cup (\cup_{i \in F} \gamma^i), \mathbb{P}^{n-1}}(d).$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} h_{\mathbb{P}^n}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup Z_0^F \cup Z_t^G, d) &\geq h_{\mathbb{P}^n}(\Phi \cup \Sigma^2 \cup (\cup_{i \in F} \widetilde{\eta}_0^i) \cup Z_t^G, d-1) + h_{\mathbb{P}^{n-1}}(\Phi^2_{\mathbb{P}^{n-1}} \cup (\cup_{i \in F} \gamma^i), d) \\ &\geq [u + (n+1)(k-u-\varepsilon) + f + 2g] + (nu + f) = (n+1)(k-\varepsilon) + 2f + 2g = (n+1)(k-\varepsilon) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

que contradiz (7.4).

• *Segundo Caso.* $k(n+1) > \binom{n+d}{n}$.

Neste caso, $k = \left\lceil \frac{1}{n+1} \binom{n+d}{n} \right\rceil$ e $nu + \varepsilon > \binom{d+n-1}{n-1}$.

Se $\binom{d+n-1}{n-1} - nu < 0$, então como já temos $\varepsilon \geq 0$, segue que

$$\varepsilon = k(n+1) - \binom{n+d-1}{n} - nu \geq 0 \Rightarrow k(n+1) - un \geq \binom{n+d-1}{n},$$

e a condição (ii) do Teorema 5.4 está satisfeita, logo especializando u pontos em $\mathbb{P}^{n-1}$ (pode deixar os ε livres em $\mathbb{P}^n$) e assumindo $AH_{n,d-1}(k-u)$ e $AH_{n-1,d}(u)$ por hipótese de indução, podemos aplicar o Teorema 5.4, desde que não existam hipersuperfícies de grau $d-1$ formadas pela união de $\mathbb{P}^{n-1}$ e uma hipersuperfície de grau $d-2$ singular por $k-u$ pontos gerais de $\mathbb{P}^n$, isto é, desde que tenhamos $I_{k-u \text{ duplos}, \mathbb{P}^n}(d-2) = 0$. E de fato, também por indução temos

$$\dim I_{k-u \text{ duplos}, \mathbb{P}^n}(d-2) = \min \left(0, \binom{n+d-2}{n} - (k-u)(n+1) \right).$$

Como $\binom{n+d-2}{n} = \binom{n+d-1}{n} - \binom{n+d-2}{n-1}$, $k(n+1) - un \geq \binom{n+d-1}{n}$ e $u \leq \binom{n+d-2}{n-1}$ (Lema 7.11(i)), temos que

$$\binom{n+d-2}{n} - (k-u)(n+1) = \binom{n+d-1}{n} - (k(n+1) - un) - \binom{n+d-2}{n-1} + u \leq 0,$$

logo, $\dim I_{k-u \text{ duplos}, \mathbb{P}^n}(d-2) = 0$, e podemos aplicar o Teorema 5.4.

Podemos então assumir $0 \leq v := \binom{d+n-1}{n-1} - nu < \varepsilon$.

Passo 3. Diferentemente do primeiro caso, agora o máximo é atingido:

$$h_{\mathbb{P}^{n-1}}(\Phi^2_{\mathbb{P}^{n-1}} \cup \Gamma, d) = \min \left(nu + \varepsilon, \binom{d+n-1}{n-1} \right) = \binom{d+n-1}{n-1} < nu + \varepsilon.$$

Observe que como cada ponto de Γ aumenta o grau em 1, como $v = \binom{d+n-1}{n-1} - nu$ e $\deg \Phi^2_{|\mathbb{P}^{n-1}} = nu$, temos que o máximo é atingido exatamente com v pontos, isto é, para $\bar{\Gamma} := \{\gamma^1, \dots, \gamma^v\}$, temos

$$h_{\mathbb{P}^{n-1}}(\Phi^2_{|\mathbb{P}^{n-1}} \cup \bar{\Gamma}, d) = \binom{d+n-1}{n-1} = nu + v.$$

Como no primeiro caso, aplicando a sequência de Castelnuovo ao esquema $\Phi^2 \cup \Sigma^2$ obtemos que

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Phi^2 \cup \Sigma^2, d) \geq h_{\mathbb{P}^n}(\Phi \cup \Sigma^2, d-1) + h_{\mathbb{P}^{n-1}}(\Phi^2_{|\mathbb{P}^{n-1}}, d) = \deg(\Phi^2 \cup \Sigma^2),$$

e portanto, $\Phi^2 \cup \Sigma^2$ é d -independente.

