Transfer Parcial para Extensões de Grupos Dualidades

Valdeni Soliani Franco

orientador

Prof. Dr. Janey Antonio Daccach

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de “Doutor em Ciências - Área Matemática - Geometria e Topologia”.

USP - São Carlos

1998

Agradecimentos

Ao Professor Janey Antonio Daccach pela dedicação, estímulo e amizade.

À Carla pelo apoio implícito por alguns anos e explícito neste último ano.

Ao Rafael pela compreensão que teve com as longas ausências às quais fui obrigado a submetê-lo.

Aos meus pais pela força e fé.

Aos professores do DMA-UEM pelas condições e incentivo que me deram durante estes anos.

Aos professores do ICMC-USP, pela formação e apoio.

Aos funcionários do DMA-UEM e ICMC-USP que nos deram o suporte necessário para conclusão deste trabalho.

Aos companheiros de caronas e repúblicas pela boa convivência nestes anos.

Enfim a todos os amigos que acreditaram, torceram, me incentivaram, e que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

À CAPES e ao CNPq pelo auxílio financeiro.

A Deus que mais uma vez me mostrou sua cara.

ao Rafael

Abstract

Since the concept of *Poincaré Duality Groups* was created, many efforts has been done in order to study the geometrical properties of a closed manifold, in this new category. This is natural because a *Poincaré Duality Group* has its homology and cohomology connected by an isomorfism like the Poincaré Duality isomorphism for compact manifolds.

Products like the cup and cap product, Steenrod square operations, universal coeficient theorems can also be defined for *Poincaré Duality Groups*. In this way Stiefel-Whitney classes, Stiefel Whitney numbers and the notion of cobordism of *Poincaré Duality Groups* can be naturally established. Also the notion of index of *Poincaré Duality Group* can be defined, and since its properties are essentially algebraic, the results in this direction would not be new. For completness we prove here the multiplicative property of the index for “fibrations” (under cetain hipotesis) and we give counter-examples like the ones given by Atiyah and Kodaira.

The core of this work is the Partial Transfer Theorem of Gotllieb. His proof uses deep geometrical properties of manifolds, still without similar for *Poincaré Duality Groups*. Thanks for LHS spectral sequence we present here a proof of the Partial Transfer Theorem for a short exact sequence:

$$N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q$$

of *Poincaré Duality Groups* and some applications is given.

Resumo

Desde que o conceito de *Grupos Dualidades de Poincaré* foi criado, muitos esforços tem sido feito com a finalidade de estudar as propriedades geométricas de uma variedade fechada nesta nova categoria. Isto é natural, pois um *Grupo Dualidade de Poincaré* tem sua homologia e cohomologia conectada por um isomorfismo semelhante ao isomorfismo Dualidade Poincaré para variedades compactas.

Produtos semelhantes ao cup e cap, operações quadrados de Steenrod, Teorema dos Coeficientes Universais também podem ser definidos para *Grupos Dualidade de Poincaré*. Da mesma maneira as classes de Stiefel-Whitney, números de Stiefel-Whitney e a noção de cobordismo de *Grupos Dualidade de Poincaré* pode ser definido, e desde que estas propriedades são essencialmente algébricas, os resultados nesta direção não são novos. Apenas como complemento nós demonstraremos aqui propriedades multiplicativos do índice de “fibrações” (sob certas hipóteses) e damos contra-exemplos semelhantes aos dados por Atiyah e Kodaira.

O centro deste trabalho é o Teorema de Transfer Parcial de Gotlieb. Sua demonstração utiliza propriedades geométricas refinadas de variedades, que não tem similares para *Grupos Dualidades de Poincaré*. Graças a sequência espectral de LHS, nós apresentamos aqui uma demonstração do Teorema de Transfer Parcial para uma sequência exata curta:

$$N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q$$

de Grupos Dualidades de Poincaré e damos algumas aplicações.

ÍNDICE

Página

CAPÍTULO 0: ENUNCIADO E DISCUSSÃO DO PROBLEMA APRESENTADO NESTE TRABALHO.....	01
CAPÍTULO I: (CO)HOMOLOGIA DE GRUPOS E GRUPOS DUALIDADES.....	05
I.1 - Homologia e cohomologia de Grupos.....	05
I.1.1 - Anel de Grupo.....	05
I.1.2 - Teoremas de álgebra homológica.....	06
I.1.3 - Observações sobre Módulos.....	07
I.1.4 - Resoluções projetivas.....	08
I.1.5 - As definições de homologia e cohomologia de Grupos.....	11
I.1.6 - Extensão e Coextensão de escalares.....	14
I.2 - Homologia e Cohomologia relativa para pares de Grupos.....	16
I.2.1 - Definições.....	16
I.2.2 - Resultado básico.....	17
I.3 - O produto Cap absoluto e relativo.....	18
I.3.1 - Definições e notações.....	19
I.3.2 - O produto cap relativo.....	22

III.1 - O grau de uma aplicação.....	52
III.2 - O número de uma extensão.....	55
BIBLIOGRAFIA.....	61

CAPÍTULO 0

ENUNCIADO E DISCUSSÃO DO PROBLEMA APRESENTADO NESTE TRABALHO

Um dos conceitos importantes em teoria de homotopia é o conceito de fibração.

A definição dos grupos de homotopia de um espaço X é relativamente simples se comparado com a definição de grupos de homologia do espaço X .

Uma vez estabelecido o conceito de homologia o cálculo dos grupos de homologia para determinadas categorias, como por exemplo CW-complexos, nada mais é que uma rotina em geral.

No entanto, o cálculo dos grupos de homotopia, apesar de sua simples definição, é muitíssimo complicado pois não temos em homotopia um conceito equivalente a sequência de Mayer-Vietoris.

Por exemplo, na década de 30, ainda não se sabia calcular $\pi_3(S^2)$, sem desmerecer o grande matemático deste século Pontryagin, ele erroneamente enunciou que $\pi_3(S^2)$ era o grupo trivial.

Foi Hopf logo em seguida que estudando a fibração:

$$\begin{array}{c}
 S^1 \hookrightarrow S^3 \\
 \pi \downarrow \\
 S^2
 \end{array}$$

que recebeu seu nome, conseguiu concluir com sucesso que $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ cujo gerador é a classe de homotopia da função π .

Desde então o conceito de fibração tem desempenhado papel fundamental na teoria de homotopia.

De forma alguma é nosso interesse neste capítulo fazer uma exposição exaustiva das propriedades das fibrações nas diferentes categorias, ou seja: base, fibra e espaço total como sendo CW-complexos, ou base, fibra, espaço total, variedades, etc.

Duas propriedades interessantes relativas a fibrações (na categoria de variedades que suporemos diferenciáveis) que deu origem a este trabalho são as seguintes:

TEOREMA A (Gottlieb): Para uma variedade fibrada:

$$\begin{array}{c}
 F \xrightarrow{i} E \\
 p \downarrow \\
 B
 \end{array}$$

a seguinte fórmula é verificada:

$i_*([F]) = (p^*[\overline{B}]) \cap [E]$, onde $[E] \in H_{n+m}(E)$, $[F] \in H_n(F)$ são classes fundamentais e $[\overline{B}]$ a classe fundamental dual em $H^m(B)$.

TEOREMA B (Chern-Hirzebruch-Serre): Consideremos uma variedade fibrada:

$$\begin{array}{ccc} F & \xhookrightarrow{i} & E \\ & p \downarrow & \\ & B & \end{array}$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (1) E, B e F são variedades compactas conexas e orientáveis,
- (2) O grupo fundamental $\pi_1(B)$ atua trivialmente na cohomologia $H^*(F)$.

Então E, B e F são coerentemente orientadas, e o índice de E é o produto dos índices de F e B , isto é:

$$\sigma(E) = \sigma(F)\sigma(B)$$

Um conceito em teoria de grupos que nos parece similar ao conceito de fibração, é o da sequência exata curta de grupos:

$$N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q$$

Uma vez que existe uma determinada classe de grupos, chamada grupos dualidades, cujas homologia e cohomologia satisfazem uma propriedade semelhante ao das variedades compactas; ou seja dualidade de Poincaré, procuramos neste trabalho demonstrar nesta categoria os dois teoremas acima enunciados.

Na demonstração do Teorema A (diga-se de passagem resultado talvez já conhecido por Hopf, porém sem referencias na literatura) Gottlieb usou técnicas

refinadas de topologia diferencial. No entanto até o momento não possuímos para grupos, técnicas semelhantes, como por exemplo transversalidade, fibrado normal e outras.. Isto que tornou atrativo o estudo do Teorema A na categoria de Grupos Dualidade de Poincaré.

Com relação ao Teorema B sua demonstração baseia-se em propriedades dos diferentes produtos e de sequências espectrais. No entanto temos na categoria de grupos todos estes conceitos gozando das mesmas propriedades algébricas. Assim sendo, a demonstração no caso de Grupos Dualidade nada mais é que uma transposição do trabalho de Chern-Hirzebruch-Serre para o caso de uma sequência curta exata de Grupos Dualidade:

$$N \mapsto G \twoheadrightarrow Q$$

Ainda com relação ao teorema B que pelo motivo acima exposto, somente enunciaremos no final do capítulo I, vamos da mesma maneira que Atiyah[2] ou Kodaira[21], exhibir um contra-exemplo onde o teorema falha se o grupo fundamental da base não atua trivialmente na cohomologia da fibra, entendendo obviamente no caso de uma sequência exata de grupos como acima, Q atuando trivialmente na cohomologia de N . Isto será apresentado unicamente para reforçar uma conjectura em aberto, que diz que todo Grupo Dualidade é o grupo fundamental de uma variedade, fato este que já foi demonstrado para Grupos Dualidade de dimensão 2, ou seja:

Todo Grupo Dualidade de dimensão 2 é grupo fundamental de uma superfície de genus diferente de zero [14].

CAPÍTULO I

(CO)HOMOLOGIA DE GRUPOS E GRUPOS DUALIDADES

Aqui pretendemos estabelecer notações, introduzir conceitos, enunciar e se necessário demonstrar resultados que utilizaremos no decorrer deste trabalho. Também definimos e damos alguns resultados importantes de (co)homologia relativa de pares de grupos que estão servindo de base para pesquisas recentes que estamos desenvolvendo e que não farão parte deste trabalho.

Aqui G denotará um grupo qualquer e K um anel com unidade.

I.1 - HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA DE GRUPOS

Nesta secção após algumas definições e propriedades básicas, definiremos o conceito fundamental para o desenvolvimento deste trabalho e também alguns resultados que serão utilizados nas secções e capítulos posteriores.

I.1.1 - Anel de Grupo

O **anel de grupo** KG é o anel cujos elementos são todas as somas formais

$$\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g \quad , \quad \lambda_g \in K, \text{ tal que:}$$

$\text{suporte}(\lambda) = \{g; \lambda_g \neq 0\}$ é finito e com as seguintes operações:

$$(1) \sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g \in G} \mu_g g = \sum_{g \in G} (\lambda_g + \mu_g) g$$

$$(2) \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{g \in G} \mu_g g \right) = \sum_{g \in G} \nu_g g, \quad \text{onde } \nu_g = \sum_{h \in G} \lambda_h \mu_{h^{-1}g} = \sum_{xy=g} \lambda_x \mu_y$$

Eliminando as componentes nulas da soma formal, λ pode ser escrito como:

$$\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i.$$

Assim $k \rightarrow ke_G$ é um mergulho de K em KG . Após a identificação de K com Ke_G podemos assumir que K está contido em KG .

O elemento $1.e_G$ atua como identidade para KG e nós o denotaremos por 1 , como usual.

A aplicação $\varepsilon : KG \rightarrow K$, tal que $\varepsilon\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) = \sum_{g \in G} \lambda_g$ é um homomorfismo chamado **aplicação aumentação de KG** .

Seu kernel $\Delta_K(G) = \{\lambda = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in KG; \sum_{g \in G} \lambda_g = 0\}$ é chamado o **ideal aumentação de KG** .

I.1.2 - Teoremas de álgebra homológica

Teorema (Fórmula de Künneth): Seja K um domínio ideal principal e seja C e C' complexos de cadeias tal que C é livre em cada dimensão. Existem sequências exatas naturais:

$$0 \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(C) \otimes_K H_{n-p}(C') \rightarrow H_n(C \otimes_K C') \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \text{Tor}_1^K(H_p(C), H_{n-p-1}(C')) \rightarrow 0$$

e

$$0 \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_K^1(H_p(C), H_{n-p+1}(C')) \rightarrow H_n(\text{Hom}_K(C, C')) \rightarrow \prod_{p \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_K(H_p(C), H_{n-p}(C')) \rightarrow 0$$

e estas sequências splitam.

Um caso especial da fórmula acima é dado pelo

Teorema dos Coeficientes Universais (TCU): Com as hipóteses do teorema acima

e supondo que C' é tal que $C'_0 = M$ e $C'_n = 0$ para $n \neq 0$, teremos que as sequências exatas neste caso tomam a seguinte forma:

$$0 \rightarrow H_p(C) \otimes_K M \rightarrow H_n(C \otimes_K M) \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \text{Tor}_1^K(H_{n-1}(C), M) \rightarrow 0 \text{ e}$$

$$0 \rightarrow \text{Ext}_K^1(H_{n-1}(C), M) \rightarrow H_n(\text{Hom}_K(C, M)) \rightarrow \text{Hom}_K(H_n(C), M) \rightarrow 0$$

1.1.3 - Observações sobre Módulos

Neste trabalho, a menos que se especifique o contrário, trabalharemos na categoria de KG-módulos à esquerda. Mas é bom observar que todo KG-módulo à esquerda M pode ser considerado um KG-módulo à direita bastando definir:

$$m(kg) = (kg^{-1})m \quad \forall k \in K, g \in G \text{ e } m \in M.$$

De modo análogo todo KG-módulo à direita pode ser considerado KG-módulo à esquerda.

Se M é um KG-módulo, então:

(i) M é um K-módulo (basta definir $km = (ke)m$ onde e é o elemento neutro de G).

(ii) Existe uma ação de G em M , dada por :

$$g * m = (1g)m$$

Podemos estabelecer a recíproca, ou seja, se M é um K-módulo e existe uma ação de G em M , então podemos dar a M uma estrutura de KG-módulo, bastando definir:

$$(kg) * m = k(gm)$$

e estender por linearidade.

O anel K pode ser sempre considerado como um KG -módulo com a G -ação trivial, isto é, $g * k = k, \forall k \in K$ e $\forall g \in G$.

$$\text{Assim } \left(\sum_{g \in G} k_g g \right) k = \sum_{g \in G} k_g (g * k) = \sum_{g \in G} k_g k.$$

Sejam M e N KG -módulos. Podemos dar a $M \otimes_K N$ e a $\text{Hom}_K(M, N)$ uma estrutura de KG -módulo induzida pela G -ação diagonal, como segue:

$$g * (m \otimes n) = gm \otimes gn, \forall g \in G, \forall m \in M \text{ e } \forall n \in N.$$

$$(g * f)(m) = gf(g^{-1}m), \forall g \in G, \forall m \in M \text{ e } \forall f \in \text{Hom}_K(M, N).$$

I.1.4 - Resoluções projetivas

Uma **resolução projetiva de K como KG -módulos** é uma seqüência exata de KG -módulos:

$$\cdots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} K \longrightarrow 0$$

onde cada P_i é KG -projetivo.

A existência de uma tal projeção é óbvia, basta tomar $P_0 = KG$, ε a aplicação aumentação e definir P_{n+1} como um módulo livre qualquer que aplica sobre $K_n = \ker(\partial_n : P_n \longrightarrow P_{n-1})$ e para ∂_{n+1} a aplicação composta :

$$P_{n+1} \twoheadrightarrow K_n \hookrightarrow P_n.$$

Observemos que na verdade esta construção nos dá uma resolução livre de K .

