ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ESPAÇOS DE REVESTIMENTO E APLICAÇÕES À TEORIA DE NÓS

Washington Luiz Marar

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

ESPAÇOS DE REVESTIMENTO E APLICAÇÕES À TEORIA DE NÓS

Washington Luiz Marar

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

SÃO CARLOS
1983

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a Maria Helena Derigi pelo enorme incentivo desde os primeiros dias no ICMSC em 1976 até hoje e pelo excelente trabalho de datilografia; aos professores Carlos Biasi, Mario Rameh Saab e Gilberto Francisco Loibel pela dedicação, apoio e atenção que sempre me deram, este último, meu orientador, desde a iniciação científica em 1978. Por último, mas não menos importante, agradeço ao professor Oziride Manzoli Neto não só pela orientação, paciência e confiança não triviais que sempre me dedicou, mas pelos contínuos diálogos nos quais reconheci a diferença entre uma pessoa séria e uma pessoa que leva as coisas a sério.

Dedico esta dissertação a Issa Marar, Najla Rox Uzeizi Marar e aos números 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 e 9.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da FAPESP, FINEP e do CNPq.

COVERING SPACES AND APPLICATIONS TO KNOT THEORY

Washington Luiz Marar

Adviser: Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

A B S T R A C T

The purpose of this work is to present some of the usefulness of covering spaces in mathematics, in particular to Knot Theory. Some other tools from Algebraic Topology are used in connection with covering spaces and a brief introduction is presented.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

§ 1. MATERIAL BÁSICO DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA 1

§ 2. ESPAÇOS DE REVESTIMENTO 9

§ 3. ALGUMAS APLICAÇÕES 27

CAPÍTULO II

ESPAÇOS DE REVESTIMENTO DO COMPLEMENTAR DE UM NÓ (OU LINK) EM S^{n+2} ..

§ 1. MATERIAL BÁSICO DE TEORIA DE NÓS 31

§ 2. REVESTIMENTO CÍCLICO INFINITO DE UM NÓ 45

§ 3. REVESTIMENTO CÍCLICO FINITO DE UM NÓ 59

§ 4. REVESTIMENTO LIVRE DE UM LINK DE BORDO 63

§ 5. REVESTIMENTO ABELIANO UNIVERSAL DE UM LINK 75

§ 6. REVESTIMENTO DO NÚMERO TOTAL DE ENLAÇAMENTO 85

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES

§ 1. APLICAÇÃO 1 89

§ 2. APLICAÇÃO 2 97

BIBLIOGRAFIA 103

INTRODUÇÃO

Teoria de espaços de revestimento é parte importante da topologia, sendo útil em muitos ramos da Matemática.

É utilizado, por exemplo, para reduzir o estudo de certos problemas de variedades para outras simplesmente conexas.

Outra aplicação importante desta teoria é o estudo de nós (e links) diferenciáveis de codimensão dois. Observa-se aqui que apenas nesta codimensão é que o complementar do nó (ou link) tem grupo fundamental não trivial dando margem portanto à construção de Espaços de Revestimento que são fontes de muitos invariantes.

Restringimo-nos a nós diferenciáveis (ou seja P.L. flat) pois no caso topológico temos os chamados nós selvagens (wild knots) que nos levariam a estudos não objetivados por este trabalho.

O objetivo desta dissertação é estudar e exemplificar as ligações entre os tratamentos algébricos e geométricos de espaços de revestimentos que possam ser obtidos através de "construções geométricas", propiciando, assim, um entendimento geométrico dos mesmos.

Muitas demonstrações são feitas com forte apelo "geométrico" não só pela dificuldade de formalização, mas também pelas vantagens oriundas da "visualização geométrica" das situações.

O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro apresentamos uma exposição sistemática de ferramentas da topologia algébrica e algumas aplicações; no segundo, uma exposição geral sobre teoria de nós (e links) e espaços de revestimento mais usados nesta teoria. Algumas aplicações são feitas para efeito ilustrativo. O terceiro capítulo contém algumas aplicações.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

§ 1. MATERIAL BÁSICO DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA

1.1. Grupos de Homotopia

Seja (X,x_o) um par onde X é um espaço topológico e x_o um ponto de X.

Denotaremos por $\pi_1(X,x_o)$ o grupo fundamental do espaço X com ponto base x_o. Os elementos deste grupo são as classes de homotopia de aplicações $f : (S^1,p_o) \to (X,x_o)$; isto é, aplicações contínuas $f : S^1 \to X$ tais que $f(p_o) = x_o$.

Para $n \in Z$; $n > 1$, denotaremos por $\pi_n(X,x_o)$ o n-ésimo grupo de homotopia de X com ponto básico x_o, o qual é constituido pelas classes de homotopia de aplicações $f : (S^n,p_o) \to (X,x_o)$.

Proposição 1.1.1.

Sejam X um espaço topológico conexo por caminhos e, x_o e x_1 pontos de X ; então $\pi_1(X,x_o) \simeq \pi_1(X,x_1)$.

Observação

Para espaços conexos por caminhos geralmente indicaremos o grupo fundamental por $\pi_1(X)$, omitindo-se o ponto básico.

Proposição 1.1.2.

$\pi_1(X \times Y,(x_o,y_o)) \simeq \pi_1(X,x_o) \times \pi_1(Y,y_o)$.

Proposição 1.1.3.

$\pi_n(X,x_o)$ é abeliano, para $n > 1$.

Definição 1.1.4.

Um espaço X conexo por caminhos é dito simplesmente conexo se $\pi_1(X) = 0$.

1.2. *Grupos de Homologia e Cohomologia*

A. *Homologia*

Um complexo de cadeias C é uma seqüência de grupos abelianos C_q e homomorfismos $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$ indexados pelos inteiros positivos e tais que $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$.

Os homomorfismos ∂_q são chamados operadores de bordo, os elementos de C_q são chamados q-cadeias, o grupo $Z_q(C)=\ker \partial_q$ é chamado grupo dos q-ciclos, o grupo $B_q(C) = \text{im } \partial_{q+1}$ é chamado grupo dos q-bordos e o grupo quociente $H_q(C) = Z_q(C)/B_q(C)$ é chamado q-ésimo grupo de homologia.

Observação

O grupo de homologia $H_q(C)$; $q \in Z_+$, "mede" o quanto a seqüência

$$\ldots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \ldots \text{ não é exata.}$$

Seja G um grupo abeliano. Consideremos a cadeia

$$C \otimes G : \ldots \to C_{n+1} \otimes G \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes 1_G} C_n \otimes G \xrightarrow{\partial_n \otimes 1_G} C_{n-1} \otimes G \quad \ldots \to$$

onde $1_G : G \to G$ é o homomorfismo identidade. Definimos $H_n(C,G) = H_n(C \otimes G)$ como sendo o grupo de homologia do complexo C com coeficientes no grupo G.

Observação

Quando G for um anel comutativo com unidade, $H_n(C,G)$ é um G-módulo.

A seguir enunciaremos um resultado que relaciona $H_n(C,G)$ com $H_n(C)$.

Teorema 1.2.1. (Coeficientes Universais)

Seja C um complexo de cadeia onde todos os C_n são grupos livres. Então

$$H_n(C,G) = H_n(C) \otimes G \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C),G).$$

Observação

Se A ou B são grupos livres temos que $\mathrm{Tor}(A,B) = 0$.

B. *Cohomologia*

Um complexo de cocadeias C é uma seqüência

$$\ldots \to C^n \xrightarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+2}} C^{n+2} \to \ldots$$

de grupos abelianos C^n e homomorfismos tais que $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$.

Os homomorfismos δ^n são chamados operadores de cobordo, os elementos de C^n são chamados n-cocadeias, o grupo $Z^n(C) = \ker \delta^{n+1}$ é chamado grupo dos n-cociclos, o grupo $B^n(C) = \text{im } \delta^n$ é chamado grupos dos n-cobordos e o grupo $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$ é chamado n-ésimo grupo de cohomologia do complexo de cocadeias C.

Sejam G um grupo abeliano, $C : \ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \to \ldots$ um complexo de cadeias e $C^n = \text{Hom}(C_n, G)$. Consideremos $\alpha \in \text{Hom}(C_{n-1}, G)$. Seja δ^{n-1} tal que $\delta^{n-1}(\alpha) = \alpha \circ \partial_n$, então a seqüência $\ldots \to C^{n+1} \xrightarrow{\delta^n} C^n \xrightarrow{\delta^{n+1}} C^{n-1} \to \ldots$ é um complexo de cocadeias e $H^n(C,G) = \dfrac{\ker \delta^{n+1}}{\text{im } \delta^n}$.

Também neste caso vale o

Teorema 1.2.2. (Coeficientes Universais)

Se os C_n são livres,

$$H^n(C,G) = \text{Hom}(H_n(C),G) \oplus \text{Ext}(H_{n-1}(C),G).$$

Observação

$\text{Ext}(A,B) = 0$ se A é um grupo livre.

C. *Homologia Singular*

Sejam X um espaço topológico, $\{e_o, \ldots, e_n\}$ base canônica do R^{n+1}, $\Delta_n = \{\lambda_o e_o + \ldots + \lambda_n e_n : 0 \leq \lambda_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=0} \lambda_i = 1\}$ e $S_n(X) = \{\sigma : \Delta_n \to X \mid \sigma \text{ são aplicações contínuas}\}$.

Os elementos de $S_n(X)$ são chamados n-simplexos singulares de X.

Seja $F_n(X)$ o grupo livre cujos geradores são os elementos de $S_n(X)$; isto é, $Z_n \in F_n(X)$ se, e só se, $Z_n = \Sigma\eta_\alpha\sigma_\alpha$; $\eta_\alpha \in Z$; soma finita. Os elementos Z_n são chamados n-cadeias singulares de X.

Vamos definir o operador bordo $\partial_n : F_n(X) \to F_{n-1}(X)$, para tanto basta definí-lo em um elemento genérico σ de $S_n(X)$.

Sejam

$$\Delta^i_{n-1} = \{\lambda_o e_o + \ldots + \lambda_j e_j + \ldots + \lambda_n e_n : 0 \leq \lambda_j \leq 1;\ \Sigma\lambda_j = 1,\ \lambda_i = 0\}$$

a i-ésima face e $\sigma_i = \sigma | \Delta^i_{n-1}$

Definimos $\partial_n(\sigma) = \Sigma(-1)^i \sigma_i$.

Observa-se neste caso que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Definimos $H_n(X,Z) = \dfrac{\ker \partial_n}{\text{im } \partial_{n+1}}$ e denominamos n-ésimo grupo de homologia singular do espaço X com coeficientes em Z. Denotaremos $H_n(X,Z)$ simplesmente por $H_n(X)$.

Analogamente definimos $H_n(X,G) = H_n(F(X),G)$ e $H^n(X,G) = H^n(F(X),G)$.

Como neste caso os $F_n(X)$ são grupos livres vale o teorema dos coeficientes universais.

Um relacionamento entre os grupos de homotopia e os grupos de homologia de certos espaços é dado pelo:

Teorema 1.2.3. (Hurewicz)

Seja X um espaço simplesmente conexo. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\pi_j(X) = 0 \; ; \; 1 \leq j \leq n-1$

(ii) $H_j(X) = 0 \; ; \; 1 \leq j \leq n-1.$

No caso de uma das duas condições acima estar verificada, podemos afirmar que:

(iii) $H_n(X) \simeq \pi_n(X).$

Além disso temos:

Teorema 1.2.4.

$$H_1(X) = \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X);\pi_1(X)]}$$

onde $[\pi_1(X);\pi_1(X)]$ é o comutador de $\pi_1(X)$.

A homologia do produto cartesiano de dois espaços é dada pelo:

Teorema 1.2.5. (Fórmula de Künneth)

$$H_j(X \times Y) \simeq \bigoplus_{i=0}^{j} H_i(X) \otimes H_{j-i}(Y) \oplus \bigoplus_{i=0}^{j} \mathrm{Tor}(H_i(X);H_{j-i-1}(Y)).$$

Corolário 1.2.6.

Se todos os módulos de homologia de Y (ou de X) são livres para dimensões menores que j, então

$$H_j(X \times Y) = \bigoplus_{i=0}^{j} H_i(X) \otimes H_{j-1}(Y).$$

Outro importante resultado para se calcular os grupos de homologia de um espaço X é dado pelo:

Teorema 1.2.7. (Seqüência de Mayer-Vietoris)

Seja (X,U,V) uma triada exata (isto é, $k_1 : (U, U \cap V) \to (U \cup V, V)$ e $k_2 : (V, U \cap V) \to (U \cup V, U)$ são excisões) onde $X = U \cup V$. Então a seqüência

$$\to \ldots H_q(U \cap V, G) \to H_q(U,G) \oplus H_q(V,G) \to H_q(X,G) \to H_{q-1}(U \cap V, G) \to \ldots$$

é exata.

Definição 1.2.8. (A.N.R.)

Um espaço X é um A.R. (absolute retract) se possui a seguinte propriedade universal: para qualquer espaço normal Y e qualquer aplicação $f : B \to X$, de um subespaço fechado B de Y em X, f estende-se a uma aplicação de Y em X. Se exigirmos que f apenas se estenda a uma vizinhança aberta de B dizemos que X é um A.N.R. (absolute neighborhood retract).

Teorema 1.2.9.

Toda variedade compacta é um A.N.R.

Teorema 1.2.10.

Seja K um A.N.R. compacto contido em um espaço euclidiano. Então $H_q(K,G)$ é um G-módulo finitamente gerado qualquer que seja q, onde G é um anel comutativo com unidade.

Corolário 1.2.11.

Os módulos de homologia de uma variedade compacta são finitamente gerados.

Teorema 1.2.12.

Se $H_q(X,G)$ é finitamente gerado para todo q, então os submódulos livres de $H^q(X,G)$ e $H_q(X,G)$ são isomorfos (isto é, $F^q(X) \simeq F_q(X)$) e os submódulos de torção de $H^q(X,G)$ e $H_{q-1}(X,G)$ são isomorfos (isto é, $T^q(X) \simeq T_{q-1}(X)$).

Demonstração: Veja [11], p. 244.

Teorema 1.2.13. (Dualidade de Poincaré)

Seja X uma variedade n-dimensional, orientável, compacta e sem bordo (isto é, fechada). Então $H^q(X,G) \simeq H_{n-q}(X,G)$ onde G é um anel comutativo com unidade.

Teorema 1.2.14. (Existência de Colarinho)

Se M é uma variedade topológica com bordo ∂M, então existe uma vizinhança W de ∂M tal que W é homeomorfa a $\partial M \times [0,1]$ de modo que ∂M se corresponda naturalmente com $\partial M \times \{0\}$.

§ 2. ESPAÇOS DE REVESTIMENTO

Assumiremos, neste parágrafo, que todos os espaços topológicos são conexos, localmente conexos por caminhos e de Hausdorff salvo menção em contrário. As repetições são para enfatizar.

Observe que um espaço conexo e localmente conexo por caminhos é conexo por caminhos (c.p.c.).

Definição 2.1. (Espaço de Revestimento)

Um espaço de revestimento de um espaço X é uma terna $(\tilde{X},p,X)$ onde $\tilde{X}$ é um espaço topológico e $p : \tilde{X} \to X$ uma aplicação contínua tal que X possui uma cobertura C por abertos U's com a seguinte propriedade:

cada componente conexa por caminhos C de $p^{-1}(U)$ é um aberto em $\tilde{X}$ e $p|C : C \to U$ um homemomorfismo, qualquer que seja $U \in C$.

Denominaremos $\tilde{X}$ espaço total, X espaço base, $p^{-1}(x)$ fibra de $x \in X$ e U vizinhança elementar. Freqüentemente nos referiremos a $\tilde{X}$ como revestimento de X.

Observações

(i) Seja $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento, então p é um homeomorfismo local.

De fato, sejam $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $x = p(\tilde{x})$. Consideremos U uma vizinhança elementar de x em X e V a componente conexa por caminhos de $p^{-1}(U)$ que contém $\tilde{x}$. Sendo $\tilde{X}$ localmente conexo por caminhos e $p^{-1}(U)$ a-

berto segue que V é aberto em $\tilde{X}$. Além disso, sendo $(\tilde{X},p,X)$ um revestimento, segue que $p|V$ é um homeomorfismo sobre U. Portanto, p é um homeomorfismo local. Uma conseqüência desta observação é que todas as propriedades locais de X são herdadas por $\tilde{X}$. Exemplo se X é uma variedade, $\tilde{X}$ também será.

(ii) As fibras $p^{-1}(x)$, $x \in X$ são espaços discretos.
Com efeito, sendo p localmente injetora, cada $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ possui uma vizinhança V na qual é o único ponto tal que $p(\tilde{x}) = x$. Sendo assim, $V \cap p^{-1}(x) = \{\tilde{x}\}$; isto é, cada ponto de $p^{-1}(x)$ é isolado.

(iii) Se $(\tilde{X},p,X)$ é um espaço de revestimento com $\tilde{X}$ compacto então, $p^{-1}(x)$ é finito, $\forall\, x \in X$.
De fato, sendo X de Hausdorff, qualquer ponto x é fechado em X, então $p^{-1}(x)$ é fechado em $\tilde{X}$ que é de Hausdorff; logo $p^{-1}(x)$ é compacto e discreto em $\tilde{X}$, portanto, finito.

Definição 2.2. (Propriedade do Levantamento)

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento e Y um espaço. Uma aplicação $F : Y \to \tilde{X}$ é dita um levantamento da aplicação $f : Y \to X$ se $poF = f$.

Lema 2.3. (Unicidade do Levantamento)

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento, Y um espaço conexo e $f : Y \to X$ uma aplicação com levantamentos F e $F' : Y \to \tilde{X}$.

Então o conjunto $\{y \in Y : F(y)=F'(y)\}$ é vazio ou todo o espaço Y.

Seja $I = [0,1]$.

Teorema 2.4. (Levantamento de Caminhos)

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento, $\lambda : I \to X$ um caminho e $\tilde{x} \in p^{-1}(\lambda(0)) \subset \tilde{X}$. Então existe um único caminho $\tilde{\lambda} : I \to \tilde{X}$ que é o levantamento de λ e tal que $\tilde{\lambda}(0) = \tilde{x}$.

Corolário 2.5.

Quaisquer duas fibras $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(x')$; x e $x' \in X$ têm a mesma cardinalidade em $\tilde{X}$ onde $(\tilde{X},p,X)$ é um espaço de revestimento.

Demonstração

Mostremos que a cada ponto $y \in p^{-1}(x)$ corresponde um único $y' \in p^{-1}(x')$ e reciprocamente.

Seja λ um caminho em X tal que $\lambda(0) = x$ e $\lambda(1) = x'$. Definimos uma correspondência entre $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(x')$ como se segue: para cada ponto $y \in p^{-1}(x)$, seja $\tilde{\lambda}$ o (único) caminho que é levantamento de λ em $\tilde{X}$ com ponto inicial y. Seja $y' = \tilde{\lambda}(1)$ a imagem de y por esta correspondência entre $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(x')$.

Utilizando-se os caminhos inversos dos acima citados, definimos analogamente uma correspondência entre $p^{-1}(x')$ e $p^{-1}(x)$ que é inversa da anterior.

Assim, a aplicação $y \to y'$ é uma bijeção entre $p^{-1}(x)$ e $p^{-1}(x')$.

Definição 2.6. (Número de Folhas do Espaço de Revestimento)

O número cardinal comum aos conjuntos $p^{-1}(x)$, $x \in X$ é chamado número de folhas do revestimento $(\tilde{X},p,X)$.

Notação

$f : (X,x) \to (Y,y)$ denota uma função contínua $f : X \to Y$ tal que $f(x) = y$ e indicaremos caminhos homotópicos por $\sim$.

Teorema 2.7. (Levantamento de Homotopia)

Sejam $p : (\tilde{X},\tilde{x}) \to (X,x)$ tal que $(\tilde{X},p,X)$ é um espaço de revestimento e $f : (Y,y_o) \to (X,x_o)$ uma aplicação que possui levantamento $F : (Y,y_o) \to (\tilde{X},\tilde{x})$. Então qualquer homotopia $h : Y \times I \to X$ com $h(y,0) = f(y)$, $\forall\, y \in Y$ pode ser levantada a uma homotopia $H : Y \times I \to \tilde{X}$ com $H(y,0) = F(y)$, $\forall\, y \in Y$.

Demonstração: Veja [2], p. 18.

Corolário 2.8.

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento e $\lambda_o, \lambda_1 : I \to \tilde{X}$ caminhos com $\lambda_o(0) = \lambda_1(0)$ e tal que $p\circ\lambda_o \sim p\circ\lambda_1$, então $\lambda_o \sim \lambda_1$. Em particular $\lambda_o(1) = \lambda_1(1)$.

Teorema 2.9. - TEOREMA FUNDAMENTAL DE LEVANTAMENTOS

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento, Y um espaço conexo e $\tilde{x}_o \in p^{-1}(x_o)$.

Uma aplicação $f : (Y,y_o) \to (X,x_o)$ possui um levantamento $F : (Y,y_o) \to (\tilde{X},\tilde{x}_o)$ se, e somente se,

$f_*\pi_1(Y,y_o) \subset p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)$;

onde f_* e p_* são as induzidas de f e g em π_1 respectivamente.

Corolário 2.10.

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento e $\tilde{x}_o \in p^{-1}(x_o)$, $x_o \in X$. Então $p_{*k} : \pi_k(\tilde{X},\tilde{x}_o) \to \pi_k(X,x_o)$ é um monomorfismo se $k = 1$ e um isomorfismo se $k \geq 2$.

Demonstração

($k = 1$)

Sejam $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ laçães com ponto básico $\tilde{x}_o$.

Pela unicidade dos levantamentos, o levantamento de $\alpha = p\circ\tilde{\alpha}$ é $\tilde{\alpha}$; isto é, $p_{*_1}[\tilde{\alpha}] = [\alpha]$; analogamente, $p_{*_1}[\tilde{\beta}] = [\beta]$.

Portanto se as classes de homotopia $[\alpha]$ e $[\beta]$ coincidem; isto é, $p_{*_1}[\tilde{\alpha}] = p_{*_1}[\tilde{\beta}]$, ou seja $[p\circ\tilde{\alpha}] = [p\circ\tilde{\beta}]$ então por 2.8 $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\beta}]$.

($k \geq 2$)

Entenderemos $\pi_k(Y,y_o)$ como o grupo das classes de homotopia de aplicações de (S^k,s_o) em (Y,y_o).

(i) p_{*k} é sobre

De fato, para qualquer aplicação $f : (S^k,s_o) \to (X,x_o)$ existe um levantamento $F : (S^k,s_o) \to (\tilde{X},\tilde{x}_o)$ por 2.9 tal que $p\circ F = f$, pois $\pi_1(S^k,s_o) = 0$ para $k \geq 2$. Assim, para qualquer elemento de $\pi_k(X,x_o)$ existe um

elemento de $\pi_k(\tilde{X},\tilde{x}_o)$ correspondente ao primeiro pela aplicação induzida p_{*k}.

(ii) p_{*k} é 1 - 1

Com efeito, se $F,G : (S^k,s_o) \to (\tilde{X},\tilde{x}_o)$ são levantamentos de $f,g : (S^k,s_o) \to (X,x_o)$ respectivamente e $f \sim g$, então $F \sim G$ por 2.7.

Definição 2.11. (Revestimento Universal)

Um espaço de revestimento $(\tilde{X},p,X)$ é dito universal se $\tilde{X}$ for simplesmente conexo, isto é, $\pi_1(\tilde{X}) = 0$.

Definição 2.12. (Espaço Semi-Localmente Simplesmente Conexo)

Um espaço X é dito semi-localmente simplesmente conexo se todo ponto $x \in X$ possuir uma vizinhança U tal que o homomorfismo $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ é trivial. Equivalentemente, todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que todo laço em U pode ser 'contraido' a um ponto de X.

Teorema 2.13. (Existência de Revestimentos)

Seja X um espaço topológico conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo.

Dados $x_o \in X$ e um subgrupo $H \subset \pi_1(X,x_o)$, existem um revestimento $(\tilde{X},p,X)$ e um ponto $\tilde{x}_o \in \tilde{X}$ tais que $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o)=H$.

Demonstração

Construiremos o espaço total $\tilde{X}$.

Diremos que α e β são equivalentes ($\alpha \equiv \beta$) quando $\alpha(1) = \beta(1)$ e $[\alpha.\beta^{-1}] \in H$.