Agora escolha uma família plana de pontos gerais $\{\delta_{t_1}^1, \dots, \delta_{t_\varepsilon}^\varepsilon\} \subseteq \mathbb{P}^n$ e uma família de hiperplanos $\{H_{t_1}, \dots, H_{t_\varepsilon}\}$ com as mesmas propriedades de antes.

$$\text{Denote } \bar{\Delta}_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)} := \{\delta_{t_1}^1, \dots, \delta_{t_v}^v\}^2 \cup \{\delta_{t_{(v+1)}}^{v+1}\}^2_{|H_{t_{(v+1)}}} \cup \dots \cup \{\delta_{t_\varepsilon}^\varepsilon\}^2_{|H_{t_\varepsilon}} \subseteq \mathbb{P}^n.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \deg(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \bar{\Delta}_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}) &= u(n+1) + (k-u-\varepsilon)(n+1) + [(n+1)v + n(\varepsilon-v)] \\ &= (n+1)(k-\varepsilon) + n\varepsilon + v = (n+1)k - \varepsilon + v \\ &= (n+1)k - \left[k(n+1) - \binom{n+d-1}{n} - nu \right] + \left[\binom{d+n-1}{n-1} - nu \right] \\ &= \binom{n+d-1}{n} + \binom{n+d-1}{n-1} = \binom{n+d}{d}, \end{aligned}$$

logo, como $h_{\mathbb{P}^n}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \bar{\Delta}_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}, d) \geq h_{\mathbb{P}^n}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \bar{\Delta}_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}, d)$, e $\Phi^2 \cup \Sigma^2$ é d -independente, para provar o teorema basta provarmos a seguinte afirmação.

Afirmação. Existe $(t_1, \dots, t_\varepsilon)$ tal que $\bar{\Delta}_{(t_1, \dots, t_\varepsilon)}$ é independente com relação ao sistema $I_{\Phi^2 \cup \Sigma^2}(d)$.

Prova da Afirmação. Assuma por contradição que a afirmação é falsa, logo pelo Lema Curvilinear temos que para todo $(t_1, \dots, t_\varepsilon)$ existem pares $(\delta_{t_i}^i, \eta_{t_i}^i)$, $i = 1, \dots, \varepsilon$, tais que $\eta_{t_i}^i$ é subesquema curvilinear com suporte $\delta_{t_i}^i$ e contido em $\{\delta_{t_i}^i\}^2$ se $1 \leq i \leq v$, ou $\{\delta_{t_i}^i\}^2_{|\mathbb{P}^{n-1}}$ se $i > v$, e tais que

$$h_{\mathbb{P}^n}(\Phi^2 \cup \Sigma^2 \cup \eta_{t_1}^1 \cup \dots \cup \eta_{t_\varepsilon}^\varepsilon, d) < (n+1)(k-\varepsilon). \quad (7.5)$$

Seja η_0^i o limite de $\eta_{t_i}^i$, $i = 1, \dots, \varepsilon$. Como antes, sejam $F = \{i | \eta_0^i \not\subseteq \mathbb{P}^{n-1}\}$ e $G = \{i | \eta_0^i \subseteq \mathbb{P}^{n-1}\}$. Note que $\eta_0^i \subseteq \{\delta_0^i\}^2_{|\mathbb{P}^{n-1}} = \{\gamma^i\}^2_{|\mathbb{P}^{n-1}}$ para $v+1 \leq i \leq \varepsilon$, logo, $\{v+1, \dots, \varepsilon\} \subseteq G$.

Portanto, $\{1, \dots, v\} \supset F$, e segue que $\Phi^2_{|\mathbb{P}^{n-1}} \cup (\cup_{i \in F} \gamma^i)$ é subesquema de $\Phi^2_{|\mathbb{P}^{n-1}} \cup \bar{\Gamma}$, que é d -independente, logo, $\Phi^2_{|\mathbb{P}^{n-1}} \cup (\cup_{i \in F} \gamma^i)$ é também d -independente, ou seja,

$$h_{\mathbb{P}^{n-1}}(\Phi^2_{|\mathbb{P}^{n-1}} \cup (\cup_{i \in F} \gamma^i), d) = nu + f,$$

e a prova termina exatamente igual ao caso anterior. $\square$

Com este teorema podemos terminar a prova do Teorema de Alexander-Hirschowitz por indução. O caso $d = 3$ já foi feito e nos servirá como base. Assumimos então que o teorema é verdadeiro para todos os graus e dimensões menores que d e n , exceto os da lista de exceções.

