Resolubilidade perto do conjunto característico
para uma classe de operadores diferenciais
parciais de primeira ordem

Wanderley Aparecido Cerniauskas

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Resolubilidade perto do conjunto característico para uma classe de operadores diferenciais parciais de primeira ordem

Wanderley Aparecido Cerniauskas

***Orientador:* Prof. Dr. Paulo Leandro Dattori da Silva**

***Coorientador:* Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática. *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Setembro de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C411r Cerniauskas, Wanderley Aparecido
Resolubilidade perto do conjunto característico
para uma classe de operadores diferenciais parciais
de primeira ordem / Wanderley Aparecido
Cerniauskas; orientador Paulo Leandro Dattori da
Silva; co-orientador Adalberto Panobianco
Bergamasco. -- São Carlos, 2014.
76 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Resolubilidade semi-global. 2. Condição (P).
3. Campos Vetoriais complexos. I. Silva, Paulo
Leandro Dattori da, orient. II. Bergamasco,
Adalberto Panobianco, co-orient. III. Título.

Dedico esta tese aos meus pais
André e Maria, por me
oferecerem condições para eu
chegar até aqui, por todo
amor e carinho.

Agradecimentos

Ao meu orientador Paulo Leandro Dattori da Silva pela orientação e pelo empenho dedicado.

Ao meu coorientador Adalberto Panobianco Bergamasco pela dedicação, apoio e incentivo.

À minha esposa Ana Sofia e à minha enteada Juliana Zuanon pelo carinho e pelos momentos de alegria.

Aos meus irmãos Renato e Val, aos meus sobrinhos Bruno, Kauan e Laura, enfim a toda minha família.

À Universidade Estadual de Ponta Grossa, incluindo os amigos e funcionários do DEMAT que permitiram minha liberação para o Doutorado.

Aos professores do ICMC que contribuíram para minha formação acadêmica.

Aos funcionários do ICMC pelo profissionalismo.

Ao mestre Takamori pelos valiosos ensinamentos.

A todos os amigos que conquistei em São Carlos, em especial a Adriana Ramos e a Juliana Pereira.

A todos aqueles que contribuíram de forma direta ou indireta ao desenvolvimento deste trabalho.

Resumo

Seja

$$L = \partial/\partial t + (a(x) + ib(x))\partial/\partial x, b \not\equiv 0,$$

um campo vetorial complexo definido em $A_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$, sendo $a, b \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon); \mathbb{R})$ e $(x, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$.

Assuma que $b^{-1}(0) = \{0\}$. Este trabalho trata da resolubilidade perto do conjunto característico $\{0\} \times S^1$ da equação

$$Lu = pu + f, \quad p, f \in C^\infty(A_\epsilon).$$

A relação entre as ordens de anulamento das funções a e b em $x = 0$ e certas médias da função p tem influência na resolubilidade.

Abstract

Let

$$L = \partial/\partial t + (a(x) + ib(x))\partial/\partial x, b \not\equiv 0,$$

be a complex vector field defined in $A_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$, where $a, b \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon); \mathbb{R})$ and $(x, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$.

Assume that $b^{-1}(0) = \{0\}$. This work deals with the solvability near the characteristic set $\{0\} \times S^1$ of the equation

$$Lu = pu + f, \quad p, f \in C^\infty(A_\epsilon).$$

The interplay between the orders of vanishing of the functions a and b at $x = 0$ and certain averages of the function p has influence in the solvability.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Equação Homogênea	7
3 Equação não homogênea	20
3.1 Existência de solução	21
3.2 Não existência de solução	52
3.3 Resultados finais	72

Introdução

Neste trabalho, vamos lidar com campos vetoriais complexos da forma

$$L = \partial/\partial t + (a(x) + ib(x))\partial/\partial x, \quad b \not\equiv 0, \quad (x, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times S^1, \quad (0.1)$$

sendo $\epsilon > 0$ e $a, b \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon) \times S^1; \mathbb{R})$, para os quais o conjunto Σ dos pontos onde L deixa de ser elítico é a circunferência $\Sigma = \{0\} \times S^1$. Além disso, assumiremos que L é de tipo infinito em Σ (ver Definição 1.1); portanto, L é elítico em $A_\epsilon \setminus \Sigma$ e $(a + ib)(0) = 0$.

Um campo L da forma (0.1) satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ se, e somente se a função $b(x)$ não muda de sinal em nenhuma curva integral do campo vetorial real $\partial/\partial t + a(x)\partial/\partial x$ (ver Definição 1.3 e Teorema 1.4). Portanto, L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ já que $a(0) = 0$.

Seja $A_\epsilon \doteq (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$, e seja $p \in C^\infty(A_\epsilon)$ uma função fixada. Nosso objetivo é estudar a resolubilidade semi-global do operador $\mathcal{L}_p : C^\infty(A_\epsilon) \rightarrow C^\infty(A_\epsilon)$ definido por

$$\mathcal{L}_p u \doteq Lu - pu,$$

sendo L o campo dado por (0.1).

A resolubilidade local é bem entendida; a condição $(\mathcal{P})$ caracteriza a resolubilidade local e devido a resultados de Hörmander as soluções locais da equação

$$\mathcal{L}_p u = f, \quad f \in C^\infty(A_\epsilon) \quad (0.2)$$

podem ser obtidas em C^∞ .

O problema é ainda relevante se considerarmos a resolubilidade em uma vizinhança “cheia” de Σ . Mais precisamente, se considerarmos a resolubilidade no seguinte sentido.

Dizemos que $\mathcal{L}_p$ é resolúvel em Σ se existe um subespaço $\mathcal{F} \subset C^\infty(A_\epsilon)$ de codimensão finita tal que para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução da equação $\mathcal{L}_p u = f$ em uma vizinhança de Σ .

Podemos assumir que

- $(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$ para todo $x \in (-\epsilon, \epsilon)$;
- se a função a não é flat em $x = 0$ então n é a ordem de anulamento de a em $x = 0$;
se a função a é flat em $x = 0$ então $n \geq m$.

Vamos analisar a resolubilidade de $\mathcal{L}_p$ em Σ sob a hipótese $2 \leq m < 2n - 1$; em particular mostraremos que se $m - n > 0$ então a relação entre a diferença $m - n$ e certas médias da função p tem influência na resolubilidade de $\mathcal{L}_p$.

O Capítulo 1 contém resultados que auxiliam na compreensão do texto. Apresentamos alguns resultados sobre resolubilidade que estão relacionados com o campo L dado por (0.1).

No Capítulo 2 lidamos com a equação homogênea $\mathcal{L}_p u = 0$. Encontramos condições necessárias e suficientes sobre p para que a equação $\mathcal{L}_p u = 0$ tenha solução de classe C^∞ , em uma vizinhança de Σ , com ordem de anulamento finita em Σ , uniforme em t . Também apresentamos condições sobre p , sob as quais é possível obter solução não trivial, de classe C^∞ e flat em Σ .

No Capítulo 3 lidamos com a existência de solução; apresentamos condições sobre p , sob as quais é possível determinar condições necessárias e suficientes sobre f para que a equação $\mathcal{L}_p u = f$ tenha solução de classe C^∞ , em uma vizinhança de Σ .

Preliminares

Este capítulo contém resultados que auxiliam na compreensão do texto.

Seja L um campo vetorial sobre uma variedade suave Ω , de dimensão η . Denote por $\rho(x, \xi)$ o símbolo principal de L ; localmente podemos escrever $\rho(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\eta} d_j(x) \xi_j$.

Definição 1.1 (Campo vetorial de tipo finito e infinito). *Sejam $C^1 = [L, \bar{L}]$, $C^2 = [L, C^1], \dots, C^{n+1} = [L, C^n]$, sendo $[,]$ o colchete de Lie. Dizemos que o campo vetorial L é de tipo finito ν em $p \in \Sigma$, se L e C^j são linearmente dependentes para cada $j < \nu$, mas L e C^ν são linearmente independentes. Se L não é de tipo finito em p então L é de tipo infinito em p .*

Definição 1.2. *Seja φ uma função suave a valores complexos sobre $T^*\Omega \setminus \mathcal{O}$. Uma curva bi-característica de $\Re(\varphi)$ é uma curva integral do campo Hamiltoniano de $\Re(\varphi)$, sobre a qual $\Re(\varphi)$ se anula.*

Definição 1.3. *Diz-se que L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$, em um aberto $V \subset \Omega$, se não existe função suave a valores complexos, positivamente homogênea, $q(x, \xi)$, sobre $T^*V \setminus \mathcal{O}$, tal que $\Im(q\rho)$ assume tanto valores positivos quanto negativos sobre uma curva bi-característica de $\Re(q\rho)$, em V , sobre a qual $q \neq 0$.*

Ver [7], Definição 3.1.

Teorema 1.4. *Cada uma das seguintes condições é necessária e suficiente para que L satisfaça a condição $(\mathcal{P})$ em V :*

- (a) *Não existe função C^∞ a valores complexos q em $T^*V \setminus \mathcal{O}$, tal que $\Im(q\rho)$ assume tanto valores positivos quanto negativos sobre uma curva bi-característica de $\Re(q\rho)$, em V , sobre o qual $q \neq 0$.*
- (b) *Se Γ é um ponto característico ou uma curva bi-característica com projeção regular injetiva em $S^*(V)$, então existe uma função q de classe C^∞ , numa vizinhança W de Γ , tal que $\Re(H_{q\rho}) \neq 0$ em W e $\Im(q\rho)$ não muda de sinal sobre qualquer bi-característica de $\Re(q\rho)$ em W .*

Ver [7], Teorema 3.7.

Definição 1.5. *Definimos o conjunto característico da estrutura associada a L como sendo*

$$\mathcal{C}(L) = \{(x, t) \in A_\epsilon; L_{(x,t)} \text{ e } \bar{L}_{(x,t)} \text{ são linearmente independentes}\}.$$

Suponha que L é dado por

$$L = \partial/\partial t + (a(x) + ib(x))\partial/\partial x, \quad b \neq 0, \quad (x, t) \in \Omega \quad (1.1)$$

e que $\mathcal{C}(L) = \{0\} \times S^1$, sendo $\Omega = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, $\epsilon > 0$ e $a, b \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Então, pelo Teorema 1.4, L satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ se, e somente se, $b(\gamma(s))$ não muda de sinal, para qualquer γ curva integral de $\Re(L)$; a curva integral de $\Re(L)$, passando por (x, t) , tem a forma $\gamma_{(x,t)}(s) = \phi(x, s)$, sendo $\partial_s \phi(x, s) = a(\phi(x, s))$.

Se L , dado por (1.1), é resolúvel em $\Sigma = \{0\} \times S^1$ então necessariamente a condição $(\mathcal{P})$ deve ser satisfeita numa vizinhança aberta de Σ ([9], Corolário 26.4.8). Além disso, se

(CG) Qualquer ponto característico de L sobre K pertence a um intervalo compacto de curva bicaracterística de $\Re(q\rho)$, sobre a qual $q \neq 0$, com pontos inicial e final não característicos sobre Σ .

então a condição $(\mathcal{P})$ implica resolubilidade de L em Σ num sentido mais forte: existem soluções em $C^\infty(\Omega)$ ([9], Teorema 26.11.3). Assim, supondo a condição (CG) satisfeita, é possível obter uma recíproca do Corolário 26.4.8 em [9].

Hörmander (veja [9]) denomina o operador L , definido acima, que satisfaz a condição $(\mathcal{P})$ e a condição geométrica (CG) como *operadores de tipo principal*.

Note que o operador L , dado por (1.1), não satisfaz a condição (CG) já que ele é tangente a Σ ; conseqüentemente L não é de tipo principal.

Segue de [2], [6] e [5], os seguintes resultados:

Teorema 1.6. *Seja L dado por (1.1). Assuma que $(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$ e seja $r = \min\{m, n\}$. Se $b(0) \neq 0$ e $2 \leq m < 2n - 1$, então dada $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, a equação $Lu = f$ tem solução $u \in C^\infty(A_\epsilon)$, em uma vizinhança de Σ , se, e somente se, f satisfaz*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r - 1.$$

Teorema 1.7. *Seja L dado por (1.1) e seja $r = \min\{m, n\}$. Se $(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$ e é satisfeita uma das seguintes condições*

- 1★. $a_0(0) \neq 0$ e $m > 2n - 1$;
- 2★. $b_0(0) \neq 0$ e $m = 1$;
- 3★. $a_0(0) \neq 0, b_0(0) \neq 0, m = 2n - 1$ e $n \geq 2$;

então existe uma função $f \in C^\infty(A_\epsilon)$ satisfazendo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r - 1,$$

para o qual a equação $Lu = f$ não tem solução de classe C^∞ em nenhuma vizinhança de Σ .

Combinando os Teoremas 1.6 e 1.7 obtemos o seguinte resultado sobre a equação $Lu = f$.

Teorema 1.8. *Seja L dado por (1.1). Assuma que $(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$ e $a_0(0) + ib_0(0) \neq 0$. Seja $r = \min\{m, n\}$ e seja $\mathcal{F}$ o subespaço de $C^\infty(A_\epsilon)$ de todas funções f satisfazendo*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r - 1.$$

Então, para cada $f \in \mathcal{F}$, a equação $Lu = f$ tem uma solução de classe C^∞ , em uma vizinhança de Σ se, e somente se, $2 \leq m < 2n - 1$.

Em particular, para L dado por (1.1), se $(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$, $a_0(0) + ib_0(0) \neq 0$ e $2 \leq m < 2n - 1$ então L é resolúvel em Σ .

Assuma que L é dado por (1.1), $(a + ib)(x) = x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)$, $2 \leq m \leq n$ e que $b_0(0) \neq 0$. Em [10] foi provado que existe um único polinômio $P(x)$ de grau no máximo $m - 1$ com $\Re P(0) < 0$ e um único $\mu \in \mathbb{C}$ tal que L , dado por (0.1), é equivalente ao campo vetorial

$$R_{m-1} = \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{x^m}{xP'(x) - (m-1)P(x) + \mu x^{m-1}} \frac{\partial}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Logo, o estudo da equação $Lu = pu + f$, em uma vizinhança de Σ , é reduzido à correspondente equação para o campo vetorial R_{m-1} , em uma vizinhança do círculo Σ .

O artigo [4] lida com a resolubilidade da equação $R_{m-1}u = pu + f$. Logo, a resolubilidade de (1.1) é bem entendida quando $2 \leq m \leq n$. Contudo, a resolubilidade de (1.1), quando $n < m$ é ainda um problema em aberto.

Equação Homogênea

Seja

$$L = \partial/\partial t + (x^n a_0(x) + ix^m b_0(x))\partial/\partial x, \quad b_0 \not\equiv 0, \quad (x, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times S^1, \quad (2.1)$$

um campo vetorial complexo definido em $A_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, sendo $a_0, b_0 \in C^\infty(A_\epsilon; \mathbb{R})$ e $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Assumimos que

- $2 \leq m < 2n - 1$;
- $b_0(0) > 0$;
- se a função $a : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathbb{R}$, dada por $a(x) = x^n a_0(x)$, não é flat em $x = 0$ então n é a ordem de anulamento de a em $x = 0$; se a função a é flat em $x = 0$ então $n \geq m$.

A hipótese $b_0(0) > 0$ não é restritiva. De fato se $b_0(0) < 0$, fazendo a mudança $\bar{t} = -t$, $x = x$, obtemos que L nas coordenadas $(x, \bar{t})$ tem a forma

$$-\partial/\partial \bar{t} + (a + ib)(x)\partial/\partial x,$$

sendo $b : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathbb{R}$, a função dada por $b(x) = x^m b_0(x)$; conseqüentemente, podemos considerar L dado por

$$\partial/\partial \bar{t} - (a + ib)(x)\partial/\partial x.$$

Seja $p \in C^\infty(A_\epsilon)$.

Defina o operador $\mathcal{L}_p : C^\infty(A_\epsilon) \rightarrow C^\infty(A_\epsilon)$ por

$$\mathcal{L}_p u \doteq Lu - pu. \quad (2.2)$$

Neste capítulo vamos procurar por soluções C^∞ não triviais, em uma vizinhança de Σ , da equação homogênea

$$\mathcal{L}_p u = 0 \quad (2.3)$$

definida em A_ϵ , sendo L dado por (2.1).

Proposição 2.1. *A equação (2.3) tem uma solução $u \in C^\infty(A_\epsilon)$, com $u(0, t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in S^1$ se, e somente se, a função p satisfaz*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} p(0, t) dt \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad (2.5)$$

sendo $r = \min\{m, n\}$.

Demonstração. Suponha que exista $u \in C^\infty(A_\epsilon)$, com $u(0, t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in S^1$, solução de $Lu = pu$ em uma vizinhança de Σ . Então, $u_0(t) \doteq u(0, t)$ é a solução do problema de Cauchy:

$$\begin{cases} v'(t) = p(0, t)v(t) \\ v(t_0) = u(0, t_0) \end{cases}.$$

Portanto, temos $u(0, t) = c \cdot e^{\int_0^t p(0, \sigma) d\sigma}$, sendo $c = \frac{u(0, t_0)}{e^{\int_0^{t_0} p(0, \sigma) d\sigma}} \neq 0$. Como u é 2π -periódica na variável t , concluímos que (2.4) é satisfeito.

Defina

$$w(x, t) \doteq \bar{c}u(x, t)e^{-\int_0^t p(0, \sigma) d\sigma}.$$

É fácil ver que $w(x, t)$ é uma solução da equação

$$Lw = \tilde{p}w, \quad (2.6)$$

sendo $\tilde{p}(x, t) = p(x, t) - p(0, t)$. Além disso, note que $w(0, t) = |c|^2 > 0$ para todo $t \in S^1$; assumindo ϵ suficientemente pequeno, temos $\Re w(x, t) > 0$ para todo $(x, t) \in A_\epsilon$ (em particular $w(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in A_\epsilon$); então, a função $v \in C^\infty(A_\epsilon)$, dada por

$$e^v = w$$

é bem definida.

Logo, de (2.6) temos $\tilde{p}w = Le^v = e^v Lv = wLv$ e, conseqüentemente, v é uma solução C^∞ de

$$Lv = \tilde{p}, \quad (2.7)$$

em uma vizinhança de Σ .

Daí,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j \tilde{p}}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r-1; \quad (2.8)$$

Como Lv se anula de ordem r em $\{x = 0\}$, $\tilde{p}$ satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left[(a + ib) \frac{\partial v}{\partial x} \right] (0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r-1; \quad (2.9)$$

conseqüentemente, p satisfaz (2.5).

Reciprocamente, suponha que p satisfaz (2.4) e (2.5). Então:

- a função $t \mapsto e^{\int_0^t p(0, \sigma) d\sigma}$ é 2π -periódica;
- a função $\tilde{p}$, definida por $\tilde{p}(x, t) \doteq p(x, t) - p(0, t)$ em A_ϵ , satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j \tilde{p}}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r-1;$$

conseqüentemente, pelo Teorema 1.8, existe $\varphi \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de $L\varphi = \tilde{p}$ em uma vizinhança de Σ .

Portanto, a função $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ definida por

$$u(x, t) = e^{\varphi(x, t) + \int_0^t p(0, \sigma) d\sigma}$$

é uma solução de (2.3) em uma vizinhança de Σ ; claramente, $u(x, t) \neq 0$ para todo $(x, t) \in A_\epsilon$. □

Agora, fixamos as notações:

- $r = \min\{m, n\} \geq 2$;
- $\alpha_0 \doteq [(x^{n-r}a_0(x) + ix^{m-r}b_0(x))]_{x=0}$.

Para cada $\ell \in \mathbb{Z}_+$ defina

$$q_\ell(x, t) \doteq p(x, t) - \ell[x^{n-1}a_0(x) + ix^{m-1}b_0(x)].$$

Note que

$$\frac{\partial^j q_\ell}{\partial x^j}(0, t) = \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(0, t), \quad \text{se } j = 0, \dots, r-2. \quad (2.10)$$

Teorema 2.2. *Seja $\ell \in \{0, 1, \dots\}$. Existe $u \in C^\infty(A_\epsilon)$, com ordem de anulamento ℓ em Σ uniforme em t , solução de (2.3) em uma vizinhança de Σ se, e somente se, p satisfaz*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} p(0, t) dt \in \mathbb{Z}, \quad (2.11)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, r-2, \quad (2.12)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{r-1} p}{\partial x^{r-1}}(0, t) dt = 2\pi \ell \alpha_0 (r-1)!. \quad (2.13)$$

Demonstração. O caso $\ell = 0$ segue da Proposição 2.1. Podemos, então, considerar $\ell \geq 1$. Seja $w \in C^\infty(A_\epsilon)$, com $w \not\equiv 0$ em Σ . Assuma que $u(x, t) = x^\ell w(x, t)$ é solução C^∞ de (2.3) em uma vizinhança de Σ . Então,

$$x^\ell pw = pu = Lu = x^\ell Lw + wLx^\ell = x^\ell Lw + w\ell x^{\ell-1}(x^n a_0 + ix^m b_0),$$

ou seja,

$$x^\ell Lw + x^\ell \ell(x^{n-1}a_0 + ix^{m-1}b_0)w = x^\ell pw;$$

consequentemente,

$$Lw + \ell(x^{n-1}a_0 + ix^{m-1}b_0)w = pw \quad (2.14)$$

para $x \neq 0$, e, por continuidade, para $x = 0$.

Logo, w é uma solução C^∞ de $Lw = q_\ell w$, em uma vizinhança de Σ ; além disso, $w \not\equiv 0$ em Σ . Portanto, pela Proposição 2.1, q_ℓ satisfaz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} q_\ell(0, t) dt \in \mathbb{Z}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j q_\ell}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, r-1.$$

Agora, de $q_\ell(0, t) = p(0, t)$ concluímos que p satisfaz (2.11). Além disso, de (2.10) obtemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, r-2;$$

portanto, (2.12) é satisfeita.

Finalmente, para $j = r-1$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{r-1} q_\ell}{\partial x^{r-1}}(0, t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{r-1} p}{\partial x^{r-1}}(0, t) dt - \int_0^{2\pi} \ell \alpha_0 (r-1)! dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{r-1} p}{\partial x^{r-1}}(0, t) dt - 2\pi \ell \alpha_0 (r-1)!. \end{aligned}$$

Portanto, (2.13) é satisfeita.

Reciprocamente, assuma que (2.11), (2.12) e (2.13) são satisfeitas.

