

---

Recobrimento monotônico de sistemas de controle

*Rodrigo Ribeiro Lopes*

---

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

## Recobrimento monotônico de sistemas de controle

*Rodrigo Ribeiro Lopes*<sup>1</sup>

**Orientador:** *Prof. Dr. Eyüp Kizil*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática. EXEMPLAR DE DEFESA.

**USP - São Carlos**

**Dezembro/2011**

<sup>1</sup> Suporte financeiro da CAPES. Processo DS-7105740/M.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

L864r           Lopes, Rodrigo Ribeiro  
                  Recobrimento monotônico de sistemas de controle /  
Rodrigo Ribeiro Lopes; orientador Eyüp Kizil -- São  
Carlos, 2011.  
                  70 p.

                  Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

                  1. Homotopia monotônica. 2. Sistemas de controle.  
3. Recobrimento universal. I. Kizil, Eyüp, orient.  
II. Título.

*“O pensamento lógico pode levar você de A a B, mas a  
imaginação te leva a qualquer parte do Universo.”*

Albert Einstein



# Agradecimentos

---

Primeiramente a Deus, por estar sempre cuidando de mim e me guiando.

Ao professor Eyüp Kizil, pela orientação, auxílio, confiança, amizade, paciência e pelos seus ensinamentos que me permitiram chegar até aqui.

Aos professores da pós-graduação do ICMC, por todos os ensinamentos transmitidos.

Aos meus colegas de mestrado, pela amizade e apoio que foram fundamental para superar as dificuldades.

À minha família, que nunca mediu esforços e seu amor sempre foi inesgotável.

Em especial, à minha amada Isabel por ser meu porto seguro e minha inspiração, por dar sentido a minha vida e tornar cada dia espetacular.

À CAPES pelo apoio financeiro.



# Resumo

---

Neste trabalho tratamos da homotopia monotônica entre trajetórias de um sistema de controle  $\Sigma$  sobre uma variedade  $M$ . Esta é uma variante apropriada da homotopia usual, na qual duas trajetórias são consideradas homotópicas se podem ser deformadas continuamente através de trajetórias. Inicialmente apresentamos alguns aspectos gerais e resultados fundamentais da teoria do controle. Em seguida, introduzimos a noção de regularidade para controles e a homotopia monotônica entre trajetórias de  $\Sigma$  geradas por essa classe de controles. Em particular, apresentamos um exemplo de um sistema que admite trajetórias que são homotópicas mas não são monotonicamente homotópicas.

O objetivo principal foi entender a construção (análoga), para homotopia monotônica, de espaço de recobrimento universal. Entre outros, o conjunto  $\Gamma(\Sigma, x)$  de classes de homotopia monotônica das trajetórias do sistema  $\Sigma$  a partir  $x \in M$  possui uma estrutura de variedade diferenciável de mesma dimensão que a variedade  $M$  (o espaço estado). Como consequência desse resultado temos um difeomorfismo local que nos permitirá levantar  $\Sigma$  para a variedade  $\Gamma(\Sigma, x)$ , obtendo assim um novo sistema  $\widehat{\Sigma}$  em  $\Gamma(\Sigma, x)$ .

A fim de compreendermos as propriedades universais de  $\Gamma(\Sigma, x)$ , tomamos um recobrimento  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  no sentido de que  $N$  é uma variedade diferenciável munida com um sistema de controle  $\widetilde{\Sigma}$  e  $\pi$  é um difeomorfismo local que leva  $\widetilde{\Sigma}$  ao  $\Sigma$ . Comparando as trajetórias de sistemas  $\widehat{\Sigma}$  e  $\widetilde{\Sigma}$  construímos uma aplicação de levantamento  $f : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow N$  que relaciona  $\widehat{\Sigma}$  e  $\widetilde{\Sigma}$ .

Finalizamos este trabalho levando em conta a classe particular de sistemas simétricos, para qual os espaços de recobrimento monotônico  $\Gamma(\Sigma, x)$  e topológico  $\widetilde{M}$  de  $M$  coincidem.



**Palavras-chave:** Homotopia Monotônica; Sistemas de Controle; Recobrimento Universal.

# Abstract

---

In this work, we deal with monotonic homotopy between trajectories of a control system  $\Sigma$  on a manifold  $M$ . This is an appropriate variant of usual homotopy, where two trajectories are considered to be homotopic if they can be deformed to each other in a continuous way through trajectories. We introduce regularity for controls and consider monotonic homotopy between trajectories generated by regular controls. In particular, we present an example of a system having homotopic trajectories which are not monotonically homotopic.

The main goal was to understand the construction for monotonic homotopy of the universal covering space and, in particular, the differentiable manifold structure on the set  $\Gamma(\Sigma, x)$  of monotonic homotopy classes of trajectories starting at  $x \in M$ . As a consequence of that result, we obtain a local diffeomorphism which permits lifting of  $\Sigma$  to another system  $\widehat{\Sigma}$  in  $\Gamma(\Sigma, x)$ . To consider universal properties of  $\Gamma(\Sigma, x)$  we take a covering  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  in the sense that  $N$  is a differentiable manifold provided with a control system  $\widetilde{\Sigma}$  and  $\pi$  is a local diffeomorphism mapping  $\widetilde{\Sigma}$  to  $\Sigma$ . Comparing the trajectories of  $\widehat{\Sigma}$  and  $\widetilde{\Sigma}$  we construct a lifting mapping  $f : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow N$  that relates  $\widehat{\Sigma}$  e  $\widetilde{\Sigma}$ .

Finally, we take into account the particular class of symmetric systems, for which both coverings  $\Gamma(\Sigma, x)$  and  $\widetilde{M}$  coincide.

**Key words:** Monotonic Homotopy; Control Systems; Universal Covering.



# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Conceitos Básicos . . . . .	5
1.2 Configuração . . . . .	11
1.3 Controles Regulares . . . . .	16
<b>2 Homotopia Monotônica</b>	<b>21</b>
2.1 Um Exemplo . . . . .	23
2.2 Construção da Variedade de Recobrimento Universal Clássica . . . . .	24
<b>3 Estrutura de Variedade em <math>\Gamma(\Sigma, x_0)</math></b>	<b>27</b>
3.1 Sistema de Cartas Locais . . . . .	27
3.2 Topologia em $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . . . . .	31
<b>4 Levantamentos</b>	<b>35</b>
4.1 Difeomorfismo Local vs. Aplicação de Recobrimento . . . . .	35
4.2 Levantamento de $\Sigma$ para $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . . . . .	39
<b>5 Recobrimento Universal do Controle</b>	<b>47</b>
5.1 Propriedade Universal de $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . . . . .	47
<b>6 Recobrimento de Sistemas Simétricos</b>	<b>53</b>
6.1 Propriedade de Levantamento de Caminhos . . . . .	54



# Introdução

---

Este trabalho foi desenvolvido a partir do estudo dos artigos [2], [9] e [10], os quais possuem como tema central a homotopia monotônica entre trajetórias de sistemas de controle. A homotopia monotônica é uma variante apropriada da homotopia usual, na qual as trajetórias são ligadas por homotopias que envolvem apenas trajetórias. A definição de homotopia monotônica foi restringida para a subclasse de trajetórias provenientes de controles regulares. Pois, os resultados foram obtidos nesse contexto e controles regulares são nada mais nada menos de que uma reparametrização de controles normais, no sentido de Sussmann [19].

A homotopia monotônica também foi considerada por Lawson, [11] e [12], no contexto da teoria de semigrupos de Lie. O objetivo nesses artigos foram o de estender a construção clássica de grupos de recobrimento universal à semigrupos de Lie.

Os resultados dos artigos citados inicialmente serviram de inspiração para trabalhos recentes. Por exemplo, em [21] uma versão da homotopia monotônica foi adaptada para sistemas de Young. Um sistema de Young é uma família de equações integrais (integração no sentido de Young) do tipo

$$y_t = y_0 + \int_0^t f(y_s) dX_s$$

onde cada equação é obtida escolhendo um integrador  $X$  de algum domínio  $\Delta$ . Os elementos de  $\Delta$  são caminhos de  $p$ -variação finita assumindo seus valores num espaço de Banach  $E_1$  e as soluções  $y$  (quando existem) são caminhos de  $p$ -variação finita à valores em um

outro espaço de Banach  $E_2$ . Deve ser notado que um sistema de Young, em geral, pode ter equações dirigidas por integradores mais gerais do que integradores de classe  $C^1$ , como por exemplo, integradores de  $p$ -variação finita, sendo  $p$  um valor alto. Ou seja, os integradores de um sistema de Young podem ser bastante irregulares, o que resulta soluções bastante irregulares, podendo inclusive não serem diferenciáveis em todos os pontos dos seus domínios, o que não ocorre com as soluções de um sistema de controle. Esse fato fez com que o recobrimento do conjunto acessível (existente sob determinadas condições, veja [21]) apresentasse propriedades mais analíticas do que geométricas e se tornar apenas um recobrimento topológico sem nenhuma estrutura de variedade. Um segundo tipo de sistemas considerado em [21] foram os sistemas rugosos a fim de relacionar a homotopia monotônica e equações diferenciais estocásticas. Para uma exposição mais detalhada veja [21].

O trabalho em [5] onde a homotopia monotônica (ou dinâmica) foi considerada na área “Quantum control” e também está relacionado com [2], [9] e [10], porém é muito mais alinhado com os trabalhos de Sarychev em [13], [14]. Foi provado [5], de uma maneira mais geral, uma equivalência homotópica entre a fibra da aplicação de ponto final e o espaço de laços da variedade (espaço estado). Esse resultado quando aplicado a diversos problemas da área “Quantum Control” serve para determinar topologias das correspondentes fibras.

No capítulo 1, iniciamos apresentando alguns conceitos e resultados fundamentais da teoria de controle que serão utilizados no decorrer do trabalho. Em seguida, exibimos a configuração do sistema de controle cônico  $\Sigma$  evoluindo sobre uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão finita e introduzimos o conceito de regularidade para funções de controles, o qual pode ser visto por meio de uma reparametrização como uma generalização de controles normais. Entre os resultados para controles regulares verificados damos destaque à uma importante propriedade geométrica obtida a partir do teorema da função implícita.

Tendo como base a regularidade, formalizamos no capítulo 2 a homotopia monotônica entre trajetórias de um sistema de controle. Além de obter resultados análogos da homotopia de caminhos, damos um exemplo em que trajetórias que são homotópicas por caminhos não são homotópicas monotonicamente. Sendo um dos nossos objetivos obter

propriedades semelhantes ao do recobrimento universal  $\widetilde{M}$  para o espaço  $\Gamma(\Sigma, x)$ , das classes de equivalência de trajetórias regulares, fazemos uma breve revisão da construção da variedade de recobrimento universal clássica.