(i) *A relação recém definida é uma relação de equivalência.*

De fato, $\alpha \equiv \alpha$ pois $[\alpha.\alpha^{-1}] = [e_{x_o}] \in H$ onde e_{x_o} é o caminho constante em x_o.

Se $\alpha \equiv \beta$, segue que $[\beta.\alpha^{-1}] = [\alpha.\beta^{-1}]^{-1} \in H$, então $\beta \equiv \alpha$.

Finalmente, se $\alpha \equiv \beta$ e $\beta \equiv \gamma$, segue que

$$[\alpha.\gamma^{-1}] = [\alpha.\beta^{-1}.\beta.\gamma^{-1}] = [\alpha.\beta^{-1}].[\beta.\gamma^{-1}] \in H ,$$

então $\alpha \equiv \gamma$.

Denotaremos por $<\alpha>$ a classe de equivalência do caminho α pela relação acima definida e $\tilde{X}$ o conjunto de todas estas classes $<\alpha>$ de caminhos α em X tal que $\alpha(0) = x_o$.

Definiremos $p(<\alpha>) = \alpha(1)$ que é obviamente bem definida.

Como X é semi-localmente simplesmente conexo, X possui uma cobertura C, formada por abertos U tal que todo laço em U é homotópico a constante em X.

Para cada ponto $<\alpha> \in \tilde{X}$ e cada aberto $U \in C$ definimos $U<\alpha> = \{<\alpha.\beta> \mid \beta(I) \subset U \text{ e } \beta(0) = \alpha(1)\}$.

(ii) *Os conjuntos* $U<\alpha>$ *constituem a base de uma topologia de* $\tilde{X}$. *Além disso, esta topologia é de Hausdorff.*

De fato, $X = \cup\, U<e_{x_o}>$ com $U \in C$ se $\gamma \in U_1<\alpha_1> \cap U<\alpha_2>$ então $V'<\gamma> \subset U_1<\alpha_1> \cap U_2<\alpha_2>$

onde $V' \subset V = U_1 \cap U_2$ com V' semi-localmente simplesmente conexo. Além disso, sejam $\langle\alpha_1\rangle \in \tilde{X}$ e $\langle\alpha_2\rangle \in \tilde{X}$ com $\langle\alpha_1\rangle \neq \langle\alpha_2\rangle$.

1.º Caso: $\alpha_1(1) \neq \alpha_2(1)$

Então existem abertos disjuntos U_1 e U_2 em X tais que $\alpha_1(1) \in U_1$ e $\alpha_2(1) \in U_2$ pois X é de Hausdorff. Logo, $U_1\langle\alpha_1\rangle \cap U_2\langle\alpha_2\rangle = \emptyset$.

2.º Caso: $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$

Como X é semi-localmente simplesmente conexo, existe um aberto U contendo $\alpha_1(1) = \alpha_2(1)$ tal que qualquer laço em U é homotópico à constante em X. Suponhamos, por absurdo que $U\langle\alpha_1\rangle \cap U\langle\alpha_2\rangle \neq \emptyset$, então existem caminhos β e γ em U começando em $\alpha_1(1)=\alpha_2(1)$ e tal que $[\alpha_1.\beta].[\alpha_2.\gamma]^{-1} = [\alpha_1.\beta.\gamma^{-1}.\alpha_2^{-1}] \in H$, por definição. Mas $\beta.\gamma^{-1}$ é fechado em U pois $\beta(1) = \gamma(1)$, posto que $\alpha_1.\beta \equiv \alpha_2.\gamma$.
Logo $\beta.\gamma^{-1}$ é homotópico à constante e

$$[\alpha_1.\alpha_2^{-1}] = [\alpha_1.e_{\alpha(1)}.\alpha_2^{-1}] = [\alpha_1.\beta.\gamma^{-1}.\alpha_2^{-1}] =$$

$$= [\alpha_1.\beta].[\alpha_2.\gamma]^{-1} \in H ;$$

isto é, $\alpha_1 \equiv \alpha_2$, ou seja $\langle\alpha_1\rangle = \langle\alpha_2\rangle$. Absurdo.

(iii) $p : \tilde{X} \to X$ *é contínua.*

De fato, se U é aberto em X, então para cada $\langle\alpha\rangle \in p^{-1}(U)$, $U\langle\alpha\rangle$ é aberto em $\tilde{X}$ e está contido em $p^{-1}(U)$.

(iv) $\tilde{X}$ *é conexo por caminhos.*

Dado qualquer ponto $\langle\alpha\rangle \in \tilde{X}$ é suficiente exibir um caminho unindo $\langle\alpha\rangle$ e $\langle e_{x_o}\rangle$ em $\tilde{X}$.

Para tanto, escolhemos um caminho $\lambda : I \to X$ pertencente a classe de equivalência $\langle\alpha\rangle$.

Para qualquer número real $s \in I$, definimos $\lambda_s : I \to X$ por $\lambda_s(t) = \lambda(st)$, $t \in I$. Então $\lambda_1 = \lambda$ e $\lambda_o = e_{x_o}$

Seja $\langle\alpha_s\rangle$ a classe de equivalência de caminhos λ_s.

Afirmamos que a aplicação definida por $s \to \langle\alpha_s\rangle$ é contínua de I em $\tilde{X}$; isto é, um caminho em $\tilde{X}$.

Devemos mostrar que para qualquer $s_o \in I$ e qualquer vizinhança básica U de $\lambda(s_o)$, existe $\delta > 0$ tal que se $|s-s_o| < \delta$ então $\langle\alpha_s\rangle \in U\langle\alpha_{s_o}\rangle$. Tomemos δ tal que se $|s-s_o| < \delta$, então $\lambda(s) \in U$. Tal δ existe pois λ é contínua.

Assim, $s \to \langle\alpha_s\rangle$ é um caminho em X com ponto inicial $\langle e_{x_o}\rangle$ e final $\langle\alpha\rangle$.

(v) $p : \tilde{X} \to X$ *é um homeomorfismo local.*

Para cada $x \in X$, seja U um aberto c.p.c. contendo x tal que todo laço em U é homotópico a constante em X.

1.º Caso: $p|U\langle\alpha\rangle$ é 1 - 1 e sobre

De fato, se $p\langle\alpha.\beta\rangle = p\langle\alpha.\gamma\rangle$ para β e γ caminhos começando em x, então $\beta(1) = \gamma(1)$ e portanto $\beta.\gamma^{-1}$ é fechado. Logo, $\beta.\gamma^{-1}$ é homotópico a constante; isto é, $\langle(\alpha.\beta)(\alpha.\gamma)^{-1}\rangle = \langle\alpha.(\beta.\gamma^{-1}).\alpha^{-1}\rangle = \langle\alpha.e_x.\alpha^{-1}\rangle = \langle\alpha.\alpha^{-1}\rangle =$
$= \langle e_{x_o}\rangle \in H$, ou seja, $\langle\alpha.\beta\rangle = \langle\alpha.\gamma\rangle$.
Além disso, $p|U\langle\alpha\rangle$ é sobre para qualquer α com $p\langle\alpha\rangle = x_o$.

2.º Caso: p é aberta

Com efeito, seja $V \subset \tilde{X}$ um aberto.
Como V é reunião de abertos básicos $U\langle\alpha\rangle$ é suficiente mostrar que $p(U\langle\alpha\rangle)$ é aberto para cada $U\langle\alpha\rangle$.
Assim, seja $x \in p(U\langle\alpha\rangle)$; digamos que $x = p\langle\beta\rangle = \beta(1)$ para $\beta \in U\langle\alpha\rangle$. Seja U_x o conjunto de todos os pontos de U que podem ser ligados a x por caminhos em U. Como X é ℓ.c.p.c., U_x é aberto e $x \in U_x$.
Afirmamos que $U_x \subset p(U\langle\alpha\rangle)$; implicando que $p(U\langle\alpha\rangle)$ é aberto. Com efeito, $U_x = p(U_x\langle\alpha\rangle)$; mais ainda $\langle\beta\rangle = \langle\alpha.\gamma\rangle$ onde γ é um caminho em U. Assim, qualquer elemento $\langle\eta\rangle \in U_x\langle\beta\rangle$ é da forma $\langle\eta\rangle = \langle\beta.\delta\rangle =$
$= \langle\alpha.\gamma.\delta\rangle \in U\langle\alpha\rangle$ onde δ é um caminho em U_x ligando $\beta(1)$ e $\eta(1)$, e $U_x\langle\beta\rangle \subset U\langle\alpha\rangle$.

(vi) $p^{-1}(U) = \bigcup_\alpha U\langle\alpha\rangle$ *onde* α *é tal que* $p\langle\alpha\rangle = x$, $x \in U$.

Se γ é um caminho com $p\langle\gamma\rangle = \gamma(1) \in U$ seja β um caminho em U unindo $\gamma(1)$ a x. Então $p\langle\gamma.\beta\rangle = x$ e $\langle\gamma\rangle \in U\langle\gamma.\beta\rangle$.

Portanto, $(\tilde{X},p,X)$ é um espaço de revestimento.

Resta mostrar que $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o) = H$, $\tilde{x}_o = \langle e_{x_o} \rangle$.

Sejam α um caminho em X tal que $\alpha(0) = x_o$ e $\tilde{\alpha}$ o caminho em $\tilde{X}$ tal que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_o$ definido por $\tilde{\alpha}(t) = \langle \alpha_t \rangle$ onde $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$.

1.º Caso: $\tilde{\alpha}$ é contínuo.

Mesmo argumento usado em (iv).

2.º Caso: $\tilde{\alpha}$ é levantamento de α

$p(\tilde{\alpha}(t)) = p\langle \alpha_t \rangle = \alpha_t(1) = \alpha(t)$.

Suponhamos agora que α é fechado; isto é,

$[\alpha] \in \pi_1(X,x_o)$.

Assim, $[\alpha] \in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o) \Longleftrightarrow \tilde{\alpha}$ é fechado em $\tilde{X}$; isto é, $\tilde{\alpha}(1) = \langle e_{x_o} \rangle$, ou seja, $\langle \alpha \rangle = \langle e_{x_o} \rangle$.

Logo, $[\alpha] \in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o) \Longleftrightarrow \alpha \equiv e_{x_o}$; isto é, $[\alpha] \in H$.

Portanto, $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_o) = H$.

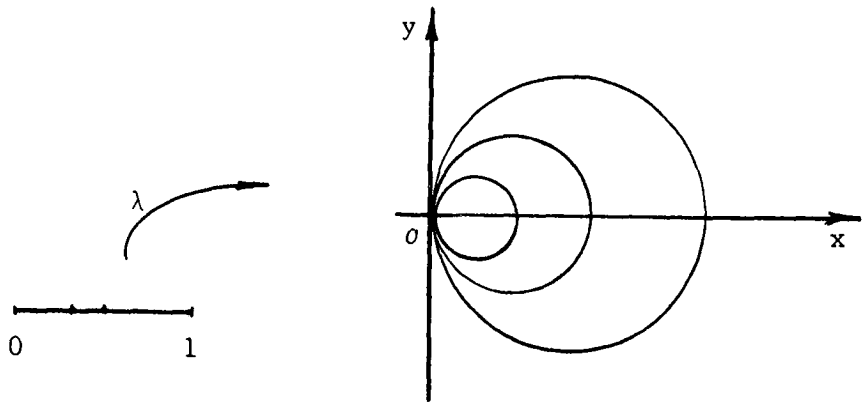
Observações 2.14.

(a) As propriedades exigidas na hipótese deste teorema são verificadas por muitos espaços razoáveis; por exemplo, CW-complexos, variedades e outros.

(b) Espaços que não são semi-localmente simplesmente conexos podem não possuir revestimento universal.

Exemplo: Seja $X = \bigcup_{n \in N} C_n$ onde

$$C_n = \{(x,y) \in R^2 \mid (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}.$$



Temos que X é conexo e ℓ.c.p.c., porém qualquer vizinhança U da origem $o = (0,0)$ não induz um homomorfismo $\pi_1(U,o) \to \pi_1(X,o)$ trivial, pois U contém um elemento C_{n_o} para algum $n_o \in N$.

Suponhamos, por absurdo, que $(\tilde{X},p,X)$ seja um revestimento universal de X; então $\pi_1(\tilde{X},\tilde{o}) = 0$.

Consideremos o seguinte caminho $\lambda : [0,1] \to X$ dado por: $[0,\frac{1}{2}]$ enrola-se uma vez em C_1, $[\frac{1}{2},\frac{2}{3}]$ enrola-se em C_2 e assim por diante.

Seja $\tilde{\lambda} : I \to \tilde{X}$ levantamento de λ.

Afirmamos que cada $\tilde{\lambda}([\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}])$ é um caminho aberto em $\tilde{X}$, $n \in N$.

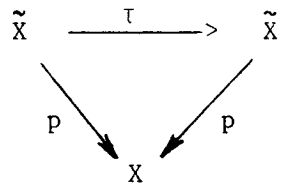
Do contrário, $\tilde{\lambda}([\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}])$ seria homotópico a constante pois $\pi_1(\tilde{X},\tilde{o}) = 0$; assim $\lambda([\frac{n-1}{n},\frac{n}{n+1}])$ também seria homotópico a constante, posto que por 2.10 $p_* : \pi_1(\tilde{X},\tilde{o}) \to \pi_1(X,x)$ é 1 - 1. Mas isto é um absurdo.

Como $\tilde{\lambda}$ 'se abre' em $\tilde{X}$, existe uma vizinhança U de

$\tilde{\lambda}(1)$ que isola este ponto dos pontos da forma $\tilde{\lambda}(\frac{n}{n+1})$, $n \in N$. Pela continuidade de $\tilde{\lambda}$, existe uma vizinhança de 1 em I, digamos $(x_o,1]$ tais que $\tilde{\lambda}((x_o,1]) \subset U$; $x_o \in [0,1)$. Absurdo, pois $(x_o,1]$ contém pontos da forma $\frac{n}{n+1}$.

Definição 2.15. (Automorfismo de Revestimento)

Seja $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento. Um homeomorfismo $\tau : \tilde{X} \to \tilde{X}$ é chamado um automorfismo se o seguinte diagrama comutar



O conjunto dos automorfismos de $\tilde{X}$ munido da operação de composição é um grupo, denotado por $Aut(\tilde{X})$.

Observação 2.16.

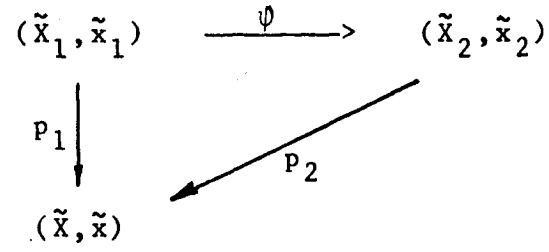
Por 2.3. e sendo $\tilde{X}$ conexo, τ fica determinado se soubermos seu valor em algum ponto de $\tilde{X}$; em particular, pelos valores que assume numa fibra $p^{-1}(x)$.

Assim, se $\tau \neq$ identidade, τ não possui pontos fixos.

Lema 2.17.

Sejam $(\tilde{X}_1,p_1,X)$ e $(\tilde{X}_2,p_2,X)$ espaços de revestimentos e $\tilde{x}_i \in X$; $i = 1,2$ tal que $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$.

Então existe uma aplicação contínua $\psi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tal que o diagrama

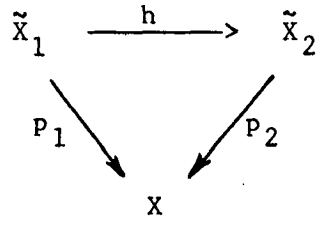


comuta se, e somente se, $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1) \subset p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$.

Demonstração: Caso especial de 2.9.

Definição 2.18. (Revestimentos Equivalentes)

Dois espaços de revestimento $(\tilde{X}_1,p_1,X)$ e $(\tilde{X}_2,p_2,X)$ são equivalentes se existe um homeomorfismo $h : (\tilde{X}_1,\tilde{x}_1) \to (\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$ tal que o seguinte diagrama comuta



Teorema 2.19. (Unicidade de Revestimento Associado a um Grupo)

Sejam $(\tilde{X}_i,p_i,X)$ $i = 1,2$ espaços de revestimentos, $\tilde{x}_i \in \tilde{X}_i$; $i = 1,2$, pontos básicos e $p_i:(\tilde{X}_i,\tilde{x}_i)\to(X,x)$ $i=1,2$, tal que $p_{1*}\pi_1(\tilde{X}_1,\tilde{x}_1) = p_{2*}\pi_1(\tilde{X}_2,\tilde{x}_2)$; isto é, revestimentos associados a um mesmo subgrupo. Então $(\tilde{X}_1,p_1,X)$ e $(\tilde{X}_2,p_2,X)$ são equivalentes.

Demonstração: Segue de 2.16, 2.17 e 2.18.

Observação:

Estabelecemos, portanto, a seguinte correspondência:

Revestimentos de X (com ponto básico especificado)

$\updownarrow$

Subgrupos de $\pi_1(X,x)$

Lema 2.20.

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento, $x \in X$ e $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$. Então os subgrupos $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)$ e $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2)$ são conjugados em $\pi_1(X,x)$.

Demonstração

Como $\tilde{X}$ é c.p.c., seja $\tilde{\gamma}$ um caminho unindo $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$. Assim,

$$\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1) = \{[\tilde{\gamma}][\tilde{\alpha}][\tilde{\gamma}]^{-1};\ [\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2)\};$$

projetando obtemos

$$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1) = \{[p\circ\tilde{\gamma}][h][p\circ\tilde{\gamma}^{-1}];\ [h] \in p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2)\}$$

e $[p\circ\tilde{\gamma}] \in \pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$.

Observação

Assim obtemos a seguinte correspondência

Revestimentos de X (sem ponto básico especificado)

$\updownarrow$

Classe de Conjugacão de subgrupos de $\pi_1(X)$

Definição 2.21. (Revestimento Regular)

Um espaço de revestimento $(\tilde{X},p,X)$ é dito regular se para algum $x \in X$ e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ o subgrupo $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$ é normal em $\pi_1(X,x)$.

Proposição 2.22.

(a) Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento e $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$. Então existe uma aplicação contínua $\psi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X},\tilde{x}_1) & \xrightarrow{\psi} & (\tilde{X},\tilde{x}_2) \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & (X,x) & \end{array}$$

comuta se, e somente se,

$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1) \subset [\alpha^{-1}]p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_2)[\alpha]$,

onde α é um caminho ligando $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$.

(b) Sejam $(\tilde{X}_1,p_1,X)$ e $(\tilde{X}_2,p_2,X)$ espaços de revestimento de X, e seja ψ um homomorfismo do primeiro no segundo. Então $(\tilde{X}_1,\psi,\tilde{X}_2)$ é um espaço de revestimento.

Demonstração

A parte (a) segue de 2.20 e 2.17.

Para demonstração da parte (b) veja [7], p. 160.

Corolário 2.23.

Um espaço de revestimento $(\tilde{X},p,X)$ é regular se, e somente se, para quaisquer dois pontos $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, existe um automorfismo $\tau : \tilde{X} \to \tilde{X}$ tal que $\tau(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

Proposição 2.24.

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $x \in X$. Então

$$Aut(\tilde{X}) \simeq \frac{N[p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})]}{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})}$$

onde $N[p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})]$ é o normalizador de $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})$ em $\pi_1(X,x)$.

Demonstração: Veja [7], p. 163.

Corolário 2.25.

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento regular e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $x \in X$. Então

$$Aut(\tilde{X}) \simeq \frac{\pi_1(X,x)}{p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x})}.$$

Corolário 2.26.

Sejam $(\tilde{X},p,X)$ um espaço de revestimento universal e $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, $x \in X$.

Então $Aut(\tilde{X}) \simeq \pi_1(X,x)$. Além disso o número de folhas do revestimento é a ordem do grupo $\pi_1(X,x)$.

Definição 2.27. (Revestimento Abeliano Universal)

O espaço de revestimento associado ao subgrupo comutador $[\pi_1(X);\pi_1(X)]$ de $\pi_1(X)$ é chamado revestimento abeliano universal.

Observação

Neste caso, $Aut(\tilde{X}) \simeq H_1(X)$.

§ 3. ALGUMAS APLICAÇÕES

Utilizaremos espaços de revestimento universal de certas variedades para obtermos informações sobre seus grupos de homotopia.

Definição 3.1.

Dizemos que uma variedade M é:

(i) fechada se M é compacta e $\partial M = \emptyset$;

(ii) aberta se M não é fechada, em outras palavras M é não compacta ou $\partial M \neq \emptyset$;

(iii) contráctil se a aplicação identidade $i : M \to M$ for homotópica à constante.

Teorema 3.2.

Um espaço topológico M é contráctil se, e somente se, quaisquer duas aplicações f e g de um espaço topológico Y em M forem homotópicas.

Demonstração

Supondo que $i : M \to M$ é homotópica à constante, segue-se que existe uma homotopia $F : M \times I \to M$ tal que $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = p$, onde $p \in M$. Seja $G : Y \times I \to M$ tal que $G(y,t) = F(f(y),t)$. Assim, f é homotópica à constante. Analogamente, g é homotópica à constante. Logo, f e g, são homotópicas.

A recíproca é imediata, bastando tomar $Y = M$.

Observação

Segue-se do teorema 3.2 que se M é contráctil então $\pi_j(M) = 0$ para todo j. Se M^n é uma variedade, a recíproca é verdadeira; isto é, se $\pi_j(M) = 0$, $\forall\, j$ então $i : M \to M$ é homotópica à constante.

Com efeito, sendo M uma variedade então M é um complexo simplicial. Assim, a identidade restrita ao 0-esqueleto é homotópica à constante pois M é conexo por caminhos. Suponhamos que exista uma homotopia H entre a identidade de M restrita ao $(k-1)$-esqueleto e uma aplicação constante. Como $\pi_k(M) = 0$, não existe obstrução para estendermos a homotopia H ao k-esqueleto. Portanto, a identidade $i : M \to M$ é homotópica à constante.

Aplicação 3.3.

Seja M^n uma variedade diferenciável conexa tal que $\pi_j(M) = 0$, $1 < j < n$.

Seja $\tilde{M}$ o revestimento universal de M.

(a) Se M é aberta então $\tilde{M}$ é contráctil.

(b) Suponhamos que M é fechada, então:

(b_1) Se $\pi_1(M)$ é finito então $\pi_j(M) = \begin{cases} 0 \ ; \text{ se } j < n \\ Z \ ; \text{ se } j = n \end{cases}$.

(b_2) Se $\pi_1(M)$ é infinito então $\tilde{M}$ é contráctil.

Demonstração

(a) $\pi_1(\tilde{M}) = 0$ pois $\tilde{M}$ é revestimento universal. Por 2.9 $\pi_k(\tilde{M}) \simeq \pi_k(M)$ para $k > 1$. Assim, $\pi_k(\tilde{M}) = 0$, para $1 \leq k < n$.

Pelo teorema de Hurewicz (1.2.3) $\pi_n(\tilde{M}) \simeq H_n(\tilde{M})$. Sendo M aberta, segue que $\tilde{M}$ é aberta. Assim, dois casos podem ocorrer:

1.º Caso: $\tilde{M}$ é não compacta.

Logo $H_n(\tilde{M}) = 0$ ([2], p. 121).

2.º Caso: $\tilde{M}$ tem bordo.

Da seqüência exata do par $(\tilde{M}, \partial\tilde{M})$ temos que $H_n(\tilde{M}) = 0$ pois $H_n(\tilde{M}, \partial\tilde{M}) = Z$ e $H_{n-1}(\partial\tilde{M}) = Z$ são isomorfos. Portanto, sendo M aberta segue-se que $H_n(\tilde{M}) = 0$. Por Hurewicz $\pi_n(\tilde{M}) = 0$. Assim, $\tilde{M}$ é contráctil.

(b_1) Pelo corolário 2.26, o número de folhas de $\tilde{M}$ é a ordem de $\pi_1(M)$. Logo $\tilde{M}$ é compacta posto que M é compacta e $\pi_1(M)$ é finito.
Sendo $\tilde{M}$ simplesmente conexa segue-se que $\tilde{M}$ é orientável ([2], p. 116). Assim, $\tilde{M}$ compacta, conexa e orientável implica que $H_n(\tilde{M}) \simeq Z$ ([2], p. 121). Do item (a) temos que $\pi_j(\tilde{M}) = 0$ para $1 < j < n$; por Hurewicz segue-se que $\pi_n(\tilde{M}) \simeq Z$ pois $H_n(\tilde{M}) \simeq Z$.