Note que se $n \geq 6$ e $d \neq 4$, ou ainda, se $d \geq 7$, então $AH_{n-1,d}(u)$, $AH_{n,d-1}(k-u)$ e $AH_{n,d-2}(k-u-\varepsilon)$ não caem em nenhuma das exceções, e portanto segue por indução do Teorema 7.12 que vale $AH_{n,d}(k)$. Vamos examinar os casos $d = 4, 5$ e 6 .

Se $d = 5$ ou 6 , poderíamos cair numa das exceções se $n = 3$ ou 4 , mas calculando os valores de k, u e ε nestes casos vemos que isto não ocorre e sempre podemos aplicar o Teorema 7.12.

Se $d = 4$, temos que $AH_{n,d-2}(k-u-\varepsilon) = AH_{n,2}(k-u-\varepsilon)$, que é um caso sempre defeituoso para $2 \leq k-u-\varepsilon \leq n$. No entanto, para $n \geq 10$, temos do Lema 6.9(iii) que $k-u-\varepsilon \geq n+1$, e podemos mostrar que vale $AH_{n,2}(k')$ para todo $k' \geq n+1$, isto é, que não há quádricas singulares em $n+1$ pontos gerais de $\mathbb{P}^n$.

De fato, dada quádrica qualquer $F = a_{0,0}X_0^2 + \cdots + a_{n,n}X_n^2 + a_{0,1}X_0X_1 + \cdots + a_{n-1,n}X_{n-1}X_n$ e os $n+1$ pontos $p_0 = [1 : 0 : \cdots : 0], \dots, p_n = [0 : \cdots : 0 : 1]$, temos que

- F é singular em p_0 , então $a_{0,0} = a_{0,1} = \cdots = a_{0,n} = 0$;
- F é singular em p_1 , então $a_{1,1} = a_{1,2} = \cdots = a_{1,n} = 0$;
- $\vdots$
- F é singular em p_n , então $a_{n,n} = 0$.

E portanto $F \equiv 0$, ou seja, não há quádricas singulares nos pontos $p_0, \dots, p_n$.

Assim, visto que $n = 2, 3$ e 4 estão na lista de exceções, sobram apenas $5 \leq n \leq 9$.

Se $n = 9$, temos $k = 71$ ou 72 , para os quais temos $k-u-\varepsilon = 13$ ou 14 , respectivamente, ambos maiores que $n+1$, portanto vale $AH_{n,d-2}(k-u-\varepsilon)$, e podemos aplicar o Teorema 7.12.

Se $n = 8$, temos $k = 55$ e $k-u-\varepsilon = 12$ e concluímos da mesma forma. O mesmo ocorre novamente com $n = 6$, para o qual temos $k = 30$ e $k-u-\varepsilon = 9$.

Se $n = 7$, temos $k = 41$ ou $k = 42$. Para $k = 41$, $k-u-\varepsilon = 6 < n+1$, mas com $u = 30$ temos

$$un = 210 = \binom{d+n-1}{n-1}, \quad k(n+1) - un = 120 < 118 = \binom{d+n-1}{n},$$

e como vale $AH_{6,4}(30)$ e $AH_{7,3}(11)$ (não existem quárticas que são a união de um hiperplano com uma cúbica singular por 11 pontos gerais), podemos aplicar o Teorema 5.4(i). De maneira análoga, podemos aplicar o Teorema 5.4(ii) para quando $k = 42$.