O capítulo 3 contém o principal resultado desse estudo. Nele exibimos a construção de uma estrutura de variedade diferenciável de mesma dimensão que  $M$  sobre o espaço  $\Gamma(\Sigma, x)$ . Como consequência a aplicação ponto final  $\varepsilon_x : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow M$  é um difeomorfismo local no sentido que sua diferencial é um isomorfismo em cada ponto de  $\Gamma(\Sigma, x)$ . A imagem de  $\varepsilon_x$  está contida no interior de  $\mathcal{A}(x)$ , o conjunto acessível a partir de  $x$  e em, particular, é o interior de  $\mathcal{A}(x)$  quando a condição do posto estiver satisfeita. A existência de tal difeomorfismo local junto com uma estrutura de variedade em  $\Gamma(\Sigma, x)$  nos permitirão levantar o sistema  $\Sigma$  para a variedade  $\Gamma(\Sigma, x)$ , gerando assim um novo sistema  $\widehat{\Sigma}$  sobre  $\Gamma(\Sigma, x)$ .

Começamos o capítulo 4 com alguns resultados sobre levantamento de caminhos e homotopias para difeomorfismos locais entre variedades. Em particular mostramos como levantar uma trajetória de  $\Sigma$  a uma trajetória de  $\widehat{\Sigma}$ . Com relação ao sistema  $\Sigma$  restrito ao conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ , o levantamento das trajetórias não pode ser feito de maneira direta. Pois, em geral o ponto inicial  $x$  pode não pertencer ao seu conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  e as trajetórias podem não estar inteiramente contidas em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ . Para superar estas complicações técnicas, efetuamos o levantamento das trajetórias a partir de  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e depois assumimos que  $x_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$  para algum  $x_1 \in M$ . Em seguida, relacionamos os espaços  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  e  $\Gamma(\Sigma, z_0)$ , quando  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ , mostrando que  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  é uma subvariedade aberta de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . A partir disso, obteve-se resultados análogos da teoria elementar de homotopia.

Dedicamos o capítulo 5 para estudar as propriedades universais do espaço  $\Gamma(\Sigma, x)$ . Para isso tomaremos uma variedade  $N$  que recobre o conjunto  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  por meio de um difeomorfismo local  $\pi$ . Inspirados no caso clássico, apresentamos a construção de um difeomorfismo local  $f : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow N$  tal que  $\pi \circ f = \varepsilon_x$ .

Os espaços de recobrimento monotônico  $\Gamma(\Sigma, x)$  e topológico  $\widetilde{M}$  podem não coincidir, uma vez que a homotopia monotônica e a clássica, em geral, não são equivalentes. No intuito de responder quando esses espaços coincidem, estudamos no capítulo 6 a classe



particular de sistemas de controle simétricos. O conteúdo desse capítulo está intimamente relacionado com os trabalhos de Sarychev. De fato, Sarychev considerou em [13], [14] as propriedades homotópicas do espaço de trajetórias de sistemas em variedades Riemannianas completamente controláveis e, em particular, sistemas que não possuem campo drift (i.e., sistema simétrico). Mais precisamente, ele provou uma equivalência homotópica entre o espaço de trajetórias munido com a topologia de convergência uniforme e o espaço de laços da variedade Riemanniana adjacente.

---

# Preliminares

---

## 1.1 Conceitos Básicos

Um sistema de controle é formado pelos seguintes objetos:

- Um espaço estado  $M$ , ou seja, uma variedade diferenciável ( $\mathcal{C}^\infty$ ) de dimensão finita;
- O conjunto de controles  $\mathcal{U} = \{u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \mid u \text{ localmente integrável}\}$  onde  $U$  denota o espaço de controles.

De modo alternativo, podemos admitir apenas controles  $u : \mathbb{R} \rightarrow U$  constantes por pedaços, isto é,  $\mathbb{R}$  é decomposto em subintervalos cujo comprimento é limitado inferiormente a fim de que  $u$  seja constante em cada um desses subintervalos. Representaremos a classe dos controles constantes por pedaços como  $\mathcal{U}_{pc}$ . Pelo lema da aproximação, demonstrado por Sussmann em [20], sabe-se que os resultados obtidos para sistemas de controle com controles provenientes da classe  $\mathcal{U}_{pc}$  podem ser estendidos para sistemas mais gerais aproximando um controle qualquer por essa classe.

Para se ter um sistema de controle ainda é necessário:

- As dinâmicas

$$\dot{x} = X(x, u(t)).$$

A dinâmica do sistema é dada pela família de equações diferenciais que dependem de parâmetros (i.e., controles). Suponhamos que para cada  $u \in \mathcal{U}$  a aplicação

$$X_u : M \longrightarrow TM, \quad p \longmapsto X(p, u),$$

é um campo de vetores diferenciável em  $M$ . Então para todo  $u \in \mathcal{U}$  e  $x \in M$  a equação diferencial  $\dot{x} = X(x, u)$  possui soluções locais únicas  $\phi(t, x, u)$  onde no tempo  $t = 0$  temos  $\phi(0, x, u) = x$ .

De modo mais simples, um sistema de controle é determinado pela coleção de campos de vetores parametrizados por controles  $\mathcal{F} = \{X_u \mid u \in \mathcal{U}\}$ . Para simplificar a notação utilizaremos  $\Sigma$  para representar um sistema de controle e diremos que  $\Sigma$  é um sistema de controle evoluindo sobre a variedade  $M$ .

Associado ao  $\Sigma$  existem dois objetos de grande importância. O primeiro é um semigrupo  $S_\Sigma$  gerado por fluxos dos campos de  $\Sigma$  com restrição de tempo positivo (ou simplesmente, semigrupo do sistema) e definido como

$$S_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \cdots \circ X_{t_k}^k \mid X^i \in \Sigma \text{ e } t_i \in \mathbb{R}^+\}.$$

Note que,  $S_\Sigma$  é um semigrupo no sentido local, uma vez que o produto é dado pela composta de difeomorfismos a menos de localização dos seus domínios e as inversas dos elementos de  $S_\Sigma$ , em geral, não estão em  $S_\Sigma$  por exigirmos o tempo positivo.

De modo análogo, temos o segundo objeto que é o grupo (local) gerado pelos fluxos dos campos pertencentes a  $\Sigma$  sem a restrição de que o tempo seja positivo, a saber

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \cdots \circ X_{t_k}^k \mid X^i \in \Sigma \text{ e } t_i \in \mathbb{R}\}.$$

Este conjunto é fechado para operação de composição e por elementos inversos, ou seja, permite-se a reversão do tempo e  $(X_t)^{-1} = X_{-t}$ .

A órbita positiva a partir de  $x \in M$  é definida através da ação do semigrupo local  $S_\Sigma$  sobre  $x$ , ou seja,

$$S_\Sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in S_\Sigma\}.$$

De maneira semelhante, temos a órbita a partir de  $x \in M$  que é definida pela ação do grupo (local)  $G_\Sigma$  sobre  $x$ , isto é,

$$G_\Sigma(x) = \{\phi(x) \mid \phi \in G_\Sigma\}.$$

**Definição 1.1.** *Seja  $\Sigma$  um sistema de controle evoluindo numa variedade  $M$ . O conjunto*

$$\mathcal{A}_\Sigma(x) = \{y \in M \mid y = \phi(t, x, u) \text{ para algum } u \in \mathcal{U}_{pc} \text{ e } t > 0\}$$

*é dito o conjunto dos pontos acessíveis, ou simplesmente conjunto acessível, a partir da condição inicial  $x \in M$  por concatenações de trajetórias dos campos de  $\Sigma$  com a restrição de que se consideram apenas as partes positivas das trajetórias.*

Observe que os conjuntos  $S_\Sigma(x)$  e  $\mathcal{A}_\Sigma(x)$  coincidem. Nas figuras abaixo representamos o conjunto acessível  $\mathcal{A}_\Sigma(x_0)$  e a órbita  $G_\Sigma(x_0)$  de um ponto  $x_0 \in M$ , onde  $\Sigma$  é um sistema de controle gerado por dois campos de vetores  $X^1$  e  $X^2$ . Em  $G_\Sigma(x_0)$  é permitido o movimento ao longo dos campos  $X^i$  tanto para frente quanto para trás, enquanto que no conjunto acessível  $\mathcal{A}_\Sigma(x_0)$  apenas o movimento para frente é possível, como nas figuras a seguir.

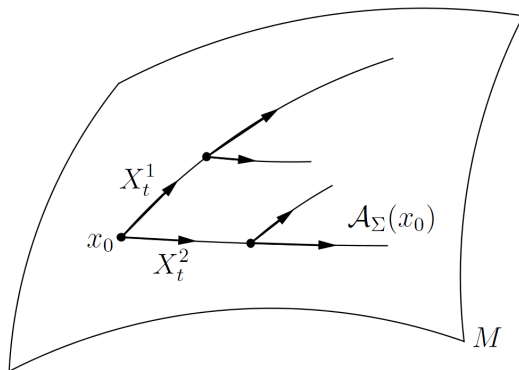


Figura 1.1: Conjunto Acessível  $\mathcal{A}_\Sigma(x_0)$ .

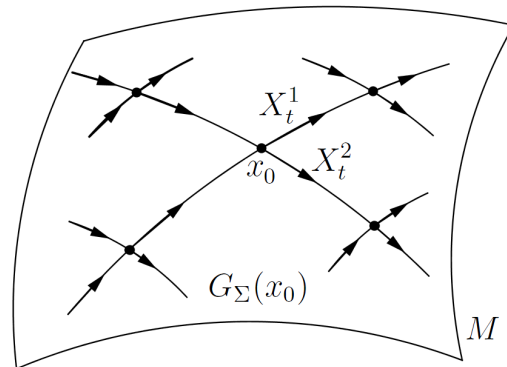


Figura 1.2: Órbita  $G_\Sigma(x_0)$ .

Evidentemente qualquer órbita positiva  $S_\Sigma(x)$  está contida na órbita correspondente  $G_\Sigma(x)$ , porém elas (exceto em alguns casos particulares) são completamente diferentes. Um caso em que esses objetos coincidem é quando o sistema é simétrico, ou seja, ele

permite o “retorno no tempo”. Para tais sistemas os conjuntos acessíveis coincidem com as órbitas, ou seja, para todo  $x \in M$  temos  $G_\Sigma(x) = \mathcal{A}_\Sigma(x)$ .

O fato de que  $S_\Sigma$  não é um grupo faz com que as órbitas positivas  $S_\Sigma(x)$ ,  $x \in M$ , sejam objetos bem mais irregulares que as órbitas  $G_\Sigma(x)$ . Ao contrário das órbitas  $G_\Sigma(x)$  que são subvariedades de  $M$ ,  $S_\Sigma(x)$  não é, em geral, uma subvariedade. Assim, a propriedade dinâmica de irreversibilidade no tempo altera completamente a geometria da órbita positiva.