(b_2) Como $\pi_1(M)$ é infinito, o número de folhas de M também o é. Portanto, $\tilde{M}$ é aberta. Como $\tilde{M}$ é revestimento universal de si mesmo, segue-se da parte (a) que $\tilde{M}$ é contráctil.

Aplicação 3.4.

Seja M^n uma variedade fechada e conexa com $\pi_1(M)$ finito.

Se $\pi_j(M) = 0$ para $1 < j \leq \frac{n}{2}$ se n é par e $1 < j < \frac{n}{2}$

se n é ímpar então $\pi_j(M) = 0$ para $1 < j < n$.

Demonstração

Seja $\tilde{M}$ o revestimento universal de M. Temos que $\pi_j(\tilde{M}) = 0$ para $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$ se n for par.

(A demonstração para n ímpar é análoga).

Por Hurewicz, $H_j(\tilde{M}) = 0$ para $1 \leq j \leq \frac{n}{2}$.

Como $\tilde{M}$ compacta (veja (b_1)), segue-se da dualidade de Poincaré (1.2.13) que $H_j(\tilde{M}) = H^{n-j}(\tilde{M})$.

Mostremos que $H^{n/2-i}(\tilde{M}) = 0$ para $1 < i < \frac{n}{2}$.

Com efeito, temos por 1.2.12 que

$$H_{n/2-i}(\tilde{M}) = F_{n/2-i}(\tilde{M}) \oplus T_{n/2-i}(\tilde{M})$$

pois $H_{n/2-i}(\tilde{M})$ é finitamente gerado para $0 \leq i < \frac{n}{2}$ (veja 1.2.11).

Assim, $H^{n/2-i}(\tilde{M}) = F_{n/2-i}(\tilde{M}) \oplus T_{n/2-i-1}(\tilde{M})$ para $1 < i < \frac{n}{2}$.

Mas, $H_{n/2-i}(\tilde{M}) = 0$ para $0 \leq i < \frac{n}{2}$.

Logo, $H^{n/2-i}(\tilde{M}) = 0$ para $1 < j < \frac{n}{2}$.

Portanto, pela dualidade de Poincaré, $H_{n/2+j}(\tilde{M}) = 0$ para $1 < j < \frac{n}{2}$.

Assim, $H_j(\tilde{M}) = 0$ para $1 \leq j < n$.

Novamente, por Hurewicz, $\pi_j(\tilde{M}) = 0$ para $1 \leq j < n$.

Desta maneira, $\pi_j(M) = 0$ para $1 < j < n$.

CAPÍTULO II

ESPAÇOS DE REVESTIMENTO DO COMPLEMENTAR DE UM NÓ (OU LINK) EM S^{n+2}

Espaços de revestimento têm significativa aplicação na teoria de nós pois são fontes de muitos invariantes.

Neste capítulo serão descritos alguns tipos de espaços de revestimento. A exposição de cada parágrafo (exceto o primeiro) será dividida em três itens A, B e C, nos quais, respectivamente, serão apresentados uma descrição algébrica do espaço de revestimento, uma construção geométrica e finalmente a equivalência entre essas duas apresentações.

§ 1. MATERIAL BÁSICO DE TEORIA DE NÓS

Dados duas variedades diferenciáveis M^m e N^n, um dos problemas em topologia é determinar se M mergulha em N e, se isto ocorrer, de 'quantas maneiras' possíveis; entendendo, por exemplo, que dois mergulhos $i_1, i_2 : M \to N$ são equivalentes se existir um difeomorfismo $\psi : N \to N$ tal que $\psi \circ i_1 = i_2$.

Em particular, se tomarmos $M = \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n$ (reunião disjunta de m esferas S^n) e $N = S^k$, $k > n$, estaremos estudando o que é chamado teoria de nós.

Definição 1.1. (Nó e Link)

Um nó (diferenciável) é a imagem de um mergulho $K: S^n \to S^k$. Genericamente, um link é a imagem de um mergulho $L : \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n \to S^k$. A imagem de cada S_i^n é chamada componente do link L.

Observações

(i) Denotaremos a imagem $K(S^n)$ apenas por K e $L(\bigcup_{i=1}^{m} S_i^n)$ por L.

(ii) Em nosso estudo nos restringiremos à codimensão 2; isto é, $K^n \subset S^{n+2}$ ou $L^n \subset S^{n+2}$. A razão disto é que estaremos interessados no estudo de invariantes relacionados com o grupo fundamental do complementar $S^{n+2} - K$ (ou $S^{n+2} - L$) que em codimensão 1 ou maior que 2 se anulam.

Definição 1.2. (Equivalência entre Nós)

Dizemos que dois nós K e K' de dimensão n são equivalentes se existe um difeomorfismo $h : S^{n+2} \to S^{n+2}$ tal que $h(K) = K'$. No caso de links de duas ou mais componentes, indexamos essas componentes e exigimos que o difeomorfismo h preserve a ordem fixada.

A classe de equivalência de um nó ou link é chamada tipo do nó ou tipo do link, respectivamente.

Definição 1.3. (Invariante do Tipo do Nó (ou Link))

Um invariante do tipo do nó é uma correspondência F que a cada nó K associa um objeto F(K) de alguma categoria tal que, se K e K' são equivalentes então F(K) e F(K') são isomorfos no sentido da categoria dos objetos F(K). Analogamente para links.

Observação

Esses invariantes são meios úteis para se verificar que dois nós (ou links) não são equivalentes. O invariante mais usual é o grupo do nó (ou link) que definiremos posteriormente.

Definição 1.4. (Vizinhança Tubular de um Nó)

Seja $K^n \subset S^{n+2}$ um nó diferenciável. Por uma vizinhança tubular de K entenderemos a imagem de um mergulho $t : K^n \times D^2 \to S^{n+2}$ tal que $t(x,0) = x$, $x \in K$, onde D^2 é o disco unitário usual do R^2.

Por exemplo a vizinhança tubular de um nó K^1 em S^3 é um toro sólido cuja alma é K.

Como K^n tem codimensão 2 em S^{n+2} pode-se demonstrar que $V(K)$ sempre existe; veja [12], Th. 5.2, p. 110 e ex. 5, p. 118 e [13], p. 26.

Definição 1.5. (Grupo de um Nó (ou Link))

Seja K^n um nó. O grupo fundamental $\pi_1(S^{n+2} - K)$ do complementar de K em S^{n+2} é chamado grupo do nó K. Analogamente definimos o grupo de um link.

Exemplo (Cálculo do Grupo de um Nó)

No caso clássico $K^1 \subset S^3$ temos um algoritmo para obtenção de uma apresentação do grupo fundamental $\pi_1(S^3 - K)$, denominado apresentação de Wirtinger.

Por exemplo, considere o nó $K^1 \subset S^3$ (trefoil - Fig. 1). Mostraremos, através da apresentação de Wirtinger que

$$\pi_1(S^3 - K) = |x,y : x^3 = y^2|$$

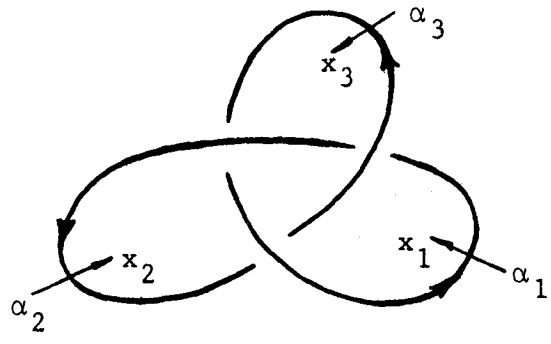


Fig. 1

Consideremos o nó K como composição de arcos $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ no plano. Cada α_i está conectado com α_{i+1} (mod n) através de arcos β_i conforme a Fig. 2 .

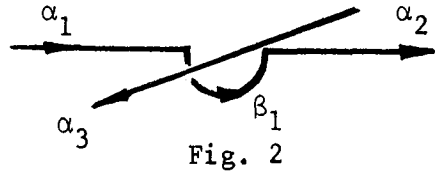
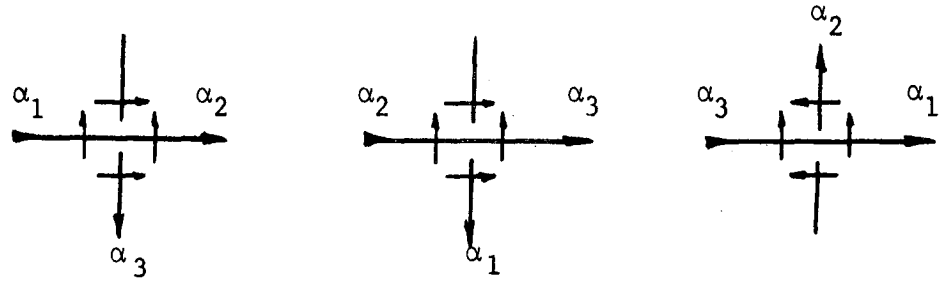


Fig. 2

Assumimos que os arcos α_i estejam orientados e consideramos pequenas flechas x_i que cortam α_i da direita para a esquerda com respeito ao sentido de α_i.

Fixando um ponto básico * (digamos no olho do leitor), os caminhos partindo de * percorrendo x_i e voltando ao ponto * determinam laços em $S^3 - K$; isto é, elementos de $\pi_1(S^3-K,*)$.

As relações da apresentação de $\pi_1(S^3 - K)$ são obtidas por:



$r_1 : x_3x_2=x_1x_3$ $\quad$ $r_2 : x_1x_3 = x_2x_1$ $\quad$ $r_3 : x_3x_2^{-1} = x_2^{-1}x_1$

$\therefore\ \pi_1(S^3 - K) = |x_1, x_2, x_3 : r_1, r_2, r_3|$ que pode ser reduzido para

$$\pi_1(S^3-K) = |x_1, x_3 : x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3| =$$

$$= |x_1, x_3, a, b : x_1x_3x_1 = x_3x_1x_3,\ a = x_1x_3,\ b = x_1x_3x_1| =$$

$$= |x_1, x_3, a, b : a^3 = b^2,\ a = x_1x_3,\ b = x_1x_3x_1| =$$

$$= |x_1, x_3, a, b : a^3 = b^2,\ ax_1 = b,\ b = x_1x_3x_1| =$$

$$= |x_1, x_3, a, b : a^3 = b^2,\ x_1 = a^{-1}b,\ x_3 = b^{-1}a^2| =$$

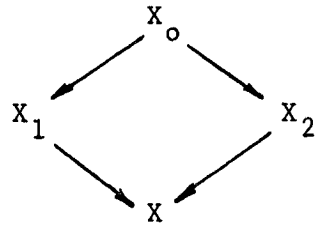
$$= |a, b : a^3 = b^2|$$

Observações

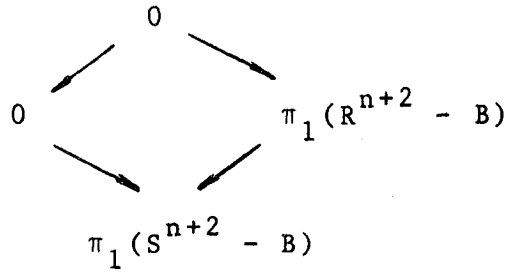
(i) Seja $V(K)$ uma vizinhança tubular aberta de um nó K. Como existe uma retração $r : S^{n+2} - K \to S^{n+2} - V(K)$ temos que $\pi_1(S^{n+2} - K) \simeq \pi_1(S^{n+2} - V(K))$. Neste caso, $S^{n+2} - V(K)$ é uma variedade diferenciável com bordo = $= \partial V(K)$.

(ii) $\pi_1(S^{n+2} - B) \simeq \pi_1(R^{n+2} - B)$, onde B é um subconjunto limitado de R^{n+2}.

Com efeito, seja U um disco em torno do ∞ em S^{n+2} que não encontra B. Assim, $U \cap R^{n+2} = U - \infty \simeq S^{n+1}$ pois $U \cap R^{n+2}$ = disco - o centro. Portanto, U e $R^{n+2} \cap U$ são simplesmente conexos, posto que $n \geq 1$. Sejam $X_1 = U$ e $X_2 = R^{n+2} - B$. Consideremos $X_o = X_1 \cap X_2 \simeq S^{n+1}$, $X = X_1 \cup X_2 = S^{n+2} - B$ e o diagrama



Como $\pi_1(X_o) = 0 = \pi_1(X_1)$ o diagrama induzido fica



Pelo teorema de Van Kampen obtemos que

$$\pi_1(S^{n+2} - B) \simeq \pi_1(R^{n+2} - B)$$

(iii) O grupo do nó não é um invariante completo, isto é, a

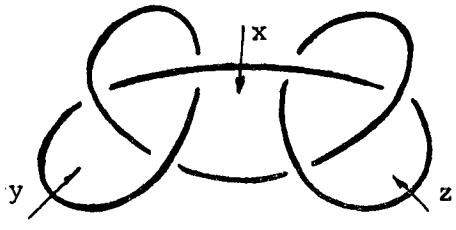


Fig. 3

Fig. 4

correspondência que a cada nó K associa o grupo $\pi_1(S^3 - K)$ não é injetora.

Exemplo o nó square (Fig. 3) e o nó granny (Fig. 4) não são equivalentes porém ambos possuem grupo

$$|x,y,z : xyx = yxy,\ xzx = zxz|.$$

Ainda para fins de classificação, outros invariantes algébricos são estudados. Teremos oportunidade de ver, por exemplo, a homologia de certos espaços de revestimento de $S^{n+2} - K^n$. Para isso precisamos de alguns preliminares.

Definição 1.6. (Colarinho Duplo)

Um subconjunto $X \subset Y$ é dito possuir um colarinho duplo (isto é X é bicollared) se existir um mergulho $b : X \times [-1,1] \to Y$ tal que $b(x,0) = x$, $\forall\, x \in X$.

Definição 1.7. (Superfície de Seifert)

Uma superfície de Seifert de um nó $K^n \subset S^{n+2}$ é uma variedade compacta, conexa $M^{n+1} \subset S^{n+2}$ que possua colarinho duplo e tal que $\partial M = K$.

Observação

Da definição temos que se M^{n+1} é uma superfície de Seifert de um nó K então existe um mergulho $J : M \times [-1,1] \to S^{n+2}$.

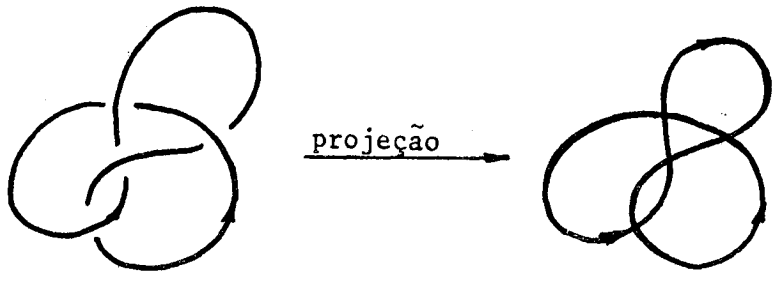
Teorema 1.8. (Existência de Superfície de Seifert)

Qualquer nó ou link (diferenciável) borda uma superfície de Seifert.

Demonstração

($n = 1$)

Seja $K^1 \subset S^3$ um nó orientado.



Consideremos uma projeção regular de K num plano, isto é, planificamos K de modo que o número de autointersecções seja finito.

Temos em cada ponto de autointersecção dois arcos orientados, como mostra a Fig. 1

Em cada um destes pontos de autointersecção faremos um 'desvio', como indica a Fig. 2

Assim o nó K fica decomposto em um número finito de discos. A superfície de Seifert M será obtida colando estes discos por retângulos 'torcidos' (Fig. 3) como indica a (Fig. 4).

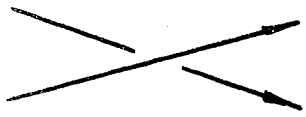


Fig. 1

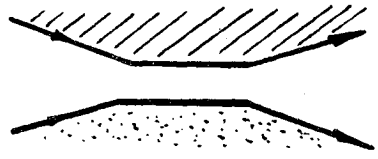


Fig. 2

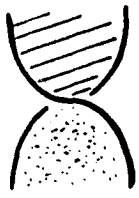


Fig. 3

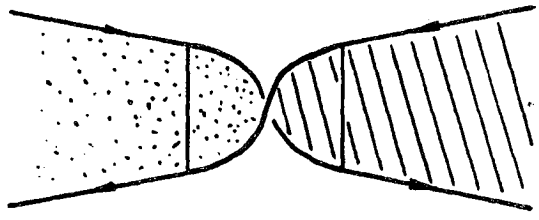


Fig. 4

No caso de links com mais de uma componente o mesmo procedimento é adotado para uma projeção regular do mesmo.

($n > 1$)

Neste caso utilizaremos o seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [4 - Lema 2].

"Seja K^n uma subvariedade de S^{n+2}, fechada e que possua colarinho. Então, se $H_1(K) = 0$, K borda uma variedade de S^{n+2} que possue colarinho."

Como $n > 1$ e o nó K^n é topologicamente uma esfera S^n segue-se que $H_1(K) = 0$.

Exemplo

Daremos a construção da superfície de Seifert do nó trefoil.

Consideremos a projeção regular do trefoil indicada na Fig. 1.

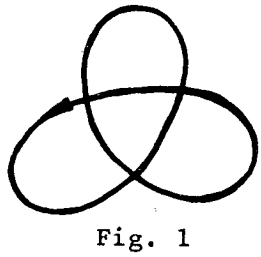


Fig. 1

Pela descrição feita na demonstração do teorema 1.8, obtemos a seguinte superfície de Seifert para o trefoil (Fig. 2) ; isto é, dois discos colados por três retângulos torcidos que possui mesmo tipo de homotopia que a figura oito (Fig. 3). Logo, a superfície de Seifert do trefoil é topologicamente um toro com um 'buraco'.

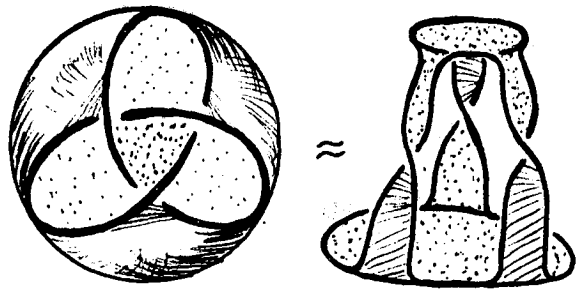


Fig. 2

Fig. 3

O teorema a seguir mostra que a homologia do complementar de um nó não é um bom invariante. Mas será útil na confecção de espaços de revestimento.

Teorema 1.9.

Sejam K^n um nó e $X(K) = S^{n+2} - K$.

Então $H_j(X(K)) = \begin{cases} Z & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j > 1 \end{cases}$.

Demonstração

(i) [j = 1]

Consideremos a seqüência de homologia do par (V,V-K) onde V é uma vizinhança tubular do nó K:

$$\ldots \to H_2(V,V-K) \to H_1(V-K) \to H_1(V) \to \ldots$$

Temos que $B = S^{n+2} - V$ é tal que $B \subset X(K)$ e $\overline{B} \subset \overset{\circ}{X}(K)$; então, por excisão $H_2(V,V-K) \simeq H_2(S^{n+2},X(K))$.

Como o par (V,V-K) é equivalente (homologicamente) ao par $(V,\partial V)$ obtemos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots \to H_2(V) & \longrightarrow & H_2(V,\partial V) & \xrightarrow{\beta} & H_1(\partial V) & \xrightarrow{i_*} & H_1(V) & \longrightarrow & H_1(V,\partial V) & \longrightarrow & H_0(\partial V) & \to & H_0(V) \longrightarrow H_0(V,\partial V) \\
 & & \downarrow \text{ex.} & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow \text{ex.} & & & & \\
\ldots \to H_2(S^{n+2}) & \to & H_2(S^{n+2},X(K)) & \xrightarrow{\simeq} & H_1(X(K)) & \to & H_1(S^{n+2}) & \xrightarrow{j_*} & H_1(S^{n+2},X(K)) & \to & H_0(X(K)) & \to & H_0(S^{n+2}) \to H_0(S^{n+2},X(K)) \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\
 & & 0 & & 0 & & z & & z & & 0 & &
\end{array}$$

Do primeiro retângulo segue-se que $\alpha\circ\beta$ é isomorfismo, portanto $\alpha|\operatorname{im}\beta$ é um isomorfismo sobre $H_1(X(K))$; isto é, $\operatorname{im}\alpha \simeq \operatorname{im}\beta$.

Como $V \simeq D^2 \times S^n$, segue-se da fórmula de Künneth (1.2.5 - Cap. I) que

$$H_1(V) = \begin{cases} Z\ ; & \text{se } n = 1 \\ 0\ ; & \text{se } n > 1 \end{cases} \qquad \text{pois } H_1(S^n) \text{ é livre.}$$

Além disso,

$$H_1(\partial V) = \begin{cases} Z \oplus Z\ ; & \text{se } n = 1 \\ Z\ ; & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Da comutatividade do terceiro retângulo obtemos que $j_* : H_1(S^{n+2}) \to H_1(S^{n+2},X(K))$ é sobre. Como $H_1(S^{n+2}) = 0$ segue-se que $H_1(S^{n+2},X(K)) = 0$; logo $H_1(V,\partial V) = 0$ e portanto i_* é sobre. Como β é injetora e $H_1(V)$ livre segue-se que a seqüência exata

$$0 \to H_1(V,\partial V) \xrightarrow{\beta} H_1(\partial V) \xrightarrow{i_*} H_1(V) \to 0$$

split, isto é $H_1(\partial V) \simeq \operatorname{im} g \oplus \operatorname{im}\beta$ onde $g : H_1(V) \to H_1(\partial V)$ é

tal que $i_* \circ g = 1_{H_1(V)}$.

Para mostrarmos que $\ker i_* \simeq Z$ basta mostrar que $\text{im}\,\beta \simeq Z$, pois $\ker i_* = \text{im}\,\beta$.

1.º Caso: $n > 1$

Assim $H_1(\partial V) \simeq Z$, isto é, $Z \simeq \text{im}\, g \oplus \text{im}\,\beta$. Sendo $g : H_1(V) \to H_1(\partial V)$ e $H_1(V) = 0$ segue-se que $\text{im}\, g = 0$ e portanto $\text{im}\,\beta \simeq Z$.

2.º Caso: $n = 1$

Assim $H_1(\partial V) \simeq Z \oplus Z$, isto é, $Z \oplus Z \simeq \text{im}\, g \oplus \text{im}\,\beta$. Sendo $g : H_1(V) \to H_1(\partial V)$, $H_1(V) = Z$ e $g \neq 0$ (posto que $i_* \circ g = 1_{H_1(V)}$), segue-se que $\text{im}\, g \simeq Z$ e portanto $\text{im}\,\beta \simeq Z$.

(ii) [$j > 1$]

Para mostrarmos que $H_p(X(K)) = 0$ para $p > 1$ necessitaremos de algumas dualidades:

Dualidade de Alexander (Caso particular)

Sejam X^n uma variedade compacta, orientável e A uma subvariedade fechada. Então $H^q(A) \simeq H_{n-q}(X, X-A)$; $\forall$ q.

Dualidade de Lefschetz (Caso particular)

Sejam X^n uma variedade compacta, com bordo e interior $\overset{\circ}{X}$ orientada. Então $H^q(X) \simeq H_{n-q}(X, \partial X)$; $\forall$ q.

Consideremos a seqüência de homologia do par $(S^{n+2}, X(K))$, onde $X(K) = S^{n+2} - K$:

$$\ldots \to H_{n+2-p}(S^{n+2}) \to H_{n+2-p}(S^{n+2}, X(K)) \to H_{n+2-p-1}(X(K)) \to H_{n+2-p-1}(S^{n+2}) \to \ldots$$

Temos que

$$H_{n+2-p}(S^{n+2}) = H_{n+2-p-1}(S^{n+2}) = H^p(K) = H^p(S^n) = 0$$

pois $1 \leq p < n$.

Assim, $H_{n+2-p}(S^{n+2}, X(K)) \simeq H_{n+2-p-1}(X(K))$ para $1 \leq p < n$. Por outro lado, $H_{n+2-p}(S^{n+2}, X(K)) \simeq H^p(K)$, pela dualidade de Alexander.

Portanto, $H_{n+2-p-1}(X(K)) = 0$ para $1 \leq p < n$, isto é, $H_j(X(K)) = 0$ para $1 < j \leq n$.