Então, a função q_ℓ satisfaz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} q_\ell(0, t) dt \in \mathbb{Z}$$

e

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j q_\ell}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, r-1.$$

Logo, pela Proposição 2.1, a equação $Lw = q_\ell w$ tem uma solução $w \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$, com $w(0, t) \not\equiv 0$.

Portanto, $u(x, t) = x^\ell w(x, t)$ é uma solução C^∞ de $Lu = pu$ em uma vizinhança de Σ . □

Para cumprirmos o objetivo deste capítulo, resta-nos assumir que (2.4) ou (2.5) falha e, além disso, considerar que

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{r-1} p}{\partial x^{r-1}}(0, t) dt \neq 2\pi \ell \alpha_0 (r-1)!, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}_+,$$

quando (2.11) e (2.12) são satisfeitas. Sob estas hipóteses, pelo Teorema 2.2, se a equação (2.3) tem uma solução C^∞ então esta solução deve ser flat em Σ .

Agora, para cada $j \geq 0$, fixamos a notação

$$\lambda_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_j(t) dt,$$

sendo

$$p_j(t) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(0, t).$$

Note que (2.4) é equivalente a $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$; também, (2.5) é equivalente a $\lambda_j = 0$ para cada $j = 0, \dots, r-1$.

Vamos procurar por solução flat não trivial de $\mathcal{L}_p u = 0$.

Da demonstração da Proposição 3.4 (ver página 40) podemos afirmar que, para encontrar uma solução u flat (não trivial) de $\mathcal{L}_p u = 0$, é suficiente encontrar uma solução flat não trivial da equação

$$Lu = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) u. \quad (2.15)$$

Para cada $j = 0, \dots, r-1$, defina

$$C_{j+}(x) \doteq - \int_x^\epsilon \frac{y^j}{a+ib}(y) dy, \quad \text{para } x > 0,$$

e

$$C_{j-}(x) \doteq \int_{-\epsilon}^x \frac{y^j}{a+ib}(y) dy, \quad \text{para } x < 0.$$

Proposição 2.3. *Assuma que (2.4) ou (2.5) falha. Defina o inteiro j_0 como segue:*

- (i) se $\Re(\lambda_j) = 0$ para cada $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = r-1$;
- (ii) se $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq r-1} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$.

Suponha que $m - n \leq j_0$. Então, a equação (2.15) tem uma solução u não trivial, C^∞ e flat em Σ . Além disso, $u(x, t) \neq 0$ se $(x, t) \in A_\epsilon \setminus \Sigma$.

Demonstração. Vamos procurar por solução não trivial de (2.15) na forma

$$u(x, t) = \begin{cases} w(x)e^{i\kappa^+ t}, & x \geq 0 \\ w(x)e^{i\kappa^- t}, & x < 0 \end{cases}, \quad (2.16)$$

sendo $\kappa^+, \kappa^- \in \mathbb{Z}$, $w \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$, $w(x) \neq 0$ para $x \neq 0$, e w flat em $x = 0$.

Para u dado por (2.16) a equação (2.15) fornece

$$[x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)]w'(x) = (-i\kappa^\pm + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j)w(x) \quad \text{em } I_\epsilon^\pm, \quad (2.17)$$

sendo $I_\epsilon^+ = (0, \epsilon)$ e $I_\epsilon^- = (-\epsilon, 0)$.

Simples cálculos mostram que

$$w_\pm(x) = e^{-i\kappa^\pm C_{0\pm}(x) + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_{j\pm}(x)}$$

é uma solução de (2.17) em $I_\epsilon^\pm$.

Defina

$$w(x) = \begin{cases} e^{-i\kappa^+ C_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & \text{se } 0 < x < \epsilon \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ e^{-i\kappa^- C_{0-}(x) + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_{j-}(x)}, & \text{se } -\epsilon < x < 0 \end{cases}. \quad (2.18)$$

Mostraremos que w é flat em $x = 0$; consequentemente, $w \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$.

Note que, para cada $j = 0, \dots, r-1$, temos

$$\lambda_j C_{j\pm}(x) = - \int_x^{\pm\epsilon} y^j \frac{\Re(\lambda_j)a + \Im(\lambda_j)b}{a^2 + b^2}(y)dy + i \int_x^{\pm\epsilon} y^j \frac{\Re(\lambda_j)b - \Im(\lambda_j)a}{a^2 + b^2}(y)dy, \quad (2.19)$$

e, portanto

$$\begin{aligned} & \Re \left(-i\kappa^\pm C_{0\pm}(x) + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_{j\pm}(x) \right) \\ &= - \int_x^{\pm\epsilon} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{r-1} \Re(\lambda_j) y^j \right) \frac{a}{a^2 + b^2}(y) + \left[-\kappa^\pm + \Im(\lambda_0) + \sum_{j=1}^{r-1} \Im(\lambda_j) y^j \right] \frac{b}{a^2 + b^2}(y) \right\} dy \\ &= - \int_x^{\pm\epsilon} \frac{1}{y^\ell} \left[\left(\sum_{j=0}^{r-1} \Re(\lambda_j) y^{j-m+n} \right) \frac{a_0}{b_0}(y) - \kappa^\pm + \Im(\lambda_0) + \sum_{j=1}^{r-1} \Im(\lambda_j) y^j \right] y^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2 + b^2}(y) dy, \end{aligned}$$

sendo

$$\ell = \begin{cases} m, & \text{se } 2 \leq m < n \\ 2n - m, & \text{se } n \leq m < 2n - 1 \end{cases}. \quad (2.20)$$

Defina

$$D_{\kappa^\pm} \doteq \Re(\lambda_{j_0}) [x^{n-m+j_0} a_0(x)]_{x=0} + (\Im(\lambda_0) - \kappa^\pm) b_0(0),$$

e

$$g_{\kappa^\pm}(x) \doteq \frac{1}{D_{\kappa^\pm}} \left[\left(\sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) x^{j-m+n} \right) \frac{a_0}{b_0}(x) - \kappa^\pm + \Im(\lambda_0) + \sum_{j=1}^{r-1} \Im(\lambda_j) x^j \right] x^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2 + b^2}(x).$$

Para $\kappa^\pm \in \mathbb{Z}$, tal que $\kappa^\pm \neq \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$, temos

$$g_{\kappa^\pm}(0) = \begin{cases} 1/b_0^2(0), & \text{se } 2 \leq m < n \\ 1/[a_0^2(0) + b_0^2(0)], & \text{se } m = n \\ 1/a_0^2(0), & \text{se } n < m < 2n - 1 \end{cases}$$

e

$$\Re(-i\kappa^\pm C_{0\pm}(x) + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_{j\pm}(x)) = -D_{\kappa^\pm} \int_x^{\pm\epsilon} \frac{1}{y^\ell} g_{\kappa^\pm}(y) dy. \quad (2.21)$$

Como $g_{\kappa^\pm} \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$, assumindo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos encontrar $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$\alpha \leq g_{\kappa^\pm}(x) \leq \beta, \quad \text{para todo } x \in (-\epsilon, \epsilon). \quad (2.22)$$

Logo, escolhendo $\kappa^\pm \in \mathbb{Z}$ tais que $D_{\kappa^+} > 0$ e $(-1)^\ell D_{\kappa^-} < 0$, obtemos:

- para $x > 0$,

$$\begin{aligned} |w(x)| &= e^{-\int_x^\epsilon \sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) y^j \frac{a}{a^2+b^2}(y) dy - \int_x^\epsilon (-\kappa^+ + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j) y^j) \frac{b}{a^2+b^2}(y) dy} \\ &= e^{-D_{\kappa^+} \int_x^\epsilon \frac{1}{y^\ell} g_{\kappa^+}(y) dy} \leq e^{\frac{(-D_{\kappa^+})\alpha}{(\ell-1)} \left(\frac{1}{x^{\ell-1}} - \frac{1}{\epsilon^{\ell-1}} \right)} = O(|x|^j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+; \end{aligned} \quad (2.23)$$

- para $x < 0$,

$$\begin{aligned} |w(x)| &= e^{\int_{-\epsilon}^x \sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) y^j \frac{a}{a^2+b^2}(y) dy + \int_{-\epsilon}^x (-\kappa^- + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j) y^j) \frac{b}{a^2+b^2}(y) dy} \\ &= e^{(-1)^\ell D_{\kappa^-} \int_{-\epsilon}^x \frac{1}{(-y)^\ell} g_{\kappa^-}(y) dy} \leq e^{\frac{(-1)^\ell (D_{\kappa^-})\alpha}{(\ell-1)} \left(\frac{1}{|x|^{\ell-1}} - \frac{1}{\epsilon^{\ell-1}} \right)} = O(|x|^j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Cálculos similares mostram que, para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_+$, $|w^{(\gamma)}(x)| = O(|x|^j)$, $\forall j \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, $w \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$, $w(x) \neq 0$ se $x \neq 0$, e w é flat em $x = 0$; consequentemente, u dado por (2.16) tem as propriedades desejadas. $\square$

Proposição 2.4. *Suponha que $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, r-1\}$ e, além disso, $m-n > j_0 = \min_{0 \leq j \leq r-1} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$. Temos:*

- (i) *se $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) > 0$ e $n - j_0$ é ímpar, então a equação (2.15) tem uma solução u de classe C^∞ , flat em Σ , tal que $u(x, t) \neq 0$ se $(x, t) \in A_\epsilon \setminus \Sigma$.*
- (ii) *se $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) > 0$ e $n - j_0$ é par, então a equação (2.15) tem uma solução u de classe C^∞ , flat em Σ , tal que $u(x, t) \neq 0$ se $(x, t) \in (0, \epsilon) \times S^1$.*
- (iii) *se $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) < 0$ e $n - j_0$ é par, então a equação (2.15) tem uma solução u de classe C^∞ , flat em Σ , tal que $u(x, t) \neq 0$ se $(x, t) \in (-\epsilon, 0) \times S^1$.*
- (iv) *se $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) < 0$ e $n - j_0$ é ímpar, então a única solução de classe C^∞ da equação (2.15) é $w \equiv 0$.*

Demonstração. Vamos procurar por soluções não triviais de (2.15) na forma

$$u(x, t) = w(x)e^{ikt} \quad (2.24)$$

sendo $k \in \mathbb{Z}$, $w \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ flat em $x = 0$, e $w(x) \not\equiv 0$.

Para u dado por (2.24), a equação (2.15) fornece

$$[x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)]w'(x) = (-ik + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j)w(x) \quad \text{em } I_\epsilon^\pm, \quad (2.25)$$

sendo $I_\epsilon^+ = (0, \epsilon)$ e $I_\epsilon^- = (-\epsilon, 0)$.

Simples cálculos mostram que

$$w_\pm(x) = e^{-kiC_{0\pm}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j\pm}(x)}$$

é uma solução de (2.25) em $I_\epsilon^\pm$.

Sob nossas hipóteses, obtemos

$$\begin{aligned} & \Re(-kiC_{0\pm}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j\pm}(x)) \\ &= - \int_x^{\pm\epsilon} \left\{ \left(\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) y^j \right) \frac{a}{a^2 + b^2}(y) + \left[(-k + \Im(\lambda_0)) + \sum_{j=1}^{n-1} \Im(\lambda_j) y^j \right] \frac{b}{a^2 + b^2}(y) \right\} dy \end{aligned}$$

$$= - \int_x^{\pm\epsilon} \left\{ \left(\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) y^j \right) \frac{1}{y^n} A(y) + \left[(-k + \Im(\lambda_0)) + \sum_{j=1}^{n-1} \Im(\lambda_j) y^j \right] \frac{1}{y^{2n-m}} B(y) \right\} dy,$$

sendo $A, B \in C^\infty(A_\epsilon)$; além disso, $A(0) = 1/a_0(0)$ e $B(0) = b_0(0)/a_0^2(0)$. Agora, note que:

- $n - j_0 > 2$. De fato, $m < 2n - 1$ implica que $m - n < n - 1$; equivalentemente, $m - n + 1 \leq n - 1$. Logo, $j_0 + 1 < n - 1$ e, consequentemente, $2 < n - j_0$.
- $n - j_0 - (2n - m) = m - n - j_0 > 0$.

Logo, podemos escrever

$$\Re(-kiC_{0\pm}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j\pm}(x)) = -\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_x^{\pm\epsilon} \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy,$$

sendo

$$g_k(x) = \frac{a_0(0)}{\Re(\lambda_{j_0})} \left\{ \left(\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) x^{j-j_0} \right) A(x) + \left[(-k + \Im(\lambda_0)) + \sum_{j=1}^{n-1} \Im(\lambda_j) x^j \right] x^{m-n-j_0} B(x) \right\}.$$

Temos que $g_k \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ e $g_k(0) = 1$; além disso, podemos encontrar $\epsilon_k > 0$ tal que

$$\frac{1}{2} \leq g_k(x) \leq \frac{3}{2}, \quad \text{se } x \in (-\epsilon_k, \epsilon_k).$$

Caso (i): Assuma que $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) > 0$ e $n - j_0$ é ímpar.

Defina

$$w(x) = \begin{cases} e^{-kiC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & \text{se } 0 < x < \epsilon \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ e^{-kiC_{0-}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)}, & \text{se } -\epsilon < x < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Mostraremos que w é flat em $x = 0$; consequentemente, $w \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$.

Para $0 < x < \epsilon_k$, temos

$$\begin{aligned} |w(x)| &= e^{-\int_x^\epsilon \left[\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) y^j \frac{a}{a^2+b^2}(y) + (-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) y^j) \frac{b}{a^2+b^2}(y) \right] dy} \\ &= e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_x^{\epsilon_k} \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy} e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{\epsilon_k}^\epsilon \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M_k e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \int_x^{\epsilon_k} \frac{1}{y^{n-j_0}} dy} = M_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \frac{1}{(n-j_0-1)y^{n-j_0-1}} \Big|_x^{\epsilon_k}} \\
&= M_k e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \left(\frac{1}{x^{n-j_0-1}} - \frac{1}{\epsilon_k^{n-j_0-1}} \right)} = O(|x|^j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}$$

sendo

$$M_k = e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{\epsilon_k}^{\epsilon} \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy}.$$

Para $-\epsilon_k < x < 0$, como $n - j_0$ é ímpar, obtemos

$$\begin{aligned}
|w(x)| &= e^{\int_{-\epsilon_k}^x \left[\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) y^j \frac{a}{a^2+b^2}(y) + (-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) y^j) \frac{b}{a^2+b^2}(y) \right] (y) dy} \\
&= e^{\frac{(-1)^{n-j_0} \Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{-\epsilon_k}^x \frac{1}{(-y)^{n-j_0}} g_k(y) dy} e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{-\epsilon}^{-\epsilon_k} \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy} \\
&\leq M'_k e^{\frac{(-1)^{n-j_0} \Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \int_{-\epsilon_k}^x \frac{1}{(-y)^{n-j_0}} dy} = M'_k e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)y^{n-j_0-1}} \Big|_{-\epsilon_k}^x} \\
&= M'_k e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \left(\frac{1}{x^{n-j_0-1}} - \frac{1}{(-\epsilon_k)^{n-j_0-1}} \right)} = O(|x|^j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+,
\end{aligned}$$

sendo

$$M'_k = e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{-\epsilon}^{-\epsilon_k} \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy}.$$

Cálculos similares mostram que, para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_+$, $|w^{(\gamma)}(x)| = O(|x|^j)$, $\forall j \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, $w \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$, $w(x) \neq 0$ se $x \neq 0$, e é flat em $x = 0$; consequentemente, u dado por (2.24) tem as propriedades desejadas.

Caso (ii): Assuma que $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) > 0$ e $n - j_0$ é par.

Defina

$$w(x) = \begin{cases} e^{-kiC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & \text{se } 0 < x < \epsilon \\ 0, & \text{se } -\epsilon < x \leq 0 \end{cases}. \quad (2.27)$$

Procedendo como no caso (i) podemos provar que $w \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$; claramente, w é flat em $x = 0$ e $w(x) \neq 0$ se $x > 0$. Portanto, u dado por (2.24) tem as propriedades desejadas.

Caso (iii): Assuma que $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) < 0$ e $n - j_0$ é par.

Defina

$$w(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 < x < \epsilon \\ e^{-kiC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & \text{se } -\epsilon < x \leq 0 \end{cases}. \quad (2.28)$$

Agora, procedendo como no caso (i) podemos provar que, sendo $n - j_0$ par, para $-\epsilon_k < x < 0$ temos

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq M'_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \int_{-\epsilon_k}^x \frac{1}{y^{n-j_0}} dy} = M'_k e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)y^{n-j_0-1}} \Big|_{-\epsilon_k}^x} \\ &= M'_k e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \left(\frac{1}{x^{n-j_0-1}} - \frac{1}{(-\epsilon_k)^{n-j_0-1}} \right)} \\ &= M'_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \left(\frac{1}{(-x)^{n-j_0-1}} - \frac{1}{\epsilon_k^{n-j_0-1}} \right)} = O(|x|^j), \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned}$$

Cálculos similares mostram que, para cada $\gamma \in \mathbb{Z}_+$, $|w^{(\gamma)}(x)| = O(|x|^j)$, $\forall j \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, $w \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ é flat em $x = 0$ e $w(x) \neq 0$ se $x < 0$. Então, u dado por (2.24) tem as propriedades desejadas.

Caso (iv): Assuma que $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) < 0$ e $n - j_0$ é ímpar.

Seja u uma solução C^∞ de (2.15) em uma vizinhança de Σ . Usando série parcial de Fourier, podemos escrever

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(x) e^{ikt}.$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{Z}$, a equação (2.15) fornece

$$ik\hat{u}_k(x) + (a + ib)(x)(\hat{u}_k)'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \hat{u}_k(x); \quad (2.29)$$

consequentemente, $\hat{u}_k$ é dado por

$$\hat{u}_k(x) = \hat{u}_k(\epsilon) e^{-kiC_{0+}(x) + \sum_{j=N}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, \quad \text{se } 0 < x < \epsilon,$$

e

$$\hat{u}_k(x) = \hat{u}_k(-\epsilon) e^{-kiC_{0-}(x) + \sum_{j=N}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)}, \quad \text{se } -\epsilon < x < 0.$$

Agora, fixamos $k \in \mathbb{Z}$.

Para $0 < x < \epsilon_k$, temos

$$\begin{aligned} |\hat{u}_k(x)| &= |\hat{u}_k(\epsilon)| e^{-\int_x^\epsilon \left[\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) y^j \frac{a}{a^2+b^2}(y) + \left(-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) y^j \right) \frac{b}{a^2+b^2}(y) \right] dy} \\ &= |\hat{u}_k(\epsilon)| e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_x^{\epsilon_k} \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy} e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{\epsilon_k}^\epsilon \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy} \\ &\geq |\hat{u}_k(\epsilon)| M_k e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \int_x^{\epsilon_k} \frac{1}{y^{n-j_0}} dy} = M_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)y^{n-j_0-1}} \Big|_x^{\epsilon_k}} \end{aligned}$$

$$= |\hat{u}_k(\epsilon)| M_k e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \left(\frac{1}{x^{n-j_0-1}} - \frac{1}{\epsilon_k^{n-j_0-1}} \right)},$$

sendo

$$M_k = e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{\epsilon_k}^{\epsilon} \frac{1}{y^{n-j_0}} g_k(y) dy}.$$

Logo, $\hat{u}_k(\epsilon) = 0$.

Analogamente, usando que $n - j_0$ é ímpar, podemos provar que $\hat{u}_k(-\epsilon) = 0$.

Portanto, $u \equiv 0$.

□

Equação não homogênea

Seja

$$L = \partial/\partial t + (x^n a_0(x) + ix^m b_0(x))\partial/\partial x, \quad b_0 \not\equiv 0, \quad (x, t) \in (-\epsilon, \epsilon) \times S^1, \quad (3.1)$$

um campo vetorial complexo definido em $A_\epsilon = (-\epsilon, \epsilon) \times S^1$, sendo $a_0, b_0 \in C^\infty(A_\epsilon; \mathbb{R})$ e $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Assumimos, como no Capítulo 2, que

- $2 \leq m < 2n - 1$
- $b_0(0) > 0$;
- se a função $a : (-\epsilon, \epsilon) \mapsto \mathbb{R}$, dada por $a(x) = x^n a_0(x)$, não é flat em $x = 0$ então n é a ordem de anulamento de a em $x = 0$; se a função a é flat em $x = 0$ então $n \geq m$;
- o operador $\mathcal{L}_p : C^\infty(A_\epsilon) \rightarrow C^\infty(A_\epsilon)$ é definido por

$$\mathcal{L}_p u \doteq Lu - pu, \quad (3.2)$$

sendo $p \in C^\infty(A_\epsilon)$.

Neste capítulo vamos analisar a resolubilidade de $\mathcal{L}_p$ em $\Sigma = \{0\} \times S^1$. Veremos que a relação entre as ordens de anulamento das funções a e b e certas médias da função p

têm influência na existência de solução $u \in C^\infty$, em uma vizinhança de $\Sigma = \{0\} \times S^1$, da equação

$$\mathcal{L}_p u = f. \quad (3.3)$$

Tais médias são

$$\lambda_j \doteq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_j(t) dt, \quad (3.4)$$

definidas para cada $j \in \mathbb{Z}_+$ como no Capítulo 2.

As médias λ_j também têm influência no número de condições de compatibilidade da equação $\mathcal{L}_p u = f$. Para descrever tais condições utilizaremos as funções definidas a seguir.

Para cada $j \in \mathbb{Z}_+$, defina

$$P_j(t) \doteq \int_0^t p_j(\sigma) d\sigma, \quad (3.5)$$

e

$$Q_j(x, t) \doteq \sum_{k=0}^j P_k(t) x^k. \quad (3.6)$$

3.1 Existência de solução

Nesta seção apresentamos condições sobre p , sob as quais é possível determinar condições necessárias e suficientes sobre f para que a equação

$$\mathcal{L}_p u = f$$

tenha solução de classe C^∞ , em uma vizinhança de Σ , sendo $\mathcal{L}_p$ definido em (3.2) e $p, f \in C^\infty(A_\epsilon)$.