Uma diferença fundamental entre  $S_\Sigma(x)$  e  $G_\Sigma(x)$  está na relação “pertence à mesma órbita”

$$x_1 \sim x_2 \text{ se, e somente, se } x_2 \in G_\Sigma(x_1), \quad x_1, x_2 \in M.$$

No caso do semigrupo essa relação deixa de ser simétrica (isto é, existem casos em que  $x \in S_\Sigma(y)$  enquanto  $y \notin S_\Sigma(x)$ ) apesar de ser reflexiva e transitiva. Porém, no caso do grupo a relação é uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são as folhas da folheação determinada por  $\Sigma$ . Associado as órbitas positivas temos os conceitos a seguir.

**Definição 1.2.** *Um sistema de controle  $\Sigma$  sobre  $M$  é dito controlável a partir de  $x \in M$  se  $\mathcal{A}_\Sigma(x) = M$ . Se para todo  $x \in M$  tivermos  $\mathcal{A}_\Sigma(x) = M$  então o sistema  $\Sigma$  é controlável.*

O problema da controlabilidade é dividido em duas partes, a saber o problema da órbita e o problema da acessibilidade. Enunciamos, a seguir, o teorema fundamental de Sussmann sobre órbitas do sistema e o resultado de Krener sobre acessibilidade.

**Teorema 1.3.** (Teorema da Órbita) *Seja  $\mathcal{F} = \{X_u \mid u \in \mathcal{U}\} \subset \mathcal{X}^\infty(M)$  uma família de campos de vetores diferenciáveis sobre  $M$ . Então para cada  $x \in M$  a órbita  $G_\Sigma(x)$  é uma subvariedade imersa quase-regular<sup>1</sup> de  $M$ .*

**Demonstração.** Veja Sussmann, [18], Stefan, [17], e o apêndice A de [3]. □

---

1

**Definição 1.4.** *Uma subvariedade imersa  $L \hookrightarrow M$  (não necessariamente conexa ou injetora), é dita quase-regular se a seguinte condição for satisfeita: Se uma aplicação contínua  $\phi : N \rightarrow M$ , com  $N$  espaço topológico localmente conexo, assume valores em  $L$  então  $\phi : N \rightarrow L$  é contínua se considerado a topologia intrínseca de  $L$ .*

Uma propriedade mais fraca que a controlabilidade é a acessibilidade do sistema.

**Definição 1.5.** *Um sistema  $\Sigma$  é acessível a partir de  $x \in M$  se  $\text{int } \mathcal{A}_\Sigma(x) \neq \emptyset$ . O sistema satisfaz a propriedade de acessibilidade, ou simplesmente  $\Sigma$  é acessível, se  $\Sigma$  é acessível a partir de todo  $x \in M$ .*

O interior de  $\mathcal{A}_\Sigma(x)$  está contido no interior de  $G_\Sigma(x)$ . Então, se o sistema  $\Sigma$  for acessível a partir de  $x \in M$ , temos  $\dim G_\Sigma(x) = \dim M$ . A versão local da definição acima é dada a seguir.

**Definição 1.6.** *Um sistema  $\Sigma$  é dito localmente acessível se para todo  $x \in M$  e toda vizinhança  $N$  de  $x$ , o conjunto  $\mathcal{A}_\Sigma(x) \cap N$  tem interior não vazio em  $M$ .*

Mencionamos agora uma condição algébrica que tem papel fundamental para o desenvolvimento do nosso trabalho, chamada de condição do posto de álgebra de Lie, ou simplesmente, condição do posto.

**Definição 1.7.** *Dizemos que  $\Sigma$  satisfaz condição do posto, se temos*

$$\mathcal{L}(\Sigma)(x) = T_x M, \quad \forall x \in M, \quad (1.1.1)$$

onde  $\mathcal{L}(\Sigma)$  denota a menor álgebra de Lie que contém  $\Sigma$ .

Veremos no decorrer do trabalho que tal condição garante a existência de controles regulares, que serão introduzidos futuramente, além de fornecer acessibilidade local de um sistema de controle através do teorema a seguir.

**Teorema 1.8.** (Krener) *Seja  $\Sigma$  um sistema de controle sobre  $M$ . Se  $\Sigma$  satisfaz a condição do posto, então o sistema é localmente acessível.*

**Demonstração.** Veja teorema A.4.4 em [3]. □

O teorema de Krener garante que as órbitas positivas em tempos suficientemente pequenos de cada ponto possui pontos interiores na órbita inteira. Além disso, vale o seguinte.

**Proposição 1.9.** *Se o sistema  $\Sigma$  for localmente acessível, então o int  $\mathcal{A}_\Sigma(x)$  é denso em  $\mathcal{A}_\Sigma(x)$ .*

**Demonstração.** Veja o teorema A.4.9 em [3]. □

Se um ponto  $y \in M$  é acessível a partir de  $x \in M$  então existem campos de vetores  $X^1, X^2, \dots, X^k$  em  $\Sigma$  e  $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$  com coordenadas positivas tal que

$$y = X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(x).$$

Seguindo Sussmann, [19], definimos uma noção mais forte de acessibilidade e que possui grande importância no estudo da controlabilidade e das propriedades topológicas de conjuntos acessíveis.

**Definição 1.10.** *Um ponto  $y \in M$  é dito normalmente acessível a partir de  $x \in M$  se existem  $X^1, X^2, \dots, X^k$  em  $\Sigma$  e um  $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$  com coordenadas positivas tal que a aplicação  $\rho_x$ , definida como*

$$\rho_x(\tau) = \rho_x(t_1, t_2, \dots, t_k) = X_{t_k}^k \circ \dots \circ X_{t_1}^1(x),$$

*satisfaz  $\rho_x(\tau) = y$  e o posto da diferencial  $d(\rho_x)_\tau$  de  $\rho_x$  no ponto  $\tau$  é igual a dimensão de  $M$ .*

Note que,  $\rho_x(t_1, t_2, \dots, t_k)$  é nada além de que o ponto final de uma trajetória a partir de  $x$  definida por um controle constante por pedaços  $u$ , o qual será chamado de controle normal.

Segue a partir da definição acima que:

1. Se  $y$  é normalmente acessível a partir de  $x$ ,  $x$  acessível a partir de  $z$  e  $w$  acessível a partir de  $y$  então  $w$  é normalmente acessível a partir de  $z$ .
2. Se  $y$  é normalmente acessível a partir de  $x$  então a órbita positiva  $\mathcal{A}_\Sigma(x)$  contém uma vizinhança de  $y$ .

## 1.2 Configuração

Inicialmente apresentamos as características que impomos sobre o sistema de controle para o desenvolvimento do nosso trabalho. Primeiramente, considere  $M$  uma variedade  $n$ -dimensional conexa diferenciável, onde a diferenciabilidade de nosso interesse é a de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Para efeitos topológicos, a variedade  $M$  é munida com uma métrica Riemanniana a qual induz uma função distância  $d_{\mathbb{R}}$  sobre  $M$ .

Seja  $\mathcal{X}^\infty(M)$  o espaço linear dos campos vetoriais diferenciáveis de  $M$  e seja  $E$  um subespaço vetorial de dimensão finita (sobre  $\mathbb{R}$ ). A fim de termos uma topologia em  $E$  e no correspondente espaço de funções assumimos que  $E$  é munido com um produto interno. Tome em  $E$  um cone convexo gerador  $\Sigma$ , ou seja,  $\Sigma$  não está contido em nenhum subespaço próprio de  $E$  e portanto com a norma proveniente do produto interno de  $E$ , a aplicação inclusão de  $E$  em  $\mathcal{X}^\infty(M)$  é diferenciável.

Embora não seja necessário para vários resultados, vamos supor que  $\Sigma$  é completo, ou seja, dado qualquer campo vetorial  $X$  em  $\Sigma$  seu fluxo  $X_t$  está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Ainda sobre  $\Sigma$  impomos a hipótese fundamental para nosso trabalho que é a condição do posto 1.1.1.

Dado um ponto  $x \in M$ , denotamos por  $E(x)$  o subespaço de  $T_x M$  obtido quando aplicamos o ponto  $x$  nos campos de vetores de  $E$ . De modo análogo, definimos o cone convexo  $\Sigma(x)$ .

Uma trajetória de  $\Sigma$  é uma curva absolutamente contínua  $\alpha$  em  $M$  tal que para todo  $t$  temos  $\alpha'(t) \in \Sigma(\alpha(t))$ . Geometricamente, uma trajetória  $\alpha$  de  $\Sigma$  é uma curva onde o vetor tangente a curva em cada instante de tempo está contido no cone convexo  $\Sigma(\alpha(t))$ , como na figura a seguir.



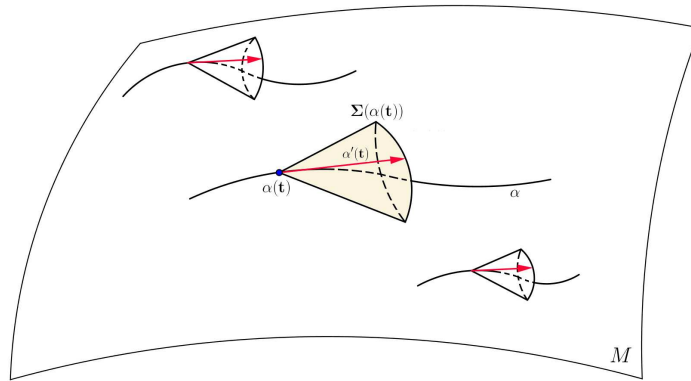


Figura 1.3: Trajetórias de  $\Sigma$ .

A princípio uma trajetória  $\alpha$  pode estar definida em um intervalo arbitrário  $[0, T]$ , onde  $T > 0$ . Mas como estamos preocupados com as propriedades geométricas das trajetórias, isto é, com seus traços, podemos utilizar o fato que  $\Sigma$  é um cone para reparametrizá-las de modo que as mesmas estejam definidas sobre o domínio normalizado  $[0, 1]$ . Isso pode ser feito do seguinte modo, dada uma trajetória  $\alpha : [0, T] \rightarrow M$ , definamos a curva

$$\beta : [0, 1] \longrightarrow M, \quad t \longmapsto \beta(t) = \alpha(Tt).$$

Logo,  $\beta$  é uma trajetória do sistema  $\Sigma$ . De fato, como  $\Sigma$  é um cone temos que a derivada

$$\beta'(t) = T\alpha'(Tt) \in \Sigma(\alpha(Tt)),$$

sendo  $\Sigma(\alpha(Tt)) = \Sigma(\beta(t))$  segue que  $\beta$  é por definição uma trajetória de  $\Sigma$ .

Denotamos por

$$\mathcal{E} = \{u : [0, 1] \rightarrow E \mid u \text{ é limitada e mensurável}\}.$$

O conjunto  $\mathcal{E}$  munido com a norma *ess sup-norm* é um espaço de Banach. Tomamos

em  $\mathcal{E}$  o subconjunto

$$\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{E} \mid u(t) \in \Sigma, \forall t \in [0, 1]\}$$

das funções  $u$  que assumem seus valores “estritamente” em  $\Sigma$ .