Resta analisar os casos $j = n+2$ e $j = n+1$.

1.º Caso: $[j = n+2]$

Como $X(K) = S^{n+2} - K$ é uma variedade $(n+2)$-dimensional, conexa e não compacta segue-se que $H_{n+2}(X(K)) = 0$. (veja [2], p. 121).

2.º Caso: $[j = n+1]$

Consideremos a seqüência de homologia do par $(X, \partial X)$ onde $X = X(K)$

$$\ldots \to H_{n+2}(X) \to H_{n+2}(X, \partial X) \to H_{n+1}(\partial X) \to H_{n+1}(X) \to H_{n+1}(X, \partial X) \to H_n(\partial X) \to H_n(X) \to \ldots$$

Temos que $H_{n+2}(X) = 0$ (pelo caso anterior),

$H_{n+2}(X, \partial X) = H^0(X)$ (pela dualidade de Lefschetz),

$H_{n+1}(\partial X) = H_n(X) = Z$ (pela fórmula de Künneth),

$H_{n+1}(X,\partial X) = H^1(X)$ (pela dualidade de Lefschetz) e $H^1(X) = Z$ (pelo teorema dos coeficientes universais) posto que $H_1(X) = Z$ (pela parte (i)) e $H_o(X)$ é livre.

Assim a seqüência do par $(X,\partial X)$ fica:

$$0 \to Z \xrightarrow{\partial} Z \to H_{n+1}(X) \to Z \xrightarrow{\simeq} Z \to 0 ,$$

onde ∂ leva 1 no 1 (isto é, classe fundamental em classe fundamental). Portanto, $H_{n+1}(X) = 0$.

Corolário 1.10.

Sejam L um link com m componentes e $X(L)=S^{n+2}-L$, então

$$H_j(X(L)) = \begin{cases} Z^m & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j > 1 \ ; \ j \neq n+1 \\ Z^{m-1} & \text{se } j = n+1 \end{cases}$$

Demonstração

Análoga ao teorema 1.9.

Observemos apenas que no caso $j = n+1$ obtemos a seqüência

$$0 \to Z \xrightarrow{\partial} Z^m \to H_{n+1}(X(L)) \to 0,$$

onde ∂ associa 1 à m-upla $(1,\ldots,1)$. Portanto,

$$H_{n+1}(X(L)) \simeq \frac{Z^m}{(1,\ldots,1)Z} = Z^{m-1} .$$

§ 2. REVESTIMENTO CÍCLICO INFINITO DE UM NÓ

Seja K^n um nó em S^{n+2}. Consideremos $\pi_1(X(K))$ grupo do nó K. Pelo teorema 1.9 temos que $H_1(X(K)) \simeq Z$.

A. Descrição Algébrica

Consideremos a seguinte seqüência

$$N \to \pi_1(X(K)) \xrightarrow{A} H_1(X(K))$$

onde A é a abelianização e $N = \ker A$; isto é, N é o comutador $[\pi_1(X(K));\pi_1(X(K))]$ de $\pi_1(X(K))$. Assim a sequência

$$0 \to N \to \pi_1(X(K)) \to Z \to 0 \quad \text{é exata.}$$

Definição 2.1.

O espaço de revestimento, que indicaremos por $\tilde{X}(K)$, associado ao grupo N é denominado espaço de revestimento cíclico infinito do nó K.

Observação

Como $N = \ker A$, segue-se que N é normal e portanto $\tilde{X}(K)$ é regular. Pelo corolário 2.25 do Capítulo I, $Aut(\tilde{X}(K)) \simeq Z$. Além disso, conforme a definição 2.27 do Capítulo I, $\tilde{X}(K)$ é o revestimento abeliano universal de X(K).

B. *Construção Geométrica*

Tendo em vista que $Aut(\tilde{X}(K)) \simeq Z$ construiremos um espaço $\tilde{X}^g(K)$ que será o espaço total do revestimento cíclico infinito do nó K. Para tanto necessitamos de certos espaços Y que construiremos a seguir:

Sejam M^{n+1} uma superfície de Seifert do nó K^n em S^{n+2} e $J : M \times (-1,1) \to S^{n+2}$ a inclusão do produto $M \times (-1,1)$ em S^{n+2} (veja observação 1.7).

Consideremos as aplicações contínuas $i_+ : M \to (-1,1)$ dada por $0 < i_+(m) < 1$ se $m \in \overset{\circ}{M}$ e $i_+(m) = 0$ se $m \in \partial M$, e $i_- : M \to (-1,1)$ dada por $-1 < i_-(m) < 0$ se $m \in \overset{\circ}{M}$ e $i_-(m) = 0$ se $m \in \partial M$. Aplicando-se J aos gráficos de i_+ e i_- obtemos a situação descrita pela Fig. 1 (vista de corte).

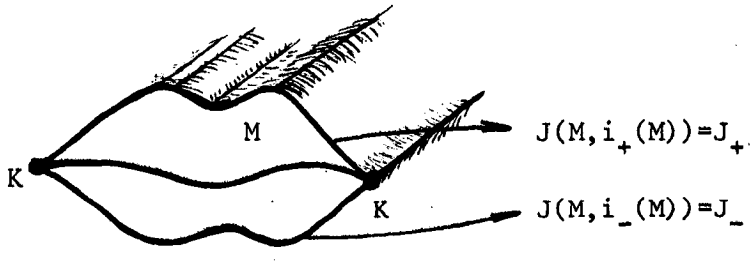


Fig. 1

Tomemos uma pequena vizinhança tubular aberta V(K) do nó K.

Observação

V(K) deve ser tão pequena que possamos substituir $V(K) \cap M$, $V(K) \cap J_+$ e $V(K) \cap J_-$ por segmentos radiais (Fig. 2).

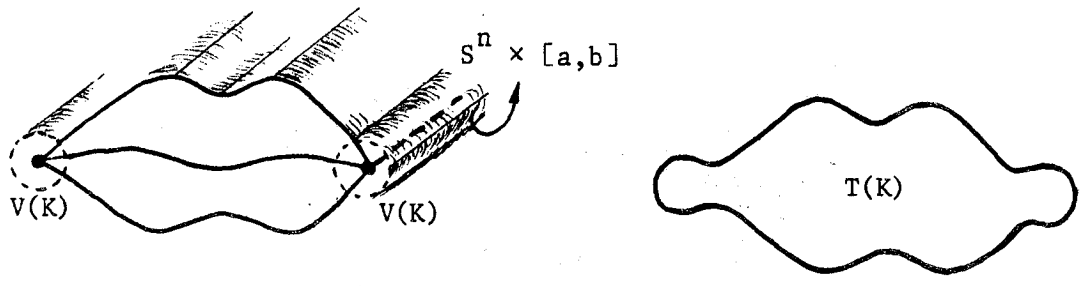


Fig. 2

Sejam T(K) o interior do esquema da Fig. 2, $Y' = S^{n+2} - T(K)$ e $X(K) = S^{n+2} - V(K)$.

Logo Y' é uma variedade (n+2)-dimensional com bordo homeomorfo a duas cópias de M, digamos M'_+ e M'_-, coladas pelo bordo K através de uma superfície cilíndrica homeomorfa a $S^n \times [a,b]$ (Fig. 3).

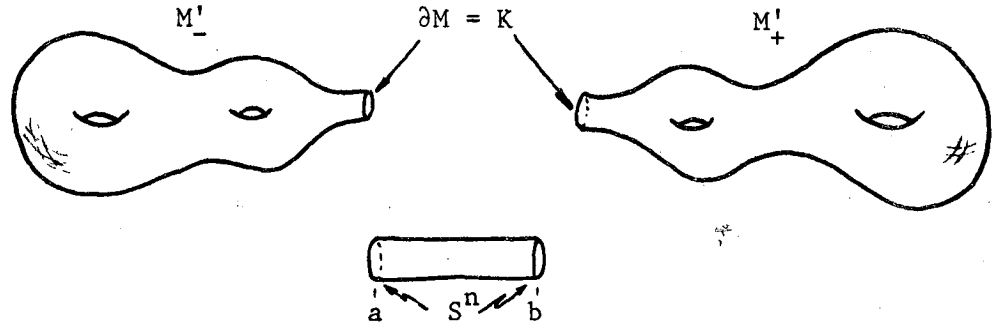


Fig. 3

O processo de obtenção de Y' acima descrito é equivalente a 'cortarmos' X(K) ao longo da superfície de Seifert M.

A variedade Y (Fig. 4) é obtida de Y' introduzindo um colarinho (veja teorema 1.2.14 do Capítulo I). Sejam M^+ e M^- as cópias da superfície de Seifert no colarinho. Continuaremos denotando a vizinhança tubular de K por V(K) mesmo com a introdução do colarinho.

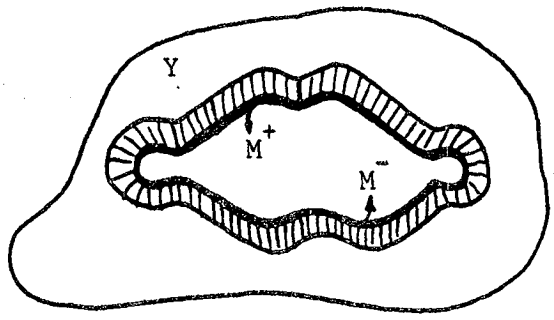


Fig. 4

Consideremos para a construção de $\tilde{X}^g(K)$ uma quantidade enumerável de cópias de espaços Y indexados em $i \in Z$.

Em cada ponto de coordenada inteira i sobre a reta localizamos um espaço Y_i. Identificando-se M_i^+ com M_{i+1}^- obtemos um espaço que indicaremos por $\tilde{X}^g(K)$.

Observemos que após as identificações das superfícies de Seifert, o ponto m ressaltado na Fig. 5 torna-se um ponto interior no espaço $\tilde{X}^g(K)$.

O espaço $\tilde{X}^g(K)$ assim construido é uma variedade (n+2)-dimensional, conexa por caminhos e com bordo homeomorfo a $\mathbb{R} \times S^n$.

De fato, os pontos do bordo das cópias de Y que pertencem ao fecho $\overline{V(K)}$ da vizinhança tubular, por não serem identificados, permanecerão como

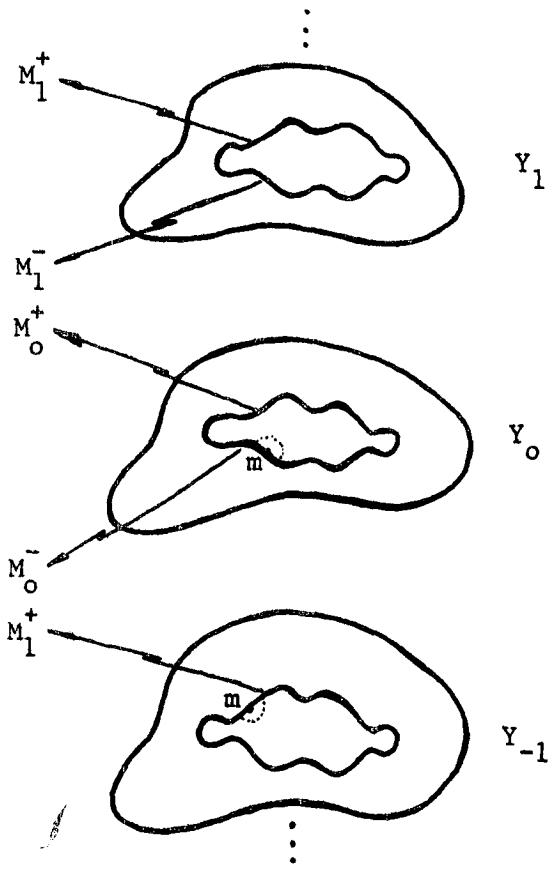


Fig. 5

pontos de bordo cujo conjunto é homeomorfo a $S^n \times \mathbb{R}$. Por sua vez, os pontos do bordo de Y oriundos de M^+ ou M^-, após as identificações tornam-se pontos interiores, conforme já observamos.

Para definirmos a projeção $p_g : \tilde{X}^g(K) \to X(K)$ de modo que $(\tilde{X}^g(K), p_g, X(K))$ seja um espaço de revestimento, observamos primeiramente que X(K) pode ser obtido (a menos de difeomorfismo isotópico a identidade) do espaço Y identificando-se M^+ com M^-. Seja $g : Y \to X(K)$ tal identificação. Definimos uma função plurívoca $\psi : \tilde{X}^g(K) \to Y$ pondo $\psi|Y_i : Y_i \to Y$ identidade para cada $i \in Z$ (ψ será unívoca fora das partes identificadas de $\tilde{X}^g(K)$). Tomando-se $p_g : \tilde{X}^g(K) \to X(K)$ por $p_g = g \circ \psi$ obtemos a projeção desejada.

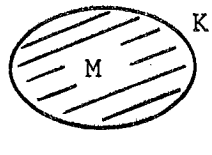
Exemplo 2.2.

Seja K o nó trivial em S^3.

Consideremos, como superfície de Seifert de K, o disco M.

Construiremos o espaço $X(K) = S^3 - V(K)$ onde V(K) é uma vizinhança tubular aberta de K e obteremos Y cortando X(K) ao longo da superfície de Seifert M.

Temos que $X(K) = S^3 - V(K)$ é homeomorfo a um toro sólido (Fig. 6) pois V(K) é homeomorfa a um toro sólido. (Estamos entendendo S^3 como composição de dois toros com fronteiras que coincidem).



Assim, Y é um cilindro sólido (finito), obtido de X(K) por um corte ao longo de M (Fig. 7).

Logo $\tilde{X}^g(K)$ é um cilindro sólido infinito (Fig. 8).

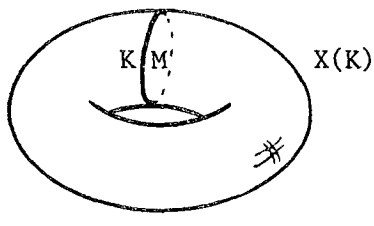


Fig. 6

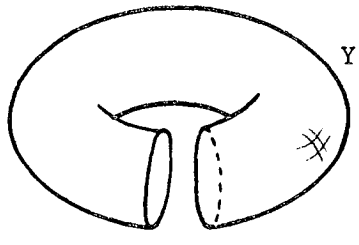


Fig. 7

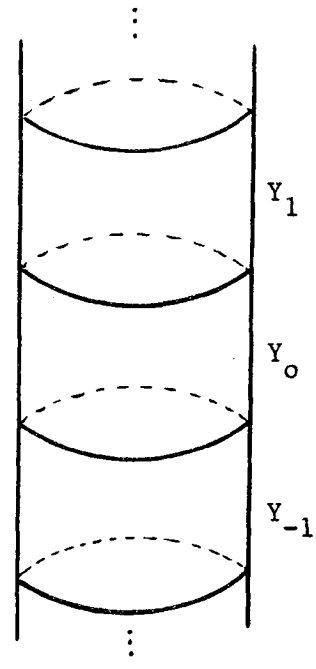


Fig. 8

A proposição a seguir caracteriza o grupo de transformações de $\tilde{X}^g(K)$.

Proposição 2.3.

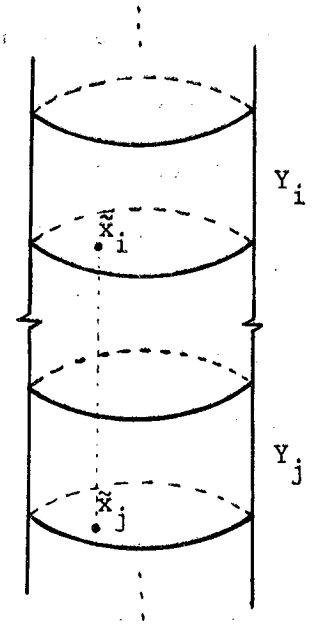
Existe um automorfismo $\tau : \tilde{X}^g(K) \to \tilde{X}^g(K)$ que leva Y_i em Y_{i+1}.

Além disso, τ gera o grupo de transformações $Aut(\tilde{X}^g(K))$ que é cíclico infinito.

Demonstração

Qualquer elemento $\psi \in Aut(\tilde{X}^g(K))$ preserva, por definição, as fibras $p_g^{-1}(x)$ que são espaços discretos; então um elemento $\tilde{x}_i \in Y_i$ é levado no seu correspondente $\tilde{x}_j \in Y_j$; isto é, $\psi(\tilde{x}_i) = \tilde{x}_j$.

Seja k o índice de $\tilde{x}_k$ que se faz corresponder a $\tilde{x}_o \in Y_o$ por ψ. Logo ψ fica associado ao inteiro k e reciprocamente.



Tomemos $\tau: \tilde{X}^g(K) \to \tilde{X}^g(K)$ tal que $\tau(\tilde{x}_o) = \tilde{x}_1$. Assim, $\psi = \tau^k$.

Portanto $Aut(\tilde{X}^g(K)) = (\tau)$ e assim $Aut(\tilde{X}^g(K)) \simeq Z$.

Definição 2.4. (Número de Enlaçamento (Linking Number))

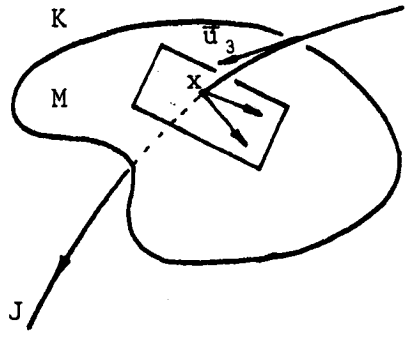
Sejam J e K nós orientados em S^3 (ou R^3) e M uma superfície de Seifert de K. Assumimos que J intercepta transversalmente M em um número finito de pontos.

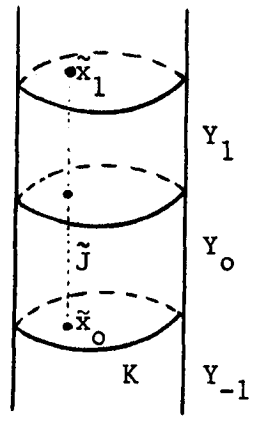
Como M é uma variedade diferenciável orientada temos que para cada ponto $x \in M$, existe um plano tangente T_xM, o qual é um espaço vetorial bidimensional com base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

Seja $\vec{u}_3$ um vetor tangente a J com mesmo sentido que o de percurso de J. Se a base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ tiver orientação positiva daremos ao ponto x o valor +1, caso contrário -1. A soma desses valores é chamada *número de enlaçamento* e denotado por $\ell k(J,K)$.

Observações

(i) Existem várias definições equivalentes (a menos de sinal) que podem ser encontradas em [8], p. 132. Entre essas destacamos a seguinte: sejam $(\tilde{X}^g(K), p_g, X(K))$ o revestimento cíclico infinito de $X(K) = S^3 - K$ e τ o gerador de $Aut(\tilde{X}^g(K))$, conforme a proposição anterior. Consideremos J como um laço em $X(K)$ com ponto base; digamos, em $x_o \in \text{Im } J$; isto é, $J \in \pi_1(X(K), x_o)$.



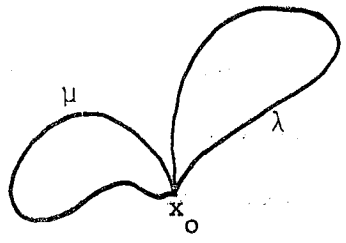


Levantamos J a um caminho $\tilde{J}$ em $\tilde{X}^g(K)$, começando em qualquer ponto $\tilde{x}_o \in p^{-1}(x)$ e chamamos seu ponto final de $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$. Existe um único inteiro m tal que $\tau^m(\tilde{x}_o) = \tilde{x}_1$. Definimos m como sendo o número de enlaçamento de J e K.

(ii) A definição acima pode ser generalizada naturalmente para nós de dimensão superior.

(iii) O número de enlaçamento é aditivo; isto é, se λ e μ são dois laços com ponto básico x_o com números de enlaçamento com um nó K respectivamente ℓ_1 e ℓ_2, en

tão o laço composição de λ e μ tem número de enlaçamento com o nó K igual a soma $\ell_1 + \ell_2$.



Com efeito, sejam $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\lambda}$ os levantamentos de μ e λ respectivamente. Se $\tilde{x}_1$ é o ponto final de $\tilde{\lambda}$ será o ponto inicial de $\tilde{\mu}$.

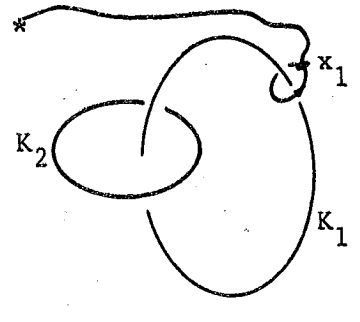
Sejam $\tilde{x}_o$ ponto inicial de $\tilde{\lambda}$ e $\tilde{x}_2$ ponto final de $\tilde{\mu}$. Assim $\tilde{x}_o$ e $\tilde{x}_2$ são respectivamente os pontos inicial e final do levantamento do caminho composto $\lambda.\mu$. Logo, pela observação anterior, $\ell k(\lambda.\mu,K) = m$ onde m é tal que $\tau^m(\tilde{x}_o) = \tilde{x}_2$.

Mas $\tau^{\ell_1}(\tilde{x}_o) = \tilde{x}_1$ e $\tau^{\ell_2}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$. Portanto $m=\ell_1+\ell_2$.

Definição 2.5. (Meridianos de um Link)

Seja L um link de componentes $K_1,\ldots,K_m$. Consideremos $V(K_i)$ uma vizinhança tubular aberta da componente K_i e $X = S^{n+2} - \overset{m}{\underset{i=1}{\cup}} V(K_i)$.

Indicaremos por μ_i o elemento de $\pi_1(X,*)$ representado, a menos de caminhos ligando * a x_i, pelo círculo $x_i \times \partial D^2$ em $K_i \times D^2 \simeq V(K_i)$; $i = 1,\ldots,m$, orientado de modo que o número de enlaçamento (definição 2.4) $\ell k(\mu_i,K_i)$ seja +1.



Os μ_i's assim escolhidos são denominados meridianos do link L.

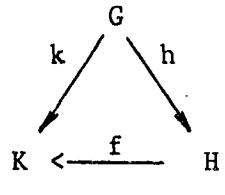
C. *Equivalência Entre a Descrição Algébrica e a Construção Geométrica*

Mostraremos que $\tilde{X}(K)$ coincide com $\tilde{X}^g(K)$, em outras palavras mostraremos que os grupos aos quais eles estão associados coincidem; isto é, $N = \ker A$ onde A é a abelianização e $N_g = p_{g_*}\pi_1(\tilde{X}^g(K))$, coincidem.

Além disso daremos uma descrição de N_g.

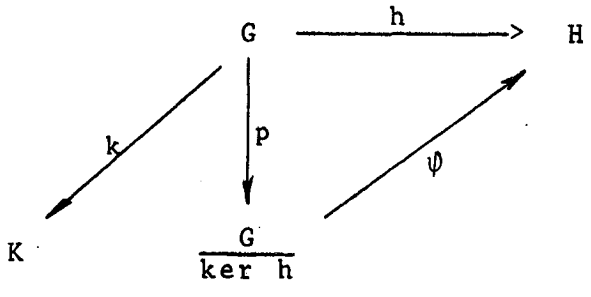
Lema 2.6.

Se $h : G \to H$ e $k : G \to K$ são homomorfismos e h é sobrejetor, existe um homomorfismo (necessariamente único) $f:H\to K$ que comuta o diagrama se, e somente se, o núcleo de h está contido no núcleo de k.



Demonstração

Consideremos o diagrama

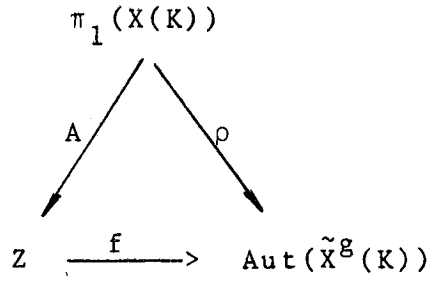


Como h é sobre, ψ é isomorfismo.

Seja $f : H \to K$ dada por $f(x) = k(p^{-1}(\psi^{-1}(x)))$.

Note que f está bem definida pois $\ker h \subset \ker k$ e satisfaz o desejado.

Em vista deste lema, para mostrarmos que N coincide com N_g basta mostrarmos que o diagrama



se completa, onde ρ e A são epimorfismos e f é um isomorfismo que comuta o diagrama.

