
Propriedades aritméticas e topológicas de uma classe de Fractais
de Rauzy

Tatiana Miguel Rodrigues

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 12/01/2010

Assinatura: _____

Propriedades aritméticas e topológicas de uma classe de Fractais de Rauzy ¹

Tatiana Miguel Rodrigues

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Smania Brandão*

Co-orientador: *Prof. Dr. Ali Messaoudi*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Área: Matemática.

USP - São Carlos
Janeiro/2010

¹Este trabalho teve suporte financeiro do CAPES

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço ao Deus conosco pela benção de mão consciente, por todo o tempo estar presente em minha vida, me direcionando e me aprumando.

Agradeço pela colaboração dos professores Prof. Dr. Ali Messaoudi e ao Prof. Dr. Daniel Smania Brandão, que a graça esteja sempre presente em suas vidas. Agradeço pela paciência e atenção, pelo tempo dedicado, pelas respostas às dúvidas. Muito agradecida !

Agradeço aos meus pais, Ruben e Suely, e irmãos Nayhana e Vladimir, por todo o apoio, paciência, incentivo e todo o amor e ao meu namorado Thiago por todo o carinho, apoio e atenção.

Aos docentes do departamento de matemática do ICMC e da UNESP por todo os ensinamentos. Em especial ao Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos pela atenção e paciência.

Aos funcionários do ICMC por estarem sempre à disposição e tornarem nossa vivência mais agradável. E em especial às funcionárias da Pós-Graduação, Beth, Laura, Ana Paula, Livia e Glaucia.

Aos amigos do doutorado.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Agradeço à todos que colaboraram para a realização deste trabalho.

Resumo

Estudamos as propriedades aritméticas, geométricas e topológicas de uma classe dos chamados Fractais de Rauzy. Estudamos particularmente o azulejamento periódico do plano complexo \mathbb{C} induzido por eles, assim como a dimensão de Hausdorff de suas fronteiras. Tal trabalho exige um estudo detalhado da fronteira destes conjuntos, que está associada às propriedades aritméticas da α -representação dos números complexos com respeito a um certo número algébrico α .

Abstract

We study the arithmetic, geometric and topological properties of a class of the so-called Rauzy's fractals. In particular we study the periodic tiling of the complex plane \mathbb{C} induced by them and the Hausdorff dimension of its boundary. Such work is connected to a detailed study of the boundary of such sets and the arithmetic properties of the α representation of complex numbers with respect to a certain algebraic number α .

Sumário

Introdução	xv
1 Sistemas de Numeração	1
1.1 β -Numeração	1
1.2 Sistema de Numeração sobre os inteiros	4
2 Propriedades do Fractal de Rauzy	7
2.1 Propriedades do Fractal de Rauzy	7
2.2 Caso $a = 2$	13
3 O autômato que reconhece a fronteira de \mathcal{R}	17
3.1 Relação com as representações impróprias na base α	17
3.1.1 Definição do autômato que reconhece os pontos com no mínimo duas expansões	18
3.2 Caracterização dos pontos com duas expansões	19
4 Aplicação do autômato para a parametrização da Fronteira de \mathcal{R}	31
4.1 Parametrização de $\mathcal{R}_{\alpha-1}$	43
4.2 Cálculo da dimensão de Hausdorff	49
5 Parametrização da fronteira de \mathcal{F}	51
5.1 Parametrização de $\mathcal{F}_{\alpha-1}$	58
5.2 Cálculo da dimensão de Hausdorff	60
6 Apêndice	63
Referências Bibliográficas	75

Introdução

O objetivo desta tese é estudar as propriedades topológicas, geométricas e aritméticas de uma classe de Fractais de Rauzy.

O Fractal de Rauzy é um subconjunto do plano complexo que foi definido por G. Rauzy em 1982 ([26]). Este conjunto foi estudado por vários matemáticos (ver [1], [6], [15], [16], [18], [30]) e relacionado com diversas áreas da Matemática como sistemas dinâmicos, teoria dos números entre outras. Em particular, sabe-se que ele é um conjunto compacto, conexo, com interior simplesmente conexo e sua fronteira é uma curva de Jordan fractal. Além do mais ele induz um azulejamento periódico do plano complexo.

Existem vários métodos para se construir o Fractal de Rauzy, um deles é via Sistemas de Numeração, e é feito da seguinte maneira:

Seja $(T_n)_{n \geq 0}$ a sequência tal que $T_0 = T_1 = 0$, $T_2 = 1$, e satisfazendo a recorrência linear

$$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n, \quad n \geq 0.$$

Sabe-se, usando o algoritmo "fominha" (algoritmo Greedy) que todo inteiro natural se escreve de uma maneira única como $n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i F_i$ onde os dígitos ε_i satisfazem a seguinte propriedade: $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ e $\varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} \neq 111$, $\forall i \geq 3$, ou equivalentemente, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} <_{lex} 111$ para todo $i \geq 5$ onde $<_{lex}$ é a ordem lexicográfica.

Considere o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. É fácil verificar que $P(x)$ possui uma raiz $\beta > 1$ e duas raízes complexas α e $\bar{\alpha}$ de módulo menor que 1.

O Fractal de Rauzy é o conjunto $\mathcal{E} = \{\sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i, \varepsilon_i \in \{0, 1\} \text{ e } \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} <_{lex} 111, \forall i \geq 5\}$. ([26])

A fronteira de \mathcal{E} foi objeto de estudos de vários matemáticos. Em particular, em [30] Kimura e Ito calcularam a dimensão de Hausdorff da fronteira de \mathcal{E} . Em [18] Messaoudi mostrou que a fronteira de \mathcal{E} é gerada por um automato finito. Usando este fato, ele provou várias propriedades da fronteira de \mathcal{E} como o fato que ela é uma curva de Jordan e um quasi-círculo.

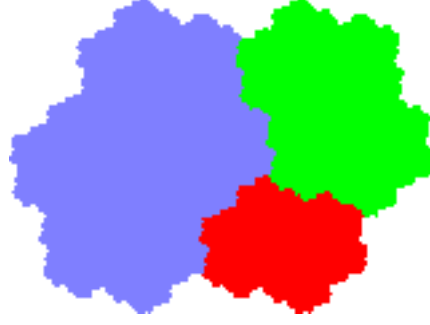


Figura 1: Fractal de Rauzy

Messaoudi [20] estendeu esse resultado para certos conjuntos \mathcal{E}_a , $a \geq 2$ associados aos polinômios $Q_a(x) = x^3 - ax^2 - x - 1$.

Neste trabalho vamos considerar os polinômios do tipo $P_a(x) = x^3 - ax^2 + x - 1$, onde $a \geq 2$. Pode-se provar que (ver Proposição 6.0.1, anexo) $P_a(x)$ possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas α e $\bar{\alpha}$ conjugadas e com módulo menor que 1 (ver [1]). De modo análogo ao Fractal de Rauzy clássico podemos associar ao polinômio $P_a(x)$ o conjunto (Fractal de Rauzy) definido da seguinte maneira:

Seja $(R_n)_{n \geq 0}$ a sequência recorrente definida por: $R_0 = 1$, $R_1 = a$, $R_2 = a^2 - 1$, $R_{n+3} = aR_{n+2} - R_{n+1} + R_n$, $\forall n \geq 0$ onde $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$.

Usando o algoritmo "fominha", podemos provar (ver Proposição 1.2.1, Capítulo 1) que todo inteiro natural se escreve de maneira única como $n = \sum_{i=0}^N \varepsilon_i R_i$ onde a sequência $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfaz a condição:

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01, \forall i \geq 5, \varepsilon_0 <_{lex} a, \varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} (a-1)(a-1), \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} (a-1)(a-1)0 \quad (1)$$

onde $<_{lex}$ é a ordem lexicográfica. Denotaremos por \mathcal{M} o conjunto formado pelas sequências que satisfazem tais condições.

A sequência $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq N}$ é chamada representação de N na base (R_n) ou simplesmente uma R -representação.

Definimos o Fractal de Rauzy associado a (R_n) por

$$\mathcal{R}_a = \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i, \forall N \geq 0, (\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N} \text{ é uma } R\text{-representação} \right\}.$$

O conjunto \mathcal{R}_a é chamado fractal de Rauzy associado a sequência (R_n) ou simplesmente fractal de Rauzy com restrições.

Por outro lado considerando a sequência $(G_n)_{n \geq 0}$ definida por $G_0 = 1$, $G_1 = a$, $G_2 = a^2$, $G_{n+3} = aG_{n+2} - G_{n+1} + G_n$, $\forall n \geq 0$. Novamente usando o algoritmo "fominha" podemos mostrar que todo inteiro natural se escreve de forma única $n = \sum_{i=0}^N \varepsilon_i G_i$ onde a sequência $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq N}$ satisfaz

$$\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01, \forall i \geq 0$$

onde colocamos $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-3} = 0$. Definimos o Fractal de Rauzy clássico por

$$\mathcal{F}_a = \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \forall i \geq 2, \varepsilon_i = 0, 1, \dots, a-1, \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01 \right\}.$$

onde $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-3} = 0$.

O conjunto \mathcal{F}_a será chamado de o fractal de Rauzy clássico e o conjunto \mathcal{R}_a será chamado fractal de Rauzy com restrições associados ao polinômio P_a (ver figuras abaixo, no caso $a=2$). O Fractal de Rauzy \mathcal{R}_a com restrições foi definido por Messaoudi [17], mas até o momento tal fractal não havia sido muito estudado.

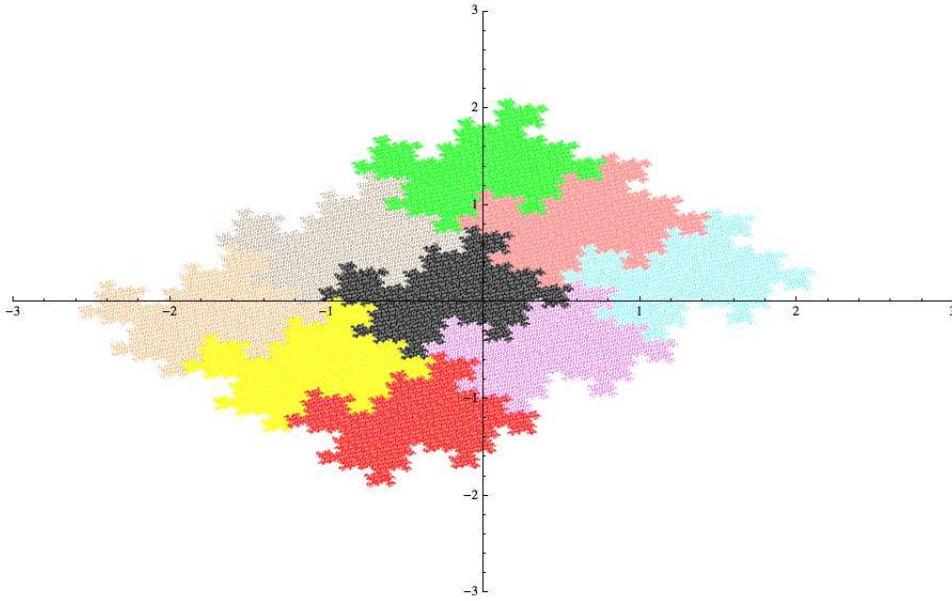


Figura 2: Fractal sem restrições com azulejamento

O estudo das fronteiras dos conjuntos \mathcal{R}_a e \mathcal{F}_a está intimamente relacionado com o estudo dos α -desenvolvimentos, ou seja, a representação de números complexos na base α . De fato, mostraremos que os pontos na fronteira de \mathcal{R}_a e também de \mathcal{F}_a são números complexos que têm mais de dois α -desenvolvimentos com dígitos em $\{0, 1, \dots, a-1\}$. Construiremos um autômato finito que nos permitirá verificar quando dois α -desenvolvimentos representam o mesmo número complexo. Fazendo

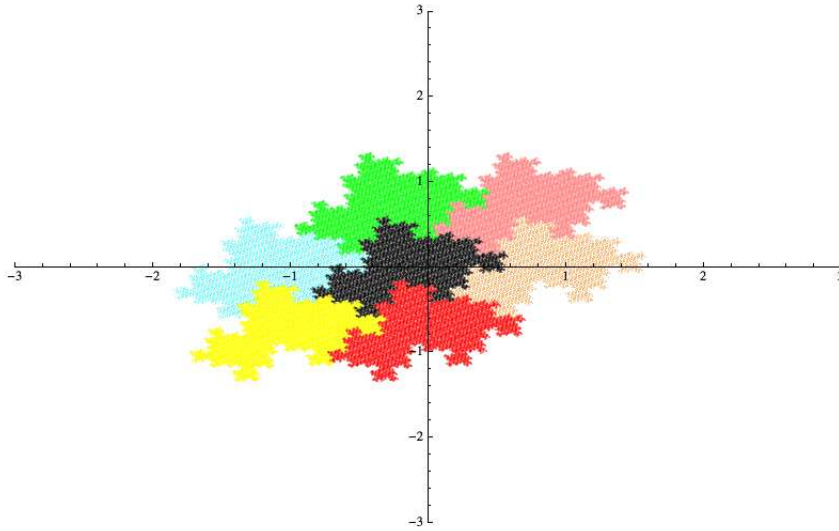


Figura 3: Fractal com restrições com azulejamento

uso desse autômato finito mostraremos que a fronteira de \mathcal{R}_a e \mathcal{F}_a são homeomorfas ao círculo e que tem a mesma dimensão de Hausdorff.

Nesta tese vamos provar várias propriedades de \mathcal{R}_a e \mathcal{F}_a e de suas fronteiras que resumimos nos seguintes teoremas:

Teorema 1: O conjunto \mathcal{R}_a tem as seguintes propriedades:

- 1) \mathcal{R}_a é um conjunto compacto;
- 2) \mathcal{R}_a induz um azulejamento periódico do plano complexo, isto é,

$$\mathbb{C} = \bigcup_{u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} (\mathcal{R}_a + u) \text{ e } \text{int}(\mathcal{R}_a + u) \cap (\mathcal{R}_a + v) \neq \emptyset, \text{ } u, v \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \text{ implica que } u = v.$$

Teorema 2: A fronteira de \mathcal{R}_a satisfaz as seguintes propriedades:

- 1)

$$\partial\mathcal{R}_a = \bigcup_{u \in A} \mathcal{R}_a \cap (\mathcal{R}_a + u)$$

onde A é um conjunto finito contido em $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ e $A \supset \{1, \alpha, \alpha - 1, -1, -\alpha, -(\alpha - 1)\}$.

- 2) Se $z \in \partial\mathcal{R}_a$ então existem $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}$ e $(\varepsilon'_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}$, $l < 2$ tais que $z = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$ e $\varepsilon'_l \neq 0$. onde $\mathcal{N} = \{(a_i)_{i \geq k}, k \in \mathbb{Z} | \forall n \geq k, (a_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } \mathbb{R}\text{-representação}\}$.

Teorema 3: Existe um autômato finito (grafo finito orientado com estados e flechas ligando estes estados) cujo conjunto dos estados é $S = \{0, \pm\alpha, \pm\alpha^2, \pm(\alpha - \alpha^2), \pm(1 + (a - 1)\alpha^2), \pm(1 + (a -$

$2)\alpha^2), \pm(1 - \alpha + (a - 1)\alpha^2), \pm(1 - 2\alpha + a\alpha^2)\}$ tal que para todo $(a_i)_{i \geq l}$ e $(b_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}$, temos que $\sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$ se, e somente se, a sequência $((a_i, b_i))_{i \geq l}$ é um caminho infinito no autômato começando no estado inicial.

Como consequência desse Teorema obtemos o seguinte resultado:

Teorema 4:

1) Para todo $a \geq 2$ temos

$$\partial \mathcal{R}_a = \bigcup_{u \in B} \mathcal{R}_a \cap (\mathcal{R}_a + u)$$

onde $B = \{\pm 1, \pm \alpha, \pm(\alpha - 1)\}$.

2) Se $a = 2$, então $\partial \mathcal{R}_a$ é homeomorfo ao círculo e a sua dimensão de Hausdorff é igual a $1,3593\dots$

Relacionado ao conjunto \mathcal{F}_a temos o seguinte resultado:

Teorema 5: A fronteira de \mathcal{F}_a é $\partial \mathcal{F}_a = \bigcup_{v \in B} \mathcal{F}_a \cap (\mathcal{F}_a + v)$ onde B é um conjunto finito contido em $\mathbb{Z}(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}) + \mathbb{Z}(1 + \alpha^{-2})$ cuja cardinalidade é par e maior ou igual a 8 e $\{\pm(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}), \pm\alpha^{-1}, \pm(1 + \alpha^{-2}), \pm(\alpha + \alpha^{-2})\} \subset B$.

Fazendo uso do autômato, definimos uma parametrização da fronteira de \mathcal{F}_a , mostraremos que a fronteira é homeomorfa ao círculo e calcularemos sua dimensão de Hausdorff, a qual é igual ao do Fractal com restrições \mathcal{R}_a .

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 1 enunciaremos alguns resultados sobre β -numeração. Esses resultados serão usados nos capítulos subsequentes. No Capítulo 2 provamos que o Fractal \mathcal{R}_a , é um conjunto compacto e que ele induz um azulejamento periódico do plano \mathbb{C} . Mostraremos que nesse azulejamento, \mathcal{R}_a possui exatamente 6 vizinhos. No Capítulo 3 caracterizamos a fronteira de \mathcal{R}_a usando o autômato. No Capítulo 4 utilizamos o autômato para parametrizar a fronteira de \mathcal{R}_a no caso $a = 2$, finalizando o capítulo com o cálculo da dimensão de Hausdorff da sua fronteira. Faremos a parametrização da fronteira de \mathcal{F}_a no Capítulo 5 e também calcularemos a sua dimensão de Hausdorff. No Apêndice mostraremos alguns resultados complementares.

Sistemas de Numeração

O objetivo deste capítulo é definir as β -representações ($\beta > 1$), isto é, escrever números reais na base β com dígitos que são inteiros naturais usando o algoritmo "fominha". Com isso definimos um sistema de numeração sobre os inteiros, ou seja, definimos uma sequência de inteiros $(R_n)_{n \geq 0}$ tal que todo inteiro natural N se escreve da seguinte maneira $N = \sum_{n=0}^{k(n)} \varepsilon_n R_n$ onde $(\varepsilon_n)_{0 \leq n \leq k(n)}$ é uma β -representação. Enunciaremos alguns resultados sobre as β -representações no caso onde β é um número de Pisot cúbico. A relação com o fractal de Rauzy vem do fato que esse último é definido como os conjuntos das somas $\sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i$ onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}$ é uma β -representação onde $\beta > 1$ é um número de Pisot.

1.1 β -Numeração

Seja $\beta > 1$ um número real. Uma representação de um número real não negativo x na base β é uma sequência infinita $(x_i)_{i \leq k}$, $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$x = x_k \beta^k + x_{k-1} \beta^{k-1} + \dots + x_1 \beta + x_0 + x_{-1} \beta^{-1} + x_{-2} \beta^{-2} + \dots$$

Esse número é representado pela sequência $x = x_k x_{k-1} \dots x_1 x_0 x_{-1} x_{-2} \dots$

Uma β -representação, chamada β -expansão pode ser obtida pelo algoritmo conhecido como "fominha" ou greedy. Denotamos por $[x]$ e $\{x\}$ a parte inteira e a parte fracionária do número x , respectivamente. Existe um número $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta^k \leq x < \beta^{k+1}$. Seja $x_k = \lfloor \frac{x}{\beta^k} \rfloor$ e $r_k = \{\frac{x}{\beta^k}\}$. Então para $i < k$, seja $x_i = \lfloor \beta r_{i+1} \rfloor$ uma fórmula de recorrência e $r_i = \{\beta r_{i+1}\}$. Temos então

$$x = x_k \beta^k + x_{k-1} \beta^{k-1} + \dots$$

se $k < 0$ (isto é, se $x < 1$), colocamos $x_0 = x_{-1} = \dots = x_{k+1} = 0$.

Se uma β -representação termina com uma infinidade de zeros, omitimos esses zeros e dizemos que ela é finita. Se β é inteiro, os dígitos x_i pertencem ao conjunto $A = \{0, \dots, \beta - 1\}$ caso contrário pertencem ao conjunto $A = \{0, \dots, \lfloor \beta \rfloor\}$.

O ponto entre a parte inteira e a fracionária da β -representação algumas vezes será omitido, assim a sequência infinita poderá ser considerada um elemento de $A^{\mathbb{N}}$.

Para os números $0 \leq x < 1$, a expansão definida acima coincide com a β -representação de **Rényi**, a qual pode ser definida da seguinte maneira: sejam $\beta > 1$ um número real e $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma transformação dada por $T_\beta(y) = \{\beta y\}$, onde $\{\}$ designa a parte fracionária. Para $x \in [0, 1)$ temos $x_{-j} = \lfloor \beta T_\beta^{j-1}(x) \rfloor$ para $j = 1, 2$. Todo número real $x \geq 0$ pode ter o seguinte desenvolvimento: $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \beta^{-n}$ onde x_n é definido da seguinte maneira:

Se $x > 1$ então $x_0 = \lfloor x \rfloor$ e $x_{n+1} = \lfloor \beta T^n(\{x\}) \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$ e se $0 \leq x \leq 1$ então $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = \lfloor \beta T^n(x) \rfloor$, $n \in \mathbb{N}$.

Para $x = 1$ os dois algoritmos ficam diferentes. A β -expansão de 1 é $1 = 1.000\dots$, enquanto a β -representação de Rényi de 1 é $d(x, \beta) = .t_{-1}t_{-2}\dots$, onde $t_{-j} = \lfloor \beta T_\beta^{j-1}(1) \rfloor$, $\forall j \geq 1$.

Seja $Fin(\beta)$ o conjunto dos números reais não negativos que possuem uma β -expansão finita. Algumas vezes denotamos uma β -expansão finita $x_n \dots x_k$, $k \leq n$, por $(x_i)_{n \geq i \geq k}$. Denotamos o conjunto de β -expansões finitas por F_β . Chamamos

$$E_\beta = \{(x_i)_{i \geq k}, k \in \mathbb{Z} \mid \forall n \geq k, (x_i)_{n \geq i \geq k} \in F_\beta\}$$

Dizemos que β tem a propriedade de Finitude ou que β satisfaz a propriedade (F) se

$$\mathbb{Z}[\beta] \cap [0, +\infty[\subset Fin(\beta).$$

onde $\mathbb{Z}[\beta]$ é o anel gerado por \mathbb{Z} e β . Se β satisfaz a propriedade (F), então $d(1, \beta)$ é finita, pois $\beta - \lfloor \beta \rfloor \in Fin(\beta)$.

Definição 1.1.1 Dizemos que β é um número de **Pisot** se β é um número inteiro algébrico com conjugados em relação a Galois com módulo menor do que 1. Além disso, se

$$X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \dots + b_0$$

é polinômio minimal de β então β é dito unidade de Pisot se $b_0 = \pm 1$.

Seja $N \in \mathbb{Z}$, denotamos por $Fin_N(\beta)$ o conjunto dos números reais positivos x cuja β -representação satisfaz, $x_k = 0$ para todo $k < N$. Algumas vezes denotaremos uma β -representação $x_n \dots x_k$, $n \geq k$

por $(x_i)_{n \geq i \geq k}$. Chamamos

$$E_\beta = \{(x_i)_{i \geq k}, k \in \mathbb{Z} \mid \forall n \geq k, (x_i)_{n \geq i \geq k} \text{ é uma } \beta\text{-representação finita}\}.$$

Dizemos que β satisfaz a propriedade (F) se

$$\mathbb{Z}[\beta] \cap [0, +\infty[\subset \text{Fin}(\beta).$$

Sabe-se que a classe dos números de Pisot que possuem a propriedade (F) é igual à classe dos números reais que são exatamente as raízes dominantes do seguinte polinômio (com coeficientes inteiros):

$$x^3 - ax^2 - bx - 1, \quad a \geq 0 \quad e \quad -1 \geq b \geq a + 1.$$

(se $b = -1$ adicionamos a restrição $a \geq 2$).

A β -representação de Rényi de 1 em relação a esses números é dada pela proposição seguinte:

Proposição 1.1.2 [1] *Seja β um número de Pisot cúbico unitário e que satisfaz a propriedade (F) com polinômio minimal $x^3 - ax^2 - bx - 1$. Então uma das seguintes possibilidades abaixo ocorre:*

$$\begin{aligned} \text{Se } 0 \geq b \geq a, \text{ então } d(1, \beta) &= \cdot ab1, \\ \text{Se } b = -1 \text{ e } a \geq 2, \text{ então } d(1, \beta) &= \cdot (a-1)(a-1)01, \\ \text{Se } b = a+1, \text{ então } d(1, \beta) &= \cdot (a+1)00a1. \end{aligned}$$

Observação 1.1.3 *Por exemplo, no caso $b = -1$ e $a \geq 2$ (caso de interesse deste trabalho) temos*

$$1 = \frac{a-1}{\beta} + \frac{a-1}{\beta^2} + \frac{1}{\beta^4}.$$

Definição 1.1.4 [12] *Dizemos que uma sequência $(a_n)_{k \leq n \leq p}$ é superior anti-lexicograficamente à sequência $(b_n)_{k' \leq n \leq p'}$ se existe um inteiro $s \in \mathbb{Z}$ tal que para todo $n > s$, $a_n = b_n$ e $a_s > b_s$.*

Proposição 1.1.5 [23] *Seja $x_n \dots x_0$ e $y_m \dots y_0$ duas β -representações. Então $\sum_{i=0}^n x_i \beta^i <_{lex} \sum_{i=0}^m y_i \beta^i$ se, e somente se, $x_n \dots x_0 <_{lex} y_m \dots y_0$*

Lembrando que β é um número de Pisot unitário se também é unidade do anel de inteiros de $\mathbb{Q}[\beta]$. E vamos considerar que β satisfaz a propriedade (F) e denotamos por α, γ seus conjugados em relação a Galois. Seja $P(x) = x^3 - ax^2 - bx - 1$ o polinômio minimal de β .

1.2 Sistema de Numeração sobre os inteiros

Nessa seção vamos assumir que β satisfaz as condições da Proposição (1.1.2) e que $x^3 - ax^2 - bx - 1$ é o polinômio minimal de β .

Um sistema de numeração sobre os inteiros induzido pelas β -representações é dado da seguinte maneira: supomos que $d(1, \beta) = \cdot a_{-1} \dots a_{-t}$ onde $a_{-t} \neq 0$. Seja $(R_n)_{n \geq 0}$ a sequência de números inteiros definida por: $R_0 = 1$, $R_1 = a$, $R_2 = a^2 + b$, $R_{n+3} = aR_{n+2} + bR_{n+1} + R_n$, $\forall n \geq 0$.

Como o polinômio $Q(x) = x^t - a_{-1}x^{t-1} - \dots - a_{-t}$ é múltiplo do polinômio $x^3 - ax^2 - bx - 1$, a sequência $(R_n)_{n \geq 0}$ satisfaz (provando-se por indução)

$$R_{n+t} = a_{-1}R_{n+t-1} + a_{-2}R_{n+t-2} + \dots + a_{-t}R_n, \forall n \geq 0.$$

Proposição 1.2.1 [21] *Todo número inteiro n tem uma única R -representação $(\varepsilon_j)_{k(n) \geq j \geq 0}$ tal que $n = \sum_{j=0}^{k(n)} \varepsilon_j R_j$ com $\varepsilon_j \geq 0$. Em particular:*

- a) Se $a \geq b \geq 0$ e $a \neq 0$ então para todo $i \geq 2$, a palavra $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} <_{lex} ab1$, $\varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} ab$, $\varepsilon_0 <_{lex} a$,
- b) Se $b = -1$ e $a \geq 2$ então para todo $i \geq 3$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01$, $\varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} (a-1)(a-1)0$, $\varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} (a-1)(a-1)$, $\varepsilon_0 <_{lex} a$,
- c) Se $b = a + 1$ e $a \geq 1$ então para todo $i \geq 4$,
 $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} <_{lex} (a+1)00a1$, $\varepsilon_3 \varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} (a+1)00a$, $\varepsilon_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} (a+1)00$, $\varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} (a+1)1$, $\varepsilon_0 < a$,
- d) Se $a = 0$ e $b = 1$ então para todo $i \geq 4$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} <_{lex} 10001$ e $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$.

Demonstração: Os dígitos $(\varepsilon_j)_{k(n) \geq j \geq 0}$ são obtidos aplicando o algoritmo "greedy" para inteiros.