As vezes denotamos uma resolução projetiva de K , simplesmente por :

$$P \rightarrow K.$$

**Observações:*

No estudo da (co)homologia de um grupo G , utilizamos resoluções projetivas de $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}G$ -módulos, conforme veremos no próximo parágrafo.

Em [10, I.7.4] mostra-se o seguinte teorema:

Teorema 1: Dadas duas resoluções projetivas P e P' de um módulo M , existe uma aplicação $f : P \rightarrow P'$, única a menos de homotopia e f é uma equivalência homotópica.

Devido a observação acima e a este último teorema será interessante exibir uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ bastante importante no estudo da (co)homologia de grupos, denominada **resolução Bar**.

Com esse objetivo daremos inicialmente uma **resolução padrão**.

É uma resolução de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}G$ -módulos

Consideramos P_n como o grupo abeliano livre gerado por $G^{n+1} = \underbrace{G \times \dots \times G}_{n+1}$

Se $x \in P_n \Rightarrow x = \sum_i n_i(x_0^i, x_1^i, \dots, x_n^i)$ onde $n, i \in \mathbb{Z}$.

Vamos definir uma ação à esquerda de G em P_n :

$G \times P_n \rightarrow P_n$, tal que $(x, (x_0, \dots, x_n)) \mapsto (xx_0, \dots, xx_n)$.

Definimos ainda $\partial_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow P_n$, colocando:

$$\partial_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}) = \sum_i (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1})$$

$$\dots \rightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Mostra-se que a resolução padrão é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}G$ -módulos.

Vamos agora definir a resolução Bar

As cadeias B_n desta resolução serão os $\mathbb{Z}G$ -módulos gerado por G^n .

Um gerador de B_n é da forma: $[x_1 \mid \dots \mid x_n]$, onde $x_i \in G$.

Com o objetivo de definir os homomorfismos $\bar{\partial}_n: B_n \longrightarrow B_{n-1}$, vamos encontrar uma correspondência biunívoca entre P_n e B_n .

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\partial_n} & P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \tau_n \downarrow \uparrow \sigma_n & & \\ \dots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & B_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\bar{\partial}_1} B_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Definimos então:

$$\tau_n(x_0, \dots, x_n) = x_0[x_0^{-1}x_1 \mid x_1^{-1}x_2 \mid \dots \mid x_{n-1}^{-1}x_n]$$

$$\sigma_n[x_1 \mid \dots \mid x_n] = (1, x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2\dots x_n)$$

Observamos que $\sigma_n\tau_n(x_0, \dots, x_n) = id(x_0, \dots, x_n)$ e que $\tau_n\sigma_n[x_1 \mid \dots \mid x_n] = id([x_1 \mid \dots \mid x_n])$

Temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \xrightarrow{\partial_n} & P_{n-1} \longrightarrow \dots \\ & & & & \uparrow & & \downarrow \tau_{n-1} \\ & & & & \sigma_n & & \\ \dots & \longrightarrow & B_{n+1} & \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & B_{n-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Definimos então: $\bar{\partial}_n = \tau_{n-1}\partial_n\sigma_n$. Desta maneira podemos dar uma expressão para $\bar{\partial}_n$ como segue:

$$\bar{\partial}_n [x_1 | \dots | x_n] = x_1 [x_2 | x_3 | \dots | x_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [x_1 | x_2 | \dots x_i x_{i+1} | \dots | x_n] + (-1)^n [x_1 | \dots | x_{n-1}].$$

**Notação:* $B(G)$ é a resolução bar de G .

I.1.5 - As definições de homologia e cohomologia de grupos

Aqui consideraremos $\mathbb{Z}$ como um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.

Tomemos uma $\mathbb{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$:

$$\dots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Construímos as sequências abaixo, onde M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo dado:

$$\dots \longrightarrow P_n \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\partial_n \otimes Id} P_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\partial_{n-1} \otimes Id} \dots \xrightarrow{\partial_2 \otimes Id} P_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\partial_1 \otimes Id} P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\varepsilon \otimes Id} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{\varepsilon^*} Hom_{\mathbb{Z}G}(P_0, M) \xrightarrow{\delta_0} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} Hom_{\mathbb{Z}G}(P_{n-1}, M) \xrightarrow{\delta_n} Hom_{\mathbb{Z}G}(P_n, M) \longrightarrow \dots$$

Aqui δ_i é definido como segue:

$$\text{Se } f \in Hom_{\mathbb{Z}G}(P_n, M) \Rightarrow (\delta_n(f))(x) = (-1)^{n+1} f(\partial_{n+1}(x)), \forall x \in P_{n+1}.$$

Por definição, a **homologia de G com coeficientes em M** ($H_*(G; M)$),

é a homologia do complexo:

$$\dots \longrightarrow P_n \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\partial_n \otimes Id} P_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\partial_{n-1} \otimes Id} \dots \xrightarrow{\partial_2 \otimes Id} P_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\partial_1 \otimes Id} P_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0$$

e a **cohomologia de G com coeficientes em M** ($H^*(G; M)$), é a homologia do complexo:

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(P_0, M) \xrightarrow{\delta_0} Hom_{\mathbb{Z}G}(P_1, M) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} Hom_{\mathbb{Z}G}(P_{n-1}, M) \xrightarrow{\delta_n} Hom_{\mathbb{Z}G}(P_n, M) \longrightarrow$$

Podemos calcular facilmente $H_0(G; M) = M_G \cong Z \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $H^0(G; M) = M^G = \{m \in M; gm = m, \forall g \in G\}$.

**Notações especiais:*

1. Quando fazemos $M = \mathbb{Z}$, denotamos $H_*(G, \mathbb{Z})$ e $H^*(G, \mathbb{Z})$ simplesmente por $H_*(G)$ e $H^*(G)$, respectivamente.
2. Os funtores $Hom_{\mathbb{Z}}(-, -)$, $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, -)$, $- \otimes_{\mathbb{Z}} -$ e $- \otimes_{\mathbb{Z}G} -$ serão denotados, respectivamente, por $Hom(-, -)$, $Hom_G(-, -)$, $- \otimes -$ e $- \otimes_G -$.

** Observação:*

No teorema dos coeficientes universais I.1.2, se K é um corpo, os termos Tor e Ext se anulam e assim:

$$H_*(G; M) \cong H_*(G; K) \otimes M \text{ e}$$

$$H^*(G; M) \cong Hom(H_*(G; K), M)$$

$$H^*(G; M) \cong H^*(G; K) \otimes M$$

este fato encontra-se demonstrado em [16, §3.4].

Temos uma caracterização topológica dos grupos de homologia e cohomologia $H_*(G)$ e $H^*(G)$ dada em [10, II, §4, prop. 4.1]

Se Y é um $K(G, 1)$ -complexo, então $H_*(G) \cong H_*(Y)$ e $H^*(G) \cong H^*(Y)$.

Como aplicações deste resultado temos:

$$1. H_n(\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1 \\ 0, & \text{se } n > 1 \end{cases} \quad K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$$

2. Seja G_n o grupo fundamental de uma superfície orientável M_n^2 de genus n , $n > 0 \Rightarrow H_*(G_n) = H_*(M_n^2, \mathbb{Z})$

De Fato: Tomamos o recobrimento universal de M_n , $\tilde{M}_n$. Como a cardinalidade de $\pi_1(M_n^2)$ é infinita, cada ponto de M_n possui uma vizinhança admissível que se levanta em infinitas folhas. Portanto $\tilde{M}_n$ não é compacto. Logo $H_2(\tilde{M}_n) = 0$ e como $H_i(\tilde{M}_n) = 0$ para $i > 2$, pois $\dim \tilde{M}_n = 2$, $\pi_1(\tilde{M}_n) = 0$ pois o recobrimento é universal.

O teorema de Hurewicz garante que $\pi_2(\tilde{M}_n) = H_2(\tilde{M}_n) = 0$ e $\pi_1(\tilde{M}_n) = 0$. Portanto $\tilde{M}_n$ é contrátil e assim M_n é um $K(G_n, 1)$. Pelo resultado acima $H_*(G_n) = H_*(M_n^2, \mathbb{Z})$.

No caso dos grupos $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$ onde M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo qualquer, a interpretação topológica é análoga e vamos enunciá-la como teorema, pois a utilizaremos em capítulos posteriores.

Teorema 1 [10, pag 59]: $H_*(G; M) \cong H_*(K(G, 1); \mathfrak{M})$ e $H^*(G; M) \cong H^*(K(G, 1); \mathfrak{M})$, onde $\mathfrak{M}$ é o sistema de coeficientes locais de $K(G, 1)$ associado ao G -módulo M .

Teorema 2: Seja G um grupo qualquer e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Então para qualquer sequência exata curta $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de $\mathbb{Z}G$ -módulos e qualquer inteiro n , existem homomorfismos naturais:

$\partial : H_n(G; M'') \rightarrow H_{n-1}(G; M')$ e $\delta : H^n(G; M'') \rightarrow H^{n+1}(G; M')$ tais que as sequências longas:

$$\dots \xrightarrow{p_*} H_n(G; M'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(G; M') \xrightarrow{i_*} H_n(G; M) \xrightarrow{p_*} H_{n-1}(G; M') \rightarrow \dots \quad e$$

$$\dots \xrightarrow{\delta} H^{n-1}(G; M') \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(G; M) \xrightarrow{p^*} H^{n-1}(G; M'') \xrightarrow{\delta} H^n(G; M') \longrightarrow \dots$$

são exatas.

Demonstração: [10, III - 6.1].

I.1.6 - Extensão e co-extensão de escalares

Sejam R e S anéis e $\alpha : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis.

Suponhamos que M seja um S -módulo. Existe naturalmente em M uma estrutura de R -módulo a saber:

$$r * m = \alpha(r)m.$$

dizemos neste caso que M é um R -módulo por **restrição de escalares**.

Seja M um R -módulo. Podemos ver S como um R -módulo da seguinte forma:

$$r * s = \alpha(r)s$$

Podemos então construir $S \otimes_R M$. Afirmamos que $S \otimes_R M$ admite uma estrutura de S -módulo.

De fato: Definimos $s * (s' \otimes m) = (s.s') \otimes m$. Dizemos neste caso que o S -módulo é obtido do R -módulo por **extensão de escalares** R e S .

Podemos ainda construir $\text{Hom}_R(S, M)$. Afirmamos que $\text{Hom}_R(S, M)$ admite uma estrutura de S -módulos.

De fato: Definimos $(s * f)(s') = f(ss')$. Dizemos que o S -módulo $\text{Hom}_R(S, M)$ é obtido do R -módulo M por **co-extensão de escalares**.

**Observação:*

Nosso interesse é aplicar estes conceitos no caso em que temos um subgrupo S de G , ou seja, temos $S \hookrightarrow G$ e assim $\mathbb{Z}S \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}G$.

Se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo, denotaremos por:

1. $\boxed{\text{Res}_S^G M}$ o $\mathbb{Z}G$ -módulo obtido de M por restrição de escalares via α .
2. $\boxed{\text{Ind}_S^G M}$ o $\mathbb{Z}G$ -módulo $\mathbb{Z}G \otimes_S M$, obtido por extensão de escalares.
3. $\boxed{\text{Coind}_S^G M}$ o $\mathbb{Z}G$ -módulo $\text{Hom}_S(\mathbb{Z}G, M)$, obtido do $\mathbb{Z}S$ -módulo M por co-extensão de escalares.

Lema de Shapiro: Seja S um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}S$ -módulo, então:

$$(i) \ H_*(S; M) = H_*(G; \text{Ind}_S^G M) \qquad (ii) \ H^*(S; M) = H^*(G; \text{Coind}_S^G M)$$

Demonstração: Seja $P \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}G$ -módulos, portanto uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}H$ -módulos.

$$(i) \ H_*(G; \text{Ind}_S^G M) \triangleq H_*(G; \mathbb{Z}G \otimes_S M) \triangleq H_*(P \otimes_G (\mathbb{Z}G \otimes_S M)) = H_*((P \otimes_G \mathbb{Z}G) \otimes_S M) = H_*(P \otimes_S M) \triangleq H_*(H; M).-$$

$$(ii) \ H^*(G; \text{Coind}_S^G M) \triangleq H^*(G; \text{Hom}_S(\mathbb{Z}G, M)) \triangleq H_*(\text{Hom}_G(P, \text{Hom}_S(\mathbb{Z}G, M))) = H_*(\text{Hom}_S(P, M)) \triangleq H^*(S; M). \blacksquare$$

Fórmula de Mackey: Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e N um $\mathbb{Z}G$ -módulo, então temos $\mathbb{Z}G$ isomorfismos naturais:

$$(i) \ \mathbb{Z}(\frac{G}{S}) \otimes N \xrightarrow{\phi} \text{Ind}_S^G \text{Res}_S^G N$$

$$(ii) \ \text{Hom}(\mathbb{Z}(\frac{G}{S}), N) \xrightarrow{\psi} \text{Coind}_S^G \text{Res}_S^G N,$$

onde $\mathbb{Z}(\frac{G}{S}) \otimes N$ e $\text{Hom}(\mathbb{Z}(\frac{G}{S}), N)$ são vistos como $\mathbb{Z}G$ -módulos com a ação diagonal descrita em I.1.2.

Demonstração: A aplicação ϕ é definida por $\phi(gS \otimes n) = g \otimes g^{-1}n$, $g \in G, n \in N$ e estendida por linearidade. É fácil ver que ϕ está bem definida e é um $\mathbb{Z}G$ -homomorfismo. A inversa é dada por $g \otimes n \mapsto gS \otimes gn$.

Já a aplicação ψ é definida colocando $(\psi(f))(g) = gf(g^{-1}S)$, $\forall g \in G$ e $\forall f \in \text{Hom}(\mathbb{Z}(\frac{G}{S}), N)$. Sua inversa ψ^{-1} , é definida por $(\psi^{-1}(h))(gS) = gh(g^{-1})$, $g \in G$ e $h \in \text{Hom}(\mathbb{Z}(G), \text{Res}_S^G N)$. ■

I.2 - HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA RELATIVA PARA PARES DE GRUPOS

Daremos aqui as noções de homologia e cohomologia relativa para pares de grupos, estabelecendo ainda algumas propriedades básicas que utilizaremos nos capítulos seguintes.

I.2.1 - Definições:

Seja G um grupo e $\mathbb{S} = \{S_i, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G (não necessariamente distintos); nós chamaremos $(G, \mathbb{S})$ um **par grupo**. Se $\mathbb{S} \neq \emptyset$ nós escreveremos $\mathbb{Z}(\frac{G}{\mathbb{S}})$ para o $\mathbb{Z}G$ -módulo à esquerda:

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}G \otimes_{S_i} \mathbb{Z} = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}(\frac{G}{S_i})$$

que é o grupo abeliano livre gerado pelas classes laterais xS_i , para todo $i \in I$. A $\mathbb{Z}G$ -ação é a induzida pela multiplicação à esquerda.

A aumentação $\varepsilon : \mathbb{Z}(\frac{G}{\mathbb{S}}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é o $\mathbb{Z}G$ -homomorfismo definido por $\varepsilon(xS_i) = 1$ para toda classe lateral xS_i e todo $i \in I$. Nos denotaremos seu núcleo por $\Delta_{\mathbb{S}}^G$

e quando não houver dúvidas sobre que módulo estamos tomando a aumentação, o denotaremos simplesmente por Δ .

Para um $\mathbb{Z}G$ -módulo M , os grupos de homologia e cohomologia relativos para o par $(G, \mathbb{S})$ com coeficientes em M , são definidos como segue:

Se $\mathbb{S} = \emptyset$, as homologias e cohomologias relativas do par $(G, \emptyset)$, são os grupos absolutos $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$ respectivamente.