Evidentemente a abelianização A é um epimorfismo; por sua vez, $\rho : \pi_1(X(L)) \to Aut(\tilde{X}^g(K))$ é dada por

$$\rho(\lambda) = \psi \in Aut(\tilde{X}^g(K))$$

onde $\psi : \tilde{X}^g(K) \to \tilde{X}^g(K)$ é tal que $\psi = \tau^{\ell}$ sendo τ o gerador de $Aut(\tilde{X}^g(K))$ (cf. proposição 2.3) e $\ell = \ell k(\lambda, K)$. Assim ρ é um epimorfismo (pela observação (iii) da definição 2.4) entre os grupos $\pi_1(X(K))$ e $Aut(\tilde{X}^g(K))$. Além disso o isomorfismo $f : Z \to Aut(\tilde{X}^g(K))$ que comuta o diagrama é tal que $f(1) = \tau$, fixada uma orientação para o nó.

Portanto pelo lema 2.6, $\ker A = p_{g_*}\pi_1(\tilde{X}^g(K))$; isto é, $N = N_g$.

Descrição Geométrica de N_g (grupo ao qual está associado $\tilde{X}^g(K)$)

Consideremos a seqüência

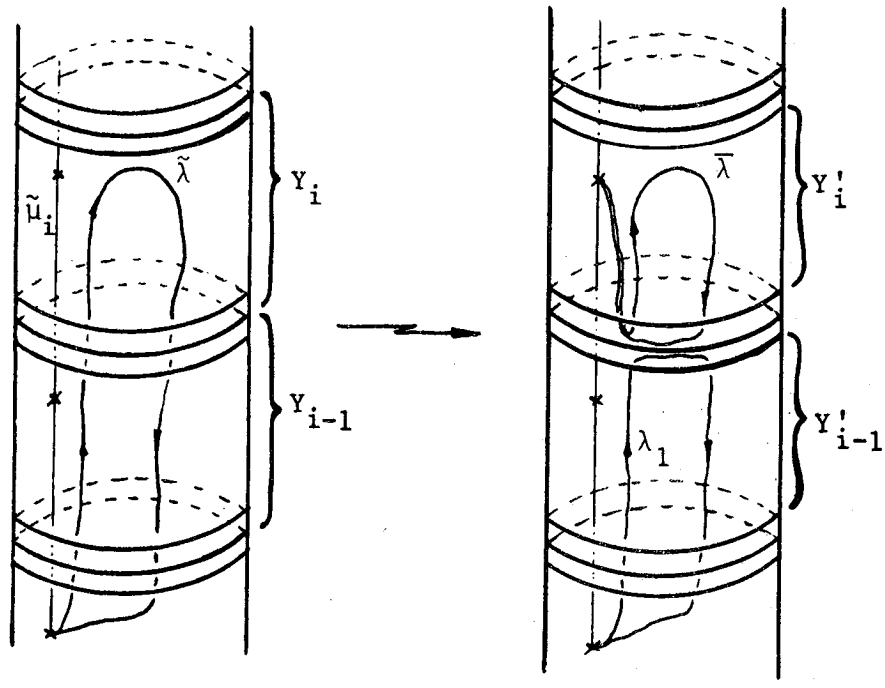
$$0 \to N_g \xrightarrow{p_{g_*}} \pi_1(X(K), x_o) \xrightarrow{p} Z \to 0$$

onde $N_g = \ker \rho$.

Sejam λ um laço em $X(K)$ com ponto básico x_o e $\tilde{\lambda}$ seu levantamento em $\tilde{X}^g(k)$ com ponto inicial $\tilde{x}_o$ (q.v. teorema 2.4, Capítulo I).

Temos que $\lambda \in N_g$ se, e somente se, $\tilde{\lambda}$ for fechado. Por outro lado $\tilde{\lambda}$ é fechado se, e somente se, $\ell k(\lambda, K) = 0$ (q.v. definição 2.4).

Então para $\lambda \in N_g$, seu levantamento $\tilde{\lambda}$ pode ser reescrito da seguinte forma:



$\tilde{\lambda} = \lambda_1.\omega.\bar{\lambda}.\omega^{-1}$ onde $\bar{\lambda} \in \pi_1(Y_i, x_i)$, (i é a posição na qual se dá o retorno de $\tilde{\lambda}$), sendo ω_i um caminho ligando $\tilde{x}_o$ a $\tilde{x}_i$ tal que sua projeção é igual a μ^k onde μ é o meridiano de K e o caminho λ_1 tem 'complexidade' menor que $\tilde{\lambda}$.

Continuando este processo escreveremos

$$\tilde{\lambda} = \prod_{j=1}^{n} \omega_j.\bar{\lambda}_j.\omega_j^{-1}$$

com $\bar{\lambda}_j \in \pi_1(Y_j, \tilde{x}_j)$

e $p_{g_*}(\omega_j) = \mu^k$.

Portanto $p_{g_*}\pi_1(\tilde{X}^g(K))$ (isto, N_g) é constituido por laços $\lambda \in \pi_1(X(K))$ tal que $\tilde{\lambda} = \Pi\omega_j\bar{\lambda}_j\omega_j^{-1}$, com $\bar{\lambda}_j \in \pi_1(Y_j, \tilde{x}_j)$ e ω_j tal que $p_{g_*}(\omega_j)$ é potência do meridiano de K.

Observação

Devido a equivalência entre a construção algébrica e a descrição geométrica, conclui-se que $\tilde{X}^g(K)$ não depende da particular superfície de Seifert tomada para sua construção.

§ 3. *REVESTIMENTO CÍCLICO FINITO DE UM NÓ*

Seja K^n um nó em S^{n+2}.

A. *Descrição Algébrica*

Consideremos a seguinte sequência $N \to \pi_1(X(K)) \xrightarrow{\rho} Z_t$, onde $t \in \mathbb{N}$, $N = \ker \rho$ e ρ é a composta $\pi_1(X(K)) \xrightarrow{A} H_1(X(K)) \xrightarrow{p} Z_t$ sendo A a abelianização e $p : Z \to Z_t$ a projeção canônica.

Assim a seqüência

$0 \to N \to \pi_1(X(K)) \to Z_t \to 0$ é exata.

Definição 3.1.

O espaço de revestimento que indicaremos por $\tilde{X}_t(K)$, associado ao grupo N é denominado t-ésimo espaço de revestimento cíclico do nó K.

Observemos que, por construção, $Aut(\tilde{X}_t(K)) \simeq Z_t$.

B. *Construção Geométrica*

A construção a seguir é análoga àquela feita no parágrafo 2.

Fixemos um número natural t e consideremos t cópias de espaços Y (como no § 2) indexados por i; $i = 0,1,\ldots,t-1$. No bordo de Y_i temos duas cópias de superfícies de Seifert que indicaremos por M_i^+ e M_i^-.

Fazendo as mesmas identificações do parágrafo 2, exceto que M^{+}_{t-1} é identificado com M^{-}_{o}, obtemos um espaço de revestimento chamado t-ésimo espaço de revestimento cíclico do nó K que será denotado por $\tilde{X}^{g}_{t}(K)$. Veja o esquema na Fig. 1.

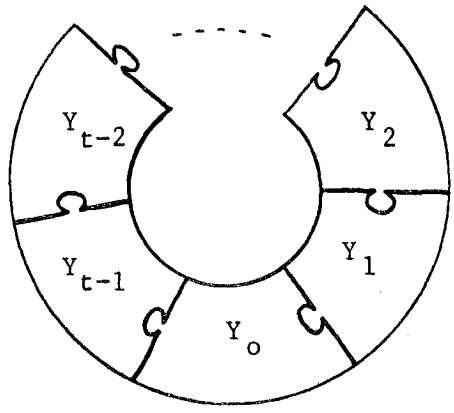


Fig. 1

Neste espaço de revestimento, a projeção, definida analogamente ao caso do parágrafo 2, será denotada por

$$p_t : \tilde{X}^{g}_{t}(K) \to X(K).$$

Proposição análoga a proposição 2.3 se estabelece neste caso, observando que na demonstração o inteiro k é um inteiro módulo t. Assim o grupo de transformações $Aut(\tilde{X}^{g}_{t}(K))$ é isomorfo a Z_t.

C. *Equivalência Entre a Descrição Algébrica e a Construção Geométrica*

Mostremos que o núcleo da aplicação $\rho : \pi_1(X(K)) \to Z_t$ coincide com $p_{t_*}\pi_1(\tilde{X}^{g}_{t}(K))$.

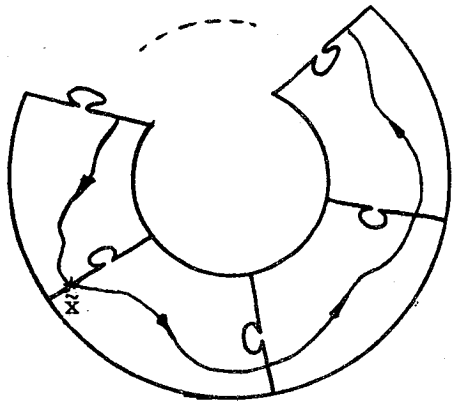
Observemos primeiramente que a aplicação ρ é dada pela composta

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X(K)) & \xrightarrow{\rho_1} & H_1(X(K)) \\ & \searrow^{\rho} & \downarrow p \\ & & Aut(\tilde{X}_t(K)) \end{array}$$

onde ρ_1 associa a cada laço α (com ponto básico x) o seu número de enlaçamento $\ell k(\alpha,K)$ com o nó K, e p é a projeção canônica.

Assim a aplicação ρ associa a cada laço α em $\pi_1(X(K),x)$ o seu número de enlaçamento com o nó K módulo t; isto é,

$$\rho(\alpha) = \ell k(\alpha,k) \mod t.$$



Por outro lado, os laços em $\tilde{X}_t^g(K)$ (com ponto básico $\tilde{x} \in p_t^{-1}(x)$) caracterizam-se por possuirem projeções em $X(K)$ que são laços com número de enlaçamento com o nó K múltiplos de t.

Portanto $p_{t_*}\pi_1(\tilde{X}_t^g(K)) = \ker \rho$.

Observações 3.2.

(i) Existe um homomorfismo $\psi : (\tilde{X}(K),p,X(K)) \to (\tilde{X}_t(K),p_t,X(K))$; qualquer que seja $t \in \mathbb{N}$.

Com efeito, temos que $Aut(\tilde{X}(K)) \simeq Z$ e $Aut(\tilde{X}_t(K)) \simeq Z_t$.

Mas

$$Aut(\tilde{X}(K)) = \frac{\pi_1(X(K))}{p_*\pi_1(\tilde{X}(K))} \quad e \quad Aut(\tilde{X}_t(K)) = \frac{\pi_1(X(K))}{p_{t_*}\pi_1(\tilde{X}_t(K))}$$

pois $(\tilde{X}(K),p,X(K))$ e $(\tilde{X}_t(K),p_t,X(K))$ são regulares (cf. 2.25, Cap. I).

Assim, $p_*\pi_1(\tilde{X}(K)) \subset p_{t_*}\pi_1(\tilde{X}_t(K))$.

Logo, por 2.17 do Cap. I, existe um homomorfismo

$\psi : \tilde{X}(K) \to \tilde{X}_t(K)$.

(ii) $(\tilde{X}(K),\psi,\tilde{X}_t(K))$ é um espaço de revestimento regular, qualquer que seja $t \in \mathbb{N}$.

Conseqüência imediata de 2.22 (b) do Capítulo I.

§ 4. REVESTIMENTO LIVRE DE UM LINK DE BORDO

A. Descrição Algébrica

Definição 4.1. (Link de Bordo ou Boundary Link)

Um link L é chamado link de bordo se existirem superfícies de Seifert duas a duas disjuntas bordando suas componentes.

Exemplos

(1) O link da Fig. 1 é um link de bordo.

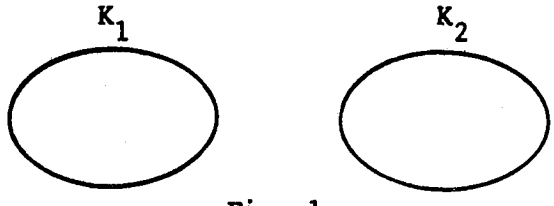


Fig. 1

(2) O link de Whitehead (Fig. 2) não é um link de bordo.

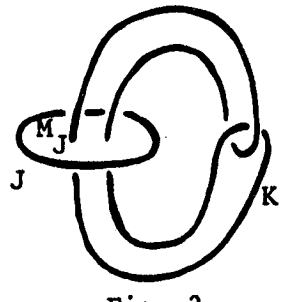


Fig. 2

Com efeito, sejam M_J e M_K as superfícies de Seifert das componentes J e K respectivamente. Tomemos o revestimento cíclico infinito $\tilde{X}(J)$ de $S^3 - J$ (Fig. 3).

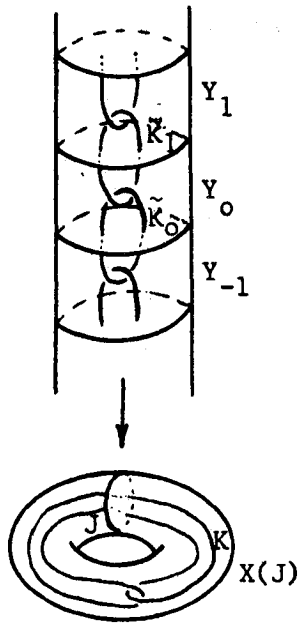


Fig. 3

Se $M_J \cap M_K = \emptyset$, então M_K se levantaria em superfícies de Seifert disjuntas $\ldots,\tilde{M}_{-1},\tilde{M}_o,\tilde{M}_1,\ldots$ para os levantamentos $\ldots,\tilde{K}_{-1},\tilde{K}_o,\tilde{K}_1,\ldots$ do nó K em $\tilde{X}(J)$, posto que $\tilde{X}(J)$ independe da particular superfície de Seifert M_J. Mas isto é impossível, pois quaisquer dois levantamentos consecutivos de K têm número de enlaçamento +1.

Observação

Indicaremos por $\bigvee_{i=1}^{m} S_i^1$ a rosácea de m circunferências e F_m o grupo livre com m letras. Assim, $\pi_1(\bigvee_{i=1}^{m} S^1) = F_m$.

O teorema a seguir caracteriza os links de bordo.

Teorema 4.2. (Gutiérrez-Smythe)

Seja $X(L) = S^{n+2} - L$ onde L é um link de m componentes. O link L é um link de bordo se, e somente se, existe uma aplicação sobrejetora ρ de $\pi_1(X(L))$ sobre F_m que leva os meridianos de L sobre os geradores de F_m.

Demonstração (Esboço)

Sejam L um link de bordo e $M_1, M_2, \ldots, M_m$ as superfícies de Seifert (disjuntas) de suas componentes. Consideremos $Y = S^{n+2} - T(L)$ onde $T(L) = \bigcup_{i=1}^{m} T(K_i)$ sendo $T(K_i)$ o interior do esquema descrito no parágrafo 2.

Construiremos uma aplicação $f : X(L) \to \bigvee_{i=1}^{m} S_i^1$ cuja induzida f_* coincide com ρ. Colocamos $f|Y = y_o$ (constante) onde y_o é o centro da rosácea $\bigvee_{i=1}^{m} S_i^1$. Resta definir f em $T(L) - \bigcup_{i=1}^{m} V(K_i)$ posto que $X(L) = S^{n+2} - \bigcup_{i=1}^{m} V(K_i)$ onde $V(K_i)$ é uma vizinhança tubular aberta da componente K_i. Cada $T(K_i) - V(K_i)$ é levado pela f numa circunferência da rosácea, conforme descrito na Fig. 4.

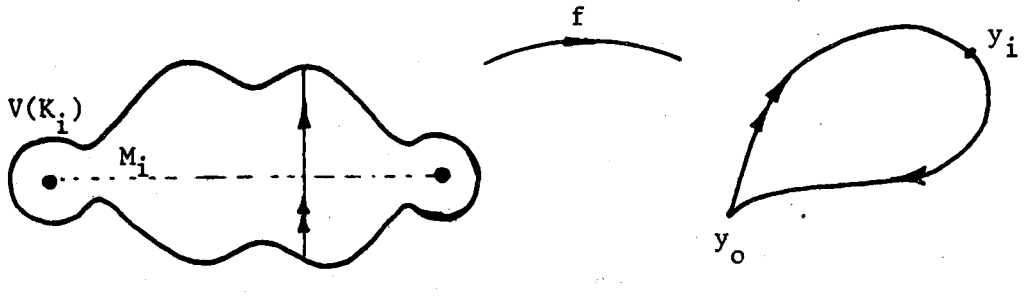


Fig. 4

Observemos que $f^{-1}(y_i) = M_i$.

Assim, obtemos $f : X(L) \to \bigvee_{i=1}^{m} S_i^1$ tal que a induzida $f_* : \pi_1(X(L)) \to F_m$ coincide com ρ.

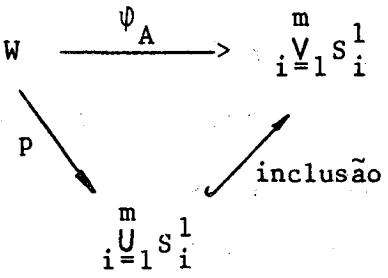
Reciprocamente, consideremos $\rho : \pi_1(X(L)) \to F_m$ uma aplicação que leva os meridianos de L sobre os geradores de F_m, onde $X(L) = S^{n+2} - L$. Seja $W = S^{n+2} - \bigcup_{i=1}^{m} V(K_i)$.

Notemos que $\partial W = \bigcup_{i=1}^{m} (S_i^1 \times S^n)$.

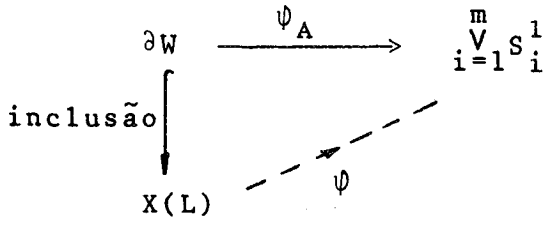
Construiremos uma aplicação $\psi : X(L) \to \bigvee_{i=1}^{m} S_i^1$ com a qual obteremos superfícies de Seifert disjuntas para as componentes do link L.

Definimos uma aplicação p de ∂W em $\bigcup_{i=1}^{m} S_i^1$ que projeta cada toro $S^1 \times S^n$ em S^1.

Seja $\psi_A : W \to \bigvee_{i=1}^{m} S_i^1$ dada pela composição de p com a inclusão.



Definimos ψ como extensão de ψ_A.



As desejadas superfícies de Seifert $M_1, \ldots, M_m$ para as componentes $K_1, \ldots, K_m$ são obtidas por ψ_1^{-1} de pontos adequados, onde ψ_1 é uma aproximação diferenciável de ψ.

Mais detalhes podem ser encontrados em [3], p. 30.

Seja $N = \ker \rho$ onde $\rho : \pi_1(X(L)) \to F_m$ é a aplicação do teorema 4.2.

Definição 4.3.

O espaço de revestimento $X_\omega(L)$ associado a N é chamado espaço de revestimento livre de um link de bordo L.

Observação

Estudos sobre este espaço de revestimento podem ser encontrados em [9].

B. *Construção Geométrica*

Sejam $L : \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n \to S^{n+2}$ um link de bordo com m componentes e M_i a superfície de Seifert da componente $K_i = L(S_i^n)$. Cortando-se $X(L) = S^{n+2} - L$ ao longo de todas as superfícies M_i, $i = 1,\ldots,m$ obtemos um espaço Y' (como construido no parágrafo 2). Seja Y o espaço obtido de Y' pela introdução de um colarinho.

Adotaremos uma linguagem combinatória na construção de $X_\omega^g(L)$.

Seja T_m uma árvore cujos vértices estejam em correspondência biunívoca com os elementos ω de F_m. Os ramos de T_m orientarão as colagens dos espaços Y que indexaremos por ω (que é uma palavra de F_m), isto é, Y_ω estará localizado no vértice associado a palavra ω e será colado convenientemente aos espaços Y adjacentes. Tal colagem descreveremos a seguir.

Y_ω tem em seu bordo (que é constituido de m componentes) cópias duplas das superfícies de Seifert $M_1,\ldots,M_m$ de L as quais denotaremos por ${}^{+}M^i$ e ${}^{-}M^i$; i = 1,...,m. Indicando os geradores de F_m por $a_1,\ldots,a_m$ teremos que os vértices adjacentes ao vértice ω (estamos identificando cada vértice com uma palavra) serão $\omega a_i^{\pm 1}$ com i = 1,...,m. Colaremos, através da identidade ${}^{+}M^i_\omega$ com ${}^{-}M^i_{\omega a_i}$ e ${}^{-}M^i_\omega$ com ${}^{+}M^i_{\omega a_i^{-1}}$.

Seja $X^g_\omega(L)$ o espaço assim construido.

Esquematizaremos o caso m = 2.

Neste caso a árvore T_2 adequada é o subconjunto do $\mathbb{R}^2$ descrito abaixo:

a partir da origem tomamos sobre os eixos coordenados quatro segmentos de comprimento 1. A partir da extremidade livre de cada um dos quatro segmentos, tomamos três segmentos de comprimento $\frac{1}{2}$. A partir da extremidade livre de cada um dos doze segmentos, tomamos três segmentos de comprimento $\frac{1}{4}$, e assim sucessivamente (Fig. 5).

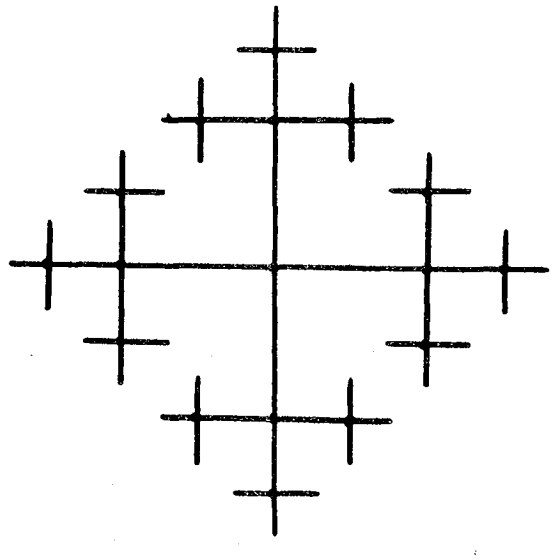


Fig. 5

T_2 é a reunião dos (infinitos) segmentos construidos acima. Genericamente, para um link de m componentes, fazemos uma construção análoga no R^m.

Em cada vértice ω da árvore T_2 localizamos um espaço Y (Fig. 6).

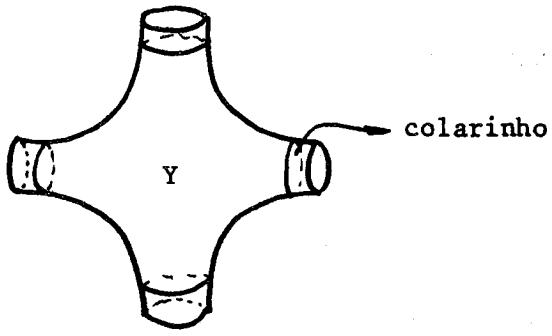


Fig. 6

Após as colagens convenientes, obtemos o espaço $X^g_\omega(L)$ esboçado na Fig. 7.