- a) Se $a \geq b \geq 0$ e $a \neq 0$, então $(R_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência crescente de inteiros naturais. Logo, pela definição do algoritmo "greedy", prova-se que para todo $0 \leq j \leq k(n)$, $\sum_{i=0}^j \varepsilon_i R_i < R_{j+1}$. Portanto,

$$\varepsilon_j \varepsilon_{j-1} \dots \varepsilon_{j-t+1} <_{lex} a_{-1} a_{-2} \dots a_{-t}, \forall j \geq t-1 \quad (1.1)$$

- Pela relação (1.1) e a Proposição, temos $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} <_{lex} ab1$. Como $n - \sum_{i=1}^{k(n)} \varepsilon_i R_i = \varepsilon_0 R_0 = \varepsilon_0 < R_1 = a$ e $n - \sum_{i=2}^{k(n)} \varepsilon_i R_i + \varepsilon_0 R_0 < R_2 = a^2 + b = aR_1 + bR_0$, obtemos $\varepsilon_0 < a$ e $\varepsilon_1 \varepsilon_0 <_{lex} ab$.
- b) Se $b = -1$ e $a \geq 2$, então usando o mesmo argumento do caso 1, obtemos que para todo $i \geq 3$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01$. As outras condições são obtidas, pois $\varepsilon_0 R_0 < R_1 = a$, $\varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_0 R_0 < R_2 = (a-1)R_1 + (a-1)R_0$ e $\varepsilon_2 R_2 + \varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_0 R_0 < R_3 = (a-1)R_2 + (a-1)R_1$.
- c) Se $b = a + 1$ e $a \geq 1$ então pelo mesmo argumento do caso (a) temos para todo $i \geq 4$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} <_{lex} (a+1)00a1$. As outras condições são obtidas pois $R_1 = aR_0$, $R_2 = (a+1)R_1 + R_0$, $R_3 = (a+1)R_2$ e $R_4 = (a+1)R_3 + aR_0$.
- d) Se $a = 0$ e $b = 1$ então a relação (1.1) e a proposição implicam que para todo $i \geq 4$, $\varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} \varepsilon_{i-4} <_{lex} 10001$. Por outro lado, temos $R_0 = R_2 = R_3 = R_4 = 1$, $R_1 = 0$, $R_5 = R_6 = 2$. Então temos $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_5 = 0$. \square

Propriedades do Fractal de Rauzy

Neste Capítulo provamos que o Fractal de Rauzy \mathcal{R} é um conjunto compacto que induz um azulejamento periódico do plano.

2.1 Propriedades do Fractal de Rauzy

O Fractal de Rauzy \mathcal{F} (sem restrições) foi estudado por vários matemáticos, ver por exemplo [26], [18] e [29].

O conjunto \mathcal{F} possui várias propriedades, em particular, ele é um conjunto compacto, conexo ([26]), com interior simplesmente conexo [18] e além disso $0 \in \text{int}(\mathcal{F})$ [1].

Em relação ao conjunto \mathcal{R} (fractal de Rauzy com restrições), nada é conhecido na literatura. Neste trabalho propomos provar alguns resultados. Antes disso daremos algumas notações.

Notações: Seja $\mathcal{N} = \{(a_i)_{i \geq k}, k \in \mathbb{Z} \mid \forall n \geq k, (a_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } R\text{-representação}\}$, isto é, para todo $n \geq k + 3$, $a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} <_{\text{lex}} (a-1)(a-1)01$, $a_k <_{\text{lex}} (a-1)$, $a_{k+1} a_k <_{\text{lex}} (a-1)(a-1)$ e $a_{k+2} a_{k+1} a_k <_{\text{lex}} (a-1)(a-1)0$.

Denotamos por $\mathcal{N}_f = \{(a_i)_{k \leq i \leq n}, k, n \in \mathbb{Z}, (a_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } R\text{-representação}\}$.

Seja $z \in \mathbb{C}$ e $A \subset \mathbb{C}$, temos $A + z = \{x + z \mid x \in A\}$ e $zA = \{zx \mid x \in A\}$. Notamos por $\text{int}(A)$ o conjunto dos pontos interiores de A e \overline{A} o fecho de A .

Teorema 2.1.1 O conjunto \mathcal{R} satisfaz as seguintes propriedades:

1. O conjunto \mathcal{R} é compacto;
2. O conjunto \mathcal{R} induz um azulejamento periódico do plano \mathbb{C} , isto é, $\mathbb{C} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Z}} (\mathcal{R} + p + q\alpha)$ e para todo $p, q, r, s \in \mathbb{Z}$, $\text{int}(\mathcal{R} + p + q\alpha) \cap (\mathcal{R} + r + s\alpha) \neq \emptyset$ implica que $p = r$ e $q = s$.

Vamos fazer a demonstração fragmentando o resultado em algumas proposições:

Proposição 2.1.2 O conjunto \mathcal{R} é compacto.

Demonstração:

Seja $(z_n)_{n \geq 0}$ uma seqüência de elementos de \mathcal{R} tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$. Vamos mostrar que $z \in \mathcal{R}$. Supomos que $z_n = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i^{(n)} \alpha^i$, onde $(\varepsilon_i^{(n)})_{i \geq 2} \in \mathcal{M}$.

Seja $a \in \mathcal{A} = \{0, 1, \dots, a-1\}$.

Considere $\mathcal{C}_a = \{k \in \mathbb{N}, \varepsilon_2^{(k)} = a\}$. Temos que $\mathbb{N} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{C}_a$, como \mathcal{A} é finito existe um $a_2 \in \mathcal{A}$, tal que \mathcal{C}_{a_2} é infinito. Seja $k_2 \in \mathcal{C}_{a_2}$. Considere $\mathcal{C}_{a_2 b} = \{k \in \mathcal{C}_{a_2}, \varepsilon_3^{(k)} = b\}$ onde $b \in \mathcal{A}$.

Da mesma forma existe $a_3 \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{C}_{a_2 a_3} = \{k \in \mathbb{N}, \varepsilon_2^{(k)} = a_2, \varepsilon_3^{(k)} = a_3\} \text{ é infinito.}$$

Seja $k_3 \in \mathcal{C}_{a_2 a_3}$, temos $\varepsilon_2^{(k_3)} = a_2$ e $\varepsilon_3^{(k_3)} = a_3$.

Continuando com o mesmo processo (diagonal de Cantor) construímos uma seqüência $(a_i)_{i \geq 2}$ e $(k_n)_{n \geq 2}$ tal que

$$\varepsilon_2^{(k_n)} = a_2, \varepsilon_3^{(k_n)} = a_3, \dots, \varepsilon_n^{(k_n)} = a_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Considere $z_{k_n} = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i^{(k_n)} \alpha^i$ temos que $z_{k_n} \rightarrow z = \sum_{i=2}^{+\infty} a_i \alpha^i$, por (2.1) e $z \in \mathcal{R}$. Por outro lado \mathcal{R} é limitado pois se $z = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \in \mathcal{R}$ então

$$|z| \leq \sum_{i=2}^{\infty} |a-1| |\alpha|^i = \frac{(a-1)|\alpha|^2}{1-|\alpha|}.$$

Portanto, \mathcal{R} é compacto. □

Proposição 2.1.3 \mathcal{R} induz um azulejamento periódico em \mathbb{C} .

Para provar essa proposição precisamos dos seguintes resultados.

Antes disso considere a seqüência (F_n) definida por $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_2 = 1$, $F_{n+3} = aF_{n+2} - F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Observe que $F_{n+2} = R_n$, $\forall n \geq 0$ (ver subseção 1.2 do Capítulo 1).

Lema 2.1.4 As propriedades seguintes são válidas (ver Apêndice):

- i) Todo inteiro natural n pode ser escrito de uma única forma: $n = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i F_i$ onde $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$.
- ii) Sejam $(a_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$ e $(b_i)_{1' \leq i \leq \infty} \in \mathcal{N}$ tais que $a_l > 0$ e $b_{l'} > 0$. Se $\sum_{i=2}^N a_i \alpha^i = \sum_{i=1'}^{\infty} b_i \alpha^i$ então $l = l'$ e para todo $i \geq N$, $b_i = 0$ e para todo $l \leq i \leq N$, $a_i = b_i$.

- iii) Seja $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$ então $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \alpha^i \in \text{int}(\mathcal{R})$. Em particular, $0 \in \text{int}(\mathcal{R})$.
- iv) Seja $z \in \mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}^+$ então existe $(a_i)_{k \leq i \leq l} \in \mathcal{N}_f$, $k \leq l$ tal que $z = \sum_{i=k}^l a_i \beta^i$.
- v) Para todo $n \geq 2$ temos que $\beta^n = F_n \beta^2 + (F_{n-2} - F_{n-1})\beta + F_{n-1}$, em particular se $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq l} \in \mathcal{N}_f$ então $\sum_{i=2}^l \varepsilon_i \beta^i = n\beta^2 + r(n)\beta + s(n)$ onde $n = \sum_{i=2}^l \varepsilon_i F_i$, $r(n) = \sum_{i=2}^l \varepsilon_i (F_{i-2} - F_{i-1})$ e $s(n) = \sum_{i=2}^l \varepsilon_i F_{i-1}$.
- vi) Sejam $(a_i)_{l \leq i \leq k}$ e $(b_i)_{l \leq i \leq k}$ pertencentes a \mathcal{N}_f então $\sum_{i=l}^k a_i \beta^i < \sum_{i=l}^k b_i \beta^i$ se, e somente se, $(a_i)_{l \leq i \leq k} <_{\text{lex}} (b_i)_{l \leq i \leq k}$.
- vii) Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha^2 = c + d\alpha$, então 1, c e d são \mathbb{Q} -Linearmente Independentes.

Proposição 2.1.5 $\mathbb{C} = \bigcup_{p,q \in \mathbb{Z}} (\mathcal{R} + p + q\alpha)$.

Demonstração da Proposição 2.1.5:

Seja $z \in \mathbb{C}$, vamos provar que existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $z + m + n\alpha \in \mathcal{R}$.

Seja $\epsilon > 0$, pelo item (vii) do Lema (2.1.4) e pelo Teorema de Kronecker, o conjunto $\{n\alpha^2 + p\alpha + q, n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{Z}\}$ é denso em \mathbb{C} . Logo existe uma sequência $(z_k)_{k \geq 0} \in \mathbb{C}$ tal que

$$z_k = n_k \alpha^2 + p_k \alpha + r_k, \quad n_k \in \mathbb{N}, \quad p_k, \quad q_k \in \mathbb{Z}$$

existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $|z_k - z| < \epsilon$. Seja $A_k = n_k \alpha^2 + r(n_k)\alpha + s(n_k)$, onde $r(n_k)$ e $s(n_k)$ são definidos no item (v) do Lema (2.1.4). Temos $A_k \in \mathcal{R}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} A_k &= n_k \alpha^2 + p_k \alpha + r_k + (r(n_k) - p_k)\alpha + (s(n_k) - r_k) \\ &= z_k + t_k \alpha + m_k, \quad \text{onde} \end{aligned}$$

$t_k = r(n_k) - p_k$ e $m_k = s(n_k) - r_k$. Logo, $z_k + t_k \alpha + m_k \in \mathcal{R}$.

Sendo \mathcal{R} compacto temos para todo $k \geq k_0$,

$$|z + t_k \alpha + m_k| \leq |z - z_k| + |z_k + t_k \alpha + m_k| < \epsilon + d,$$

onde $d = \min\{|z - p|, z \in \mathcal{R}, p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha\}$.

Assim para todo $k \geq k_0$, $-t_k \alpha - m_k \in B(z, \epsilon + d)$.

Por outro lado, como $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ é um reticulado então $B(z, \epsilon + d)$ contém somente um número finito de $t_k \alpha + m_k$, logo existe uma sequência crescente $(k_i)_{i \geq 1}$ de números inteiros tal que para todo $i, j \in \mathbb{N}$, $t_{k_i} \alpha + r_{k_i} = t_{k_j} \alpha + r_{k_j}$. Logo existem $t, r \in \mathbb{Z}$ tais que $t_{k_i} = t_{k_j} = t$ e $r_{k_i} = r_{k_j} = r$, para todo $i, j \in \mathbb{N}$. Como $z_{k_i} + t_{k_i} \alpha + m_{k_i} \in \mathcal{R}$, $z_{k_i} \rightarrow z$ e \mathcal{R} é fechado, temos que $z + t\alpha + r \in \mathcal{R}$. \square

Proposição 2.1.6 Para quaisquer $u, v \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ temos $\text{int}(\mathcal{R} + u) \cap (\mathcal{R} + v) \neq \emptyset$ implica que $u = v$.

Demonstração da Proposição 2.1.6: Basta provar que se $(\text{int}(\mathcal{R}) + u) \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$, $u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ então $u = 0$.

Vamos fazer a prova por absurdo. Assuma que existam inteiros $p, q \in \mathbb{Z}$ e um elemento $z = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \in \mathcal{R}$ tal que $z + p + q\alpha \in \text{int}(\mathcal{R})$. Logo existe um inteiro $n_0 \geq 0$ tal que para todo $n \geq n_0$

$$\sum_{i=2}^n \varepsilon_i \alpha^i + p + q\alpha \in \mathcal{R}. \quad (2.2)$$

Caso 1: O conjunto $\{i \geq 2, \varepsilon_i \neq 0\}$ é infinito.

Neste caso, como $\beta > 1$, então existe um inteiro $N \geq n_0$ tal que $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta > 0$. Pelo item (iv) do Lema 2.1.4 deduzimos que

$$\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta = \sum_{i=l}^M d_i \beta^i, \text{ onde } (d_i)_{l \leq i \leq M} \in \mathcal{N}_f, l, M \in \mathbb{Z}. \quad (2.3)$$

A partir de (2.2) e (2.3) temos que $\sum_{i=l}^M d_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \in \mathcal{R}$.

Assim, do item (ii) do Lema 2.1.4 temos que $e_i = 0$ para todo $i > M$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta &= \sum_{i=2}^M \varepsilon_i \beta^i \\ &= \sum_{i=l}^M d_i \beta^i. \end{aligned}$$

Do item (iv) do Lema 2.1.4 temos que

$$\tilde{n}\beta^2 + (r(\tilde{n}) + q)\beta + (s(\tilde{n}) + p) = \tilde{l}\beta^2 + r(\tilde{l})\beta + s(\tilde{l}).$$

onde $\tilde{n} = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i F_i$ e $l = \sum_{i=2}^M e_i F_i$. Assim, $\tilde{l} = \tilde{n}$ e $\varepsilon_i = e_i$ para todo i (devido a unicidade na base F_i). Portanto, $p = q = 0$.

Caso 2: O conjunto $\{i \geq 2, \varepsilon_i \neq 0\}$ é finito.

Seja $N = \max\{i \geq 2, \varepsilon_i \neq 0\}$. Se $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta \geq 0$ então usa-se o mesmo argumento que no Caso 1.

Vamos assumir agora que $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \beta^i + p + q\beta < 0$. Temos que

$$\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \alpha^i + p + q\alpha = \sum_{i=2}^{\infty} d_i \alpha^i, \text{ onde } (d_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}.$$

Como $\sum_{i=2}^N \varepsilon_i \alpha^i$ é um ponto interior de \mathcal{R} (item(iii) do Lema(2.1.4)) então existe um inteiro

não negativo M tal que

$$-p - q\alpha + \sum_{i=2}^M d_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{\infty} e_i \alpha^i \in \mathcal{R}.$$

Como $-p - q\beta + \sum_{i=2}^M d_i \beta^i > 0$ então $-p - q\beta + \sum_{i=2}^M d_i \beta^i = \sum_{i=l}^K f_i \beta^i$ onde $(f_i)_{l \leq i \leq K} \in \mathcal{N}_f$.

Logo,

$$-p - q\alpha + \sum_{i=2}^M d_i \alpha^i = \sum_{i=l}^K f_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{\infty} e_i \alpha^i$$

onde $(f_i)_{l \leq i \leq K} \in \mathcal{N}_f$ e $l, K \in \mathbb{Z}$.

Pela Proposição 2.1.4 item(ii) deduzimos que $e_i = 0$ para todo $i > K$ e pelo mesmo argumento usado no Caso 1 temos que $p = q = 0$. \square

Observação 2.1.7 Na prova anterior, usamos o fato que se $\sum_{i=0}^n a_i \beta^i = \sum_{i=0}^n b_i \beta^i$, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ então $\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i = \sum_{i=0}^n b_i \alpha^i$. Esse resultado vem do fato que β e α são algebricamente conjugados.

Teorema 2.1.8 A fronteira de \mathcal{R} satisfaz as seguintes propriedades:

1)

$$\partial\mathcal{R} = \bigcup_{u \in A} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$$

onde A é um conjunto finito contido em $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, cuja cardinalidade é par e maior ou igual a 6 e $\{1, \alpha, \alpha - 1, -1, -\alpha, -(\alpha - 1)\} \subset A$.

2) Seja $z \in \partial\mathcal{R}$ então existem $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}$ e $(\varepsilon'_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}$, $l < 2$ tais que $z = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$ e $\varepsilon'_l \neq 0$.

Demonstração:

1) Seja $z \in \partial\mathcal{R} = \overline{\mathcal{R}} \setminus \text{int}(\mathcal{R}) = \mathcal{R} \setminus \text{int}(\mathcal{R})$. Então existe uma sequência $(z_n)_{n \geq 0}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z \quad \text{e} \quad z_n \notin \mathcal{R}, \quad \forall n \geq 0.$$

Pela Proposição 2.1.5, existe uma sequência $(p_n)_{n \geq 0}$ de elementos de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ tal que para todo $n \geq 0$, $z_n \in \mathcal{R} + p_n$, $\forall n \geq 0$. Logo $(p_n)_{n \geq 0}$ é limitada. Como $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$ é um grupo discreto então $(p_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência que possui um número finito de termos. Assim, existe uma subsequência $(p_{k_n})_{n \geq 0}$ de $(p_n)_{n \geq 0}$ tal que para todo n , $p_{k_n} = p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$.

Como $z_{k_n} \in \mathcal{R} + p$ temos que $z = \lim z_{k_n} \in \mathcal{R} + p$ (pois $\mathcal{R} + p$ é fechado). Portanto,

$$\partial\mathcal{R} \subset \bigcup_{p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + p).$$

Por outro lado, se $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + p)$, $p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}$. Logo pela Proposição (2.1.6), $z \notin \text{int}(\mathcal{R})$, portanto, $z \in \partial\mathcal{R}$. Assim, $\partial\mathcal{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + p) = \bigcup_{p \in A} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + p)$ onde $A = \{p \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha, \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + p) \neq \emptyset\}$.

Vamos provar que A é finito. De fato, seja $p \in A$ então existem $x, y \in \mathcal{R}$ tais que $p = x - y$. Logo $|p| \leq 2M$ onde $M = \max\{|z|, z \in \mathcal{R}\}$. Assim $A \subset B(0, 2M)$. Portanto, A é finito pois $A \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$. Finalmente, a cardinalidade de A é par pois se $u \in A$ então $-u \in A$.

Agora vamos provar que $\{1, \alpha, \alpha - 1, -1, -\alpha, -(\alpha - 1)\} \subset A$.

De fato, é fácil verificar que $-\alpha^3$ pode ser escrito das seguintes maneiras:

$$\begin{aligned} -\alpha^3 &= (a-1) \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{4i+1} + \alpha^{4i+2}) \\ &= \alpha + (a-2)\alpha^3 + (a-1) \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{4i} + \alpha^{4i+1}) \\ &= 1 + (a-1)\alpha^2 + (a-2)\alpha^3 + (a-1) \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{4i} + \alpha^{4i+1}) \end{aligned}$$

Logo, $-\alpha^3 \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha) \cap (\mathcal{R} + 1)$. Portanto, 1 e α pertencem a A .

Podemos também mostrar que

$$\begin{aligned} w &= \alpha - 1 + (a-1) \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{4i} + \alpha^{4i+1}) \\ &= (a-1) \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{4i-2} + \alpha^{4i+1}) \\ &= \alpha + (a-2)\alpha^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha^{4i-1} + \alpha^{4i+2}) \end{aligned}$$

Logo, $w \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} + \alpha)$. Portanto, $\alpha - 1$ pertence a A . Consequentemente concluímos a inclusão requerida.

2) Seja $z \in \partial\mathcal{R}$ então

$$z = n + p\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i, \quad (2.4)$$

onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}$ e $n, p \in \mathbb{Z}$.

Caso 1.1 Supomos $n + p\beta < 0$ e que o conjunto $\{i \geq 2, \varepsilon_i \neq 0\}$ é infinito.

Seja $t \geq 2$ tal que $n + p\beta + \sum_{i=2}^t \varepsilon_i \beta^i > 0$. Logo

$$n + p\beta + \sum_{i=2}^t \varepsilon_i \beta^i = \sum_{i=l}^k a_i \beta^i, \quad (a_i)_{l \leq i \leq k} \in \mathcal{N}_f, \quad a_k \neq 0. \quad (2.5)$$

Temos $k \leq t$ pois senão $\sum_{i=2}^t \varepsilon_i \beta^i = -n - p\beta + \sum_{i=l}^k a_i \beta^i > \beta^{t+1}$, absurdo, logo

$$n + p\beta + \sum_{i=2}^t \varepsilon_i \beta^i = \sum_{i=l}^t a_i \beta^i. \quad (2.6)$$

Portanto, de (2.5),(2.6) e (2.4) temos que

$$z = \sum_{i=l}^t a_i \alpha^i + \sum_{i=t+1}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i.$$

Afirmação: $a_l \dots a_t \varepsilon_{t+1} \dots \in \mathcal{N}$.

De fato, temos que $a_l \dots a_t \in \mathcal{N}_f$ e $\varepsilon_{t+1} \varepsilon_{t+2} \dots \in \mathcal{N}$.

Vamos supor $a_l \dots a_t \varepsilon_{t+1} \dots \notin \mathcal{N}$. Logo existe $x \in \{a_{t-2} a_{t-1} a_t \varepsilon_{t+1}, a_{t+1} a_t \varepsilon_{t+1} \varepsilon_{t+2} \dots, a_t \varepsilon_{t+1} \varepsilon_{t+2} \varepsilon_{t+3} \dots\}$ tal que $x \geq 10(a-1)(a-1)$.

Supomos $x = a_{t-2} a_{t-1} a_t \varepsilon_{t+1}$. Logo $\varepsilon_{t+1} = a-1$, $a_t = a-1$. Agora vamos supor $a_{t-1} > 0$. Então por (2.6) temos $\varepsilon_t = a-1$ e $\varepsilon_{t-1} > 0$ pois senão a sequência $a_l \dots a_t >_{lex} \varepsilon_l \dots \varepsilon_t$ e assim, $\sum_{i=l}^t \varepsilon_i \beta^i < \sum_{i=l}^t a_i \beta^i$, absurdo.

Por outro lado, $\varepsilon_{t+1} = a-1$ logo $\varepsilon_{t-2} \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t \varepsilon_{t+1} > 10(a-1)(a-1)$, absurdo.

Se $a_{t-1} = 0$ e $a_{t-1} > 1$ faz-se de modo análogo.

E se $x \in \{a_{t-1} \dots \varepsilon_{t+2}, a_t \dots \varepsilon_{t+3}\}$ procedemos da mesma maneira.

Caso 1.2 Se $\{i, \varepsilon_i \neq 0\}$ é finito, contradiz a equação (2.4) pois implica que $\sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \in \text{int}(\mathcal{R}) + n + p\alpha$ absurdo.

Caso 2 Supomos $n + p\beta > 0$.

Seja $z_k = n + p\alpha + \sum_{i=2}^k \varepsilon_i \alpha^i$. Temos que $\lim_{k \rightarrow +\infty} z_k = n + p\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i = z$.

Por outro lado, para todo k , $z_k = \sum_{i=l_k}^{N_k} \varepsilon''_{i,k} \alpha^i$, $\varepsilon''_{i,k} \in \mathcal{D}^\infty$ e $\varepsilon''_{l_k,k} > 0$. Além do mais, $l_k < 2$, pois senão $n = p = 0$. Por outro lado, existe $s \in \mathbb{Z}$, $s < l_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (pois z_k é limitado).

Logo, para todo k , $z_k \in \bigcup_{t=s}^1 \mathcal{E}_t$ onde $\mathcal{E}_t = \{\sum_{i=t}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i, (\varepsilon_i)_{i \geq t} \in \mathcal{N}, \varepsilon_t > 0\}$.

Como cada \mathcal{E}_t é compacto (prova análoga a que foi feita para mostrar que \mathcal{R} é compacto). Assim, $\bigcup_{t=s}^1 \mathcal{E}_t$ compacto, portanto fechado. Então $z = \lim_{k \rightarrow +\infty} z_k \in \bigcup_{t=s}^1 \mathcal{E}_t$. Portanto, $z = \sum_{i=l}^{+\infty} \varepsilon''_i \alpha^i$, $(\varepsilon''_i)_{l \leq i \leq +\infty} \in \mathcal{N}$, $l < 2$. \square

2.2 Caso $a = 2$

Teorema 2.2.1 \mathcal{R}_2 possui exatamente 6 vizinhos que são $\mathcal{R}_2 + u$ onde $\pm u \in \{1, \alpha, \alpha - 1\}$, isto é,

$$\forall u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \setminus \{0\}, \mathcal{R}_2 \cap (\mathcal{R}_2 + u) \neq \emptyset \iff u \in \{\pm 1, \pm \alpha, \pm(\alpha - 1)\}.$$

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + p + q\alpha) \neq \emptyset$, então existe $z \in \mathcal{R}$ tal que

$$z = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = p + q\alpha + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i, \text{ onde } (\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{N}.$$

Por outro lado, agrupando os termos de quatro em quatro temos:

$$\sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i = \sum_{i=0}^{+\infty} y_{4i} \alpha^{4i+2}.$$

onde $y_{4i} = (\varepsilon_{2+4i} - \varepsilon'_{2+4i}) + \dots + (\varepsilon_{5+4i} - \varepsilon'_{5+4i}) \alpha^3$.

Assim,

$$|p + q\alpha|^2 \leq \left(\frac{k|\alpha|^2}{1 - |\alpha|^4} \right)^2$$

onde $k = \max\{\sum_{i=0}^3 |\varepsilon_i - \varepsilon'_i| |\alpha|^i, \varepsilon_i, \varepsilon'_i \in \{0, 1\}\}$. Podemos mostrar que $\left(\frac{k|\alpha|^2}{1 - |\alpha|^4} \right)^2 < 3, 1073$.

Por outro lado, considere $\alpha = c + di$, onde $c = 0, 1225 \dots$ e $d = 0, 7448 \dots$. Logo $|p + q\alpha|^2 = (p + qc)^2 + q^2 d^2$. Portanto, $|q| \leq 2$ pois, caso contrário, se $|q| > 3$ teríamos que $q^2 d^2 = 4,999 > 3, 1073$.

Agora, vamos analisar os casos onde $q \in \{\pm 2, \pm 1, 0\}$:

Caso 1: Se $q = -2$ então $p \in \{0, 1\}$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = (p - 2c)^2 + 4d^2 \leq 3, 1073 \implies (p - 2c)^2 \leq 3, 1073 - 2, 2188 = 0, 8885$. Os possíveis valores de p são $\{0, 1\}$ e as regiões associadas são $\mathcal{R} - 2\alpha$ e $\mathcal{R} + 1 - 2\alpha$.

Caso 2: Se $q = -1$ então $p \in \{-1, 0, 1\}$. De fato, neste caso temos: $|p + q\alpha|^2 = (p - c)^2 + d^2 \leq 3, 1073 \implies (p - c)^2 \leq 3, 1073 - 0, 5557 = 2, 5525$. Logo, os possíveis valores de p são $\{-1, 0, 1\}$ e as regiões associadas são: $\mathcal{R} - \alpha$, $\mathcal{R} - 1 - \alpha$, $\mathcal{R} + 1 - \alpha$.

Caso 3: Se $q = 0$ então $p \in \{-1, 0, 1\}$. De fato, neste caso temos: $|p + q\alpha|^2 = |p|^2 \leq 3, 1073 \implies p = -1, 0, 1$. Assim temos as regiões \mathcal{R} , $\mathcal{R} + 1$, $\mathcal{R} - 1$.

Caso 4: Se $q = 1$ então $p \in \{-1, 0, 1\}$. De fato, neste caso temos: $|p + q\alpha|^2 = (p + c)^2 + d^2 \leq 3, 1073 \implies (p + c)^2 \leq 3, 1073 - 0, 5557 = 2, 5525$. Logo, os possíveis valores de p são $\{-1, 0, 1\}$ e as regiões associadas são: $\mathcal{R} + \alpha$, $\mathcal{R} + 1 + \alpha$, $\mathcal{R} - 1 + \alpha$.