O fato de  $\Sigma$  ser um cone convexo acarreta que  $\mathcal{U}$  também é um cone convexo. Além disso, sendo  $\Sigma$  gerador em  $E$  temos que o int  $\mathcal{U}$  é não vazio em  $\mathcal{E}$  com respeito a topologia proveniente da norma *sup – norm*. Chamaremos os elementos de  $\mathcal{U}$  de (funções de) controles de  $\Sigma$ .

Pelos teoremas básicos de existência de soluções de equações diferenciais, [16], para cada controle  $u : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  e cada condição inicial  $x \in M$ , existe uma trajetória

$$\text{trj}_x(u) : [0, 1] \longrightarrow M$$

que é solução da equação diferencial  $\dot{x} = u(t)(x)$  com  $\text{trj}_x(u)(0) = x$ . Com base nisso denotamos por:

1.  $T(\Sigma)$  o conjunto de todas as trajetórias em  $\Sigma$ ;
2.  $T(\Sigma, x)$  o conjunto das trajetórias começando em  $x$ ;
3.  $T(\Sigma, x, y)$  as trajetórias começando em  $x$  e terminando em  $y$ .

Além disso, podemos ver o conjunto acessível  $\mathcal{A}_\Sigma(x)$  como a imagem da aplicação avaliação

$$e_x : \mathcal{U} \longrightarrow M, \quad u \longmapsto \text{trj}_x(u)(1). \tag{1.2.1}$$

Pelos teoremas básicos de dependência das soluções de equações diferenciais sobre parâmetros a aplicação avaliação  $e_x$  é diferenciável. Finalmente, denotamos o fluxo definido por  $u$  como  $\phi_t^u(x) = \text{trj}_x(u)(t)$ , onde para cada  $t$  fixo a aplicação  $\phi_t^u$  é um difeomorfismo entre subconjuntos abertos de  $M$ .

O conjunto das trajetórias  $T(\Sigma, x)$  pode ser naturalmente munido com diversas topologias, assim como a topologia da convergência uniforme (ou seja, a topologia  $\mathcal{C}^0$ ), a topolo-

gia compacto-aberto, entre outras. Porém para o contexto presente a topologia mais adequada é a topologia  $\mathcal{C}^1$ , que é mais forte que a  $\mathcal{C}^0$  e é induzida pela seguinte métrica.

$$d_1(\alpha, \beta) = \sup_{t \in [0,1]} d_{\mathbb{R}}(\alpha(t), \beta(t)) + \text{ess sup}_{t \in [0,1]} \left| \alpha'(t) - \beta'(t) \right|.$$

Uma vez que o  $x$  está fixo, a continuidade das aplicações

$$\text{trj}_x : \mathcal{U} \longrightarrow T(\Sigma, x)$$

é consequência dos teoremas padrões sobre dependência contínua das soluções de equações diferenciais ordinárias em relação a parâmetros. Como veremos na proposição a seguir, para a topologia  $\mathcal{C}^1$  a aplicação  $\text{trj}_x$  é aberta, contínua e sobrejetora, o que nos permite afirmar que a topologia  $\mathcal{C}^1$  em  $T(\Sigma, x)$  é co-induzida pela aplicação  $\text{trj}_x$ .

**Proposição 1.11.** *Seja  $\mathcal{U}$  munido com a norma ess sup-norm  $\|\cdot\|_{\infty}$  e  $T(\Sigma, x)$  munido com a topologia  $\mathcal{C}^1$ . Então a aplicação  $\text{trj}_x : \mathcal{U} \rightarrow T(\Sigma, x)$  é aberta.*

**Demonstração.** Apresentaremos a demonstração detalhada em [21]. Sejam  $V$  um aberto de  $\mathcal{U}$  e  $\alpha = \text{trj}_x(u) \in \text{trj}_x(V)$ . Como  $u \in V$  e  $V$  é aberto existe um  $\epsilon > 0$  tal que  $B_{\epsilon}(v) = \{v \in \mathcal{U} \mid \|v - u\|_{\infty} < \epsilon\} \subset V$ . Para cada  $t \in [0, 1]$ , tem-se  $u(t) \in \mathcal{X}^{\infty}(M)$ , ou seja,  $u(t)$  é um campo diferenciável de  $M$  e portanto contínuo. Desse modo, para  $\epsilon/4 > 0$ , existe um  $\delta > 0$  tal que

$$d(\alpha(t), a) < \delta \Rightarrow |u(t)(\alpha(t)) - u(t)(a)| < \epsilon/4.$$

Considere agora a  $B_{\epsilon_1}(\alpha) = \{\beta \in T(\Sigma, x) \mid d_1(\alpha, \beta) < \epsilon_1\}$ , onde  $\epsilon_1 = \min \delta, \epsilon/4$ , e seja  $\beta \in B_{\epsilon_1}(\alpha)$ . Como  $\beta \in T(\Sigma, x)$ , existe um  $w \in \mathcal{U}$  tal que  $\beta = \text{trj}_x(w)$ . Sendo  $d_1(\alpha, \beta) < \epsilon_1$ , segue que

$$\text{ess sup}_{t \in [0,1]} \left| \alpha'(t) - \beta'(t) \right| = \text{ess sup}_{t \in [0,1]} |u(t)(\alpha(t)) - w(t)(\beta(t))| < \epsilon_1 \leq \epsilon/4.$$

Em particular, para cada  $t \in [0, 1]$  temos

$$|u(t)(\alpha(t)) - w(t)(\beta(t))| < \epsilon/4. \quad (1.2.2)$$

Além disso,

$$\sup_{t \in [0, 1]} d(\alpha(t), \beta(t)) < \epsilon_1 \leq \delta.$$

Assim, para cada  $t \in [0, 1]$  temos  $d(\alpha(t), \beta(t)) < \epsilon_1 \leq \delta$ , o que implica pela continuidade de  $u(t)$  que

$$|u(t)(\alpha(t)) - u(t)(\beta(t))| < \epsilon/4. \quad (1.2.3)$$

Considere  $v \in \mathcal{U}$  definido como

$$v(t)(a) = \begin{cases} u(t)(a), & \text{se } a \in M \setminus \{\beta(t)\} \\ w(t)(a), & \text{se } a \in \beta(t). \end{cases}$$

Temos que  $\beta = \text{trj}_x(v)$ , pois  $\frac{d\beta}{dt}|_{t=s} = w(s)(\beta(s)) = v(s)(\beta(s))$ . Além disso, segue de 1.2.2 e 1.2.3 que para cada  $t \in [0, 1]$  tem-se

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \sup_{a \in M} |u(t)(a) - v(t)(a)| \\ &= |u(t)(\beta(t)) - v(t)(\beta(t))| = |u(t)(\beta(t)) - w(t)(\beta(t))| \\ &\leq |u(t)(\alpha(t)) - u(t)(\beta(t))| + |u(t)(\alpha(t)) - w(t)(\beta(t))| \\ &< \epsilon/4 + \epsilon/4 = \epsilon/2 \end{aligned}$$

Logo,  $\|u - v\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in [0, 1]} |u(t) - v(t)| \leq \epsilon/2 < \epsilon$ , o que implica que  $v \in B_\epsilon(u) \subset V$  e  $\beta = \text{trj}_x(v) \in \text{trj}_x(V)$ . Portanto,  $B_{\epsilon_1}(\alpha) \subset \text{trj}_x(V)$  demonstrando assim que  $\text{trj}_x(V)$  é aberto em  $T(\Sigma, x)$ .

□

### 1.3 Controles Regulares

Dada uma condição inicial  $x \in M$  fixa, temos definido a aplicação  $\text{trj}_x : \mathcal{U} \rightarrow T(\Sigma, x)$  que associa para cada controle  $u \in \mathcal{U}$  uma única trajetória começando em  $x$ . Além disso, denotando o ponto final dessa trajetória como  $e_x(u) = \text{trj}_x(u)(1)$ , segue que a aplicação avaliação  $e_x : \mathcal{U} \rightarrow M$  está bem definida. Note que, poderíamos ter definido a aplicação  $e_x$  em todo o espaço de Banach  $\mathcal{E}$  caso do sistema fosse completo. Além disso, o fato de  $e_x$  ser uma aplicação diferenciável nos permite gerar a seguinte definição.

**Definição 1.12.** *Um controle  $u$  é dito regular em  $x \in M$  se  $u \in \text{int } \mathcal{U}$  e a diferencial  $d(e_x)_u$  de  $e_x$  em  $u$  é sobrejetora.*

Utilizaremos  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  para denotar o conjunto dos controles regulares em  $x \in M$ . Uma trajetória  $\alpha$  será dita regular em  $x$  se  $\alpha = \text{trj}_x(u)$  para algum  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$ . Para verificar um fato geométrico sobre as trajetórias regulares recordaremos agora o teorema da função implícita em espaços de Banach e um corolário importante.

**Teorema 1.13.** (Teorema da Função Implícita) *Sejam  $U \subset E$ ,  $V \subset F$  abertos dos espaços de Banach  $E$  e  $F$ , e  $f : U \times V \rightarrow G$  de classe  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ . Para algum  $x_0 \in U$ ,  $y_0 \in V$  suponha que a derivada parcial no segundo argumento  $D_2f(x_0, y_0) : F \rightarrow G$  é um isomorfismo. Então existem vizinhanças  $U_0$  de  $x_0$ ,  $W_0$  de  $f(x_0, y_0)$  e uma única aplicação  $\mathcal{C}^r$   $g : U_0 \times W_0 \rightarrow V$  tal que para todo  $(x_0, y_0) \in U_0 \times W_0$  temos  $f(x, g(x, w)) = w$ .*

**Demonstração.** A demonstração consta em [1]. □

**Corolário 1.14.** *Se  $f : U \subset E \rightarrow F$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  e  $Df(u_0)$  é sobrejetor para algum  $u_0 \in U$ , então  $f$  é localmente sobrejetora, isto é, existem vizinhanças  $U_1$  de  $u_0$  e  $V_1$  de  $f(u_0)$  tal que  $f|_{U_1} : U_1 \rightarrow V_1$  é sobrejetora. Em particular, se  $Df(u)$  é sobrejetora para todo  $u \in U$ , então  $f$  é uma aplicação aberta.*

Desse modo, para controles regulares temos a sobrejetividade local da aplicação diferenciável  $e_x$ . A fim de exemplificar, tome  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$  e seja  $\alpha = \text{trj}_x(u)$ , segue do corolário 1.14 que existem vizinhanças  $U_0$  de  $u$  em  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  e  $V_0$  de  $\text{trj}_x(u)(1)$  em  $M$  tal que  $e_x : U_0 \rightarrow V_0$  é sobrejetora. Além disso, para todo  $v \in U_0$  temos  $d(e_x)_v$  sobrejetora.

Diremos que  $V_0$  é uma vizinhança de posto máximo de  $\text{trj}_x(u)(1)$ . Geometricamente  $\alpha$  tem a seguinte forma.