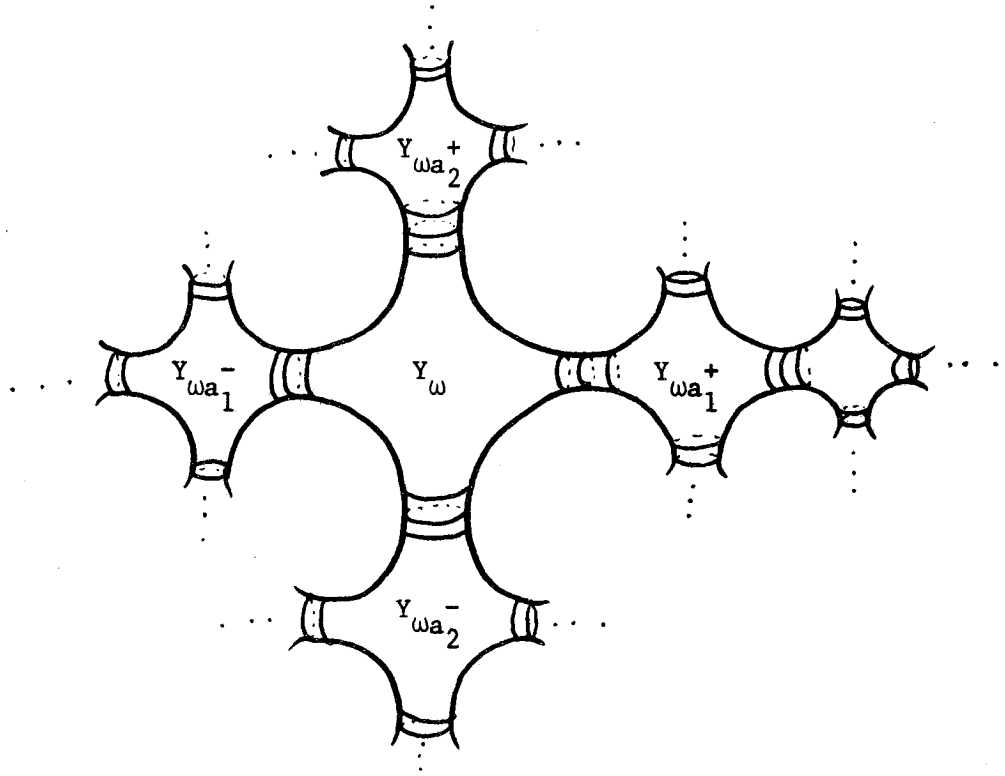


Fig. 7

Definiremos, agora, uma projeção $p_g : X^g_\omega(L) \to X(L)$ de modo que $(X^g_\omega(L), p_g, X(L))$ seja um espaço de revestimento. Primeiramente observamos que $X(L)$ pode ser obtido de Y (a menos de difeomorfismo isotópico a identidade) identificando-se $^+M^i$ com $^-M^i$; $i = 1,\ldots,m$. Seja $g : Y \to X(L)$ tal identificação. Podemos definir uma função plurívoca $\psi : X^g_\omega(L) \to Y$ pondo $\psi|Y_i : Y_i \to Y$ identidade (ψ será unívoca fora das partes identificadas de $X^g_\omega(L)$).

Consideremos a aplicação (unívoca) $p_g : X^g_\omega(L) \to X(L)$ dada por $p_g = g\circ\psi$. Assim, $(X^g_\omega(L), p_g, X(L))$ é um espaço de revestimento.

C. *Equivalência Entre a Descrição Algébrica e a Construção Geométrica*

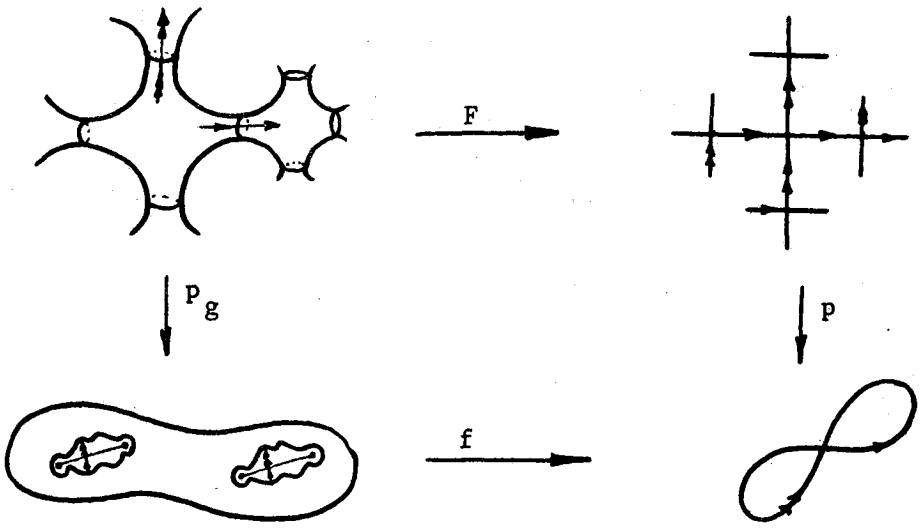
Seja $f : X(L) \to \bigvee_{i=1}^{m} S^1_i$ como no teorema 4.2.

Consideremos $F : X^g_\omega(L) \to T_m$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}^g_\omega(L), x_o) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(T_m, *) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{g_*}} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \pi_1(X(L), x_o) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\bigvee_{i=1}^{m} S^1_i, *) \end{array}$$

comuta.

Definimos $F : X^g_\omega(L) \to T_m$ pondo: a imagem de cada Y' é o correspondente vértice em T_m e a imagem de cada colarinho de Y é um ramo T_m.



Consideremos o diagrama

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \pi_1(X^g_\omega(L),x_o) & \xrightarrow{F_*} & \pi_1(T_m,*) & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{g_*}} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} & & \\
0 & \longrightarrow & \ker f_* & \longrightarrow & \pi_1(X(L),x_o) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(\bigvee_{i=1}^{m} S^1_i,*) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \mathrm{Aut}(X^g_\omega(L)) & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}
$$

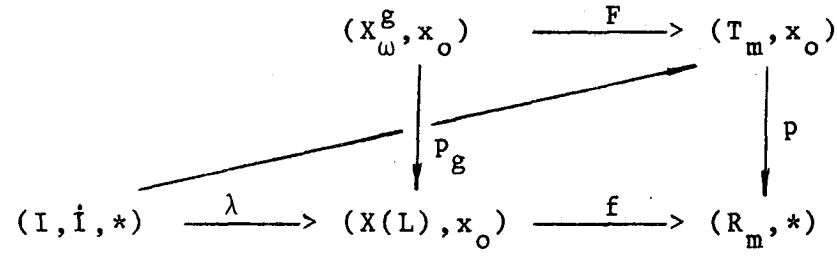
onde a seqüência exata horizontal provém da descrição algébrica e a vertical da construção geométrica.

Devemos mostrar que $\ker f_* = p_{g_*}\pi_1(X_\omega^g(L),\tilde{x}_o)$.

Temos que $f_* \circ p_{g_*} = p_* \circ F_*$. Mas $p_* \circ F_* = 0$ pois $\pi_1(T_m,*) = 0$. Portanto, $p_{g_*}\pi_1(X_\omega^g(L),\tilde{x}_o) \subset \ker f_*$.

Reciprocamente, seja $\lambda \in \ker f_*$. Temos que $f_*([\lambda]) = 0$, então $f\circ\lambda$ é homotópico a constante. Assim $f\circ\lambda$ possui levantamento fechado.

Consideremos o diagrama:



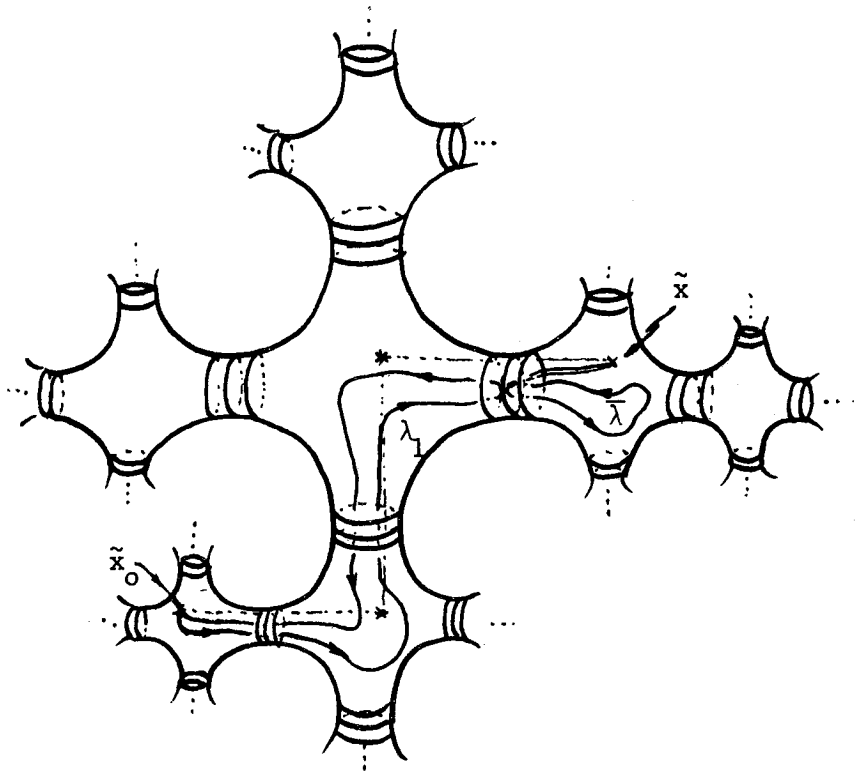
Devemos mostrar que $\lambda \in p_{g_*}\pi_1(X_\omega^g(L))$.

Dividimos a demonstração em três casos:

(i) Se $\text{im}\,\tilde{\lambda} \in Y'$ para algum Y' então podemos levantar λ (por construção de $X_\omega^g(L)$). Logo $\lambda \in \text{im}\, p_{g_*}$.

(ii) Se $\tilde{\lambda}$ é da forma $\alpha^{-1}.\overline{\lambda}.\alpha$ onde $\text{im}\,\overline{\lambda} \in Y'$ e se α se projeta em composição de meridianos, também podemos levantar λ (por construção de $X_\omega^g(L)$). Logo $\lambda \in \text{im}\, p_{g_*}$.

(iii) Se $\text{im}\,\tilde{\lambda} \not\subset Y'$, como $f\circ\lambda \simeq cte$, $f\circ\lambda$ levanta-se em T_m. Tal levantamento tem pontos de retorno em T_m (posto que T_m é uma árvore). Isto nos possibilita reescrever $\tilde{\lambda}$ como



$\tilde{\lambda} = \lambda_1.\omega^{-1}.\bar{\lambda}.\omega$ onde $\text{im}\,\bar{\lambda} \in \bar{Y}$, ω se projeta em composição de meridianos e λ_1 é 'mais simples' que λ em relação ao levantamento em T_m. Repetindo este processo obtemos que $\lambda \in \text{im}\, p_{g_*}$.

§ 5. *REVESTIMENTO ABELIANO UNIVERSAL DE UM LINK*

Neste parágrafo descreveremos um espaço de revestimento que é extensão natural do revestimento cíclico infinito de um nó.

A. *Descrição Algébrica*

Sejam $L : \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n \to S^{n+2}$ um link de m componentes (não necessariamente link de bordo) e $X(L) = S^{n+2} - L$. Pelo teorema 1.9 temos que $H_1(X(L)) \simeq Z^m$.

Consideremos a seguinte seqüência exata

$$0 \to N \to \pi_1(X(L)) \xrightarrow{A} Z^m \to 0$$

onde A é a abelianização e $N = \ker A$.

Definição 5.1.

O espaço de revestimento, que será indicado por $\tilde{X}(L)$, associado ao grupo (normal) N é denominado espaço de revestimento abeliano universal do link L.

Observemos que, por construção, $\mathrm{Aut}(\tilde{X}(L)) \simeq Z^m$.

B. *Construção Geométrica*

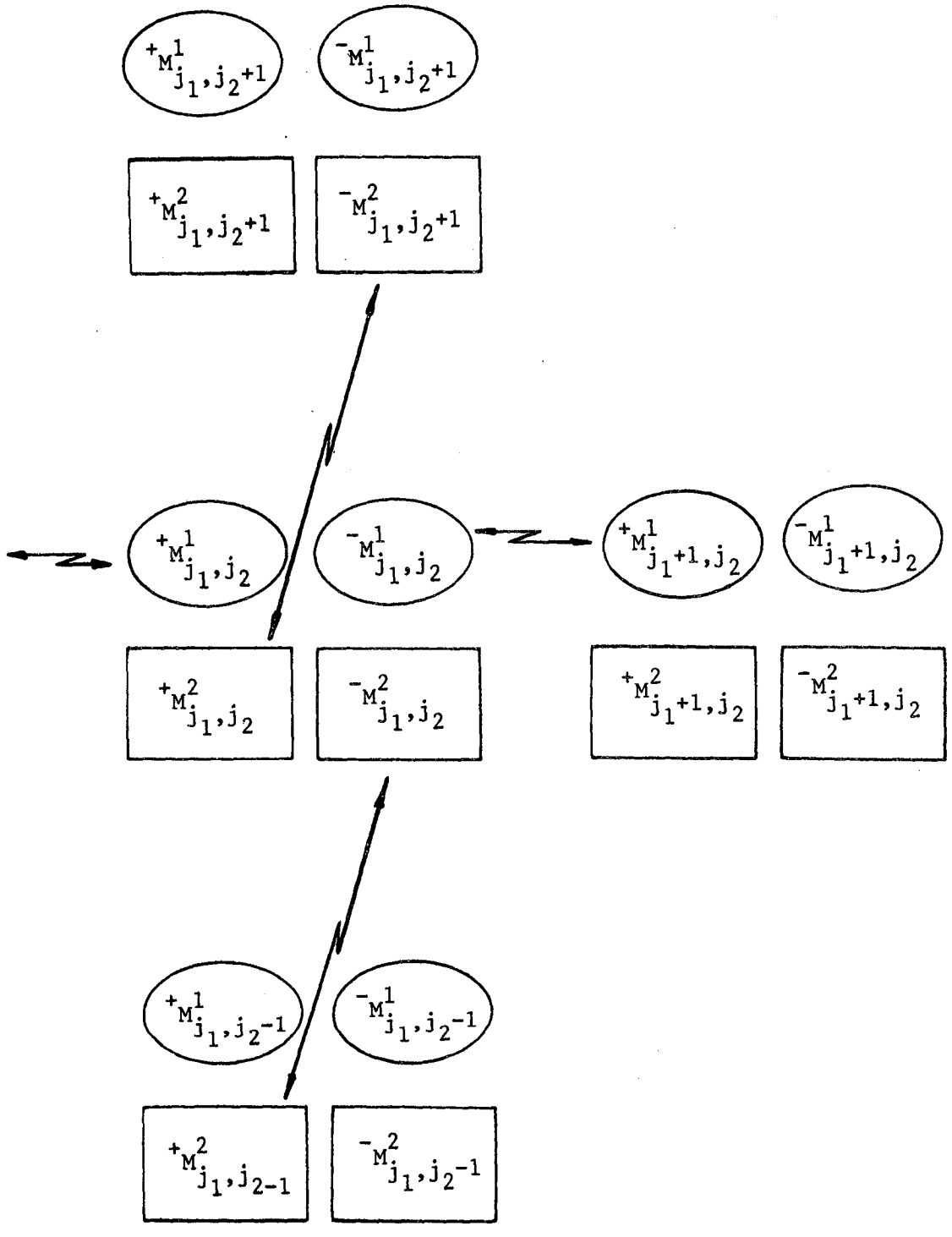
Daremos um esboço da construção geométrica do revestimento abeliano universal de L, que indicaremos por $\tilde{X}^g(L)$, quan

do L for um link de bordo. Construção semelhante não pode ser feita se o link não for link de bordo pois necessitamos que as superfícies de Seifert das componentes sejam duas a duas disjuntas.

Seja $L : \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n \to S^{n+2}$ um link de bordo com m componentes K_i e superfícies de Seifert M_i. Consideremos Y o espaço obtido de $X(L) = S^{n+2} - L$ por corte ao longo das superfícies M_i e introdução de colarinho.

Consideremos o reticulado Z^m e em cada vértice $(j_1,\ldots,j_m)$ localizamos uma cópia de um espaço Y indexado por $j_1,\ldots,j_m$; isto é, $Y = Y_{j_1,\ldots,j_m}$. Como cada espaço Y^i possui duas cópias homeomórfas à superfície de Seifert no bordo, digamos $^{+}M^i$ e $^{-}M^i$, segue-se que Y possui m cópias de ^{+}M e m cópias de ^{-}M. Colando-se convenientemente estas cópias de M; isto é, $^{+}M^i$ do vértice $(j_1,\ldots,j_m)$ é colada a $^{-}M^i$ de um vértice adjacente, obtemos um espaço denotado por $\tilde{X}^g(L)$.

Para fixarmos idéias tomemos um link de bordo de duas componentes K_1 e K_2. Em cada vértice (j_1,j_2) localizamos uma cópia de $Y_{j_1,j_2} = (Y^1_{j_1,j_2}; Y^2_{j_1,j_2})$ cujos bordos são homomorfos as correspondentes superfícies de Seifert de K_1 e K_2, digamos M^1 e M^2. Assim para $Y^1_{j_1,j_2}$ temos como bordo $^{-}M^1_{j_1,j_2}$ e $^{+}M^1_{j_1,j_2}$ e para $Y^2_{j_1,j_2}$ temos $^{-}M^2_{j_1,j_2}$ e $^{+}M^2_{j_1,j_2}$. A colagem conveniente é esboçada a seguir:

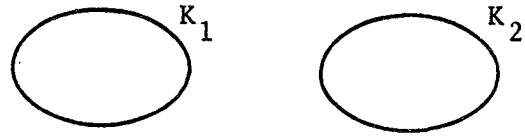

$^{+}M^{1}_{j_1,j_2+1}$
$^{-}M^{1}_{j_1,j_2+1}$
$^{+}M^{2}_{j_1,j_2+1}$
$^{-}M^{2}_{j_1,j_2+1}$
$^{+}M^{1}_{j_1,j_2}$
$^{-}M^{1}_{j_1,j_2}$
$^{+}M^{1}_{j_1+1,j_2}$
$^{-}M^{1}_{j_1+1,j_2}$
$^{+}M^{2}_{j_1,j_2}$
$^{-}M^{2}_{j_1,j_2}$
$^{+}M^{2}_{j_1+1,j_2}$
$^{-}M^{2}_{j_1+1,j_2}$
$^{+}M^{1}_{j_1,j_2-1}$
$^{-}M^{1}_{j_1,j_2-1}$
$^{+}M^{2}_{j_1,j_2-1}$
$^{-}M^{2}_{j_1,j_2-1}$

Definiremos, agora, uma projeção $p_g : \tilde{X}^g(L) \to X(L)$ de modo que $(\tilde{X}^g(L), p_g, X(L))$ seja um espaço de revestimento. Observemos que $X(L)$ pode ser obtido (a menos de difeomorfismo isotópico à identidade) do espaço Y, identificando-se ${}^{+}M^i$ com ${}^{-}M^i$, $\forall\ i = 1,2,\ldots,m$. Seja $g : Y \to X(L)$ tal identificação. Definimos uma aplicação plurívoca $\psi : \tilde{X}^g(L) \to Y$ pondo $\psi|_{Y_{j_1,\ldots,j_m}} : Y_{j_1,\ldots,j_m} \to Y$ identidade (ψ será unívoca fora das partes identificadas de $\tilde{X}^g(L)$).

Tomando-se $p_g : \tilde{X}^g(L) \to X(L)$ por $p_g = g \circ \psi$ obtemos uma projeção tal que $(\tilde{X}^g(L), p_g, X(L))$ é um espaço de revestimento.

Exemplos 5.2.

(i) Seja L o link trivial de duas componentes K_1 e K_2



Neste caso, o espaço $Y = S^{n+2} - T(L)$ onde $T(L) = T(K_1) \cup T(K_2)$ sendo $T(K_i)$ como no parágrafo 2 (parte B), está descrito na Fig. 1.

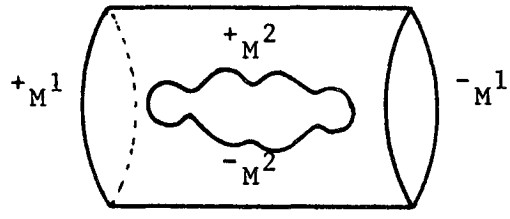


Fig. 1

Assim, $X(L) = S^{n+2} - L$, que é obtido de Y (a menos de difeomorfismo isotópico a identidade) identificando-se ${}^{+}M^{i}$ com ${}^{-}M^{i}$, $i = 1,2$, tem o mesmo tipo de homotopia que uma rosácea de duas circunferências com uma esfera (Fig. 2).

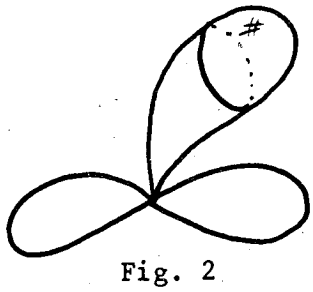


Fig. 2

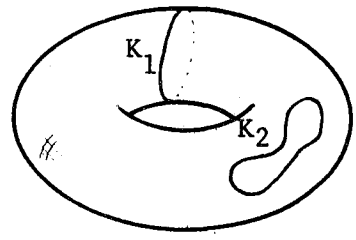


Fig. 3

Com efeito, $S^{n+2} - K_1$ (ou $S^{n+2} - V(K_1)$ onde $V(K_1)$ é uma vizinhança tubular de K_1) é um toro sólido (Fig. 3) que contém a componente K_2 de L.
Antes de extrairmos $V(K_2)$ do espaço $S^{n+2} - V(K_1)$ envolveremos K_2 por uma esfera sólida (Fig. 4).

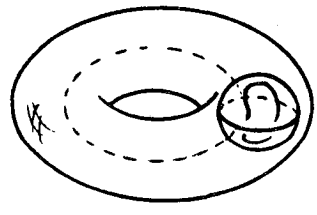


Fig. 4

O espaço obtido tem o mesmo tipo de homotopia que o espaço da Fig. 5, que é (S^2 - toro sólido) U (arco a).

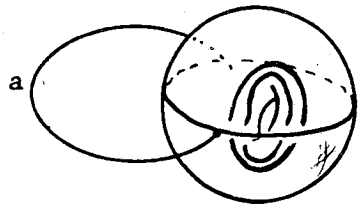


Fig. 5

Retirando-se, agora $V(K_2)$, o espaço que nos resta tem o mesmo tipo de homotopia que o espaço da Fig. 6, pois a esfera menos o toro sólido $V(K_2)$ tem o mesmo tipo de homotopia que uma esfera (oca) com um segmento b. Mas o espaço da Fig. 6 tem o mesmo tipo de homotopia que o espaço da Fig. 7.

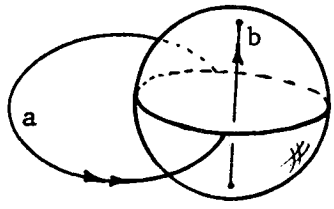


Fig. 6

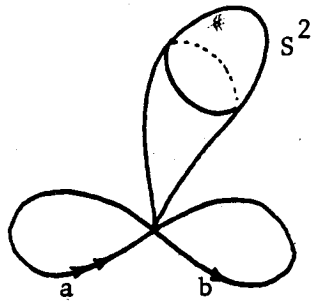
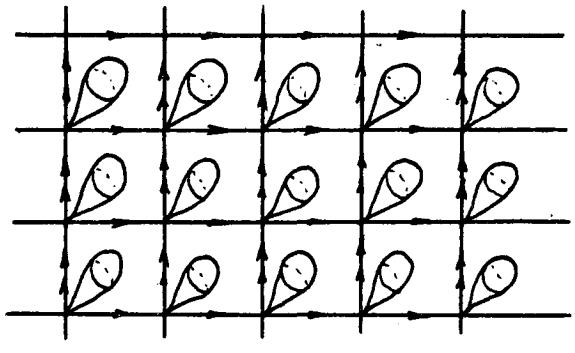


Fig. 7

Assim o espaço de revestimento $\tilde{X}(L)$ é obtido localizando-se uma cópia do espaço Y em cada vértice do reticulado Z^2 e colando-se convenientemente, como na construção geométrica.

Equivalentemente, $\tilde{X}(L)$ pode ser entendido como o reticulado Z^2 com um balão em cada vértice.



(ii) Seja L o link de duas componentes K_1 e K_2 da Fig. 8.

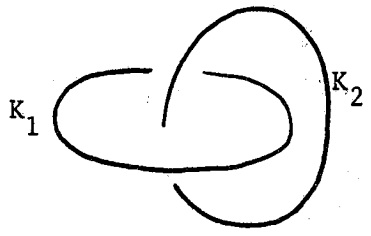


Fig.8

Neste caso, o espaço $X(L) = S^3 - L$ tem o mesmo tipo de homotopia que o toro $S^1 \times S^1$.

De fato, $S^3 - K_1$ é o toro sólido da Fig. 9 cuja alma é K_2, portanto $S^3 - L = (S^3 - K_1) - K_2$ tem o mesmo tipo de homotopia que $S^1 \times S^1$. Assim, o revestimento abeliano universal de L, $\tilde{X}(L)$, é o plano R^2.