Teorema 3.1. *Suponha que p satisfaz*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} p(0, t) dt \in \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

e

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad (3.8)$$

sendo $r \doteq \min\{m, n\}$. Então, dada $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, a equação (3.3) tem uma solução $u \in C^\infty(A_\epsilon)$, em uma vizinhança de Σ , se, e somente se, f satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j} (f e^{-Q_{r-1}})(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (3.9)$$

Note que, supondo $p \equiv 0$, as condições (3.1) e (3.8) são satisfeitas. Neste caso o resultado obtido do Teorema 3.1 é precisamente o Teorema 1.6.

Demonstração do Teorema 3.1. Segue de (3.7), (3.8) e do Teorema 1.8, que existe $\varphi \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que $L\varphi(x, t) = p(x, t) - p(0, t)$. Note que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, t) = 0$, $\forall t \in S^1$. Portanto, temos que a função $t \mapsto \varphi(0, t)$ é constante. Então, podemos supor que $\varphi(0, t) \equiv 0$ (substituindo, se necessário, $\varphi(x, t)$ por $\varphi(x, t) - \varphi(0, t)$).

Defina $h : A_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}$ por $h(x, t) \doteq e^{P_0(t) + \varphi(x, t)}$, a qual pertence a $C^\infty(A_\epsilon)$. Afirmamos que $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ é solução da equação $Lu = pu + f$ em uma vizinhança de Σ se, e somente se, $v = \frac{u}{h}$ é solução de $Lv = \frac{f}{h}$ em uma vizinhança de Σ .

De fato,

$$\begin{aligned} Lu = pu + f &\iff L(hv) = phv + f \iff vLh + hLv = phv + f \iff \\ phv + hLv &= phv + f \iff hLv = f \iff \\ Lv &= \frac{f}{h}. \end{aligned}$$

Por outro lado, segue do Teorema 1.8 que a equação $Lv = \frac{f}{h}$ tem uma solução $v \in C^\infty(A_\epsilon)$, em uma vizinhança de Σ se, e somente se, $\frac{f}{h}$ satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(\frac{f}{h} \right) (0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (3.10)$$

Afirmamos que, (3.10) é equivalente a (3.9), desde que

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} (-P_0 - \varphi + Q_{r-1})(0, t) = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (3.11)$$

De fato, de (3.11) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j}{\partial x^j} [1 - e^{-P_0 - \varphi + Q_{r-1}}](0, t) &= 0, \quad j = 0, \dots, r-1 \implies \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} \{f e^{-Q_{r-1}} [1 - e^{-P_0 - \varphi + Q_{r-1}}]\} (0, t) &= 0, \quad j = 0, \dots, r-1 \implies \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} (f e^{-Q_{r-1}} - f e^{-P_0 - \varphi})(0, t) &= 0, \quad j = 0, \dots, r-1 \implies \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} (f e^{-Q_{r-1}} - \frac{f}{h})(0, t) &= 0, \quad j = 0, \dots, r-1 \implies \\ \int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j} (f e^{-Q_{r-1}})(0, t) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(\frac{f}{h} \right) (0, t) dt, \quad j = 0, \dots, r-1. \end{aligned}$$

Portanto, para terminar a prova do teorema, é suficiente mostrar que (3.11) ocorre. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(P_0 + \varphi - Q_{r-1}) &= p_0 + p - p_0 - (a + ib) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sum_{j=0}^{r-1} p(t)x^j \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} p(t)x^j + O(x^r) - x^r[x^{n-r}a_0(x) + ix^{m-r}b_0(x)] \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sum_{j=0}^{r-1} p(t)x^j = O(x^r). \end{aligned}$$

Portanto, integrando ambos os lados em relação a t , obtemos

$$P_0(t) + \varphi(x, t) - Q_{r-1}(x, t) - P_0(t) - \varphi(0, t) + Q_{r-1}(0, t) = O(x^r).$$

Como $Q_{r-1}(0, t) = P_0(t)$ e $\varphi(0, t) = 0$ temos

$$P_0(t) + \varphi(x, t) - Q_{r-1}(x, t) = O(x^r);$$

consequentemente (3.11) é válido. $\square$

De agora em diante, assumiremos que (3.7) ou (3.8) falha. Além disso, fixamos as notações

$$\alpha_0 \doteq [(x^{n-r}a_0(x) + ix^{m-r}b_0(x))]_{x=0},$$

e

$$r \doteq \min\{m, n\}.$$

Lema 3.2. *Existem únicas constantes B_ℓ , $\ell = r, \dots, \ell_0 + r - 2$, tais que*

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{\ell_0+r-1}}{\partial x^{\ell_0+r-1}} [(j - \ell_0)x^{j-1}(x^n a_0 + ix^m b_0)](0, t) dt \\ &= \sum_{\ell=r+j-1}^{\ell_0+r-2} B_\ell \int_0^{2\pi} \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} [(j - \ell_0)x^{j-1}(x^n a_0 + ix^m b_0)](0, t) dt, \quad j = 1, \dots, \ell_0 - 1. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Demonstração. A matriz associada ao sistema de $\ell_0 - 1$ equações dadas por (3.12) é uma matriz triangular superior cujos elementos da diagonal principal são da forma $2\pi(j + r - 1)!(j - \ell_0)\alpha_0$, $j = 1, \dots, \ell_0 - 1$. Portanto tal sistema tem solução única. $\square$

Nosso próximo objetivo será estudar a resolubilidade da equação (3.3) no seguinte sentido.

Dado $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, dizemos que a equação (3.3) é resolúvel módulo funções flat se existe $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que

$$\mathcal{L}_p u - f \text{ é flat em } \Sigma.$$

Quando isto acontecer escreveremos

$$\mathcal{L}_p u \simeq f.$$

A próxima proposição é uma extensão da Proposição 5.1 em [4] para nosso operador $\mathcal{L}_p$.

Proposição 3.3. *Assuma que (3.7) ou (3.8) falha. Seja $\mathcal{L}_p$ dado por (3.2). Com a notação anterior temos:*

(1) *Se $\lambda_0 \notin i\mathbb{Z}$, então (3.3) é resolúvel módulo funções flat para cada $f \in C^\infty(A_\epsilon)$.*

(2) *Suponha que $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$. Seja N o menor inteiro com $1 \leq N \leq r-1$ tal que $\lambda_N \neq 0$. Assuma, além disso, que*

$$1 \leq N < r-1$$

ou então

$$N = r-1, \quad e \quad \lambda_{r-1} - \ell\alpha_0 \neq 0, \quad \forall \ell \in \mathbb{Z}_+.$$

Então, (3.3) é resolúvel módulo funções flat se, e somente se, f satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j} (f e^{-Q_{N-1}})(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (3.13)$$

(3) *Assuma que $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$. Seja N o menor inteiro com $1 \leq N \leq r-1$ tal que $\lambda_N \neq 0$. Suponha, além disso, que*

$$N = r-1, \quad e \quad \lambda_{r-1} - \ell_0\alpha_0 = 0, \quad \text{para algum } \ell_0 \in \mathbb{Z}_+.$$

Então, (3.3) é resolúvel módulo funções flat se, e somente se, f satisfaz (3.13) e

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{\ell_0+r-1}}{\partial x^{\ell_0+r-1}} (f e^{-P_0-\varphi})(0, t) dt = \sum_{\ell=r}^{\ell_0+r-2} B_\ell \int_0^{2\pi} \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} (f e^{-P_0-\varphi})(0, t) dt, \quad (3.14)$$

sendo B_ℓ , $\ell = r, \dots, \ell_0 + r - 2$, constantes dadas por (3.12) e φ solução da equação

$$L\varphi = p - p_0 - \ell_0 x^{r-1} (x^{n-r} a_0 + i x^{m-r} b_0),$$

satisfazendo $\varphi(0, t) \equiv 0$ em S^1 .

Demonstração. Podemos escrever L na forma

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - ix^r \beta(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (3.15)$$

sendo

$$\beta(x) \doteq -x^{m-r} b_0(x) + ix^{n-r} a_0(x).$$

Se $m \leq n$ então temos $\Re(\beta) \neq 0$ e, procedendo como na prova da Proposição 5.1 de [4], obtemos o resultado desejado. Para $n < m$ temos $\Im(\beta) \neq 0$ e podemos utilizar argumentos similares àqueles da Proposição 5.1 de [4].

Suponha $n < m$. Dividiremos a prova em duas partes.

1ª parte:

Na primeira parte vamos supor $\lambda_0 \notin i\mathbb{Z}$.

Escreva

$$f(x, t) \sim \sum_{j \geq 0} f_j(t) x^j,$$

para indicar que $\sum_{j \geq 0} f_j(t) x^j$ é a expansão de Taylor de f com relação a x ; isto é

$$f_j(t) = \frac{1}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, t), \quad j = 0, 1, \dots$$

Escrevemos

$$a_0(x) \sim \sum_{j \geq 0} a_{0,j} x^j, \quad b_0(x) \sim \sum_{j \geq 0} b_{0,j} x^j, \quad p(x, t) \sim \sum_{j \geq 0} p_j(t) x^j, \quad \text{e} \quad u(x, t) \sim \sum_{j \geq 0} u_j(t) x^j.$$

Note que

$$\begin{aligned} & \{x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{j \geq 0} u_j(t) x^j \right\} \\ & \sim \left\{ x^n \sum_{j \geq 0} a_{0,j} x^j + ix^m \sum_{j \geq 0} b_{0,j} x^j \right\} \left\{ \sum_{j \geq 1} j u_j(t) x^{j-1} \right\} \\ & \sim x^n \sum_{j \geq 1} \left\{ \sum_{\ell=1}^j a_{0,j-\ell} \ell u_\ell \right\} x^{j-1} + ix^m \sum_{j \geq 1} \left\{ \sum_{\ell=1}^j b_{0,j-\ell} \ell u_\ell \right\} x^{j-1} \\ & \sim \sum_{j \geq 1} \left\{ \sum_{\ell=1}^j a_{0,j-\ell} \ell u_\ell \right\} x^{j+n-1} + \sum_{j \geq 1} \left\{ \sum_{\ell=1}^j i b_{0,j-\ell} \ell u_\ell \right\} x^{j+m-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \{x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{j \geq 0} u_j(t) x^j \right\} \\ & \sim \sum_{j \geq n} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1} \ell u_\ell \right\} x^j + \sum_{j \geq m} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-m+1} i b_{0,j-m-\ell+1} \ell u_\ell \right\} x^j. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Portanto, de (3.16) concluimos que

$$\mathcal{L}_p u \simeq f$$

é equivalente a

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq 0} u'_j x^j + \sum_{j \geq n} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1} \ell u_\ell \right\} x^j + \sum_{j \geq m} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-m+1} i b_{0,j-m-\ell+1} \ell u_\ell \right\} x^j \\ & \sim \sum_{j \geq 0} \left(\sum_{\ell=0}^j p_\ell u_{j-\ell} \right) x^j + \sum_{j \geq 0} f_j x^j. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim, obtemos

$$u'_j = \sum_{\ell=0}^j p_\ell u_{j-\ell} + f_j, \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (3.18)$$

$$u'_j = \sum_{\ell=0}^j p_\ell u_{j-\ell} + f_j - \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{j-n-\ell+1} \ell u_\ell, \quad n \leq j < m. \quad (3.19)$$

e

$$\begin{aligned} u'_j &= \sum_{\ell=0}^j p_\ell u_{j-\ell} + f_j - \sum_{\ell=j-m+2}^{j-n+1} a_{j-n-\ell+1} \ell u_\ell(t) \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^{j-m+1} (a_{j-n-\ell+1} + i b_{j-m-\ell+1}) \ell u_\ell, \quad j \geq m. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Vamos determinar u_j usando o princípio de indução.

Para $j = 0$, de (3.18), obtemos $u'_0 = p_0 u_0 + f_0$. Então, $(u_0(t) e^{-P_0(t)})' = f_0(t) e^{-P_0(t)}$, e, portanto, $u_0(t) = e^{P_0(t)} \int_0^t f_0(s) e^{P_0(s)} ds + C_0 e^{P_0(t)}$, para algum $C_0 \in \mathbb{C}$. Como $C_0 = u_0(0)$ e u_0 é 2π -periódica, temos $C_0 = u_0(2\pi)$ e, assim, C_0 é determinada de maneira única

por

$$C_0 = \frac{1}{e^{1-P_0(2\pi)}} \int_0^{2\pi} f_0(s) e^{P_0(2\pi)-P_0(s)} ds.$$

De fato, como $\lambda_0 \notin i\mathbb{Z}$, temos que $1 - e^{P_0(2\pi)} \neq 0$; daí,

$$\begin{aligned} u_0(0) = u_0(2\pi) &\iff C_0 = e^{P_0(2\pi)} \int_0^{2\pi} f_0(s) e^{P_0(s)} ds + C_0 e^{P_0(2\pi)} \\ &\iff C_0 = \frac{e^{P_0(2\pi)}}{1 - e^{P_0(2\pi)}} \int_0^{2\pi} f_0(s) e^{-P_0(s)} ds. \end{aligned}$$

Portanto, assumindo $\lambda_0 \notin i\mathbb{Z}$, a equação $u'_0 = p_0 + f_0$ tem uma única solução periódica. Agora, para cada $j \geq 1$, assumamos que $u_0, \dots, u_{j-1}$ foram determinados de maneira única. Então, podemos definir as funções em $C^\infty(S^1)$ dadas por:

$$\psi_j \doteq \sum_{\ell=1}^j p_\ell u_{j-\ell} + f_j, \quad j = 0, \dots, n-1;$$

$$\psi_j \doteq \sum_{\ell=1}^j p_\ell u_{j-\ell} - \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1} \ell u_\ell + f_j, \quad n \leq j < m;$$

$$\psi_j \doteq \sum_{\ell=1}^j p_\ell u_{j-\ell} - \sum_{\ell=j-m+2}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1} \ell u_\ell - \sum_{\ell=1}^{j-m+1} (a_{0,j-n-\ell+1} + i b_{0,j-m-\ell+1}) \ell u_\ell + f_j, \quad j \geq m.$$

Assim, por (3.18), (3.19) e (3.20), u_j deve satisfazer

$$u'_j = p_0 u_j + \psi_j. \quad (3.21)$$

Como $\lambda_0 \notin i\mathbb{Z}$, a equação (3.21) possui única solução $u_j \in C^\infty(S^1)$ dada por

$$u_j(t) = \int_0^t \psi_j(s) e^{P_0(t)-P_0(s)} ds + C_j e^{P_0(t)},$$

sendo

$$C_j = \frac{1}{1 - e^{P_0(2\pi)}} \int_0^{2\pi} \psi_j(s) e^{P_0(2\pi)-P_0(s)} ds.$$

Finalmente, pelo Teorema de Borel (veja, por exemplo, página 16 de [8]), existe uma função $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que $\mathcal{L}_p u \simeq f$. Portanto, a prova está completa quando $\lambda_0 \notin i\mathbb{Z}$.

2ª parte: Suponha que $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$. A demonstração será feita em quatro etapas.

1ª etapa (condições necessárias):

Vamos provar a necessidade de (3.13) sendo N descrito como no caso (2) ou como no caso (3).

Defina

$$w(x, t) = u(x, t)e^{-Q_{N-1}(x, t)}.$$

Note que e^{P_0} é 2π -periódica já que $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$, e que $P_1 \dots, P_{N-1}$ são 2π -periódicas já que $\lambda_j \neq 0$ para $j = 1, \dots, N-1$.

Temos $\mathcal{L}_p u \simeq f$ equivalente a

$$Lw + wL(Q_{N-1}) \simeq pw + fe^{-Q_{N-1}};$$

consequentemente $\mathcal{L}_p u \simeq f$ é equivalente a

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} p_k(t)x^k \right) w + \{x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)\} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \left(\sum_{\nu=1}^{N-1} \nu P_\nu(t)x^{\nu-1} \right) w \right) \simeq pw + fe^{-Q_{N-1}},$$

a qual podemos escrever como

$$Lw \simeq \widehat{p}w + g, \tag{3.22}$$

sendo

$$g = fe^{-Q_{N-1}},$$

e

$$\widehat{p}(x, t) = p(x, t) - \sum_{k=0}^{N-1} p_k(t)x^k - \{x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)\} \sum_{\nu=1}^{N-1} \nu P_\nu(t)x^{\nu-1}.$$

Note que

$$\widehat{p}(x, t) \sim \sum_{k \geq N} p_k(t)x^k - \{x^n a_0(x) + ix^m b_0(x)\} \sum_{\nu=1}^{N-1} \nu P_\nu(t)x^{\nu-1}.$$

Portanto, w satisfaz (3.22) se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq 0} w'_j x^j + \sum_{j \geq n} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1} \ell w_\ell \right\} x^j + \sum_{j \geq m} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-m+1} i b_{0,j-m-\ell+1} \ell w_\ell \right\} x^j \\ & \sim \sum_{j \geq N} \left\{ \sum_{\ell=N}^j p_\ell w_{j-\ell} \right\} x^j - \left\{ (x^n \sum_{j \geq 0} a_{0,j} x^j + ix^m \sum_{j \geq 0} b_{0,j} x^j) \sum_{\nu=1}^{N-1} \nu P_\nu x^{\nu-1} \right\} \sum_{j \geq 0} w_j x^j + \sum_{j \geq 0} g_j x^j. \end{aligned}$$

Agora, usando por convenção $a_{0,j} = 0 = b_{0,j}$ quando $j < 0$, temos

$$\begin{aligned}
& \left\{ x^n \sum_{j \geq 0} a_{0,j} x^j + i x^m \sum_{j \geq 0} b_{0,j} x^j \right\} \left\{ \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} x^\nu \right\} \sum_{j \geq 0} w_j x^j \\
& \sim \left\{ x^n \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{0,j-\nu} x^j + i x^m \sum_{j \geq 0} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} b_{0,j-\nu} x^j \right\} \sum_{j \geq 0} w_j x^j \\
& \sim x^n \sum_{j \geq 0} \left\{ \sum_{\ell=0}^j \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{0,\ell-\nu} w_{j-\ell} \right\} x^j + i x^m \sum_{j \geq 0} \left\{ \sum_{\ell=0}^j \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} b_{0,\ell-\nu} w_{j-\ell} \right\} x^j \\
& \sim \sum_{j \geq 0} \left\{ \sum_{\ell=0}^j \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{0,\ell-\nu} w_{j-\ell} \right\} x^{j+n} + \sum_{j \geq 0} \left\{ \sum_{\ell=0}^j \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} i b_{0,\ell-\nu} w_{j-\ell} \right\} x^{j+m} \\
& \sim \sum_{j \geq n} \left\{ \sum_{\ell=0}^{j-n} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{0,\ell-\nu} w_{j-n-\ell} \right\} x^j + \sum_{j \geq m} \left\{ \sum_{\ell=0}^{j-m} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} i b_{0,\ell-\nu} w_{j-m-\ell} \right\} x^j;
\end{aligned}$$

logo, (3.22) é equivalente a

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \geq 0} w'_j x^j + \sum_{j \geq n} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1} \ell w_\ell \right\} x^j + \sum_{j \geq m} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-m+1} i b_{0,j-m-\ell+1} \ell w_\ell \right\} x^j \\
& \sim \sum_{j \geq N} \left\{ \sum_{\ell=N}^j p_\ell w_{j-\ell} \right\} x^j - \sum_{j \geq n} \left\{ \sum_{\ell=0}^{j-n} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{0,\ell-\nu} w_{j-n-\ell} \right\} x^j \\
& \quad - \sum_{j \geq m} \left\{ \sum_{\ell=0}^{j-m} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} i b_{0,\ell-\nu} w_{j-m-\ell} \right\} x^j + \sum_{j \geq 0} g_j x^j.
\end{aligned}$$

Concluimos, assim, que w satisfaz (3.22) se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& w'_j + \sum_{\ell=1}^{j-m+1} (a_{0,j-n-\ell+1} + i b_{0,j-m-\ell+1}) \ell w_\ell + \sum_{\ell=j-m+2}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1} \ell w_\ell \\
& = \sum_{\ell=N}^j p_\ell w_{j-\ell} - \sum_{k=0}^{j-n} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{0,k-\nu} w_{j-n-k} - i \sum_{k=0}^{j-m} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} b_{0,k-\nu} w_{j-m-k} + g_j,
\end{aligned} \tag{3.23}$$

para $j = 0, 1, \dots$

Note que alguns somatórios na última fórmula podem não existir. No caso, se $n \leq j < m$ temos (3.23) equivalente a

$$w'_j + \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1} \ell w_\ell = \sum_{\ell=N}^j p_\ell w_{j-\ell} - \sum_{k=0}^{j-n} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{0,k-\nu} w_{j-n-k} + g_j. \quad (3.24)$$

Quando $N \leq j \leq n-1$, temos (3.23) equivalente a

$$w'_j = \sum_{\ell=N}^j p_\ell w_{j-\ell} + g_j. \quad (3.25)$$

As N primeiras equações fornecidas por (3.23) são

$$w'_j = g_j, \quad j = 0, \dots, N-1, \quad (3.26)$$

as quais possuem soluções periódicas se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} g_j(t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Isso prova a necessidade de (3.13), sendo N descrito como no caso (2) ou como no caso (3).

2ª etapa (condições suficientes para o caso (2)):

Agora, vamos nos concentrar no caso (2) e provar a suficiência de (3.13). Seja N descrito como no caso (2) Assuma que (3.13) seja satisfeita. Então, para $j = 0, \dots, N-1$, a solução geral de (3.26) é

$$w_j(t) = \int_0^t g_j(\sigma) d\sigma + C_j,$$

sendo C_j uma constante.

A próxima equação, obtida de (3.22), será

$$w'_N = p_N w_0 + g_N,$$

ou, de forma equivalente

$$w'_N = p_N C_0 + p_N I_0 + g_N, \quad (3.27)$$

sendo $I_0 = \int_0^t g_0(\sigma) d\sigma$.

Note que (3.27) tem uma solução $w_N \in C^\infty(S^1)$ se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} \{p_N C_0 + p_N I_0 + g_N\}(t) dt = 0. \quad (3.28)$$

Existe um único valor de C_0 , dado por

$$C_0 = \frac{-1}{2\pi\lambda_N} \left(\int_0^{2\pi} p_N I_0 dt + \int_0^{2\pi} g_N dt \right),$$

para o qual (3.28) é satisfeita. Obtemos, assim, $w_N(t) = I_N(t) + C_N$, sendo C_N uma constante e $I_N(t) = \int_0^t \{p_N C_0 + p_N I_0 + g_N\}(\sigma) d\sigma$.