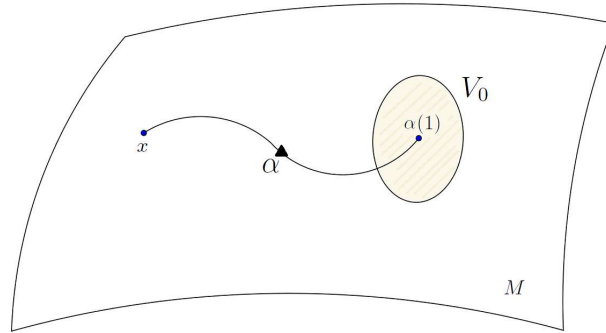


Figura 1.4: Vizinhança de posto máximo em torno do ponto final.

Introduziremos agora um pouco mais de notação com respeito aos controles regulares. Denotamos por  $R(\Sigma, x)$  o conjunto das trajetórias regulares em  $x$  e  $R(\Sigma, x, y)$  o conjunto das trajetórias regulares começando em  $x$  e terminando em  $y \in M$ . Utilizamos  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  para representar o conjunto dos pontos acessíveis a partir de  $x$  por controles regulares.

O fato de  $\text{int } \mathcal{U}$  ser não vazio já garante em parte a existência de controles regulares. Mas como veremos, sob a condição do posto 1.1.1 o conjunto  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  é não vazio e conseqüentemente  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  não é também. Outra propriedade que formalizamos neste momento, que não depende de tal condição, é o fato de tais conjuntos serem subconjuntos abertos.

**Proposição 1.15.** *Os conjuntos  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  e  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  são abertos.*

**Demonstração.** A afirmação segue diretamente do corolário 1.14. De fato, o conjunto  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  é nada além do conjunto dos pontos regulares da aplicação diferenciável  $e_x$ . Portanto,  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  é um subconjunto aberto de  $\mathcal{U}$ . Por sua vez,  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  é a imagem de  $\mathcal{R}_\Sigma(x)$  sob a aplicação aberta  $e_x$ , o que garante que tal conjunto é aberto em  $M$ .  $\square$

A exemplo da homotopia clássica gostaríamos de fazer a concatenação entre trajetórias. Para isso, vamos definir a concatenação dos controles, o que vai nos permitir gerar novos

controles para o sistema  $\Sigma$ .

**Definição 1.16.** *Dados controles  $u, v : [0, 1] \rightarrow \Sigma$  sua concatenação é o controle  $v * u$  definido por*

$$(v * u)(t) = \begin{cases} u(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

A proposição a seguir vem nos dizer que um controle regular domina a concatenação, independente da sua posição na concatenação (à esquerda ou à direita).

**Proposição 1.17.** *Sejam  $u$  e  $v$  controles pertencentes ao int  $\mathcal{U}$ .*

1. *Se  $u$  é regular em  $x_0$ . Então  $v * u$  é regular em  $x_0$ .*
2. *Se  $v$  é regular no ponto final de  $\text{trj}_{x_0}(u)$ , então  $v * u$  é regular em  $x_0$ .*

**Demonstração.** A demonstração pode ser encontrada em [2]. □

Geometricamente, o item 1 da proposição anterior nos diz que a vizinhança de posto máximo pode ser deslocada e, o item 2 nos afirmar que a vizinhança de posto máximo de  $\text{trj}_y(v)(1)$ ,  $y = \text{trj}_x(u)(1)$ , se torna uma vizinhança de posto máximo para  $\text{trj}_x(v * u)(1)$ . Como nas figuras a seguir.

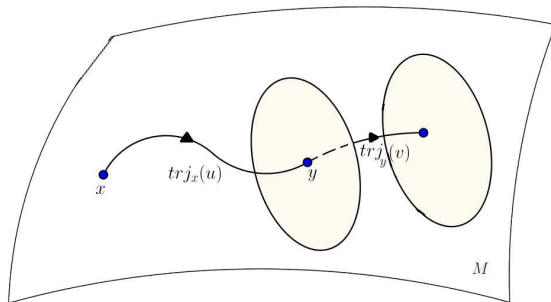


Figura 1.5: Concatenação  $v * u$  com  $u$  regular.

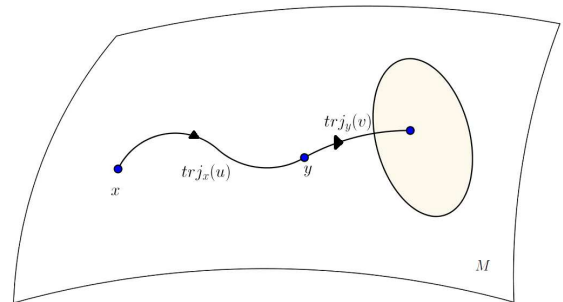


Figura 1.6: Concatenação  $v * u$  com  $v$  regular.

Outra propriedade dos controles regulares que verificamos a seguir é o fato da regularidade ser mantida em tempo reverso. Para isso, temos de considerar o sistema de controle reverso  $-\Sigma$  formado pelos campos de vetores da forma  $-X$  onde  $X \in \Sigma$ .

Dada uma curva  $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ , a curva reversa  $\alpha^-$  é definida como  $\alpha^-(t) = \alpha(1 - t)$ . Assim, se  $\alpha$  é uma trajetória de  $\Sigma$  então  $\alpha^-$  é uma trajetória do sistema  $-\Sigma$ , ou seja, se  $\alpha = \text{trj}_x(u)$  para algum  $u \in \mathcal{U}$  então  $\alpha^- = \text{trj}_y(-u)$  onde  $y$  é o ponto final de  $\alpha$  e  $-u$  é um controle de  $-\Sigma$ .

**Proposição 1.18.** *Se  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$  e  $y = e_x(u)$ , então  $-u \in \mathcal{R}_{-\Sigma}(y)$ . Equivalentemente, se  $\alpha \in R(\Sigma, x, y)$  então  $\alpha^- \in R(-\Sigma, y, x)$ .*

**Demonstração.** Maiores detalhes da demonstração podem ser encontrados em [2].  $\square$

Pensando com relação a uma trajetória regular  $\alpha = \text{trj}_x(u)$  a partir de  $x \in M$ , denote por  $y = \alpha(1)$ . Logo,  $y$  está contido em uma vizinhança  $V$  de posto máximo. A proposição anterior, nos garante que  $x$  está contido em uma vizinhança  $U$  de posto máximo para o controle regular  $-u$ .

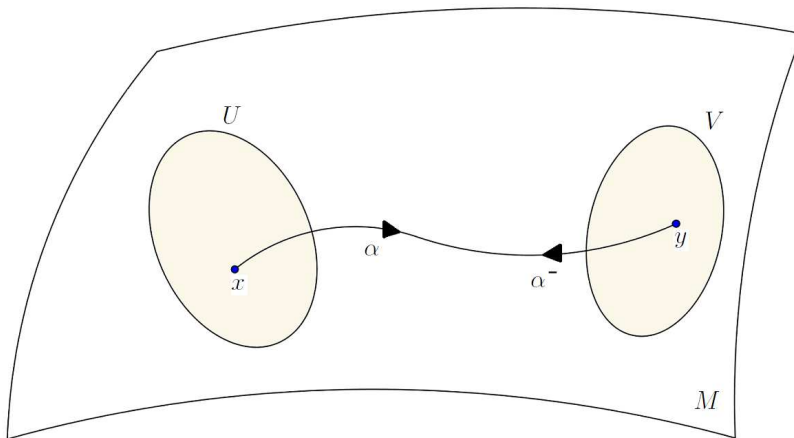


Figura 1.7: Vizinhanças de posto máximo para  $\Sigma$  e  $-\Sigma$ .

As proposições anteriores garantem que regularidade domina a concatenação de con-



troles e a reversão do tempo. Porém, um questionamento importante a ser feito é quanto a existência de tais tipos de controle. Para solucionar tal fato utilizamos os controles normais, uma vez que sob a condição do posto 1.1.1, sua existência é garantida em [19].

Foi provado em [2], que os controles normais, desde que estejam em  $\text{int } \mathcal{U}$ , tornam-se regulares por meio de uma reparametrização. Portanto, a existência de controles regulares é garantida sob a condição do posto. Os detalhes dos resultados a seguir podem ser encontrados em [2].

**Proposição 1.19.** *Assumindo a condição do posto, o conjunto dos controles regulares é não vazio.*

**Corolário 1.20.** *Sobre a condição do posto,  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x) = \text{int} \mathcal{A}_\Sigma(x)$  e  $\overline{\mathcal{A}_\Sigma(x)} = \overline{\text{int} \mathcal{A}_\Sigma(x)}$ .*

---

# Homotopia Monotônica

---

Introduziremos neste capítulo o conceito de homotopia monotônica entre trajetórias de  $\Sigma$ , como uma homotopia que liga continuamente trajetórias de  $\Sigma$  através de trajetórias. Evidentemente tal homotopia pode ser definida entre trajetórias arbitrárias. Porém restringiremos a definição para a subclasse de trajetórias regulares, uma vez que os resultados mais interessantes são obtidos neste contexto. Entre outros, a construção de uma estrutura de variedade diferenciável no espaço de recobrimento para a homotopia monotônica de trajetórias regulares de sistemas de controle. A definição formal de homotopia monotônica é dada a seguir.

**Definição 2.1.** *Duas trajetórias regulares  $\alpha$  e  $\beta$  são ditas monotonicamente homotópicas, denotado por  $\alpha \simeq_m \beta$ , se seus pontos extremos são iguais, isto é, para algum  $x, y \in M$  temos  $\alpha, \beta \in R(\Sigma, x, y)$ , além disso  $\alpha$  e  $\beta$  devem pertencer a mesma componente conexa por caminhos de  $R(\Sigma, x, y)$ .*

Podemos dizer que esse tipo de homotopia é mais rígida (porém, mais rica) que a usual, uma vez que as curvas intermediárias da homotopia são as trajetórias e, portanto, estão ligadas a dinâmica. Por definição, duas trajetórias monotonicamente homotópicas são também homotópicas no sentido usual da palavra. Evidentemente, a recíproca não é válida como veremos na seção 2.1.

De modo análogo ao caso clássico, podemos verificar que a homotopia monotônica

define uma relação de equivalência. Assim, fixando uma condição inicial  $x \in M$ , temos o conjunto das classes de equivalência das trajetórias em  $R(\Sigma, x)$  que será representado por

$$\Gamma(\Sigma, x) = R(\Sigma, x) / \simeq_m .$$

Além disso, definimos sobre tal conjunto a projeção canônica  $\pi : R(\Sigma, x) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x)$  que associa para cada trajetória  $\alpha$  a sua classe de homotopia monotônica  $[\alpha]_m$ .

As próximas proposições são resultados semelhantes aos que já temos para a homotopia clássica e podem ser provados diretamente a partir da definição.