Caso 5: Se $q = 2$ então $p \in \{-1, 0\}$. De fato, $|p + q\alpha|^2 = (p + 2c)^2 + 4d^2 \leq 3, 1073 \implies (p + 2c)^2 \leq 3, 1073 - 2, 2188 = 0, 8885$. Os possíveis valores de p são $\{0, -1\}$ e as regiões associadas são $\mathcal{R} + 2\alpha$ e $\mathcal{R} - 1 + 2\alpha$.

Portanto, temos as seguintes regiões: $\mathcal{R} \pm 1, \mathcal{R} \pm \alpha, \mathcal{R} \pm (\alpha - 1), \mathcal{R} \pm (1 + \alpha), \mathcal{R} \pm 2\alpha, \mathcal{R} \pm (-1 + 2\alpha)$. Vamos eliminar estas 3 últimas regiões. De fato,

Suponhamos por absurdo que $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + 2\alpha) \neq \emptyset$. Logo

$2\alpha = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i$ onde $(\varepsilon_i), (\varepsilon'_i) \in \mathcal{N}$. Portanto,

$$|2\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2) \alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1073 \leq 1,3306. \quad (2.7)$$

Lembre que $|\alpha| \sim 0,42821$.

Por outro lado

$$|2\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2) \alpha^2| \subset \{|2\alpha|, |2\alpha + \alpha^2|, |2\alpha - \alpha^2|\} \approx \{1,50; 1,69; 1,52\}. \quad (2.8)$$

Logo, por (2.7) e (2.8) obtemos uma contradição.

Supomos, por absurdo, que $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} - 1 + 2\alpha) \neq \emptyset$. Assim, da mesma maneira que no caso precedente temos: $-1 + 2\alpha = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i$ logo

$$|-1 + 2\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2) \alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1073 \leq 1,3306. \quad (2.9)$$

Por outro lado,

$$|-1 + 2\alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2) \alpha^2| \subset \{|-1 + 2\alpha|, |-1 + 2\alpha + \alpha^2|, |-1 + 2\alpha - \alpha^2|\} \approx \{1,67; 2,11; 1,32\}. \quad (2.10)$$

Logo, por (2.9) e (2.10) obtemos uma contradição.

Finalmente, supomos novamente por absurdo que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R} + 1 + \alpha \neq \emptyset$. Então, $1 + \alpha = \sum_{i=2}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i$ e assim

$$|1 + \alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2) \alpha^2| = \left| \sum_{i=3}^{+\infty} (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i \right| < |\alpha| \cdot 3,1073 \leq 1,3306 \quad (2.11)$$

Por outro lado,

$$|1 + \alpha + (\varepsilon'_2 - \varepsilon_2) \alpha^2| \subset \{|1 + \alpha|, |1 + \alpha + \alpha^2|, |1 + \alpha - \alpha^2|\} \approx \{1,34; 1,09; 1,75\}. \quad (2.12)$$

Logo, por (2.11) e (2.12) obtemos uma contradição. \square

O autômato que reconhece a fronteira de \mathcal{R}

No capítulo anterior, α mostramos que todo elemento da fronteira de \mathcal{R}_a tem pelo menos duas α -representações. Definimos um autômato que fornece todos os números complexos que tem pelo menos duas α -representações. Com isso provamos que para todo $a \geq 2$

$$\partial\mathcal{R}_a = \bigcup_{u \in B} \mathcal{R}_a \cap (\mathcal{R}_a + u)$$

onde $B = \{\pm 1, \pm\alpha, \pm(\alpha - 1)\}$.

Definição 3.0.2 Um autômato finito é uma terna (S, A, C) onde A é o alfabeto, S o conjunto de estados e C um subconjunto de $S \times A \times S$.

Seja $(a_n)_{n \geq 0}$ uma sequência de elementos de A . Dizemos que $(a_n)_{n \geq 0}$ é um caminho infinito no autômato se existir uma sequência $(s_n)_{n \geq 0}$ onde $s_n \in S$, $\forall n \geq 0$ tal que $(s_{n-1}, a_n, s_n) \in C$, $\forall n \geq 1$.

Uma palavra $a_1 \dots a_n$ (respectivamente, uma palavra infinita $a_1 \dots a_n \dots$) é reconhecível pelo autômato (S, A, C) , se existir uma palavra $s_0 \dots s_n \in S$, $s_0 \in I$ (resp. uma sequência $s_n \in A^{\mathbb{N}}$) tal que $(s_{i-1}, a_i, s_i) \in C$, para $i = 1, \dots, n$ (resp. para todo $i \in \mathbb{N}$).

Dizemos que uma sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ é reconhecida pelo autômato (S, A, C) se existir uma sequência $(s_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $(s_{i-1}, a_i, s_i) \in C$, $\forall i \geq 1$.

3.1 Relação com as representações impróprias na base α

Como o módulo de α é inferior à 1 e 0 pertence à $\text{int}(\mathcal{R})$, para todo número complexo z existe um inteiro k tal que $\alpha^k z \in \mathcal{R}$. Logo, todo número complexo z se escreve na base α como $z =$

$\sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i$, $l \in \mathbb{Z}$ e $(\varepsilon_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}$. A sequência $(\varepsilon_i)_{i \geq l}$ é chamada α -representação de z . Em virtude do item (ii) do Lema (2.1.4) todo ponto da fronteira tem pelo menos duas α -representações. Esses números complexos são caracterizados pelo teorema que foi provado por Thurston [28].

Teorema 3.1.1 [28] *Existe um autômato finito \mathcal{B} tal que para todo $(a_i)_{i \geq l}$ e $(b_i)_{i \geq l}$ dois elementos distintos de \mathcal{N} temos que $\sum_{i=l}^{\infty} a_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} b_i \alpha^i$ se, e somente se, a sequência $((a_i, b_i))_{i \geq l}$ é reconhecido pelo autômato \mathcal{B} .*

Porém a prova de Thurston não fornece explicitamente os estados.

3.1.1 Definição do autômato que reconhece os pontos com no mínimo duas expansões

Na sequência mostraremos como construir o autômato \mathcal{A} que caracteriza a fronteira de \mathcal{R} . Provaremos na sessão seguinte que os estados do autômato \mathcal{A} são (ver Teorema 3.2.1) $S = S_a = \{0, \pm\alpha, \pm\alpha^2, \pm(\alpha - \alpha^2), \pm(1 + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (a-2)\alpha^2), \pm(1 - \alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 - 2\alpha + a\alpha^2)\}$.

Sejam s e t dois estados. O conjunto das arestas é $(s, (c, d), t) \in S \times \{0, 1, \dots, a-1\}^2 \times S$ de modo que satisfaça $t = \frac{s}{\alpha} + (c-d)\alpha^2$. O conjunto de estados iniciais é $\{(0, (0, 0), 0)\}$.

Vamos explicar como usar este autômato. Seja $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \geq l}$ e $\varepsilon' = (\varepsilon'_i)_{i \geq l}$ em \mathcal{D}^∞ , $x = \sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i$ e $y = \sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$. Supomos que $x = y$. Para todo $k \geq l$ temos

$$A_k(\varepsilon, \varepsilon') = \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i \quad (3.1)$$

Na próxima subseção vamos provar que para todo A_k , $k \in \mathbb{N}$, pertence a S . Claramente, para todo $k \geq l$,

$$A_{k+1}(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{A_k(\varepsilon, \varepsilon')}{\alpha} + (\varepsilon_{k+1} - \varepsilon'_{k+1})\alpha^2. \quad (3.2)$$

Seja s o menor inteiro tal que $\varepsilon_s \neq \varepsilon'_s$. Assim $A_i(\varepsilon, \varepsilon') = 0$ para $i \in \{l, \dots, s-1\}$. Suponhamos que $\varepsilon_s > \varepsilon'_s$. Então, $A_s = (\varepsilon'_s - \varepsilon_s)\alpha^2 = \alpha^2$. Por (3.2) deduzimos que $A_{s+1}(\varepsilon, \varepsilon') = \alpha + (\varepsilon_{s+1} - \varepsilon'_{s+1})\alpha^2$ o qual deve pertencer a S_a . Assim $A_{s+1}(\varepsilon, \varepsilon') = \alpha - \alpha^2$ se $(\varepsilon_{s+1}, \varepsilon'_{s+1}) = (t-1, t)$, onde $1 \leq t \leq a-1$ ou $A_{s+1}(\varepsilon, \varepsilon') = \alpha$ se $(\varepsilon_{s+1}, \varepsilon'_{s+1}) = (t, t)$, onde $0 \leq t \leq a-1$. Logo $(\alpha^2, (t-1, t), \alpha - \alpha^2)$, é uma aresta que liga o estado α^2 ao estado $\alpha - \alpha^2$ e $(\alpha^2, (t, t), \alpha)$, é uma aresta que liga o estado α^2 ao estado α . Como o conjunto de estados S é finito, obtemos um autômato finito (ver Figura).

3.2 Caracterização dos pontos com duas expansões

Para todo $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \geq l}$ e $\varepsilon' = (\varepsilon'_i)_{i \geq l}$ em \mathcal{D}^∞ , seja

$$S(\varepsilon, \varepsilon') = \{A_k(\varepsilon, \varepsilon'); k \geq l\} = \left\{ \alpha^{-k+2} \sum_{i=l}^k (\varepsilon_i - \varepsilon'_i) \alpha^i; k \geq l \right\}.$$

e

$$\mathcal{D}^\infty := \{(a_i)_{i \geq k}, k \in \mathbb{Z}, \forall n \geq k, (a_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } R\text{-representação}\}$$

isto é, $a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01$, $\forall n \geq k$ onde $a_{k-1} = a_{k-2} = a_{k-3} = 0$.

Teorema 3.2.1 *Sejam $x = \sum_{i=l}^\infty \varepsilon_i \alpha^i$, $y = \sum_{i=l}^\infty \varepsilon'_i \alpha^i$, onde $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \geq l}$ e $\varepsilon' = (\varepsilon'_i)_{i \geq l}$ em \mathcal{D}^∞ . Então, $x = y$ se, e somente se, $S(\varepsilon, \varepsilon')$ é finito. Além disso, $S(\varepsilon, \varepsilon') \subset S_a = \{0, \pm\alpha, \pm\alpha^2, \pm(\alpha - \alpha^2), \pm(1 + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (a-2)\alpha^2), \pm(1 - \alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 - 2\alpha + a\alpha^2)\}$. E*

$$S_a = \bigcup_{(\varepsilon, \varepsilon') \in \Delta} S(\varepsilon, \varepsilon').$$

onde $\Delta = \{((\varepsilon_i)_{i \geq l}, (\varepsilon'_i)_{i \geq l}) \in \mathcal{D}^\infty \times \mathcal{D}^\infty; \sum_{i=l}^\infty \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=l}^\infty \varepsilon'_i \alpha^i\}$.

Demonstração do Teorema 3.2.1: *Supomos que $S(\varepsilon, \varepsilon')$ é finito, logo existe um número real $M > 0$ tal que $|\sum_{i=l}^k \varepsilon_i \alpha^i - \sum_{i=l}^k \varepsilon'_i \alpha^i| \leq M|\alpha|^{k-2}$, para todo $k \geq l$. Como $0 < |\alpha| < 1$, então, fazendo k tender a $+\infty$ temos $\sum_{i=l}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$.*

Vamos provar a recíproca. Sejam $x = \sum_{i=l}^\infty \varepsilon_i \alpha^i$ e $y = \sum_{i=l}^\infty \varepsilon'_i \alpha^i$ com $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \geq l}$ e $\varepsilon' = (\varepsilon'_i)_{i \geq l}$ em \mathcal{D}^∞ . Suponhamos $x = y$. Vamos provar que $A_k = A_k(\varepsilon, \varepsilon')$ pertence a S para todo $k \geq l$. Como $x = y$, então para todo $k \geq l$, temos

$$A_k = \sum_{i=k+1}^\infty (\varepsilon'_i - \varepsilon_i) \alpha^{i-k+2} = \sum_{i=3}^\infty (\varepsilon'_{i+k-2} - \varepsilon_{i+k-2}) \alpha^i \in \mathcal{R} - \mathcal{R}. \quad (3.3)$$

Vamos fixar $k \geq l$ e assumir que $A_k \neq 0$. A partir de (3.1) e do fato que α é um inteiro algébrico de grau 3, deduzimos

$$A_k = n_k \alpha^2 + p_k \alpha + q_k, \text{ onde } n_k, p_k, q_k \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Como $n_k\beta^2 + p_k\beta + q_k$ ou $-(n_k\beta^2 + p_k\beta + q_k)$ pertencem a $\mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}^+$, deduzimos do item (iv) do Lema 2.1.4, que existe $(c_i)_{s_k \leq i \leq m_k} \in \mathcal{N}_f$ tal que $c_{m_k} > 0$ e

$$n_k\beta^2 + p_k\beta + q_k = \pm \sum_{i=s_k}^{m_k} c_i\beta^i \quad (3.5)$$

Supomos que é igual a $\sum_{i=s_k}^{m_k} c_i\beta^i$. O outro caso pode ser tratado do mesmo modo. Como β e α são conjugados algebricamente, a partir de (3.1), (3.4) e (3.5) obtemos

$$\beta^{-k+2} \sum_{i=l}^k \varepsilon_i\beta^i = \beta^{-k+2} \sum_{i=l}^k \varepsilon'_i\beta^i + \sum_{i=s_k}^{m_k} c_i\beta^i. \quad (3.6)$$

A partir do item (vi) do Lema 2.1.4, $\beta^{-k+2} \sum_{i=l}^k \varepsilon_i\beta^i < \beta^3$, consequentemente $m_k \leq 2$. Colocando $c_i = 0$ para todo $i > m_k$, temos $n_k\beta^2 + p_k\beta + q_k = \sum_{i=s_k}^2 c_i\beta^i$. Como β é um número de Pisot, temos por proposição em [14] que existe um inteiro $s = s(a)$ tal que $s \leq s_k$. Portanto,

$$A_k = \sum_{i=s}^2 c_i\alpha^i. \quad (3.7)$$

Logo

$$S_a \subset \left\{ \sum_{i=s}^2 c_i\alpha^i, (c_i)_{s \leq i \leq 2} \in \mathcal{N}_f \right\} \quad (3.8)$$

Observe que se

$$A_k = \sum_{i=s}^2 c_i\alpha^i \text{ então } \tilde{A}_k = \sum_{i=s}^2 c_i\beta^i < \beta^3 \quad (3.9)$$

Para provar que $S_a = \{0, \pm\alpha, \pm\alpha^2, \pm(\alpha - \alpha^2), \pm(1 + (a-1)\alpha^2), \pm(1 + (a-2)\alpha^2), \pm(1 - \alpha + (a-1)\alpha^2), \pm(1 - 2\alpha + a\alpha^2)\}$, precisamos dos seguinte Lema:

Lema 3.2.2 *Sejam $n, p, q \in \mathbb{Z}$ e $z = n + p\alpha + q\alpha^2$ um elemento de S_a então $|n| \leq 1$.*

Demonstração: *Sejam $S = \{A_k = n_k + p_k\alpha + q_k\alpha^2, k \geq 1\}$ e $n = \max\{|n_k|, k \geq 0\}$.*

Supomos $n \geq 2$.

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_k = n + p\alpha + q\alpha^2$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Logo $A_{k+1} = \frac{n}{\alpha} + (p+q)\alpha + d\alpha^2$, $|d| \leq a-1$.

Portanto,

$$A_{k+1} = (p+n) + (q-na)\alpha + (d+n)\alpha^2.$$

Assim, $-n \leq p + n \leq n$, logo $-2n \leq p \leq 0$.

Por outro lado,

$$A_{k+2} = (q - na + p + n) + (d + n - a(p + n))\alpha + (f + p + n)\alpha^2, \quad |f| \leq a - 1.$$

Logo, $-n \leq q - na + p + n \leq n$. Portanto, $n(a - 2) - p \leq q$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= n + p\beta + q\beta^2 \\ &= 1 - \beta + a\beta^2 + (n - 1) + (p + 1)\beta + (q - a)\beta^2 \\ &\geq \beta^3 + (n - 1) + (p + 1)\beta + (n(a - 2) - p - a)\beta^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Como $n \geq 2$ então $n(a - 2) - p - a \geq a - 4 - p$.

Logo

$$\tilde{A}_k \geq \beta^3 + (n - 1) + (p + 1)\beta + (a - 4 - p)\beta^2 \quad (3.11)$$

Caso 1 Se $a \geq 4$ então $a - 4 - p \geq 0$, logo

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &\geq \beta^3 + (n - 1) + (p + 1 + a - 4 - p)\beta \\ &= \beta^3 + (n - 1) + (a - 3)\beta > \beta^3, \text{ o que não ocorre devido a equação 3.9} \end{aligned}$$

Caso 2 Se $a = 3$ e $-2n \leq p < 0$, então $a - 4 - p \geq 0$ e obtemos $\tilde{A}_k \geq \beta^3$.

Caso 2.1 Se $a = 3$ e $p = 0$ então

$$A_{k+3} = (d+n-a(p+n)+q-na+p+n)+((f+p+n)-a(q-na+p+n))\alpha+(g+q-na+p+n)\alpha^2, \quad |g| \leq a-1$$

Logo,

$$\begin{aligned} -n &\leq d + n - a(p + n) + q - n - 1 + p + n \leq n \\ n(2a - 3) + p(a - 1) &\leq q - a \\ 3n - 5 &\leq q - 3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Das equações (3.10) e (3.12) temos

$$\tilde{A}_k \geq \beta^3 + (n - 1) + \beta + (3n - 5)\beta^2 > \beta^3, \quad \text{pois } n \geq 2.$$

Caso 3 Se $a = 2$ e $p < -2$ então $a - 4 - p \geq 0$ e segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_k &\geq \beta^3 + (n-1) + (p+1)\beta + (-2-p)\beta^2 \\
&= \beta^3 + (-2-p) + (n-1+2+p) + ((p+1) + 2(-2-p))\beta \\
&= \beta^3 + (-2-p) + (n+1+p) + (-3-p)\beta
\end{aligned}$$

Caso 3.1 Se $-2n \leq p \leq -3$ então $\tilde{A}_k \geq \beta^3 + (-2-p) + (n-2) \geq \beta^3$, o que não ocorre devido a equação 3.9.

Caso 3.2 Se $a = 2$ e $-2 \leq p \leq 0$ então $A_k = n + q\alpha^2$ ou $A_k = n - \alpha + q\alpha^2$ ou $A_k = n - 2\alpha + q\alpha^2$.

Caso 3.2.1 Se $A_k = n + q\alpha^2$, $n \geq 2$ então

$$A_{k+1} = n + (q - na)\alpha + (d + n)\alpha^2.$$

Portanto, (ver casos 3 e 3.1) temos $q - na = 0$ ou -1 ou -2 . Assim $q = na$ ou $q = na - 1$ ou $q = na - 2$. Logo

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_k &= n + (na - 1)\beta^2 > 1 - \beta + a\beta^2 = \beta^3 \text{ ou} \\
\tilde{A}_k &= n + na\beta^2 > \beta^3 \text{ ou} \\
\tilde{A}_k &= n + (na - 2)\beta^2 \geq n + 2\beta^2 > 1 - \beta + a\beta^2 = \beta^3
\end{aligned}$$

os quais não ocorrem devido a equação 3.9.

Caso 3.2.2 Se $A_k = n - \alpha + q\alpha^2$ então

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= (n-1) + (q - na)\alpha + (d + n)\alpha^2 \text{ e} \\
A_{k+2} &= (q - na + n - 1) + (d + n - a(n-1))\alpha + (f + n - 1)\alpha^2.
\end{aligned}$$

Temos $-n \leq q - na + n - 1 \leq n \implies 1 = n(a-2) + 1 \leq q$.

Caso 3.2.2.1 Se $q \geq 2 = a$ então

$$\tilde{A}_k = n - \beta + q\beta^2 \geq n - \beta + a\beta^2 \geq \beta^3.$$

Caso 3.2.2.1.1 Se $q = 1$ então $A_{k+2} = -n + [d + n - a(n-1)]\alpha + (f + n - 1)\alpha^2$. Como $A_{k+2} \in S_a$ então $-A_{k+2} \in S_a$. Temos

$$-A_{k+2} = n + [a(n-1) - n - d]\alpha + (-f - n + 1)\alpha^2.$$

Do que foi feito anteriormente temos $a(n-1) - n - d \in \{1, -2\}$.

Se $a(n-1) - n - d = -1$ então $d = n - 1 \leq 1$, logo $n \leq 2$.

Se $a(n-1) - n - d = -2$ então $d = n - 1 \leq 1$, logo $n \leq 1$, absurdo pois $n \geq 2$.

Logo $n = 2$ ou $n = 3$, portanto, $A_k = 2 - \alpha + \alpha^2$ ou $A_k = 3 - \alpha + \alpha^2$.

Caso 3.2.2.1.1.1 Se $A_k = 2 - \alpha + \alpha^2$ então

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 1 + (1 - 2a)\alpha + (d + 2)\alpha^2 \\ &= 1 - 3\alpha + (d + 2)\alpha^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_{k+2} &= -2 + (d + 2 - a)\alpha + (f + 1)\alpha^2 \\ &= -2 + d\alpha + (f + 1)\alpha^2, \end{aligned}$$

Portanto, $A_{k+2} = -2 + \alpha - \alpha^2$ logo $d = 1$ e $f = -2$, o que não ocorre pois $|f| \leq a - 1 = 1$ ou $A_{k+2} = -2 + 2\alpha - \alpha^2$ E assim $d = 2$, o que não ocorre.

Caso 3.2.3 Se $A_k = n - 2\alpha + q\alpha^2$ então $A_{k+1} = (n - 2) + (q - na)\alpha + (d + n)\alpha^2$ e

$$A_{k+2} = (q - na + n - 2) + (d + n - a(n - 2))\alpha + (f + n - 2)\alpha^2, |f| \leq a - 1.$$

Assim, $-n \leq q - na + n - 2 \leq n$, logo $n(a - 2) \leq q - 2$ então $n(a - 2) + 2 \leq q$, portanto, $2 \leq q$.

Caso 3.2.3.1 Se $q \geq 3$ então

$$\begin{aligned} \tilde{A}_k &= n - 2\beta + q\beta^2 \geq n - 2\beta + (a + 1)\beta^2 \\ &= n - \beta + a\beta^2 + \beta^2 - \beta \\ &= \beta^3 + \underbrace{(\beta^2 - \beta)}_{>0} > \beta^3, \text{ o que não ocorre devido a equação (3.9).} \end{aligned}$$

Caso 3.2.3.2 Se $q = 2$ então $A_k = n - 2\alpha + 2\alpha^2$ e $A_{k+2} = -n + (d - n + 4)\alpha + (f + n - 2)\alpha^2$.

Logo, $d - n + 4 = 2$ e assim $d = n - 2 \leq 1$ e, portanto, $n \leq 3$.

Caso 3.2.3.2a) Se $n = 2$ então $A_k = 2 - 2\alpha + 2\alpha^2$, $A_{k+1} = (2 - 2a)\alpha + (d + 2)\alpha^2 = -2\alpha + (d + 2)\alpha^2$ e assim

$$A_{k+2} = -2 + (d + 2)\alpha + f\alpha^2 \text{ e assim } d = 0 \text{ e } f = 2 \text{ o que não ocorre.}$$

Caso 3.2.3.2b) Se $n = 3$ então $A_k = 3 - 2\alpha + 2\alpha^2$, $A_{k+1} = 1 + (2 - 3a)\alpha + (d + 3)\alpha^2 = 1 - 4\alpha + (d + 3)\alpha^2$ e assim $A_{k+2} = -3 + (d + 3 - a)\alpha + (f + 1)\alpha^2$ logo $d + 3 - a = 2$ então $d = a - 1 = 1$ e $f + 1 = -2$ portanto $f = -3$ o que não ocorre. \square

Agora vamos provar que $S_a = \{0, \pm\alpha, \pm\alpha^2, \pm(\alpha - \alpha^2), \pm(1 + (a - 1)\alpha^2), \pm(1 + (a - 2)\alpha^2), \pm(1 - \alpha + (a - 1)\alpha^2), \pm(1 - 2\alpha + a\alpha^2)\}$.

Seja $A_k = n + p\alpha + q\alpha^2 \in S_a$, logo pelo Lema anterior (3.2.2) temos $|n| \leq 1$.

Caso 1 Supomos que $n = 1$, então

$$A_k = 1 + p\alpha + q\alpha^2 \text{ logo } A_{k+1} = (p+1) + (q-a)\alpha + (d+1)\alpha^2, \text{ onde } |d| \leq a-1.$$

Assim

$$-1 \leq p+1 \leq 1 \text{ e, então } p \in \{-2, -1, 0\}. \quad (3.13)$$

Caso 1.1 Se $p = 0$ então $A_{k+1} = 1 + (q-a)\alpha + (d+1)\alpha^2$. Logo, pela relação (3.13) $-2 \leq q-a \leq 0$ então $a-2 \leq q \leq a$.

Se $q = a$ então $\tilde{A}_k = 1 + a\beta^2 > \beta^3$, o que não ocorre. Portanto, $q = a-1$ ou $q = a-2$.

Assim temos os estados $A_k = 1 + (a-1)\alpha^2$ e $A_k = 1 + (a-2)\alpha^2$.

Caso 1.2 Se $p = -1$ então $A_{k+1} = (q-a)\alpha + (d+1)\alpha^2$ e $A_{k+2} = (q-a) + (d+1)\alpha + e\alpha^2$, $|e| \leq a-1$.

Assim, da relação (3.13) temos $-1 \leq q-a \leq 1$ então $q = a-1, a, a+1$. Para os casos $q = a$ e

$q = a+1$ temos $\tilde{A}_k \geq \beta^3$. Logo $q = a-1$ e, portanto, obtemos o estado $A_k = 1 - \alpha + (a-1)\alpha^2$.

Caso 1.3 Se $p = -2$ então $A_{k+1} = -1 + (q-a)\alpha + (d+1)\alpha^2$ e $A_{k+2} = (q-a-1) + (d+1+a)\alpha + (e-1)\alpha^2$, $|e| \leq a-1$. Assim, da relação (3.13) temos $-1 \leq q-a-1 \leq 1$ logo $a \leq q \leq a+2$.

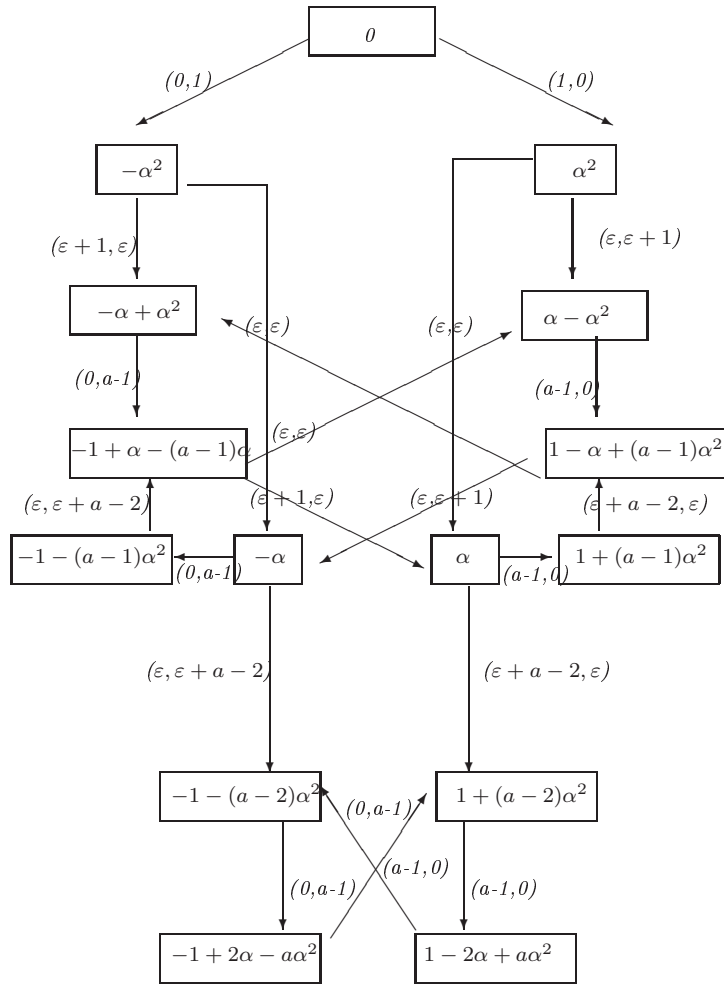
Assim, se $q = a$ obtemos o estado $A_k = 1 - 2\alpha + a\alpha^2$.