Logo, $w_0(t) = \int_0^t g_0(\sigma) d\sigma + \frac{-1}{2\pi\lambda_N} \left(\int_0^{2\pi} [p_N \int_0^t g_0(\sigma) d\sigma + g_N] dt \right)$. Concluimos assim que w_0 é unicamente determinada por (3.22).

De forma mais geral, para os índices j tais que $N \leq j \leq n-1$, provamos por indução em j que w_{j-N} é unicamente determinada por (3.22).

De fato, para $N < j \leq n-1$, assumamos que $w_0, \dots, w_{j-1-N}$ são unicamente determinadas por (3.22). De (3.25) obtemos a seguinte equação

$$w'_j = p_N w_{j-N} + \chi_j, \quad (3.29)$$

sendo $\chi_j \in C^\infty(S^1)$ uma função que depende apenas de g_j , e das funções $w_0, \dots, w_{j-N-1}$ unicamente determinadas pela hipótese de indução. De forma mais explícita, temos

$$\chi_j \doteq \sum_{\ell=N+1}^j p_\ell w_{j-\ell} + g_j,$$

se $N < j \leq n-1$.

A solução geral de (3.29) é $w_j(t) = \int_0^t \{p_N(\sigma) w_{j-N}(\sigma) + \chi_j(\sigma)\} d\sigma + C_j$. Note que w_j está em $C^\infty(S^1)$ se, e somente se, $I_j(2\pi) = 0$, sendo

$$I_j(t) \doteq \int_0^t \{p_N(\sigma) w_{j-N}(\sigma) + \chi_j(\sigma)\} d\sigma;$$

ou, de maneira equivalente se, e somente se,

$$C_{j-N} = \frac{-1}{2\pi\lambda_N} \left\{ \int_0^{2\pi} p_N I_{j-N} dt + \int_0^{2\pi} \chi_j dt \right\}.$$

Logo, w_{j-N} é unicamente determinada por (3.22). De fato, temos

$$w_{j-N}(t) = \int_0^t \{p_N(\sigma)w_{j-2N}(\sigma) + \chi_{j-N}(\sigma)\}d\sigma + \frac{-1}{2\pi\lambda_N} \left\{ \int_0^{2\pi} p_N I_{j-N} dt + \int_0^{2\pi} \chi_j dt \right\},$$

além disso, de $-N \leq -1$ obtemos $j - 2N \leq j - 1 - N$. Portanto, assumindo $w_{j-2N} \equiv 0$ e $\chi_{j-N} \equiv g_{j-N}$ se $j < 2N$, $w_{j-N}(t)$ é unicamente determinada pela hipótese de indução.

Concluimos assim que (3.22) fornece w_{j-N} de maneira única, quando $N \leq j \leq n-1$.

Agora, vamos considerar os índices j tais que $j \geq n$. Neste caso existem duas situações a serem analisadas:

- $N < n - 1$;
- $N = n - 1$.

Vamos considerar primeiro o caso em que $N < n - 1 < j$. Assuma que $w_0, \dots, w_{j-1-N}$ são unicamente determinadas por (3.22). De (3.23), podemos escrever a equação para w'_j como em (3.29), sendo χ_j unicamente determinada pela igualdade

$$\begin{aligned} \chi_j = & - \sum_{\ell=1}^{j-m+1} (a_{\mathfrak{b},j-n-\ell+1} + i b_{\mathfrak{b},j-m-\ell+1}) \ell w_\ell - \sum_{\ell=j-m+2}^{j-n+1} a_{\mathfrak{b},j-n-\ell+1} \ell w_\ell + \sum_{\ell=N+1}^j p_\ell w_{j-\ell} \\ & - \sum_{k=0}^{j-n} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{\mathfrak{b},k-\nu} w_{j-n-k} - i \sum_{k=0}^{j-m} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} b_{\mathfrak{b},k-\nu} w_{j-m-k} + g_j. \end{aligned}$$

Portanto, usando indução em j e procedendo como anteriormente, provamos que w_{j-N} é unicamente determinado por (3.22)

Resta o caso em que $N = n - 1 < j$. Observe que, da desigualdade $n < m$ temos $\alpha_0 = a_{\mathfrak{b},0}$, e que na situação (2) desta proposição temos $\lambda_{n-1} + \ell a_0 = \lambda_{r-1} + \ell \alpha_0 \neq 0$, $\forall \ell \in \{1, 2, \dots\}$.

Assuma que $w_0, \dots, w_{j-1-N}$ são unicamente determinadas por (3.22). De (3.23), podemos escrever a equação para w'_j na forma

$$w'_j = \{p_{n-1} - (j - n + 1)a_{\mathfrak{b},0}\}w_{j-n+1} + \chi_j, \quad (3.30)$$

sendo χ_j unicamente determinada (usando a hipótese de indução) pela igualdade

$$\chi_j = - \sum_{\ell=1}^{j-m+1} (a_{\mathfrak{b},j-n-\ell+1} + i b_{\mathfrak{b},j-m-\ell+1}) \ell w_\ell - \sum_{\ell=j-m+2}^{j-n} a_{\mathfrak{b},j-n-\ell+1} \ell w_\ell + \sum_{\ell=N+1}^j p_\ell w_{j-\ell}$$

$$- \sum_{k=0}^{j-n} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} a_{0,k-\nu} w_{j-n-k} - i \sum_{k=0}^{j-m} \sum_{\nu=0}^{N-2} (\nu+1) P_{\nu+1} b_{0,k-\nu} w_{j-m-k} + g_j.$$

A hipótese $\lambda_{n-1} - \ell a_{0,0} \neq 0, \forall \ell \in \{1, 2, \dots\}$ é precisamente o que é necessário para a equação (3.30) ter solução (única) em $C^\infty(S^1)$. Mais precisamente, w_{j-N} fica unicamente determinada, usando a hipótese de indução, pela igualdade $w_{j-N} = I_{j-N} + C_{j-N}$, sendo

$$I_{j-N} = \begin{cases} \int_0^t g_{j-n+1}(\sigma) d\sigma, & \text{se } j < 2n-2 \\ \int_0^t \{p_{n-1}(\sigma) - (j-2n+2)a_{0,0}\} w_{j-2n+2}(\sigma) + \chi_{j-n+1}(\sigma) d\sigma, & \text{se } 2n-2 \leq j \end{cases} \quad (3.31)$$

e

$$C_{j-N} = \frac{-1}{2\pi \{\lambda_{n-1} - (j-n+1)a_{0,0}\}} \left\{ \int_0^{2\pi} \{p_{n-1} - (j-n+1)a_0\} I_{j-n+1} + \chi_j dt \right\}. \quad (3.32)$$

Encerramos assim a prova para o caso (2) desta proposição.

3ª etapa (condições suficientes para o caso (3));

Finalmente passaremos para o caso (3) desta proposição. Então $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$, $\lambda_j = 0$, $j = 1, \dots, n-2$, e existe $\ell_0 \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\lambda_{n-1} - \ell_0 a_0 = 0$.

Defina

$$q \doteq p - p_0 - \ell_0 x^{n-1} (a_0 + ix^{m-n} b_0).$$

Sob nossas hipóteses, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j q}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (3.33)$$

Segue de (3.33) e do Teorema 1.8, que existe $\varphi \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que $L\varphi(x, t) = q(x, t)$. Note que, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, t) = 0$, $\forall t \in S^1$. Portanto, temos $t \mapsto \varphi(0, t)$ constante.

Então, podemos supor que $\varphi(0, t) \equiv 0$ (substituindo, se necessário, $\varphi(x, t)$ por $\varphi(x, t) - \varphi(0, t)$).

Defina $h : A_\epsilon \rightarrow \mathbb{C}$ por $h(x, t) \doteq e^{P_0(t) + \varphi(x, t)}$, a qual pertence $C^\infty(A_\epsilon)$. Afirmamos que $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ satisfaz $\mathcal{L}_p u \simeq f$ se, e somente se, $w = \frac{u}{h}$ satisfaz

$$Lw \simeq \ell_0 x^{n-1} (a_0 + ix^{m-n} b_0) w + \frac{f}{h}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
Lu \simeq pu + f &\iff L(hw) \simeq phw + f \iff wLh + hLw \simeq phw + f \iff \\
wh[p - \ell_0 x^{n-1}(a_0 + ix^{m-n}b_0)] + hLw &\simeq phw + f \iff \\
-wh\ell_0 x^{n-1}(a_0 + ix^{m-n}b_0) + hLw &\simeq f \iff \\
Lw \simeq \ell_0 x^{n-1}(a_0 + ix^{m-n}b_0)w + \frac{f}{h}.
\end{aligned}$$

Defina

$$g = \frac{f}{h}.$$

Logo, $\mathcal{L}_p u \simeq f$ é equivalente a

$$Lw \simeq \ell_0 x^{n-1}(a_0 + ix^{m-n}b_0)w + g. \quad (3.34)$$

De (3.16) temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geq 0} w'_j x^j + \sum_{j \geq n} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{\mathfrak{b},j-n-\ell+1} \ell w_\ell \right\} x^j + \sum_{j \geq m} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-m+1} i b_{\mathfrak{b},j-m-\ell+1} \ell w_\ell \right\} x^j \\
\sim \ell_0 x^{n-1}(a_0 + ix^{m-n}b_0)w + \sum_{j \geq 0} g_j x^j
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\ell_0 x^{n-1}(a_0 + ix^{m-n}b_0)w &\sim \ell_0 x^{n-1}(a_0 + ix^{m-n}b_0)w_0 + \ell_0 x^n(a_0 + ix^{m-n}b_0) \sum_{j \geq 1} w_j x^{j-1} \\
&\sim \sum_{j \geq n-1} \ell_0 w_0 a_{\mathfrak{b},j-n+1} x^j + \sum_{j \geq m-1} \ell_0 w_0 i b_{\mathfrak{b},j-m+1} x^j + \sum_{j \geq n} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{\mathfrak{b},j-n-\ell+1} \ell_0 w_\ell \right\} x^j \\
&\quad + \sum_{j \geq m} \left\{ \sum_{\ell=1}^{j-m+1} i b_{\mathfrak{b},j-m-\ell+1} \ell_0 w_\ell \right\} x^j;
\end{aligned}$$

concluimos que w satisfaz (3.34) se, e somente se,

$$w'_j + \sum_{\ell=1}^{j-m+1} (a_{\mathfrak{b},j-n-\ell+1} + i b_{\mathfrak{b},j-m-\ell+1})(\ell - \ell_0)w_\ell + \sum_{\ell=j-m+2}^{j-n+1} a_{\mathfrak{b},j-n-\ell+1}(\ell - \ell_0)w_\ell = g_j, \quad (3.35)$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$.

Note que alguns somatórios na última fórmula podem não existir. No caso, se $n \leq j < m$ temos (3.35) equivalente a

$$w'_j + \sum_{\ell=1}^{j-n+1} a_{0,j-n-\ell+1}(\ell - \ell_0)w_\ell = g_j. \quad (3.36)$$

As $n - 2$ primeiras equações, fornecidas por (3.35), são

$$w'_j = g_j, \quad j = 0, \dots, n - 2, \quad (3.37)$$

as quais possuem soluções periódicas se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j}{\partial x^j} \left(\frac{f}{h} \right) (0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, n - 2. \quad (3.38)$$

Portanto, (3.38) é necessária. Afirmamos que (3.38) é equivalente a (3.13). De fato, para mostrar esta equivalência, é suficiente mostrar que

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} (-P_0 - \varphi + Q_{n-2})(0, t) = 0, \quad j = 0, \dots, n - 2. \quad (3.39)$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (P_0 + \varphi - Q_{n-2}) &= p_0 + p - p_0 - \ell_0 x^{n-1} (a_0 + ix^{m-n} b_0) - (a + ib) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sum_{j=0}^{n-2} p_j(t) x^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} p_j(t) x^j + O(x^{n-1}) - x^{n-1} [x a_0(x) + ix^{m-n} b_0(x)] \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \sum_{j=0}^{n-2} p_j(t) x^j = O(x^{n-1}). \end{aligned}$$

Portanto, integrando com relação a t , obtemos

$$P_0(t) + \varphi(x, t) - Q_{n-2}(x, t) - P_0(t) - \varphi(0, t) + Q_{n-2}(0, t) = O(x^{n-1}).$$

Como $Q_{n-2}(0, t) = P_0(t)$ e $\varphi(0, t) = 0$, temos

$$P_0(t) + \varphi(x, t) - Q_{n-2}(x, t) = O(x^{n-1});$$

consequentemente (3.39) é válido. Isso prova que (3.38) é equivalente a (3.13).

Agora, assuma que (3.13) seja satisfeita. Então, para $j = 0, \dots, n-2$, a solução geral de (3.37) é

$$w_j(t) = \int_0^t g_j(\sigma) d\sigma + C_j,$$

sendo C_j uma constante.

A próxima equação, obtida de (3.35), será

$$w'_{n-1} = \ell_0 a_{0,0} w_0 + g_{n-1}; \quad (3.40)$$

de forma equivalente,

$$w'_{n-1} = \ell_0 a_{0,0} C_0 + \ell_0 a_{0,0} I_0 + g_{n-1},$$

sendo $I_0 = \int_0^t g_0(\sigma) d\sigma$.

Note que (3.40) tem uma solução $w_{n-1} \in C^\infty(S^1)$ se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} \{\ell_0 a_{0,0} C_0 + \ell_0 a_{0,0} I_0 + g_{n-1}\}(t) dt = 0. \quad (3.41)$$

Existe um único valor de C_0 , dado por

$$C_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 dt - \frac{1}{2\pi \ell_0 a_{0,0}} \int_0^{2\pi} g_{n-1} dt,$$

para o qual (3.41) é satisfeita. Obtemos, assim, $w_{n-1}(t) = I_{n-1}(t) + C_{n-1}$, sendo C_{n-1} uma constante e $I_{n-1}(t) = \int_0^t \{\ell_0 a_{0,0} C_0 + \ell_0 a_{0,0} I_0 + g_{n-1}\}(\sigma) d\sigma$.

Logo, $w_0(t) = \int_0^t g_0(\sigma) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 dt - \frac{1}{2\pi \ell_0 a_{0,0}} \int_0^{2\pi} g_{n-1} dt$. Concluimos assim que w_0 é unicamente determinada por (3.34).

De forma mais geral, para os índices $j \geq n-1$, podemos provar por indução em j que w_{j-n+1} é unicamente determinada por (3.34).

De fato, assuma que $w_0, \dots, w_{j-n}$ são unicamente determinadas por (3.34). Por (3.35), podemos escrever a equação para w'_j na forma

$$w'_j = [\ell_0 - (j - n + 1)] a_{0,0} w_{j-n+1} + \chi_j, \quad (3.42)$$

sendo $\chi_j \in C^\infty(S^1)$ uma função que depende apenas de g_j e das funções $w_0, \dots, w_{j-n}$ (unicamente determinadas pela hipótese de indução). De forma mais explícita, temos

$$\chi_j = - \sum_{\ell=1}^{j-m+1} (a_{0,j-n-\ell+1} + i b_{0,j-m-\ell+1}) (\ell - \ell_0) w_\ell - \sum_{\ell=j-m+2}^{j-n} a_{0,j-n-\ell+1} (\ell - \ell_0) w_\ell + g_j.$$

Logo, para $n - 1 \leq j \leq n + \ell_0$ é suficiente escolher

$$C_{j-n+1} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{j-n+1} dt - \frac{1}{2\pi[\ell_0 - (j - n + 1)]a_{0,0}} \int_0^{2\pi} \chi_j dt.$$

Assumindo $w_{j-2n+2} \equiv 0$ e $\chi_{j-n+1} \equiv g_{j-n+1}$ se $n - 1 < j < 2n - 2$, para $n - 1 \leq j < n + \ell_0$ obtemos

$$\begin{aligned} w_{j-n+1}(t) = & \int_0^t \{[\ell_0 - (j - n + 1)]a_{0,0}w_{j-2n+2}(\sigma) + \chi_{j-n+1}(\sigma)\} d\sigma \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{j-n+1} dt - \frac{1}{2\pi[\ell_0 - (j - n + 1)]a_{0,0}} \int_0^{2\pi} \chi_j dt. \end{aligned}$$

Para determinar w_{ℓ_0} de maneira única, utilizamos a equação que corresponde a $j = n - 1 + \ell_0$, dada por

$$w'_{n-1+\ell_0} = \chi_{n-1+\ell_0}, \quad (3.43)$$

a qual tem solução periódica se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} \chi_{n-1+\ell_0} dt = 0, \quad (3.44)$$

sendo que $\chi_{n-1+\ell_0}$ já foi unicamente determinada pela hipótese de indução (em outras palavras, todas as constantes $C_0, \dots, C_{\ell_0-1}$ já foram unicamente escolhidas).

Afirmamos que (3.44) é uma condição adicional. De fato veremos na 4ª etapa da demonstração que (3.44) é uma condição imposta sobre as derivadas de f até ordem $\ell_0 + n - 1$.

Agora, assumamos que (3.44) é satisfeita. Então,

$$w_{n-1+\ell_0} = \int_0^t \chi_{n-1+\ell_0}(\sigma) d\sigma + C_{n-1+\ell_0}.$$

Para $j \geq n + \ell_0$ podemos determinar w_{j-n+1} , por indução em j , de maneira única pela igualdade $w_{j-n+1} = I_{j-n+1} + C_{j-n+1}$, sendo

$$I_{j-n+1} = \begin{cases} \int_0^t g_{j-n+1}(\sigma) d\sigma, & \text{se } j < 2n - 2 \\ \int_0^t [\ell_0 - (j - n + 1)]a_{0,0}w_{j-2n+2}(\sigma) + \chi_{j-n+1}(\sigma) d\sigma, & \text{se } 2n - 2 \leq j \end{cases} \quad (3.45)$$

e

$$C_{j-N} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{j-n+1} dt - \frac{1}{2\pi[\ell_0 - (j - n + 1)]a_{0,0}} \int_0^{2\pi} \chi_j dt, \quad (3.46)$$

já que o coeficiente $[\ell_0 - (j - n + 1)]a_{0,0}$ é não nulo se $j \geq n + \ell_0$.

4^a etapa (interpretação da condição adicional para o caso (3));

Agora, veremos que a condição adicional (3.44) é equivalente a (3.14). Faremos isto mostrando que, para cada $j = 1, \dots, \ell_0 - 1$ existem constantes $C_{j,\ell}$, $\ell = n, \dots, j + n$, de forma que

$$\int_0^{2\pi} w_j(t) dt = \sum_{\ell=n}^{j+n-1} C_{j,\ell} \int_0^{2\pi} g_\ell(t) dt. \quad (3.47)$$

Provaremos (3.47) usando indução em j .

De (3.42), obtemos

$$\int_0^{2\pi} w_1(t) dt = \frac{1}{(1 - \ell_0)a_{0,0}} \int_0^{2\pi} g_n(t) dt.$$

Portanto (3.47) é satisfeita para $j = 1$. Seja $k \in \mathbb{Z}_+$ tal que $2 \leq k \leq \ell_0 - 1$. Suponha que (3.47) seja satisfeita para $j = 1, \dots, k - 1$, mostraremos que (3.47) também é satisfeita para $j = k$.

De (3.35) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} w'_{k+n-1}(t) dt + a_{0,0}(k - \ell_0) \int_0^{2\pi} w_k(t) dt = \int_0^{2\pi} g_{k+n-1}(t) dt \\ & - \sum_{\ell=1}^{k+n-m} (a_{0,k-\ell} + ib_{0,k+n-m-\ell})(\ell - \ell_0) \int_0^{2\pi} w_\ell(t) dt - \sum_{\ell=k+n-m+1}^{k-1} a_{0,k-\ell}(\ell - \ell_0) \int_0^{2\pi} w_\ell(t) dt. \end{aligned}$$

Portanto, usando a hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} w_k(t) dt &= \frac{1}{a_{0,0}(k - \ell_0)} \int_0^{2\pi} g_{k+n-1}(t) dt \\ &- \frac{1}{a_{0,0}(k - \ell_0)} \sum_{\ell=1}^{k+n-m} (a_{0,k-\ell} + ib_{0,k+n-m-\ell})(\ell - \ell_0) \sum_{\nu=n}^{\ell+n-1} C_{\ell,\nu} \int_0^{2\pi} g_\nu(t) dt \\ &- \frac{1}{a_{0,0}(k - \ell_0)} \sum_{\ell=k+n-m+1}^{k-1} a_{0,k-\ell}(\ell - \ell_0) \sum_{\nu=n}^{\ell+n-1} C_{\ell,\nu} \int_0^{2\pi} g_\nu(t) dt. \end{aligned}$$

Agora, reordenando a expressão à direita da equação anterior, encontramos as constantes $C_{k,\ell}$, $\ell = n, \dots, k+n-1$, de forma que

$$\int_0^{2\pi} w_k(t) dt = \sum_{\ell=n}^{k+n-1} C_{k,\ell} \int_0^{2\pi} g_\ell(t) dt,$$

e encerramos o processo de indução.

De (3.47), podemos reescrever (3.44) na forma

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g_{\ell_0+n-1}(t) dt &= \sum_{\ell=1}^{\ell_0+n-m} (a_{\ell_0-\ell} + ib_{\ell_0+n-m-\ell})(\ell - \ell_0) \sum_{\nu=n}^{\ell+n-1} C_{\ell,\nu} \int_0^{2\pi} g_\nu(t) dt \\ &\quad + \sum_{\ell=\ell_0+n-m+1}^{\ell_0-1} a_{\ell_0-\ell}(\ell - \ell_0) \sum_{\nu=n}^{\ell+n-1} C_{\ell,\nu} \int_0^{2\pi} g_\nu(t) dt. \end{aligned}$$

Agora, estamos prontos para descrever a condição adicional na forma desejada; reordenamos a expressão à direita da equação anterior para encontrarmos constantes B_ℓ , $\ell = n, \dots, \ell_0+n-1$, de forma que (3.44) seja equivalente a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^{\ell_0+n-1}}{\partial x^{\ell_0+n-1}} (f e^{-P_0-\varphi})(0, t) dt = \sum_{\ell=n}^{\ell_0+n-2} B_\ell \int_0^{2\pi} \frac{\partial^\ell}{\partial x^\ell} (f e^{-P_0-\varphi})(0, t) dt.$$

Note que as constantes B_ℓ , $\ell = n, \dots, \ell_0+n-1$ não dependem da função f ; dependem apenas da função $a + ib$ e são determinadas por (3.12).