Se $\mathbb{S} \neq \emptyset$, colocamos para todo $k \in \mathbb{Z}$:

$$H_k(G, \mathbb{S}; M) \triangleq H_{k-1}(G; \Delta \otimes M) \quad \text{e} \quad H^k(G, \mathbb{S}; M) \triangleq H^{k-1}(G; \text{Hom}(\Delta, M)),$$

onde $\mathbb{Z}G$ atua diagonalmente em $\Delta \otimes M$ e em $\text{Hom}(\Delta, M)$.

1.2.2 - Resultado Básico:

É conveniente escrever, para qualquer família de grupos $\mathbb{S} = \{S_i, i \in I\}$

$$H_k(\mathbb{S}; M) = \bigoplus_{i \in I} H_k(S_i; M) \quad \text{e} \quad H^k(\mathbb{S}; M) = \prod_{i \in I} H^k(S_i; M)$$

aqui M é um $\mathbb{Z}\mathbb{S}$ -módulo, isto é, um $\mathbb{Z}S_i$ -módulo para todo $i \in I$.

Para um par grupo $(G, \mathbb{S})$, um $\mathbb{Z}G$ -módulo M é um $\mathbb{Z}\mathbb{S}$ -módulo por restrição.

Teorema 1: Para um par grupo $(G, \mathbb{S})$ e um $\mathbb{Z}G$ -módulo M temos as seguintes sequências exatas longas:

$$(I) \quad \cdots \longrightarrow H^k(G; M) \xrightarrow{\text{res}^*} H^k(\mathbb{S}; M) \xrightarrow{i^*} H^{k+1}(G, \mathbb{S}; M) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(G; M) \xrightarrow{\text{res}^*} \cdots$$

$$(II) \quad \cdots \longrightarrow H_{k+1}(G; M) \xrightarrow{\partial} H_{k+1}(G, \mathbb{S}; M) \xrightarrow{i_*} H_k(\mathbb{S}; M) \xrightarrow{\text{cor}_*} H_k(G; M) \xrightarrow{\partial} \cdots$$

Demonstração: Para demonstrar (I) consideremos a sequência exata curta $\Delta \xrightarrow{i} \mathbb{Z}(\frac{G}{\mathbb{S}}) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$, e seja $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ -módulos. Então

$\mathbb{Z}(\frac{G}{S}) \otimes P = P''$ (com a $\mathbb{Z}(G)$ -ação diagonal) é isomorfa a $\mathbb{Z}(G) \otimes P$ (com $\mathbb{Z}(G)$ -ação à esquerda) e assim uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}(\frac{G}{S})$. Tomando $\Delta \otimes P = P'$, teremos que $P' \rightarrow \Delta$ é uma resolução projetiva de Δ . Com isso obtemos :

(i) para qualquer $\mathbb{Z}G$ -módulo coeficiente M , a homologia destes complexos são:

$$H_k(P'; M) \cong H_{k+1}(G, S; M)$$

$$H_k(P''; M) \cong H_k(S; M)$$

$$H_k(P; M) \cong H_{k+1}(G; M)$$

analogamente para cohomologia.

(ii) o seguinte diagrama de cadeias:

$$\begin{array}{ccccc} P' & \xrightarrow{i \otimes Id} & P'' & \xrightarrow{\varepsilon \otimes Id} & P \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & & \mathbb{Z}(\frac{G}{S}) & & \mathbb{Z} \end{array}$$

cuja sequência exata longa de cohomologia nos fornece (I) e a sequência exata longa de homologia nos fornece (II).■

I.3- O PRODUTO CAP ABSOLUTO E RELATIVO

Neste parágrafo estudaremos o conceito chave para as dualidades de grupo e de pares de grupos. Como utilizaremos no desenvolvimento do trabalho, duas definições distintas para o produto cap, dependendo do que estaremos abordando. daremos aqui estas duas definições que são equivalentes.

I.3.1- Definições e notações:

A resolução Bar descrita em I.1.3 de um grupo G será denotada de agora em diante por $B(G)$ e num nível n por $B_n(G)$ ou simplesmente por B e B_n quando não houver dúvidas quanto ao grupo que estamos tomando a resolução Bar.

Sejam C e A $\mathbb{Z}G$ -módulos. O **produto cap** :

$\cap : (C \otimes_G B_n) \otimes \text{Hom}_G(B_k, A) \longrightarrow (C \otimes A) \otimes_G B_{n-k}$ de um elemento

$e = c \otimes (x_0, \dots, x_n) \in C \otimes_G B_n$ com $f \in \text{Hom}_G(B_k, A)$ é definido como segue:

$$e \cap f = (c \otimes (x_0, \dots, x_n)) \cap f = c \otimes f(x_0, \dots, x_k) \otimes (x_k, \dots, x_n)$$

É fácil verificar que $\partial(e \cap f) = (-1)^k \partial e \cap f + e \cap \partial f$, onde $k = \deg(f)$ (demonstraremos este resultado utilizando a segunda definição de produto cap).

Isto induz o produto cap em homologia:

$$\cap : H_n(G; C) \otimes H^k(G, A) \longrightarrow H_{n-k}(G, C \otimes A).$$

A segunda definição é dada para uma resolução qualquer, mas antes necessitamos de alguns resultados sobre produto tensorial de resoluções.

Dados dois grupos G e G' , sejam $\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{Z}$ resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $\mathbf{P}' \rightarrow \mathbb{Z}$ resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G'$.

Temos que $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}' \rightarrow \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}$ é um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G'$ -módulos com a ação diagonal, onde :

$$(P \otimes P')_n = \bigoplus_{i+j=n} P_i \otimes P_j.$$

Além disso:

$$1. \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G' \approx \mathbb{Z}(G \times G'),$$

De fato: basta tomar a aplicação $g \otimes g' \mapsto (g, g')$

2. Se M é $\mathbb{Z}G$ -projetivo e N é $\mathbb{Z}G'$ -projetivo, então $M \otimes N$ é $\mathbb{Z}(G \times G')$ -projetivo. De fato: Como M é $\mathbb{Z}G$ -projetivo, existe um G -módulo A , tal que $M \oplus A = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}G$. Como N é um $\mathbb{Z}G'$ -projetivo, existe um $\mathbb{Z}G'$ -módulo B , tal que $N \oplus B = \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}G'$. Assim:

$$(M \otimes N) \oplus (A \otimes B) = (M \oplus A) \otimes (N \oplus B) = \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G' = \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} \mathbb{Z}(G \times G').$$

Segue o resultado.

Concluimos de 2., que $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}' \rightarrow \mathbb{Z}$ é um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}(G \times G')$ -módulos projetivos.

Teorema 1: $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}' \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}(G \times G')$ -módulos projetivos.

Demonstração: Pelo Fórmula de Künneth dado em I.1.2, temos:

$$\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(\mathbf{P}) \otimes H_{n-p}(\mathbf{P}') \hookrightarrow H_n(\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}') \rightarrow \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \text{Tor}(H_p(\mathbf{P}), H_{n-p-1}(\mathbf{P}')).$$

Como temos duas resoluções $\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\mathbf{P}' \rightarrow \mathbb{Z}$ projetivas, segue que os 1º e 3º termos da sequência acima são nulos e portanto o 2º também. ■

Corolário: Se $\varepsilon : \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{Z}$ e $\varepsilon' : \mathbf{P}' \rightarrow \mathbb{Z}$ são $\mathbb{Z}G$ -resoluções projetivas de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então $\varepsilon \otimes \varepsilon' : \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}' \rightarrow \mathbb{Z}$ também o é, onde G atua diagonalmente em $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}'$.

* *Observação:*

No corolário, se $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$, temos duas aplicações entre resoluções, a saber, $Id \otimes \varepsilon : \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ e $\varepsilon \otimes Id : \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$. No sentido contrário, tal aplicação é denominada **aproximação diagonal** e denotada por $\Delta : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$.

No caso da resolução padrão, existe uma bem conhecida aproximação diagonal chamada **aplicação de Alexander-Whitney**, dada por:

$$\Delta(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^n (x_0, \dots, x_i) \otimes (x_i, \dots, x_n)$$

Transladando para a resolução Bar, encontramos:

$$\Delta[x_1 \mid \dots \mid x_n] = \sum_{i=0}^n [x_1 \mid \dots \mid x_i] \otimes x_1 \dots x_p [x_i \mid \dots \mid x_n]$$

A segunda maneira de definir o produto cap será dado a seguir.

Consideremos três $\mathbb{Z}G$ -módulos A, B e C e suponhamos que tenhamos um pairing $\varphi : C \otimes A \longrightarrow B$. O objetivo é definir:

$$- \cap - : H_{n+r}(G; C) \otimes H^r(G; A) \longrightarrow H_n(G; B).$$

Tomemos $e \in (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P})_{n+r} \otimes_G C = \left(\sum_{i=0}^{n+r} P_i \otimes P_{n+r-i} \right) \otimes_G C$. Então temos:

$((\mathbf{P} \otimes \mathbf{P})_{n+r} \otimes_G C) \otimes Hom_G(P_r, A) \xrightarrow{\sim} P_n \otimes_G B$. Se $e = p \otimes q \otimes c$, por definição:

$$e \cap f = q \otimes \varphi(c \otimes \overbrace{f(p)}^{(*)}) \in P_n \otimes_G B$$

(*) aqui entender que f se anula fora da dimensão, ou seja, nesse caso $f(p) = 0$ se $p \notin P_r$

Propriedade 1: $\partial(e \cap f) = (-1)^{|f|} \partial e \cap f + e \cap \delta f$.

Demonstração: (1) $\partial(e \cap f) = \partial(q \otimes \varphi(c \otimes f(p))) = \partial q \otimes \varphi(c \otimes f(p))$

$$(2) \quad \delta f = (-1)^{|f|+1} f \circ \partial \quad \text{dado em I.1.5.}$$

$$\partial e = \partial(p \otimes q \otimes c) = \partial p \otimes q \otimes c + (-1)^{|p|} p \otimes \partial q \otimes c = \partial p \otimes q \otimes c + (-1)^{|f|} p \otimes \partial q \otimes c.$$

$$\partial e \cap f = q \otimes \varphi(c \otimes f(\partial p)) + (-1)^{|f|} \partial q \otimes \varphi(c \otimes f(p)) =$$

$$\stackrel{(2)}{=} (-1)^{|f|+1} q \otimes \varphi(c \otimes (\delta f)(p)) + (-1)^{|f|} \partial q \otimes \varphi(c \otimes f(p)) =$$

$\stackrel{(1)}{=} (-1)^{|f|+1}(p \otimes q \otimes c) \frown \delta f + (-1)^{|f|}\partial(e \frown f)$. Concluimos que:

$(-1)^{|f|}(\partial e \frown f) = (-1)(e \frown \delta f) + \partial(e \frown f)$. Segue a propriedade. ■

Assim temos definido o produto cap desejado. Em geral $B = C \otimes A$ e $\varphi = Id$.

**Observação:* Através da aproximação diagonal Δ definida acima podemos mostrar facilmente que as duas definições dadas de produto cap coincidem.

1.3.2 - O produto cap relativo

Se $\mathbb{S}$ é uma família de subgrupos de G , definimos:

$$(i) \quad - \frown - : H_{n+r}(G, \mathbb{S}; C) \otimes H^r(G; A) \longrightarrow H_n(G, \mathbb{S}; C \otimes A)$$

$$(ii) \quad - \frown - : H_{n+r}(G, \mathbb{S}; C) \otimes H^r(G, \mathbb{S}; A) \longrightarrow H_n(G; C \otimes A)$$

Para definir (i) tomamos $e = p \otimes q \otimes d \otimes c \in (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P})_{n+r} \otimes_G \Delta \otimes C$ e $f \in Hom_G(P_r, A)$. Então:

$$e \frown f \triangleq q \otimes d \otimes c \otimes f(p) \in \mathbf{P}_n \otimes_G \Delta \otimes C \otimes A.$$

Para definir (ii), se $e = p \otimes q \otimes d \otimes c \in (\mathbf{P} \otimes \mathbf{P})_{n+r} \otimes_G \Delta \otimes C$ e $f \in Hom_G(P_r, Hom(\Delta, A))$.

Então:

$$e \frown f \triangleq q \otimes c \otimes f(p)(d) \in \mathbf{P}_n \otimes_G C \otimes A.$$

Em [9, §2, teorema 2.1] é demonstrado o seguinte resultado:

Teorema 1: Sejam $(G, \mathbb{S})$ um par grupo com $\mathbb{S} \neq \phi$, A e C G -módulos e $e \in H_n(G, \mathbb{S}; C)$. Então o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^k(G; A) & \xrightarrow{res^*} & H^k(S; A) & \xrightarrow{i^*} & H^{k+1}(G, S; A) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}(G; A) \xrightarrow{res} \cdots \\
& & \downarrow e \frown - & & \downarrow \partial e \frown - & & \downarrow e \frown - & & \downarrow e \frown - \\
\cdots & \rightarrow & H_{n-k}(G, S; C \otimes A) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-k-1}(S; C \otimes A) & \xrightarrow{cor_*} & H_{n-k-1}(G; C \otimes A) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-k-1}(G, S; C \otimes A) \xrightarrow{i_*} \cdots
\end{array}$$

é comutativo a menos de sinal.

*Observação: As linhas são exatas pelo Teorema 1 de I.2.2.

I.4 - GRUPOS DUALIDADES E PARES DUALIDADES

Neste parágrafo definiremos o conceito de grupo dualidade de Poincaré, que é um grupo cuja homologia e cohomologia satisfazem relações de dualidades análogas àsquelas válidas para variedades compactas.

Veremos também o conceito de pares dualidades de Poincaré cuja homologia e cohomologia satisfazem relações de dualidades similares às de variedades com bordo.

I.4.1 - Os grupos dualidades e grupos dualidades de Poincaré :

Definições:

1. Um grupo G é denominado um **grupo dualidade de dimensão n** (D^n -grupo) se existe um “módulo dualizante” C e uma “classe fundamental” $e \in H_n(G; C)$ tal que o produto $\cap$ com e induz um isomorfismo:

$$e \cap - : H^k(G; A) \xrightarrow{\cong} H_{n-k}(G; C \otimes A) \text{ para todo } k \text{ e todo } G\text{-módulo } A.$$

2. Se G é um D^n -grupo e se o módulo dualizante C é cíclico infinito, então G é chamado **grupo dualidade de Poincaré de dimensão n** (PD^n -grupo) e ele será **orientável** se a G -ação em C é trivial e **não-orientável** se a G -ação em C é não-trivial.

Proposição 1: [6, proposição 5.2.1]: Sejam G um D^n -grupo sobre K e C seu módulo dualizante. Então as seguintes afirmações se verificam:

- (i) $C \cong H^n(G; KG)$ como KG -módulo à direita.
- (ii) $cd_K G = hd_K G = n$.
- (iii) $H_n(G; C) \cong K$.
- (iv) para todo KG -módulo induzido $A = L \otimes_K KG$ temos $H^k(G; A) = 0$, se $k \neq n$ e um isomorfismo natural $H^n(G; A) \xrightarrow{\cong} C \otimes_K L$.

Teorema 1: [5, teorema 3.2]: Se G é um D^n -grupo, assim o é qualquer subgrupo S de índice finito em G . A restrição res_* é um isomorfismo:

$$H_n(G; C) \cong H_n(S; C)$$

aplicando a classe fundamental de G na classe fundamental de S .

Teorema 2: [5, teorema 3.5]: Seja $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão de grupos. Suponhamos que N e Q sejam PD -grupos de dimensão n e m respectivamente. Então G é um PD^{n+m} -grupo e seu módulo dualizante $C_G = H^{n+m}(G; \mathbb{Z}G)$ é o produto tensorial dos módulos dualizantes $C_N = H^n(N; \mathbb{Z}N)$ e $C_Q = H^m(Q; \mathbb{Z}Q)$.

Teorema 3: Seja $N \rightarrowtail G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão de grupos. Suponhamos que N seja um PD^n -grupo e Q um PD^m -grupo. Nesse caso G é orientável $\Leftrightarrow N$ é orientável e a ação diagonal de Q em C_N é trivial.