Se $q = a+1$ então $\tilde{A}_k = 1 - 2\beta + (a+1)\beta^2 = 1 - \beta + a\beta^2 - \beta + \beta^2 > \beta^3$, o que não ocorre.

Se $q = a+2$ então $\tilde{A}_k = 1 - 2\beta + (a+2)\beta^2 = 1 - \beta + a\beta^2 - \beta + 2\beta^2 > \beta^3$, o que não ocorre.

Caso 2 Supomos $n = 0$ então $A_k = p\alpha + q\alpha^2$ e $A_{k+1} = p + q\alpha + d\alpha^2$ logo $A_{k+2} = q + d\alpha + 2\alpha^2$ assim $q = 0, \pm 1$. Portanto, $A_k = 0, \pm\alpha^2$.

Caso 2.1 Se $p = 1$ então $A_{k+1} = 1 + q\alpha + d\alpha^2$, logo pelo Caso 1 temos $q = 0, -1, -2$ e, portanto, obtemos os estados $A_k = \alpha, \alpha - \alpha^2, \alpha - 2\alpha^2$. Suponhamos que $A_k = \alpha - 2\alpha^2 \in S_a$ então $A_{k+1} = 1 - 2\alpha + d\alpha^2 \in S_a$. Mas como foi visto anteriormente $A_k = 1 - 2\alpha + d\alpha^2 = 1 - 2\alpha + a\alpha^2$ e, portanto, $d = a$, o que não ocorre, pois $d = \varepsilon - \varepsilon'$ onde $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1, \dots, a-1\}$. \square



(Autômato: a qualquer)

Teorema 3.2.3 Para todo $a \geq 2$ temos

$$\partial\mathcal{R}_a = \bigcup_{u \in B} \mathcal{R}_a \cap (\mathcal{R}_a + u)$$

onde $B = \{\pm 1, \pm\alpha, \pm(\alpha - 1)\}$.

Demonstração do Teorema: Pelo item (1) do Teorema (2.1.8), temos que $\bigcup_{u \in B} \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u) \subset \partial\mathcal{R}$.

Seja $z \in \partial\mathcal{R}$ então pelo item (2) do Teorema (2.1.8) temos

$$z = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \text{ onde } l < 2 \text{ e } \varepsilon'_l \neq 0 \quad (3.14)$$

Vamos supor $\varepsilon_2 > 0$. Logo $r = (\varepsilon'_l, 0)(\varepsilon'_{l+1}, 0) \dots (\varepsilon'_1, 0)(\varepsilon'_2, \varepsilon_2) \dots$ é um caminho no autômato começando no estado inicial.

Portanto, usando o autômato temos:

$$r = (1, 0)(\varepsilon, \varepsilon + 1)(a - 1, 0) \dots \quad (3.15)$$

ou

$$r = (1, 0)(\varepsilon, \varepsilon)(a - 1, 0)(\varepsilon'_1 + a - 2, \varepsilon'_1)(\varepsilon''_2, \varepsilon''_2)(0, a - 1) \dots \quad (3.16)$$

ou

$$r = (1, 0)(\varepsilon, \varepsilon)(a - 1, 0)(\varepsilon' + a - 2, \varepsilon')(\varepsilon'', \varepsilon'' + 1) \dots \quad (3.17)$$

ou

$$r = (1, 0)(\varepsilon, \varepsilon)(\varepsilon' + a - 2, \varepsilon')www \text{ onde } w = (a - 1, 0)(0, a - 1)(0, a - 1)(a - 1, 0) \dots \quad (3.18)$$

Caso 1 Se $r = (1, 0)(\varepsilon, \varepsilon + 1)(a - 1, 0) \dots$ então pelas equações (3.14) e (3.15) temos

$$z = (\varepsilon + 1)\alpha^2 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \alpha + \varepsilon\alpha^2 + (a - 1)\alpha^3 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i.$$

Assim, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha)$.

Caso 2 Se $r = (1, 0)(\varepsilon, \varepsilon)(a - 1, 0)(\varepsilon'_1 + a - 2, \varepsilon'_1)(\varepsilon''_2, \varepsilon''_2)(0, a - 1) \dots$ Vamos então analisar as possibilidades:

Caso 2.1 Se $\varepsilon > 0$ então temos

$$z = \alpha + \varepsilon\alpha^2 + (a - 1)\alpha^3 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i = \varepsilon\alpha^2 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i.$$

Portanto, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha)$.

Caso 2.2 Se $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon'_1 > 0$ então pelas equações (3.14) e (3.15) temos $\varepsilon_1 = \varepsilon'$, logo

$$\begin{aligned} z &= \varepsilon' \alpha^2 + \varepsilon''_2 \alpha^3 + (a - 1)\alpha^4 + \sum_{i=5}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \\ &= \frac{1}{\alpha} + (a - 1)\alpha + (\varepsilon'_1 + a - 2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \end{aligned}$$

Como $\alpha^3 = a\alpha^2 - \alpha + 1$ então $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - a\alpha + 1$, assim

$$\begin{aligned} z &= \alpha^2 - a\alpha + 1 + (a-1)\alpha + (\varepsilon'_1 + a - 2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \\ &= 1 - \alpha + (\varepsilon'_1 + a - 1)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \end{aligned}$$

Portanto, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} - \alpha + 1)$.

Caso 2.3 Se $\varepsilon = 0$, $\varepsilon'_1 = 0$ e $\varepsilon''_2 > 0$ então $\varepsilon''_2 = \varepsilon_2$, logo das equações (3.14) e (3.16) temos que

$$\begin{aligned} z &= \underbrace{\varepsilon''_2 \alpha^2 + (a-1)\alpha^3 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i}_{\in \mathcal{R}} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} + (a-1) + (a-2)\alpha + \varepsilon''_2 \alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \end{aligned}$$

Como $\alpha^3 = a\alpha^2 - \alpha + 1$ então $\frac{1}{\alpha^2} = (1-a) + (1-a)\alpha + \alpha^2$, assim substituindo na segunda igualdade temos: $z = (1-a) + (1-a)\alpha + \alpha^2 + (a-1) + (a-2)\alpha + \varepsilon''_2 \alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i = -\alpha + (\varepsilon''_2 + 1)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \in \mathcal{R} + \alpha$.

Portanto, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} - \alpha)$.

Caso 2.4 Se $\varepsilon = 0$, $\varepsilon'_1 = 0$, $\varepsilon''_2 = 0$ então $\varepsilon_2 = a-1$ e assim

$$z = \underbrace{(a-1)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i}_{\in \mathcal{R}} = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{(a-1)}{\alpha} + (a-2) + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$$

Como $\frac{1}{\alpha^3} = (1-a) + \alpha + \frac{(1-a)}{\alpha}$, substituindo na segunda igualdade temos

$$z = (1-a) + \alpha + \frac{(1-a)}{\alpha} + \frac{(a-1)}{\alpha} + (a-2) + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i = -1 + \alpha + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \in \mathcal{R} - 1.$$

Portanto, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + (\alpha - 1))$.

Caso 3 Se $r = (1, 0)(\varepsilon, \varepsilon)(a-1, 0)(\varepsilon' + a - 2, \varepsilon')(\varepsilon'', \varepsilon'' + 1) \dots$ então vamos analisar as possibilidades:

Caso 3.1 Se $\varepsilon > 0$ então

$$z = \alpha + \varepsilon \alpha^2 + (a-1)\alpha^3 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \varepsilon \alpha^2 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i$$

Assim, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha)$ (resultado análogo ao caso 2.1).

Caso 3.2 Se $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' > 0$ então $\varepsilon_2 = \varepsilon'$ e assim

$$z = \frac{1}{\alpha} + (a-1)\alpha + (\varepsilon' + a - 2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \varepsilon' \alpha^2 + \underbrace{\sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i}_{\in \mathcal{R}}$$

Se $\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 - a\alpha + 1$ então substituindo temos:

$$z = 1 - a\alpha + \alpha^2 + (a-1)\alpha + (\varepsilon' + a - 2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = 1 - \alpha + (\varepsilon' + a - 1)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i =$$

Portanto, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + (1 - \alpha))$.

Caso 3.3 Se $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$ logo $\varepsilon_2 = \varepsilon'' + 1 > 0$ então

$$z = \underbrace{(\varepsilon'' + 1)\alpha^3 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i}_{\in \mathcal{R}} = \varepsilon'' \alpha^2 + (a-2)\alpha + (a-1) + \frac{1}{\alpha^2} + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i$$

Se $\frac{1}{\alpha^2} = (1-a) + (1-a)\alpha + \alpha^2$ então substituindo na segunda igualdade temos:

$$\begin{aligned} z &= (1-a) + (1-a)\alpha + \alpha^2 + (a-1) + (a-2)\alpha + \varepsilon'' \alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \\ z &= -\alpha + (\varepsilon'' + 1)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i = (\varepsilon'' + 1)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \end{aligned}$$

Portanto, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} - \alpha)$.

Caso 4 Vamos considerar o caminho: $r = (1,0)(\varepsilon,\varepsilon)(\varepsilon' + a - 2, \varepsilon')www$ onde

$w = (a-1,0)(0,a-1)(0,a-1)(a-1,0)$. Analisando os casos temos:

Caso 4.1 Se $\varepsilon > 0$ então

$$z = \alpha + \varepsilon \alpha^2 + (\varepsilon' + a - 2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \varepsilon \alpha^2 + \varepsilon' \alpha^3 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i.$$

Logo, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha)$.

Caso 4.2 Se $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon' > 0$ então $\varepsilon_2 = \varepsilon'$ então

$$z = \varepsilon' \alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = 1 + (\varepsilon' + a - 2)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i.$$

Portanto, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + 1)$.

Caso 4.3 Se $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$ então $\varepsilon_2 = a - 1$, logo

$$z = \underbrace{(a-1)\alpha^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i}_{\in \mathcal{R}} = \frac{1}{\alpha^2} + (a-2) + (a-1)\alpha + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \text{ pois } \varepsilon'_2 = \varepsilon'_3 = 0.$$

Como $\alpha^{-2} = (1-a) + (1-a)\alpha + \alpha^2$ então substituindo na segunda igualdade temos:

$$z = (1-a) + (1-a)\alpha + \alpha^2 + (a-2) + (a-1)\alpha + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = -1 + \alpha^2 + \sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i.$$

Portanto, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} - 1)$. □

Conjectura: Pelo Teorema (2.2.1) sabemos que no caso $a = 2$, \mathcal{R} possui exatamente 6 vizinhos tais que $(\mathcal{R} + u)$, $\pm u \in B$. Conjecturamos que o mesmo acontece para todo $a > 2$.

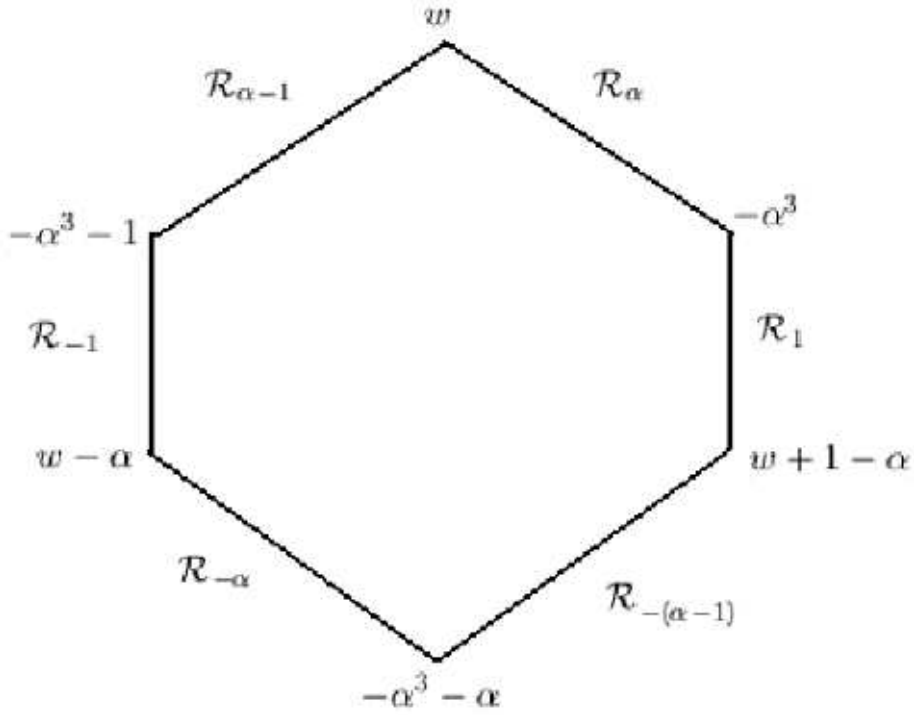
Aplicação do autômato para a parametrização da Fronteira de \mathcal{R}

Usando o autômato, provamos explicitamente para o caso $a = 2$, que cada uma das 6 regiões $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u) = \mathcal{R}_u$, $u \in B$, que constitui a fronteira de \mathcal{R} é a imagem de uma outra por uma aplicação afim. Mostraremos também que se \mathcal{R}_u é uma das 6 regiões, então existem 3 funções afins g_0, g_1, g_2 tais que $\mathcal{R}_u = \bigcup_{i=0,1,2} g_i(\mathcal{R}_u)$. Com isso construiremos uma aplicação contínua e bijetora de $[0, 1]$ para \mathcal{R}_u . Como consequência teremos que a fronteira de \mathcal{R} é homeomorfa ao círculo e também calcularemos explicitamente a dimensão de Hausdorff da $\partial\mathcal{R}$.

Por simplicidade, supomos em todo esse capítulo que $a = 2$. Sabemos que nesse caso, pelo Teorema 3.2.3, que $\partial\mathcal{R}$ é formada por 6 regiões $\mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + u)$, onde $u \in B = \{\pm 1, \pm\alpha, \pm(\alpha - 1)\}$.

Lema 4.0.4 As propriedades seguintes são válidas:

1. $\mathcal{R}_{\alpha-1} \cap \mathcal{R}_\alpha = \{w\} = \{\alpha^2 - \alpha^3\}$;
2. $\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_1 = \{-\alpha^3\}$;
3. $\mathcal{R}_{\alpha-1} \cap \mathcal{R}_{-1} = \{-\alpha^3 - 1\} = \{u\}$;
4. $\mathcal{R}_{-(\alpha-1)} \cap \mathcal{R}_{-\alpha} = \{-\alpha^3 - \alpha\}$;
5. $\mathcal{R}_{-(\alpha-1)} \cap \mathcal{R}_1 = \{w + 1 - \alpha\}$;
6. $\mathcal{R}_{-\alpha} \cap \mathcal{R}_{-1} = \{w - \alpha\}$.



Demonstração: Seja w um elemento de $\mathcal{R}_{\alpha-1} \cap \mathcal{R}_{\alpha} = \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} + \alpha)$ então existem x, y e $z \in \mathcal{R}$ tais que $x = \sum_{i=2}^{+\infty} a_i \alpha^i$, $y = \sum_{i=2}^{+\infty} b_i \alpha^i$ e $z = \sum_{i=2}^{+\infty} c_i \alpha^i$ e

$$w = \alpha - 1 + x = \alpha + y = z \quad (4.1)$$

Por outro lado, pela Proposição 1.1.2, $d(1, \beta) = (a-1)(a-1)01$ logo $1 = \beta^{-1} + \beta^{-2} + \beta^{-4}$, então $\beta = 1 + \beta^{-1} + \beta^{-3}$, portanto,

$$\alpha - 1 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1}. \quad (4.2)$$

Usando as equações (4.1) e (4.2) e o autômato obtemos $r_1 = (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(a_2, c_2)(a_3, c_3) \dots$ e $r_2 = (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) \dots$ são caminhos do autômato que começam no estado inicial.

Analisando o autômato obtemos

$$\begin{aligned} r_1 &= (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(0,1)(a_3, c_3) \dots e \\ r_2 &= (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,1)(0,1)(0,0)(a_4, b_4) \text{ ou} \\ r_2 &= (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,1)(0,0)ttttt \text{ onde } t = (0,1)(1,0)(1,0)(0,1). \end{aligned}$$

Supomos o primeiro caso: $r_1 = (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(0,1)(a_3, c_3) \dots e$

$r_2 = (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,1)(0,1)(0,0)(a_4, b_4) \dots$ e analisando o autômato temos que o estado entre $(0,1)$ e (a_3, c_3) é igual a $-\alpha - 1/\alpha = -1 + \alpha - \alpha^2$ é o mesmo estado entre $(0,0)$ e (a_4, b_4) .

Logo, utilizando o autômato temos:

$$\begin{aligned} r_1 &= (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(0,1)(0,0)(1,0)(1,1)(0,1)(0,0)(a_8, c_8) \dots e \\ r_2 &= (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,1)(0,1)(0,0)(1,1)(1,0)(0,0)(0,1)(a_8, b_8) \dots \end{aligned}$$

Continuando assim obtemos:

$$\begin{aligned} r_1 &= (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(0,1)(0,0)(1,0)(1,1)(0,1)(0,0)(1,0)(1,1)(0,1)(0,0) \dots e \\ r_2 &= (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,1)(0,1)(0,0)(1,1)(1,0)(0,0)(0,1)(1,1)(1,0)(0,0)(0,1)(1,1)(1,0)(0,0)(0,1) \dots \end{aligned}$$

Assim

$$w = \alpha - 1 + x = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i} + \alpha^{4i+1}) \quad (4.3)$$

Por outro lado

$$w = z = \alpha^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i+1} + \alpha^{4i+2}) \quad (4.4)$$

e

$$w = \alpha + y = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \sum_{i=2}^{+\infty} (\alpha^{4i+3} + \alpha^{4i+4}) \quad (4.5)$$

Supondo o segundo caso: $r_1 = (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(0,1)(a_3, c_3) \dots$ e

$r_2 = (1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,1)(0,0)ttttt \dots$ onde $t = (0,1)(1,0)(1,0)(0,1)$ obtemos

$$w = \alpha - 1 + x = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i} + \alpha^{4i+1}) \quad (4.6)$$

Por outro lado

$$w = z = \alpha^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i+1} + \alpha^{4i+2}) \quad (4.7)$$

e

$$w = \alpha + y = \alpha + \alpha^3 + \sum_{i=2}^{+\infty} (\alpha^{4i+2} + \alpha^{4i+3}) \quad (4.8)$$

Das equações (4.3) à (4.8) obtemos, por exemplo (usando a equação (4.4)):

$$w = \alpha^2 + (\alpha^5 + \alpha^6) + (\alpha^9 + \alpha^{10}) + (\alpha^{13} + \alpha^{14}) + \dots$$

Como $\alpha^7 = \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^3$ então

$$w = \alpha^2 + (\alpha^7 - \alpha^3) + (\alpha^{11} - \alpha^7) + (\alpha^{15} - \alpha^{11}) + \dots$$

Portanto, $w = \alpha^2 - \alpha^3$.

Da mesma maneira provamos $\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_1 = \{-\alpha^3\}$. As outras propriedades decorrem facilmente dos itens 1 e 2. \square

Vamos mostrar que $\mathcal{R}_{\alpha^{-1}}$ se decompõe em três subconjuntos, que são as imagens de $\mathcal{R}_{\alpha^{-1}}$ por cada uma das três funções g_i , $i \in \{0, 1, 2\}$ definidas por:

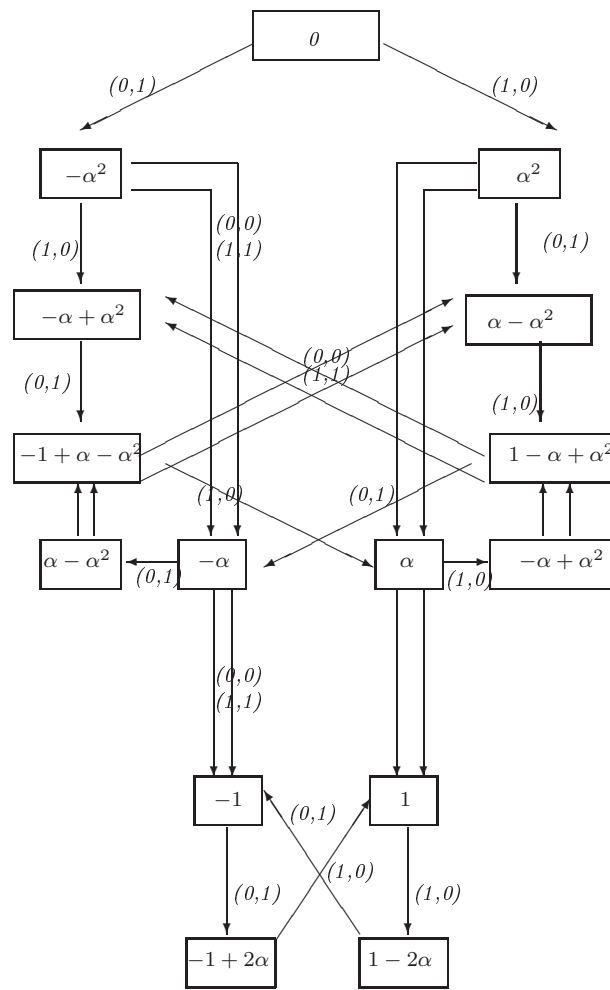
$$g_0(z) = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2 z, \quad g_1(z) = -1 - \alpha^3 + \alpha^3 z, \quad e \quad g_2(z) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4 z, \quad z \in \mathbb{C}$$

De fato, mostraremos que $\mathcal{R}_{\alpha^{-1}}$ é homeomorfo a um segmento de reta. Sejam $a, b \in \mathcal{R}_{\alpha^{-1}}$. Se denotarmos por $I(a, b)$ o segmento em $\mathcal{R}_{\alpha^{-1}}$ ligando a e b , em virtude do Lema 4.0.5 veremos que

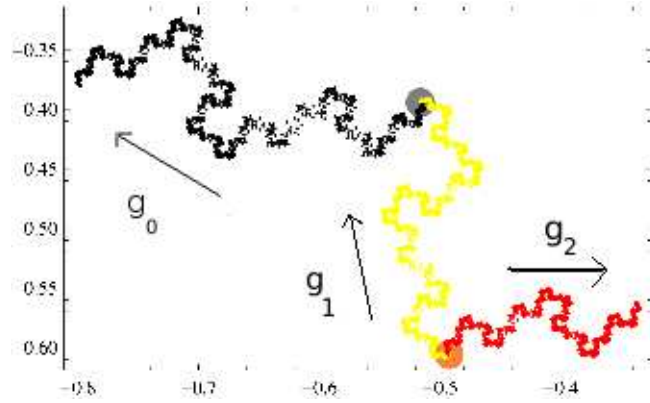
$$g_0(\mathcal{R}_{\alpha^{-1}}) = I(-\alpha^3 - 1, -(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^5)) = I(g_0(\alpha^2 - \alpha^3), g_0(-\alpha^3 - 1)) = I(g_0(w), g_0(u))$$

$$g_1(\mathcal{R}_{\alpha^{-1}}) = I(-(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^5), -(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6)) = I(g_1(\alpha^2 - \alpha^3), g_1(-\alpha^3 - 1)) = I(g_1(w), g_1(u))$$

$$g_2(\mathcal{R}_{\alpha^{-1}}) = I(-(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6), \alpha^2 - \alpha^3) = I(g_2(-\alpha^3 - 1), g_2(\alpha^2 - \alpha^3)) = I(g_2(u), g_2(w)).$$



Autômato para o Caso $a = 2$.



Lema 4.0.5 $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ verifica as seguintes propriedades, onde $u = -1 - \alpha^3$ e $w = \alpha^2 - \alpha^3$:

1. $\mathcal{R}_{\alpha-1} = g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cup g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cup g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$;
2. $g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = \{-(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^5)\} = \{g_0(u)\} = \{g_1(w)\}$;
3. $g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = \{-(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6)\} = \{g_1(u)\} = \{g_2(u)\}$;
4. $g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = \emptyset$.

Demonstração:

1. Vamos mostrar que $g_i(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \subset \mathcal{R}_{\alpha-1}$, $\forall i \in \{0, 1, 2\}$.

$$g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = (\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2\mathcal{R}) \cap (\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha + \alpha^{-1} + \alpha^2\mathcal{R}) = (\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2\mathcal{R}) \cap (\alpha^2 + \alpha^2\mathcal{R}) = ((\alpha - 1) + \alpha^2\mathcal{R}) \cap (\alpha^2 + \alpha^2\mathcal{R}) \text{ e } g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = (\alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4\mathcal{R}) \cap (\alpha^2 + 2\alpha^5 - \alpha^4 + \alpha^4\mathcal{R}).$$

$$\text{Por outro lado } \alpha^2 + 2\alpha^5 - \alpha^4 = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^3 - \alpha = (\alpha - 1) + 1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 = (\alpha - 1) + \alpha^4 + \alpha^5.$$

$$\text{Logo, } g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = (\alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4\mathcal{R}) \cap ((\alpha - 1) + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^4\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}_{\alpha-1}.$$

$$\text{Seja } x \in \mathcal{R}_{\alpha-1} \text{ então } x = \alpha - 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i \text{ onde } (\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{D}^{\infty}.$$

$$\text{Como } \alpha - 1 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} \text{ então}$$

$$(1, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 0)(0, 0)(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) \dots$$

é um caminho no autômato começando no estado inicial.

$$\text{Portanto, a única possibilidade é } (\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (0, 1)(0, 0)(1, 0).$$

$$\text{Logo } x = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \sum_{i=5}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \alpha^2 + \sum_{i=5}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i.$$

Assim,

$$x = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 z = \alpha^2 + \alpha^3 z', \text{ onde } z, z' \in \mathcal{R} \quad (4.9)$$

Então, $g_1(x) = -1 - \alpha^3 + \alpha^3(\alpha^2 + \alpha^3 z')$ e $g_1(x) = -1 - \alpha^3 + \alpha^3(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 z)$.

Logo $g_1(x) = -1 - \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6 z = -1 + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6 z \in (\mathcal{R} + \alpha - 1)$ e $g_1(x) = -\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^7 + \alpha^6 z' = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^6 z' \in \mathcal{R}$.

Portanto, $g_1(x) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, logo $g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \subset \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

Agora vamos mostrar a inclusão inversa.

Seja z um elemento de $\mathcal{R}_{\alpha-1}$. Então

$$z = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \sum_{i=5}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \alpha^2 + \sum_{i=5}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i, \quad \text{onde } (\varepsilon_i)_{i \geq 5}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 5} \in \mathcal{D}^{\infty}.$$

e $(1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(0,1)(0,0)(1,0)(\varepsilon_5, \varepsilon'_5) \dots$ é um caminho no autômato.

Em virtude do autômato dos complexos duplos, temos $z = \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha} + \alpha^2 w = \alpha^2 + \alpha^2 w'$, onde $w, w' \in \mathcal{R}$ pois $(1,0)(0,0)(1,0)(0,0)(0,0)(0,1) \dots$ é o único caminho em \mathcal{A} que começa com $(1,0), (0,0)(1,0)$. Assim temos as possibilidades:

Analisando o autômato temos as seguintes três possibilidades: $(\varepsilon_5, \varepsilon'_5)(\varepsilon_6, \varepsilon'_6) = (0,0)(0,1)$ ou $(\varepsilon_5, \varepsilon'_5)(\varepsilon_6, \varepsilon'_6) = (1,1)(0,1)$ ou $(\varepsilon_5, \varepsilon'_5)(\varepsilon_6, \varepsilon'_6) = (0,1)(0,1)$.

- Se $(\varepsilon_5, \varepsilon'_5)(\varepsilon_6, \varepsilon'_6) = (0,0)(0,1)$

então neste caso temos $z = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2 w_0 = \alpha^2 + \alpha^2 w'_0$ onde $w_0, w'_0 \in \mathcal{R}$. Logo $g_0^{-1}(z) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, portanto, $z \in g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1})$.

- Se $(\varepsilon_5, \varepsilon'_5)(\varepsilon_6, \varepsilon'_6) = (0,1)(0,1)$ então $z = \underbrace{\alpha^{-3} + \alpha^{-1}}_{\alpha^{-1}} + \alpha^4 + \sum_{i=7}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \sum_{i=8}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$.

Logo $g_1^{-1}(z) = \alpha^{-3} + 1 + \alpha^{-2} - \alpha^{-3} + \alpha + \sum_{i=7}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^{i-3} = \alpha^{-3} + 1 + \alpha^{-1} + \alpha^2 + \alpha^3 + \sum_{i=8}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^{i-3}$.