Já para $n = 5$, temos $k = 14$ e $u = 7$ de modo que precisamos do caso defeituoso $AH_{4,4}(14)$ tanto para aplicar o Teorema 7.12 quanto o Teorema 5.4. Por isto, checamos este caso

explicitamente pelo computador:

```

1 A := AlgebraicClosure();
2 P<X0,X1,X2,X3,X4,X5> := ProjectiveSpace(A,5);
3 S := LinearSystem(P,4);
4
5 p1 := P ! [1,0,0,0,0,0]; p2 := P ! [0,1,0,0,0,0];
6 p3 := P ! [0,0,1,0,0,0]; p4 := P ! [0,0,0,1,0,0];
7 p5 := P ! [0,0,0,0,1,0]; p6 := P ! [0,0,0,0,0,1];
8 p7 := P ! [1,1,1,1,1,1]; p8 := P ! [1,2,3,4,5,6];
9 p9 := P ! [-2,1,0,11,3,1]; p10 := P ! [1,0,13,5,7,9];
10 p11 := P ! [4,12,0,95,3,-4]; p12 := P ! [8,1,2,2,22,45];
11 p13 := P ! [88,9,1,9,4,65]; p14 := P ! [2,56,2,-1,5,0];
12 p15 := P ! [53,41,7,1,0,6]; p16 := P ! [6,12,8,4,7,4];
13 p17 := P ! [4,8,12,94,64,1]; p18 := P ! [9,75,3,9,53,2];
14 p19 := P ! [-8,5,72,54,-12,9]; p20 := P ! [5,2,-17,43,1,3];
15 p21 := P ! [10,12,43,75,94,29];
16
17 Sp1 := LinearSystem(S,p1,2);
18 Sp2 := LinearSystem(Sp1,p2,2);
19 Sp3 := LinearSystem(Sp2,p3,2);
20 Sp4 := LinearSystem(Sp3,p4,2);
21 Sp5 := LinearSystem(Sp4,p5,2);
22 Sp6 := LinearSystem(Sp5,p6,2);
23 Sp7 := LinearSystem(Sp6,p7,2);
24 Sp8 := LinearSystem(Sp7,p8,2);
25 Sp9 := LinearSystem(Sp8,p9,2);
26 Sp10 := LinearSystem(Sp9,p10,2);
27 Sp11 := LinearSystem(Sp10,p11,2);
28 Sp12 := LinearSystem(Sp11,p12,2);
29 Sp13 := LinearSystem(Sp12,p13,2);
30 Sp14 := LinearSystem(Sp13,p14,2);
31 Sp15 := LinearSystem(Sp14,p15,2);
32 Sp16 := LinearSystem(Sp15,p16,2);
33 Sp17 := LinearSystem(Sp16,p17,2);
34 Sp18 := LinearSystem(Sp17,p18,2);
35 Sp19 := LinearSystem(Sp18,p19,2);
36 Sp20 := LinearSystem(Sp19,p20,2);
37 Sp21 := LinearSystem(Sp20,p21,2);
38

```

39 #Sections (Sp21) ;

Imprimindo todas as seções podemos ver a dimensão cair de 6 em 6 até chegar a 0.

REFERÊNCIAS

ALEXANDER, J.; HIRSCHOWITZ, A. Polynomial interpolation in several variables. **J. Algebraic Geom.**, v. 4, n. 2, p. 201–222, 1995. Citado na página 15.

ATIYAH, M.; MACDONALD, I. **Introduction to Commutative Algebra**. [S.l.]: Addison-Wesley Series in Mathematics, 1969. Citado na página 55.

BRAMBILLA, M. C.; OTTAVIANI, G. On the Alexander-Hirschowitz theorem. **J. Pure Appl. Algebra**, v. 212, n. 5, p. 1229–1251, 2008. Citado nas páginas 15 e 16.

CHANDLER, K. A. A brief proof of a maximal rank theorem for generic double points in projective space. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 353, n. 5, p. 1907–1920, 2000. Citado nas páginas 15 e 55.

FULTON, W. **Algebraic curves: an introduction to algebraic geometry**. Addison Wesley, 1974. Disponível em: <<http://www.math.lsa.umich.edu/~wfulton/CurveBook.pdf>>. Citado na página 44.

HARRIS, J. **Algebraic Geometry. A First Course**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1992. Citado nas páginas 20, 21, 22, 23 e 24.

HARTSHORNE, R. **Algebraic Geometry**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1977. Citado na página 43.

LANG, S. **Algebra**. 3. ed. [S.l.]: Springer, 2002. Citado na página 23.

MAGMA, C. A. S. **Magma documentation: linear systems**. [S.l.]. Disponível em: <<https://magma.maths.usyd.edu.au/magma/handbook/text/1348>>. Citado na página 75.