Demonstração :

($\Rightarrow$) Se Q não atua trivialmente em C_N , então $(C_N)^Q = \{0\}$. Assim:

$$\{0\} = ((C_N)^Q)^N \cong (C_N)^G \Rightarrow G \text{ não é orientável.}$$

($\Leftarrow$) Se Q atua trivialmente em C_N , como N é orientável, temos que N atua trivialmente em C_N . Seja:

$$G \times C_G \longrightarrow C_G = C_N \otimes C_Q. \text{ Vamos escrever } m \in C_G \cong \mathbb{Z} \text{ como } z_N \otimes z_Q.$$

Assim teremos:

$$m \stackrel{(1)}{=} (gN).m \stackrel{(2)}{=} gm.$$

(1) Por hipótese Q atua trivialmente em C_N e Q é orientável, assim Q atua trivialmente em C_Q .

$$(2) \text{ Se } g'N = gN, \text{ então } g^{-1}g' \in N \Rightarrow gm \stackrel{(*)}{=} gg^{-1}g'm = g'm.$$

(*) Segue, também do fato de Q ser orientável, pois neste caso, obviamente N atua trivialmente em C_Q . ■

O teorema a seguir encontra-se demonstrado em [13, teorema V.1.1].

Teorema 4: Se $G = \pi_1(X)$, onde X é uma variedade fechada, conexa de dimensão n , esférica (isto é, que tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo $K(G,1)$), então G é um PD^n -grupo sobre $\mathbb{Z}$.

I.4.2 - Condições de finitude

Definições:

1. Dizemos que um grupo G é de **tipo $(FP)_n$ sobre K** , $n \in \mathbb{N}$, se existe uma resolução projetiva de K sobre KG , $P \rightarrow K$, com P_i finitamente gerados (FG) com KG -módulos, para todo $i \leq n$. Se os módulos P_i são FG para todo i , então dizemos que G é do **tipo $(FP)_\infty$** .

2. Um grupo G é denominado **grupo de tipo FP sobre K** , se existe uma resolução KG -projetiva de K de comprimento finito:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow K \rightarrow 0.$$

**Observação:*

É fácil ver que G é de tipo FP sobre K se, e somente se, G é de tipo $(FP)_\infty$ sobre K e $cd_K G < \infty$.

Proposição 1 [7, proposição 2.1]: G é de tipo $(FP)_1$ sobre K se, e somente se, G é FG.

As vezes é conveniente utilizarmos a seguinte caracterização de grupos dualidades:

Proposição 2 [7, teorema 9.2]: G é um D^n -grupo sobre K se, e somente se, as seguintes condições ocorrem:

- (i) G é de tipo FP sobre K .
- (ii) $H^k(G; KG) = 0$, para todo $k \neq n$.
- (iii) $H^n(G; KG) = C$, é flat como K -módulo.

Corolário: Se G é um D -grupo sobre K então G é FG.

Demonstração: Se G é de dualidade, então pela proposição 2, G é de tipo FP, e

portanto de tipo FP_1 , pela observação acima. O resultado segue da proposição

1.■

Teorema 1 [7, teorema 9.11]: Seja $N \twoheadrightarrow G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão de grupos com $cd_k Q < \infty$ e N do tipo $(FP)_\infty$ sobre K . Se G é um grupo dualidade, então N e Q também o são.

I.4.3 - Pares dualidades e pares dualidades de Poincaré

Definições:

1. Um par grupo $(G, \mathbb{S})$ é chamado um **par dualidade de dimensão n sobre K** (D^n -par sobre K), se existe um “módulo dualizante” C e uma “classe fundamental” $e \in H_n(G, \mathbb{S}; C)$ tal que o produto cap :

$$(e \frown -) : H^k(G; A) \longrightarrow H_{n-k}(G, \mathbb{S}; C \otimes A) \text{ e}$$

$$(e \frown -) : H^k(G, \mathbb{S}; A) \longrightarrow H_{n-k}(G; C \otimes A)$$

são isomorfismos para todo KG -módulo A e todo $k \in \mathbb{Z}$.

2. Um D^n -par $(G, \mathbb{S})$ é chamado um **par dualidade de Poincaré sobre K** (PD^n -par sobre K), se seu módulo dualizante C é isomorfo a $\mathbb{Z}$ como um grupo abeliano.

3. No caso de PD^n -par sobre K , escrevemos $\tilde{\mathbb{Z}}$ para C e $\tilde{A}$ para $\tilde{\mathbb{Z}} \otimes A$ (com ação diagonal) para qualquer KG -módulo A . Se a KG -ação em $\tilde{\mathbb{Z}}$ é trivial ($\tilde{A} = A$), o PD^n -par é **orientável** e caso contrário **não-orientável**.

**Observações:*

1. Se $\mathbb{S} = \phi$, entendemos que G é um grupo dualidade no sentido da definição 1 de I.4.1.
2. Segue da definição 1 que se $(G, \mathbb{S})$ é um D^n -par, então $H^n(G, \mathbb{S}; \mathbb{Z}G) \cong H_0(G, C \otimes \mathbb{Z}G) \cong C$, como KG -módulo, assim C é determinado pelo D^n -par $(G, \mathbb{S})$. Além disso $H_n(G, \mathbb{S}; C) \cong H^0(G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ é gerado por e .
3. Desde que $H^k(G, \mathbb{S}; A) = 0$ para todo A e todo $k > n$, e $H^n(G, \mathbb{S}; \mathbb{Z}G) = C \neq 0$, temos que $cd(G, \mathbb{S}) = n$ e assim n é determinado pelo D^n -par $(G, \mathbb{S})$.

O teorema a seguir encontra-se demonstrado em [9, teorema 4.2].

Teorema 1: Seja $(G, \mathbb{S})$, $\mathbb{S} = \{S_i, i \in I\} \neq \phi$ um D^n -par com módulo dualizante C . Então:

- (i) G é um grupo dualidade de dimensão $n - 1$ com módulo dualizante $\Delta \otimes C$ (com $\mathbb{Z}G$ -ação diagonal).
- (ii) $\mathbb{S}$ é uma família de subgrupos finitos.
- (iii) Cada S_i é um grupo dualidade de dimensão $n - 1$ com módulo dualizante C (considerado como um S_i -módulo por restrição).
- (iv) Uma classe fundamental $e \in H_n(G, \mathbb{S}; C)$ determina uma classe fundamental $e_i \in H_{n-1}(S_i; C)$ para cada S_i ; a saber $\partial e = \sum e_i$, onde ∂ é o homomorfismo de conexão dado no teorema 1 de I.2.2.

I.5 - O PRODUTO CUP

Nesta secção, definiremos o produto cup e algumas de suas propriedades que será ferramenta para o capítulo III.

I.5.1 - O produto cross

Dados os grupos G e G' , o $\mathbb{Z}G$ -módulo M e o $\mathbb{Z}G$ -módulo M' , queremos definir:

$$H^i(G, M) \otimes H^j(G', M') \rightarrow H^{i+j}(G \times G', M \otimes M')$$

Seja $\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma $\mathbb{Z}G$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ e $\mathbf{P}' \rightarrow \mathbb{Z}$ uma $\mathbb{Z}G'$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$. Vimos no teorema 1 de I.3.1, que $\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}' \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon'} \mathbb{Z}$ é uma $\mathbb{Z}(G \times G')$ -resolução projetiva de $\mathbb{Z}$.

Existe um isomorfismo $\varphi : Hom_G(\mathbf{P}, M) \otimes Hom_{G'}(\mathbf{P}', M') \rightarrow Hom_{G \times G'}(\mathbf{P} \otimes \mathbf{P}', M \otimes M')$, dada por:

$$\varphi(u \otimes v)(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{\deg v \deg \alpha} u(\alpha) \otimes v(\beta), \quad \forall \alpha \in \mathbf{P}, \forall \beta \in \mathbf{P}'.$$

Escrevemos $u \times v = \varphi(u \otimes v)$ e é fácil verificar que $\delta(u \times v) = \delta u \times v + (-1)^p u \times \delta v$ se $\deg u = p$.

Isto induz a aplicação em cohomologia desejada, denominada **cohomologia produto cross**.

I.5.2 - O produto cup

Dado $u \in H^p(G, M)$ e $v \in H^q(G, N)$, nós definimos o **produto cup** de u e v (denotado por $u \smile v$ ou uv) por um elemento $d^*(u \times v) \in H^{p+q}(G, M \otimes N)$, onde $d: G \rightarrow G \times G$ é a aplicação diagonal. Aqui $M \otimes N$ tem a $\mathbb{Z}G$ -ação diagonal de tal modo que $d^*: H^*(G \times G, M \otimes N) \rightarrow H^*(G, M \otimes N)$ faça sentido.

Uma outra maneira de se definir o produto cup é utilizar uma $\mathbb{Z}G$ -resolução projetiva $\mathbf{P} \rightarrow \mathbb{Z}$, uma aproximação diagonal $\Delta : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \otimes \mathbf{P}$ e fazer $u \smile v = (u \times v) \circ \Delta \in \text{Hom}_G(\mathbf{P}, M \otimes N)$ para $u \in \text{Hom}_G(\mathbf{P}, M)$ e $v \in \text{Hom}_G(\mathbf{P}, N)$.

Exemplo: Com a resolução Bar definida em I.1.4 e a aplicação Δ de Alexander-Whitney dada em I.3.1, dado $u \in \text{Hom}_G(B_p, M)$ e $v \in \text{Hom}_G(B_q, N)$:

$$(u \smile v)(g_1 \mid \dots \mid g_{p+q}) = (-1)^{pq} u(g_1 \mid \dots \mid g_p) \otimes g_1 \dots g_p v(g_{p+1} \mid \dots \mid g_{p+q}).$$

Daremos a seguir algumas propriedades do produto cup.

Propriedade 1 (Naturalidade com respeito aos homomorfismos de grupos) [10, pag 112]: Dado $\alpha : H \rightarrow G$, um homomorfismo de grupo, temos que:

$$\alpha^*(u \smile v) = \alpha^*u \smile \alpha^*v \text{ para qualquer } u \in H^*(G, M) \text{ e } v \in H^*(G, N).$$

Consideremos a **aplicação avaliação**:

$\text{Hom}_G(\mathbf{P}, M) \otimes \text{Hom}_G(\mathbf{P}, N) \rightarrow M \otimes_G N$ dado por $u \otimes (x \otimes n) \mapsto u(x) \otimes n$. Denotamos por $\langle u, z \rangle$ a imagem de $u \otimes z$ sob esta aplicação. Obviamente a aplicação avaliação é um aplicação de cadeia, isto é, $\langle \delta u, z \rangle + (-1)^{\deg u} \langle u, \partial z \rangle = 0$, assim existe um pairing induzido:

$H^p(G, M) \otimes H_p(G, N) \rightarrow M \otimes_G N$ também denotada por $\langle -, - \rangle$, que independe da escolha da resolução.

Propriedade 2 [10, pag. 113]: Para qualquer $u \in H^p(G, M_1)$, $v \in H^q(G, M_2)$ e $z \in H^{p+q}(G, M_3)$, temos:

$$\langle u \smile v, z \rangle = \langle u, v \frown z \rangle.$$

A propriedade 3 abaixo, relaciona o produto cup com a sequência espectral de Leray-Hochschild-Serre e encontra-se demonstrada em [3, §1, proposição 1.6].

Propriedade 3: Seja M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. O produto cup de cadeias induz um produto cup nas sequências espectrais, ou seja, quando $r = 2, 3, \dots$ teremos $E_r^{p,q} \otimes E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{p+s,q+t}$ e nos subgrupos bigraduados $D^{p,q} = F^p / F^{p+1} H^{p+q}(G, M)$, ou seja, $D^{p,q} \otimes D^{s,t} \rightarrow D^{p+s,q+t}$.

I.6 - O GRAU DE UM HOMOMORFISMO

Nesta secção A e B serão considerados grupos abelianos.

Temos que $\text{Hom}(A, B) \neq \emptyset$ pois sempre $0 \in \text{Hom}(A, B)$. Para $\text{Aut}(A)$, sabemos um pouco mais. Todo inteiro N induz um endomorfismo $N : A \rightarrow A$, tal que $N(a) = \underbrace{a + \dots + a}_{N \text{ termos}}$.

**Observações:*

1. Podemos ter $N_1 \neq N_2$ como inteiros e $N_1 = N_2$ como endomorfismos. Por exemplo:

$$3 : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5 \quad \text{e} \quad 8 : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$$

$$\bar{x} \mapsto 3\bar{x} \quad \bar{x} \mapsto 8\bar{x}$$

2. Se N_1 e N_2 induzem o mesmo endomorfismo, então $N_1 - N_2 = 0$ como endomorfismo.

I.6.1 - Definições

O menor inteiro positivo que induz o endomorfismo nulo é chamado o expoente de A que será denotado por $\exp A$ ($\exp \mathbb{Z}_n = n$). Se não existe inteiro

positivo que anula A , então $\exp A = 0$ ($\exp \mathbb{Z} = 0$), neste caso cada inteiro induz um homomorfismo distinto dos outros.

**Observações:*

1. Se A não tem torção, então $\exp A = 0$.
2. Se A tem um elemento de ordem infinita, então $\exp A = 0$.
3. $\exp A \setminus (N_1 - N_2)$. De fato: se $(N_1 - N_2)(x) = 0$ e $(N_1 - N_2)$ é o menor inteiro onde isto ocorre, então $(N_1 - N_2) = (\exp A)q + r \Rightarrow rx = 0$, com $r < \exp A \therefore r = 0$.
4. Se $h: A \rightarrow B$ é um homomorfismo e $N \in \mathbb{Z}$, temos $N \circ h = h \circ N$.

Notação: $N \circ h = Nh$.

O menor inteiro positivo N , tal que $Nh = 0$ é chamado o **expoente de h** , e denotado por **$\exp h$** . Se não existir tal N , $\exp h = 0$.

5. Se $Nh = 0 \Rightarrow \exp h \setminus N$. De fato: a demonstração é idêntica à demonstração da observação 3. acima.

6. $\exp h \setminus (\exp A \cdot \exp B)$. De fato: Basta mostrar que $mh = 0$ com $m = (\exp A, \exp B)$. Mas se $m = (\exp A, \exp B)$, existem $p, q \in \mathbb{Z}$ tal que $m = p(\exp A) + q(\exp B)$. Segue que:

$$mh(a) = (p(\exp A) + q(\exp B))h(a) = p(\exp A)h(a) + q \underbrace{(\exp B)h(a)}_{=0} =$$

$$p \underbrace{(\exp A)a}_{=0} = 0, \quad \forall a \in A. \text{ Assim } mh = 0.$$

7. $\exp h = 1 \Leftrightarrow h = 0$ (óbvio).

Dado $h: A \rightarrow B$ um homomorfismo, seja $\tau: B \rightarrow A$ um homomorfismo

tal que $h \circ \tau = N$, onde $N : B \rightarrow B$ é o endomorfismo induzido pelo $N \in \mathbb{Z}$.

Chamamos τ um **transfer** para h e N é **associado** a τ . Analogamente, se $\tau \circ h = N$, então τ é um **cotransfer** de h e N é **associado** ao cotransfer.

**Observações:*

8. Se $\exp B \neq 0$, podemos ter mais de um inteiro associado ao transfer τ . E se $\exp A \neq 0$, podemos ter mais de um inteiro associado ao cotransfer τ (óbvio).

9. $\tau = 0 : B \rightarrow A$ é transfer e cotransfer de $h : A \rightarrow B$ com 0 como associado.

Assim o conjunto dos transfers, cotransfers e associados são sempre não vazios.

O grau e o cograu de h , que serão denotados, respectivamente por **degh** e **cdgh**, é o menor inteiro positivo associado com um transfer e um cotransfer, respectivamente. Se tal inteiro positivo não existe para nenhum dos dois, então $\text{degh} = 0$ e $\text{cdgh} = 0$.