Assim, $g^{-1}(z) = \alpha^{-2} + 1 + \alpha + \sum_{i=7}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^{i-3} = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + 1 + \alpha^2 + \alpha^3 + \sum_{i=8}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^{i-3}$.

Então, $g_1^{-1}(z) = \alpha^2 + \sum_{i=7}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^{i-3} = (\alpha - 1) + \alpha^4 + \sum_{i=8}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^{i-3}$.

Portanto, $g_1^{-1}(z) \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, logo $z \in g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1})$.

- Se $(\varepsilon_5, \varepsilon'_5)(\varepsilon_6, \varepsilon'_6) = (1,1)(0,1)$ então $z = \underbrace{\alpha^{-3} + \alpha^{-1}}_{\alpha^{-1}} + \alpha^4 + \sum_{i=7}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \sum_{i=8}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$.

Logo $g_2^{-1}(z) = -\alpha^{-2} - \alpha + \alpha^{-3} - \alpha^{-4} + 1 + \alpha + \sum_{i=7}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^{i-4} = -\alpha^{-2} - \alpha + \alpha^{-2} + \alpha + \alpha^2 + \sum_{i=8}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^{i-4}$.

Então, $g_2^{-1}(z) = -\alpha^{-2} + \alpha^{-3} - \alpha^{-4} + \alpha^{-1} + \alpha^{-2} + \alpha^{-4} + \sum_{i=7}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^{i-4} = \alpha^2 + \sum_{i=8}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^{i-4}$.

$$\text{Assim, } g_2^{-1}(z) = \underbrace{\alpha^{-3} + \alpha^{-1}}_{\alpha^{-1}} + \sum_{i=7}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^{i-4} = \alpha^2 + \sum_{i=8}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^{i-4}.$$

Portanto, $g_2^{-1}(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \subset \mathcal{R}_{\alpha-1}$, logo $z \in g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$.

2. Suponha que $\gamma \in g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1})$.

Então existem $y, z \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ tais que $\gamma = g_0(y) = g_1(z)$ isto é

$$\underbrace{\alpha^{-1} + \alpha^{-3}}_{\alpha^{-1}} + \alpha^2 y = -1 - \alpha^3 + \alpha^3 z. \quad (4.10)$$

Logo, $y = -\alpha^{-1} - \alpha + \alpha z$. Por (4.9) podemos escrever os elementos de $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ de duas maneiras.

Considerando a primeira $z = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^3 \tilde{z}$, $\tilde{z} \in \mathcal{R}$, e como $\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \alpha^{-1} = 0$ substituindo em (4.10) temos:

$$\begin{aligned} y &= -\alpha^{-1} - \alpha + \alpha(\alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^3 \tilde{z}) \\ &= -\alpha^{-1} - \alpha + \alpha^2 - \alpha + \alpha^5 + \alpha^5 \tilde{z} \\ &= (-2\alpha - \alpha^{-1}) + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4 \tilde{z} \\ &= -\alpha^2 - 1 + \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4 \tilde{z} \\ &= -1 + \alpha^5 + \alpha^4 \tilde{z} \in (\mathcal{R} - 1) \end{aligned}$$

Portanto, $y \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} - 1)$.

Agora considerando a segunda maneira $z = \alpha^2 + \alpha^3 \hat{z}$, $\hat{z} \in \mathcal{R}$ e como $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha + 1/\alpha$, substituindo em (4.10) temos

$$\begin{aligned} y &= -\alpha^{-1} - \alpha + \alpha(\alpha^2 + \alpha^3 \hat{z}) \\ &= -\alpha^{-1} - \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 \hat{z} \\ &= -\alpha^{-1} - \alpha + \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{\alpha} + \alpha^4 \hat{z} \\ &= \alpha^2 + \alpha^4 \hat{z} \end{aligned}$$

Dos dois casos anteriores segue que $y \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} - 1)$ e pelo Lema (4.0.4), $y = -1 - \alpha^3 = u$. Assim, $y = g_0(u) = g_1(w)$.

Portanto, $g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = \{-(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^5)\} = g_0(u) = g_1(w)$.

3. Suponha $\gamma \in g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$.

Então existem $y, z \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ tais que $\gamma = g_1(y) = g_2(z)$ logo $\gamma = -1 - \alpha^{-3} + \alpha^3 y = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4 z$.

Desta forma,

$$y = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + 1 + \alpha^2 + \alpha z. \quad (4.11)$$

Pela equação (4.9) temos que os elementos de $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ podem ser escritos de duas maneiras.

Considerando $y = \alpha^2 + \alpha^3 \tilde{z}$, $\tilde{z} \in \mathcal{R}$, temos, $z = -1 - \alpha + \frac{1}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha^3 \tilde{z}) = -1 + \alpha^2 \tilde{z} \in \mathcal{R} - 1$.

Da análise acima temos que $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} - 1)$ e, portanto, pelo Lema (4.0.4), $z = -1 - \alpha^3$. Assim,

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4 z = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4(-1 - \alpha^3) \\ &= \alpha^2 + \alpha^5 - \alpha^4 - \alpha^7 \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6\right). \end{aligned}$$

Portanto, $g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = \{-(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6)\} = g_1(u) = g_2(u)$.

4. Suponha $\gamma \in g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$.

Então existem $y, z \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ tais que $\gamma = g_0(y) = g_2(z)$ ou seja $\gamma = \alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^2 y = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4 z$. Desta forma,

$$y = \alpha - 1 + \alpha^3 + \alpha^2 z = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^3 + \alpha^2 z \quad (4.12)$$

Por (4.9) podemos escrever os elementos de $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ de duas maneiras, considerando a primeira: $z = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^3 \tilde{z}$, $\tilde{z} \in \mathcal{R}$ substituindo em (4.12) e se $\alpha^4 - 2\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha = 0$ então

$$\begin{aligned} y &= \alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^3 + \alpha^2 z \\ &= \alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^3 + \alpha^2(\alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^3 \tilde{z}) \\ &= \alpha - 1 + 2\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^5 \tilde{z} \\ &= -1 + (\alpha + 2\alpha^3) - \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^5 \tilde{z} \\ &= -1 + \alpha^4 + \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^5 \tilde{z} \\ &= -1 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^5 \tilde{z}. \end{aligned}$$

Logo, $y = -1 - \alpha^3 = u \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} - 1)$.

Agora, considerando a segunda maneira $z = \alpha^2 + \alpha^3 \hat{z}$, $\hat{z} \in \mathcal{R}$ e novamente substituindo em (4.12) temos,

$$y = \alpha - 1 + \alpha^3 + \alpha^2 z = \underbrace{\alpha^{-1} + \alpha^{-3}}_{\alpha^{-1}} + \alpha^3 + \alpha^2(\alpha^2 + \alpha^3 \hat{z}) = -1 + \alpha^5 + \alpha^5 \hat{z}.$$

Dos dois casos anteriores, concluímos que $y \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} - 1)$ e, portanto, pelo Lema (4.0.4), $y = -1 - \alpha^3$. Assim, $\gamma = \alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^2 y = \alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^2(-1 - \alpha^3) = -\alpha^{-1} - \alpha - \alpha^5$.

Agora tomando z , em (4.12) temos

$$\alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^2 y = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4 z \Rightarrow z = -\alpha^{-3} - \alpha^{-5} - \alpha + \alpha^2 y. \quad (4.13)$$

Como $y \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ pode ser escrito de duas maneiras, considerando a primeira $y = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^3 \tilde{z}$, $\tilde{z} \in \mathcal{R}$, temos substituindo em (4.13): $z = -\alpha^{-3} - \alpha^{-5} - \alpha + \alpha^{-2}(-\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 \tilde{z}) =$

$$-\alpha + \alpha^2 + \alpha\tilde{z}.$$

Logo $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} - \alpha) = \emptyset$.

Usando a segunda forma $y = \alpha^2 + \alpha^3\hat{z}$, $\hat{z} \in \mathcal{R}$ na equação (4.13) temos, $z = -\alpha^{-3} - \alpha^{-5} - \alpha + \alpha^{-2}(\alpha^2 + \alpha^3\hat{z}) = -\alpha + \alpha^2 + \alpha\tilde{z} \implies z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + (\alpha - 1)) \cap (\mathcal{R} - \alpha)$.

Considerando a segunda forma $y = \alpha^2 + \alpha^3\hat{z}$, $\hat{z} \in \mathcal{R}$ temos:

$$\begin{aligned} z &= -\alpha^{-3} - \alpha^{-5} - \alpha + \alpha^{-2}(\alpha^2 + \alpha^3\hat{z}) \\ &= -\alpha^{-3} - \alpha^{-5} - \alpha + 1 + \alpha\hat{z} \\ &= -2\alpha^{-3} - \alpha^{-5} - \alpha^{-1} + \alpha\hat{z} \\ &= -1 + \alpha\hat{z}. \end{aligned}$$

Logo, $z \in \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{R} - 1)$ e pelo Lema (4.0.4) temos que $z = -1 - \alpha^3$.

Agora se $z = -1 - \alpha^3$ substituindo em (4.13) temos

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} + \alpha^{-3} + \alpha^2(-1 - \alpha^3) &= \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4(-1 - \alpha^3) \\ \alpha - 1 - \alpha^2 - \alpha^5 &= \alpha^2 + \alpha^5 - \alpha^4 - \alpha^7 \\ \alpha + \alpha^4 + \alpha^7 &= 1 + 2\alpha^2 + 2\alpha^5 \\ \alpha + \alpha^4 + \alpha^7 &= 1 + 2\alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 \\ \alpha^7 &= 1 + 2\alpha^2 - \alpha - \alpha^3 + \alpha^6 \\ \alpha^7 &= \alpha^6, \text{ o que não ocorre!} \end{aligned}$$

Portanto, $g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = \emptyset$.

□

Lema 4.0.6 As seguintes relações são verificadas:

1. $\mathcal{R}_1 = -\alpha + \alpha^{-1}\mathcal{R}_{\alpha-1}$;
2. $\mathcal{R}_\alpha = -\alpha^2 + \mathcal{R}_{\alpha-1}$;
3. $\mathcal{R}_{1-\alpha} = -\alpha + 1 + \mathcal{R}_{\alpha-1}$;
4. $\mathcal{R}_{-\alpha} = -\alpha - \alpha^2 + \mathcal{R}_{\alpha-1}$;
5. $\mathcal{R}_{-1} = -1 - \alpha + \alpha^{-1}\mathcal{R}_{\alpha-1}$

Demonstração:

1. Seja $z \in \mathcal{R}_1$, então $z = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{D}^{\infty}$. Vamos mostrar que $z \in -\alpha + \alpha^{-1} \mathcal{R}_{\alpha-1}$. Como

$$\alpha - 1 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} \quad (4.14)$$

então $(1, 0)(0, 0)(\varepsilon_2, \varepsilon'_2), (0, 0)(\varepsilon_4, \varepsilon_4) \dots$ é um caminho no autômato duplo começando no estado inicial.

Analisando o autômato temos três possibilidades: $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(0, 0)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (1, 0)(0, 0)(0, 0)$ ou $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(0, 0)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (1, 0)(0, 0)(1, 1)$ ou $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(0, 0)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (1, 0)(0, 0)(0, 1)$.

Caso 1: Se $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(0, 0)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (1, 0)(0, 0)(0, 0)$ então temos $z = 1 + \alpha^2 + \alpha^5 w_1 = \alpha^5 w'_1$ onde $w_1, w'_1 \in \mathcal{R}$. Assim $\alpha^2 + \alpha z = \alpha^2 + \alpha(1 + \alpha^2 + \alpha^5 w_1) = \alpha^2 + \alpha^5 w'_1$. Por outro lado $\alpha^2 + \alpha z = (\alpha - 1) + \alpha^4 + \alpha^6 w_1$.

Portanto, $\alpha^2 + \alpha z \in (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha-1}$, logo $z \in -\alpha + \alpha^{-1} \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

Caso 2: Se $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(0, 0)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (1, 0)(0, 0)(1, 1)$ então temos $z = 1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^5 w_2 = \alpha^4 + \alpha^5 w'_2$ onde $w_2, w'_2 \in \mathcal{R}$. Logo $\alpha^2 + \alpha z = \alpha^2 + \alpha(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^5 w_2) = \alpha^2 + \alpha(\alpha^4 + \alpha^5 w'_2)$.

Reciprocamente, $\alpha^2 + \alpha z = (\alpha - 1) + (1 + \alpha^2 + \alpha^3) + \alpha^5 + \alpha^6 w_2 = (\alpha - 1) + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 w_2$.

Assim, $\alpha^2 + \alpha z \in (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha-1}$, então $z \in -\alpha + \alpha^{-1} \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

Caso 3: Se $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(0, 0)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (1, 0)(0, 0)(0, 1)$ então temos $z = 1 + \alpha^2 + \alpha^5 w_3 = \alpha^4 + \alpha^5 w'_3$ onde $w_3, w'_3 \in \mathcal{R}$. Logo $\alpha^2 + \alpha z = \alpha^2 + \alpha(1 + \alpha^2 + \alpha^5 w_3) = \alpha^2 + \alpha(\alpha^4 + \alpha^5 w'_3)$.

Agora, temos que $\alpha^2 + \alpha z = \alpha^2 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^6 w_3 = (\alpha - 1) + \alpha^4 + \alpha^6 w_3$.

Portanto, $\alpha^2 + \alpha z \in (\mathcal{R} + \alpha - 1) \cap \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha-1}$, então $z \in -\alpha + \alpha^{-1} \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

Dos três casos acima, segue que $\alpha^2 + \alpha z \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

Reciprocamente, se $x \in \mathcal{R}_{\alpha-1} = g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cup g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cup g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ então se $x \in g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ usando a relação (4.9) podemos escrevê-lo de duas maneiras: considerando a primeira $x = g_0(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 z_1) = \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^5 z_1$, onde $z_1 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ temos que $-\alpha + \alpha^{-1} x = -\alpha + \alpha^{-1}(\alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^5 z_1) = -\alpha + \alpha + \alpha^5 + \alpha^4 z_1 = \alpha^5 + \alpha^4 z_1 \in \mathcal{R}$.

Agora, considerando a segunda $x = g_0(\alpha^2 + \alpha^3 z_2) = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^5 z_2, z_2 \in \mathcal{R}$ logo $-\alpha + \alpha^{-1} x = -\alpha + 1 - \alpha^{-1} + \alpha^3 + \alpha^4 z_2 = -\alpha + 1 - \alpha^{-1} + \alpha^2 + \alpha + \alpha^{-1} + \alpha^4 z_2 = 1 + \alpha^2 + \alpha^4 z_2 \in \mathcal{R} + 1$.

Portanto, $-\alpha - \alpha^{-1} x \in \mathcal{R}_1$.

Se $x \in g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ usando o mesmo raciocínio anterior temos $x = g_1(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 z_3) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^6 z_3$, onde $z_3 \in \mathcal{R}$ temos que $-\alpha + \alpha^{-1} x = \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 z_3 \in \mathcal{R}$. Tomando

agora $x = g_1(\alpha^2 + \alpha^3 z_4) = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^6 z_4$, $z_4 \in \mathcal{R}$ então temos $-\alpha + \alpha^{-1}x = -\alpha - \alpha^{-1} + 1 + \alpha^2 + \alpha + \alpha^{-1} + \alpha^5 z_4 = 1 + \alpha^2 + \alpha^5 z_4 \in \mathcal{R} + 1$.

Finalmente, se $x \in g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ considerando $x = g_2(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 z_5) = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^8 + \alpha^7 z_5$, onde $z_5 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ então temos que $-\alpha + \alpha^{-1}x = 1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^7 + \alpha^6 z_5 \in \mathcal{R} + 1$. Tomando agora $x = g_2(\alpha^2 + \alpha^3 z_6) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^7 z_6$, $z_6 \in \mathcal{R}$ temos $-\alpha + \alpha^{-1}x = \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 z_6 \in \mathcal{R}$.

Portanto, $-\alpha + \alpha^{-1}\mathcal{R}_{\alpha-1} \subset \mathcal{R}_1$.

2. Seja $z \in \mathcal{R}_\alpha$, então $z = \alpha + \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}$, $(\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{D}^\infty$ logo $(1, 0)(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3) \dots$ é um caminho no autômato duplo começando no estado inicial. Analisando o autômato temos as seguintes possibilidades: $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2), (\varepsilon_3, \varepsilon'_3)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (0, 0)(1, 0)(0, 0)$ ou $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3) = (0, 1)(1, 0)$.

Caso 1: Se $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (0, 0)(1, 0)(0, 0)$ então temos $z = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 t_1 = \alpha^5 t'_1$ onde $t_1, t'_1 \in \mathcal{R}$. Assim $z + \alpha^2 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 t_1 = \underbrace{\alpha^2 + \alpha^5 t'_1}_{\in \mathcal{R}}$. Logo $z + \alpha^2 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 t_1 = (\alpha - 1) + \alpha^4 + \alpha^5 t_1 \in \mathcal{R} + \alpha - 1$.

Portanto, $z + \alpha^2 \in \mathcal{R} + (\alpha - 1) \cap \mathcal{R} = \mathcal{R}_{\alpha-1}$ e assim $z \in -\alpha^2 + \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

Por outro lado, se $x \in \mathcal{R}_{\alpha-1} = g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cup g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cup g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ então se $x \in g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ usando a relação (4.9) podemos escrevê-lo de duas maneiras. Considerando a primeira $x = g_0(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 t_2) = \alpha^2 + \alpha^6 + \alpha^5 t_2$, onde $t_2 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ então $-\alpha^2 + x = \alpha^6 + \alpha^5 t_2 \in \mathcal{R}$.

Agora, se $x = g_0(\alpha^2 + \alpha^3 t'_2) = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^5 t'_2$, $t'_2 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ então $-\alpha^2 + x = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 t'_2 \in \mathcal{R} + \alpha$.

Se $x = g_1(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 t_2) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 t_2$, onde $t_2 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ então temos que $-\alpha^2 + x = \alpha^5 + \alpha^6 t_2 \in \mathcal{R}$.

E se $x = g_1(\alpha^2 + \alpha^3 t'_2) = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^6 t'_2$, $t'_2 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ então $-\alpha^2 + x = \alpha + \alpha^3 + \alpha^6 t'_2 \in \mathcal{R} + \alpha$.

E finalmente, se $x = g_2(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 t_2) = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^8 + \alpha^7 t_2$, onde $t_2 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ então $-\alpha^2 + x = \alpha + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^8 + \alpha^7 t_2 \in \mathcal{R} + \alpha$. E se $x = g_2(\alpha^2 + \alpha^3 t'_2) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^7 t'_2$, $t'_2 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ então $-\alpha^2 + x = \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^7 t'_2 \in \mathcal{R}$.

Portanto, das análises anteriores temos que $-\alpha^2 + \mathcal{R}_{\alpha-1} \subset \mathcal{R}_\alpha$ e assim $\mathcal{R}_\alpha = -\alpha^2 + \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

Caso 2: Se $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3) = (0, 1)(1, 0)$ então temos $z = \alpha + \alpha^3 + \alpha^4 w_3 = \alpha^2 + \alpha^4 w'_3$ onde $w_3, w'_3 \in \mathcal{R}$. Assim $z + \alpha^2 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 w_3 = 2\alpha^2 + \alpha^4 w'_3$. Logo $z + \alpha^2 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 t_1 = (\alpha - 1) + \alpha^4 + \alpha^5 t_1 \in \mathcal{R} + \alpha - 1$. \square

4.1 Parametrização de $\mathcal{R}_{\alpha-1}$

Seja z um elemento de $\mathcal{R}_{\alpha-1}$. Pelo Lema 4.0.5, existem $z_1 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ e a_1 elemento de $A = \{0, 1, 2\}$ tais que $z = g_{a_1}(z_1)$. Continuando assim construímos uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ em $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ e uma sequência $(z_n)_{n \geq 1}$ em $\mathcal{R}_{\alpha-1}$, tais que para todo n :

$$z = g_{a_1} \circ g_{a_2} \circ \dots \circ g_{a_n}(z_n).$$

Como as funções g_i são contrações, então para todo $x \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$, a sequência $g_{a_1} \circ g_{a_2} \circ \dots \circ g_{a_n}(x)$ converge para z quando n tende a infinito.

Seja

$$\begin{aligned} \psi : A^{\mathbb{N}} &\longrightarrow A^{\mathbb{N}} \\ a_1 a_2 \dots &\longmapsto b_1 b_2 \dots \end{aligned}$$

definida como segue:

Temos $b_1 = a_1$.

Seja $k \geq 2$, definimos b_k da seguinte maneira:

•

$$\text{Se } a_k = 1 \text{ então } b_k = 1; \quad (4.15)$$

$$\text{Se } a_k \neq 1 \text{ e } a_{k-1} = 2 \text{ então } b_k = a_k; \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } a_k \neq 1 \text{ e } a_{k-1} = 0 \text{ então } a) b_k = 2 \text{ se } a_k = 0; \\ b) b_k = 0 \text{ se } a_k = 2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Se $a_k \neq 1$ e $a_{k-1} = 1$, seja $r = \min\{1 \leq i \leq k-1, a_i = a_{i+1} = \dots = a_{k-1} = 1\}$:

• (Se $r > 1$ e $a_{r-1} = 2$) ou $r = 1$ então

$$\begin{cases} a) b_k = a_k, & \text{se } \#(k-r) \text{ é par} \\ b) b_k = 2 - a_k, & \text{se } \#(k-r) \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (4.18)$$

onde $\#(k-r)$ é o número de algarismos 1 após um algarismo 0 ou 2.

• (Se $r > 1$ e $a_{r-1} = 0$) então

$$\begin{cases} a) b_k = a_k, & \text{se } \#(k-r) \text{ é ímpar} \\ b) b_k = 2 - a_k, & \text{se } \#(k-r) \text{ é par} \end{cases} \quad (4.19)$$

Fixemos $x_0 \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ e definimos $f : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{R}_{\alpha-1}$ a correspondência definida da seguinte maneira: se $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ onde $(a_i)_{i \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$, então $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ \dots \circ g_{b_n}(x_0)$ onde $b_1 b_2 \dots = \psi(a_1 a_2 \dots)$.

Teorema 4.1.1 : A correspondência $f : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{R}_{\alpha-1}$ é uma função contínua, bijetora e satisfaz $f(0) = u$ e $f(1) = w$.

Se t e t' pertencem a $[0, 1]$ então $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ e $t' = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 3^{-i}$ onde a_i e c_i são elementos de $\{0, 1, 2\}$ tais que $a_i = c_i$ para $i < k$ e $a_k < c_k$ onde $k \in \mathbb{N}$. Supomos que $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{c_1} \circ \dots \circ g_{c_n}(x_0)$ e $f(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{d_1} \circ \dots \circ g_{d_n}(x_0)$ onde $c_1 c_2 \dots = \psi(a_1 a_2 \dots)$ e $d_1 d_2 \dots = \psi(b_1 b_2 \dots)$.

Para demonstrar esta proposição serão necessários alguns resultados.

Lema 4.1.2 : Sejam t e t' dois elementos de $[0, 1]$ tais que $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ e $t' = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 3^{-i}$ onde a_i e c_i são elementos de $\{0, 1, 2\}$ tais que $a_i = c_i$ para $i < k$ e $a_k < c_k$ onde $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Se $|t - t'| < 3^{-N}$ onde $N > k$, então $c_k = a_k + 1$, $c_i = 0$ e $a_i = 2$ para todo i que satisfaz $k + 1 \leq i \leq N$.
2. Se $t = t'$ então $c_k = a_k + 1$, $c_i = 0$ e $a_i = 2$ para $i \geq k + 1$.

Demonstração:

1.

$$\begin{aligned} 3^{-N} &> \sum_{i=1}^{\infty} (c_i - a_i) 3^{-i} = (c_k - a_k) 3^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (c_i - a_i) 3^{-i} \\ &= (c_k - a_k - 1) 3^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} (2 + c_i - a_i) 3^{-i}. \end{aligned}$$

2. A segunda relação segue imediatamente da primeira. □

Vamos usar o seguinte lema para provar a proposição:

Lema 4.1.3 Sejam f , g_0 , g_1 e g_2 definidas anteriormente. As seguintes propriedades são verificadas:

1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_2^n(z) = w = \alpha^2 - \alpha^3 \quad (4.20)$$

2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_1 \circ g_2^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_0^2 \circ g_2^n(z) = g_0(u) = -\alpha^{-1} - \alpha - \alpha^5 \quad (4.21)$$

3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_1 \circ g_0 \circ g_2^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_2 \circ g_0 \circ g_2^n(z) = g_1(u) = -\alpha^{-1} - \alpha - \alpha^4 - \alpha^6. \quad (4.22)$$

Demonstração:

1) Como $g_2(z) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^4 z$, $z \in \mathbb{C}$, então $g_2^2(z) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^9 + \alpha^8 z$. Podemos provar por indução que $g_2^n(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha^{4i+2} + \alpha^{4i+5}) + \alpha^{4n} z$. Assim, como $|\alpha| < 1$ temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} g_2^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^{4i+2} + \alpha^{4i+5}) + \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha^{4n} z) = \frac{(\alpha^2 + \alpha^5)}{1 - \alpha^4} = \frac{(\alpha^6 - \alpha^4)}{-\alpha^2 - \alpha^3} = \alpha^2 - \alpha^3 = w$.

2) Como $g_1(z) = -1 - \alpha^3 + \alpha^3 z$ e $g_0^2(z) = \alpha^2 + \alpha^4 z$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} g_1(g_2^n(z)) = g_1(\alpha^2 - \alpha^3) = -1 - \alpha^3 + \alpha^3(\alpha^2 - \alpha^3) = -(\alpha^5 + \alpha + \alpha^{-1}) = g_0(u)$

$$\text{Assim, } \lim_{n \rightarrow \infty} g_1 \circ g_2^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_0^2 \circ g_2^n(z)$$

3) Como $g_1 \circ g_0(z) = g_1(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2 z) = -\alpha^{-1} - \alpha + \alpha^5 z$ e $g_2 \circ g_0(z) = g_2(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2 z) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^6 z$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} g_1 \circ g_0(g_2^n(z)) = g_1 \circ g_0(\alpha^2 - \alpha^3) = -(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6) = g_0(u)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} g_2 \circ g_0 \circ g_2^n(z) = g_2 \circ g_0(\alpha^2 - \alpha^3) = \alpha^2 + \alpha^5 + \alpha + \alpha^3 + \alpha^6(\alpha^2 - \alpha^3) = -(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6)$.

$$\text{Portanto, } \lim_{n \rightarrow \infty} g_1 \circ g_0 \circ g_2^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_2 \circ g_0 \circ g_2^n(z). \quad \square$$

Prova do Teorema:

f é bem definida: Sejam $t, t' \in [0, 1]$ tais que $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ e $t' = \sum_{i=1}^{\infty} a'_i 3^{-i}$. Suponhamos que $t = t'$ e que $(a_i)_{i \geq 2} \leq_{lex} (a'_i)_{i \leq 2}$. Por Teorema temos que $a_i = a'_i$ para $i < k$ e que existe um k tal que $a'_k = a_k + 1$, $a'_i = 0$, $i \geq k + 1$, $a_i = 2$, $i \geq k + 1$.

Sejam (b_i) e (c_i) as imagens de (a_i) e (a'_i) por ψ , respectivamente.

Sem perda de generalidade vamos supor $t = (a_1 a_2 \dots a_{k-1} 1 \bar{2})$ e $t' = (a_1 a_2 \dots a_{k-1} 2 \bar{0})$, $k \geq 2$, onde $\bar{2} = 222 \dots$ e $\bar{0} = 000 \dots$.

Caso 1: Se $a_{k-1} = 0$ então $t = (a_1 a_2 \dots a_{k-2} 0 1 \bar{2})$ e $t' = (a_1 a_2 \dots a_{k-2} 0 2 \bar{0})$. Logo $\psi(t) = (b_1 b_2 \dots b_{k-2} b_{k-1} b_k \dots)$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-2} b_{k-1} c_k c_{k+1} \dots)$. Vamos determinar $b_k b_{k+1} \dots$ e $c_k c_{k+1} \dots$.

Se $a_k = 1$ então pela relação (4.15) temos que $b_k = 1$. Como $a_{k+1} = 2$ e $a_k = 1$, da relação (4.19)(a) segue que $b_{k+1} = 2 = a_{k+1}$. Como $a_j = 2$, para todo $j \geq k + 2$, então por (4.16) temos que $b_j = 2$, para todo $j \geq k + 2$.