SHAFAREVICH, I. R. **Basic Algebraic Geometry 2**. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag, 1994. Citado na página 43.

CÁLCULOS COMPUTACIONAIS

Alguns casos particulares do Teorema 1.1 foram resolvidos explicitamente, apresentando uma configuração de pontos que impõem condições independentes em $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Para facilitar o trabalho, utilizei o software Magma, que possui uma versão disponível online em <http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>.

O programa possui pronta a função LinearSystem, que calcula os sistemas de polinômios homogêneos de grau d em n variáveis com restrições dadas, como por exemplo, pontos com multiplicidade. Para mais detalhes, veja (MAGMA,).

Exemplo A.1. Vamos mostrar que 4 pontos duplos impõem condições independentes em curvas de grau 4 em $\mathbb{P}^2$. A dimensão esperada para $I_X(d)$ nesse caso é $\binom{2+4}{2} - 3 \cdot 4 = 3$. Escolhemos os pontos $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1]$ e $p_4 = [1 : 1 : 1]$ e calculamos a dimensão de $I_X(d)$:

```

1 // Definimos A um corpo algebricamente fechado
2 // de caracteristica zero.
3 A := AlgebraicClosure();
4
5 // P o espaco projetivo de dimensao 2 sobre A, com variaveis
6 // X0, X1 e X2.
7 P<X0,X1,X2> := ProjectiveSpace(A,2);
8
9 // S o espaco de todos os polinomios homogeneos de grau 4 nas
10 // variaveis X0, X1 e X2.
11 S := LinearSystem(P,4);
12
13 // Definimos os pontos.
14 p1 := P ! [1,0,0]; p2 := P ! [0,1,0]; p3 := P ! [0,0,1];

```

```

15 p4 := P ! [1,1,1];
16
17 // E agora impomos, uma a uma, as restricoes.
18 // O numero 2 na funcao indica o ponto com multiplicidade 2.
19 Sp1 := LinearSystem(S,p1,2);
20 Sp2 := LinearSystem(Sp1,p2,2);
21 Sp3 := LinearSystem(Sp2,p3,2);
22 Sp4 := LinearSystem(Sp3,p4,2);
23
24 // Por fim, imprimimos as dimensoes de cada espaco.
25 #Sections(S);
26 #Sections(Sp1); #Sections(Sp2); #Sections(Sp3); #Sections(Sp4);

```

O programa então retorna:

```

1 15
2 12
3 9
4 6
5 3

```

mostrando que a cada ponto duplo adicionado a dimensão do sistema cai em 3 (que é o grau do ponto duplo em $\mathbb{P}^2$) até chegar na esperada. Portanto, todos os 4 pontos estão impondo condições independentes, cada um no sistema anterior a ele.

Outra ideia é definir os pontos a partir de seus ideais e calcular a função de Hilbert diretamente:

```

1 A := AlgebraicClosure();
2 // R anel de polinomios em tres variaveis sobre A.
3 R<X0,X1,X2> := PolynomialRing(A,3);
4
5 // Definimos os ideais de cada um dos 4 pontos.
6 I1 := ideal<R|X1,X2>;
7 I2 := ideal<R|X0,X2>;
8 I3 := ideal<R|X0,X1>;
9 I4 := ideal<R|X0-X2,X1-X2>;
10 // Calculamos os ideais dos pontos duplos
11 J1 := I1 * I1;
12 J2 := I2 * I2;
13 J3 := I3 * I3;

```

```

14 J4 := I4 * I4;
15 // Calculamos o ideal da uniao dos pontos duplos.
16 I := J1 meet J2 meet J3 meet J4;
17
18 // Calculamos entao o coeficiente do termo de grau 4 da
19 // serie de Hilbert
20 S<t> := HilbertSeries(I,5);
21 N := Coefficient(S, 4);
22
23 // E o subtraímos da dimensao total para calcular a de I_X(d)
24 Binomial(2+4,2)-N;

```

que imprime 3, como esperado. No entanto, esse método se mostrou bastante lento, tendo dificuldades já em casos pouco maiores.

Podemos ainda calcular a dimensão utilizando a configuração do Teorema 1.2: calculamos as tangentes a $V^{n,d}$ em pontos escolhidos e aplicamos o Primeiro Lema de Terracini para obter a dimensão de $\sigma_k(V^{d,n})$.