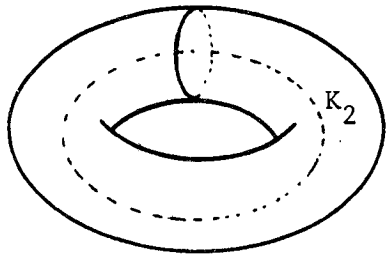


Fig. 9

Observação

Os exemplos anteriores mostram que a 'simplicidade' dos links não implica que o seu revestimento abeliano universal seja 'simples'.

C. *Equivalência Entre a Descrição Algébrica e a Construção Geométrica*

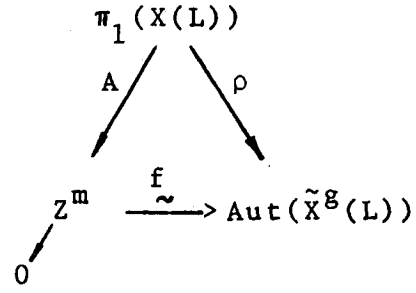
Mostraremos que $\tilde{X}(L)$ coincide com $\tilde{X}^g(L)$.

Em outras palavras, mostraremos que os grupos aos quais $\tilde{X}(L)$ e $\tilde{X}^g(L)$ estão associados, coincidem, isto é, $N = \ker A$ (onde $A : \pi_1(X(L)) \to H_1(X(L))$ é a abelianização) e $p_{g_*}\pi_1(\tilde{X}^g(L))$ coincidem.

Além disso daremos uma descrição de $\pi_1(\tilde{X}^g(L))$.

Pelo lema 2.6 deste capítulo temos que se ρ é um epimorfismo então $\ker\rho = \ker A$, posto que $\mathrm{Aut}(\tilde{X}^g(L)) \simeq Z^m$.

Devemos, portanto, mostrar apenas que ρ é um epimorfismo.



Observação

$\mathrm{Aut}(\tilde{X}^g(L))$ é gerado pelos automorfismos

$$\tau^{(1,0,\ldots,0)},\ \tau^{(0,1,0,\ldots,0)},\ \ldots,\ \tau^{(0,\ldots,0,1)},$$

onde τ^{ℓ} com $\ell = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \in Z^m$ (com 1 na i-ésima coordenada) quando aplicado num ponto $x \in \tilde{X}^g(L)$ translada este ponto de uma unidade na direção i, pois $\tau^{\ell} \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}^g(L))$ preserva fibras; isto é, se $x \in Y_{j_1,\ldots,j_m} \subset \tilde{X}^g(L)$ sua imagem pelo automorfismo τ^{ℓ} será o correspondente $x \in Y_{j_1,\ldots,j_i+1,\ldots,j_m}$.

A aplicação $\rho : \pi_1(X(L)) \to \mathrm{Aut}(\tilde{X}^g(L))$ é definida por $\rho(\lambda) = \tau^{(\ell_1,\ldots,\ell_m)}$ onde $\ell_i = \ell k(\lambda, K_i)$; $i = 1,\ldots,m$ e

$$\tau^{(\ell_1,\ldots,\ell_m)} = \tau_1^{\ell_1} + \ldots + \tau_m^{\ell_m},$$

sendo $\tau_i = \tau^{(0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0)}$ Assim ρ é um epimorfismo.

O isomorfismo $f : Aut(\tilde{X}^g(L)) \to Z^m$ que comuta o diagrama é dado por (fixada uma orientação em cada componente K_i de L) $f(\tau_i) = (0,\ldots,0,\underset{i}{1},0,\ldots,0)$.

Descrição Geométrica de N_g (grupo ao qual está associado $\tilde{X}^g(L)$)

Seja L um link de bordo com componentes $K_1,\ldots,K_m$. Consideremos a seqüência

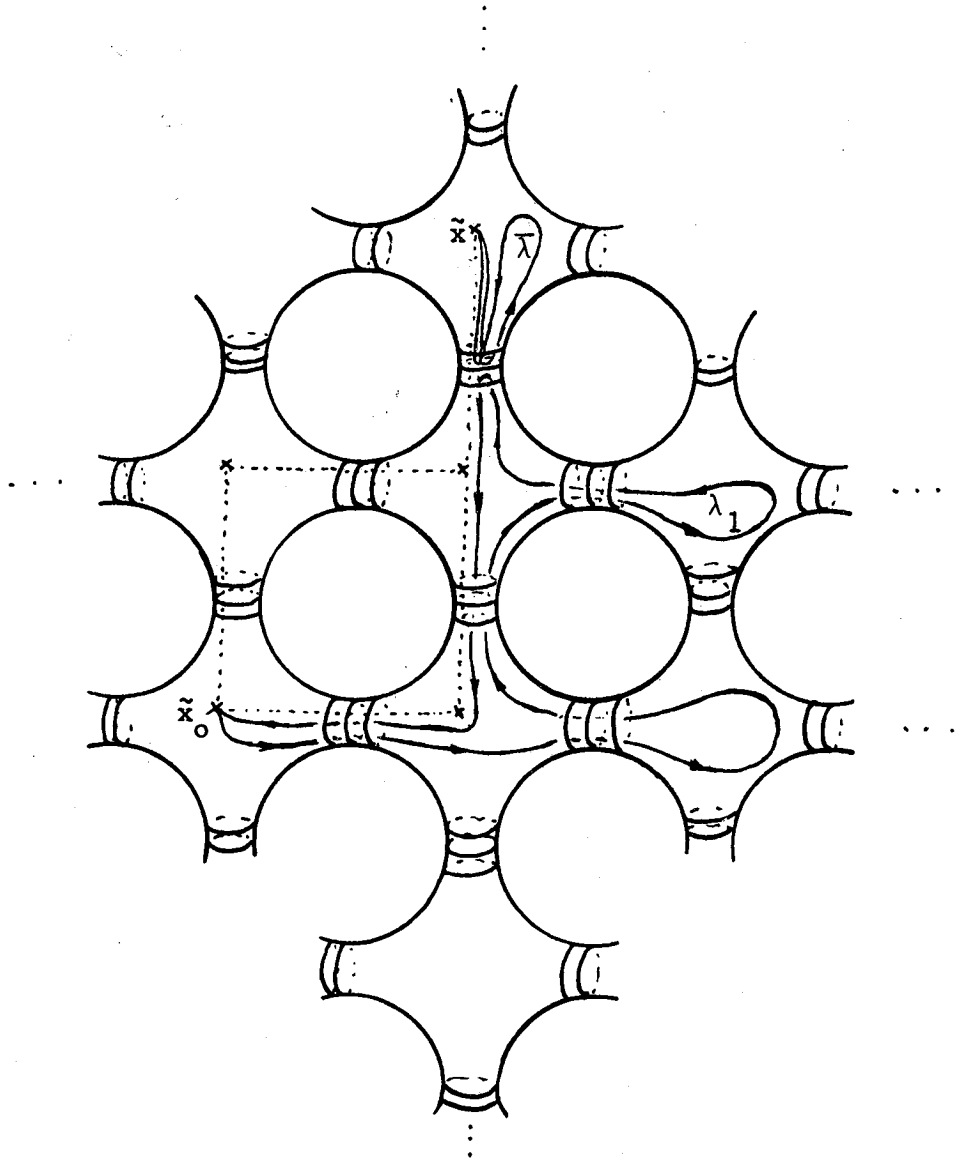
$$0 \to N_g \xrightarrow{p_{g_*}} \pi_1(X(L),x_o) \xrightarrow{\rho} Z^m \to 0$$

onde $N_g = \ker \rho$.

Seja λ um laço em X(L) com ponto básico x_o e $\tilde{\lambda}$ seu levantamento em $\tilde{X}^g(L)$ com ponto inicial $\tilde{x}_o$.

Temos que $\lambda \in N_g$ se, e somente se, $\tilde{\lambda}$ for fechado se, e somente se, $\ell k(\lambda,K_i) = 0$; $\forall\ i = 1,\ldots,m$.

Então para $\lambda \in N_g$, seu levantamento $\tilde{\lambda}$ pode ser reescrito da seguinte forma $\tilde{\lambda} = \lambda_1.\omega.\overline{\lambda}.\omega^{-1}$ onde $\overline{\lambda} \in \pi_1(Y,\tilde{x}_o)$ com $Y = Y_{j_1,\ldots,j_m}$ e $\tilde{x}$ o ponto correspondente a $\tilde{x}_o$ na posição $j_1,\ldots,j_m$. O caminho ω liga $\tilde{x}_o$ a $\tilde{x}$ e essa projeção em X(L) é uma composição de potências de meridianos μ_i das componentes K_i. Veja o esquema a seguir.


$\tilde{x}$
$\bar{\lambda}$
λ_1
$\tilde{x}_o$

§ 6. REVESTIMENTO DO NÚMERO TOTAL DE ENLAÇAMENTO

A. Descrição Algébrica

Seja $L : \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n \to S^{n+2}$ um link, não necessariamente de bordo.

Consideremos a seqüência de homomorfismos

$$\pi_1(X(L)) \xrightarrow{A} H_1(X(L)) \xrightarrow{\Omega} Z^m \xrightarrow{\Sigma} Z$$

onde

A é a abelianização.

Ω é definida associando a cada meridiano λ_i o gerador $(0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ de Z^m, com 1 na i-ésima posição.

Σ é a função que a cada $(x_1,\ldots,x_m)$ associa $\sum_{i=1}^{m} x_i$.

Seja $\alpha : \pi_1(X(L)) \to Z$ a composta de A, Ω e Σ.

Definição 6.1.

O espaço de revestimento $\hat{X}(L)$ associado ao núcleo de α é denominado revestimento do número total de enlaçamento.

Observação

Estudos sobre este espaço de revestimento podem ser encontrados em [6].

B. Construção Geométrica

Sejam $L : \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n \to S^{n+2}$ um link não necessariamente de bordo e M uma superfície de Seifert de L. Sejam K_i ; $i = 1,\ldots,m$ as componentes de L. Cortando-se $X(L) = S^{n+2} - L$ ao longo de M obtemos um espaço Y' que utilizaremos na construção geométrica de espaço $\hat{X}^g(L)$.

Notemos que no bordo de Y' temos duas cópias da superfície M, digamos M'_+ e M'_-. Seja Y o espaço obtido de Y' pela introdução de um colarinho. Sejam M^+ e M^- as cópias de M que constituem o bordo de Y. Tomemos cópias destes espaços Y indexados nos inteiros. Identificando-se M_i^+ com M_{i+1}^- obtemos $\hat{X}^g(L)$.

Definiremos, agora, uma projeção $p_g : \hat{X}^g(L) \to X(L)$ tal que $(\hat{X}^g(L), p_g, X(L))$ seja um espaço de revestimento.

Primeiramente observamos que $X(L)$ pode ser obtido de Y (a menos de difeomorfismo isotópico a identidade) identificando-se M^+ com M^-.

Seja $g : Y \to X(L)$ tal identificação. Podemos definir uma função plurívoca $\psi : \hat{X}^g(L) \to Y$ tal que $\psi|Y_i : Y_i \to Y$ é a identidade (ψ será unívoca fora das partes identificadas de $\hat{X}^g(L)$).

Consideremos a aplicação (unívoca) $p_g : \hat{X}^g(L) \to X(L)$ dada por $p_g = g \circ \psi$.

Assim, $(\hat{X}^g(L), p_g, X(L))$ é um espaço de revestimento.

C. *Equivalência Entre a Descrição Algébrica e a Construção Geométrica*

Mostraremos que $\ker \alpha$ coincide com $p_{g_*}\pi_1(\hat{X}^g(L))$.

Além disso daremos uma descrição geométrica do $\ker \alpha$.

Seja $L : \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n \to S^{n+2}$ um link com componentes $K_1,\ldots,K_m$.

Por construção temos que $\mathrm{Aut}(\hat{X}^g(L)) = Z$. Assim a aplicação $\rho : \pi_1(X(L)) \to \mathrm{Aut}(\hat{X}^g(L))$ é tal que a cada laço λ associa a soma $\sum_{i=1}^{m} \ell k(\lambda,K_i)$ onde $\ell k(\lambda,K_i)$ é o número de enlaçamento de λ com a componente K_i de L. Por outro lado $\alpha = \Sigma \circ \Omega \circ A$ é tal que $\alpha([\lambda]) = \sum_{i=1}^{m} \ell k(\lambda,K_i)$ onde $\ell k(\lambda,K_i)$ é obtido homologicamente. Portanto $\alpha = \rho$; isto é, $\ker \alpha = p_{g_*}\pi_1(\hat{X}^g(L))$.

Descrição Geométrica de $\ker \alpha$

Seja $L : \bigcup_{i=1}^{m} S_i^n \to S^{n+2}$ um link com componentes $K_1,\ldots,K_m$.

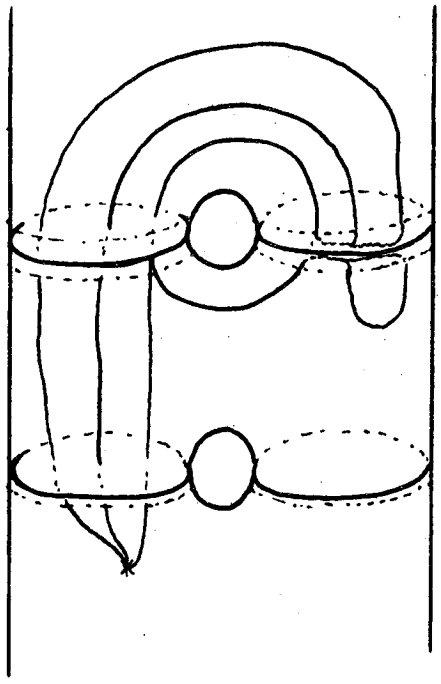
Seja λ um laço em $X(L) = S^{n+2} - L$ com ponto básico x_o.

Temos que $\lambda \in \ker \alpha$ se, e somente se, $\tilde{\lambda}$ for fechado se, e somente se, $\sum_{i=1}^{m} \ell k(\lambda,K_i) = 0$.

Então para $\lambda \in \ker \alpha$, seu levantamento $\tilde{\lambda}$ pode ser reescrito da seguinte forma

$$\tilde{\lambda} = \lambda_1 \omega \bar{\lambda}$$

onde $\bar{\lambda} \in \pi_1(Y,\tilde{x}_o)$ $(\tilde{x}_o \in p_g^{-1}(x_o))$, ω é um caminho da forma $\mu_i - \mu_1$, $i = 2,\ldots,m$ e λ_1 tem projeção 'mais simples' que $\tilde{\lambda}$.



Continuando este procedimento podemos escrever

$\tilde{\lambda} = \prod_{j=1}^{k} \omega_j \overline{\lambda}_j$ onde $\overline{\lambda}_j \in \pi_j(Y, \tilde{x}_j)$ e ω_j é da forma $\mu_j - \mu_1$.

CAPÍTULO III

APLICAÇÕES

Neste capítulo serão feitas algumas aplicações à Teoria de Nós e Links. Algumas destas podem ser generalizadas para dimensões mais altas, porém nos restringiremos ao caso clássico ($n = 1$).

A terminologia adotada está de acordo com [8].

Os espaços de revestimento $\tilde{X}(L)$ e $\hat{X}(L)$ de um link são os revestimentos apresentados nos parágrafos 5 e 6 do capítulo II, respectivamente. Denotaremos os anéis $Z[t,t^{-1}]$ por Λ_1 e $Z[x,y,x^{-1},y^{-1}]$ por Λ_2.

§ 1. APLICAÇÃO 1

Em situações especiais, podemos construir o espaço de revestimento $\tilde{X}(L)$ e computar alguns invariantes de links, mesmo quando não são links de bordo.

Os exemplos que se seguem são generalizações de exemplos encontrados em [8], p. 192.

Consideremos um link L_A de duas componentes K e K_A dado pela Fig. 1.

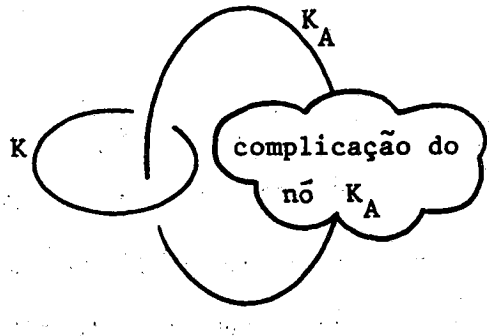
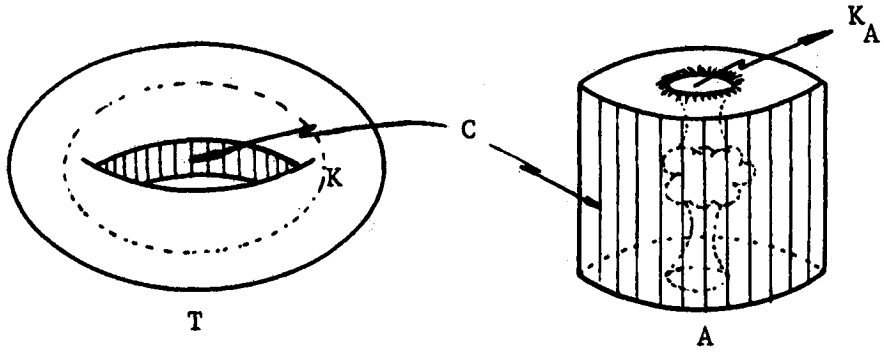


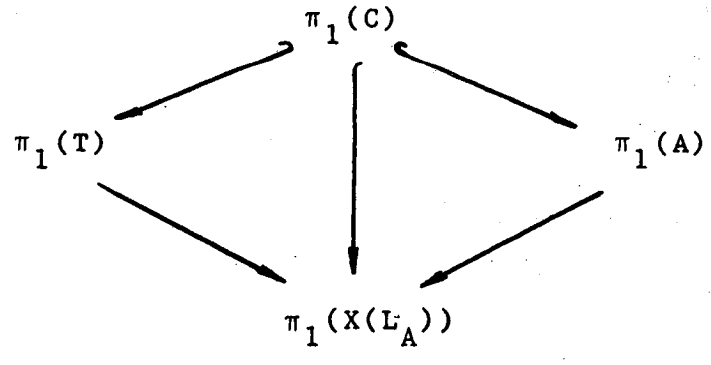
Fig. 1

Sejam $V(K)$ e $V(K_A)$ vizinhanças tubulares abertas de K e K_A respectivamente. Consideremos $V = V(K) \cup V(K_A)$ (reunião disjunta). O complementar $S^3 - V$ do link L_A pode ser decomposto da forma a seguir (Fig. 2).



Notemos que o gerador de $\pi_1(C)$ corresponde a uma curva meridional em T e uma curva longitudinal em A.

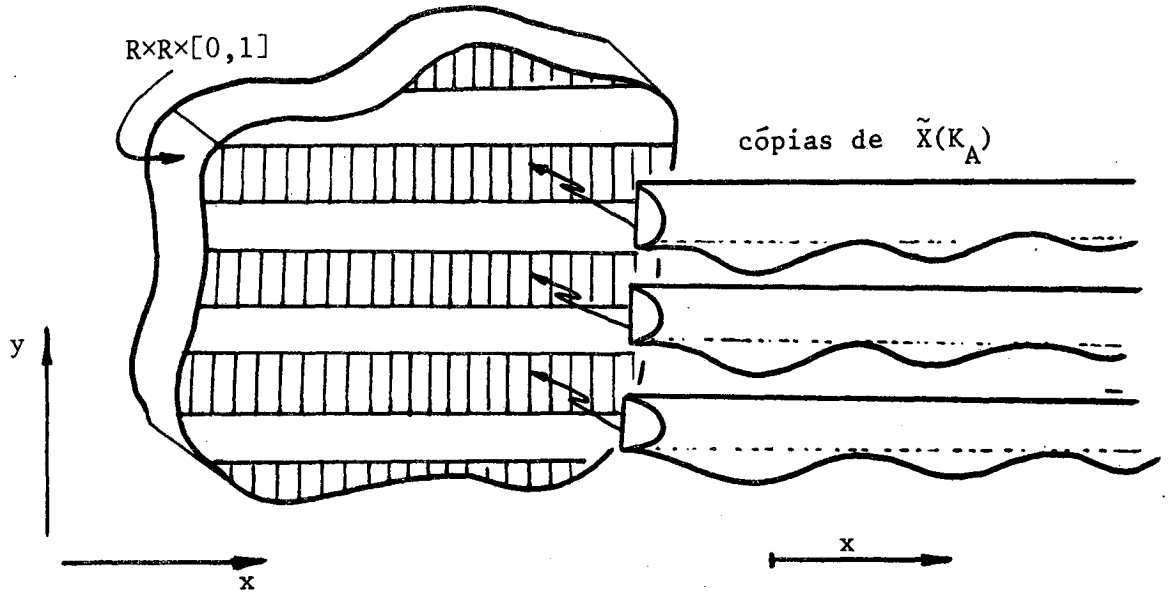
As inclusões induzem no grupo fundamental o seguinte diagrama:



Portanto em $\tilde{X}(L_A)$ a parte correspondente a T, denotaremos por $\tilde{T}$, é homeomorfa à $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,1]$; ao cilindro C correspondem faixas do tipo $[2i,2i+1] \times \mathbb{R} \times \{0\}$ e a parte correspondente a A, denotaremos por $\tilde{A}$, são Z cópias do re

vestimento cíclico infinito $\tilde{X}(K_A)$ onde, no bordo de cada uma destas cópias temos uma faixa homeomorfa a $[a,b] \times \mathbb{R}$ que deve ser 'colada' às faixas $[2i,2i+1] \times \mathbb{R} \times \{0\}$.

Um esquema de $\tilde{X}(L_A)$ é dado a seguir:



Seja $p_A(t)$ o polinômio de Alexander do nó K_A; isto é, $H_1(\tilde{X}(K_A)) \simeq \frac{\Lambda_1}{p_A(t)}$. Temos que uma translação na direção x corresponde a uma translação t em $\tilde{X}(K_A)$ e portanto $p_A(x)$ anula classes de homologia de $H_1(\tilde{X}(L_A))$.

Utilizando-se a seqüência de Mayer-Vietoris para a triada $(\tilde{X}(L_A),\tilde{A},\tilde{T})$ (que é exata pois $\tilde{A}$ e $\tilde{T}$ podem ser tomados abertos)

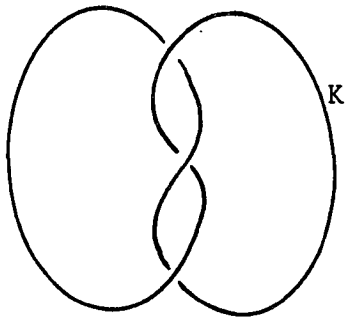
$$\ldots \to H_1(\tilde{C}) \to H_1(\tilde{A}) \oplus H_1(\tilde{T}) \to H_1(\tilde{X}(L_A)) \to 0$$

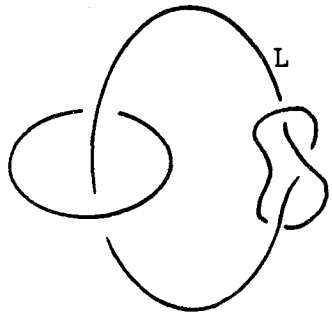
vem que

$$H_1(\tilde{X}(L_A)) \simeq \frac{\Lambda_2}{p_A(x)} = \frac{Z[x,y,x^{-1},y^{-1}]}{p_A(x)}$$

Exemplo 1.1.

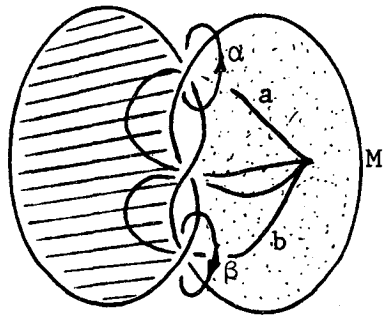
Seja K o trefoil





Determinaremos a homologia de $\tilde{X}(K)$ onde $X(K) = S^3-K$. Em seguida obteremos $H_1(\tilde{X}(L))$ onde L é o link acima.

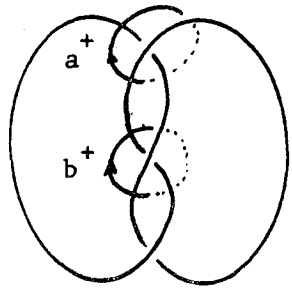
Consideremos a seguinte superfície de Seifert M :



Seja Y o espaço obtido de X(K) por corte ao longo de M.