Agora vamos determinar $c_k c_{k+1} \dots$. Como $a_{k-1} = 0$ e $a'_k = 2$ então pela relação (4.17)(b) temos que $c_k = 0$. Como $a'_k = 2$ e $a'_{k+1} = 0$ então por (4.16) $c_{k+1} = a'_{k+1} = 0$. Como $a'_l = 0$ para todo $l \geq k + 2$ então por (4.17)(a) $c_l = 2$, para todo $l \geq k + 2$.

Assim, $\psi(t) = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 1 \bar{2})$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 00 \bar{2})$.

Logo, $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_1 \circ g_2^n(x_0) = g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}}(\lim_{n \rightarrow \infty} g_1 \circ g_2^n(x_0))$.

Portanto, pela equação (4.21) do Lema (4.1.3) temos que $f(t) = f(t')$.

Caso 2: Se $a_{k-1} = 2$ então $t = (a_1 a_2 \dots a_{k-2} 21 \bar{2})$ e $t' = (a_1 a_2 \dots a_{k-2} 22 \bar{0})$. Então $\psi(t) = (b_1 b_2 \dots b_{k-2} b_{k-1} \dots)$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} c_k c_{k+1} \dots)$.

Como $a_k = 1$ então pela relação (4.15) $b_k = 1$. Como $a_{k+2} = 2$ e $a_{k+1} = 1$ então por (4.18)(b) $b_{k+1} = 2 - a_{k+1} = 2 - 2 = 0$. Como $a_{k+2} = 2$ então por (4.16) $b_{k+2} = 2$.

Assim $\psi(t) = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 10 \bar{2})$.

Vamos determinar $c_k c_{k+1} \dots$: se $a_{k-1} = 2$ então por (4.16) $c_k = a'_k = 2$. Se $a'_k = 2$ então por (4.16) $c_{k+1} = a'_{k+1} = 0$. Se $a'_i = 0$ para todo $i \geq k+2$ então pela relação (4.17)(a) $c_i = 2$ para todo $i \geq k+2$. Logo $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 20 \bar{2})$.

Logo,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_1 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0) \quad e \quad f(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_2 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0).$$

Temos que $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_1 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0) = g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}}(\lim_{n \rightarrow \infty} g_1 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0))$. Pela equação (4.22) do Lema (4.1.3) temos $f(t) = g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}}(-(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6))$ e $f(t') = g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}}(\lim_{n \rightarrow \infty} g_2 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0)) = g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}}(-(\alpha^{-1} + \alpha + \alpha^4 + \alpha^6))$. Portanto, $f(t) = f(t')$.

Caso 3: Se $a_{k-1} = 1$ então vamos subdividir este item em 3 casos:

1. Se $t = (a_1 a_2 \dots a_{r-2} 0 a_r \dots a_{k-1} 1 \bar{2})$ onde $a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $t' = (a_1 a_2 \dots a_{r-2} 0 a_r \dots a_{k-1} 2 \bar{0})$ onde $a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-r)$ é par então pela relação (4.15) se $a_k = 1$ então $b_k = 1$ e por (4.19)(a) $b_{k+1} = 2 = a_{k+1}$.

Vamos determinar $c_k c_{k+1} \dots$: como $a'_k = 2$ e $\#(k-r)$ é par então pela equação (4.19)(b) $c_k = 2 - a'_k = 0$. Se $a'_{k+1} = 0$ e $a'_k = 2$ então por (4.16) $c_{k+1} = 0$. Finalmente, se $a'_i = 0$, para todo $i \geq k+1$ então por (4.17)(a) $c_i = 2$ para todo $i \geq k+1$. Logo, $\psi(t) = (b_1 b_2 b_{k-1} 1 \bar{2})$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 00 \bar{2})$.

Assim,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_1 \circ g_2^n(x_0) \quad e \quad f(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_0^2 \circ g_2^n(x_0).$$

Este caso é igual ao **Caso 1**.

Se $a_k = 1$ então pela equação (4.15) temos $b_k = 1$. Se $\#(k-r)$ é ímpar então por (4.19)

$b_{k+1} = 2 - a_{k+1} = 2 - 2 = 0$. Como $a_i = 2$, para todo $i \geq k + 1$ então por (4.16) $b_i = 2$ para todo $i \geq k + 2$.

Vamos determinar $c_k c_{k+1} \dots$: se $\#(k - r)$ é ímpar então $c_k = a'_k = 2$. Como $a'_k = 2$ então por (4.16) $c_{k+1} = a'_{k+1} = 0$. Agora, como $a'_{k+1} = 0$ e $a'_{k+2} = 0$ então pela equação (4.17)(b) $c_{k+2} = 2$. Logo, $\psi(t) = (b_1 b_2 b_{k-1} 10\bar{2})$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 20\bar{2})$.

Assim,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_1 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0) \quad e \quad f(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_2 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0).$$

Este caso é igual ao **Caso 2**.

2. Se $t = (a_1 a_2 \dots a_{r-2} 2 a_r \dots a_{k-1} 1\bar{2})$ onde $a_r = \dots = a_{k-1} = 1$, e $t' = (a_1 a_2 \dots a_{r-2} 2 a_r \dots a_{k-1} 2\bar{0})$ onde $a_r = \dots = a_{k-1} = 1$.

Se $a_k = 1$ então pela equação (4.15) $b_k = 1$. Se $\#(k - r)$ é par então por (4.18)(b) $b_{k+1} = 2 - a_{k+1} = 2 - 2 = 0$ e como $a_j = 2$ e $a_{j+1} = 2$, para todo $j \geq k + 1$ então por (4.16) $b_l = a_l = 2$ para todo $l \geq k + 2$. Logo $b_k b_{k+1} b_{k+2} \dots = 10\bar{2}$.

Determinando $c_k c_{k+1} \dots$: se $\#(k - r)$ é par então pela equação (4.18)(a) $c_k = a'_k = 2$ como $a'_k = 2$ e $a'_{k+1} = 0$ então por (4.16) $c_{k+1} = a'_{k+1} = 0$. Agora, como $a'_j = 0 = a'_{j+1} = 0$ para todo $j \geq k + 1$ então por (4.17)(a) $c_l = 2$, para todo $l \geq k + 2$.

Assim, $\psi(t) = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 10\bar{2})$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 20\bar{2})$.

Portanto,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_1 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0) \quad e \quad f(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_2 \circ g_0 \circ g_2^n(x_0) = f(t').$$

Este caso é igual ao **Caso 2**.

Se $a_k = 1$ então pela equação (4.15) $b_k = 1$. Se $\#(k - r)$ é ímpar então por (4.18)(a) $b_{k+1} = a_{k+1} = 2$. Como $a_j = 2$ para todo $j \geq k + 2$ então por (4.16) $b_j = 2$ para todo $j \geq k + 2$.

Determinando $c_k c_{k+1} \dots$: se $\#(k - r)$ é ímpar então pela equação (4.18)(b) $c_k = 2 - a'_k = 2 - 2 = 0$. Como $a'_k = 2$ e $a'_{k+1} = 0$ então por (4.16) $c_{k+1} = a'_{k+1} = 0$. Agora, como $a'_l = 0 = a'_{l+1}$ para todo $l \geq k + 2$ então por (4.17)(a) $c_l = 2$, para todo $l \geq k + 2$. Assim, $\psi(t) = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 1\bar{2})$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 00\bar{2})$.

Portanto,

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_1 \circ g_2^n(x_0) \quad e \quad f(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} g_{b_1} \circ g_{b_2} \circ \dots \circ g_{b_{k-1}} \circ g_0^2 \circ g_2^n(x_0) = f(t').$$

Este caso é igual ao **Caso 1**.

3. Se $t = (a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} \dots)$ onde $a_1 = \dots = a_{k-1} = 1$, $a_k = 1$, $a_i = 2$ para todo $i \geq k+1$ e $t' = (a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \dots)$ onde $a_1 = \dots = a_{k-1} = 1$, $a'_k = 2$, $a'_i = 0$ para todo $i \geq k+1$.

Vamos determinar $b_k b_{k+1} \dots$ e $c_k c_{k+1} \dots$.

Como $a_k = 1$ então pela equação (4.15) $b_k = 1$. Se $\#(k-r)$ é par então por (4.18)(b) $b_{k+1} = a_{k+1} = 2$ e como $a_l = 2 = a_{l+1}$ para todo $l \geq k+2$ então $b_l = a_l = 2$ para todo $l \geq k+2$.

Para determinar $c_k c_{k+1} \dots$: se $\#(k-r)$ é par então pela equação (4.18)(b) $c_k = 2 - a'_k = 2 - 2 = 0$. Como $a'_k = 2$ então por (4.16) $c_{k+1} = a'_{k+1} = 0$. Finalmente, como $a_l = a_{l+1}$ para todo $l \geq k+2$ então por (4.17)(a) $c'_l = 2$, para todo $l \geq k+2$.

Assim, $\psi(t) = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 1\bar{2})$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 00\bar{2})$ e conclui-se pelo **Caso 1** que $f(t) = f(t')$.

Como $a_k = 1$ então pela equação (4.15) $b_k = 1$. Se $\#(k-r)$ é ímpar então por (4.18)(a) $b_{k+1} = 2 - a_{k+1} = 2 - 2 = 0$. Se $a_l = 2 = a_{l+1}$ para todo $l \geq k+2$ então por (4.16) $b_l = a_l = 2$ para todo $l \geq k+2$.

Para determinar $c_k c_{k+1} \dots$: se $\#(k-r)$ é ímpar então pela equação (4.18)(a) $c_k = a'_k = 2$. Como $a'_k = 2$ então por (4.16) $c_{k+1} = a'_{k+1} = 0$. Agora, como $a'_l = a'_{l+1} = 0$ para todo $l \geq k+2$ então por (4.17)(a) $c'_l = 2$, para todo $l \geq k+2$.

Assim, $\psi(t) = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 10\bar{2})$ e $\psi(t') = (b_1 b_2 \dots b_{k-1} 20\bar{2})$ e conclui-se pelo **Caso 2** que $f(t) = f(t')$.

Portanto, em todos os casos analisados temos $f(t) = f(t')$, ou seja, f está bem definida. \square

A injetividade e a continuidade estão demonstradas no Apêndice.

Teorema 4.1.4 A fronteira de \mathcal{R}_α é homeomorfa ao círculo.

Pelo Teorema 4.1.1, temos que $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}_{\alpha-1}$ é contínua e bijetora.

Como $[0, 1]$ é compacto, então para todo subconjunto fechado $F \subset [0, 1]$, temos $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ é fechado em $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ (pois é compacto).

Logo f^{-1} é contínua, portanto, $f = [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}_{\alpha-1}$ é um homeomorfismo.

Seja

$$\begin{aligned} g_1 : [0, 1/6] &\longrightarrow \mathcal{R}_{\alpha-1} \\ t &\longmapsto f(6t) \end{aligned}$$

Como f é um homeomorfismo, então g_1 também é um homeomorfismo.

Da mesma maneira, usando o Lema 4.0.6 construímos as funções $g_2 : [1/6, 2/6] \rightarrow \mathcal{R}_{-1}$, $g_3 : [2/6, 3/6] \rightarrow \mathcal{R}_{-\alpha}$, $g_4 : [3/6, 4/6] \rightarrow \mathcal{R}_{-\alpha+1}$, $g_5 : [4/6, 5/6] \rightarrow \mathcal{R}_1$ e $g_6 : [5/6, 1] \rightarrow \mathcal{R}_\alpha$ onde g_i , $2 \leq i \leq 6$ são homeomorfas.

Seja

$$\begin{aligned} h : S^1 \sim [0, 1[&\longrightarrow \partial\mathcal{R} \\ t &\longmapsto g_i(t), \text{ se } t \in [i - 1/6, i/6[\end{aligned}$$

Como as funções g_i são homeomorfismos, temos que h também o é.

Box

4.2 Cálculo da dimensão de Hausdorff

Como $\partial(\mathcal{R})$ é a reunião de seis curvas que são imagem de $\mathcal{R}_{\alpha-1}$ por uma transformação afim temos que $\dim_H(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = \dim_H(\partial(\mathcal{R}))$. Pelo Lema 4.0.5 o conjunto $\mathcal{R}_{\alpha-1} = \cup_{i=0}^2 g_i(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ é o conjunto invariante pelas semelhanças g_i . Uma cota superior da dimensão de Hausdorff dessa classe de compactos é dada pelo Teorema

Teorema 4.2.1 [11] *Seja A um conjunto de \mathbb{C} tal que $A = \cup_{i=0}^n \varphi_i(A)$ é compacto e invariante pelas transformações afins φ_i de coeficientes r_i (isto é, $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| = r_i |x - y|$) então $\dim_H(A) \leq s$, onde s é o único número real que verifica $\sum_{i=0}^n r_i^s = 1$.*

Observação 4.2.2 *Quando as $\varphi_i(A)$ se intersectam em pontos é conhecido que $\dim_H(A) = s$ (ver [11]).*

Pelo Lema 4.0.5 temos $g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ e $g_1(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ são pontos e $g_0(\mathcal{R}_{\alpha-1}) \cap g_2(\mathcal{R}_{\alpha-1})$ é vazio.

Para todo $x, y \in \mathcal{R}_{\alpha-1}$ temos:

$$|g_0(x) - g_0(y)| = |\alpha^2||x - y|. \text{ Logo } r_0 = |\alpha^2|.$$

$$|g_1(x) - g_1(y)| = |\alpha^3||x - y|. \text{ Então } r_1 = |\alpha^3|.$$

$$|g_2(x) - g_2(y)| = |\alpha^4||x - y|. \text{ Portanto, } r_2 = |\alpha^4|.$$

Consequentemente, $\dim_H(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = s$, onde s verifica

$$|\alpha|^{2s} + |\alpha|^{3s} + |\alpha|^{4s} = 1.$$

Deduzimos que a $\dim_H(\mathcal{R}_{\alpha-1}) = \frac{\log \rho}{\log |\alpha|} = 1.359337357$, onde ρ é a raiz real máxima do polinômio $X^4 + X^3 + X^2 - 1 = 0$.

Parametrização da fronteira de \mathcal{F}

Vamos considerar o Fractal de Rauzy clássico:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_a = \left\{ \sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \forall i \geq 2, \varepsilon_i = 0, 1, \dots, a-1, \varepsilon_i \varepsilon_{i-1} \varepsilon_{i-2} \varepsilon_{i-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01 \right\}.$$

O conjunto \mathcal{F} foi estudado por vários matemáticos. Em particular ele é compacto, conexo, com interior simplesmente conexo e induz um azulejamento do plano módulo $\mathbb{Z}(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}) + \mathbb{Z}(\alpha^{-2} + 1)$ (ver ([9])).

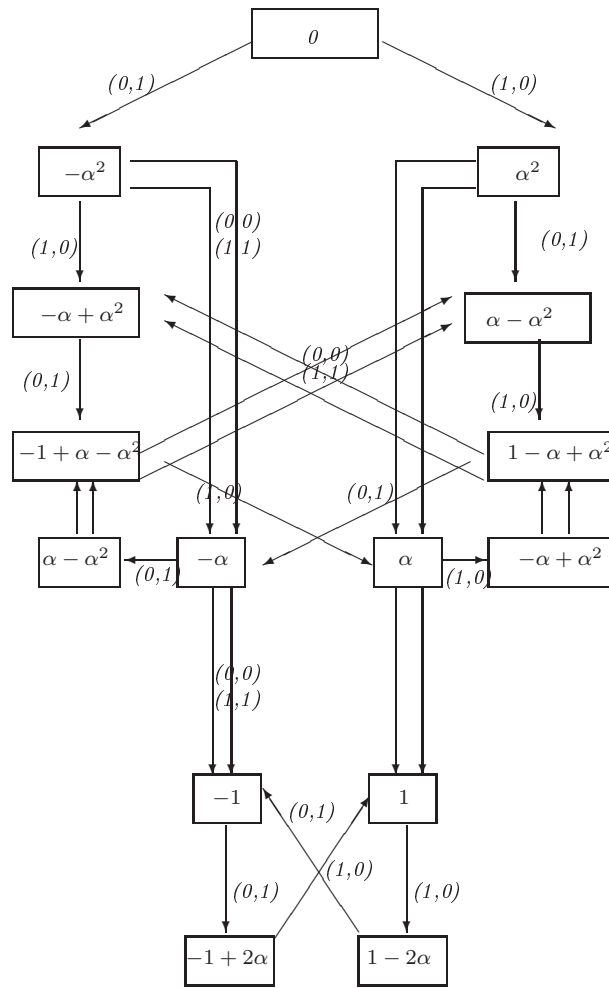
Proposição 5.0.3 A fronteira de \mathcal{F} é $\partial\mathcal{F} = \bigcup_{v \in B} \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + v)$ onde B é um conjunto finito contido em $\mathbb{Z}(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}) + \mathbb{Z}(1 + \alpha^{-2})$ cuja cardinalidade é par e maior ou igual a 8 e $\{\pm(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}), \pm\alpha^{-1}, \pm(1 + \alpha^{-2}), \pm(\alpha + \alpha^{-2})\} \subset B$.

Demonstração: Analogamente ao Teorema 2.1.8, item 1, provamos que $\partial\mathcal{F} = \bigcup_{v \in B} \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + v)$, onde B é um subconjunto finito de $\mathbb{Z}(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}) + \mathbb{Z}(\alpha^{-2} + 1)$ e de cardinalidade par.

Da próxima Proposição deduziremos que $\{\pm(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}), \pm\alpha^{-1}, \pm(1 + \alpha^{-2}), \pm(\alpha + \alpha^{-2})\} \subset B$.

Observação 5.0.4 Podemos provar usando o mesmo argumento que no Teorema 2.2.1 que $B = \{\pm(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}), \pm\alpha^{-1}, \pm(1 + \alpha^{-2}), \pm(\alpha + \alpha^{-2})\}$, isto é, \mathcal{F} tem exatamente 8 vizinhos.

Como no fractal com restrições \mathcal{R} temos para o fractal \mathcal{F} o mesmo automato:



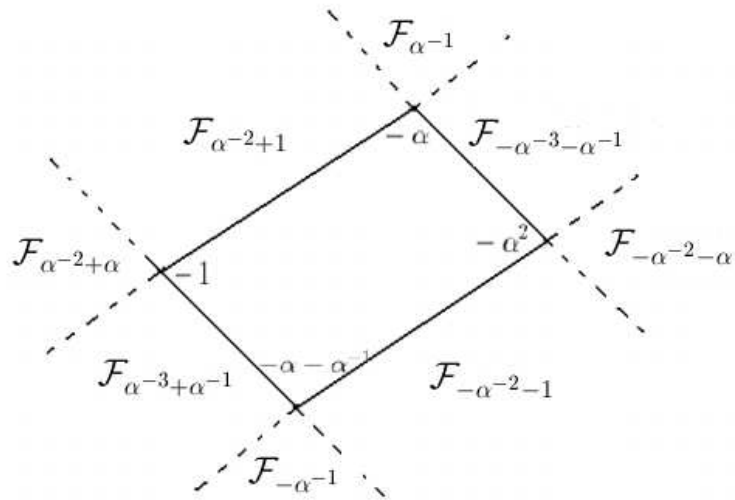


Figura 5.1: Fractal de Rauzy

Proposição 5.0.5 Seja $u \in \{\pm(\alpha^{-3} + \alpha^{-1}), \pm\alpha^{-1}, \pm(1 + \alpha^{-2}), \pm(\alpha^{-2} + \alpha)\}$ e $\mathcal{F}_u = \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + u)$ então as seguintes propriedades são verificadas:

1. $\mathcal{F}_{\alpha^{-3}+\alpha^{-1}} \cap \mathcal{F}_{1+\alpha^{-2}} \cap \mathcal{F}_{\alpha+\alpha^{-2}} = \{-1\}$;
2. $\mathcal{F}_{\alpha^{-1}} \cap \mathcal{F}_{1+\alpha^{-2}} \cap \mathcal{F}'_{-\alpha^{-3}-\alpha^{-1}} = \{-\alpha\}$;
3. $\mathcal{F}'_{-\alpha^{-3}-\alpha^{-1}} \cap \mathcal{F}'_{-1-\alpha^{-2}} \cap \mathcal{F}'_{-\alpha-\alpha^{-2}} = \{-\alpha^2\}$.
4. $\mathcal{F}_{\alpha^{-3}+\alpha^{-1}} \cap \mathcal{F}'_{-\alpha^{-1}} \cap \mathcal{F}'_{-1-\alpha^{-2}} = \{-\alpha - \alpha^{-1}\}$;

Demonstração:

- 1) Seja w' um elemento de $\mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha^{-3} + \alpha^{-1}) \cap (\mathcal{F} + \alpha + \alpha^{-2})$ então existem x', y' e $z' \in \mathcal{F}$ tais que $x' = \sum_{i=2}^{+\infty} a'_i \alpha^i$, $y' = \sum_{i=2}^{+\infty} b'_i \alpha^i$ e $z' = \sum_{i=2}^{+\infty} c'_i \alpha^i$ e $w' = \alpha - 1 + x' = \alpha + \alpha^{-2} + y' = z'$.
Como $\alpha - 1 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1}$ então $r'_1 = (1, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 0)(0, 0)(a'_2, c'_2)(a'_3, c'_3) \dots$ e para $\alpha + \alpha^{-2}$ temos $r'_2 = (1, 0)(0, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 1)(0, 1)(1, 0)t't't't't't'$ onde $t' = (1, 0)(0, 1)(0, 1)(1, 0)$ são caminhos do autômato que começam no estado inicial.

Analisando o autômato obtemos

$$\begin{aligned} r'_1 &= (1, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 0)(0, 0)(0, 1)(1, 1)(1, 0)(0, 0)(0, 1)(1, 1)(1, 0) \dots e \\ r'_2 &= (1, 0)(0, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 1)(0, 1)(1, 0)t't't't't't' \dots \text{ onde } t' = (1, 0)(0, 1)(0, 1)(1, 0). \end{aligned}$$

Assim

$$w' = \alpha - 1 + x' = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i-1} + \alpha^{4i}) \quad (5.1)$$

Por outro lado

$$w' = z' = \alpha^2 + \alpha^3 + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i+2} + \alpha^{4i+3}) \quad (5.2)$$

e

$$w' = \alpha + \alpha^{-2} + y' = \sum_{i=2}^{+\infty} (\alpha^{4i-2} + \alpha^{4i-1}) \quad (5.3)$$

Das equações (5.1) à (5.3) obtemos, por exemplo (usando a equação (5.2)):

$$w' = \alpha^2 + \alpha^3 + (\alpha^6 + \alpha^7) + (\alpha^{10} + \alpha^{11}) + (\alpha^{14} + \alpha^{15}) + \dots$$

Como $\alpha^8 = \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^4$ então

$$\begin{aligned} w' &= \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^4 + (\alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7) + (\alpha^{10} + \alpha^{11}) + \dots \\ &= \alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^3 - \alpha^2 - 1 + 0 = -1 \end{aligned}$$

Portanto, $w' = -1$.

Seja $w'' \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha^{-3} + \alpha^{-1}) \cap (\mathcal{F} + 1 + \alpha^2)$ então existem x'' , y'' e $z'' \in \mathcal{F}$ tais que $x'' = \sum_{i=2}^{+\infty} a_i'' \alpha^i$, $y'' = \sum_{i=2}^{+\infty} b_i'' \alpha^i$ e $z'' = \sum_{i=2}^{+\infty} c_i'' \alpha^i$ e $w'' = \alpha - 1 + x'' = 1 + \alpha^{-2} + y'' = z''$.

Como $\alpha - 1 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1}$ então $r_1'' = (1, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 0)(0, 0)(a_2'', c_2'')(a_3'', c_3'') \dots$ e para $1 + \alpha^{-2}$ temos $r_2'' = (1, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 0)(1, 1)(a_3'', b_3'')(a_4'', b_4'') \dots$ são caminhos do autômato que começam no estado inicial.

Analisando o autômato obtemos:

$$\begin{aligned} r_1'' &= (1, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 0)(0, 0)(0, 1)(1, 1)(1, 0)(0, 0)(0, 1)(1, 1)(1, 0) \dots e \\ r_2'' &= (1, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 0)(1, 1)(0, 1)(0, 0)(1, 0)(1, 1)(0, 1)(0, 0)(1, 0)(1, 1)(0, 1)(0, 0)(1, 0) \dots \end{aligned}$$

Assim

$$w'' = \alpha - 1 + x'' = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i-1} + \alpha^{4i}) \quad (5.4)$$

Por outro lado

$$w'' = z'' = \alpha^2 + \alpha^3 + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i+2} + \alpha^{4i+3}) \quad (5.5)$$

e

$$w'' = 1 + \alpha^{-2} + y'' = 1 + \alpha^{-2} + \alpha^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i+1} + \alpha^{4i+2}) \quad (5.6)$$

Das equações (5.4) à (5.6) obtemos, por exemplo (usando a equação (5.6)):

$$\begin{aligned} w'' &= 1 + \alpha^{-2} + y'' = 1 + \alpha^{-2} + \alpha^2 + \sum_{i=1}^{+\infty} (\alpha^{4i+1} + \alpha^{4i+2}) \\ &= 1 + \alpha^{-2} + \alpha^2 - \alpha^3 + (\alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6) + (\alpha^9 + \alpha^{10}) + \dots \\ &= \alpha^{-2} - 2\alpha^{-1} + \alpha^{-3} = \alpha^{-2} - 1 - \alpha^{-2}. \end{aligned}$$

Portanto, $w'' = -1$ e assim $\mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + (\alpha^{-3} + \alpha^{-1})) \cap (\mathcal{F} + (1 + \alpha^{-2})) \cap (\mathcal{F} + (\alpha + \alpha^{-2})) = \{-1\}$.

Analogamente provamos os outros itens. \square

De fato, mostraremos que $\mathcal{F}_{\alpha^{-3}+\alpha^{-1}} = \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha^{-3} + \alpha^{-1})$ é homeomorfo a um segmento de reta. Sejam $a, b \in \mathcal{F}_{\alpha^{-3}+\alpha^{-1}}$. Se denotarmos por $I(a, b)$ o segmento em $\mathcal{F}_{\alpha^{-3}+\alpha^{-1}}$ ligando a e b , em virtude do Lema 5.0.6 teremos que

$$\begin{aligned} h_0(\mathcal{F}_{\alpha^{-3}+\alpha^{-1}}) = h_0(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) &= I(-\alpha - \alpha^{-1}, -1 - \alpha^3) = I(h_0(-1), h_0(-\alpha - \alpha^{-1})) \\ h_1(\mathcal{F}_{\alpha^{-3}+\alpha^{-1}}) = h_1(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) &= I(-1 - \alpha^3, -(1 + \alpha^2 + \alpha^4)) = I(h_1(-1), h_1(-\alpha - \alpha^{-1})) \\ h_2(\mathcal{F}_{\alpha^{-3}+\alpha^{-1}}) = h_2(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) &= I(-(1 + \alpha^2 + \alpha^4), -1) = I(h_2(-\alpha - \alpha^{-1}), h_2(-1)). \end{aligned}$$

Lema 5.0.6 Sejam $h_0(z) = \alpha - 1 + \alpha^2 z$, $h_1(z) = -1 + \alpha^3 z$ e $h_2(z) = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 z$, temos que $\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}$ verifica as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{F}_{\alpha^{-1}} = h_0(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) \cup h_1(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) \cup h_2(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}})$;
2. $h_1(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) \cap h_2(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) = \{-(1 + \alpha^2 + \alpha^4)\} = \{h_2(-\alpha - \alpha^{-1})\}$;
3. $h_1(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) \cap h_0(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) = \{-(1 + \alpha^3)\} = \{h_1(-1)\}$;
4. $h_0(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) \cap h_2(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) = \emptyset$.

Demonstração: Vamos mostrar que $h_i(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) \subset \mathcal{F}_{\alpha^{-1}}$, $\forall i \in \{0, 1, 2\}$.

1. Temos que $h_0(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) = (\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2 \mathcal{F}) \cap (\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2 \mathcal{F}) = (\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^2 \mathcal{F}) \cap (\alpha^2 + \alpha^2 \mathcal{F}) = ((\alpha - 1) + \alpha^2 \mathcal{F}) \cap (\alpha^2 + \alpha^2 \mathcal{F}) \subset \mathcal{F}_{\alpha^{-1}}$.

$h_2(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) = (\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \mathcal{F}) \cap (\alpha + \alpha^2 + 2\alpha^3 + \alpha^4 \mathcal{F})$. Por outro lado, $\alpha + \alpha^2 + 2\alpha^3 = (\alpha - 1) + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^4 \mathcal{F}$. Logo, $h_2(\mathcal{F}_{\alpha^{-1}}) = (\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 \mathcal{F}) \cap ((\alpha - 1) + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^4 \mathcal{F}) \subset \mathcal{F}_{\alpha^{-1}}$.