**Proposição 2.2.** *Sejam  $\alpha_1, \alpha_2 \in R(\Sigma, x, y)$  e  $\beta_1, \beta_2 \in R(\Sigma, y, z)$  com  $x, y, z \in M$ . Se  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$  e  $\beta_1 \simeq \beta_2$ , então  $\beta_1 * \alpha_1 \simeq_m \beta_2 * \alpha_2$ .*

**Demonstração.** Por hipótese, existem homotopias  $f_t$  entre  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , e  $g_t$  entre  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . Logo a concatenação das homotopias  $h_t = g_t * f_t$  define a homotopia desejada entre  $\beta_1 * \alpha_1$  e  $\beta_2 * \alpha_2$ .  $\square$

Dada uma trajetória  $\alpha$  do sistema  $\Sigma$  denotamos por  $\alpha^-$  a trajetória obtida de  $\alpha$  revertendo o tempo. Provamos anteriormente que se  $\alpha \in R(\Sigma, x, y)$  então  $\alpha^- \in R(\Sigma, y, x)$ .

**Proposição 2.3.** *Seja  $\alpha_1, \alpha_2 \in R(\Sigma, x, y)$  tal que  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$ . Então  $\alpha_1^- \simeq_m \alpha_2^-$ , para o sistema  $-\Sigma$ .*

**Demonstração.** Como  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$  existe uma aplicação contínua  $f_t : [0, 1] \rightarrow R(\Sigma, x, y)$  tal que  $f_0 = \alpha_1$  e  $f_1 = \alpha_2$ . Além disso, para cada  $t$ , associado a trajetória regular  $f_t$  existe um controle regular  $u_t \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$ . Pela proposição 1.18, o controle  $-u_t \in \mathcal{R}_{-\Sigma}(y)$  e  $\alpha_1^- = \text{trj}_y(-u_0), \alpha_2^- = \text{trj}_y(-u_1) \in R(-\Sigma, y, x)$ . Desse modo,  $f_{-t} = \text{trj}_y(-u_t)$  é a homotopia monotônica desejada entre  $\alpha_1^-$  e  $\alpha_2^-$ .  $\square$

Com esses resultados verificamos que a homotopia monotônica é preservada pelas operações de concatenação e reversão de tempo.

## 2.1 Um Exemplo

Apresentaremos um exemplo de um sistema  $\Sigma$  que admite trajetórias homotópicas mas não no sentido monotônico.

Sejam  $M = S^2$  e  $\Sigma = \langle X, Y \rangle$ , o cone gerado pelos campos vetoriais  $X$  e  $Y$  que são definidos pelas rotações em torno dos eixos  $z$  e  $y$ , respectivamente. Note que,  $\Sigma$  não é simétrico, pois a rotação é permitida apenas em uma direção. Além disso, para todo  $x \in S^2$  temos  $\mathcal{A}_\Sigma(x) = S^2$ , isto é, temos controlabilidade e a condição do posto é satisfeita.

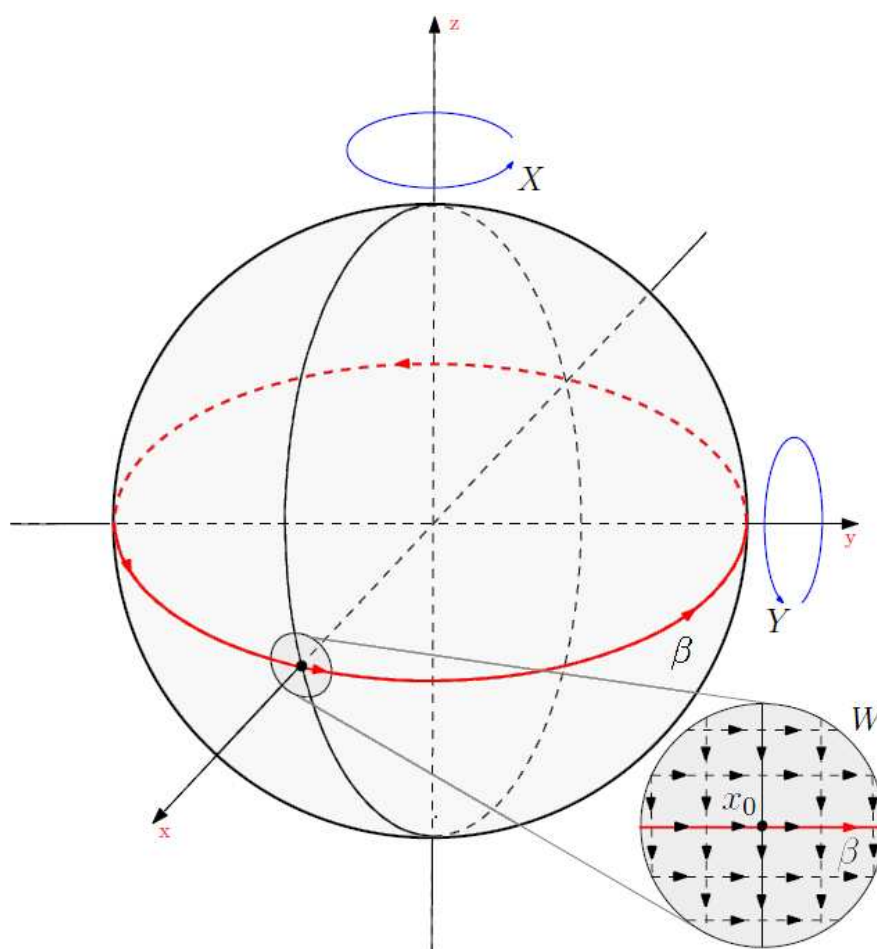


Figura 2.1: Contra-exemplo que homotopia clássica não implica a homotopia monotônica.

Fixando  $x_0 = (1, 0, 0) \in S^2$ , pode-se formar usando tempo suficientemente grande uma trajetória fechada  $\beta$  (laço) baseada em  $x_0$  que pode ser contraída ao seu ponto base. Pois a esfera é simplesmente conexa. Suponha que a contração seja monotônica.

Seja  $W$  uma vizinhança em  $S^2$  de  $x_0$  suficientemente pequena (isto é, fixando um tempo pequeno). Pela hipótese, existe uma trajetória regular fechada em  $x_0$  contida em  $W$ , o que é uma contradição pois as trajetórias de  $\Sigma$  são abertas. Portanto,  $\beta$  não é monotonicamente homotópica a um ponto.

Já que as duas homotopias não coincidem os recobrimentos clássico e monotônico são diferentes um do outro. Consequentemente, o recobrimento monotônico de  $\Sigma$  sobre  $S^2$  é diferente de própria  $S^2$ .

## 2.2 Construção da Variedade de Recobrimento Universal Clássica

Os detalhes enunciados a seguir foram tomados de [1].

Sejam  $M$  uma variedade diferenciável conexa (e portanto, conexa por caminhos) e  $x_0 \in M$  fixo, denote por  $\widetilde{M}$  o conjunto de classes de homotopia por caminhos  $[c]$ , com  $c : [0, 1] \rightarrow M$ ,  $c(0) = x_0$  e mantendo fixo os pontos finais.

Defina  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  por  $p([c]) = c(1)$ , onde  $[c]$  é a classe de homotopia (usual) de  $c$ . Tal aplicação é denominada *projeção terminal*. Segue pela teoria clássica que:

1.  $p$  é sobrejetor (pois  $M$  é conexa por caminhos);
2. Dado um conjunto aberto  $U$  em  $M$ , o conjunto

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, U_{[c]} \mid c : [0, 1] \rightarrow M, c(0) = x_0 \text{ e } U \subset M \text{ aberto}\},$$

onde  $U_{[c]} = \{[c * d] \mid d \text{ é um caminho em } U \text{ começando em } c(1)\}$ , define uma base para uma topologia em  $\widetilde{M}$ . Mais ainda,  $p$  é contínua e  $\widetilde{M}$  é de Hausdorff enquanto  $M$  também o é;

3.  $\widetilde{M}$  é conexa por caminhos. De fato, um caminho contínuo  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$  tal que  $\varphi(0) = [c]$  e  $\varphi(1) = [d]$  pode ser definido como

$$\varphi(s) = \begin{cases} [c_s], & s \in [0, 1/2] \\ [d_s] & s \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (2.2.1)$$

onde  $c_s(t) = c((1 - 2s)t)$  e  $d_s(t) = ((2s - 1)t)$ ;

4.  $p$  é uma aplicação aberta. Pois, se  $x \in p(U_{[c]})$  então o conjunto de pontos em  $U$  que podem ser ligados a  $x$  através de caminhos em  $U$  é aberto em  $M$  e está contido em  $p(U_{[c]})$ ;
5.  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  é uma aplicação de recobrimento. Basta usar o item 4. De fato, seja  $U$  um domínio contrátil de cartas de  $M$ . Segue que

$$p^{-1}(U) = \bigcup U_{[c]},$$

onde a união é tomada sobre todos os caminhos  $c$  tais que  $p([c]) = x$ , com  $x \in U$  fixo;

6.  $\widetilde{M}$  é simplesmente conexa;
7. Seja  $(U, \varphi)$  uma carta local em  $M$  cujo domínio é tal que  $p^{-1}(U)$  é a união disjunta de abertos em  $\widetilde{M}$  cada um difeomorfo a  $U$ . A estrutura de variedade em  $\widetilde{M}$  pode ser construída através da aplicação  $\psi : V \rightarrow E$  ( $E$  um espaço de Banach) definida por  $\psi = \varphi \circ p|_V$ . Segue ainda que  $\widetilde{M}$  é localmente difeomorfo a  $M$ .

Nosso objetivo é estudar que tipo de espaço de recobrimento a homotopia monotônica nos proporciona e quais os resultados da homotopia clássica que possuem o seu análogo para a homotopia monotônica. Isto será abordado no próximo capítulo.



## Estrutura de Variedade em $\Gamma(\Sigma, x_0)$

### 3.1 Sistema de Cartas Locais

Como veremos no capítulo 4, quando trabalhamos com difeomorfismos locais sobrejetores entre variedades diferenciáveis é possível fazermos o levantamento de trajetórias de um sistema de controle. Desse modo, iremos construir neste capítulo uma estrutura de variedade diferenciável no espaço  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  de classes de homotopia monotônica das trajetórias regulares. A diferenciabilidade de interesse é a de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Além disso, assumimos que  $\Sigma$  satisfaz a condição do posto 1.1.1. A ideia é utilizar o teorema 1.13 da função implícita e a aplicação avaliação 1.2.1 em tal processo. Assim, o objetivo central desse capítulo é demonstrar o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** *O espaço das classes de homotopia monotônica  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  tem uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão  $n = \dim M$ . A aplicação ponto final*

$$\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) \subset M, \quad [\gamma]_m \mapsto \gamma(1),$$

*é um difeomorfismo local.*

A aplicação ponto final  $\varepsilon$  é o análogo da aplicação de recobrimento clássico  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ , definida por  $p([c]) = c(1)$  como vimos anteriormente. Definiremos a estrutura de variedade em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  através da aplicação avaliação  $e_{x_0}$  e da proposição a seguir.