Sejam $\sum_i A_i$ e $\sum_i B_i$ somas diretas de grupos abelianos. Dizemos que um homomorfismo $h : \sum_i A_i \rightarrow \sum_i B_i$ é **graduado** se $h = \sum_i h_i$ é tal que $h_i : A_i \rightarrow B_i$ são homomorfismos.

I.6.2 - Resultados e exemplos

Proposição 1: Se N é um inteiro associado com um (co)transfer, então (co)grau divide N .

Demonstração: Sejam N_1, N_2 associados aos transfers τ_1, τ_2 , respectivamente.

Então a combinação linear $aN_1 + bN_2$, onde $a, b \in \mathbb{Z}$ é um inteiro associado ao transfer $a\tau_1 + b\tau_2$. De fato: $h \circ (a\tau_1 + b\tau_2) = h \circ a\tau_1 + h \circ b\tau_2 = ah \circ \tau_1 + bh \circ \tau_2 =$

$$aN_1 + bN_2.$$

Portanto o conjunto dos associados é um ideal de $\mathbb{Z}$ e assim principal com gerador $\deg h$. Logo o resultado fica demonstrado para transfer. Para cotransfer a demonstração é análoga. ■

**Observação:*

1. $\deg h \setminus \exp B$ e $\text{cdgh} \setminus \exp A$. Segue imediatamente da proposição 1.

Exemplo de cálculo de $\deg h$ e cdgh

Seja $h : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_6$, tal que $h(\bar{1}) = \bar{2}$. Assim $\tau : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_3$.

Pode $h \circ \tau = 1$? Ou seja, pode $h \circ \tau(\bar{1}) = \bar{1}$? Como h não atinge $\bar{1}$, isto é impossível.

Pode $h \circ \tau = 2$? Ou seja, pode $h \circ \tau(\bar{1}) = \bar{2}$? Tomamos $\tau(\bar{1}) = \bar{1} \Rightarrow h \circ \tau(\bar{1}) = h(\bar{1}) = \bar{2}$. Portanto $\deg h = 2$.

Pode $\tau \circ h = 1$? Ou seja, pode $\tau \circ h(\bar{1}) = \bar{1}$? Tomamos $\tau(\bar{1}) = \bar{2} \Rightarrow \tau \circ h(\bar{1}) = \tau(\bar{2}) = \tau(\bar{1}) + \tau(\bar{1}) = \bar{2} + \bar{2} = \bar{1}$. Portanto $\text{cdgh} = 1$.

**Observações:*

2. Grau e cograu caracterizam isomorfismos da seguinte forma:

$$\deg h = \text{cdgh} = 1 \Leftrightarrow h \text{ é um isomorfismo.}$$

De fato: $(\Rightarrow)$ $\deg h = 1 \Rightarrow \exists \tau_1$ tal que $h \circ \tau_1 = \text{Id}_B$ $\therefore$ h é sobrejetora.

$\text{cdgh} = 1 \Rightarrow \exists \tau_2$ tal que $\tau_2 \circ h = \text{Id}_A$ $\therefore$ h é injetora. E assim h é um isomorfismo.

($\Leftarrow$) óbvio.

3. $\deg h \neq 1$ e $\text{cdgh} \neq 1$ não caracterizam sobrejetividade e injetividade.

De fato: (a) Tomamos $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ o homomorfismo quociente. Seja $\tau \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z})$. Assim $\tau(\bar{0}) = 0 = \tau(\bar{n}) = \tau(n \cdot \bar{1}) = \tau(\bar{1}) + \dots + \tau(\bar{1}) = n \tau(\bar{1})$.

Logo $\tau(\bar{1}) = 0 \therefore \text{Hom}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}) = 0$ e $\deg h = 0 \neq 1$.

(b) Tomamos $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $h(1) = n$. Assim $\tau \circ h(1) = \tau(n) \neq 1 \therefore$

$\text{cdgh} \neq 1$.

Proposição 2 : $\deg h_2 \setminus \deg(h_2 \circ h_1) \setminus (\deg h_1)(\deg h_2)$

Demonstração: Sejam $h_1 : A \rightarrow B$; $h_2 : B \rightarrow C$; $\underbrace{h_2 \circ h_1}_{= h_3} : A \rightarrow C$

Sejam $\tau_1 : B \rightarrow A$; $\tau_2 : C \rightarrow B$ e $\tau_3 : C \rightarrow A$ os transfers associados com os homomorfismos h_1 , h_2 e h_3 , respectivamente. Temos que:

$$h_2 \circ (h_1 \circ \tau_3) = h_3 \circ \tau_3 = \deg h_3.$$

Assim $h_1 \circ \tau_3 : C \rightarrow B$ é um transfer para h_2 com $\deg h_3$ como associado. Logo $\deg h_2 \setminus \deg h_3 = \deg(h_2 \circ h_1)$ pela proposição 1. Temos ainda que:

$$h_3 \circ (\tau_1 \circ \tau_2) = h_2 \circ (h_1 \circ \tau_1) \circ \tau_2 = h_2 \circ \deg h_1 \circ \tau_2 = (\deg h_1)(\deg h_2).$$

Portanto $\tau_1 \circ \tau_2$ é um transfer para h_3 com $(\deg h_1)(\deg h_2)$ como associado.

Logo pela proposição 1, $\deg(h_2 \circ h_1) = \deg h_3 \setminus (\deg h_1)(\deg h_2)$. ■

Proposição 3 : $\text{cdgh}_1 \setminus \text{cdg}(h_2 \circ h_1) \setminus (\text{cdgh}_1)(\text{cdgh}_2)$

Demonstração: Análoga à demonstração da proposição 2. ■

Proposição 4 : Seja $h : \sum_i A_i \rightarrow \sum_i B_i$ um homomorfismo graduado. Então $\deg h = \text{mmc}_i \{\deg h_i\}$ e $\text{cdgh} = \text{mmc}_i \{\text{cdgh}_i\}$.

Demonstração: Seja $\tau : \sum_i B_i \rightarrow \sum_i A_i$ um transfer que realiza o deg , ou seja, $h \circ \tau = \text{deg}$.

Definimos $\tau_i : B_i \rightarrow A_i$ como a composta:

$$B_i \xrightarrow{i} \sum_i B_i \xrightarrow{\tau} \sum_i A_i \xrightarrow{\pi_i} A_i.$$

Afirmamos que $\sum_i \tau_i$ é um transfer que realiza deg .

De fato: $\tau(b_i) = \tau(b_i) + x$, onde $b_i \in B_i$ e $x \in \sum_{j \neq i} A_j$.

$(\text{deg})(b_i) = h \circ \tau(b_i) = h(\underbrace{\tau_i(b_i)}_{\in A_i} + x) = h_i \tau_i(b_i) + h(x)$, onde $h(x)$ está em $\sum_{j \neq i} B_j$, pois h é graduado. Logo $(\text{deg})(b_i) = h_i \tau_i(b_i)$ e $h(x) = 0$.

Assim $(h \circ \sum_i \tau_i)(b_1, b_2, \dots) = (h \circ \tau_1(b_1), h \circ \tau_2(b_2), \dots) = ((\text{deg})b_1, (\text{deg})b_2, \dots) = \text{deg}(b_1, b_2, \dots)$.

Seja $K_i = \frac{m_i \text{mc} \{\text{deg } h_i\}}{\text{deg } h_i}$. Seja $\bar{\tau}_i$ o transfer que realiza $m_i \text{mc} \{\text{deg } h_i\}$. Assim:

$$h_i \circ \bar{\tau}_i = (\text{deg } h_i).K_i \text{ e portanto } h \circ \sum_i \bar{\tau}_i = m_i \text{mc} \{\text{deg } h_i\}.$$

Logo $\text{deg} \setminus m_i \text{mc} \{\text{deg } h_i\}$. Mas como $h_i \circ \tau_i = \text{deg}$, $\forall i$, temos que $m_i \text{mc} \{\text{deg } h_i\} \setminus \text{deg}$. ■

**Observação:*

4. Para aplicações não graduadas, o resultado não é verdadeiro. Se A e B são F.G., então $A \cong F \oplus T$ e $B \cong F' \oplus T'$, onde F, F' são grupos abelianos livres e T, T' subgrupos de torção. Um homomorfismo $h : A \rightarrow B$ não respeita a estrutura de soma direta. Exemplo:

Seja $A = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8$. Denotemos por a o gerador de $\mathbb{Z}$ e por α o gerador de $\mathbb{Z}_8$.

Seja $h : A \rightarrow A$ definido por $h(a) = 2a + \alpha$ e $h(\alpha) = 4\alpha$.

Afirmamos que $\text{deg} = 8$.

De fato: $A \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{h} A$. Se $(h \circ \tau)(a + \alpha) = 8(a + \alpha) = 8a + 8\alpha = 4(2a + \alpha) + 4\alpha = 4h(a) + h(\alpha) = h(4a + \alpha)$.

Assim se tomarmos $\tau(a + \alpha) = 4a + \alpha$, temos 8 associado a τ e portanto $\deg h \setminus 8$. Assim $\deg h = 1, 2, 4$ ou 8.

Se $\deg h = 4 \Rightarrow (h \circ \tau)(a + \alpha) = h(ma + n\alpha) = m(2a + \alpha) + n(4\alpha) = 2ma + (m + 4n)\alpha = 4(a + \alpha) \Rightarrow \begin{cases} 2m = 4 \Rightarrow m = 2 \\ m + 4n = 4 \end{cases} \therefore n \text{ não é inteiro (absurdo)}.$

Idem para 2 e 1. Logo $\deg h = 8$.

Por outro lado $h_T = h_{\mathbb{Z}_8} : \mathbb{Z}_8 \rightarrow \mathbb{Z}_8$ é dado por $h_T(\alpha) = 4\alpha$.

$\mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{h_T} \mathbb{Z}_8$, onde $(h_T \circ \tau)(\alpha) = h_T(m\alpha) = 4m\alpha$.

Tomando $m = 1$, temos $\deg h_T = 4$.

Seja h_F a composta:

$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{h} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_8 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}$. $h_F(a) = 2a \therefore (h_F \circ \tau)(a) = h_F(ma) = m2a$.

Tomando $m = 1$, teremos $\deg h_F = 2$.

Assim $\deg h = 8 \neq 4 = \text{mmc}\{\deg h_T, \deg h\}$.

I.7 - O ÍNDICE DE UMA EXTENSÃO DE GRUPOS

Enunciaremos agora a versão para Grupos de Dualidade do Teorema B dado no capítulo 0.

Teorema B': Seja $N \hookrightarrow G \twoheadrightarrow Q$ uma extensão de grupos, com N um PD^n -grupo, Q um PD^m -grupo, ambos orientáveis. Suponhamos que Q atue trivial-

mente em $H^*(N)$. Então o índice de G é o produto dos índices de N e Q , isto é:

$$\sigma(G) = \sigma(N)\sigma(Q).$$

Como foi dito no capítulo 0, daremos a seguir um exemplo que mostra a necessidade de Q atuar trivialmente em $H^*(N)$.

Os artigos [2] e [21] de M.F.Atiyah e K.Kodaira, respectivamente, exibem exemplos que trabalhados de forma conveniente, mostram a necessidade de Q atuar trivialmente na cohomologia de N , para que o Teorema B' seja verificado.

Na verdade, nestes artigos se constroi uma fibração cujo espaço total são 4-variedades $M_{n,m}$ que possuem índice diferente de zero; como a base S e a fibra F obviamente possuem dimensão dois, o produto dos índices da base e da fibra é nulo e assim após adaptações para grupos dualidades obtemos o exemplo desejado.

$$\text{Como: } \sigma(G \times G) = \sigma(G)\sigma(G)$$

$$\sigma(N \times N) = \sigma(N)\sigma(N)$$

$$\sigma(Q \times Q) = \sigma(Q)\sigma(Q)$$

temos exemplos para dimensões com base e fibra divisível por 4.

Lema 1: Se M^2 é compacta distinta de S^2 e de $\mathbb{RP}^2$, então $M^2 \cong K(\pi_1(M), 1)$.

Demonstração: Se $M \neq S^2, \mathbb{RP}(2)$, então $\widetilde{M}$ é uma variedade bidimensional, não compacta e $H_2(\widetilde{M}) = 0$. Como $\pi_1(\widetilde{M}) = 0$, por Hurewicz, temos que o primeiro π_i e o primeiro H_i distintos de zero são isomorfos.

Como $\pi_2(\widetilde{M}) = 0 \Rightarrow H_i(\widetilde{M}) = 0$, para $i \geq 2$, pois $\dim \widetilde{M} = 2$ e $\widetilde{M}$ é não compacta; assim sendo $\pi_i(\widetilde{M}) = 0$, para $i > 0$.

Assim $\widetilde{M}$ é contrátil e $M = K(\pi_1(M), 1)$, por definição. ■

A base S da fibração dos artigos citados é um recobrimento não ramificado de m^{2g} -folhas ($m \geq 2$) sobre uma superfície orientável compacta, desta forma S é uma variedade compacta diferente de S^2 e de $\mathbb{RP}^2$. A fibra F dessas fibrações é uma superfície de Riemann compacta que é um recobrimento cíclico ramificado em dois pontos com m folhas e assim, também não é S^2 nem $\mathbb{RP}^2$. Logo pelo lema 1, temos que S e F são $K(\pi_1(S), 1)$ e $K(\pi_1(F), 1)$, respectivamente.

Aplicando a sequência longa de homotopia da fibração $F \hookrightarrow M_{n,m} \twoheadrightarrow S$ obtemos:

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F) \xrightarrow{i} \pi_n(M_{n,m}) \xrightarrow{p} \pi_n(S) \xrightarrow{\delta} \pi_{n-1}(F) \rightarrow \cdots \xrightarrow{i} \pi_0(M_{n,m}) \xrightarrow{p} \pi_0(S).$$

Pelas observações acima $\pi_i(F) = \pi_i(S) = 0$, se $i > 1$. Logo $M_{n,m}$ é esférica e assim pelo teorema 3 de I.4.1, teremos que $\pi_1(M_{n,m})$ é um PD^4 -Grupo sobre $\mathbb{Z}$.

Pelo teorema 1 de I.1.5 obtemos o exemplo desejado.

* *Observação:* Para uma demonstração detalhada do teorema B, dado no capítulo 0 ver [23].

CAPÍTULO II

UMA FÓRMULA PARA EXTENSÃO DE GRUPOS

Em [18], Gottlieb demonstrou que para uma variedade fibrada $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ a seguinte fórmula é verificada:

$i_*([F]) = (p^*[\overline{B}]) \cap [E]$, onde $[E] \in H_{n+m}(E)$, $[F] \in H_n(F)$ são classes fundamentais e $[\overline{B}]$ a classe fundamental dual em $H^m(B)$.

Neste capítulo demonstraremos uma fórmula análoga para extensão de grupos, dada no teorema abaixo, que denominaremos Teorema principal.

Teorema principal: Seja $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} Q$ uma extensão de grupos. Suponhamos que N seja um PD^n -Grupo e Q um PD^m -Grupo ambos orientáveis, então:

$i_*(e_N) = e_G \cap \pi^*\overline{e_Q}$, onde $e_G \in H_{n+m}(G)$, $e_N \in H_n(N)$ e $\overline{e_Q} \in H^m(Q)$ são classes fundamentais.