De fato, seja $u_j \doteq x^j e^{\varphi+P_0} \in C^\infty(A_\epsilon)$, $j = 1, \dots, \ell_0-1$, então

$$\begin{aligned} Lu_j &= x^j L e^{\varphi+P_0} + e^{\varphi+P_0} L x^j \\ &= u_j L(\varphi + P_0) + e^{\varphi+P_0} j x^j (x^{n-1} a_0 + i x^{m-1} b_0) \\ &= p u_j + e^{\varphi+P_0} (j - \ell_0) x^j (x^{n-1} a_0 + i x^{m-1} b_0); \end{aligned}$$

concluimos que $e^{\varphi+P_0} (j - \ell_0) x^{j-1} (x^n a_0 + i x^m b_0)$ está na imagem de $\mathcal{L}_p$. Logo (3.12) segue de (3.14). $\square$

Afirmamos que para tratar os casos nos quais (3.7) ou (3.8) falham, a resolubilidade de (3.3) é reduzida ao caso em que f é flat em Σ . De fato, sob as hipóteses da Proposição 3.3, existe $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que $g \doteq \mathcal{L}_p v - f$ é flat em Σ . Logo, se $\mathcal{L}_p u = g$ tem solução de classe C^∞ então $w \doteq u - v$ é de classe C^∞ e satisfaz

$$\mathcal{L}_p w = \mathcal{L}_p(u - v) \mathcal{L}_p u - \mathcal{L}_p v = g - g + f$$

$$= f.$$

O próximo resultado, cuja demonstração é uma adaptação daquela da Proposição 5.2 em [4], permite simplificar o termo de ordem zero do nosso operador.

Proposição 3.4. *Seja $\mathcal{L}_p$ dado por (3.2) e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ dados por (3.4). A equação*

$$Lv = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) v + h, \quad r = \min\{n, m\}, \quad (3.48)$$

tem uma solução $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ para cada h flat em Σ se, e somente se, (3.3) tem uma solução $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ para cada f flat em Σ .

Demonstração. Usando fórmula de Taylor podemos escrever

$$p(x, t) = \sum_{j=0}^{r-1} p_j(t) x^j + x^r \chi(x, t),$$

com $\chi \in C^\infty(A_\epsilon)$.

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{p}_j(t) &\doteq p_j(t) - \lambda_j, \quad j = 0, \dots, r-1, \\ \tilde{P}_j(t) &\doteq \int_0^t \tilde{p}_j(\sigma) d\sigma, \quad j = 0, \dots, r-1 \end{aligned}$$

e

$$\tilde{Q}_{r-1}(x, t) \doteq \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{P}_j(t) x^j.$$

Também, para cada $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , definamos

$$g \doteq f e^{-\tilde{Q}_{r-1}}.$$

Note que g é flat e que $\tilde{P}_0(t), \dots, \tilde{P}_{r-1}(t)$ são 2π -periódicas.

Afirmamos que u é solução de $\mathcal{L}_p u = f$ se, e somente se,

$$w(x, t) \doteq u(x, t) e^{-\tilde{Q}_{r-1}(x, t)},$$

é solução de

$$Lw = g + (p - L(\tilde{Q}_{r-1}))w. \quad (3.49)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_p u &= f \iff \\
Lu &= pu + f \iff \\
f + pwe^{\tilde{Q}_{r-1}} &= L(we^{\tilde{Q}_{r-1}}) = Lwe^{\tilde{Q}_{r-1}} + L(\tilde{Q}_{r-1})we^{\tilde{Q}_{r-1}} \iff \\
g + pw &= Lw + L(\tilde{Q}_{r-1})w \iff \\
Lw &= g + (p - L(\tilde{Q}_{r-1}))w.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
p - L(\tilde{Q}_{r-1}) &= p(x, t) - \sum_{j=0}^{r-1} \tilde{p}_j(t)x^j - x^r \{x^{n-r}a_0(x) + ix^{m-r}b_0(x)\} \sum_{\nu=1}^{r-1} \nu \tilde{P}_\nu(t)x^{\nu-1} \\
&= \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j + p^\#(x, t),
\end{aligned}$$

sendo

$$p^\#(x, t) = x^r \{ \chi(x, t) - i[x^{n-r}a_0(x) + ix^{m-r}b_0(x)] \sum_{\nu=1}^{r-1} \nu P_\nu(t)x^{\nu-1} \}.$$

Note que $p^\#(x, t)$ satisfaz

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j p^\#}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r-1.$$

Logo pelo Teorema 1.8 podemos encontrar $\varphi \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que $L\varphi = p^\#$ em uma vizinhança de Σ . Seja $v = we^{-\varphi}$ e $h = ge^{-\varphi}$. Então, (3.49) é equivalente a

$$Lv = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) v + h.$$

Note que a função $h = fe^{-\varphi - \tilde{Q}_{r-1}}$ é flat em Σ se, e somente se, f é flat em Σ . □

No que segue vamos nos concentrar no estudo da resolubilidade da equação

$$Lu = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) u + f,$$

com f flat em Σ .

Começamos com dois lemas técnicos:

Lema 3.5. *Assuma que (3.7) ou (3.8) falha. Defina o inteiro j_0 como segue:*

(i) *se $\Re(\lambda_j) = 0$ para cada $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = r-1$;*

(ii) *se $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq r-1} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$.*

Suponha que $m-n \leq j_0$, que $0 < x < \epsilon$ e que $0 < y < \epsilon$. Dado $k \in \mathbb{Z}$, se $(y-x)D_k > 0$, então existe $M > 0$ e existe $\ell > 1$ tais que

$$\left| \frac{e^{-ik \int_x^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s)ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_x^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s)ds}}{e^{-ik \int_y^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s)ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_y^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s)ds}} \right| \leq e^{\frac{-D_k M}{(\ell-1)} \left(\frac{1}{x^{\ell-1}} - \frac{1}{y^{\ell-1}} \right)},$$

sendo

$$D_k = \Re(\lambda_{j_0}) [x^{n-m+j_0} a_0(x)]_{x=0} + (\Im(\lambda_0) - k) b_0(0).$$

Demonstração. Defina

$$g_k(x) \doteq \frac{1}{D_k} \left[\left(\sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) x^{j-m+n} \right) \frac{a_0}{b_0}(x) - k + \Im(\lambda_0) + \sum_{j=1}^{r-1} \Im(\lambda_j) x^j \right] x^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2 + b^2}(x).$$

Então, procedendo como na prova da Proposição 2.3 (veja (2.21)), para $x > 0$, obtemos

$$|e^{-ik \int_x^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s)ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_x^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s)ds}| = e^{-D_k \int_x^\epsilon \frac{1}{s^\ell} g_k(s)ds}, \quad (3.50)$$

sendo

$$\ell = \begin{cases} m, & \text{if } 2 \leq m < n \\ 2n - m, & \text{if } n \leq m < 2n - 1 \end{cases}.$$

Como $x^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2+b^2} \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ e $[x^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2+b^2}(x)]_{x=0} > 0$, existem $\alpha', \beta' > 0$ tais que

$$\alpha' \leq x^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2 + b^2}(x) \leq \beta', \quad (3.51)$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Defina

$$g(x) \doteq \left[\left(\sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) x^{j-m+n} \right) \frac{a_0}{b_0}(x) + \sum_{j=1}^{r-1} \Im(\lambda_j) x^j \right] x^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2 + b^2}(x).$$

Note que $g \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ e é limitada. Logo, existe $M' > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M'. \quad (3.52)$$

Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|D_k| \geq \frac{4b_0(0)M'}{\alpha'} \quad (3.53)$$

e

$$\frac{1}{2b_0(0)} \leq \frac{\Im(\lambda_0) - k}{D_k} \leq \frac{2}{b_0(0)}, \quad (3.54)$$

para $|k| > n_0$.

Logo, de (3.52) e (3.53), obtemos

$$\frac{-\alpha'}{4b_0(0)} \leq \frac{g(x)}{D_k} \leq \frac{\alpha'}{4b_0(0)},$$

para $|k| > n_0$.

Além disso, de (3.51) e (3.54), obtemos

$$\frac{\alpha'}{2b_0(0)} \leq \alpha' \frac{\Im(\lambda_0) - k}{D_k} \leq \frac{\Im(\lambda_0) - k}{D_k} x^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2 + b^2}(x) \leq \beta' \frac{\Im(\lambda_0) - k}{D_k} \leq \frac{2\beta'}{b_0(0)},$$

para $|k| > n_1$.

Logo, assumindo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, para $\alpha = \frac{\alpha'}{4b_0(0)}$ e $\beta = \frac{2\beta'}{b_0(0)} + \frac{\alpha'}{4b_0(0)}$ temos

$$\alpha \leq g_k(x) \leq \beta,$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$, já que

$$g_k(x) = \frac{g(x)}{D_k} + \frac{\Im(\lambda_0) - k}{D_k} x^{m+\ell} \frac{b_0}{a^2 + b^2}(x).$$

Portanto, de (3.50), se $(y - x)D_k > 0$ então

$$\left| \frac{e^{-ik \int_x^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s)ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_x^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s)ds}}{e^{-ik \int_y^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s)ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_y^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s)ds}} \right| = e^{-D_k \int_x^y \frac{1}{s^\ell} g_k(s)ds} \leq e^{\frac{-(D_k)\alpha}{(\ell-1)} \left(\frac{1}{x^{\ell-1}} - \frac{1}{y^{\ell-1}} \right)}.$$

□

Lema 3.6. *Assuma que (3.7) ou (3.8) falha. Defina o inteiro j_0 como segue:*

(i) se $\Re(\lambda_j) = 0$ para cada $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = r-1$;

(ii) se $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq r-1} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$.

Suponha que $m-n \leq j_0$ e que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k = \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$. Então, para $h \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$, flat em $x = 0$, existe $v \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ tal que

$$ikv(x) + (a + ib)(x)v'(x) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) v(x) + h(x) \quad (3.55)$$

em uma vizinhança de $x = 0$.

Demonstração. Primeiro vamos nos concentrar na região $x > 0$.

Como já vimos anteriormente,

$$w(x) = e^{ikC_{0+}(x) - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_{j+}(x)},$$

é uma solução de

$$(a + ib)(x)w'(x) = ikw(x) - \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) w(x),$$

em $I_\epsilon^+ = (0, \epsilon)$.

Então, para $x > 0$, a equação

$$ikv(x) + (a + ib)(x)v'(x) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) v(x) + h(x)$$

fornece

$$[v(x)w(x)]' = w(x) \frac{h}{a + ib}(x).$$

Logo, para cada $x > 0$, se existe $j_1 \in \{0, 1, \dots\}$ tal que $y^{j_1}w(y)$ é limitada em I_ϵ^+ , então determinamos

$$v(x) = \int_0^x \frac{w(y)}{w(x)} \frac{h}{a + ib}(y) dy; \quad (3.56)$$

se não existe $j_1 \in \{0, 1, \dots\}$ tal que $y^{j_1}w(y)$ é limitada em I_ϵ^+ , então determinamos

$$v(x) = - \int_x^\epsilon \frac{w(y)}{w(x)} \frac{h}{a + ib}(y) dy. \quad (3.57)$$

Agora, vamos estudar $|w|$.

Note que

$$\begin{aligned} & \Re \left(ikC_0(x) - \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_j(x) \right) \\ &= \int_x^\epsilon \left[\left(\sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) y^{j-m+n} \right) \frac{a_0}{b_0}(y) - k + \Im(\lambda_0) + \sum_{j=1}^{r-1} \Im(\lambda_j) y^j \right] \frac{b}{a^2 + b^2}(y) dy. \end{aligned}$$

Como $k = \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$, existe $\ell_0 \in \mathbb{Z}_+$ e existe $\chi \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ de forma que

$$\sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) y^{j+n-m} \frac{a_0}{b_0}(y) - k + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j) y^j = y^{\ell_0} \chi(y).$$

Se a ordem de anulamento de $\sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) y^{j+n-m} \frac{a_0}{b_0}(y) - k + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j) y^j$ em $y = 0$ é finita, vamos assumir que tal ordem é ℓ_0 ; se $\sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) y^{j+n-m} \frac{a_0}{b_0}(y) - k + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j) y^j$ é flat em $y = 0$, tomamos ℓ_0 tal que

$$\ell_0 + 1 \geq \ell \doteq \begin{cases} m, & \text{se } 2 \leq m < n \\ 2n - m, & \text{se } n \leq m < 2n - 1 \end{cases}.$$

O estudo de $|w|$ será dividido em três casos:

- (a1) $\ell - \ell_0 \leq 1$;
- (a2) $\ell - \ell_0 > 1$ e $\chi(0) < 0$;
- (a3) $\ell - \ell_0 > 1$ e $\chi(0) > 0$.

No que segue, vamos demonstrar que se (a1) ou (a2) ocorrem, então existe $j_1 \in \{0, 1, \dots\}$, tal que $y^{j_1} w(y)$ é limitada em I_ϵ^+ .

Quando (a1) ocorre, para $0 < y < \epsilon$, temos

$$\begin{aligned} |w(y)| &= e^{\int_y^\epsilon \left(\sum_{j=j_0}^{r-1} \Re(\lambda_j) s^{j+n-m} \frac{a_0}{b_0}(s) - k + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j) s^j \right) \frac{b_0}{s^{2n-m} a_0^2 + s^m b_0^2}(s) ds} \\ &= e^{\int_y^\epsilon s^{\ell_0 - \ell} \chi(s) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell} a_0^2 + s^{m-\ell} b_0^2}(s) ds}. \end{aligned}$$

Como $\chi(s) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell} a_0^2 + s^{m-\ell} b_0^2}(s) \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$, existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|w(y)| \leq e^{M_2 \int_y^\epsilon s^{\ell_0 - \ell} ds}.$$

Logo, quando (a1) ocorre, para cada $0 < y < \epsilon$ temos

- $|w(y)| \leq e^{\frac{M_2}{(\ell_0 - \ell + 1)}} (\epsilon^{\ell_0 - \ell + 1} - y^{\ell_0 - \ell + 1}) \leq e^{\frac{M_2}{\ell_0 - \ell + 1}} \epsilon^{\ell_0 - \ell + 1}, \quad \text{se } \ell_0 - \ell > -1;$
- $|w(y)| \leq e^{\ln(\frac{\epsilon}{y})^{M_2}} = \left(\frac{\epsilon}{y}\right)^{M_2}, \quad \text{se } \ell_0 - \ell = -1.$

Defina

$$j_1 \doteq \begin{cases} 0, & \text{se } \ell - \ell_0 < 1; \\ M_2, & \text{se } \ell - \ell_0 = 1 \end{cases}.$$

Logo, concluímos que $y^{j_1} w(y)$ é limitada em I_ϵ^+ .

Agora, suponha que (a2) seja verdadeira. Para $0 < y < \epsilon$, temos

$$\begin{aligned} |w(y)| &= e^{\int_y^\epsilon \left(\sum_{j=0}^{r-1} \Re(\lambda_j) s^{j+n-m} \frac{a_0}{b_0}(s) - k + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j) s^j \right) \frac{b_0}{s^{2n-m} a_0^2 + s^m b_0^2}(s) ds} \\ &= e^{\int_y^\epsilon \frac{1}{s^{\ell-\ell_0}} \chi(s) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell} a_0^2 + s^{m-\ell} b_0^2}(s) ds}. \end{aligned}$$

Como $\chi(s) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell} a_0^2 + s^{m-\ell} b_0^2}(s) \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ e $\chi(0) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell} a_0^2 + s^{m-\ell} b_0^2}(0) < 0$, supondo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $M_3 > 0$ tal que

$$|w(y)| \leq e^{-M_3 \int_y^\epsilon \frac{1}{s^{\ell-\ell_0}} ds} = e^{\frac{-M_3}{(\ell-\ell_0-1)}} \left(\frac{1}{y^{\ell-\ell_0-1}} - \frac{1}{\epsilon^{\ell-\ell_0-1}} \right) \leq 1.$$

Logo, concluímos que $w(y)$ é limitada em I_ϵ^+ quando (a2) ocorre.

Agora, suponha que (a3) seja verdadeira. Procedemos como no caso em que (a2) ocorre, para obter $M_4 > 0$ tal que

$$|w(y)| \geq e^{M_4 \int_y^\epsilon \frac{1}{s^{\ell-\ell_0}} ds} = e^{\frac{M_4}{(\ell-\ell_0-1)}} \left(\frac{1}{y^{\ell-\ell_0-1}} - \frac{1}{\epsilon^{\ell-\ell_0-1}} \right).$$

Portanto, para todo $j \in \{0, 1, \dots\}$, $|y^j w(y)| \rightarrow \infty$ quando $y \rightarrow 0$.

Logo, quando (a3) ocorre, concluímos que não existe $j_1 \in \{0, 1, \dots\}$ tal que $y^{j_1} w(y)$ seja limitada em I_ϵ^+ .

No que segue vamos mostrar que $|v(x)| = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+$.

Primeiro, vamos analisar os casos nos quais v é dado por (3.56). Estes casos ocorrem, se e somente se, (a3) não ocorre.

Suponha que (a3) não ocorre. Para $x > 0$, temos

$$v(x) = \int_0^x \frac{w(y)}{w(x)} \frac{h}{a + ib}(y) dy$$

$$= \int_0^x e^{-ik(C_{0+}(x)-C_{0+}(y))+\sum_{j=0}^{r-1}\lambda_j(C_{j+}(x)-C_{j+}(y))} \frac{h}{a+ib}(y)dy.$$

Quando (a1) ocorre, se $\ell - \ell_0 < 1$ então, para $x > 0$, encontramos $M_2 \in \mathbb{Z}_+$ e M'_2 real positivo de forma que

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \int_0^x e^{\int_y^x [(\sum_{j=0}^{r-1} \Re(\lambda_j)s^j) \frac{a}{b}(s) - k + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j)s^j] \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &\leq \int_0^x e^{\int_y^x s^{\ell_0-\ell} \chi(s) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell}a_0^2+s^{m-\ell}b_0^2}(s)ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &\leq \int_0^x e^{M_2 \int_y^x s^{\ell_0-\ell}(s)ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &= \int_0^x e^{\frac{M_2}{(\ell_0-\ell+1)}(x^{\ell_0-\ell+1}-y^{\ell_0-\ell+1})} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &\leq M'_2 \int_0^x \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+; \end{aligned}$$

se $\ell - \ell_0 = 1$, para $x > 0$, temos

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \int_0^x e^{M_2 \int_y^x s^{\ell_0-\ell}(s)ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &= \int_0^x \left(\frac{x}{y} \right)^{M_2} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy = x^{M_2} \int_0^x \left(\frac{1}{y} \right)^{M_2} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Quando (a2) ocorre, para $x > 0$, encontramos M_3 real positivo de forma que

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \int_0^x e^{\int_y^x [(\sum_{j=0}^{r-1} \Re(\lambda_j)s^j) \frac{a}{b}(s) - k + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j)s^j] \frac{b}{a^2+b^2}(s)ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &\leq \int_0^x e^{\int_y^x s^{\ell_0-\ell} \chi(s) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell}a_0^2+s^{m-\ell}b_0^2}(s)ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &\leq \int_0^x e^{-M_3 \int_y^x \frac{1}{s^{\ell-\ell_0}}(s)ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &= \int_0^x e^{\frac{-M_3}{(\ell-\ell_0-1)}\left(\frac{1}{y^{\ell-\ell_0-1}} - \frac{1}{x^{\ell-\ell_0-1}}\right)} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy \\ &\leq \int_0^x \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y)dy = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Agora, vamos analisar o caso no qual v é dado por (3.57). Este caso ocorre, se e somente se, (a3) ocorre.

Suponha que (a3) ocorre. Para $x > 0$, temos

$$\begin{aligned} v(x) &= - \int_x^\epsilon \frac{w(y)}{w(x)} \frac{h}{a+ib}(y) dy \\ &= - \int_x^\epsilon e^{-ik(C_{0+}(x)-C_{0+}(y))+\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j(C_{j+}(x)-C_{j+}(y))} \frac{h}{a+ib}(y) dy. \end{aligned}$$

Portanto, quando (a3) ocorre, para $x > 0$, temos

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \int_x^\epsilon e^{\int_y^x [(\sum_{j=0}^{r-1} \Re(\lambda_j) s^j) \frac{a}{b}(s) + (-k + \sum_{j=0}^{r-1} \Im(\lambda_j) s^j) \frac{b}{a^2+b^2}(s)] ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy \\ &= \int_x^\epsilon e^{\int_y^x \left(\sum_{j=0}^{r-1} \Re(\lambda_j) s^{j+n-m} \frac{a_0}{b_0}(s) - k + \sum_{j=N}^{r-1} \Im(\lambda_j) s^j \right) \frac{b_0}{s^{2n-m} a_0^2 + s^m b_0^2}(s) ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy \\ &= \int_x^\epsilon e^{-\int_x^y \frac{1}{s^{\ell-\ell_0}} \chi(s) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell} a_0^2 + s^{m-\ell} b_0^2}(s) ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy. \end{aligned}$$

Como $\chi(s) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell} a_0^2 + s^{m-\ell} b_0^2}(s) \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ e $\chi(0) \frac{b_0}{s^{2n-m-\ell} a_0^2 + s^{m-\ell} b_0^2}(0) > 0$, existe M_4 real positivo tal que

$$|v(x)| \leq \int_x^\epsilon e^{-M_4 \int_x^y \frac{1}{s^{\ell-\ell_0}}(s) ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy.$$

Logo, se $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$, então temos

$$|v(x)| \leq \int_x^{2x} e^{-M_4 \int_x^y \frac{1}{s^{\ell-\ell_0}}(s) ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy + \int_{2x}^\epsilon e^{-M_4 \int_x^y \frac{1}{s^{\ell-\ell_0}}(s) ds} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy.$$

Para $y \geq 2x$, temos

$$\frac{1}{y^{\ell-\ell_0-1}} - \frac{1}{x^{\ell-\ell_0-1}} \leq \frac{-(2^{\ell-\ell_0-1} - 1)}{2^{\ell-\ell_0-1}} \frac{1}{x^{\ell-\ell_0-1}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq \int_x^{2x} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy + \int_{2x}^\epsilon e^{\frac{-M_4(2^{\ell-\ell_0-1}-1)}{2^{\ell-\ell_0-1}(\ell-\ell_0-1)} \frac{1}{x^{\ell-\ell_0-1}}} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy \\ &\leq \int_x^{2x} \left| \frac{h}{a+ib} \right| (y) dy + M'_4 e^{\frac{-M_4(2^{\ell-\ell_0-1}-1)}{2^{\ell-\ell_0-1}(\ell-\ell_0-1)} \frac{1}{x^{\ell-\ell_0-1}}} = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

A análise das soluções e de suas estimativas, na região $x < 0$, segue de modo análogo à da região $x > 0$.