**Proposição 3.2.** *Seja  $X$  um conjunto e  $\phi_i : W_i \rightarrow X$  uma coleção de aplicações onde  $W_i$  são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que:*

1. *Cada  $\phi_i$  é uma bijeção entre  $W_i$  e sua imagem;*
2.  $X = \bigcup_i \phi_i(W_i)$ ;
3. *Se  $i, j$  são tal que  $C_{ij} = \phi_i(W_i) \cap \phi_j(W_j) \neq \emptyset$ , então  $\phi_i^{-1}(C_{ij}) \subset W_i$  é um aberto e a aplicação  $\phi_j^{-1} \circ \phi_i : \phi_i^{-1}(C_{ij}) \rightarrow W_j$  é suave.*

*Então  $(W_i, \phi_i)$  defini um atlas para uma única estrutura de variedade em  $X$ . Esta estrutura carrega implicitamente uma topologia em  $X$ .*

**Demonstração do Teorema 3.1.** Como o ponto  $x_0$  está fixo, para simplificar a notação iremos suprimir o subscrito e utilizar somente  $e$ ,  $\text{trj}$ , etc. Agora, tome  $x = e(u)$  o ponto final de uma trajetória regular definida por algum controle regular  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$ . Por definição, a derivada

$$(de)_u : T_u\mathcal{U} \longrightarrow T_{e(u)}M$$

é sobrejetora, ou seja, o posto de  $de_u$  é igual a  $\dim T_{e(u)}M = \dim M = n$ . Tal fato, acarreta que  $\ker(de_u)$  é um subespaço fechado que admite um completamento em  $\mathcal{E}$ .

Denotemos por  $E_1 = \ker(de_u)$  e por  $E_2$  seu completamento de modo que  $\mathcal{E} = E_1 \oplus E_2$ . Assim, a aplicação  $e : \text{int } \mathcal{U} \rightarrow M$  é diferenciável e  $\text{int } \mathcal{U} \subset E_1 \oplus E_2$ . Analisando as derivadas parciais com respeito aos subespaços  $E_1$  e  $E_2$ , temos

$$D_1e_u(v_1) = de_u(v_1, 0) = 0, \quad \forall v_1 \in E_1.$$

Por outro lado, seja  $v_2 \in E_2$  tal que  $D_2e_u(v_2) = 0$  então necessariamente temos  $v_2 = 0$ . Pois,  $\forall v_2 \in E_2$  temos  $D_2e_u(v_2) = de_u(0, v_2)$  e o subespaço  $E_1 = \ker(de_u)$ , uma vez que  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$  temos  $D_2e_u(v_2) = 0$  se, e somente se,  $v_2 = 0$ . Tal fato nos garante que a aplicação  $D_2e_u$  é injetora e sendo

$$de_u(v_1, v_2) = D_1e_u(v_1) + D_2e_u(v_2) = D_2e_u(v_2).$$

Segue que,  $D_2e_u$  é sobrejetora também. Como  $T_{e(u)}M$  é isomorfo ao  $\mathbb{R}^n$  e a derivada  $D_2e_u : E_2 \rightarrow T_{e(u)}M \simeq \mathbb{R}^n$  é um isomorfismo, pelo teorema 1.13 da função implícita que existem abertos  $V \subset \ker(de_u)$ ,  $W \subset \mathbb{R}^n$ ,  $U \subset \mathcal{E}$  e um difeomorfismo  $g : V \times W \rightarrow U$  tal que para todo  $(x, w) \in V \times W$  temos

$$e(g(x, w)) = w.$$

Utilizando o difeomorfismo  $V \times W \xrightarrow{g} U$ , identificamos as vizinhanças  $U$  em  $\mathcal{E}$  com  $V \times W$ . Afim de fixar a ideia, suponha que  $0 \in V$  e  $u$  é identificado com um ponto da faixa  $\{0\} \times W$ , que por sua vez é identificado com  $W$ . Tais relações nos permitem olhar  $W$  ora como uma subvariedade  $n$ -dimensional de  $U$  (quando identificado com  $\{0\} \times W$ ), ora como um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que  $W$  é uma seção de  $e$  em  $u$ . Como  $u \in \text{int } \mathcal{U}$ , podemos reduzir o aberto  $U$  de modo que  $U \subset \text{int } \mathcal{U}$ . Além disso, pelo corolário 1.14 podemos afirmar que todo  $v \in U$  é regular.

Dada uma seção  $W$  de  $e$  em  $u$ , a aplicação  $\text{trj} : W \rightarrow R(\Sigma, x_0)$ , que associa para cada controle  $v \in W$  sua respectiva trajetória, é contínua. Além disso, a aplicação  $\text{trj}|_W$  é injetora, já que por construção os pontos finais das trajetórias  $\text{trj}(v_1)$  e  $\text{trj}(v_2)$  (isto é,  $e(v_1)$  e  $e(v_2)$ , respectivamente) são diferentes quando os controles  $v_1, v_2 \in W$  são diferentes.

Sendo  $\pi : R(\Sigma, x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  a projeção canônica, a composição de  $\text{trj}$  com  $\pi$  gera uma aplicação injetora

$$\psi = \pi \circ \text{trj} : W \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0), \quad (3.1.1)$$

e, portanto, uma bijeção sobre sua imagem.

Mostremos que a coleção das aplicações bijetoras  $\psi = \pi \circ \text{trj} : W \rightarrow \psi(W) \subset \Gamma(\Sigma, x_0)$ , com  $W$  percorrendo as seções de todos os controles regulares  $u \in \mathcal{R}(x_0)$ , definem um atlas para uma estrutura diferenciável em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

Pela proposição 3.2 ainda falta verificarmos duas condições:

1. A imagem  $\psi(W)$  cobre  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ ;
2. As aplicações transições  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$  são diferenciáveis e tem domínios abertos.

O primeiro item segue pela própria definição de  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  como conjunto de classes de equivalência das trajetórias regulares, uma vez que qualquer classe em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  pertence a algum  $\psi(W)$ .

Para a segunda afirmação, considere as cartas  $\{\psi_i(W_i), \psi_i\}_{i=1,2}$  tais que

$$C = \psi_1(W_1) \cap \psi_2(W_2) \neq \emptyset.$$

Seja  $\xi \in C$  e  $v_i \in W_i$  tal que  $\psi_i(v_i) = \xi$ . Vendo os abertos  $W_i$  como subconjuntos de  $\text{int } \mathcal{U}$  temos por definição que as trajetórias  $\text{trj}(v_i)$  são homotópicas monotonicamente, o que implica que elas possuem o mesmo ponto final  $x \in M$ .

Denote por  $e_i, i = 1, 2$ , a restrição  $e|_{W_i}$ . Como  $e_i : W_i \rightarrow e_i(W_i) \subset M$  é difeomorfismo, podemos reduzir ambos os abertos  $W_i$  e supor que existe um aberto  $N \subset M$  de modo que ambas  $e_i : W_i \rightarrow N$  sejam difeomorfismos. Observe a figura abaixo.

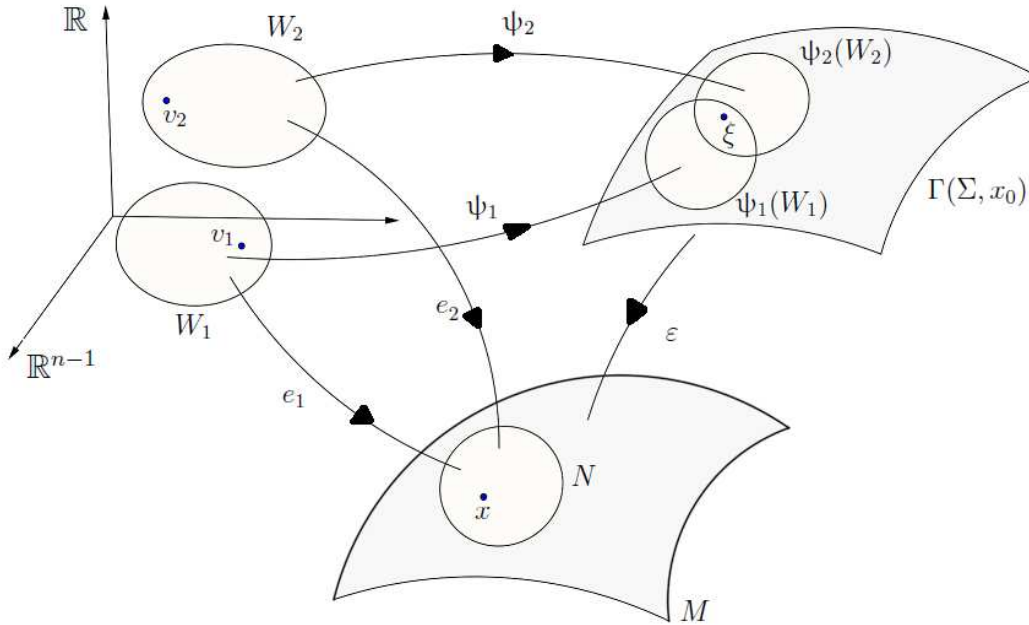


Figura 3.1: Diagrama entre as aplicações  $e_i$  e  $\psi_i$ .

Desse modo, afirmamos que  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1 = e_2^{-1} \circ e_1$ . De fato, dado  $v_1 \in \psi_1^{-1}(C) \subset W_1$ , temos  $\psi_1(v_1)$  é a classe de homotopia monotônica da  $\text{trj}(v_1)$ , e  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1(v_1) = v_2 \in W_2$  onde  $\text{trj}(v_2) \simeq_m \text{trj}(v_1)$ . Em particular, os pontos finais das trajetórias  $\text{trj}(v_1)$  e  $\text{trj}(v_2)$  coincidem, isto é,  $e(v_1) = e(v_2)$  e portanto  $v_2 = e_2^{-1} \circ e_1(v_1)$ . Desse modo, para todo

$v_1 \in \psi_1^{-1}(C)$  temos

$$\psi_2^{-1} \circ \psi_1(v_1) = e_2^{-1} \circ e_1(v_1).$$

Portanto,  $\psi_2^{-1} \circ \psi_1 = e_2^{-1} \circ e_1$ , provando a diferenciabilidade das aplicações de transição.

Isso conclui a construção da estrutura de variedade diferenciável em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Para terminar a demonstração do teorema falta ainda mostrarmos que  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  é um difeomorfismo local. Para isso, tome uma carta local  $\psi : W \rightarrow \psi(W)$  da estrutura de variedade diferenciável construída. Logo, temos a seguinte composição

$$\psi(W) \subset \Gamma(\Sigma, x_0) \xrightarrow{\psi^{-1}} W \xrightarrow{e|_W} N \subset M.$$

Onde localmente  $\varepsilon = (e|_W) \circ \psi^{-1}$ . Desse modo,  $\varepsilon$  é um difeomorfismo entre os abertos  $\psi(W)$  e  $N$ . Concluindo a prova do teorema 3.1.

□

## 3.2 Topologia em $\Gamma(\Sigma, x_0)$

Ao munir  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  com uma estrutura de variedade acabamos induzindo nele uma topologia de variedade. A qual tem como base os conjuntos  $\{\psi(W)\}$  que são difeomorfos aos abertos do  $\mathbb{R}^n$ . No entanto, naturalmente o espaço  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é munido com a topologia quociente. Nesta seção, além de verificar as propriedades topológicas que faltam para que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  seja uma variedade diferenciável suave, queremos exibir a relação entre tais topologias.