Observações:

1. A fórmula faz sentido quando tomamos $\pi^*(\overline{e_Q}) \in H^m(G)$, isto é, com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

De fato: $i : N \rightarrow G$, induz $i_* : H_n(N) \rightarrow H_n(G)$, ou seja, $i_*(e_N) \in H_n(G)$. Por outro lado, $e_G \cap - : H^k(G) \rightarrow H_{n+m-k}(G)$, assim, se $k = m \Rightarrow$

$$e_G \cap - : H^m(G) \rightarrow H_n(G) \therefore e_G \cap \pi^*(\overline{e_Q}) \in H_n(G).$$

2. Uma classe fundamental $\overline{e_Q} \in H^m(Q)$ para um PD^m -Grupo Q é definida como segue:

Seja e_Q uma classe fundamental em $H_m(Q)$ (lembrar que estamos num PD^m -Grupo, assim o módulo dualizante C_Q é $\mathbb{Z}$, e como é orientável, a Q -ação é trivial).

Temos que $e_Q \cap - : H^m(Q) \rightarrow H_0(Q) \cong \mathbb{Z}_Q \cong \mathbb{Z}$ é um isomorfismo, assim tomamos $\overline{e_Q}$ como sendo o elemento de $H^m(Q)$ tal que $e_Q \cap \overline{e_Q} = 1$, ou seja, $\overline{e_Q} = (e_Q \cap -)^{-1}(1)$.

A idéia da demonstração é considerar primeiramente a aplicação:

$\alpha_* \kappa_* : H_m(Q; H^m(Q; \mathbb{Z}Q)) \rightarrow H_m(Q; H_n(N; H^m(Q; \mathbb{Z}Q) \otimes H^n(N; \mathbb{Z}N)))$ construída em [6] no teorema 2.7.1 (reproduziremos esta demonstração no teorema 1 de II.2, já que é nela que baseamos a demonstração do Teorema principal). Neste teorema, mostra-se que $\alpha_* \kappa_*(e_Q) = e$ é uma classe fundamental em $H_m(Q; H_n(N; C))$ onde C é o módulo dualizante de G .

Assim podemos fazer $e \cap - : H^m(Q) \rightarrow H_0(Q; H_n(N; H^m(Q; \mathbb{Z}Q) \otimes H^n(N; \mathbb{Z}N)))$.

Na secção II.1 mostra-se que o produto cap (a menos de sinal) é compatível com a sequência espectral de Lyndon-Hochschild-Serre, que fornece um isomorfismo $\xi : H_m(Q; H_n(N; C)) \xrightarrow{\sim} H_{m+n}(G; C)$ e assim teremos, no nosso caso, que $\xi(e)$ é uma classe fundamental em $H_{m+n}(G)$.

Utilizaremos esta classe $\xi(e)$ a nível de cadeia, para demonstrar o Teorema Principal que será feito em II.3.

Através deste teorema, demonstraremos resultados envolvendo grau e cograu de aplicações e número de uma extensão, que serão definidos no capítulo III.

II.1 - AS SEQUÊNCIAS ESPECTRAIS DE LHS E A COMPATIBILIDADE COM O PRODUTO CAP

Este parágrafo foi extraído de [4, §1.3].

As sequências espectrais de Lyndon-Hochschild-Serre (LHS), são sequências espectrais dos complexos bigraduados:

1. $K^{p,q}(A) = Hom_G(B_p(Q) \otimes B_q(G), A) \cong Hom_Q(B_p(Q), Hom_N(B_q(G), A))$ com as diferenciações parciais:

$$(\delta' f)(b' \otimes b'') = (-1)^{p+q+1} f(db' \otimes b''), \quad f \in K^{p,q}; b' \in B_{p+1} \text{ e } b'' \in B_q.$$

$$(\delta'' f)(b' \otimes b'') = (-1)^{q+1} f(b' \otimes db''), \quad f \in K^{p,q}; b' \in B_p \text{ e } b'' \in B_{q+1}.$$

2. $K_{s,r}(A) = A \otimes_G (B_s(G) \otimes B_r(Q)) \cong (A \otimes_N B_s(G)) \otimes_Q B_r(Q)$, com as diferenciações parciais:

$$\left. \begin{aligned} \delta'(a \otimes b' \otimes b'') &= a \otimes db' \otimes b'' \\ \delta''(a \otimes b' \otimes b'') &= (-1)^s a \otimes b' \otimes db'' \end{aligned} \right\} \quad a \in A, b' \in B_s \text{ e } b'' \in B_r.$$

K^* e K_* são funtores da categoria dos G -módulos na categoria dos bicomplexos. Para dois G -módulos A e C definimos um produto cap no bicomplexo:

$$- \frown - : K_{s,r}(C) \otimes K^{p,q}(A) \longrightarrow K_{s-q, r-p}(C \otimes A) \text{ como segue:}$$

Para os elementos $e = c \otimes (x_0, \dots, x_s) \otimes (y_0, \dots, y_r) \in K_{s,r}(C)$ e $f \in K^{p,q}(A)$ seja

$$e \frown f = (-1)^{sp} (c \otimes f((y_0, \dots, y_p) \otimes (x_0, \dots, x_q))) \otimes (x_q, \dots, x_s) \otimes (y_p, \dots, y_r)$$

Vemos facilmente que as seguintes fórmulas são válidas:

$$\left. \begin{aligned} \partial''(e \frown f) &= (-1)^{p+q} \partial' e \frown f + e \frown \delta'' f \\ \partial'(e \frown f) &= (-1)^{p+q} \partial'' e \frown f + e \frown \delta' f \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

“ $\frown$ ” induz nos complexos totais $\text{Tot } K^*$ e $\text{Tot } K_*$ o produto:

$$- \frown - : (\text{Tot } K_*(C))_n \otimes (\text{Tot } K^*(A))^k \longrightarrow (\text{Tot } K_*(C \otimes A))_{n-k}$$

e de (*) segue que para as diferenciais totais $\delta = \delta' + \delta''$ e $\partial = \partial' + \partial''$:

$$\partial(e \frown f) = (-1)^k \partial e \frown f + e \frown \delta f.$$

Isto também induz um produto nas homologias dos complexos totais.

A homologia do complexo total é porém isomorfa a homologia de G . Estes isomorfismos são induzidos pelas seguintes transformações de cadeias:

$$\xi : \text{Hom}_G(B(G), A) \xrightarrow{\xi'} K^{0,*}(A) \hookrightarrow \text{Tot } K^*(A)$$

$$\eta : \text{Tot } K_*(C) \rightarrow K_{*,0}(C) \xrightarrow{\eta'} C \otimes_G B(G). \text{ Aqui}$$

$$(\xi' f)(b' \otimes b'') = f(b''), \text{ onde } f \in \text{Hom}_G(B(G), A), b' \in B_0(G) \text{ e } b'' \in B(G)$$

$$\eta'(c \otimes (b' \otimes b'')) = c \otimes b', \text{ onde } c \in C, b' \in B(G) \text{ e } b'' \in B_0(G).$$

Agora é fácil mostrar que:

Lema 1: O produto cap definido sobre os bicomplexos K^* e K_* coincide com o produto cap usual na homologia de G , isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$H_n(\text{Tot } K_*(C)) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H^k(\text{Tot } K^*(A)), H_{n-k}(\text{Tot } K_*(C \otimes A)))$$

$$\eta_* \downarrow \qquad \qquad \text{Hom}(\xi^*, \eta_*) \downarrow$$

$$H_n(G; C) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H^k(G; A), H_{n-k}(G; C \otimes A))$$

As duas seqüências espectrais produzidas pelos complexos bigraduados K^* e K_* convergem para a homologia do complexo total.

$$E_{r+s} \Rightarrow H_{r+s}(\text{Tot } K_*) \quad \text{e} \quad E^{p+q} \Rightarrow H^{p+q}(\text{Tot } K^*)$$

As fórmulas dadas em (*) induzem um produto cap nas seqüências espectrais, isto é, quando $\omega = 2, 3, \dots$, teremos:

$$- \cap -: E_{r+s}^\omega(C) \otimes E_\omega^{p+q}(A) \longrightarrow E_{r-p, s-q}^\omega(C \otimes A)$$

Por outro lado é conhecido o termo $\omega = 2$:

$$\kappa_* : E_{r+s}^2(C) \xrightarrow{\cong} H_r(Q; H_s(N; C)) \quad \text{e} \quad \kappa^* : E_2^{p+q}(A) \xrightarrow{\cong} H^p(Q; H^q(N; A))$$

E através da homologia de Q e N também temos um produto cap abaixo induzido de maneira óbvia:

$$- \cap -: H_r(Q; H_s(N; C)) \otimes H^p(Q; H^q(N; A)) \rightarrow H_{r-p}(Q; H_{s-q}(N; C \otimes A))$$

Segue das definições acima uma demonstração trivial do:

Lema 2: O diagrama abaixo comuta a menos do sinal $(-1)^{sp}$:

$$\begin{array}{ccc} E_{r+s}^2(C) \otimes E_2^{p+q}(A) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & E_{r-p, s-q}^2(C \otimes A) \\ \kappa_* \otimes \kappa^* \downarrow & & \downarrow \kappa_* \\ H_r(Q; H_s(N; C)) \otimes H^p(Q; H^q(N; A)) & \xrightarrow{\quad \cap \quad} & H_{r-p}(Q; H_{s-q}(N; C \otimes A)) \end{array}$$

isto é, para todo $e \in E_{r+s}^2(C)$ e $f \in E_2^{p+q}(A)$ temos o seguinte:

$$\kappa_*(e \cap f) = (-1)^{sp} \kappa_*(e) \cap \kappa^*(f).$$

II.2 - UM TEOREMA BÁSICO

Neste parágrafo demonstraremos o seguinte Teorema:

Teorema 1 : Seja $N \rightarrow G \rightarrow Q$ uma sequência exata curta de grupos. Se N é de tipo (FP-n) e Q é de tipo (FP-m) sobre um anel K , então G é de tipo (FP-(n+m)) sobre K , resultando que $cd_K G = cd_K N + cd_K Q$.

Antes de demonstrar este Teorema, precisamos de alguns conceitos e resultados. Em primeiro lugar precisamos de um KG-isomorfismo

$$\Psi_* : H_n(G; B) \rightarrow Hom_G(C, B) \text{ onde } B \text{ e } C \text{ são KG-módulos à direita.}$$

Vamos então construí-lo:

Dado um KG-módulo M , seu dual M^* é um KG-módulo à direita, definido como $M^* = Hom_G(M, KG)$ com a KG-estrutura à direita induzida pela multiplicação à direita no anel de grupo KG . Seja $P \rightarrow K$ uma KG-resolução projetiva trivial do KG-módulo K e definimos:

(1) $h_k(G, B) = H_k(Hom_G(P^*, B))$, $\forall$ KG-módulo à direita B . É fácil mostrar que esta definição independe da resolução P .

Para qualquer KG-módulo à esquerda M , temos um homomorfismo natural $\Psi : B \otimes_G M \rightarrow Hom_G(M^*, B)$ definido como:

$$\Psi(b \otimes m)(f) = b \underbrace{f(m)}_{\in KG} \in B \text{ (que é KG-módulo à direita), onde } m \in M, f \in M^* \text{ e } b \in B.$$

Como Ψ é um homomorfismo natural ele induz um homomorfismo de complexos:

(2) $\Psi_{\#} : B \otimes_G P \rightarrow Hom_G(P^*, B)$ e assim dos seus grupos de homologia:

(3) $\Psi_* : H_k(G; B) \rightarrow h_k(G; B)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Observações:

3. Se M é um módulo projetivo FG , então (2) é um isomorfismo [21, V, proposição 4.2]. Segue que (3) é um isomorfismo se K admite uma KG -resolução que seja FG em cada dimensão (isto se aplica ao nosso caso, onde todos os grupos são dualidades).

4. Para grupos de dimensão cohomológica finita $\underline{n}$, temos que:

$$H_n(Hom_G(\mathbf{P}^*, B)) \cong Hom_G(H^n(\mathbf{P}^*), B), \text{ ou seja, de (1)}$$

$$h_n(G; B) \cong Hom_G(H^n(G; KG), B).$$

Assim, para grupos dualidades segue de (3), que:

$$\Psi_* : H_k(G; B) \rightarrow Hom_G(H^n(G; KG), B) \text{ é um isomorfismo.}$$

Notação: Quando queremos enfatizar o módulo coeficiente, como por exemplo no caso acima, escreveremos Ψ_*^B para Ψ_* .

5. Seja G é um subgrupo normal num grupo $\overline{G}$, A um $K\overline{G}$ -módulo à esquerda e $\mathbf{P} \rightarrow K$ uma $K\overline{G}$ -resolução projetiva. A ação de um elemento $x \in \overline{G}$ numa cocadeia $f \in Hom_G(\mathbf{P}, A)$ e numa cadeia $b \otimes p \in B \otimes_G \mathbf{P}$ é dada por:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} (x.f)(q) = xf(x^{-1}q), \quad \text{para todo } q \in \mathbf{P} \\ (b \oslash p).x = bx \otimes x^{-1}p \end{array} \right.$$

Uma $\overline{G}$ -ação em $\mathbf{P}^* \otimes A$ e em $Hom_G(\mathbf{P}^*, B)$ é construída do seguinte modo:

Primeiro consideramos KG como um KG -módulo à esquerda por conjugação, usamos (*) para definir uma $\overline{G}$ -estrutura à esquerda em $\mathbf{P}^*$ e então convertamos isto numa $\overline{G}$ -estrutura à direita por:

$$fx = x^{-1}f, \quad f \in \mathbf{P}^*, x \in G$$

(observemos que para elemento $x \in G$ em particular, esta ação à direita em $\mathbf{P}^*$ coincide com a ação à direita induzida pela multiplicação à direita em KG).

Segundo, usamos a ação diagonal em $-\otimes_G -$ e $Hom_G(-, -)$ isto é, para qualquer $x \in \overline{G}$ colocamos:

$$(**) \begin{cases} x.(f \otimes a) = fx^{-1} \otimes xa, & f \in \mathbf{P}^*, x \in A \\ (F.x)(f) = F(fx^{-1})x, & F \in Hom_G(\mathbf{P}^*, B), f \in \mathbf{P}^* \end{cases}$$

Lema 1: Se G é um subgrupo normal num grupo $\overline{G}$ e A e B são $K\overline{G}$ -módulos, então Ψ_* é um $K\overline{G}$ -homomorfismo.

Demonstração: Seja $p \in \mathbf{P}, x \in \overline{G}$ e $b \in B$. Então temos para todo $f \in \mathbf{P}^*$

$$\begin{aligned} \Psi((b \otimes p).x)(f) &= \Psi(bx \otimes x^{-1}p)(f) = bxf(x^{-1}p) = bxf(x^{-1}p)x^{-1}x = \\ b(xf)(p)x &= b(fx^{-1})(p)x = \Psi((b \otimes p))(fx^{-1})x = [\Psi(b \otimes p).x](f) \end{aligned}$$

Em [11, IV, §6] obtem-se um homomorfismo α como segue:

Sejam T um funtor de duas variáveis, A e C complexos. Consideremos os seguintes diagramas:

$$\begin{array}{ccc} Z(A) & \longrightarrow & H(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & Z'(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} Z(C) & \longrightarrow & H(C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \longrightarrow & Z'(C) \end{array}$$

Aqui, $Z(A) = \ker d$ e $Z'(A) = \operatorname{coker} d$, onde $d : A \rightarrow A$ é o homomorfismo diferenciação. Idem para $Z(C)$ e $Z'(C)$. Estes dois diagramas induzem um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
T(Z(A), Z'(C)) & \xrightarrow{\xi} & T(H(A), H(C)) \\
\eta \downarrow & & \downarrow \tau \\
H(T(A, C)) & \xrightarrow{\zeta} & T(Z'(A), Z(C))
\end{array} \quad (1)$$

Lema 2: Se T é exato à direita, existe um único homomorfismo $\alpha : T(H(A), H(C)) \rightarrow H(T(A, C))$

Demonstração do Teorema 1:

Ela se baseia essencialmente nos argumentos de [5, teorema 3.5], mas aqui olharemos mais cuidadosamente para uma classe fundamental de G .