Podemos provar estimativas análogas para as derivadas $v^{(\nu)}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, do qual segue que $v \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$.

□

Proposição 3.7. *Assuma que (3.7) ou (3.8) falha. Defina o inteiro j_0 como segue:*

- (i) se $\Re(\lambda_j) = 0$ para cada $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = r-1$;
- (ii) se $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq r-1} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$.

Seja L dado por (3.1). Se $m-n \leq j_0$, então a equação $Lv = (\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j)v + h$ tem uma solução $v \in C^\infty(A_\epsilon)$, em uma vizinhança de Σ , para cada $h \in C^\infty(A_\epsilon)$ flat em Σ .

Demonstração. Seja $h \in C^\infty(A_\epsilon)$ flat em Σ . Vamos procurar por $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de

$$Lv = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) v + h \quad (3.58)$$

em uma vizinhança de Σ .

Usando série parcial de Fourier, podemos escrever

$$v(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k(x) e^{ikt} \quad \text{e} \quad h(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_k(x) e^{ikt}.$$

Logo, se v é solução de (3.58), temos que $\hat{v}_k$ é uma solução de

$$ik\hat{v}_k(x) + (a+ib)(x)(\hat{v}_k)'(x) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) \hat{v}_k(x) + \hat{h}_k(x), \quad (3.59)$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$.

No que segue, para cada $k \in \mathbb{Z}$, vamos procurar por $\hat{v}_k \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ solução de (3.59) e, então, vamos mostrar que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{v}_k(x) e^{ikt}$ converge na topologia C^∞ em uma vizinhança de Σ .

Considere a equação homogênea, associada a (3.59), dada por

$$(a+ib)(x)(w_k)'(x) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j - ik \right) w_k(x). \quad (3.60)$$

Para $x > 0$, encontramos

$$w_k(x) = e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_{j+}(x)}.$$

Para $x < 0$, encontramos

$$w_k(x) = e^{-ikC_{0-}(x) + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j C_{j-}(x)}.$$

Portanto, para $x \neq 0$, de (3.59) obtemos

$$\begin{aligned} (a + ib)(\widehat{v}_k w_k^{-1})' &= \widehat{v}_k \left(-\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j + ik \right) w_k^{-1} + w_k^{-1} \left[\left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j - ik \right) \widehat{v}_k + \widehat{h}_k \right] \\ &= w_k^{-1} \widehat{h}_k. \end{aligned}$$

Logo, para $x \neq 0$, temos

$$(\widehat{v}_k w_k^{-1})' = w_k^{-1} \frac{\widehat{h}_k}{a + ib}.$$

Agora, vamos nos concentrar na região $x > 0$.

Seja $k \in \mathbb{Z}$. Se $k > \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$, então, podemos proceder como na prova da Proposição 2.3, para concluir que $|w_k^{-1}|$ é limitada em $(0, \epsilon)$ (veja (2.23)).

Logo, para $k > \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$, encontramos

$$\widehat{v}_k(x) = \int_0^x \frac{w_k(x)}{w_k(y)} \frac{\widehat{h}_k}{a + ib}(y) dy, \quad (3.61)$$

Para $k < \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$, encontramos

$$\widehat{v}_k(x) = - \int_x^\epsilon \frac{w_k(x)}{w_k(y)} \frac{\widehat{h}_k}{a + ib}(y) dy. \quad (3.62)$$

Para garantir a convergência da série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k(x) e^{ikt}$ em uma vizinhança de Σ , na topologia C^∞ , vamos determinar estimativas para $|\widehat{v}_k(x)|$ utilizando o Lema 3.5.

Faremos isto, supondo inicialmente que $\Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0} \neq k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Para $x > 0$ e para cada $k > \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$, de (3.61) obtemos

$$|\widehat{v}_k(x)| \leq \int_0^x \left| \frac{e^{-ik \int_x^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s) ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_x^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s) ds}}{e^{-ik \int_y^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s) ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_y^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s) ds}} \right| \left| \frac{\widehat{h}_k}{a + ib} \right| (y) dy.$$

Logo, pelo Lema 3.5, existe $M > 0$ e existe $\ell > 1$ tais que

$$|\widehat{v}_k(x)| \leq \int_0^x e^{-\frac{D_k M}{(\ell-1)}\left(\frac{1}{x^{\ell-1}} - \frac{1}{y^{\ell-1}}\right)} \left| \frac{\widehat{h}_k}{a+ib} \right| (y) dy = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+,$$

sendo

$$D_k = \Re(\lambda_{j_0}) [x^{n-m+j_0} a_0(x)]_{x=0} + (\Im(\lambda_0) - k) b_0(0).$$

Note que $D_k M < 0$ quando $k > \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$.

Para $0 < x < \frac{\epsilon}{2}$ e para cada $k < \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$, de (3.62) obtemos

$$|\widehat{v}_k(x)| \leq \int_x^\epsilon \left| \frac{e^{-ik \int_x^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s) ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_x^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s) ds}}{e^{-ik \int_y^\epsilon \frac{1}{a+ib}(s) ds + \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j \int_y^\epsilon \frac{s^j}{a+ib}(s) ds}} \right| \left| \frac{\widehat{h}_k}{a+ib} \right| (y) dy.$$

Logo, pelo Lema 3.5, existe $M > 0$ e existe $\ell > 1$ tais que

$$\begin{aligned} |\widehat{v}_k(x)| &\leq \int_x^\epsilon e^{\frac{D_k M}{(\ell-1)}\left(\frac{1}{y^{\ell-1}} - \frac{1}{x^{\ell-1}}\right)} \left| \frac{\widehat{h}_k}{a+ib} \right| (y) dy \\ &\leq \int_x^{2x} \left| \frac{\widehat{h}_k}{a+ib} \right| (y) dy + \int_{2x}^\epsilon e^{\frac{D_k M}{(\ell-1)}\left(\frac{1}{y^{\ell-1}} - \frac{1}{x^{\ell-1}}\right)} \left| \frac{\widehat{h}_k}{a+ib} \right| (y) dy, \end{aligned}$$

já que $D_k M > 0$ quando $k < \Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0}$.

Para $y \geq 2x$, temos

$$\frac{1}{y^{\ell-1}} - \frac{1}{x^{\ell-1}} \leq \frac{-(2^{\ell-1} - 1)}{2^{\ell-1}} \frac{1}{x^{\ell-1}}.$$

Portanto,

$$|\widehat{v}_k(x)| \leq \int_x^{2x} \left| \frac{\widehat{h}_k}{a+ib} \right| (y) dy + M' e^{\frac{-D_k M(2^{\ell-1}-1)}{2^{\ell-1}(\ell-1)} \frac{1}{x^{\ell-1}}} = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+.$$

Agora, vamos supor que $\Im(\lambda_0) + \Re(\lambda_{j_0}) \left[x^{n-m+j_0} \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \right]_{x=0} = k_1$ para algum $k_1 \in \mathbb{Z}$. Neste caso procedemos como anteriormente para obter $\widehat{v}_k$ e estimativas para $|\widehat{v}_k|$ quando $k \neq k_1$. Agora, aplicando o Lema 3.6 obtemos $\widehat{v}_{k_1}(x) \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ tal que

$$ik_1 \widehat{v}_{k_1}(x) + (a+ib)(x)(\widehat{v}_{k_1})'(x) = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) \widehat{v}_{k_1}(x) + \widehat{h}_{k_1}(x).$$

Para finalizar a análise das soluções e de suas estimativas, devemos observar que o processo utilizado na região $x > 0$, procede de modo análogo para a região $x < 0$.

Em todos os caso, podemos provar estimativas análogas para as derivadas $\widehat{v}_k^{(\nu)}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, do qual segue que para cada $k \in \mathbb{Z}$, a função $\widehat{v}_k$ e suas derivadas são rapidamente decrescentes quando $|k| \rightarrow \infty$. Portanto, a sequência $(\widehat{v}_k)$ define uma função suave v , a qual é solução de $Lv = (\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j)v + h$ em uma vizinhança de Σ . $\square$

3.2 Não existência de solução

Nesta seção apresentamos condições sobre p e f , sob as quais não é possível obter solução C^∞ da equação

$$\mathcal{L}_p u = f$$

em uma vizinhança de Σ , sendo $\mathcal{L}_p$ definido em (3.2) e $p, f \in C^\infty(A_\epsilon)$.

Pela afirmação feita na página 39, o estudo da resolubilidade de $\mathcal{L}_p u = f$ em uma vizinhança de Σ é reduzido ao caso em que f é flat em Σ . Logo, usando a Proposição 3.4 reduzimos o estudo da resolubilidade da equação $\mathcal{L}_p u = f$ em uma vizinhança de Σ ao estudo da resolubilidade da equação

$$Lu = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) u + f$$

em uma vizinhança de Σ , com f flat em Σ .

Na seção 3.1 analisamos os casos em que $m - n \leq j_0 = \min_{0 \leq j \leq r-1} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$, então resta-nos supor que $m - n > j_0$.

Note que:

- $m \leq n \implies m - n \leq j_0$.
- $n < m < 2n - 1 \implies r = n$ e então $m - n < n - 1$; logo se $j_0 = n - 1$ então $m - n < j_0$.

Portanto nesta seção vamos supor que

- $n < m < 2n - 1$;
- $j_0 \leq n - 2 (= r - 2)$; em particular, $N \leq n - 2$, pois $N \leq j_0$.
- $m - n > j_0$.

Iremos verificar que sob as hipóteses acima existe $f \in C^\infty(A_\epsilon)$ flat em Σ para a qual não existe $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de $Lu = (\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j)u + f$.

Proposição 3.8. *Seja $\mathcal{L}_p$ dado por (3.2) e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ dados por (3.4). Assuma que $n < m < 2n - 1$. Seja $\mathcal{F} \subset C^\infty(A_\epsilon)$ definido por:*

- (1) se $\lambda_0 \notin i\mathbb{Z}$ definamos $\mathcal{F} = C^\infty(A_\epsilon)$;
- (2) se $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$ definamos $\mathcal{F}$ o subespaço de $C^\infty(A_\epsilon)$ de todas as funções f satisfazendo (3.13), sendo N o menor inteiro satisfazendo $1 \leq N \leq n - 2$, tal que $\lambda_N \neq 0$.

Se, para cada $f \in \mathcal{F}$, $\mathcal{L}_p u = f$ tem solução $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ em uma vizinhança de Σ , então existe $\delta_0 > 0$ tal que $\mathcal{L}_p w = f$ tem uma solução $u \in C^\infty(A_\epsilon)$, em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$, para cada $f \in \mathcal{F}$.

Demonstração. Se $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$ então defina

$$Q_{N-1}(x, t) \doteq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{j!} \left(\int_0^t \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(0, \sigma) d\sigma \right) x^j.$$

Para cada $j \in \{0, 1, \dots\}$, considere a distribuição $1 \otimes \delta^{(j)} \in \mathcal{E}'(A_\epsilon)$, dada por

$$\langle 1 \otimes \delta^{(j)}, f \rangle \doteq \int_0^{2\pi} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, \sigma) d\sigma, \quad f \in C^\infty(A_\epsilon).$$

Defina

$$S \doteq \begin{cases} \{0\}, & \text{se } \lambda_0 \notin i\mathbb{Z}, \\ \text{span}\langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)}), j = 0, \dots, N-1 \rangle, & \text{se } \lambda_0 \in i\mathbb{Z}. \end{cases},$$

e

$$S^\circ \doteq \{f \in C^\infty(A_\epsilon); \langle u, f \rangle = 0, \forall u \in S\}.$$

Note $S^\circ \subset C^\infty(A_\epsilon)$ é um subespaço vetorial fechado, pois $S^\circ = \bigcap_{u \in S} u^{-1}(0)$. Portanto, S° é um subespaço vetorial fechado do espaço de Fréchet $C^\infty(A_\epsilon)$; consequentemente, também é um espaço de Fréchet (veja, por exemplo, página 85 de [13]).

Suponha que para cada $f \in \mathcal{F}$, $\mathcal{L}_p w = f$ tem solução $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ em alguma vizinhança de Σ , vamos repetir os argumentos usados na página 794 de [1] (veja, também, e [6], [2] e [3]); isto é, usando o Teorema de Baire e o Teorema da Aplicação Aberta provaremos que existe $\delta_0 > 0$ tal que, dada $f \in S^\circ$, existe $w \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de $\mathcal{L}_p w = f$ em alguma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$.

Para cada $\ell \in \mathbb{Z}_+$, defina

$$F_\ell = \{(f, u) \in S^\circ \times C^\infty(\overline{\mathcal{U}}_\ell); \mathcal{L}_p u = f \text{ em } \mathcal{U}_\ell\},$$

sendo $\mathcal{U}_\ell = (-\delta_\ell, \delta_\ell) \times S^1$ e $\delta_\ell \searrow 0$, com $\delta_1 = \epsilon/2$.

Note que, para cada $\ell \in \mathbb{Z}_+$, F_ℓ é um espaço de Fréchet. De fato, como o operador $\mathcal{L}_p$ é linear e contínuo na topologia C^∞ , F_ℓ é um subespaço vetorial fechado do espaço de Fréchet $S^\circ \times C^\infty(\overline{\mathcal{U}}_\ell)$.

Defina

$$\begin{aligned} \pi_\ell : F_\ell &\rightarrow S^\circ \\ (f, u) &\mapsto f \end{aligned} ,$$

a projeção sobre o primeiro fator.

Afirmamos que

$$\bigcup_{\ell} \pi_\ell(F_\ell) = S^\circ.$$

De fato, a inclusão $\bigcup_{\ell} \pi_\ell(F_\ell) \subset S^\circ$ segue da definição de F_ℓ e de π_ℓ . Para obter a inclusão $S^\circ \subset \bigcup_{\ell} \pi_\ell(F_\ell)$ observe que, sob nossas hipóteses, para cada $f \in S^\circ$ existem $\epsilon_0 > 0$ e $u \in C^\infty$ solução de $\mathcal{L}_p u = f$ na vizinhança $\mathcal{U}_0 = (-\epsilon_0, \epsilon_0) \times S^1 \supset \overline{\mathcal{U}}_{\ell_1}$, para algum $\ell_1 \in \mathbb{Z}_+$, já que $S^\circ = \mathcal{F}$. Portanto $f = \pi_{\ell_1}(f, u) \in \pi_{\ell_1}(F_{\ell_1}) \subset \bigcup_{\ell} \pi_\ell(F_\ell)$.

Como a projeção é contínua, para cada $\ell \in \mathbb{Z}_+$, $\pi_\ell(F_\ell)$ é fechado no espaço de Fréchet S° . Portanto, pelo Teorema de Baire (veja, por exemplo, página 42 de [11]), $\text{int}(\pi_{\ell_0}(F_{\ell_0})) \neq \emptyset$ para algum $\ell_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta (veja, por exemplo, página 47 de [11]), concluímos que $\pi_{\ell_0}(F_{\ell_0}) = S^\circ$. Isto significa que, para $\delta_0 \doteq \delta_{\ell_0}$, tem-se

$$\mathcal{L}_p(C^\infty([-\delta_0, \delta_0] \times S^1)) \supset (S^\circ \cap C^\infty([-\delta_0, \delta_0] \times S^1)). \quad (3.63)$$

Por (3.63), concluímos que $\mathcal{L}_p w = f$ tem uma solução $u \in C^\infty(A_\epsilon)$, em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$, para cada $f \in \mathcal{F}$. $\square$

Lema 3.9. *Seja $\mathcal{L}_p$ dado por (3.2) e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ dados por (3.4). Assuma que $n < m < 2n - 1$ e que $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, n-2\}$ e, além disso, $m - n > j_0 = \min_{0 \leq j \leq n-2} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$. Se, para cada $g \in C^\infty(A_\epsilon)$ e flat em Σ , $Lu = (\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j)u + g$ tem solução C^∞ em uma vizinhança de Σ , então existe $\delta_0 > 0$ tal que $Lw = (\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j)w + g$ tem solução $w \in C^\infty(A_\epsilon)$, em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$, para cada $g \in C^\infty(A_\epsilon)$ e flat em Σ .*

Demonstração. Por hipótese, para cada $g \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , existe $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que

$$Lu = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) u + g$$

em uma vizinhança de Σ .

Daí, pela Proposição 3.4, para cada $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , existe $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que

$$\mathcal{L}_p u = f$$

em uma vizinhança de Σ .

Consequentemente, pela Proposição 3.3 e 3.8, temos que para cada $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , existe $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que

$$\mathcal{L}_p w = f$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$.

Portanto, segue da demonstração da Proposição 3.4 que para cada $g \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , existe $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de

$$Lv = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) v + g$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$. □

Lema 3.10. *Seja $\delta_0 > 0$ dado pelo Lema 3.9 e seja $x_0 \in (0, \delta_0)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja*

$$g_k : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$g_k(x) = \varphi_1(x) \cdot (a + ib)(x) \cdot c_k \cdot \varphi_2(x),$$

sendo (c_k) uma sequência de números reais positivos rapidamente decrescente, $\varphi_1 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

e $\varphi_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} e^{-i \left(\int_x^{x_0} (-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) s^j) \frac{a}{a^2+b^2}(s) ds - \int_x^{x_0} (\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) s^j) \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds \right)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

A sequência (g_k) define uma função $g \in C^\infty(A_\epsilon)$ e flat em Σ .

Demonstração. Note que g_k é de classe C^∞ para cada $x \neq 0$.

Agora, considere

$$\varphi_3(x) = \varphi_1(x)(a + ib)(x).$$

Como $\varphi_3(x)$ é flat em $x = 0$, temos que para qualquer função $q(x)$ que se anula de ordem finita em $x = 0$ vale:

$$\frac{\varphi_3^{(j)}}{q}(0) = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+.$$

Assim, para qualquer $s \leq j$ temos $(\varphi_3^{(s)}\varphi_2^{(j-s)})(0^\pm) = 0$.

De fato, existe uma função q que se anula de ordem finita em $x = 0$ tal que $q\varphi_2^{(j-s)} = \varphi_2 \in C^\infty(0, x_0) \cap L^\infty[0, x_0]$, além disso, $\varphi_2(x) \equiv 0$ e $\varphi_3(x) \equiv 0$ em $(-\epsilon, 0)$.

Logo,

$$g_k^{(j)}(0^\pm) = c_k \sum_{s \leq j} \binom{j}{s} (\varphi_3^{(s)}\varphi_2^{(j-s)})(0^\pm) = 0, \quad \text{para cada } j;$$

daí g_k é de classe C^∞ e flat em $x = 0$. Além disso, para cada j fixado,

$$|\widehat{g}_k^{(j)}(x)| \leq \sum_{s \leq j} \binom{j}{s} |\varphi_1^{(s)}\varphi_2^{(j-s)}(x)c_k| \leq \sum_{s \leq j} C_{js} \|\varphi_1^{(s)}q_{j-s}\|_\infty |k|^{j-s} c_k \leq C_j |k|^j c_k,$$

sendo $C_j = \max_{s \leq j} \{C_{js} \|\varphi_1^{(s)}q_{j-s}\|_\infty\}$, e q_{j-s} somatório de derivadas de potências das funções $\frac{a}{a^2 + b^2}(x)$ e $\frac{b}{a^2 + b^2}(x)$. Porém, de (c_k) rapidamente decrescente, temos que dados $\ell, j \in \mathbb{N}$, existe $C' > 0$ tal que $|c_k| \leq \frac{C'}{(1 + |k|)^{\ell+j}}$, $\forall k$, e, portanto,

$$|\widehat{g}_k^{(j)}(x)| \leq \frac{C'_j}{(1 + |k|)^\ell}, \quad \forall k.$$

Desse modo, a função g definida por

$$g(x, t) \doteq \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k(x) e^{ikt}$$

é de classe C^∞ em A_ϵ , e flat em Σ . □

No lema técnico a seguir, destacamos estimativas que são obtidas procedendo como na prova da Proposição 2.4.

Lema 3.11. *Suponha que $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, n-2\}$ e, além disso, $m-n > j_0 = \min_{0 \leq j \leq n-2} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$. Existem $\epsilon_k > 0$ e $\varphi_k \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ tais que*

$$|e^{ikC_{0+}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}| = e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_x^\epsilon \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds}, \quad \text{para todo } x \in (0, \epsilon), \quad (3.64)$$

$$|e^{ikC_{0-}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)}| = e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{-\epsilon}^x \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds}, \quad \text{para todo } x \in (-\epsilon, 0), \quad (3.65)$$

e

$$\frac{1}{2} \leq \varphi_k(s) \leq \frac{3}{2}, \quad \text{para todo } s \in (-\epsilon_k, \epsilon_k).$$

Demonstração. Sob nossas hipóteses, para $x \neq 0$, podemos escrever

$$\Re(kiC_{0\pm}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j\pm}(x)) = \frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_x^{\pm\epsilon} \frac{1}{y^{n-j_0}} \varphi_k(y) dy, \quad (3.66)$$

sendo

$$\begin{aligned} \varphi_k(y) = y^{n-j_0} \frac{a_0(0)}{\Re(\lambda_{j_0})} \left\{ \left(\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) y^j \right) \frac{a}{a^2 + b^2}(y) \right. \\ \left. + \left[(-k + \Im(\lambda_0)) + \sum_{j=1}^{n-1} \Im(\lambda_j) y^j \right] \frac{b}{a^2 + b^2}(y) \right\}. \end{aligned}$$

Note que $\varphi_k \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ e $\varphi_k(0) = 1$; além disso, podemos encontrar $\epsilon_k > 0$ tal que

$$\frac{1}{2} \leq \varphi_k(x) \leq \frac{3}{2}, \quad \text{se } x \in (-\epsilon_k, \epsilon_k).$$

Concluimos a demonstração observando que (3.64) e (3.65) seguem de (3.66). $\square$

Lema 3.12. *Seja δ_0 dado pelo Lema 3.9. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja g_k dado pelo Lema 3.10. Suponha que $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, n-2\}$. Seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq n-2} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$. Se $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) < 0$ e $m-n > j_0$, então as soluções de classe C^∞ de*

$$ikv_k(x) + (a+ib)(x)(v_k)'(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) v_k + g_k(x), \quad (3.67)$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0]$, são da forma

$$v_k(x) = \begin{cases} e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)} \int_0^x e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)} \frac{\widehat{g}_k}{a+ib}(y) dy, & 0 < x \leq \delta_0 \\ 0, & x = 0 \\ H_k e^{-kiC_{0-}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)}, & -\delta_0 \leq x < 0 \end{cases},$$

sendo H_k uma constante que deve ser nula quando $n - j_0$ for ímpar.