Vamos mostrar mais um exemplo, calculando o caso $n = 5$ da prova da Proposição 6.8 abaixo, e depois apenas citarei configurações particulares que impõem condições independentes para cada um dos casos que necessitamos.

Prova da Proposição 6.8

- Para $n = 5$, tome os espaços de codimensão 3:

$$\begin{aligned}
 L &: (X_0 = 0) \cap (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0); \\
 M &: (X_3 = 0) \cap (X_4 = 0) \cap (X_5 = 0); \\
 N &: (X_0 - X_3 = 0) \cap (X_1 - X_4 = 0) \cap (X_2 - X_5 = 0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{E pontos } l_1 = [0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1], l_2 = [0 : 0 : 0 : 2 : 3 : 1], l_3 = [0 : 0 : 0 : 1 : 7 : 1]; \\
 &m_1 = [1 : 2 : -2 : 0 : 0 : 0], m_2 = [1 : 4 : 7 : 0 : 0 : 0], m_3 = [1 : -5 : 8 : 0 : 0 : 0]; \\
 &n_1 = [1 : -1 : -8 : 1 : -1 : -8], n_2 = [-1 : 2 : 0 : -1 : 2 : 0], n_3 = [3 : -2 : 7 : 3 : -2 : 7].
 \end{aligned}$$

Escrevemos então no Magma:

```

1 A := AlgebraicClosure();
2 P<X0,X1,X2,X3,X4,X5> := ProjectiveSpace(A,5);
3 S := LinearSystem(P,3);

```

```

4
5 // Podemos definir esquemas como zeros de polinomios.
6 L := Scheme(P,[X0,X1,X2]);
7 M := Scheme(P,[X3,X4,X5]);
8 N := Scheme(P,[X0-X3,X2-X4,X2-X5]);
9
10 l1 := P ! [0,0,0,1,1,1];
11 l2 := P ! [0,0,0,2,3,1];
12 l3 := P ! [0,0,0,1,7,1];
13 m1 := P ! [1,2,-2,0,0,0];
14 m2 := P ! [1,4,7,0,0,0];
15 m3 := P ! [1,-5,8,0,0,0];
16 n1 := P ! [1,-1,-8,1,-1,-8];
17 n2 := P ! [-1,2,0,-1,2,0];
18 n3 := P ! [3,-2,7,3,-2,7];
19
20 SL := LinearSystem(S,L);
21 SM := LinearSystem(SL,M);
22 SN := LinearSystem(SM,N);
23
24 S11 := LinearSystem(SN,l1,2);
25 S12 := LinearSystem(S11,l2,2);
26 S13 := LinearSystem(S12,l3,2);
27
28 Sm1 := LinearSystem(S13,m1,2);
29 Sm2 := LinearSystem(Sm1,m2,2);
30 Sm3 := LinearSystem(Sm2,m3,2);
31
32 Sn1 := LinearSystem(Sm3,n1,2);
33 Sn2 := LinearSystem(Sn1,n2,2);
34 Sn3 := LinearSystem(Sn2,n3,2);
35
36 #Sections(S); #Sections(SL); #Sections(SM); #Sections(SN);
37 #Sections(S11); #Sections(S12); #Sections(S13);
38 #Sections(Sm1); #Sections(Sm2); #Sections(Sm3);
39 #Sections(Sn1); #Sections(Sn2); #Sections(Sn3)

```

que imprime:

2	46
3	36
4	26
5	23
6	20
7	17
8	14
9	11
10	8
11	5
12	2
13	0

• Para $n = 6$, tome os espaços de codimensão 3:

$$L : (X_0 = 0) \cap (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0);$$

$$M : (X_3 = 0) \cap (X_4 = 0) \cap (X_5 - X_6 = 0);$$

$$N : (X_0 - X_3 = 0) \cap (X_1 - X_4 = 0) \cap (X_2 - X_5 = 0).$$

E pontos $l_1 = [0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1]$, $l_2 = [0 : 0 : 0 : 2 : 3 : 1 : 9]$, $l_3 = [0 : 0 : 0 : 1 : 7 : 1 : 2]$;
 $m_1 = [1 : 2 : -2 : 0 : 0 : 2 : 2]$, $m_2 = [1 : 4 : 7 : 0 : 0 : 3 : 3]$, $m_3 = [1 : -5 : 8 : 0 : 0 : 4 : 4]$;
 $n_1 = [1 : -1 : -8 : 1 : -1 : -8 : 5]$, $n_2 = [-1 : 2 : 0 : -1 : 2 : 0 : 6]$, $n_3 = [3 : -2 : 7 : 3 : -2 : 7 : 4]$.