Temos que $H_1(\overset{\circ}{M})$ e $H_1(Y)$ são ambos livres com bases, respecitivamente, a, b e α, β.

Os geradores a e b podem ser entendidos como na figura a seguir.



Na construção de $\tilde{X}(K)$ utilizamos Z cópias de Y indexadas em $i \in Z$. Portanto $H_1(\bigcup_{i\in Z} Y_i)$ é um grupo abeliano livre infinitamente gerado por $\{t^i\alpha, t^i\beta\}$, $i \in Z$; onde α e β são os geradores da homologia de Y_o.

Após as colagens convenientes para obtermos $\tilde{X}(K)$ introduzimos as seguintes relações:

$$\alpha-\beta \xleftarrow{-} a \xrightarrow{+} -\alpha \quad \text{e} \quad -\beta \xleftarrow{-} b \xrightarrow{+} \alpha-\beta .$$

Isto é, ao colarmos Y_o a Y_1 introduzimos as relações $\beta-\alpha = -t\alpha$ e $-\beta = t(\alpha-\beta)$. Em geral, ao colarmos Y_{i-1} a Y_i introduzimos as relações

$$t^{i-1}(\beta-\alpha) = -t^i\alpha \quad \text{e} \quad -t^{i-1}\beta = t^i(\alpha-\beta).$$

Assim, como grupo abeliano a homologia de $\tilde{X}(K)$ possui a seguinte apresentação:

$$H_1(\tilde{X}(K)) \simeq$$

$$\simeq |t^i\alpha, t^i\beta : t^{i-1}(\beta-\alpha) = -t^i\alpha, -t^{i-1}\beta = t^i(\alpha-\beta);\ i \in Z|.$$

Portanto, como Λ_1-módulo

$$H_1(\tilde{X}(K)) \simeq |\alpha,\beta : \beta-\alpha = -t\alpha,\ -\beta = t(\alpha-\beta)|$$

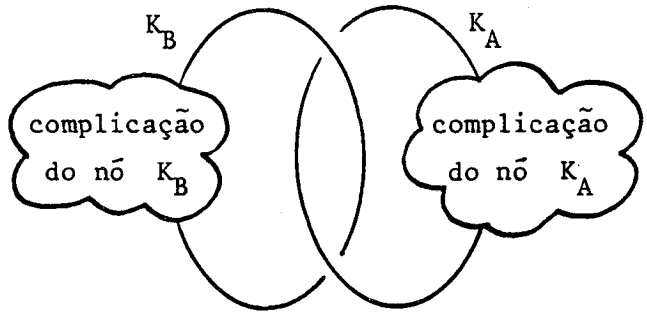
pois t^i é unidade em Λ_1.

Pelas relações obtemos $-(\alpha-t\alpha) = t(\alpha - (\alpha-t\alpha))$, isto é, $(t^2 - t+1)\alpha = 0$. Portanto $H_1(\tilde{X}(K)) \simeq \frac{\Lambda_1}{t^2 - t+1}$.

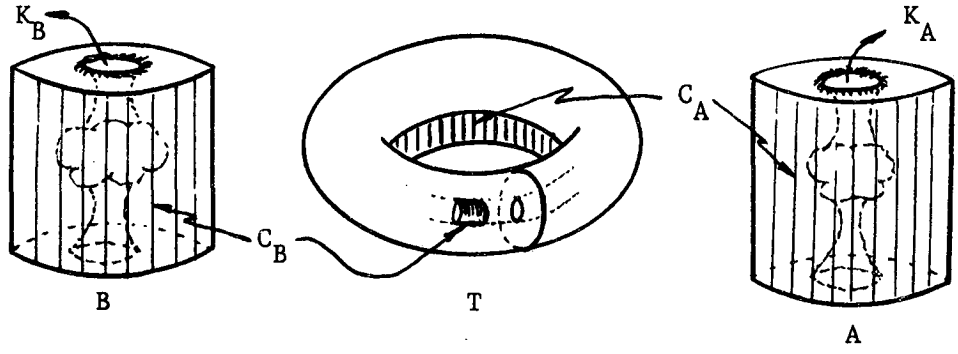
Assim, neste caso $p(t) = t^2 - t+1$. Logo

$$H_1(\tilde{X}(L)) = \frac{\Lambda_2}{p(t)} .$$

Consideremos agora um caso mais geral. Seja $L_{AB} = K_A \cup K_B$.



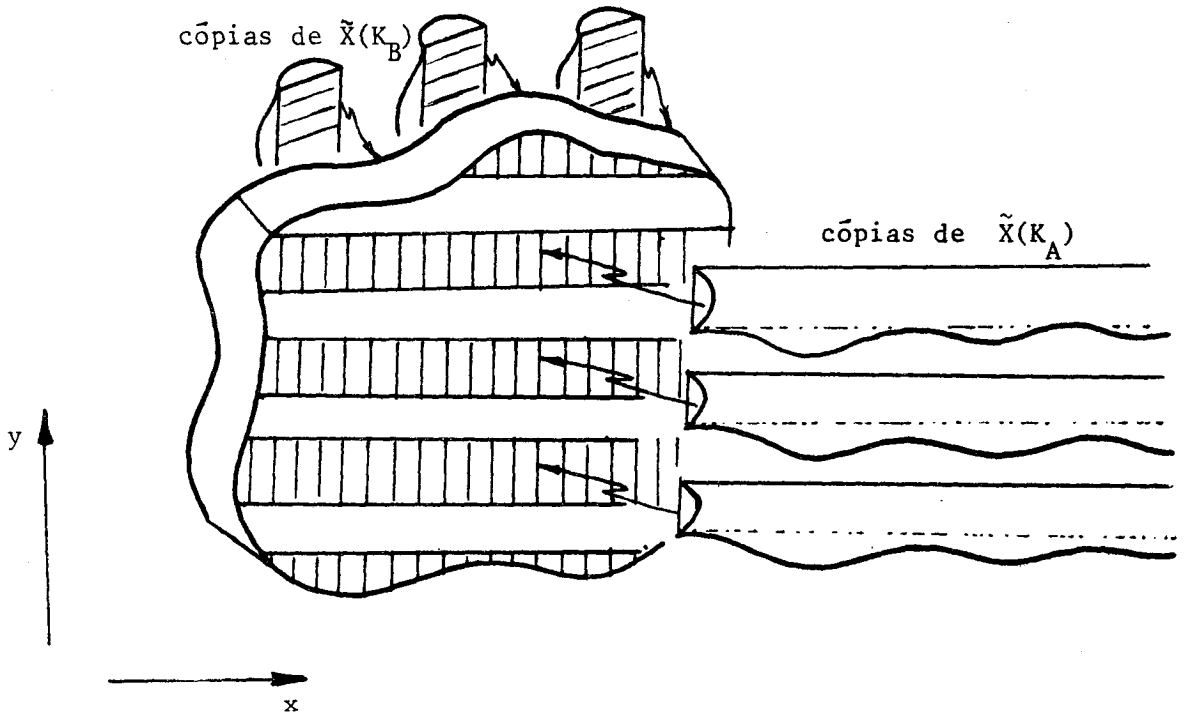
Neste caso podemos escrever $X(L_{AB}) = B \cup T \cup A$ onde

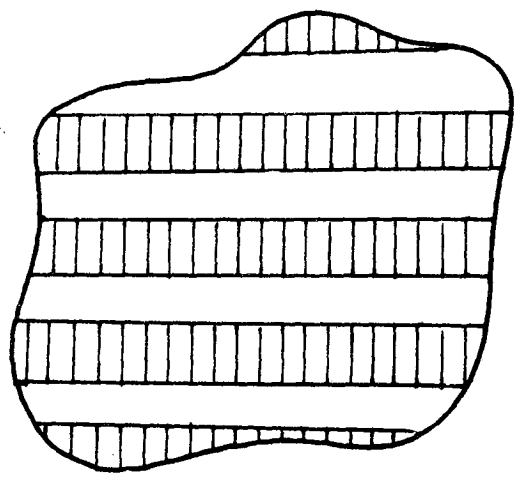


$T \simeq S^1 \times S^1 \times [a,b]$, A = complemento de K_A e B = complemento de K_B. Além disso esses espaços são colados através de cilindros C_A e C_B localizados em componentes disjuntas do bordo de T.

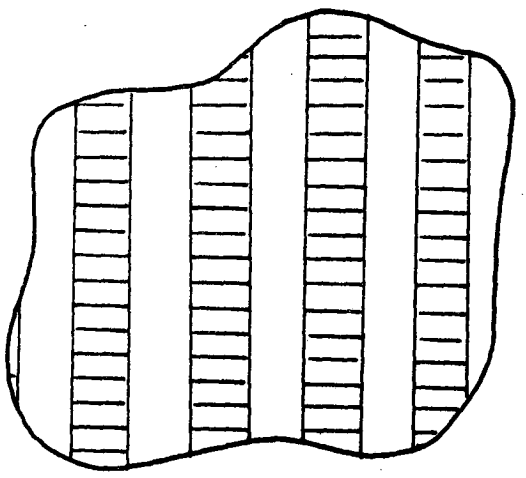
As análises no grupo são as mesmas que anteriormente, verificando-se que o gerador de $\pi_1(C_A) \simeq Z$ corresponde em $Aut(\tilde{X}(L_{AB})) \simeq Z \oplus Z$ à translação x enquanto o gerador de $\pi_1(C_B) \simeq Z$ corresponde a y.

Os espaços $\tilde{B}$, $\tilde{T}$ e $\tilde{A}$ são respectivamente Z cópias de $\tilde{X}(K_B)$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [a,b]$ e Z cópias de $\tilde{X}(K_A)$ identificados através de 'faixas' nos dois bordos de $\tilde{T}$. Tais faixas correm no sentido ortogonal uma das outras. Veja esquema abaixo.





vista de frente



vista de fundo

A direção x corresponde a translação t de $\tilde{X}(K_A)$ e a direção y à translação t de $\tilde{X}(K_B)$ onde $H_1(\tilde{X}(K_A)) \simeq \frac{\Lambda_1}{p_A(t)}$ e $H_1(X(K_B)) = \frac{\Lambda_1}{p_B(t)}$.

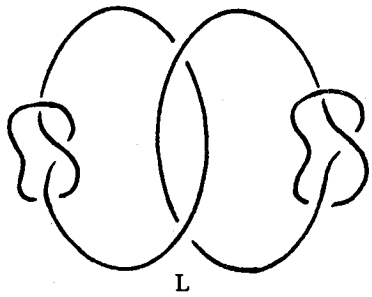
Concluimos então que $p_A(x)$ anula classes de homologia da parte da frente da colagem dos espaços e $p_B(y)$ anula as classes de homologia da parte de trás da colagem.

Utilizando-se a seqüência de Mayer-Vietoris na colagem dos espaços acima, obtemos

$$H_1(\tilde{X}(L_{AB})) \simeq \frac{\Lambda_2}{p_A(x)} \oplus \frac{\Lambda_2}{p_B(y)} .$$

Exemplo 1.2.

Consideremos o link L abaixo



L

Temos que o polinômio de Alexander do trefoil é $p(t) = t^2 - t+1$ (q.v. exemplo anterior). Assim

$$H_1(\tilde{X}(L)) = \frac{\Lambda_2}{p(t)} \oplus \frac{\Lambda_2}{p(t)} .$$

§ 2. APLICAÇÃO 2

Dado um nó qualquer K, denotaremos por K_n uma secção na vizinhança tubular $S^1 \times D^2$ de K tal que $\ell k(K,K_n) = n$.

Os links do tipo $K \cup K_n$ são denominados links paralelos de K. Notação: $K \cup K_n = L_n$. Observemos que L_o pode ser obtido da seguinte forma: tomamos uma superfície de Seifert M de K e traçamos K_o nesta superfície 'paralelo' ao bordo de M que é K (Fig. 1). Assim $\ell k(K,K_o) = 0$ pois a superfície de Seifert M de K pode ser desviada de K_o (Fig. 2).

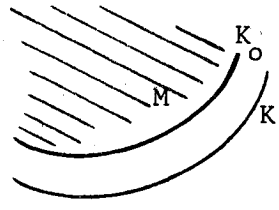


Fig. 1

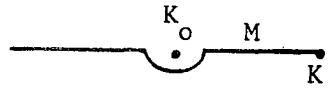


Fig. 2

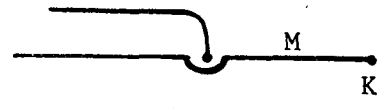


Fig. 3

Além disso L_o é link de bordo pois obtemos superfície de Seifert para K_o por uma translação de M (Fig. 3).

O conhecimento do nó K nos fornece informações sobre o link L_n. Veremos, por exemplo, como obter $H_1(\hat{X}(L_o))$ e $H_1(\tilde{X}(L_o))$ em função de $H_1(\tilde{X}(K))$.

Consideremos p(t) o polinômio de Alexander do nó K; isto é, p(t) é tal que $H_1(\tilde{X}(K)) \simeq \frac{\Lambda_1}{p(t)} = \frac{Z[t,t^{-1}]}{p(t)}$.

Utilizaremos aqui a técnica exposta em [8], p. 164 para obtermos as relações entre os geradores da superfície de Seifert quando a incluimos nos vários 'pedaços' de $\tilde{X}(L_o)$ (via seqüência de Mayer-Vietoris 1.2.7 Cap. I).

1. Cálculo de $H_1(\hat{X}(L_o))$

Na construção de $\hat{X}(L_o)$ utilizamos como superfície de Seifert o cilindro C cujo gerador em homologia chamamos a .

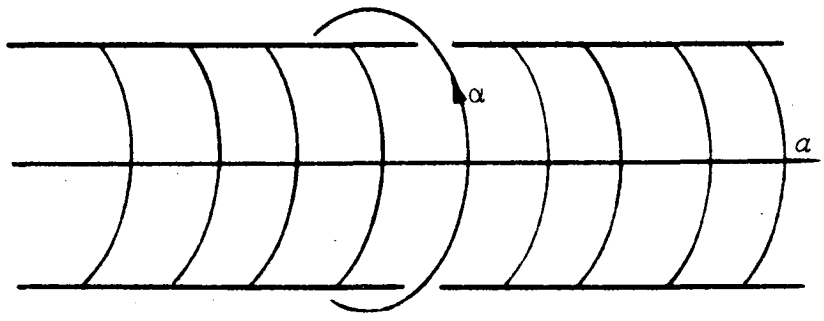


Fig. 4

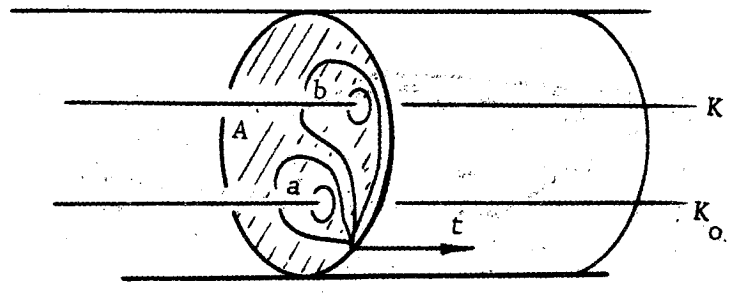
Pela construção de $\hat{X}(L)$ vemos que as 'inclusões' de a em Y_i e Y_{i+1} são nulas; isto é (na notação de [8]) $0 \xleftarrow{-} a \xrightarrow{+} 0$. Isto significa que não existe nenhuma relação entre as várias classes de homologia das partes Y_i . Portanto $H_1(\hat{X}(L_o)) \simeq \Lambda_1$. Conforme [8], p. 209, o gerador α de $H_1(S^3-C)$ está indicado na Fig. 4. Assim, $H_1(\hat{X}(L_o)) \simeq \Lambda_1$ é gerado por α pois na construção de $X(L_o)$, α se mantém fechado.

2. Cálculo de $H_1(\tilde{X}(L_o))$

Observemos, primeiramente, que $X(L_o)$ pode ser visto como reunião de espaços A e B onde

$$A \simeq S^1 \times [D^2 - (D_1^2 \cup D_2^2)]$$

e $$B \simeq X(K) = S^{n+2} - K .$$



Temos que

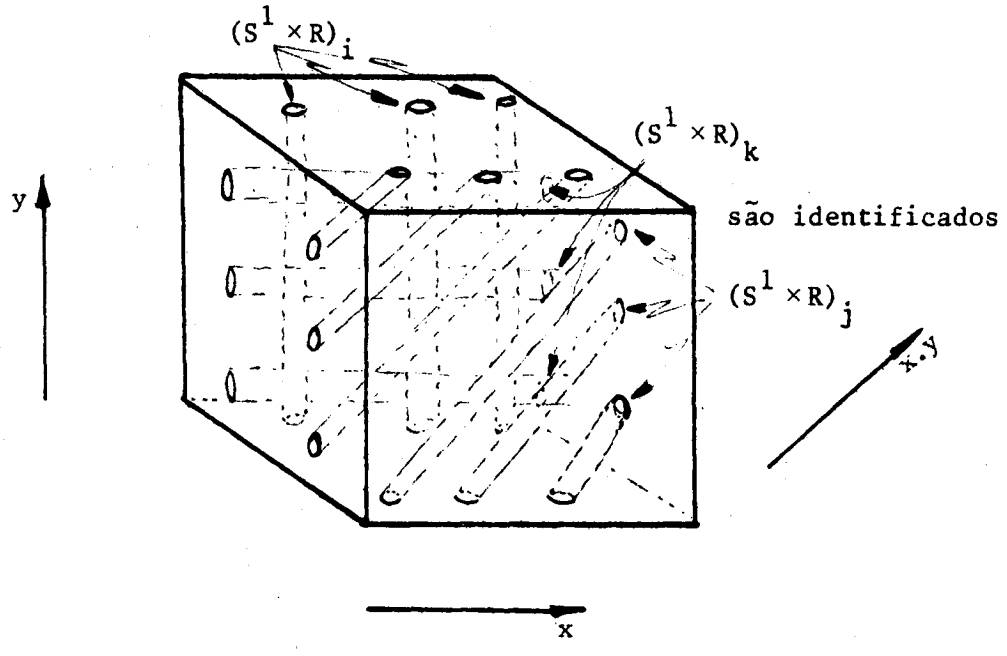
$\pi_1(A) \simeq |t,a,b : tat^{-1}a^{-1}, tbt^{-1}b^{-1}| \simeq Z \times |a,b : |$

$\pi_1(A \cap B) \simeq Z \oplus Z$ gerado por α e β.

Analisando-se as inclusões dos grupos fundamentais e suas projeções em $Aut(\tilde{X}(L_o)) \simeq Z \oplus Z$ (gerado por x e y) poderemos ter uma idéia de como os levantamentos $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ de A e B respectivamente, são colados para forma $\tilde{X}(L_o)$.

Temos que $\tilde{A}$ tem o mesmo tipo de homotopia que $S^1 \times L$ onde $L = \{(x,y) \in R^2 : x \in Z \text{ ou } y \in Z\}$. A parcela S^1 de $\tilde{A}$ corresponde ao fato que $t \in \pi_1(A)$ vai a zero em $Aut(\tilde{X}(L_o)) = H_1(X(L))$. O bordo de A é constituido de cópias de $S^1 \times \mathbb{R}$ indexadas, digamos $(S^1 \times \mathbb{R})_i$; $i \in Z$, $(S^1 \times \mathbb{R})_j$; $j \in Z$ e $(S^1 \times \mathbb{R})_k$; $k \in Z$ sendo que as de índice i e j permanecerão como bordo de $\tilde{X}(L_o)$ e as de índice k (que provêm do bordo 'externo' de A) serão identificadas com o bordo de $\tilde{B}$.

Como $Aut(\tilde{X}(L_o)) \simeq Z \oplus Z$ (gerado por x e y) atua em $\tilde{A}$, podemos esquematizar este espaço como se segue:



Por outro lado, a aplicação $\pi_1(B) \to Aut(\tilde{X}(L_o)) \simeq Z \oplus Z$ tem por imagem $(1,1)Z \subset Z \oplus Z$. Logo o número de componentes de $\tilde{B}$ é $\frac{Z \oplus Z}{(1,1)Z} \simeq Z$. Cada uma dessas componentes é homeomorfa a $\tilde{X}(K)$ e correspondem ao índice $k \in Z$ de $(S^1 \times R)_k$ do bordo de $\tilde{A}$. Além disso, a translação $t : \tilde{X}(K) \to \tilde{X}(K)$ que dá a $H_1(\tilde{X}(K))$ estrutura de Λ_1-módulo, corresponde a translação $(1,1)$ de $Z \oplus Z \simeq Aut(\tilde{X}(L_o))$, isto é, corresponde a translação $x.y$.

Obtemos portanto $\tilde{X}(L_o)$ através da colagem das cópias $(\tilde{X}(K))_k$, $k \in Z$ nos bordos $(S^1 \times R)_k$, $k \in Z$ do espaço $\tilde{A}$.

Lembrando-se que $H_1(\tilde{X}(K)) \simeq \frac{\Lambda_1}{p(t)}$ obtemos que

$$H_1(\tilde{B}) = \bigoplus_{k \in Z} H_1(\tilde{X}(K))_k = \bigoplus_{k \in Z} \left(\frac{\Lambda_1}{p(t)}\right)_k .$$

Por outro lado $H_1(\tilde{A}) = Z \oplus \left(\bigoplus_{i \in Z} G_i\right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in Z} G_j\right)$ e

$H_1(\widetilde{A \cap B}) = \bigoplus_{k \in Z} G_k$ onde $G_t = Z$, $\forall\, t \in Z$.

Analisando-se a seqüência de Mayer-Vietoris da triada

$(\tilde{X}(L_o),\tilde{A},\tilde{B})$ (que é exata pois $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ podem ser tomados abertos. Q.v. [2], p. 73) obtemos

$$\ldots \to H_1(\widetilde{A \cap B}) \to H_1(\tilde{A}) \oplus H_1(\tilde{B}) \to H_1(\tilde{X}(L_o)) \to 0$$

Verificamos que os 'índices' i e j de $H_1(\tilde{A})$ não são atingidos por nenhuma identificação gerando portanto uma parcela de $H_1(\tilde{X}(L_o))$ isomorfa a $\Lambda_2 = Z[x,y,x^{-1},y^{-1}]$. Por outro lado a identificação $t \leftrightarrow x.y$ nos fornece outra parcela de $H_1(\tilde{X}(L_o))$ do tipo $\frac{Z[x,y,x^{-1},y^{-1}]}{p(x.y)}$ pois temos $Z \oplus Z$ geradores homológicos provenientes das cópias de $(\tilde{X}(K))_k$; $k \in Z$, que após as colagens (e portanto sendo indexados por x e y) têm como anuladores o polinômio de Alexander de $\tilde{X}(K)$, ficando porém a translação t associada à translação x.y. Portanto, $H_1(\tilde{X}(L_o)) \simeq \Lambda_2 \oplus \frac{\Lambda_2}{p(x.y)}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] - Crowell, R.H. e Fox, R.H. - Introduction to Knot Theory. GTM # 57. Springer-Verlag, (1977).

[2] - Greenberg, M. - Lectures on Algebraic Topology. Mathematics Lecture Note Series, N.A. Benjamin, Inc., (1967).

[3] - Gutiérrez, M. - "Link of codimension two". Revista Colombiana de Matemáticas, # 10.

[4] - Levine, J. - "Unknotting spheres in codimension two". Topology 4(1963), p. 9-16.

[5] - Lima, E.L. - Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento. 10.º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, (1977).

[6] - Manzoli Neto, O. - "Total Linking Number Modules". Ph.D. Thesis, Brandeis University, USA, (1982).

[7] - Massey, W. - Algebraic Topology: An Introduction. GTM # 56, Springer-Verlag, (1977).

[8] - Rolfsen, D. - Knots and Links. Mathematics Lecture Note Series # 7. Publish or Perish, Inc., (1976).

[9] - Sato, N. - "Free Covering and Modules of Boundary Links". (to appear).

[10] - Singer, I.M. e Thorpe, J.A. - Lectures Notes on Elementary Topology and Geometry. Scott, Foresman and Company, (1967).

[11] - Spanier, E. - Algebraic Topology. Mc Graw-Hill Series in Higher Math., Mc Graw-Hill, (1966).

[12] - Hirch, M.W. - Differential Topology. GTM # 33. Springer-Verlag, (1976).

[13] - Milnor, J.W. e Stasheff, J.A. - Characteristic classes. Annals of Mathematics Studies, # 76, (1974).