Demonstração. Seja $v_k \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ solução de (3.67) em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0]$. Então, v_k tem a forma $v_k = u_k + h_k(x)$, sendo h_k uma solução arbitrária da equação homogênea

$$ikh_k(x) + (a + ib)(x)(h_k)'(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) h_k(x), \quad (3.68)$$

e u_k uma solução particular da equação não homogênea (3.67).

Afirmamos que $e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}$ é limitada em $(0, \epsilon)$. De fato, pelo Lema 3.11, existem $\epsilon_k > 0$ e $\varphi_k \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ tais que, para $0 < y < \epsilon_k$, obtemos

$$\begin{aligned} |e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}| &= e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_y^{\epsilon_k} \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds} e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{\epsilon_k}^y \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds} \\ &\leq M_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \frac{1}{2} \int_y^{\epsilon_k} \frac{1}{s^{n-j_0}} ds} = M_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \frac{-1}{(n-j_0-1)} \frac{1}{s^{n-j_0-1}} \Big|_y^{\epsilon_k}} \\ &= M_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \left(\frac{1}{y^{n-j_0-1}} - \frac{1}{\epsilon_k^{n-j_0-1}} \right)}, \end{aligned}$$

sendo $M_k = e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{\epsilon_k}^y \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds}$.

Assim, para $0 < y < \epsilon_k$, temos

$$|e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}| \leq M'_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \frac{1}{y^{n-j_0-1}}}, \quad (3.69)$$

sendo $M'_k = M_k e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \frac{1}{\epsilon_k^{n-j_0-1}}}$; note que $n - j_0 > 2$, conforme verificamos na prova do Lema 2.4 (ver página 16).

Como $\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} < 0$, concluímos que $e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}$ é limitada em $(0, \epsilon)$, para cada $k \in \mathbb{Z}$; consequentemente $e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}$ é integrável em $[0, \delta_0]$.

Logo, para $x > 0$, encontramos

$$u_k(x) = e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)} \int_0^x e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)} \frac{g_k}{a+ib}(y) dy.$$

Afirmamos que,

$$|u_k(x)| = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+.$$

De fato. Para $0 < y < x < \epsilon_k$, de (3.64) temos

$$\left| \frac{e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}}{e^{ikC_{0+}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}} \right| = e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_y^x \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds} \leq e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \int_y^x \frac{1}{s^{n-j_0}} ds} \leq 1;$$

consequentemente, para $0 < x < \epsilon_k$, temos

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &\leq \int_0^x \left| \frac{e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}}{e^{ikC_{0+}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}} \frac{\widehat{g}_k}{a + ib} \right| (y) dy \\ &\leq \int_0^x \left| \frac{g_k}{a + ib} \right| (y) dy = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Note que estimativas análogas podem ser provadas para as derivadas $u_k^{(\nu)}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, na região $x > 0$.

Concluimos que u_k definida por

$$u_k(x) \doteq \begin{cases} e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)} \int_0^x e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)} \frac{g_k}{a + ib}(y) dy, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

é uma solução particular, de classe C^∞ , da equação não homogênea (3.67).

Agora, vamos analisar a solução h_k da equação homogênea (3.68). Simples cálculos mostram que a solução da equação homogênea é dada por

$$h_k(x) = h_k(\epsilon) e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)} \quad \text{se } 0 < x < \epsilon,$$

e

$$h_k(x) = h_k(-\epsilon) e^{ikC_{0-}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)}, \quad \text{se } -\epsilon < x < 0.$$

Afirmamos que $h_k \notin C^\infty$ se $h_k(\epsilon) \neq 0$.

De fato, para $0 < x < \epsilon_k$, por (3.69) temos

$$|h_k(x)| = \frac{|h_k(\epsilon)|}{\left| e^{ikC_{0-}(x) - \sum_{j=N}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)} \right|} \geq \frac{|h_k(\epsilon)|}{M'_k} e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \frac{1}{x^{n-j_0-1}}}.$$

Logo, h_k não é contínua na origem se $h_k(\epsilon) \neq 0$, pois $n - j_0 > 1$ e $\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} < 0$.

Portanto, da afirmação acima e da prova da Proposição 2.4, concluimos que

- para $n - j_0$ ímpar, $h_k(x) \in C^\infty$ se, e somente se, $h_k(\epsilon) = 0 = h_k(-\epsilon)$;
- para $n - j_0$ par, $h_k(x) \in C^\infty$ se, e somente se, $h_k(\epsilon) = 0$.

Assim, concluímos que as soluções de classe C^∞ , em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0]$, da equação homogênea (3.68) são da forma

$$h_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq \delta_0 \\ h_k(-\epsilon)e^{-kiC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & \text{se } -\delta_0 \leq x < 0 \end{cases}.$$

sendo $h_k(-\epsilon)$ nula quando $n - j_0$ for ímpar. Portanto $v_k = u_k + h_k$ tem a forma desejada. $\square$

Proposição 3.13. *Seja $\mathcal{L}_p$ dado por (3.2) e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ dados por (3.4). Assuma que $n < m < 2n - 1$ e que $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, n-2\}$. Seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq n-2} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$. Se $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) < 0$ e $m - n > j_0$, então existe $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , tal que a equação $\mathcal{L}_p u = f$ não tem solução de classe C^∞ em nenhuma vizinhança de Σ .*

Demonstração. Faremos a prova por contradição.

Assuma, por absurdo, que para cada $f \in C^\infty(A_\epsilon)$ e flat em Σ existe $u \in C^\infty$ tal que

$$\mathcal{L}_p u = f$$

em uma vizinhança de Σ . Logo, pela Proposição 3.4, a equação

$$Lw = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) w + g,$$

tem uma solução $w \in C^\infty(A_\epsilon)$ para cada g flat em Σ .

Consequentemente, segue do Lema 3.9, que existe $\delta_0 > 0$ tal que para toda $g \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , existe $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de

$$Lv = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) v + g$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$. Em particular, para g dada pelo Lema 3.10 existe $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de

$$Lv = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) v + g$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$.

Usando série parcial de Fourier podemos escrever

$$v(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k(x) e^{ikt} \quad e \quad g(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_k(x) e^{ikt};$$

daí, concluimos que $\widehat{v}_k$ é uma solução de

$$ik\widehat{v}_k(x) + (a + ib)(x)(\widehat{v}_k)'(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) \widehat{v}_k(x) + \widehat{g}_k(x)$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

No que segue, mostraremos que existe uma escolha de c_k , na definição de g_k , que gera uma contradição com a existência de v em $C^\infty([-\delta_0, \delta_0] \times S^1)$.

Pelo Lema 3.12, para cada $k \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$\widehat{v}_k(x) = \begin{cases} e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)} \int_0^x e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)} \frac{\widehat{g}_k}{a+ib}(y) dy, & 0 < x \leq \delta_0 \\ 0, & x = 0 \\ H_k e^{-kiC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & -\delta_0 \leq x < 0 \end{cases},$$

sendo H_k uma constante que deve ser nula quando $n - j_0$ for ímpar.

Logo, para $0 < x < \delta_0$, temos

$$\widehat{v}_k(x) = \int_0^x e^{-ik(C_{0+}(x) - C_{0+}(y)) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (C_{j+}(x) - C_{j+}(y))} \frac{\widehat{g}_k}{a+ib}(y) dy.$$

Agora, observe que

$$C_{j+}(x) - C_{j+}(y) = \int_y^x \frac{as^j}{a^2 + b^2}(s) ds - i \int_y^x \frac{bs^j}{a^2 + b^2}(s) ds;$$

logo,

$$\begin{aligned} & -ik(C_{0+}(x) - C_{0+}(y)) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (C_{j+}(x) - C_{j+}(y)) \\ &= \int_y^x \left(-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) s^j \right) \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds + \int_y^x \left(\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) s^j \right) \frac{a}{a^2 + b^2}(s) ds \\ & \quad + i \left(\int_y^x \left(-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) s^j \right) \frac{a}{a^2 + b^2}(s) ds - \int_y^x \left(\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) s^j \right) \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds \right). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Para $y > 0$ temos

$$\widehat{g}_k(y) = e^{-\frac{1}{y}} \cdot (a + ib)(y) \cdot c_k \cdot e^{-i \left(\int_y^{x_0} (-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) s^j) \frac{a}{a^2 + b^2}(s) ds - \int_y^{x_0} (\sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) s^j) \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds \right)},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{v}_k(x_0) &= \int_0^{x_0} c_k e^{-k \int_y^{x_0} \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds - \frac{1}{y} + \int_y^{x_0} (\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b(s) s^j + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a(s) s^j) \frac{1}{a^2 + b^2}(s) ds} dy \\ &= \int_0^{x_0} \left[c_k e^{-k \int_y^{x_0} \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds} \right. \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{y} + \int_y^{x_0} \frac{1}{s^{n-j_0}} (\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b_0(s) s^{j+m-n-j_0} + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a_0(s) s^{j-j_0}) \frac{1}{a_0^2 + x^{2(m-n)} b_0^2}(s) ds}} dy. \end{aligned}$$

Conforme verificado na prova do Lema 2.4 (ver página 16), temos $n - j_0 > 2$. Além disso, como $\Re(\lambda_{j_0}) a_0(0) < 0$, tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, para $-\epsilon < s < \epsilon$, temos

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b_0(s) s^{j+m-n-j_0} + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a_0(s) s^{j-j_0} \right) \frac{1}{a_0^2 + x^{2(m-n)} b_0^2}(s) < 0;$$

concluimos que

$$e^{-\frac{1}{y} + \int_y^{x_0} \frac{1}{s^{n-j_0}} (\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b_0(s) s^{j+m-n-j_0} + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a_0(s) s^{j-j_0}) \frac{1}{a_0^2 + x^{2(m-n)} b_0^2}(s) ds}$$

é limitada em $(0, \epsilon)$.

Defina

$$M = \int_0^{\frac{x_0}{2}} e^{-\frac{1}{y} + \int_y^{x_0} \frac{1}{s^{n-j_0}} (\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b_0(s) s^{j+m-n-j_0} + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a_0(s) s^{j-j_0}) \frac{1}{a_0^2 + x^{2(m-n)} b_0^2}(s) ds} dy > 0.$$

Como $\frac{b}{a^2 + b^2}(s) > 0$ para $s > 0$, temos que para $0 < y_1 \leq y_2 < x_0$ vale:

$$\int_{y_1}^{x_0} \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds \geq \int_{y_2}^{x_0} \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds.$$

Logo, se $k < 0$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{v}_k(x_0) &\geq M \int_0^{\frac{x_0}{2}} c_k e^{-k \int_y^{x_0} \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds} dy \\ &\geq M \int_0^{\frac{x_0}{2}} c_k e^{-k \int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds} dy \end{aligned}$$

$$= c_k e^{-kM'} M,$$

sendo $M' = \int_{\frac{x_0}{2}}^{x_0} \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds > 0$.

Se tomarmos, na definição de g_k , $c_k = e^{kM'}$ para cada $k < 0$, teremos $\widehat{v}_k(x_0) \geq M > 0$ e, conseqüentemente, $(\widehat{v}_k)$ não pode ser a sequência de Fourier de nenhuma função C^∞ periódica. Assim concluímos que não existe $v \in C^\infty([-\delta_0, \delta_0] \times S^1)$ solução de $Lv = (\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j)v + g$ em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$, o que é uma contradição. $\square$

Lema 3.14. *Seja $\delta_0 > 0$ dado pelo Lema 3.9 e seja $x_0 \in (-\delta_0, 0)$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja*

$$g_k : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$g_k(x) = \varphi_1(x) \cdot (a + ib)(x) \cdot c_k \cdot \varphi_2(x),$$

sendo (c_k) uma sequência de números reais positivos rapidamente decrescente, $\varphi_1 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \end{cases},$$

e $\varphi_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ e^{i\left(\int_{x_0}^x (-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) s^j) \frac{a}{a^2 + b^2}(s) ds - \int_{x_0}^x (\sum_{j=0}^{n-1} \Re(\lambda_j) s^j) \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds\right)}, & x < 0. \end{cases}$$

A sequência (g_k) define uma função $g \in C^\infty(A_\epsilon)$ e flat em Σ .

A demonstração do Lema 3.14 utiliza os mesmos argumentos da demonstração do Lema 3.10; vamos omiti-la.

Lema 3.15. *Assuma que $n < m < 2n - 1$ e que $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, n-2\}$. Seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq n-2} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$, e seja $\delta_0 > 0$ dado pelo Lema 3.9. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, seja g_k dado pelo Lema 3.14. Seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq n-2} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$. Suponha que $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, n-2\}$. Se $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) > 0$, $n - j_0$ é par e $m - n > j_0$, então as soluções de classe C^∞ de*

$$ikv_k(x) + (a + ib)(x)(v_k)'(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j\right)v_k + g_k(x), \quad (3.71)$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0]$, são da forma

$$v_k(x) = \begin{cases} H_k e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & 0 < x \leq \delta_0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-ikC_{0-}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)} \int_x^0 e^{ikC_{0-}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(y)} \frac{\hat{g}_k}{a+ib}(y) dy & -\delta_0 \leq x < 0 \end{cases},$$

sendo H_k uma constante.

Demonstração. A prova é similar àquela do Lema 3.12.

Seja $v_k \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ solução de (3.71) em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0]$. Então, v_k tem a forma $v_k = u_k + h_k(x)$, sendo h_k uma solução arbitrária da equação homogênea

$$ikh_k(x) + (a+ib)(x)(h_k)'(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) h_k(x) \quad (3.72)$$

e u_k uma solução particular da equação não homogênea (3.71).

Afirmamos que $e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}$ é limitada em $(-\epsilon, 0)$. De fato, pelo Lema 3.11, existem $\epsilon_k > 0$ e $\varphi_k \in C^\infty((-\epsilon, \epsilon))$ tais que, para $-\epsilon_k < y < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} |e^{ikC_{0-}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(y)}| &= e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{-\epsilon_k}^{-\epsilon} \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds} e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{-\epsilon_k}^y \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds} \\ &\leq M_k e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \frac{1}{2} \int_{-\epsilon_k}^y \frac{1}{s^{n-j_0}} ds} = M_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \frac{1}{(n-j_0-1)} \frac{1}{s^{n-j_0-1}} \Big|_{-\epsilon_k}^y} \\ &= M_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \left(\frac{1}{y^{n-j_0-1}} - \frac{1}{(-\epsilon_k)^{n-j_0-1}} \right)}, \end{aligned}$$

sendo $M_k = e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_{-\epsilon}^{-\epsilon_k} \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds}$.

Assim, para $-\epsilon_k < y < 0$, temos

$$|e^{ikC_{0-}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(y)}| \leq M'_k e^{\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \frac{1}{y^{n-j_0-1}}}, \quad (3.73)$$

sendo $M'_k = M_k e^{-\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \frac{1}{(-\epsilon_k)^{n-j_0-1}}}$; note que $n - j_0 > 2$.

Como $\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} > 0$ e $n - j_0 - 1$ é ímpar e positivo, concluímos que $e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}$ é limitada em $(0, \epsilon)$, para cada $k \in \mathbb{Z}$; consequentemente $e^{ikC_{0+}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(y)}$ é integrável em $[-\delta_0, 0]$.

Logo, para $x < 0$, encontramos

$$u_k(x) = -e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)} \int_x^0 e^{ikC_{0-}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(y)} \frac{g_k}{a+ib}(y) dy.$$

Afirmamos que $|u_k(x)| = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+$.

De fato. Para $-\epsilon_k < x < y < 0$, de (3.65), temos

$$\left| \frac{e^{ikC_{0-}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(y)}}{e^{ikC_{0-}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)}} \right| = e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} \int_x^y \frac{1}{s^{n-j_0}} \varphi_k(s) ds} \leq e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)} \int_x^y \frac{1}{s^{n-j_0}} ds} \leq 1;$$

consequentemente, para $-\epsilon_k < x < 0$, temos

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &\leq \int_x^0 \left| \frac{e^{ikC_{0-}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(y)}}{e^{ikC_{0-}(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)}} \frac{\widehat{g}_k}{a + ib} \right| (y) dy \\ &\leq \int_x^0 \left| \frac{\widehat{g}_k}{a + ib} \right| (y) dy = O(|x|^j), \forall j \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Note que estimativas análogas podem ser provadas para as derivadas $u_k^{(\nu)}$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, na região $x > 0$.

Concluimos, então, que u_k definida por

$$u_k(x) \doteq \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)} \int_x^0 e^{ikC_{0-}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(y)} \frac{g_k}{a+ib}(y) dy, & x < 0 \end{cases},$$

é uma solução particular, de classe C^∞ , da equação não homogênea (3.71).

Agora, vamos analisar a solução h_k da equação homogênea (3.72). Simples cálculos mostram que a solução da equação homogênea é dada por

$$h_k(x) = h_k(\epsilon) e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)} \quad \text{se } 0 < x < \epsilon,$$

e

$$h_k(x) = h_k(-\epsilon) e^{ikC_{0-}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)}, \quad \text{se } -\epsilon < x < 0.$$

Afirmamos que $h_k(x) \notin C^\infty$ se $h_k(-\epsilon) \neq 0$.

De fato, para $-\epsilon_k < x < 0$, por (3.73) temos

$$|h_k(x)| = \frac{|h_k(-\epsilon)|}{\left| e^{ikC_{0-}(x) - \sum_{j=N}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)} \right|} \geq \frac{|h_k(-\epsilon)|}{M'_{-k}} e^{\frac{-\Re(\lambda_{j_0})}{2a_0(0)(n-j_0-1)} \frac{1}{x^{n-j_0-1}}}.$$

Logo, h_k não é contínua na origem se $h_k(-\epsilon) \neq 0$, pois $\frac{\Re(\lambda_{j_0})}{a_0(0)} > 0$ e $n - j_0 - 1$ é ímpar positivo.

Portanto, da afirmação acima e da prova da Proposição 2.4, concluimos que $h_k(x) \in C^\infty$ se, e somente se, $h_k(-\epsilon) = 0$.

Assim, concluímos que as soluções de classe C^∞ , em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0]$, da equação homogênea (3.72) são da forma

$$h_k(x) = \begin{cases} H_k e^{-ikC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & \text{se } 0 < x \leq \delta_0 \\ 0 & \text{se } -\delta_0 \leq x \leq 0 \end{cases};$$

portanto $v_k = u_k + h_k$ tem a forma desejada. $\square$

Proposição 3.16. *Seja $\mathcal{L}_p$ dado por (3.2) e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ dados por (3.4). Assuma que $n < m < 2n - 1$ e que $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, n-2\}$. Seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq n-2} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$. Se $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) > 0$, $n - j_0$ é par, e $m - n > j_0$, então existe $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , tal que a equação $\mathcal{L}_p u = f$ não tem solução de classe C^∞ em nenhuma vizinhança de Σ .*

Demonstração. Utilizaremos um procedimento similar ao da prova da Proposição 3.13. Entretanto, agora vamos nos concentrar na região $x < 0$ e utilizar g definida no Lema 3.14.

Assuma, por absurdo, que para cada $f \in C^\infty(A_\epsilon)$ e flat em Σ existe $u \in C^\infty$ tal que

$$\mathcal{L}_p u = f$$

em uma vizinhança de Σ . Logo, pela Proposição 3.4, a equação

$$Lw = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) w + g,$$

tem uma solução $w \in C^\infty(A_\epsilon)$ para cada $g \in C^\infty(A_\epsilon)$ flat em Σ .

Consequentemente, segue do Lema 3.9, que existe $\delta_0 > 0$ tal que para toda $g \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , existe $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de

$$Lv = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) v + g$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$. Em particular, para g dada pelo Lema 3.14 existe $v \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução de

$$Lv = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) v + g$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$.

Usando série parcial de Fourier, podemos escrever

$$v(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{v}_k(x) e^{ikt} \quad e \quad g(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}_k(x) e^{ikt};$$

logo, temos que $\widehat{v}_k$ é uma solução de

$$ik\widehat{v}_k(x) + (a + ib)(x)(\widehat{v}_k)'(x) = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j \right) \widehat{v}_k(x) + \widehat{g}_k(x)$$

em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0]$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.

No que segue, mostraremos que existe uma escolha de c_k , na definição de g_k , que gera uma contradição com a existência de v em $C^\infty([-\delta_0, \delta_0] \times S^1)$.

Pelo Lema 3.15, para cada $k \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$\widehat{v}_k(x) = \begin{cases} H_k e^{-kiC_{0+}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j+}(x)}, & 0 < x \leq \delta_0 \\ 0, & x = 0 \\ -e^{-ikC_{0-}(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(x)} \int_x^0 e^{ikC_{0-}(y) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j C_{j-}(y)} \frac{\widehat{g}_k}{a+ib}(y) dy & -\delta_0 \leq x < 0 \end{cases},$$

sendo H_k uma constante.