• Queremos também mostrar que não existem quádricas que contêm $L \cup M \cup N$ no caso $n = 7$. Tome por exemplo os espaços de codimensão 3:

$$L : (X_0 = 0) \cap (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0);$$

$$M : (X_3 = 0) \cap (X_4 = 0) \cap (X_5 = 0);$$

$$N : (X_6 = 0) \cap (X_7 = 0) \cap (X_0 - X_3 = 0).$$

Prova da Proposição 6.9

• Para $n = 5$, tome os espaços de codimensão 3:

$$L : (X_0 = 0) \cap (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0);$$

$$M : (X_3 = 0) \cap (X_4 = 0) \cap (X_5 = 0);$$

E pontos $l_1 = [0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1]$, $l_2 = [0 : 0 : 0 : 2 : 3 : 1]$, $l_3 = [0 : 0 : 0 : 1 : 7 : 1]$;
 $m_1 = [1 : 2 : -2 : 0 : 0 : 0]$, $m_2 = [1 : 4 : 7 : 0 : 0 : 0]$, $m_3 = [1 : -5 : 8 : 0 : 0 : 0]$;
 $p_1 = [1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6]$, $p_2 = [7 : 0 : 3 : 1 : 2 : 2]$, $p_3 = [9 : -1 : 5 : 5 : -3 : 0]$.

- Para $n = 7$, tome os espaços de codimensão 3:

$$L : (X_0 = 0) \cap (X_1 = 0) \cap (X_2 = 0);$$

$$M : (X_3 = 0) \cap (X_4 = 0) \cap (X_5 = 0);$$

E pontos $l_1 = [0 : 0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1]$, $l_2 = [0 : 0 : 0 : 2 : 3 : 1 : 0 : 2]$,
 $l_3 = [0 : 0 : 0 : 1 : 7 : 1 : 3 : 3]$, $l_4 = [0 : 0 : 0 : 1 : 6 : 8 : 7 : -3]$, $l_5 = [0 : 0 : 0 : 9 : -2 : -9 : 5 : 5]$,
 $m_1 = [1 : 2 : -2 : 0 : 0 : 0 : 5 : 6]$, $m_2 = [1 : 4 : 7 : 0 : 0 : 0 : 3 : 1]$, $m_3 = [1 : -5 : 8 : 0 : 0 : 0 : 4 : 4]$,
 $m_4 = [5 : 8 : 7 : 0 : 0 : 0 : 2 : 2]$, $m_5 = [-1 : -2 : -3 : 0 : 0 : 0 : 6 : -4]$,
 $p_1 = [1 : -2 : 3 : 4 : -5 : -6 : 7 : 8]$, $p_2 = [7 : 0 : 3 : 1 : 2 : 2 : 11 : 9]$,
 $p_3 = [9 : -1 : 5 : 5 : -3 : 0 : 0 : 1]$.

Prova da Proposição 6.10

- Para $n = 5$, tome os espaço de codimensão 3:

$$L : (X_3 = 0) \cap (X_4 = 0) \cap (X_5 = 0);$$

E pontos $l_1 = [1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0]$, $l_2 = [0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0]$, $l_3 = [0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0]$,
 $p_1 = [0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 0 : 0 : 0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1]$,
 $p_4 = [1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1]$, $p_5 = [7 : 0 : 3 : 1 : 2 : 2]$, $p_6 = [9 : -1 : 5 : 5 : -3 : 0]$.