Seja $x \in \mathcal{F}_{\alpha^{-1}}$ então $x = \alpha - 1 + \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \sum_{i=2}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i$, onde $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}, (\varepsilon'_i)_{i \geq 2} \in \mathcal{D}^\infty$.

Como $\alpha - 1 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1}$ então

$$(1, 0)(0, 0)(1, 0)(0, 0)(0, 0)(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) \dots$$

é um caminho no autômato começando do estado inicial.

Portanto, temos duas possibilidades. Considerando a primeira: $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (0, 1)(0, 0)(1, 0)$.

Logo

$$x = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \sum_{i=5}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \alpha^2 + \sum_{i=5}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i.$$

Assim, $x = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 z = \alpha^2 + \alpha^3 z'$, onde $z, z' \in \mathcal{F}$. Então, $h_1(x) = -1 + \alpha^3(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^4 + \alpha^3 z)$ e $h_1(x) = -1 + \alpha^3(\alpha^2 + \alpha^3 z')$. Logo, $h_1(x) = -1 + 1 + \alpha^2 + \alpha^7 + \alpha^6 z = \alpha^2 + \alpha^7 + \alpha^6 z \in \mathcal{F}$ e $h_1(x) = -1 + \alpha^5 + \alpha^6 z' = (\alpha - 1) + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 z' \in \mathcal{F} + (\alpha - 1)$.

Portanto, $h_1(\mathcal{F}_{\alpha-1}) \subset \mathcal{F}_{\alpha-1}$.

A segunda possibilidade é $(\varepsilon_2, \varepsilon'_2)(\varepsilon_3, \varepsilon'_3)(\varepsilon_4, \varepsilon'_4) = (0, 1)(1, 1)(1, 0)$. Logo

$$x = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^3 + \alpha^4 + \sum_{i=5}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i = \alpha^2 + \alpha^3 + \sum_{i=5}^{+\infty} \varepsilon'_i \alpha^i.$$

Assim, $x = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 \hat{z} = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^3 \tilde{z}$, onde $\hat{z}, \tilde{z} \in \mathcal{F}$.

Então, $h_1(x) = -1 + \alpha^3(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 \hat{z})$ e $h_1(x) = -1 + \alpha^3(\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^3 \tilde{z})$. Logo, $h_1(x) = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 \hat{z} \in \mathcal{F}$ e $h_1(x) = -1 + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^6 \tilde{z} = -1 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha + \alpha^5 + \alpha^6 + \alpha^6 \tilde{z} = (\alpha - 1) + \alpha^4 + \alpha^7 + \alpha^6 \tilde{z} \in \mathcal{F} + (\alpha - 1)$.

Portanto, $h_1(\mathcal{F}_{\alpha-1}) \subset \mathcal{F}_{\alpha-1}$.

Por outro lado, seja z um elemento de $\mathcal{F}_{\alpha-1}$. Devido ao automato, temos três casos:

(a) $z = \alpha - 1 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 t_0 = \alpha^2 + \alpha^3 t'_0$ onde $t_0, t'_0 \in \mathcal{F}$. Neste caso $h_0^{-1}(z) = \alpha^2 + t_0 = (\alpha - 1) + t'_0 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha - 1)$, daí $z \in h_0(\mathcal{F}_{\alpha-1})$.

(b) $z = \alpha - 1 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^4 t_1 = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 t'_1$ onde $t_1, t'_1 \in \mathcal{F}$. Neste caso, $h_1^{-1}(z) = (\alpha - 1) + t_1 = t'_1 \in \mathcal{F}_{\alpha-1}$, daí $z \in h_1(\mathcal{F}_{\alpha-1})$.

(c) $z = \alpha - 1 + \alpha^4 + \alpha^2 t_2 = \alpha^2 + \alpha^2 t'_2$ onde $t_2, t'_2 \in \mathcal{F}$. Neste caso, $h_2^{-1}(z) = \alpha^2 + t_2 = \alpha - 1 + t'_2$.

Portanto, $X = \mathcal{F}_{\alpha-1} = h_0(\mathcal{F}_{\alpha-1}) \cup h_1(\mathcal{F}_{\alpha-1}) \cup h_2(\mathcal{F}_{\alpha-1})$.

2. Suponha $\gamma \in h_1(\mathcal{F}_{\alpha-1}) \cap h_2(\mathcal{F}_{\alpha-1})$. Então existem $y, y_1 \in \mathcal{F}_{\alpha-1}$ tais que $\gamma = -1 + \alpha^3 y = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 y_1$. E assim, temos $y = \alpha + \alpha y_1$.

Como $\alpha^2 = \alpha + 1 + \alpha^{-2}$ podemos reescrever $y = -1 - \alpha^{-2} + \alpha^2 + \alpha y_1$.

Os elementos de $\mathcal{F}_{\alpha-1}$ podem ser escritos de duas maneiras, considerando a primeira $y_1 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + z'$, $z' \in \mathcal{F}$, temos $y = \alpha^2 + \alpha z' = \alpha^2 + \omega$, onde $\omega \in \mathcal{F}$.

Agora considerando a segunda forma, temos que se $y_1 = \alpha^2 + z''$, $z'' \in \mathcal{F}$, então

$$y = -1 - \alpha^{-2} + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha z''. \text{ Logo } y \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} - 1 - \alpha^{-2}). \quad (5.7)$$

Por outro lado, temos que

$$-1 + \alpha^3 y = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 y_1. \text{ Assim } -1 - \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^3 y = \alpha^4 y_1 \text{ então } y_1 = -1 + \alpha^{-1} y.$$

Temos que y pode ser escrito de duas maneiras: considerando a primeira $y = \alpha^2 + w_1$, $w_1 \in \mathcal{F}$ temos $y_1 = -1 + \alpha + w_1 \alpha^{-1}$, onde $w_1 \alpha^{-1} \in \mathcal{F}$ (pois, analisando as possibilidades para $w_1 = \alpha^3 + a_4 \alpha^4 + a_5 \alpha^5 + a_6 \alpha^6 + \dots$, onde $a_i \in \{0, 1\}$, $\forall i \geq 4$, temos que se $w_1 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^7 + \alpha^9 + \dots$ então $w_1 \alpha^{-1} = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \dots \in \mathcal{F}$, ou se $w_1 = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^7 + \alpha^9 + \dots$ então $w_1 \alpha^{-1} = \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^8 + \dots \in \mathcal{F}$ ou finalmente, se $w_1 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^8 + \dots$ então $w_1 \alpha^{-1} = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^7 + \dots \in \mathcal{F}$), logo

$$y_1 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha - 1) = \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha^{-3} + \alpha^{-1}). \quad (5.8)$$

Agora, seja $y = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + w_2$, com $w_2 \in \mathcal{F}$ temos

$$y_1 = -1 + \alpha^{-4} + \alpha^{-2} + w_2 \alpha^{-1} \text{ logo } -\alpha^{-1} + w_2 \alpha^{-1}, w_2 \alpha^{-1} \in \mathcal{F} \text{ assim } y_1 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} - \alpha^{-1}) \quad (5.9)$$

De (5.7), (5.8) e (5.9) segue que $y_1 = -\alpha - \alpha^{-1} = y$ e daí

$$\gamma = -1 + \alpha^3 y = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 y_1 = -1 - \alpha^2 - \alpha^4.$$

3. Suponha $\tilde{\gamma} \in h_1(\mathcal{F}_{\alpha-1}) \cap h_0(\mathcal{F}_{\alpha-1})$ Então, temos que $\tilde{\gamma} = -1 + \alpha^3 y_2 = \alpha - 1 + \alpha^2 y_3$ logo $y_3 = -\alpha^{-1} + \alpha y_2$.

Como anteriormente, podemos escrever y_2 de duas maneiras, se considerarmos $y_2 = \alpha^2 + z_1$, $z_1 \in \mathcal{F}$ temos $y_3 = -\alpha^{-1} + \alpha^3 + \alpha z_1$ então $y_3 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha^{-3} + \alpha^{-1}) \cap (\mathcal{F} - \alpha^{-1})$.

Agora, se $y_2 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + z_2$, onde $z_2 \in \mathcal{F}$, temos $y_3 = \alpha - 1 + \alpha z_2$ logo $y_3 \in \mathcal{F} + \alpha - 1$.

Por outro lado, $-1 + \alpha^3 y_2 = \alpha - 1 + \alpha^2 y_3$ então $\alpha^3 y_2 = \alpha + \alpha^2 y_3$ logo $y_2 = \alpha^{-2} + \alpha^{-1} y_3$.

Podemos escrever y_3 de duas maneiras. Considerando a primeira $y_3 = \alpha^2 + w_3$, com $w_3 \in \mathcal{F}$

então

$$y_2 = \alpha^{-2} + \alpha^{-1}(\alpha^2 + w_3) = \alpha^{-2} + \alpha + w_3\alpha^{-1}, \quad w_3\alpha^{-1} \in \mathcal{F} \text{ então } y_2 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha^{-2} + \alpha). \quad (5.10)$$

Agora, se considerarmos $y_3 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + w_4$, $w_4 \in \mathcal{F}$, temos

$$y_2 = \alpha^{-2} + \alpha^{-1}(\alpha^{-3} + \alpha^{-1} + w_4) = \alpha - 1 + w_4\alpha^{-1}, \quad w_4\alpha^{-1} \in \mathcal{F} \text{ então } y_2 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha - 1) \quad (5.11)$$

Assim, $y_2 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{F} + \alpha^{-2} + \alpha)$, portanto, usando o autômato duplo temos que $y_2 = -1$ e conseqüentemente, $\tilde{\gamma} = -1 + \alpha^3 y_2 = \alpha - 1 + \alpha^2 y_3$ então $\tilde{\gamma} = -1 - \alpha^3$.

4. Seja $\hat{\gamma} \in h_2(\mathcal{F}_{\alpha-1}) \cap h_0(\mathcal{F}_{\alpha-1})$. Logo $\hat{\gamma} = \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 y_4 = \alpha - 1 + \alpha^2 y_5$ com $y_4, y_5 \in (\mathcal{F} + \alpha - 1)$.

Temos

$$y_5 = -\alpha^{-1} + \alpha^2 + \alpha^2 y_4 \quad (5.12)$$

Podemos escrever y_4 de duas maneiras, considerando a primeira $y_4 = \alpha^2 + z_3$, $z_3 \in \mathcal{F}$. Daí,

$$y_5 = -\alpha^{-1} + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^2 z_3 \text{ então } y_5 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} - \alpha - 1). \quad (5.13)$$

Também podemos escrever $y_5 = \alpha^{-3} + \alpha^{-1} + z_4$, $z_4 \in \mathcal{F}$ e temos

$$y_5 = \alpha + \alpha^2 + \alpha^2 z_4 \text{ logo } y_5 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha). \quad (5.14)$$

De (5.12), (5.13) e (5.14) segue que $y_5 \in \mathcal{F} \cap (\mathcal{F} + \alpha - 1) \cap (\mathcal{F} - \alpha^{-1}) \cap (\mathcal{F} + \alpha)$ que pela Proposição 5.0.5 é vazio. \square

5.1 Parametrização de $\mathcal{F}_{\alpha-1}$

Analogamente ao que foi feito no Capítulo 4, será definida uma aplicação f a qual parametrizará a fronteira de \mathcal{F} . Veremos que esta aplicação está bem definida, contínua e bijetora.

Seja z um elemento de $\mathcal{F}_{\alpha-1}$. Pelo Lema 5.0.6, existem $z_1 \in \mathcal{F}_{\alpha-1}$ e a_1 elemento de $A = \{0, 1, 2\}$ tais que $z = h_{a_1}(z_1)$. Continuando assim construímos uma seqüência $(a_n)_{n \geq 1}$ em $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ e uma seqüência $(z_n)_{n \geq 1}$ em X , tais que para todo n :

$$z = h_{a_1} \circ h_{a_2} \circ \dots \circ h_{a_n}(z_n).$$

Como as funções h_i são contrações, então para todo $x \in \mathcal{F}_{\alpha-1}$, a seqüência $h_{a_1} \circ h_{a_2} \circ \dots \circ h_{a_n}(x)$

converge para z quando n tende a infinito.

Seja

$$\begin{aligned}\psi : A^{\mathbb{N}} &\longrightarrow A^{\mathbb{N}} \\ a_1 a_2 \dots &\longmapsto b_1 b_2 \dots\end{aligned}$$

definida como segue.

Temos $b_1 = a_1$.

Seja $k \geq 2$, definimos b_k da seguinte maneira:

•

$$\text{Se } a_k = 1 \text{ então } b_k = 1; \quad (5.15)$$

$$\text{Se } a_k \neq 1 \text{ e } a_{k-1} = 2 \text{ então } b_k = a_k; \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}\text{Se } a_k \neq 1 \text{ e } a_{k-1} = 0 \text{ então } & a) b_k = 2 \text{ se } a_k = 0; \\ & b) b_k = 0 \text{ se } a_k = 2.\end{aligned} \quad (5.17)$$

Se $a_k \neq 1$ e $a_{k-1} = 1$, seja $r = \min\{1 \leq i \leq k-1, a_i = a_{i+1} = \dots = a_{k-1} = 1\}$:

• (Se $r > 1$ e $a_{r-1} = 2$) ou $r = 1$ então

$$\begin{cases} a) b_k = a_k, & \text{se } \#(k-r) \text{ é par} \\ b) b_k = 2 - a_k, & \text{se } \#(k-r) \text{ é ímpar} \end{cases} \quad (5.18)$$

onde $\#(k-r)$ é o número de algarismos 1 após um algarismo 0 ou 2.

• (Se $r > 1$ e $a_{r-1} = 0$) então

$$\begin{cases} a) b_k = a_k, & \text{se } \#(k-r) \text{ é ímpar} \\ b) b_k = 2 - a_k, & \text{se } \#(k-r) \text{ é par} \end{cases} \quad (5.19)$$

Fixemos $x_0 \in \mathcal{F}_{\alpha-1}$ e definimos $f : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{F}_{\alpha-1}$ a correspondência definida da seguinte maneira: se $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ onde $(a_i)_{i \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$, então $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{b_1} \circ \dots \circ h_{b_n}(x_0)$ onde $b_1 b_2 \dots = \psi(a_1 a_2 \dots)$.

Daqui pra frente, supomos que se t e t' pertencem a $[0, 1]$ então $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ e $t' = \sum_{i=1}^{\infty} b_i 3^{-i}$ onde a_i e b_i são elementos de $\{0, 1, 2\}$ tais que $a_i = b_i$ para $i < k$ e $a_k < b_k$ onde $k \in \mathbb{N}$. Supomos que $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{c_1} \circ \dots \circ h_{c_n}(x_0)$ e $f(t') = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{d_1} \circ \dots \circ h_{d_n}(x_0)$ onde $c_1 c_2 \dots = \psi(a_1 a_2 \dots)$ e $d_1 d_2 \dots = \psi(b_1 b_2 \dots)$.

Proposição 5.1.1 : Temos que $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_2(h_0^n(z)) = -\alpha - \alpha^{-1}$ e $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_0^n(z) = -1$.
Temos que f está bem definida, é bijetora e contínua.

A demonstração desta proposição é análoga à que foi feita no capítulo 4 para o fractal \mathcal{R} .

5.2 Cálculo da dimensão de Hausdorff

Como no caso do fractal com restrições temos $\partial(\mathcal{F})$ é a reunião de oito curvas, onde cada uma delas é a imagem de $\mathcal{F}_{\alpha-1}$ por uma transformação afim. Em particular $\dim_H(\mathcal{F}_{\alpha-1}) = \dim_H(\partial(\mathcal{F}))$. Pelo Lema 5.0.6 temos que $\mathcal{F}_{\alpha-1} = \cup_{i=0}^2 h_i(\mathcal{F}_{\alpha-1})$, isto é, $\mathcal{F}_{\alpha-1}$ é o conjunto maximal invariante pelas semelhanças h_i .

Usando novamente o Teorema 4.2.1 temos

$$|\alpha|^{2s} + |\alpha|^{3s} + |\alpha|^{4s} = 1.$$

E conseqüentemente a mesma dimensão de Hausdorff, a qual é $\dim_H(\mathcal{F}_{\alpha-1}) = \frac{\log \rho}{\log |\alpha|} = 1.359337357$, onde ρ é a raiz real máxima do polinômio $X^4 + X^3 + X^2 - 1 = 0$.

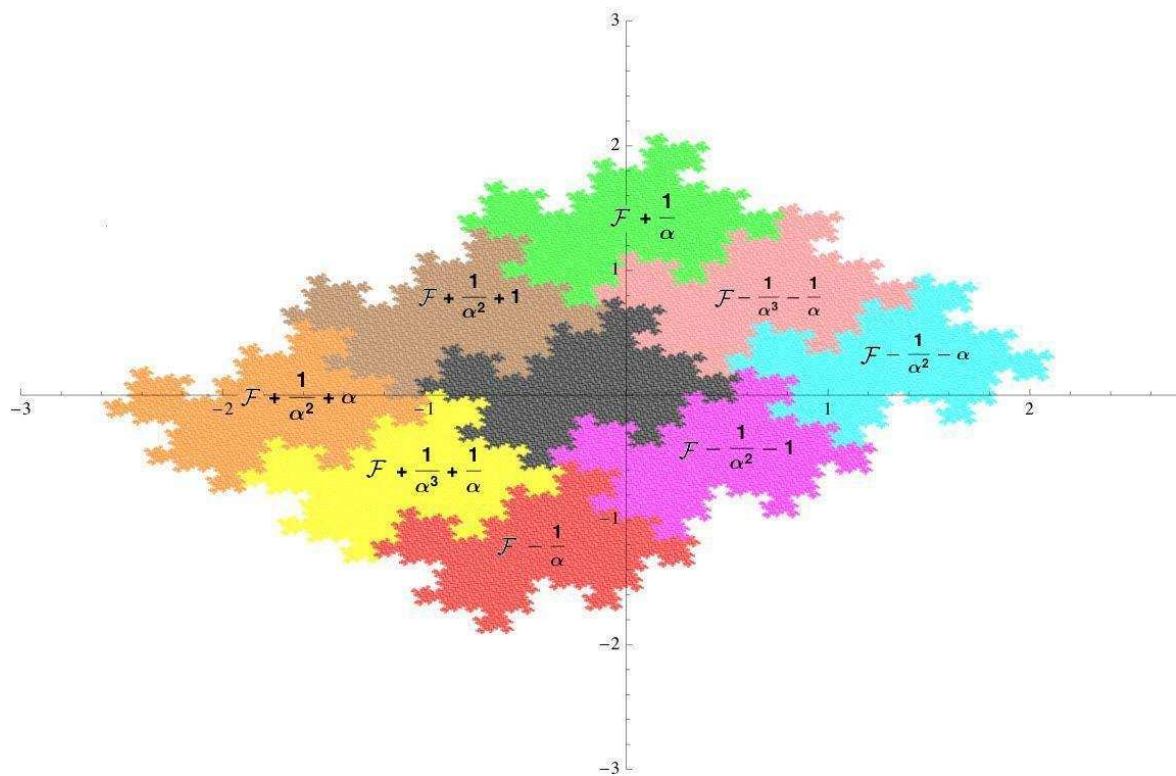


Figura 5.2: Fractal de Rauzy

Apêndice

Neste Apêndice vamos mostrar alguns resultados utilizados na tese.

Lembrando que denotamos $\mathcal{N} = \{(a_i)_{i \geq k}, k \in \mathbb{Z} \mid \forall n \geq k, (a_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } R\text{-representação}\}$, isto é, para todo $n \geq k + 3$, $a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01$, $a_k <_{lex} (a-1)$, $a_{k+1} a_k <_{lex} (a-1)(a-1)$ e $a_{k+2} a_{k+1} a_k <_{lex} (a-1)(a-1)0$ e $\mathcal{N}_f = \{(a_i)_{k \leq i \leq n}, k, n \in \mathbb{Z}, (a_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } R\text{-representação}\}$ e por

$$\mathcal{D}^\infty := \{(a_i)_{i \geq k}, k \in \mathbb{Z}, \forall n \geq k, (a_i)_{k \leq i \leq n} \text{ é uma } R\text{-representação}\}$$

isto é, $a_n a_{n-1} a_{n-2} a_{n-3} <_{lex} (a-1)(a-1)01$, $\forall n \geq k$ onde $a_{k-1} = a_{k-2} = a_{k-3} = 0$.

Proposição 6.0.1 *Seja $p(x) = x^3 - ax^2 + x - 1$, $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$ então $P(x)$ possui uma raiz real $\beta > 1$ e duas raízes complexas $\alpha, \bar{\alpha}$ tais que $|\alpha| = |\bar{\alpha}| < 1$.*

Demonstração: *Seja $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$. O discriminante de f é $\Delta_f = a_2^2 a_1^2 - 4a_3 a_1^3 - 4a_2^3 a_0 - 27a_3^2 a_0^2 + 18a_3 a_2 a_1 a_0$. Sabemos que se $\Delta_f < 0$ então f tem duas raízes complexas conjugadas e uma raiz real. No nosso caso temos que $\Delta_P = -4a^3 - 31 + a^2 + 18a$. É fácil verificar que $\Delta_P < 0 \forall a \geq 2$, portanto $P(x)$ tem duas raízes complexas conjugadas α e $\bar{\alpha}$ e uma raiz real β . Por outro lado, temos $P(1) = 1 - a + 1 - 1 = 1 - a < 0$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(n) = +\infty$, então $\beta > 1$. Temos que $\beta \alpha \bar{\alpha} = 1$, logo $|\alpha|^2 = 1/\beta < 1$, portanto $|\alpha| < 1$.*

Lema 6.0.2 *i) Todo inteiro natural n pode ser escrito de uma única forma: $n = \sum_{i=2}^N \varepsilon_i F_i$ onde $(\varepsilon_i)_{2 \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$.*

ii) Seja $(a_i)_{l \leq i \leq N} \in \mathcal{N}_f$ e $(b_i)_{l' \leq i \leq \infty} \in \mathcal{N}$ tais que $a_l > 0$ e $b_{l'} > 0$. Se $\sum_{i=l}^N a_i \alpha^i = \sum_{i=l'}^\infty b_i \alpha^i$ então $l = l'$ e para todo $i \geq N$, $b_i = 0$ e para todo $l \leq i \leq N$, $a_i = b_i$.

- iii) Seja $(\varepsilon_i)_{i \geq 2}$ então $\sum_{i=2}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \in \text{int}(\mathcal{R})$. Em particular, $0 \in \text{int}(\mathcal{R})$.
- iv) Seja $z \in \mathbb{Z}[\beta] \cap \mathbb{R}^+$ então existe $(a_i)_{k \leq i \leq l} \in \mathcal{N}_f$, $k \leq l$ tal que $z = \sum_{i=k}^l a_i \beta^i$.
- v) Para todo $n \geq 2$ temos que $\beta^n = F_n \beta^2 + (F_{n-1} - F_{n-2})\beta + F_{n-2}$, em particular se $(\varepsilon_i)_{k \leq i \leq l} \in \mathcal{N}_f$ então $\sum_{i=2}^l \varepsilon_i \beta^i = n\beta^2 + r(n)\beta + s(n)$ onde $n = \sum_{i=2}^l \varepsilon_i F_i$, $r(n) = \sum_{i=2}^l \varepsilon_i (-F_{i-1} + F_{i-2})$ e $s(n) = \sum_{i=2}^l \varepsilon_i F_{i-1}$.
- vi) Sejam $(a_i)_{l \leq i \leq k}$ e $(b_i)_{l \leq i \leq k}$ pertencentes a \mathcal{N}_f então $\sum_{i=l}^k a_i \beta^i < \sum_{i=l}^k b_i \beta^i$ se, e somente se, $(a_i)_{l \leq i \leq k} <_{\text{lex}} (b_i)_{l \leq i \leq k}$.
- vii) Sejam $c, d \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 = c + d\alpha$ então 1, c e d são \mathbb{Q} -Linearmente Independentes.

Demonstração:

- i) Como $F_{n+2} = R_n$ para todo $n \geq 0$ (ver Capítulo 2), obtemos o resultado usando a Proposição 1.2.1 item (b).
- ii) Supomos que $\sum_{i=l}^N a_i \alpha^i = \sum_{i=l'}^{+\infty} b_i \alpha^i$ e que $l = l'$. Então temos associado o caminho
- $$(a_l, b_l) \dots (a_N, b_N), (0, b_{N+1})(0, b_{N+2})(0, b_{N+3}) \dots$$
- no autômato, o que não ocorre, pois não existe um caminho com esta sequência.
- iii) Existe um inteiro k tal que $\alpha^k \mathcal{F} \subset \mathcal{R}$. Por outro lado, temos $0 \in \text{int}(\mathcal{F})$ ver [2], [3], logo existe $r > 0$, tal que $B(0, r) \subset \mathcal{F}$ e então $B(0, |\alpha^k| r) \subset \alpha^k \mathcal{F} \subset \mathcal{R}$. Portanto, $0 \in \text{int}(\mathcal{R})$.
- iv) Seja $z = \sum_{i=0}^L c_i \beta^i$, $c_i \in \mathbb{N}$. Como $\text{Fin}(\beta) = \mathbb{Z}[1/\beta] \cap \mathbb{R}^+$ existe $(a_i)_{k \leq i \leq l} \in \mathcal{N}_f$ tal que $\sum_{i=0}^L c_i \beta^i = \sum_{i=k}^l a_i \beta^i$. Seja s um inteiro natural tal que $s + k \geq 0$, onde β é uma raiz do polinômio $Q(X) = X^s \times (\sum_{i=0}^s c_i X^i - \sum_{i=k}^l a_i X^i)$. Como α e β são conjugados, $Q(X)$ é um polinômio múltiplo do polinômio minimal de α . Portanto, $z = \sum_{i=0}^L c_i \alpha^i = \sum_{i=k}^l a_i \alpha^i$.
- v) A prova, deixada ao leitor, pode ser feita por indução.
- vi) Ver Capítulo 1.
- vii) Sejam $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha^2 = c + \alpha d$.

Aplicando o algoritmo da divisão para os polinômios $P(x) = x^3 - ax^2 + x - 1$, e $Q(x) = x^2 - cx - d$, podemos escrever $P(x) = N(x)Q(x) + R(x)$ onde $N(x)$ é um polinômio de grau 1 e $R(x) = [c(c - a) + (d - b)]\alpha + (d(c - a) - 1)$. Note que $R(\alpha) = 0$.

Como $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ segue que

$$\begin{cases} c(c-a) + (d-b) = 0 \\ d(c-a) - 1 = 0 \end{cases} \quad (6.1)$$

Suponhamos que $1, c, d$ são linearmente dependentes, isto é, existem $p, q, r \in \mathbb{Z}$ não todos nulos tais que:

$$p + q \cdot c + r \cdot d = 0. \quad (6.2)$$

Multiplicando a primeira equação de (6.1) por q , a segunda por r e somando ambas obtemos

$$-p \cdot c + q \cdot d + (p \cdot a - q \cdot b) = r$$

e daí temos o sistema:

$$\begin{cases} -p \cdot c + q \cdot d = r - p \cdot a + q \cdot b \\ q \cdot c + r \cdot d = -p. \end{cases}$$

Caso 1.1 Se $-pr - q^2 \neq 0$. Neste caso a solução é

$$c = \frac{r^2 - r \cdot p \cdot a + r \cdot q \cdot b + q \cdot p}{-r \cdot p - q^2} \in \mathbb{Q}.$$

Logo $d \in \mathbb{Q}$, logo $\alpha^2 = c\alpha + d = \frac{s}{t}\alpha + \frac{m}{n}$. Seja $p = \text{mmc}(t, m)$, logo existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tais que $p\alpha^2 = k\alpha + t$, assim α é um inteiro algébrico de grau 2 o que é uma contradição.

Caso 1.2 Se $q^2 + p \cdot r = 0$, consideremos o sistema

$$\begin{cases} c \cdot \alpha + d = \alpha^2 \\ c \cdot q + d \cdot r = -p \end{cases}$$

Vamos considerar $\alpha \cdot r - q \neq 0 \implies q \neq \alpha \cdot r$.

Daí,

$$c = \frac{r\alpha^2 + p}{\alpha r - q}$$

e

$$d = \frac{-\alpha p - \alpha^2 q}{\alpha r - q}.$$

Caso 1.2.2 Se $r \neq 0$, temos $p = \frac{-q^2}{r}$. Assim $c = \frac{r\alpha^2 + p}{\alpha r - q} = \frac{r\alpha^2 - \frac{q^2}{r}}{r\alpha - q} = \frac{r\alpha - q}{r} = \alpha - \frac{q}{r}$.