Logo, para $-\delta_0 \leq x < 0$, temos

$$\widehat{v}_k(x) = - \int_x^0 e^{-ik(C_{0-}(x) - C_{0-}(y)) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (C_{j-}(x) - C_{j-}(y))} \frac{\widehat{g}_k}{a+ib}(y) dy.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} & -ik(C_{0-}(x) - C_{0-}(y)) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (C_{j-}(x) - C_{j-}(y)) \\ &= - \int_x^y (-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) s^j) \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds - \int_x^y (\sum_{j=0}^{n-1} \Re(\lambda_j) s^j) \frac{a}{a^2 + b^2}(s) ds \\ & \quad - i \left(\int_x^y (-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) s^j) \frac{a}{a^2 + b^2}(s) ds - \int_x^y (\sum_{j=0}^{n-1} \Re(\lambda_j) s^j) \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds \right). \end{aligned}$$

Para $y < 0$ temos que

$$\widehat{g}_k(y) = -e^{\frac{1}{y}} \cdot (a + ib)(y) \cdot c_k \cdot e^{i \left(\int_{x_0}^y (-k + \sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) s^j) \frac{a}{a^2 + b^2}(s) ds - \int_{x_0}^y (\sum_{j=0}^{n-1} \Re(\lambda_j) s^j) \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds \right)};$$

obtemos

$$\begin{aligned}\widehat{v}_k(x_0) &= \int_{x_0}^0 c_k e^{k \int_{x_0}^y \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds + \frac{1}{y} - \int_{x_0}^y (\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b(s) s^j + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a(s) s^j) \frac{1}{a^2+b^2}(s) ds} dy \\ &= \int_{x_0}^0 c_k e^{\int_{x_0}^y k \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds} \\ &\quad \times e^{\frac{1}{y} - \int_{x_0}^y \frac{1}{s^{n-j_0}} (\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b_0(s) s^{j+m-n-j_0} + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a_0(s) s^{j-j_0}) \frac{1}{a_0^2+x^2(m-n)b_0^2}(s) ds} dy.\end{aligned}$$

Temos $n - j_0 > 2$, além disso, como $\Re(\lambda_{j_0}) a_0(0) > 0$, tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, para $-\epsilon < s < \epsilon$, temos

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b_0(s) s^{j+m-n-j_0} + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a_0(s) s^{j-j_0} \right) \frac{1}{a_0^2 + x^{2(m-n)} b_0^2}(s) > 0;$$

então, temos

$$e^{\frac{1}{y} - \int_{x_0}^y \frac{1}{s^{n-j_0}} (\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b_0(s) s^{j+m-n-j_0} + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a_0(s) s^{j-j_0}) \frac{1}{a_0^2+x^2(m-n)b_0^2}(s) ds}$$

é limitada em $(-\epsilon, 0)$, já que $n - j_0$ é par por hipótese.

Defina

$$M = \int_{x_0}^0 e^{\frac{1}{y} - \int_{x_0}^y \frac{1}{s^{n-j_0}} (\sum_{j=0}^{n-1} \Im(\lambda_j) b_0(s) s^{j+m-n-j_0} + \sum_{j=j_0}^{n-1} \Re(\lambda_j) a_0(s) s^{j-j_0}) \frac{1}{a_0^2+x^2(m-n)b_0^2}(s) ds} dy.$$

Logo,

$$\widehat{v}_k(x_0) = M \int_{x_0}^0 c_k e^{\int_{x_0}^y k \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds}. \quad (3.74)$$

Note que $\frac{b_0}{a_0^2+b_0^2} > 0$ por hipótese. Logo, tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que, para $-\epsilon < s < \epsilon$ vale:

$$\alpha \leq \frac{b_0}{a_0^2 + s^{2m-2n} b_0^2} \leq \beta.$$

Suponha que m é ímpar; consequentemente $s^{2n-m} < 0$ se $-\epsilon < s < 0$. Então, para $k > 0$, temos que para $-\delta_0 < x_0 < y < 0$ vale:

$$\begin{aligned}k \int_{x_0}^y \frac{b}{a^2 + b^2}(s) ds &= k \int_{x_0}^y \frac{1}{s^{2n-m}} \frac{b_0}{a_0^2 + s^{2m-2n} b_0^2}(s) ds \\ &\geq k\beta \int_{x_0}^y \frac{1}{s^{2n-m}}(s) ds = \frac{k\beta}{(2n-m-1)} \left(\frac{1}{x_0^{2n-m-1}} - \frac{1}{y^{2n-m-1}} \right); \end{aligned}$$

consequentemente, de (3.74), temos

$$\begin{aligned}\widehat{v}_k(x_0) &= M \int_{x_0}^0 c_k e^{k \int_{x_0}^y \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds} dy \geq M \int_{x_0}^0 c_k e^{\frac{k\beta}{(2n-m-1)} \left(\frac{1}{x_0^{2n-m-1}} - \frac{1}{y^{2n-m-1}} \right)} dy \\ &= c_k e^{kM_1} M_2,\end{aligned}$$

sendo $M_1 = \frac{k\beta}{(2n-m-1)x_0^{2n-m-1}} > 0$ e $M_2 = \int_{x_0}^0 e^{\frac{-k\beta}{(2n-m-1)} \frac{1}{y^{2n-m-1}}} dy > 0$.

Logo, se m é ímpar, tomando (na definição de g_k), $c_k = e^{-kM}$ para cada $k > 0$, teremos $\widehat{v}_k(x_0) \geq M_2 > 0$; consequentemente $(\widehat{v}_k)$ não pode ser a sequência de Fourier de nenhuma função C^∞ periódica.

Agora, suponha que m é par; consequentemente $\frac{b}{a^2+b^2} = s^m \frac{b_0}{a^2+b^2} > 0$. Logo, para $x_0 < y_1 \leq y_2 < 0$, temos

$$\int_{x_0}^{y_1} \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds \leq \int_{x_0}^{y_2} \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds.$$

Portanto, para $k > 0$ e m par, segue de (3.74) que vale:

$$\begin{aligned}\widehat{v}_k(x_0) &\geq M \int_{\frac{x_0}{2}}^0 c_k e^{k \int_{x_0}^y \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds} dy \\ &\geq M \int_{\frac{x_0}{2}}^0 c_k e^{k \int_{x_0}^{\frac{x_0}{2}} \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds} dy \\ &= c_k e^{kM_3} M,\end{aligned}$$

sendo $M_3 = \int_{x_0}^{\frac{x_0}{2}} \frac{b}{a^2+b^2}(s) ds > 0$.

Logo, se m é par, tomando (na definição de g_k), $c_k = e^{-kM_3}$ para cada $k > 0$, teremos $\widehat{v}_k(x_0) \geq M > 0$; consequentemente $(\widehat{v}_k)$ não pode ser a sequência de Fourier de nenhuma função C^∞ periódica.

Portanto, não existe $v \in C^\infty([-\delta_0, \delta_0] \times S^1)$ solução de $Lv = (\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j x^j)v + g$ em uma vizinhança de $[-\delta_0, \delta_0] \times S^1$, o que é uma contradição. $\square$

Agora, mostraremos que o subespaço $\mathcal{F}$ de $C^\infty(A_\epsilon)$, das funções f que satisfazem as condições de compatibilidade da equação $\mathcal{L}_p u = f$, tem codimensão finita.

Lema 3.17. *Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ dados por (3.4), e seja $\mathcal{F} \subset C^\infty(A_\epsilon)$ definido por:*

$$(1) \quad \mathcal{F} = C^\infty(A_\epsilon) \text{ se } \lambda_0 \notin i\mathbb{Z}.$$

- (2) $\mathcal{F}$ é o subespaço de $C^\infty(A_\epsilon)$ de todas funções f satisfazendo (3.13) se $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$ e $1 \leq N < r - 1$, ou ainda se $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$, $N = r - 1$ e $\lambda_{r-1} - \ell\alpha_0 \neq 0 \forall \ell \in \mathbb{Z}_+$, sendo N o menor inteiro, satisfazendo $1 \leq N \leq r - 1$, tal que $\lambda_N \neq 0$.
- (3) $\mathcal{F}$ é o subespaço de $C^\infty(A_\epsilon)$ de todas funções f satisfazendo (3.9) se as condições (3.7), (3.8) são satisfeitas.
- (4) $\mathcal{F}$ é o subespaço de $C^\infty(A_\epsilon)$ de todas funções f satisfazendo, além da condição (3.13), a condição adicional (3.14) descrita na demonstração da Proposição 3.3 se $\lambda_0 \in i\mathbb{Z}$, $N = r - 1$ e $\lambda_{r-1} - \ell_0\alpha_0 = 0$, para algum $\ell_0 \in \mathbb{Z}_+$, sendo N o menor inteiro, satisfazendo $1 \leq N \leq r - 1$, tal que $\lambda_N \neq 0$.

Então, $\mathcal{F}$ é um subespaço de codimensão finita de $C^\infty(A_\epsilon)$.

Demonstração. Se $\mathcal{F} = C^\infty(A_\epsilon)$ então $\mathcal{F}$ tem codimensão igual a zero; portanto finita.

Suponha que $\mathcal{F}$ definido em (2).

Defina

$$Q_{N-1}(x, t) \doteq \sum_{j=0}^{N-1} \left(\int_0^t \frac{\partial^j p}{\partial x^j}(0, \sigma) d\sigma \right) x^j.$$

Então, $\mathcal{F} = S^\circ$, sendo

$$S = \text{span}\langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)}), j = 0, \dots, N-1 \rangle,$$

e

$$S^\circ \doteq \{f \in C^\infty(A_\epsilon); \langle u, f \rangle = 0, \forall u \in S\}.$$

Agora, vamos mostrar que S° tem codimensão finita. Para cada $j = 0, \dots, N-1$ defina

$$S_j \doteq \text{span}\langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(k)}), k = 0, \dots, \widehat{j}, \dots, N-1 \rangle.$$

Como $S_j \subset \mathcal{E}'(A_\epsilon)$ é fechado, $e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)}) \notin \overline{S_j}$. Logo, pelo Teorema de Hahn-Banach (ver, por exemplo, Teorema 3.5 de [11]), existe Λ no dual de $\mathcal{E}'(A_\epsilon)$ para o qual $\Lambda[e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)})] = 1$ e, além disso, se $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$, $\ell \neq j$ então $\Lambda[e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(\ell)})] = 0$.

Note que o dual de $C^\infty(A_\epsilon)$ é $\mathcal{E}'(A_\epsilon)$. Como $C^\infty(A_\epsilon)$ é reflexivo, existe um isomorfismo isométrico (ver, por exemplo, página 90 de [11])

$$\phi : C^\infty(A_\epsilon) \rightarrow [\mathcal{E}'(A_\epsilon)]'$$

$$f \mapsto \phi(f) = \phi_f,$$

tal que $\phi[C^\infty(A_\epsilon)] = [\mathcal{E}'(A_\epsilon)]'$, sendo

$$\begin{aligned} \phi_f : [\mathcal{E}'(A_\epsilon)]' &\rightarrow \mathbb{C} \\ \mu &\mapsto \phi_f(\mu) = \langle \mu, f \rangle. \end{aligned}$$

Logo, concluímos que existe $\varphi_j \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que, para cada $\ell = 0, \dots, N-1$, temos

$$\langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(\ell)}), \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } \ell \neq j; \\ 1, & \text{se } \ell = j. \end{cases}$$

Afirmamos que $C^\infty(A_\epsilon) = S^\circ \oplus E$, sendo $E = \text{span}\langle \varphi_0, \dots, \varphi_{N-1} \rangle$.

De fato, se $g \in S^\circ \cap E$ então $\langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)}), g \rangle = 0$, $j = 0, \dots, N-1$, e existem $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$, tais que $g = \alpha_0 \varphi_0 + \dots + \alpha_{N-1} \varphi_{N-1}$.

Logo, $0 = \langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)}), g \rangle = \alpha_j$, $j = 0, \dots, N-1$, ou seja, $S^\circ \cap E = \{0\}$.

Falta mostrar que $C^\infty(A_\epsilon) \subset S^\circ \oplus E$. Dado $g \in C^\infty(A_\epsilon)$, defina $\beta_j \doteq \langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)}), g \rangle$, $j = 0, \dots, N-1$ e $\psi \doteq g - \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \varphi_j$. Então, para cada $j = 0, \dots, N-1$, temos

$$\langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)}), \psi \rangle = \langle e^{-Q_{N-1}}(1 \otimes \delta^{(j)}), g \rangle - \beta_j = \beta_j - \beta_j = 0.$$

Portanto, cada $g \in C^\infty(A_\epsilon)$ se escreve como $g = \psi + \varphi$, com $\psi \in S^\circ$ e $\varphi \doteq \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \varphi_j \in E$; concluímos que $C^\infty(A_\epsilon) = S^\circ \oplus E$, já que a inclusão $S^\circ \oplus E \subset C^\infty(A_\epsilon)$ é direta.

Como E tem dimensão N , $\mathcal{F} = S^\circ$ tem codimensão igual a N ; portanto finita.

Com os argumentos anteriores também provamos que $\mathcal{F}$ tem codimensão igual a r quando é definido em (3).

Finalmente, suponha que $\mathcal{F}$ definido em (4).

Defina

$$q \doteq p - p_0 - \ell_0 x^{r-1}(x^{n-r} a_0 + i x^{m-r} b_0).$$

Sob nossas hipóteses, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^j q}{\partial x^j}(0, t) dt = 0, \quad j = 0, \dots, r-1. \quad (3.75)$$

Segue de (3.75) e do Teorema 1.8, que existe $\varphi \in C^\infty(A_\epsilon)$ tal que $L\varphi(x, t) = q(x, t)$. Note que, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, t) = 0$, $\forall t \in S^1$. Portanto, temos $t \mapsto \varphi(0, t)$ constante. Então, podemos

supor que $\varphi(0, t) \equiv 0$ (substituindo, se necessário, $\varphi(x, t)$ por $\varphi(x, t) - \varphi(0, t)$), e concluir que a condição adicional (3.14) descrita na demonstração da Proposição 3.3 pode ser escrita como

$$\langle e^{-P_0 - \varphi}(1 \otimes \delta^{(\ell_0 + r - 1)}), f \rangle - \sum_{\ell=r-1}^{\ell_0 + r - 2} B_\ell \langle e^{-P_0 - \varphi}(1 \otimes \delta^{(\ell)}), f \rangle = 0,$$

sendo B_ℓ uma constante, para cada $\ell = r - 1, \dots, \ell_0 + r - 2$.

Defina $\mu_{\ell_0 + r - 1} \in \mathcal{E}'(A_\epsilon)$ por

$$\mu_{\ell_0 + r - 1} \doteq e^{-P_0 - \varphi}(1 \otimes \delta^{(\ell_0 + r - 1)}) - \sum_{\ell=r-1}^{\ell_0 + r - 2} B_\ell e^{-P_0 - \varphi}(1 \otimes \delta^{(\ell)}).$$

Com os mesmos argumentos usados no caso em que $\mathcal{F}$ satisfaz a condição (2), concluímos que $\mathcal{F} = S^\circ \cap \{f \in C^\infty(A_\epsilon); \langle \mu_{\ell_0 + r - 1}, f \rangle = 0\}$, e que $\mathcal{F}$ tem codimensão igual a r . $\square$

3.3 Resultados finais

Nesta seção utilizaremos os resultados das seções anteriores para concluir sobre a resolubilidade de $\mathcal{L}_p$ em Σ , sendo $\mathcal{L}_p$ definido em (3.2) com $p \in C^\infty(A_\epsilon)$.

Pelo Lema 3.17, o resultado no Teorema 3.1 pode ser reescrito como:

Teorema 3.18. *Se p satisfaz (3.7) e (3.8) então $\mathcal{L}_p$ é resolúvel em Σ .*

Combinando as Proposições 3.3, 3.4 e 3.7 obtemos o seguinte resultado sobre a equação $\mathcal{L}_p u = f$.

Teorema 3.19. *Assuma que (3.7) ou (3.8) falha. Defina o inteiro j_0 como segue:*

- (i) se $\Re(\lambda_j) = 0$ para cada $j \in \{0, \dots, r - 1\}$, seja $j_0 = r - 1$;
- (ii) se $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, r - 1\}$, seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq r - 1} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$.

Se $m - n \leq j_0$ então $\mathcal{L}_p$ é resolúvel em Σ .

Note que o resultado do Teorema 3.19 segue da Proposições 3.7 após utilizarmos as Proposições 3.3 e 3.4 para reduzir o estudo da resolubilidade da equação $\mathcal{L}_p u = f$, em uma vizinhança de Σ , ao estudo da resolubilidade da equação

$$Lu = \left(\sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j x^j \right) u + f$$

em uma vizinhança de Σ , com f flat em Σ .

Finalmente, combinando as Proposições 3.13 e 3.16, finalizamos o estudo da equação $\mathcal{L}_p u = f$.

Teorema 3.20. *Assuma que (3.7) ou (3.8) falha. Defina o inteiro j_0 como segue:*

- (i) se $\Re(\lambda_j) = 0$ para cada $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = r-1$;
- (ii) se $\Re(\lambda_j) \neq 0$ para algum $j \in \{0, \dots, r-1\}$, seja $j_0 = \min_{0 \leq j \leq r-1} \{j : \Re(\lambda_j) \neq 0\}$.

Suponha que $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) < 0$ ou que $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) > 0$ e $n - j_0$ é par. Se $m - n > j_0$ então $\mathcal{L}_p$ não é resolúvel em Σ .

Demonstração. Assuma que $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) < 0$ ou que $\Re(\lambda_{j_0})a_0(0) > 0$ e $n - j_0$ é par. Suponha, por absurdo, que existe um subespaço $\mathcal{F} \subset C^\infty(A_\epsilon)$ de codimensão finita tal que para cada $f \in \mathcal{F}$, existe $u \in C^\infty(A_\epsilon)$ solução da equação $\mathcal{L}_p u = f$ em uma vizinhança de Σ .

Sob nossas hipóteses existe $f \in C^\infty(A_\epsilon)$, flat em Σ , de forma que a equação $\mathcal{L}_p u = f$ não tem solução de classe C^∞ em nenhuma vizinhança de Σ .

Usando série parcial de Fourier, escrevemos

$$f(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k(x) e^{ikt}.$$

Para cada número primo ℓ , defina

$$F_\ell(x, t) \doteq \sum_{k \in \ell\mathbb{Z}} \widehat{f}_k(x) e^{ikt}.$$

Note que $B = \{F_\ell : \ell \text{ é um número primo}\}$ é linearmente independente, já que para cada ℓ primo, o termo $\widehat{f}_\ell e^{i\ell t}$ aparece em F_ℓ mas não aparece em nenhum outro elemento de B .

Sob nossas hipóteses, existem $\varphi_1, \dots, \varphi_\nu \in C^\infty(A_\epsilon)$, para algum $\nu \in \mathbb{Z}_+$, tal que

$$C^\infty(A_\epsilon) = \mathcal{F} \oplus E, \tag{3.76}$$

sendo $E = \text{span}\langle \varphi_1, \dots, \varphi_\nu \rangle$.

Para cada ℓ primo, escrevemos

$$F_\ell = \psi_\ell + \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\ell,j} \varphi_j,$$

sendo $\psi_\ell \in \mathcal{F}$, e $\alpha_{\ell,j}$, $j = 1, \dots, \nu$, constantes.

Logo, $F_\ell - \psi_\ell = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{\ell,j} \varphi_j \in E$ para todo ℓ primo. Defina

$$H \doteq \text{span}\langle F_\ell - \psi_\ell \rangle, \ell \text{ primo}.$$

Note que $\dim H \leq \dim E$. Portanto, existe um inteiro positivo $\gamma \leq \nu$ tal que

$$H = \text{span}\langle F_{\ell_j} - \psi_{\ell_j} \rangle, j = 1, \dots, \gamma.$$

Seja ℓ um número primo tal que $\ell > \ell_j$, $j = 1, \dots, \gamma$. Como $F_\ell - \psi_\ell \in H$, existem constantes $\beta_1, \dots, \beta_\nu$ tais que

$$F_\ell - \psi_\ell = \sum_{j=1}^{\nu} \beta_{\ell,j} (F_{\ell_j} - \psi_{\ell_j}). \quad (3.77)$$

Defina

$$\psi = F_\ell - \sum_{j=1}^{\nu} \beta_{\ell,j} F_{\ell_j}.$$

Note que

$$\psi = \sum_{k \in \Lambda} \widehat{f}_k(x) e^{ikt} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda} \widehat{\psi}_k(x) e^{ikt},$$

sendo $\Lambda = \{k \in \mathbb{Z} : \ell \text{ divide } |k| \text{ para cada } \ell \text{ primo } \ell \neq \ell_j\} \cap \{k \in \mathbb{Z} : \ell_j \text{ não divide } |k|, j = 1, \dots, \gamma\}$.

Com os mesmos argumentos utilizados para mostrar que $Lu = pu + f$ não tem solução em nenhuma vizinhança de Σ , podemos mostrar que $Lv = pv + \psi$ não tem solução em nenhuma vizinhança de Σ .

Por (3.77), obtemos

$$\psi = \psi_\ell + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_{\ell,j} \psi_{\ell_j} \in \mathcal{F}.$$

Concluimos assim, que $\psi \in \mathcal{F}$, e que a equação $\mathcal{L}_p v = \psi$ não tem solução C^∞ em nenhuma vizinhança de Σ , gerando uma contradição. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] Bergamasco, A. P., Cordaro, P. D., and Petronilho, G. *Global solvability for a class of complex vector fields on the two-torus*. Comm. Partial Differential Equations, 29 (2004), 785-819.
- [2] Bergamasco, A.P., and Dattori da Silva, P.L. *Global solvability for a special class of vector fields on the torus*, Contemp. Math. 400 (2006) 11-20.
- [3] Bergamasco, A. P., Dattori da Silva, P. L., and Ebert, M. R. *Gevrey solvability near the characteristic set for a class of planar complex vector fields of infinite type*, J. Differential Equations 246(4) (2009), 1673-1702.
- [4] Bergamasco, A.P., and Meziani, A. *Solvability Near the Characteristic Set for a Class of Planar Vector Fields of Infinite Type*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005) 77-112.
- [5] Dattori da Silva, P.L. *Nonexistence of Global Solutions for a Class of Complex Vector Fields on Two-Torus*, J. Math. Anal. Appl. 351 (2009), pp. 543-555.
- [6] Dattori da Silva, P. L. *C^k -Solvability Near the Characteristic Set for a Class of Planar Complex Vector Fields of Infinite Type*, Ann. di Mat. Pura Appl. (4) 189, 3 (2010), 403-413.
- [7] Hörmander, L. *Pseudo-differential operators of principal type, Singularities in Boundary Value Problems*. Proc. NATO Adv. Study Inst. (1980), 69-96, NATO Adv. Study Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 65 (1981).
- [8] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer-Verlag, 1983.

- [9] Hörmander, L. *The analysis of linear partial differential operators IV*, Springer-Verlag, 1984.
- [10] Meziani, A. *Elliptic Planar Vector Fields with Degeneracies*, Trans. Amer. Math. Soc. 357 (2005)
- [11] Rudin, W. *Functional Analysis*, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd., New Delhi, 1973.
- [12] Sussmann, H.J. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973) 171–188.
- [13] Treves, F. *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.