Tome ainda o esquema η de grau 2 e suporte em $[1 : 1 : 1 : 0 : 0 : 0]$ dado pelo ideal homogêneo $I_\eta = (X_0 - X_1, X_0 - X_2, X_3, X_4, X_5^2)$. Note que $\eta \not\subseteq L$, de modo que sua intersecção com L tem grau 1, conforme podemos checar no Magma: o comando

```

1 > A := AlgebraicClosure();
2 > P<X0,X1,X2,X3,X4,X5> := ProjectiveSpace(A,5);
3
4 > Eta := Scheme(P,[X0-X1,X0-X2,X3,X4,X5^2]);
5 > L := Scheme(P,[X3,X4,X5]);
6 > LintEta := Intersection(L,Eta);
7
8 > Degree(Eta);
9 > Degree(LintEta);

```

retorna

```

1 2
2 1

```

Calculamos então o sistema linear de cúbicas em $\mathbb{P}^5$ que contém L , todos os pontos duplos e o esquema η :

```

1 > A := AlgebraicClosure();
2 > P<X0,X1,X2,X3,X4,X5> := ProjectiveSpace(A,5);
3 > S := LinearSystem(P,3);
4
5 > L := Scheme(P,[X3,X4,X5]);
6 > l1 := P ! [1,0,0,0,0,0]; l2 := P ! [0,1,0,0,0,0];
7 > l3 := P ! [0,0,1,0,0,0];
8 > p1 := P ! [0,0,0,1,0,0]; p2 := P ! [0,0,0,0,1,0];
9 > p3 := P ! [0,0,0,0,0,1];
10 > p4 := P ! [1,1,1,1,1,1]; p5 := P ! [7,0,3,1,2,2];
11 > p6 := P ! [9,-1,5,5,-3,0];
12 > Eta := Scheme(P,[X0-X1,X0-X2,X3,X4,X5^2]);
13
14 > SL := LinearSystem(S,L);
15
16 > S11 := LinearSystem(SL,l1,2);
17 > S12 := LinearSystem(S11,l2,2);
18 > S13 := LinearSystem(S12,l3,2);
19 > Sp1 := LinearSystem(S13,p1,2);
20 > Sp2 := LinearSystem(Sp1,p2,2);
21 > Sp3 := LinearSystem(Sp2,p3,2);
22 > Sp4 := LinearSystem(Sp3,p4,2);
23 > Sp5 := LinearSystem(Sp4,p5,2);
24 > Sp6 := LinearSystem(Sp5,p6,2);
25
26 > SEta := LinearSystem(Sp6,Eta);
27
28 > #Sections(SEta);

```

O que retorna 0 seções.

• Para $n = 7$, tome os espaço de codimensão 3:

$$L : (X_5 = 0) \cap (X_6 = 0) \cap (X_7 = 0);$$

$$\begin{aligned}
&\text{E pontos } l_1 = [1:0:0:0:0:0:0:0], l_2 = [0:1:0:0:0:0:0:0], \\
&l_3 = [0:0:1:0:0:0:0:0], l_4 = [0:0:0:1:0:0:0:0], l_5 = [0:0:0:0:1:0:0:0], \\
&l_6 = [1:1:1:1:1:0:0:0], l_7 = [1:2:3:4:5:0:0:0],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1 &= [0:0:0:0:0:1:0:0], p_2 = [0:0:0:0:0:0:1:0], p_3 = [0:0:0:0:0:0:0:1]; \\
p_4 &= [1:1:1:1:1:1:1:1], p_5 = [7:0:3:1:2:2:-3:-5], \\
p_6 &= [9:-1:5:5:-3:0:-7:11], p_7 = [4:2:3:10:-3:-6:0:-1], \\
p_8 &= [8:11:13:-8:4:17:1:12].
\end{aligned}$$

Prova do Teorema 6.11

• Para $n = 7$, tome os pontos

$$\begin{aligned}
p_1 &= [1:0:0:0:0:0:0:0], p_2 = [0:1:0:0:0:0:0:0], p_3 = [0:0:1:0:0:0:0:0], \\
p_4 &= [0:0:0:1:0:0:0:0], p_5 = [0:0:0:0:1:0:0:0], p_6 = [0:0:0:0:0:1:0:0], \\
p_7 &= [0:0:0:0:0:0:1:0], p_8 = [0:0:0:0:0:0:0:1], p_9 = [1:1:1:1:1:1:1:1], \\
p_{10} &= [1:2:3:4:5:6:7:8], p_{11} = [3:5:7:-9:11:-13:15:1], \\
p_{12} &= [6:7:2:0:11:-2:5:5], p_{13} = [7:0:3:1:2:2:-3:-5], \\
p_{14} &= [9:-1:5:5:-3:0:-7:11], p_{15} = [4:2:3:10:-3:-6:0:-1].
\end{aligned}$$