Utilizaremos a seguinte notação:

$$C_N = H^n(N, KN); \quad C_Q = H^m(Q, KQ); \quad C = H^{m+n}(G, KG).$$

Por argumentos de sequência espectral (dados em [5], na demonstração do teorema 3.5), obtemos um KG -isomorfismo $C \cong C_Q \otimes_K C_N$ (com ação diagonal do lado direito) e assim, naturalmente $cd_K G \leq n + m$.

Pelo Lema 1 e observação 4 acima, temos os KG -isomorfismos:

$$\Psi_*^{C_N} : H_n(N; C_N) \cong Hom_N(C_N, C_N).$$

$$\Psi_*^{C_Q} : H_n(Q; C_Q) \cong Hom_Q(C_Q, C_Q).$$

$$\text{Tomamos } e_N = (\Psi_*^{C_N})^{-1}(Id_{C_N}) \quad \text{e} \quad e_Q = (\Psi_*^{C_Q})^{-1}(Id_{C_Q})$$

Consideremos a aplicação composta:

$$C_Q \xrightarrow{\kappa} C_Q \otimes_K H_n(N; C_N) \xrightarrow{\alpha} H_n(N; C_Q \otimes_K C_N) \cong H^n(N; C), \text{ onde}$$

κ é dado por $\kappa(f) = f \otimes e_N$, $f \in C_Q$ e α sendo a aplicação funtorial descrita

no lema 2, tomando-se o complexo $A = \text{Hom}_Q(\mathbf{P}_Q; RQ)$ e o complexo $C = \mathbf{P}_N \otimes_N \text{Hom}_N(\mathbf{P}_N, KN)$ e como funtor T o produto tensorial sobre K .

A ação de G em e_N é trivial (usamos a ação diagonal em $\text{Hom}_N(C_N, C_N)$), logo κ é um KG-isomorfismo. Temos também que α é um KG-homomorfismo, deste modo obtemos uma aplicação induzida:

$$\alpha_* \kappa_* : H_m(Q; C_Q) \longrightarrow H_m(Q; H_n(N; C)).$$

Afirmamos que o produto cap com $e = \alpha_* \kappa_*(e_Q)$ fornece um isomorfismo:

$e \cap - : H^m(Q; H^n(N; A)) \xrightarrow{\cong} H_0(Q; H_0(N; C \otimes_K A))$ para todo KG-módulo A à esquerda.

De fato: Segue do diagrama comutativo abaixo:

* *Notação:*

Para facilitar a construção do diagrama utilizaremos a seguinte notação:

(i) $H^n(N; M) = C_M^N$ e (ii) $H^m(Q; M) = C_M^Q$.

$$\begin{array}{ccccc}
 H_m(Q; C_Q) \otimes_K C_{C_A^N}^Q & \xrightarrow{\sim} & H_0(Q; C_Q \otimes_K C_A^N) & & \\
 \downarrow \kappa_* \otimes Id & & \downarrow \kappa_* & \searrow \cong (e_N \cap -)_* & \\
 H_m(Q; C_Q \otimes_K H_n(N; C_N)) \otimes_K C_{C_A^N}^Q & \xrightarrow{\sim} & H_0(Q; C_Q \otimes_K H_n(N; C_N) \otimes_K C_A^N) & \xrightarrow{\sim} & H_0(Q; C_Q \otimes_K H_0(N; C_N \otimes_K A)) \\
 \downarrow \alpha_* \otimes Id & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \alpha_* \\
 H_m(Q; H_n(N; C)) \otimes_K C_{C_A^N}^Q & \xrightarrow{\sim} & H_0(Q; H_n(N; C) \otimes_K C_A^N) & \xrightarrow{\sim} & H_0(Q; H_0(N; C_N \otimes_K A))
 \end{array}$$

Novamente usando argumentos de sequência espectral, temos:

$$\xi : H_m(Q; H_n(N; C)) \xrightarrow{\sim} H_{m+n}(G; C)$$

$$\eta : H^m(Q; H^n(N; A)) \xrightarrow{\sim} H^{m+n}(G; A)$$

O produto cap é compatível (a menos de sinal) com a sequência espectral de LHS (II.1), e assim também é compatível com ξ e η . Segue que:

$$(\xi(e) \frown \cdot): H^{m+n}(G; A) \rightarrow H_0(G; C \otimes_R A) \text{ é um isomorfismo.} \blacksquare$$

II.3 - A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA PRINCIPAL

Vamos analisar $e = \alpha_* \kappa_*(e_Q)$ a nível de cadeias.

Em [3, lema 1.3], mostra-se que se $X \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma $\mathbb{Z}G$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$ e $Y \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma $\mathbb{Z}Q$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$, então $P = \text{Tot}(Y \otimes X)$ é uma $\mathbb{Z}G$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$, via o operador diagonal $\Delta: G \rightarrow Q \times G$, talque $\Delta(g) = (\pi g, g)$.

Podemos ver X como uma $\mathbb{Z}N$ -resolução livre de $\mathbb{Z}$, via i . Então:

se $e_N \in H_n(N; C_N) \Rightarrow e_N = x \otimes_N c_N$, onde $x \in X_n$ e $c_N \in C_N$.

se $e_Q \in H_m(Q; C_Q) \Rightarrow e_Q = y \otimes_Q c_Q$, onde $y \in Y_n$ e $c_Q \in C_Q$.

Temos que:

$\kappa_*(e_Q) = \kappa_*(y \otimes_Q c_Q) = y \otimes_Q c_Q \otimes x \otimes_N c_N$ (aqui está entrando o fato de N e Q serem orientáveis, por que aqui estamos considerando fixadas as orientações).

$$e = \alpha_* \kappa_*(e_Q) = \alpha_* \kappa_*(y \otimes_Q c_Q) = y \otimes_Q (x \otimes_N c_Q \otimes c_N)$$

Com a orientação e_Q fixa, definimos:

$j: C_N \rightarrow C_N \otimes C_Q$, colocando $j(c_N) = c_N \otimes c_Q$, onde c_Q é o elemento de C_Q que define a orientação e_Q . Assim temos uma aplicação induzida a nível de homologia:

$j_* : H_n(N; C_N) \rightarrow H_n(N; C)$, dada por $j_*(x' \otimes c_N) = x' \otimes c_N \otimes c_Q$.

A aplicação i_* é a composta:

$$H_n(N; C_N) \xrightarrow{j_*} H_n(N; C) \xrightarrow{k_*} H_n(G; C)$$

$x' \otimes c_N \mapsto x' \otimes c_N \otimes c_Q \mapsto i(x') \otimes c_N \otimes c_Q$. Portanto:

$$i_*(e_N) = i_*(x \otimes_N c_N) = x \otimes c_N \otimes c_Q.$$

Vamos agora analisar $e_G \cap \pi^* \overline{e_Q} = \xi(e) \cap \pi^* \overline{e_Q}$

De acordo com II.1, o bicomplexo:

$$K_{s,r}(C) = (B_r(Q) \otimes B_s(G)) \otimes_G C \xleftarrow{\sim} B_r Q \otimes_Q (B_s(G) \otimes_N C), \text{ fornece}$$

a sequência espectral . Aqui $B_*(G)$ e $B_*(Q)$ são resoluções Bar de G e Q respectivamente. O isomorfismo indicado acima nos fornece ξ .

$$\therefore \xi(e) = \xi(y \otimes_Q (x \otimes c_Q \otimes c_N)) = (y \otimes x) \otimes_G (c_Q \otimes c_N), \text{ usando a}$$

$\mathbb{Z}G$ -resolução $\mathbf{P}$ descrita acima.

$$\text{Assim } \xi(e) \cap \pi^* \overline{e_Q} = \overline{e_Q}(y) \otimes x \otimes c_Q \otimes c_N.$$

Pela observação 1 $C_Q \cong C_N \cong C \cong \mathbb{Z}$. Então:

Pela observação 2 $\overline{e_Q}(y) = 1$, e assim concluímos o resultado. ■

CAPÍTULO III

O GRAU DE UMA APLICAÇÃO E O NÚMERO DE UMA EXTENSÃO

Em [19] Gottlieb definiu o grau e o cograu de uma aplicação f entre espaços topológicos. Neste mesmo artigo, define-se o número fibrado ou o número da fibra de uma fibração $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$. Aproveitamos a idéia aqui, para definirmos o grau de uma aplicação entre grupos e o número de uma extensão.

Utilizando estas definições, demonstramos vários resultados; para a demonstração de alguns deles utilizamos o teorema principal apresentado no capítulo II.

III.1 - O GRAU DE UMA APLICAÇÃO

Em I.6.1 definimos o grau de um homomorfismo entre grupos abelianos. Aqui definiremos o grau de um homomorfismo entre grupos quaisquer.

Definição:

Consideremos um homomorfismo $f : G' \rightarrow G$, onde G' e G são grupos quaisquer. O grau de f denotado como $\deg f = \deg f_*$, onde $f_* : H_*(G') \rightarrow H_*(G)$.

O **cograu de f** denotado como $\text{cdg}f = \text{cdg}f^*$, onde $f^* : H^*(G) \rightarrow H^*(G')$.

* *Observações:*

1. Se $f_* : H_*(G'; A) \rightarrow H_*(G; A)$, onde A é um módulo qualquer, escreveremos $\deg_A f = \deg f_*$.

2. $\deg_{A \oplus B} f = \text{mmc}\{\deg_A f, \deg_B f\}$.

$$\text{De fato: } \begin{cases} H_*(G'; A \oplus B) \cong H_*(G'; A) \oplus H_*(G'; B) \\ \downarrow f_* \\ H_*(G; A \oplus B) \cong H_*(G; A) \oplus H_*(G; B) \end{cases}$$

é um homomorfismo graduado. Assim o resultado segue da proposição 4 de I.6.2.

3. De maneira análoga definimos $\text{cdg}_A f$ como $\text{cdg}f^*$, onde $f^* : H^*(G; A) \rightarrow H^*(G'; A)$ e mostra-se que $\text{cdg}_{A \oplus B} f = \text{mmc}\{\text{cdg}_A f, \text{cdg}_B f\}$.

4. No caso particular em que $A = \mathbb{Z}_r$, escreveremos $\deg_{\mathbb{Z}_r} = \deg_r$ e $\text{cdg}_{\mathbb{Z}_r} = \text{cdg}_r$.

Teorema 1: Seja $f : G' \rightarrow G$ uma aplicação de um grupo qualquer G' num PD^m -grupo orientável G . Então $(\deg f)e$ gera a imagem de f_* em $H_m(G)$, onde e é a classe fundamental de G .

Demonstração: Temos que $\text{Im} f_*$ é um subgrupo de $H_m(G)$ que é cíclico infinito (Proposição 1 (iii) de I.4.1) gerado por e .

Suponhamos que βe gera a imagem de f_* . Mostraremos que $\beta \setminus \deg f$ e $\deg f \setminus \beta$.

(a) $\boxed{\beta \setminus \deg f}$ Por definição de grau, existe um transfer τ , com $f_* \tau = \deg f \quad \therefore$
 $(\deg f)e$ está na imagem de f_* , pois $f_*(\tau(e)) = (\deg f)e$.

(b) $\boxed{\deg f \setminus \beta}$ Seja $\gamma \in H_m(G')$, tal que $f_*(\gamma) = \beta e$.

Definimos $\tau : H_*(G) \rightarrow H_*(G')$ colocando:

$$\tau = (- \cap \gamma) \circ f^* \circ D_G^{-1}, \text{ onde } D_G^{-1} : H_i(G) \rightarrow H^{m-i}(G) \text{ é a inversa da}$$

aplicação dualidade de Poincaré.

$$\text{Se } x \in H_i(G) \Rightarrow \tau(x) = (- \cap \gamma) \circ f^* \circ D_G^{-1}(x) = f^* \left(\underbrace{D_G^{-1}(x)}_{\substack{\in H^{m-i}(G) \\ \in H^{m-i}(G')}} \right) \cap \gamma \in H_i(G')$$

$$\begin{aligned} (f_* \circ \tau)(x) &= f_*(f^*(D_G^{-1}(x)) \cap \gamma) = D_G^{-1}(x) \cap f_*(\gamma) = D_G^{-1}(x) \cap \beta e = \\ &= \beta(D_G^{-1}(x) \cap e) = \beta(x) \quad \therefore \quad \deg f \setminus \beta. \blacksquare \end{aligned}$$

* *Observação:*

5. Como G é um PD^m -grupo orientável, o isomorfismo $H^k(G; A) \cong H_{m-k}(G; A)$ é verdadeiro para todo k e todo $\mathbb{Z}G$ -módulo A , assim a mesma demonstração do teorema acima, mostra que $(\deg_r f)e$ é gerador da imagem de $f_* : H_m(G'; \mathbb{Z}_r) \rightarrow H(G; \mathbb{Z}_r)$.

Teorema 2: Suponhamos que $f : G' \rightarrow G$ seja uma aplicação entre grupos tais que G' é um PD^{m+n} -grupo e G é um PD^m -grupo. Então $\deg_r f = \text{cdg}_r f$.

Demonstração: Definimos um homomorfismo $\bar{\tau} : H^*(G'; \mathbb{Z}_r) \rightarrow H^*(G; \mathbb{Z}_r)$ colocando $\bar{\tau}(x) \cap e_G = f_*(x \cap \gamma)$ onde $\gamma \in H_m(G'; \mathbb{Z}_r)$ é tal que $f_*(\gamma) = (\deg_r f)e_G$ (o Teorema 1 garante isso). Temos:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(f^*(g)) \cap e_G &= f_*(f^*(g) \cap \gamma) = g \cap f_*(\gamma) = g \cap (\deg_r f)e_G = \\ &= (\deg_r f)(g \cap e_G). \end{aligned}$$

Assim $\bar{\tau} \circ f^* = \deg_r f$. Logo $\text{cdg}_r f \setminus \deg_r f$.

Para mostrar que $\deg_r f \setminus \text{cdg}_r f$, vamos utilizar o TCU no caso em que G' é um PD^{m+n} -grupo.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Ext}(\text{H}^{m+1}(G'; \mathbb{Z}_r); \mathbb{Z}_r) & \hookrightarrow & \text{H}_m(G'; \mathbb{Z}_r) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Hom}(\text{H}^m(G'; \mathbb{Z}_r), \mathbb{Z}_r) \\
 \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow f^\# \\
 0 & \longrightarrow & \underbrace{\text{H}_m(G; \mathbb{Z}_r)}_{\cong \mathbb{Z}_r} & \xrightarrow{\cong} & \underbrace{\text{Hom}(\text{H}^m(G; \mathbb{Z}_r), \mathbb{Z}_r)}_{\cong \mathbb{Z}_r}
 \end{array}$$

Seja $\bar{\tau} : \text{H}^m(G'; \mathbb{Z}_r) \rightarrow \text{H}^m(G'; \mathbb{Z}_r)$ um cotransfer associado ao $\text{cdg}_n f$. Assim $\bar{\tau} \in \text{Hom}(\text{H}^m(G'; \mathbb{Z}_r); \mathbb{Z}_r)$.

Consideremos $\tau \in \text{H}_m(G'; \mathbb{Z}_r)$ um elemento tal que $\alpha(\tau) = \bar{\tau}$. Então:

$f_*(\tau) = f^\#(\bar{\tau}) = \bar{\tau} \circ f^* = \text{cdg}_n f \therefore \text{cdg}_n f \in \text{Im } f_*$ que é gerada por $(\deg_n f)e_G$ pelo Teorema 1. Assim $\deg_n f \setminus \text{cdg}_n f$. ■

III.2 - O NÚMERO DE UMA EXTENSÃO

Seja $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q$ uma extensão de grupos e suponhamos que $\text{H}^j(N) = 0$, para todo $j > n$ e que $\text{H}^n(N) \cong \mathbb{Z}$. Assim a imagem de $i^* : \text{H}^n(G) \rightarrow \text{H}^n(N)$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}$ e assim tem um gerador não-negativo Φ .