Logo, $c = \alpha - \frac{q}{r} \implies \alpha = c + \frac{q}{r} \in \mathbb{R}$, o que é uma contradição !

Portanto, $r = 0$ e $q = 0$ o que implica que $p = 0$. □

Teorema 6.0.3 : A correspondência f é uma função contínua, bijetora e satisfaz $f(0) = u$

e $f(1) = w$.

Demonstração da injetividade e continuidade

f é injetora: Vamos considerar $a_i = a'_i$, $1 \leq i \leq k-1$.

Temos que $f(t) = f(t') \iff g_{b_k}(z) = g_{b'_k}(z') \iff (b_k = 0, z = -1 - \alpha^3 = u, b'_k = 1, z' = \alpha^2 - \alpha^3 = w)$ ou $(b_k = 1, b'_k = 2, z = z' = -1 - \alpha^3 = u)$.

Caso 1 Se $b_k = 0, z = -1 - \alpha^3 = u, b'_k = 1, z' = \alpha^2 - \alpha^3 = w$ e como as representações de $-1 - \alpha^3 = u$ e $\alpha^2 - \alpha^3 = w$ são $(0\bar{2})$ e $(\bar{2})$ respectivamente, então as sequências (b_i) e (b'_i) são dadas por: $(b_i) = b_1 b_2 \dots b_{k-1} 00\bar{2}$ e $(b'_i) = b_1 b_2 \dots b_{k-1} 1\bar{2}$.

Se $b'_k = 1$ então pela equação (4.15) $a'_k = 1$ e como $b_k = 0$ temos que considerar os seguintes casos:

Caso 1.1: Se $a_{k-1} = 2$ então pela equação (4.16) $a_k = 0$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 20 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 21 a'_{k+1} \dots$$

Sendo $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, como $b_i = 2$ para todo $i \geq k+1$, pela equação (4.16) temos $a_i = 2, \forall i \geq k+1$. Como $b'_j = 2$ para todo $j \geq k+1$ então pela equação (4.17)(a) $a'_j = 0, \forall j \geq k+1$. Assim, $(a_i)_{i \geq 1} = a_1 a_2 \dots a_{k-2} 20\bar{2}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = a_1 a_2 \dots a_{k-2} 21\bar{0}$. Logo, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 1.2: Se $a_{k-1} = 0$ e $b_k = 0$ então usando a equação (4.17)(b) $a_k = 2$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i) = a_1 a_2 \dots a_{k-2} 02 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i) = a_1 a_2 \dots a_{k-2} 01 a'_{k+1} \dots$$

Se $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, como $a_{k-1} = 0$ e $a_k = 2$ então pela equação (4.17) (b) temos $b_k = 0$ e como $b_{k+1} = 0$ então pela equação (4.17)(b) temos $a_{k+1} = 2$. Como $b_i = 2, \forall i \geq k+2$ pela equação (4.17)(a) temos que $a_i = 0$ para todo $i \geq k+2$. Agora, como $b'_j = 2, \forall j \geq k+1$ temos pela equação (4.16) que $a'_j = 2, \forall j \geq k+1$. Assim, $(a_i)_{i \geq 1} = a_1 a_2 \dots a_{k-2} 02\bar{0}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = a_1 a_2 \dots a_{k-2} 01\bar{2}$. Logo, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 1.3: Se $a_{r-1} = 0, a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-r)$ é par e como $b_k = 0$ então pela equação (4.19) $a_k = 2$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 011 \dots 12 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 011 \dots 11 a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, usando a equação (4.17)(a) para determinar os elementos a_i e a equação (4.16) para os elementos a'_i temos $(a_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 011 \dots 12\bar{0}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 011 \dots 11\bar{2}$. Assim, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 1.4: Se $a_{r-1} = 0, a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-r)$ é ímpar e como $b_k = 0$ então pela equação (4.19)(a) $a_k = 0$ e assim sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$(a_i) = a_1 \dots a_{r-2} 011 \dots 10 a_{k+1} \dots$ e $(a'_i) = a_1 \dots a_{r-2} 011 \dots 11 a'_{k+1} \dots$.

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, pelas equações (4.17)(a) e (4.16) para determinar os elementos a_i e pelas equações (4.19)(a) e (4.16) para os elementos a'_i obtemos

$(a_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 011 \dots 10 \bar{2}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 011 \dots 11 \bar{2}$. Logo, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 1.5: Se $a_{r-1} = 2, a_r = \dots = a_{k-1} = 1$, $\#(k-r)$ é par e como $b_k = 0$ então pela equação (4.18)(a) $a_k = 0$ e assim as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$(a_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 10 a_{k+1} \dots$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 11 a'_{k+1} \dots$.

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, pelas equações (4.17)(b) e (4.16) para determinar os elementos a_i e pelas equações (4.18)(b) e (4.16) para os elementos a'_i temos que $(a_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 10 \bar{2}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 11 \bar{0}$. Logo, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 1.6: Se $a_{r-1} = 2, a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-r)$ ímpar e como $b_k = 0$ então pela equação (4.18)(b) $a_k = 2$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$(a_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 12 a_{k+1} \dots$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 11 a'_{k+1} \dots$.

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, pelas equações (4.18)(b) e (4.17)(a) para determinar a_i e as equações (4.18)(a) e (4.16) para os elementos a'_i temos que $(a_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 12 \bar{0}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 11 \bar{2}$. Assim, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 1.7: Se $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-1)$ é par e como $b_k = 0$ então pela equação (4.18)(a) $a_k = 0$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas: $(a_i)_{i \geq 1} = 111 \dots 10 a_{k+1} \dots$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = 111 \dots 11 a'_{k+1} \dots$.

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, pelas equações (4.18)(a) e (4.17)(b) para determinar os elementos a_i e as equações (4.18)(b) e (4.17)(a) para os elementos a'_i temos que $(a_i)_{i \geq 1} = 111 \dots 10 \bar{2}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = 111 \dots 11 \bar{0}$. Assim, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 1.8: Se $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-1)$ é ímpar e como $b_k = 0$ então pela equação (4.18)(b) $a_k = 2$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$(a_i)_{i \geq 1} = 111 \dots 12 a_{k+1} \dots$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = 111 \dots 11 a'_{k+1} \dots$.

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, pelas equações (4.17)(b) e (a) para determinar os elementos a_i e as equações (4.18) e (4.16) para os elementos a'_i temos que $(a_i)_{i \geq 1} = 111 \dots 12 \bar{0}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} = 111 \dots 11 \bar{2}$. Portanto, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 2 Se $(b_k = 1, b'_k = 2, z = z' = -1 - \alpha^3 = u)$.

Neste caso, como a representação de $-1 - \alpha^3 = u$ é $(0\bar{2})$, então as sequências (b_i) e (b'_i) são dadas por: $(b_i) : b_1 b_2 \dots b_{k-1} 10 \bar{2}$ e $(b'_i) : b_1 b_2 \dots b_{k-1} 20 \bar{2}$.

Se $b_k = 1$ então pela equação (4.15) $a_k = 1$ e como $b'_{k+1} = 0$ temos que considerar os seguintes casos:

Caso 2.1: Se $a_{k-1} = 2$ e $b'_k = 2$ então pela equação (4.16) temos $a'_k = 2$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 2 1 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 2 2 a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, então usando a equação (4.16) para determinar os elementos a_i e as equações (4.17)(b) e (4.16) para os elementos de a'_i temos

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 2 1 \bar{2} \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 2 2 \bar{0}. \quad \text{Assim, pelo Lema 4.1.2, } t = t'.$$

Caso 2.2: Se $a_{k-1} = 0$ e $b'_k = 2$ então pela equação (4.17)(b) $a'_k = 0$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 0 1 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 0 0 a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, então pela equação (4.17)(a) para determinar os elementos a_i e as equações (4.17)(a) e (4.16) para os elementos a'_i temos

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 0 1 \bar{0} \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 a_2 \dots a_{k-2} 0 0 \bar{2}. \quad \text{Assim, pelo Lema 4.1.2, } t = t'.$$

Caso 2.3: Se $a_{r-1} = 0, a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-r)$ é par e como $b'_k = 2$ então pela equação (4.19)(a) temos $a'_k = 0$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 0 1 1 \dots 1 1 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 0 1 1 \dots 1 0 a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, então pelas equações (4.19)(a) e (4.17)(a) para determinar os elementos a_i e (4.19)(b), (4.17)(b) e (4.16) para os elementos a'_i temos

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 0 1 1 \dots 1 1 \bar{0} \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 0 1 1 \dots 1 0 \bar{2}. \quad \text{Logo, pelo Lema 4.1.2, } t = t'.$$

Caso 2.4: Se $a_{r-1} = 0, a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-r)$ é ímpar e como $b'_k = 2$ então pela equação (4.19)(b) $a'_k = 2$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 0 1 1 \dots 1 1 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 0 1 1 \dots 1 2 a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, então pelas equações (4.19)(b) e (4.16) para determinar os elementos a_i e as equações (4.19)(a), (4.17)(b) e (a) para os elementos a'_i temos

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 0 1 1 \dots 1 1 \bar{2} \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 0 1 1 \dots 1 2 \bar{0}. \quad \text{Logo, pelo Lema 4.1.2, } t = t'.$$

Caso 2.5: Se $a_{r-1} = 2, a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-r)$ é par e como $b'_k = 2$ então pela equação (4.18)(a) $a'_k = 2$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 2 1 1 \dots 1 1 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 2 1 1 \dots 1 2 a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, então pelas equações (4.18)(b) e (4.16) para determinar os elementos a_i e (4.18)(a) e (4.17)(a) para os elementos a'_i temos

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 2 1 1 \dots 1 1 \bar{2} \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 2 1 1 \dots 1 2 \bar{0}.$$

Assim, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 2.6: Se $a_{r-1} = 2, a_r = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-r)$ é ímpar e como $b'_k = 2$ então pela equação (4.18)(b) $a'_k = 0$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 2 1 1 \dots 1 1 a_{k+1} \dots \quad \text{e} \quad (a'_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 2 1 1 \dots 1 0 a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, então pelas equações (4.18)(a) e (4.17)(a) para os elementos a_i e as equações (4.18)(b), (4.17)(b) e (4.16) para os elementos a'_i temos $(a_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 11\bar{0}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} : a_1 \dots a_{r-2} 211 \dots 10\bar{2}$. Logo, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 2.7: Se $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-1)$ é par e como $b'_k = 2$ então pela equação (4.18)(a) $a'_k = 2$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : 111 \dots 11a_{k+1} \dots \text{ e } (a'_i)_{i \geq 1} : 111 \dots 12a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, então pelas equações (4.18)(b) e (4.16) para os elementos a_i e as equações (4.18)(a), (4.17)(b) e (a) para os elementos a'_i temos $(a_i)_{i \geq 1} : 111 \dots 11\bar{2}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} : 111 \dots 12\bar{0}$. Assim, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

Caso 2.8: Se $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 1$ e $\#(k-1)$ é ímpar e como $b'_k = 2$ então pela equação (4.18)(b) $a'_k = 0$ e as sequências $(a_i)_{i \geq 1}$ e $(a'_i)_{i \geq 1}$ são das seguintes formas:

$$(a_i)_{i \geq 1} : 111 \dots 11a_{k+1} \dots \text{ e } (a'_i)_{i \geq 1} : 111 \dots 10a'_{k+1} \dots$$

Como $\psi(a_i) = (b_i)$ e $\psi(a'_i) = (b'_i)$, então pelas equações (4.18)(a) e (4.17) para determinar os elementos a_i e as equações (4.18)(b) e (4.16) para os elementos a'_i temos $(a_i)_{i \geq 1} : 111 \dots 11\bar{0}$ e $(a'_i)_{i \geq 1} : 111 \dots 10\bar{2}$. Portanto, pelo Lema 4.1.2, $t = t'$.

f é contínua: Sejam $t = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ e $t' = \sum_{i=1}^{\infty} a'_i 3^{-i}$. Suponhamos que $0 < |t - t'| < 3^{-N}$, $N \in \mathbb{N}$ e $N > k$, pelo Lema 4.1.2 temos que $a'_k = a_k + 1$, $a'_i = 0$ e $a_i = 2$ para todo i que satisfaz $k+1 \leq i \leq N$. Temos que as seguintes sequências:

$$\begin{aligned} t &= (a_1 \dots a_{k-1} a_k 222 \dots 2) \\ t' &= (a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} 000 \dots 0). \end{aligned}$$

Vamos analisar os casos para $X = \mathcal{R}_{\alpha-1}$.

Caso 1.1: Se $a_{k-1} = 0$, $a_k = 0$, $a'_k = 1$ então temos as sequências:

$$\begin{aligned} t &= (a_1 \dots a_{k-2} 00222 \dots 2) \\ t' &= (a_1 \dots a_{k-2} 01000 \dots 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$|f(t) - f(t')| = |g_2 g_0 g_2^{N-k-1}(y_1) - g_1 g_0 g_2^{N-k-1}(y'_1)| \times |\alpha|^{2(k-1)}.$$

Sejam $z_1 = g_0 g_2^{N-k-1}(y_1)$ e $z'_1 = g_0 g_2^{N-k-1}(y'_1)$, daí

$$|f(t) - f(t')| = |g_2(z_1) - g_1(z'_1)| \times |\alpha|^{2(k-1)}$$

Como $g_2(-1 - \alpha^3) = g_1(-1 - \alpha^3) = -\frac{1}{\alpha} - \alpha - \alpha^4 - \alpha^6$ temos

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| &= |g_2(z_1) - g_2(-1 - \alpha^3) + g_1(-1 - \alpha^3) - g_1(z'_1)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\ &\leq |g_2(z_1) - g_2(-1 - \alpha^3)| + |g_1(-1 - \alpha^3) - g_1(z'_1)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\ &\leq (|\alpha|^4 + |\alpha|^3) |\alpha|^{2(k-1)} \times \text{diam}(X) \\ &\leq (1 + |\alpha|) |\alpha|^{2k+1} \times \text{diam}(X). \end{aligned}$$

Caso 1.2: Se $a_{k-1} = 2$, $a_k = 0$, $a'_k = 1$ então temos as seqüências:

$$\begin{aligned} t &= (a_1 \dots a_{k-2} 20222 \dots 2) \\ t' &= (a_1 \dots a_{k-2} 21000 \dots 0). \end{aligned}$$

Assim,

$$|f(t) - f(t')| = |g_2 g_0 g_2^{N-k-1}(y_2) - g_1 g_0 g_2^{N-k-1}(y'_2)| \times |\alpha|^{2(k-1)}.$$

Sejam $z_2 = g_0 g_2^{N-k-1}(y_2)$ e $z'_2 = g_0 g_2^{N-k-1}(y'_2)$, daí

$$|f(t) - f(t')| = |g_2(z_2) - g_1(z'_2)| \times |\alpha|^{2(k-1)}$$

Usando o mesmo argumento temos:

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t')| &= |g_2(z_2) - g_2(-1 - \alpha^3) + g_1(-1 - \alpha^3) - g_1(z'_2)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\ &\leq |g_2(z_2) - g_2(-1 - \alpha^3)| + |g_1(-1 - \alpha^3) - g_1(z'_2)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\ &\leq (|\alpha|^4 + |\alpha|^3) |\alpha|^{2(k-1)} \times \text{diam}(X) \\ &\leq (1 + |\alpha|) |\alpha|^{2k+1} \times \text{diam}(X) \end{aligned}$$

Caso 1.3: Se $a_{i-1} = 0$, $a_i = \dots = a_{k-1} = 1$, $a_k = 0$, $a'_k = 1$ e $\#(k-i-1)$ é par então temos as seqüências:

$$\begin{aligned} t &= (a_1 \dots 01 \dots 102222 \dots) \\ t' &= (a_1 \dots 01 \dots 110000 \dots). \end{aligned}$$

Assim,

$$|f(t) - f(t')| = |g_2 g_0 g_2^{N-k-1}(y_3) - g_1 g_0 g_2^{N-k-1}(y'_3)| \times |\alpha|^{2(k-1)}.$$

Sejam $z_3 = g_0 g_2^{N-k-1}(y_3)$ e $z'_3 = g_0 g_2^{N-k-1}(y'_3)$, daí

$$|f(t) - f(t')| = |g_2(z_3) - g_1(z'_3)| \times |\alpha|^{2(k-1)}$$

Usando o mesmo argumento temos:

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(t')| &= |g_2(z_3) - g_2(-1 - \alpha^3) + g_1(-1 - \alpha^3) - g_1(z'_3)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq |g_2(z_3) - g_2(-1 - \alpha^3)| + |g_1(-1 - \alpha^3) - g_1(z'_3)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq (|\alpha|^4 + |\alpha|^3) \times |\alpha|^{2k-1} \times \text{diam}(X) \\
&\leq (1 + |\alpha|) \times |\alpha|^{2k+1} \times \text{diam}(X)
\end{aligned}$$

Caso 1.4: Se $a_{i-1} = 0$, $a_i = \dots = a_{k-1} = 1$, $a_k = 0$, $a'_k = 1$ e $\#(k - i - 1)$ é ímpar então temos as sequências:

$$\begin{aligned}
t &= (a_1 \dots 01 \dots 102222 \dots) \\
t' &= (a_1 \dots 01 \dots 1100000 \dots).
\end{aligned}$$

Assim,

$$|f(t) - f(t')| = |g_1 g_0 g_2^{N-k-1}(y_4) - g_2 g_0 g_2^{N-k-1}(y'_4)| \times |\alpha|^{2(k-1)}.$$

Considere $z_4 = g_0 g_2^{N-k-1}(y_4)$ e $z'_4 = g_0 g_2^{N-k-1}(y'_4)$, daí

$$|f(t) - f(t')| = |g_1(z_4) - g_2(z'_4)| \times |\alpha|^{2(k-1)}$$

Usando o mesmo argumento temos:

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(t')| &= |g_1(z_4) - g_1(-1 - \alpha^3) + g_2(-1 - \alpha^3) - g_2(z'_4)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq |g_1(z_4) - g_1(-1 - \alpha^3)| + |g_2(-1 - \alpha^3) - g_2(z'_4)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq (|\alpha|^4 + |\alpha|^3) \times |\alpha|^{2(k-1)} \times \text{diam}(X) \\
&\leq (1 + |\alpha|) \times |\alpha|^{2k+1} \times \text{diam}(X)
\end{aligned}$$

Caso 1.5: Se $a_{i-1} = 2$, $a_i = \dots = a_{k-1} = 1$, $a_k = 0$, $a'_k = 1$ e $\#(k - i - 1)$ é par então temos as sequências:

$$\begin{aligned}
t &= (a_1 \dots 21 \dots 102222 \dots) \\
t' &= (a_1 \dots 21 \dots 1100000 \dots).
\end{aligned}$$

Assim,

$$|f(t) - f(t')| = |g_0 g_0 g_2^{N-k-1}(y_5) - g_1 g_0 g_2^{N-k-1}(y'_5)| \times |\alpha|^{2(k-1)}.$$

Seja $z_5 = g_0 g_2^{N-k-1}(y_5)$ e $z'_5 = g_2 g_0^{N-k-1}(y'_5)$, daí

$$|f(t) - f(t')| = |g_0(z_5) - g_1(z'_5)| \times |\alpha|^{2(k-1)}$$

Usando o mesmo argumento temos:

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(t')| &= |g_0(z_5) - g_0(-1 - \alpha^3) + g_1(\alpha^2 - \alpha^3) - g_1(z'_5)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq |g_0(z_5) - g_0(-1 - \alpha^3)| + |g_1(\alpha^2 - \alpha^3) - g_1(z'_5)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq (|\alpha|^2 + |\alpha|^3) \times |\alpha|^{2(k-1)} \times \text{diam}(X) \\
&\leq (1 + |\alpha|) \times |\alpha|^{2k} \times \text{diam}(X)
\end{aligned}$$

Caso 1.6: Se $a_{i-1} = 2$, $a_i = \dots = a_{k-1} = 1$, $a_k = 0$, $a'_k = 1$ e $\#(k - i - 1)$ é ímpar então temos as sequências:

$$\begin{aligned}
t &= (a_1 \dots 21 \dots 102222 \dots) \\
t' &= (a_1 \dots 21 \dots 1100000 \dots).
\end{aligned}$$

Assim,

$$|f(t) - f(t')| = |g_2 g_0 g_2^{N-k-1}(y_6) - g_1 g_1 g_2^{N-k-1}(y'_6)| \times |\alpha|^{2(k-1)}.$$

Seja $z_6 = g_0 g_2^{N-k-1}(y_6)$ e $z'_6 = g_1 g_2^{N-k-1}(y'_6)$, daí

$$|f(t) - f(t')| = |g_2(z_6) - g_1(z'_6)| \times |\alpha|^{2(k-1)}$$

Usando o mesmo argumento temos:

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(t')| &= |g_2(z_6) - g_2(-1 - \alpha^3) + g_1(1 - \alpha^3) - g_1(z'_6)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq |g_2(z_6) - g_2(-1 - \alpha^3)| + |g_1(1 - \alpha^3) - g_1(z'_6)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq (|\alpha|^4 + |\alpha|^3) \times |\alpha|^{2(k-1)} \times \text{diam}(X) \\
&\leq (1 + |\alpha|) \times |\alpha|^{2k+1} \times \text{diam}(X)
\end{aligned}$$

Caso 1.7: Se $a_{i-1} = 1$, $a_i = \dots = a_{k-1} = 1$, $a_k = 0$, $a'_k = 1$ e $\#(k - i - 1)$ é par então temos as sequências:

$$\begin{aligned}
t &= (a_1 \dots 11 \dots 102222 \dots) \\
t' &= (a_1 \dots 11 \dots 1100000 \dots).
\end{aligned}$$

Assim,

$$|f(t) - f(t')| = |g_2 g_0 g_2^{N-k-1}(y_7) - g_1 g_0 g_2^{N-k-1}(y'_7)| \times |\alpha|^{2(k-1)}.$$

Seja $z_7 = g_0 g_2^{N-k-1}(y_7)$ e $z'_7 = g_0 g_2^{N-k-1}(y'_7)$, daí

$$|f(t) - f(t')| = |g_2(z_7) - g_1(z'_7)| \times |\alpha|^{2(k-1)}$$

Usando o mesmo argumento temos:

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(t')| &= |g_2(z_7) - g_2(-1 - \alpha^3) + g_1(1 - \alpha^3) - g_1(z'_7)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq |g_2(z_7) - g_2(-1 - \alpha^3)| + |g_1(-1 - \alpha^3) - g_1(z'_7)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq (|\alpha|^4 + |\alpha|^3) \times |\alpha|^{2(k-1)} \times \text{diam}(X) \\
&\leq (1 + |\alpha|) \times |\alpha|^{2k+1} \times \text{diam}(X)
\end{aligned}$$

Caso 1.8: Se $a_{i-1} = 1$, $a_i = \dots = a_{k-1} = 1$, $a_k = 0$, $a'_k = 1$ e $\#(k - i - 1)$ é ímpar então temos as sequências:

$$\begin{aligned}
t &= (a_1 \dots 11 \dots 102222 \dots) \\
t' &= (a_1 \dots 11 \dots 1100000 \dots).
\end{aligned}$$

Assim,

$$|f(t) - f(t')| = |g_0 g_0 g_2^{N-k-1}(y_8) - g_1 g_2 g_2^{N-k-1}(y'_8)| \times |\alpha|^{2(k-1)}.$$

Seja $z_8 = g_0 g_2^{N-k-1}(y_8)$ e $z'_8 = g_2 g_2^{N-k-1}(y'_8)$, daí

$$|f(t) - f(t')| = |g_0(z_8) - g_1(z'_8)| \times |\alpha|^{2(k-1)}$$

Usando o mesmo argumento temos:

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(t')| &= |g_0(z_8) - g_0(-1 - \alpha^3) + g_1(\alpha^2 - \alpha^3) - g_1(z'_8)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq |g_0(z_8) - g_0(-1 - \alpha^3)| + |g_1(\alpha^2 - \alpha^3) - g_1(z'_8)| \times |\alpha|^{2(k-1)} \\
&\leq (|\alpha|^2 + |\alpha|^3) \times |\alpha|^{2(k-1)} \times \text{diam}(X) \\
&\leq (1 + |\alpha|) \times |\alpha|^{2k} \times \text{diam}(X).
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] *S. Akiyama*, Cubic Pisot units with finite beta expansions, *Algebraic Number theory and Diophantine Analysis*, (2000), 11-26.
- [2] *S. Akiyama*, Self affine tiling and Pisot numeration system, *Number theory and its Applications*, (1999), 7-17.
- [3] *S. Akiyama*, On the boundary of self affine tilings generated by Pisot numbers, *Journal of Math. Soc. Japan*, (2002), 283-308.
- [4] *P. Arnoux e J.C. Yoccoz*, Construction de difféomorphismes pseudo-Anosov, *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 202* (1981), 75-78.
- [5] *P. Arnoux*, Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une rotation sur le tore, *Bull. Soc. Math. France* 116 (1998), 489-500.
- [6] *P. Arnoux e S. Ito*, Pisot substitutions and Rauzy fractals, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 8 (2001), 181-207.
- [7] *P. Arnoux, S. Ito e Y. Sano* Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps, *J. Anal. Math.* 83 (2001), 183-206.
- [8] *P. Arnoux e G. Rauzy*, Représentation géométrique de suites de complexité $2n+1$, *Bull. Soc. Math. France* 119 (1991), 101-117.
- [9] *V. Canterini e A. Siegel*, Geometric representation of substitutions of Pisot type, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), 5121-5144.
- [10] *F. M. Dekking*, Recurrent Sets, *Advances in mathematics* 44 (1982), 78-104.
- [11] *K. Falconer*, Fractal Geometry, *John Wiley-Sons Ltd., Chichester*, 1990. *Mathematical Foundations and applications.*

- [12] A. S. Fraenkel, Systems of numeration, *Amer. Math. Monthly* 92 (1985), 105-114.
- [13] C. Frougny, Representation of numbers and finite automata, *Math. Systems Theory* 25 (1992), 37-60. 4, p.713-723.
- [14] C. Frougny e B.Solomyak, Finite Beta-expansions, *Ergod. Th. and Dynam. Systems* 12 (1992), 4, 713-723.
- [15] W. J. Gilbert, Complex numbers with three radix expansions, *Can. J. Math.* xxxIV (1992), 1335-48.
- [16] W. J. Gilbert, Fractal dimension of sets derived from complex bases, *Can. Math. Bull.*, 29 (1986) 495-500.
- [17] P. Hubert e A. Messaoudi, Best simultaneous diophantine approximations of Pisot numbers and Rauzy fractals, *Acta Arith.* 124 (2006), 1-15.
- [18] A. Messaoudi, Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy, *J. Théor. Nombres Bordeaux* 10 (1998), 135-162.
- [19] A. Messaoudi, Frontière du fractal de Rauzy et systèmes de numération complexe, *Acta Arithmetica* XCV (2000), 195-224.
- [20] A. Messaoudi, Combinatorial and geometrical properties of a class of fractals, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, v. 12, n.4 (2005), 625-633.
- [21] A. Messaoudi, Substituições, Fractais e Dinâmica, *Tese de Livre Docência UNESP* (2008).
- [22] N. Pytheas Fogg, Substitutions in dynamics, Arithmetics and Combinatorics, *Springer-Verlag, Berlin*, 2002. *Lecture notes in mathematics*, 1794. Edited by: V.Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, A.Siegel.
- [23] W. Parry, On the β -expansions of real numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar* 11 (1960) 401-416.
- [24] B. Praggastis, Markov partitions for hyperbolic toral automorphism, *Ph.d. Thesis, Univ. of Washington* (1992).
- [25] M. Queffélec, Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol 1294, *Springer-Verlag* (1987) Berlin.
- [26] G. Rauzy, Nombres algébriques et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* 110 (1982) 147-178.

-
- [27] A. Rényi, Représentations for real numbers and their ergodic properties, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar* 8 (1957) 477-493.
- [28] W. P. Thurston, Groups, tilings, and finite state automata, *AMS Colloquim lectures 1* (1990).
- [29] S. Ito e M. Mizutani, Potato exchange Transformations with Fractal Domains, *Preprint*.
- [30] S. Ito e M. Kimura, On the Rauzy Fractal, *Japan J. Indust. Appl. Math* 8 (1991) 461-486.
- [31] E. Zeckendorf, Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bull. Soc. Roy. Sci. liège* 41 (1972) 179-182.