Definição:

$\Phi = \Phi(p)$ é o **número da extensão** do grupo N pelo grupo Q .

* *Observação:*

1. Trocando-se o coeficiente $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_r$, obteremos $\Phi_r(p) \in \mathbb{Z}$ o número da extensão do grupo N pelo grupo Q para coeficientes em $\mathbb{Z}_r$. O menor inteiro positivo tal que $(\Phi_r)g$ gera $\text{Im } i^* \subset \text{H}^n(N; \mathbb{Z}_r)$, onde g é a classe fundamental em $\text{H}^n(N; \mathbb{Z}_r)$ no sentido dado na observação 2 no início deste capítulo.

Definição:

Dizemos que a extensão de grupo $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q$ é **orientável** se Q atua trivialmente em $H^n(N)$

Teorema 1 : $\Phi \neq 0 \Rightarrow$ a extensão é orientável.

Demonstração: Suponhamos que a ação não é trivial, então para qualquer $\alpha \in H^n(N)$, $\alpha \neq 0$, $\exists g \in Q$, tal que $g\alpha = -\alpha$.

Assim $(H^n(N))^Q = \{0\}$, ou seja $H^0(Q, H^n(N)) = \{0\}$.

Mas i^* é dada pela composta:

$$H^n(G) \rightarrow E_{\infty}^{0,n} \rightarrow E_2^{0,n} \cong H^0(Q, H^n(N)) = \{0\}, \text{ ou seja, a imagem de } i^*$$

localiza-se na parte invariante de $H^n(N)$ sob Q , que é nula. Assim $\Phi = 0$. ■

Na sequência denotaremos $\mathbb{Z}$ por $\mathbb{Z}_0$.

Suponhamos que $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q$ seja uma extensão orientada. Então a sequência espectral de Hochschild-Serre, nos fornece as aplicações:

$$(1) p^{\#} : H^i(G, \mathbb{Z}_r) \rightarrow E_{\infty}^{i-n,n} \rightarrow E_2^{i-n,n} \cong H^{i-n}(Q, H^n(N; \mathbb{Z}_r)) \cong H^{i-n}(Q; \mathbb{Z}_r).$$

$$(2) p_{\#} : H_i(Q, \mathbb{Z}_r) \cong H_i(Q, H_n(N, \mathbb{Z}_r)) \cong E_{i,n}^2 \rightarrow E_{i,n}^{\infty} \rightarrow H_{i+n}(G, \mathbb{Z}_r)$$

* *Observação:*

2. A compatibilidade dos produtos cup e cap com as sequências espectrais de Hochschild-Serre, além da naturalidade dos produtos, fornecem os diagramas comutativos (a menos de sinal) abaixo:

$$\begin{array}{ccc}
H^*(G) \otimes H^*(G) & \xleftarrow{p^* \otimes Id} H^*(Q) \otimes H^*(G) & \xrightarrow{Id \otimes p^\#} H^*(Q) \otimes H^*(Q) \\
\downarrow \smile & & \downarrow \smile \\
H^*(G) & \xrightarrow{p^\#} & H^*(Q)
\end{array}$$

diagrama 1

$$\begin{array}{ccc}
H^*(G) \otimes H_*(G) & \xleftarrow{Id \otimes p_\#} H^*(G) \otimes H_*(Q) & \xrightarrow{p^\# \otimes Id} H^*(Q) \otimes H_*(Q) \\
\downarrow \smile & & \downarrow \smile \\
H_*(G) & \xrightarrow{p_\#} & H_*(Q)
\end{array}$$

diagrama 2

ou seja, $p^\#$ e $p_\#$ satisfazem a menos de sinal as equações:

$$(a) \quad p^\#(p^*x \smile y) = x \smile p^\#(y)$$

$$(b) \quad p_*(y \smile p_\# \xi) = p^\# y \smile \xi.$$

Se N e Q são respectivamente PD^n -grupo e PD^m -grupo orientáveis, temos pelo teorema 2 de I.4.1 que G é um PD^{n+m} -grupo e se a extensão é orientável então G é orientável.

De agora em diante estaremos trabalhando sob estas hipóteses.

Vamos definir dois homomorfismos $p_! : H_i(Q) \rightarrow H_{n+i}(G)$ e $p^! : H^i(G) \rightarrow H^{i-n}(Q)$, de tal modo que os diagramas 3 e 4 abaixo comutem:

$$\begin{array}{ccc}
H_i(Q) & \xrightarrow{p_!} & H_{n+i}(G) \\
\downarrow (-\frown e_Q)^{-1} & & \uparrow -\frown e_G \\
H^{m-i}(Q) & \xrightarrow{p^*} & H^{m-i}(G)
\end{array}$$

diagrama 3

$$\begin{array}{ccc}
H^i(G) & \xrightarrow{p^!} & H^{i-n}(Q) \\
\downarrow -\frown e_G & & \uparrow (-\frown e_Q)^{-1} \\
H_{m+n-i}(G) & \xrightarrow{p_*} & H_{m+n-i}(Q)
\end{array}$$

diagrama 4

onde e_G e e_Q são classes fundamentais de G e Q respectivamente.

Lema 1: As seguintes igualdades se verificam:

$$1. p_!(y \cap e_Q) = p^*(y) \cap e_G.$$

$$2. p^!(y) \cap e_Q = p_*(y \cap e_G).$$

Demonstração:

$$1. p_!(y \cap e_Q) = [(- \cap e_G) \circ p^* \circ (- \cap e_Q)^{-1}](y \cap e_Q) = (- \cap e_G) \circ p^*(y) = p^*(y) \cap e_G.$$

$$2. p^!(y) \cap e_Q = [(- \cap e_Q)^{-1} \circ p_* \circ (- \cap e_G)](y) \cap e_Q = [(- \cap e_Q)^{-1} \circ p_*(y \cap e_G)] \cap e_Q = (p_*(y \cap e_G) \cap e_Q)^{-1} \cap e_Q = p_*(y \cap e_G). \blacksquare$$

Lema 2: Pelo Teorema 1 de II.2 temos que $p_{\#}e_Q = e_G$ e pela observação 2 (b)

$p^{\#}e_G = e_Q$, disso segue que:

$$1. p^{\#} = p^! \quad \text{e} \quad 2. p_{\#} = p_!$$

Demonstração:

$$1. p^{\#}(y) \cap e_Q = p_*(y \cap p_{\#}(e_Q)) = p_*(y \cap e_G) = p^!(y) \cap e_Q.$$

2. análoga a 1.

Teorema 2: $\deg_n p \setminus \Phi_n(p) \quad \text{e} \quad \text{cdg}_n p \setminus \Phi_n(p).$

Demonstração: Seja $\lambda \in H^n(G)$ tal que $i^*(\lambda) = \Phi_n \overline{e_N} \in H^n(N)$, onde $\overline{e_N}$ é a classe fundamental em $H^n(N)$, isto é, $\overline{e_N} \cap e_N = 1$.

Definimos os homomorfismos:

$$(1) \quad \tau : H_i(Q) \rightarrow H_i(G), \text{ colocando } \tau(\alpha) = \lambda \cap p_{\#}(\alpha)$$

$$(2) \quad \bar{\tau} : H^i(G) \rightarrow H^i(Q), \text{ colocando } \bar{\tau}(x) = p^{\#}(x \smile \lambda)$$

Mas $p^\# : H^n(G, \mathbb{Z}_r) \rightarrow H^0(Q, H^n(N; \mathbb{Z}_r))$ é tal que:

$$(3) \quad p^\#(\lambda) = \Phi_n \cdot 1.$$

Assim:

$$p_*(\tau(\alpha)) \triangleq p_*(\lambda \cap p^\#(\alpha)) \stackrel{\text{lema 1}}{=} p^!(y) \cap \alpha \stackrel{\text{lema 2}}{=} p^\#(y) \cap \alpha \stackrel{(3)}{=} \Phi_n \cdot 1 \cap \alpha = \Phi_n \alpha.$$

$$\bar{\tau}(p^*(x)) \triangleq p^\#(p^*(x) \cup \lambda) = x \cup p^\#(\lambda) \stackrel{(3)}{=} x \cup \Phi_n \cdot 1 = \Phi_n x.$$

Portanto τ e $\bar{\tau}$ são transfers associados a p_* e p^* respectivamente. Logo temos:

$$\deg_n p \setminus \Phi_n(p) \quad \text{e} \quad \text{cdg}_n p \setminus \Phi_n(p). \blacksquare$$

Lema 3: Seja $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q$ uma extensão de grupo orientável com N um PD^n -grupo e Q um PD^m -grupo, então $p^*(\overline{e_Q}) = i^!(1)$, onde $\overline{e_Q}$ é a classe fundamental de $H^m(Q)$.

Demonstração: Consideremos o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} H^0(N) & \xrightarrow{i^!} & H^m(G) \\ \downarrow \smile e_N & & \uparrow (-\smile e_G)^{-1} \\ H_n(N) & \xrightarrow{i_*} & H_n(G) \end{array}$$

diagrama 5

$$\begin{aligned} i^!(1) &= [(-\smile e_G)^{-1} \circ i_* \circ \smile e_N](1) = (-\smile e_G)^{-1}(i_*(e_N)) && \begin{array}{l} \text{teorema} \\ = \\ \text{principal} \end{array} \\ &= (-\smile e_G)^{-1}(p^*(\overline{e_Q}) \smile e_G) = p^*(\overline{e_Q}). \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 4.: Seja $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q$ uma extensão de grupo orientável com N um PD^n -grupo e Q um PD^m -grupo. Pelo Teorema 1 de II.4, existe $\gamma \in H_*(G, \mathbb{Z}_r)$ tal que

$p_*(\gamma) = \deg_n(p)e_Q$ e a dualidade de Poincaré garante que existe $\bar{\gamma} \in H^*(G, \mathbb{Z}_r)$

tal que $\gamma = \bar{\gamma} \cap e_G$. Então: $i_!(\bar{\gamma} \cap e_G) = i^*(\bar{\gamma}) \cap e_N$.

Demonstração: Consideremos o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} H_i(G) & \xrightarrow{i_!} & H_{i-n}(\dot{N}) \\ \downarrow (-\cap e_G)^{-1} & & \uparrow -\cap e_N \\ H^{m+n-i}(G) & \xrightarrow{i^*} & H^{m+n-i}(N) \end{array}$$

diagrama 6

$$i_!(\bar{\gamma} \cap e_G) = [(-\cap e_N) \circ i^* \circ (-\cap e_N)^{-1}](\bar{\gamma} \cap e_G) = (-\cap e_N)(i^*(\bar{\gamma})) = i^*(\bar{\gamma}) \cap e_N.$$

Teorema 3: Seja $N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} Q$ uma extensão de grupo orientável com N um PD^n -grupo e Q um PD^m -grupo, então $\deg_n(p) = \Phi_n(p) = \text{cdg}_n(p)$.

Demonstração: Pelo Teorema 2, temos que $\deg_n p \setminus \Phi_n(p)$. Mostremos que $\Phi_n(p) \setminus \deg_n p$.

Pelo Teorema 1 de II.4, existe $\gamma \in H_*(G, \mathbb{Z}_r)$ talque $p_*(\gamma) = \deg_n(p)e_Q$.

Seja $\overline{e_Q}$ a classe fundamental de $H^m(Q)$, ou seja $\overline{e_Q} \cap e_Q = 1$.

A dualidade de Poincaré garante que existe $\bar{\gamma} \in H^*(G, \mathbb{Z}_r)$ tal que $\gamma = \bar{\gamma} \cap e_G$. Então:

$$\deg_n p \triangleq \langle \overline{e_Q}, p_*(\gamma) \rangle = \langle p^*(\overline{e_Q}), \gamma \rangle \stackrel{\text{lema 3}}{=} \langle i^!(1), \gamma \rangle = \langle 1, i_!(\gamma) \rangle \therefore i_!(\gamma) = (\deg_n p).1.$$

Agora:

$$\deg_n p = i_!(\gamma) = i_!(\bar{\gamma} \cap e_G) \stackrel{\text{lema 4}}{=} i^*(\bar{\gamma}) \cap e_N = k\overline{e_N} \cap e_N = k, \text{ onde } k \text{ é um inteiro tal que } i^*(\bar{\gamma}) = k\overline{e_N}.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1]- Andrade, M.G.C. - "Tese de Doutorado" - IMECC - UNICAMP, Campinas(1992)
- [2]- Atiyah, M.F. - "The signature of fibre-bundles" - Univ. Tokyo Press, Tokyo (1969)73-84.
- [3]- Beyl, F.F. - "The spectral sequence of a group extension" - Bull. Sc. Math, 2^a série, 105 (1981)417-434.
- [4]- Bieri, R. - "Gruppen mit Poincaré Dualität" - Comment. Math. Helv., 47 (1972)373-396.
- [5]- Bieri, R and Eckmann, B - "Groups with homological duality generalizing Poincaré duality" - Invent. Math., 20(1973) 103-124.
- [6]- Bieri, R. - "On groups of finite cohomological dimension and Duality Groups over a ring" - J. Pure Appl. Algebra, 6 (1975)83-109.
- [7]- Bieri, R. - "Homological Dimension of Discrete Groups" - Queen Mary College Math. Notes, London, 1976.
- [8]- Bieri, R. and Eckmann, B. - "Cobordism for Poincaré Duality Groups" - Bull. AMS, 82, n° 1 (1976)137-139.
- [9]- Bieri, R. and Eckmann, B. - "Relative Homology and Poincaré Duality for Groups Pairs" - J. Pure App. Algebra, 13 (1978)277-319.
- [10]- Brown, K.S. - "Cohomology of Groups" - Springer-Verlag - GTM, 87 (1982).
- [11]- Cartan, H. and Eilemberg, S.- "Homological Algebra" - Princiton University Press (1957).

- Manifold” -Trans. AMS, 74(1953)110-134.
- [13]- Dicks, W. and Dunwood, M. - “Groups Acting on Graphs” - Cambridge University Press (1988).
- [14]- Eckmann, B and Müller, H. “Poincaré Duality Groups of Dimension Two” - Comm. Math. Helv. 55(1980) 510-520.
- [15]- Eckmann, B and Lionell, P.A - “Poincaré Duality Groups of Dimension Two II” - Comm. Math. Helv. 58(1983) 111-114.
- [16]- Evens, L. - “The Cohomology of Groups” - Clarendon Press (1991).
- [17]- Fanti, E.L.C. - “Tese de Doutorado”- ICMSC-USP- São Carlos (1992).
- [18]- Gottlieb, D.L - “Partial Transfers” - LNM,657 - Springer Verlag (1977) 255-266.
- [19]- Gottlieb, D.L - “The Trace an action and the degree of a map” - Trans. AMS 293(1986) 381-410.
- [20]- Hochschild, G. and Serre, J.P. - “Cohomology of Group Extensions” - Trans. Amer. Math. Soc. 74(1953)257-309.
- [21]- Kodaira, K. - “A certain type of Irregular Algebraic Surfaces” - J. Anal. Math IXX (1967)207-215.
- [22]- Mac Lane, S. - “Homology” - Math. Wissensch, 114 - Springer, Berlin (1967).
- [23]- Penteado, D. - “Índice de uma variedade fibrada” - Dissertação de mestrado - ICMSC/USP - São Carlos (1979).
- [24]- Robinson, D.J.S - “A Course in the Theory of Groups” - GTM 80 - Springer-Berlin (1982).

- [25]- Spanier, E.H. "Algebraic Topology" - M.Graw-Hill, New York (1966).
- [26]- Strebel, R. - "A Remark on Subgroups of Infinite Index in Poincaré Duality Groups" - Comm. Math. Helv. (1977)317-324.
- [27]- Vick, J.W. - "Homology Theory" - Academic Press (1973).
- [28]- Whitehead, G. W. - "Homotopy Theory" - The M.I.T. Press, Massachusetts (1966).