O conjunto dos controles regulares  $\mathcal{R}_\Sigma(x_0)$  pode ser munido tanto com a topologia forte, induzida pela norma, quanto com a topologia fraca\*. A seguir, estabelecemos a continuidade da aplicação  $\tau = \pi \circ \text{trj} : \mathcal{R}_\Sigma(x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  com respeito a ambas as topologias.

**Proposição 3.3.** *A aplicação  $\tau$  é contínua com respeito a topologia fraca\*, consequentemente com respeito a topologia forte. Além disso,  $\tau$  é aberta com respeito a topologia forte, e portanto com respeito a topologia fraca\*.*

**Demonstração.** Um conjunto compacto na topologia fraca\* é limitado. Como a dimensão de  $E$  é finita, vale a continuidade localmente uniforme de Lipschitz para os valores dos controles em compactos fraco\* de  $\mathcal{E} = L_\infty(\mathbb{R}, E)$ . Pela desigualdade de Gronwall, a aplicação  $\text{trj}$  é contínua do espaço de controles com a topologia fraca\* no espaço das trajetórias com a topologia da convergência uniforme.

Sabemos que a aplicação avaliação  $e : \mathcal{R}_\Sigma(x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  é contínua com respeito a topologia forte e, em particular, com respeito a topologia fraca\*. Além disso, a aplicação ponto final  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  é um difeomorfismo local pelo teorema 3.1. Desse modo, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_\Sigma(x_0) & \xrightarrow{\tau} & \Gamma(\Sigma, x_0) \\ & \searrow e & \downarrow \varepsilon \\ & & \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) \end{array}$$

Então  $e = \varepsilon \circ \tau$ , o que nos permite afirmar que a aplicação  $\tau$  é contínua por que localmente temos  $\tau = \varepsilon^{-1} \circ e$ , onde  $\varepsilon^{-1}$  é a inversa local de  $\varepsilon$ .

O fato de  $\tau$  ser uma aplicação aberta segue da construção das cartas através do teorema da função implícita. Usando as mesmas notações nas cartas, o domínio de  $\tau$  é localmente um produto de abertos, isto é, dado  $U \subset \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$  temos  $U \simeq V \times W$  e a restrição  $e|_U : V \times W \rightarrow W$  é uma projeção. Portanto,  $\tau(U) = (\varepsilon^{-1} \circ e)(U) = \varepsilon^{-1}(W)$  que é um aberto em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  uma vez que  $\varepsilon^{-1}$  é aberta. □

Sendo  $R(\Sigma, x_0)$  um subconjunto de  $T(\Sigma, x_0)$ , mostramos a seguir que a função projeção  $\pi : R(\Sigma, x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  também é contínua e aberta com respeito as topologias  $\mathcal{C}^0$  e  $\mathcal{C}^1$ .

**Proposição 3.4.** *A projeção  $\pi : R(\Sigma, x_0) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  é contínua com respeito a topologia  $\mathcal{C}^0$  e, portanto, com respeito a topologia  $\mathcal{C}^1$ . Também,  $\pi$  é aberta com respeito a topologia  $\mathcal{C}^1$ , consequentemente com respeito a topologia  $\mathcal{C}^0$ .*

**Demonstração.** Para verificar que  $\pi$  é aberta recordemos a proposição 1.11, que nos diz que a aplicação  $\text{trj}$  é aberta com respeito a topologia  $\mathcal{C}^1$ . Desse modo, temos o seguinte

diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_\Sigma(x_0) & \xrightarrow{\text{trj}} & R(\Sigma, x_0) \\ & \searrow \tau & \downarrow \pi \\ & & \Gamma(\Sigma, x_0) \end{array}$$

Sendo  $\tau = \pi \circ \text{trj}$  e  $\tau$  aberta, temos que  $\pi$  é aberta com respeito a topologia  $\mathcal{C}^1$  e consequentemente com respeito a topologia mais fraca  $\mathcal{C}^0$ . Por esse mesmo diagrama segue a continuidade de  $\pi$ .  $\square$

O conjunto  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é munido com a topologia quociente onde  $A \subset \Gamma(\Sigma, x_0)$  é aberto se, e somente se,  $\pi^{-1}(A) \subset R(\Sigma, x_0)$  é aberto em relação a topologia  $\mathcal{C}^1$ . No entanto,  $\pi$  é continua e aberta com respeito a topologia da variedade em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Logo, podemos concluir que a topologia quociente e a topologia da variedade coincidem em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

Para verificar que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é uma variedade diferenciável ainda falta provarmos a propriedade de Hausdorff. Para isso, utilizaremos o seguinte lema conhecido.

**Lema 3.5.** *Sejam  $L$  e  $N$  variedades diferenciáveis e  $f : L \rightarrow N$  um difeomorfismo local. Então  $L$  é Hausdorff se  $N$  é Hausdorff.*

**Demonstração.** Sejam  $x, y \in L$ , como  $x \neq y$ . Utilizando a aplicação  $f$  temos duas possibilidades:

1. Se  $f(x) \neq f(y)$  podemos tomar abertos  $U_1$  e  $U_2$  tais que  $f(x) \in U_1$ ,  $f(y) \in U_2$  e  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Assim,  $x \in f^{-1}(U_1)$  e  $y \in f^{-1}(U_2)$  que são abertos disjuntos, isto é, separam  $x$  de  $y$ .
2. Caso  $f(x) = f(y)$ , usando o fato que  $L$  é localmente euclidiano é suficiente mostrar que existe uma vizinhança  $V$  de  $y$  tal que  $x \notin \bar{V}$ . Para a escolha de  $V \ni y$ , podemos tomá-lo de modo que  $f : V \rightarrow f(V)$  seja um difeomorfismo. Suponha que exista uma sequência  $(x_k)$  em  $V$  tal que  $x_k \rightarrow x$ . Pela continuidade da  $f$  temos  $f(x_k) \rightarrow f(x) = f(y)$ . Porém,  $f|_V$  é um difeomorfismo o que implica que  $x_k \rightarrow y$ , contradizendo  $x \neq y$ . Portanto,  $x \notin \bar{V}$ .

$\square$

**Proposição 3.6.** *A topologia da variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é paracompacta e Hausdorff.*

**Demonstração.** A prova que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é Hausdorff segue do fato que a aplicação ponto final  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  é um difeomorfismo e pelo lema anterior.

Provemos agora a paracompacidade. Sabemos que a bola unitária no espaço  $\mathcal{E}$  dotado com a topologia fraco\* é compacta e metrizável. O mesmo vale para a sua interseção com  $\mathcal{U}$ , o que garante que  $\mathcal{U}$  é separável. Supondo que a diferencial  $(de)_u$  tem posto máximo, então existem escalares  $w_1, \dots, w_n$  tais que

$$de_u(w_1), \dots, de_u(w_n)$$

são linearmente independentes. Então para toda sequência  $(u_k)$  convergindo no sentido fraco\* para  $u$  e para  $k$  suficientemente grande os vetores

$$de_{u_k}(w_1), \dots, de_{u_k}(w_n)$$

são linearmente independentes. Desse modo, para todo  $v \in \mathcal{U}$  em uma vizinhança fraco\* de um controle regular, a derivada é sobrejetiva. Em particular, existe um subconjunto enumerável de controles regulares  $(u_k)$  de  $\text{int } \mathcal{U}$  aproximando todo controle regular.

Pela proposição 3.3 a aplicação  $\tau$  é contínua com respeito a topologia fraco\*. Então a imagem contínua  $\{\tau(u_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  é também densa. Como variedades separáveis são paracompactas, segue que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é paracompacto.

□

---

# Levantamentos

---

## 4.1 Difeomorfismo Local vs. Aplicação de Recobrimento

Uma vez que estamos trabalhando com estruturas que possuem diferenciabilidade, para compreender melhor as propriedades da homotopia monotônica, provaremos alguns resultados sobre levantamento de caminhos através de difeomorfismos locais entre variedades. Tais resultados serão fundamentais para o restante do nosso trabalho.

**Definição 4.1.** *Sejam  $L$  e  $N$  variedades diferenciáveis, um difeomorfismo local é uma aplicação diferenciável  $f : N \rightarrow L$  tal que  $df_x$  é bijetora para todo  $x \in N$ . Equivalentemente, para todo  $x \in N$  existem vizinhanças  $V$  de  $x$  e  $U$  de  $f(x)$  tal que  $f$  é um difeomorfismo entre  $V$  e  $U$ .*

Uma classe importante de difeomorfismos locais são os recobrimentos diferenciáveis que gozam de certas propriedades as quais os difeomorfismos locais, em geral, não possuem. Desejamos obter levantamentos contínuos a  $L$  de aplicações com valores em  $N$ . Porém nem sempre é possível encontrar tais levantamentos, como vemos no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.2.** *Considere a restrição do recobrimento diferenciável  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  dado por  $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  ao intervalo  $(0, \frac{3}{2})$ . A aplicação  $p|_{(0, \frac{3}{2})}$  é um difeomorfismo local, porém falha em ser recobrimento no fato de não conseguir levantar uma curva que dê duas voltas em  $S^1$  com ponto base  $b = (1, 0)$ , como na curva  $h$  da figura a seguir.*



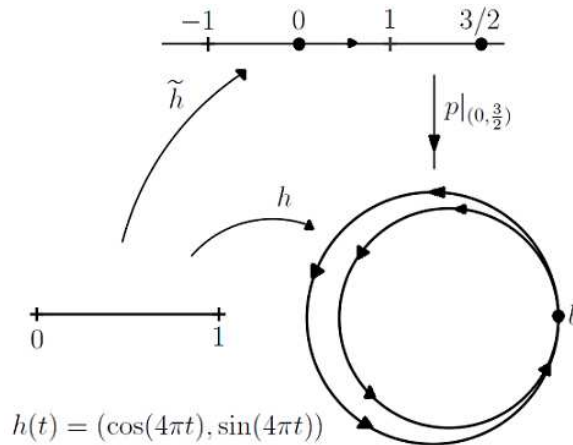


Figura 4.1: Em geral, um difeomorfismo local não levanta caminhos.

Os lemas seguintes apresentam condições para que difeomorfismos locais sobrejetores possuam a propriedade local de levantamento de caminhos e a continuidade do levantamento de homotopias.

**Lema 4.3.** *Seja  $f : L \rightarrow N$  um difeomorfismo local sobrejetivo e  $I$  um espaço topológico. Tome  $\alpha : I \rightarrow N$  uma aplicação contínua,  $t_0 \in I$  e  $y \in L$  tal que  $f(y) = \alpha(t_0)$ . Então existem uma vizinhança  $U$  de  $t_0$  e uma única aplicação  $\tilde{\alpha} : U \rightarrow L$  tal que  $f \circ \tilde{\alpha} = \alpha$  e  $\tilde{\alpha}(t_0) = y$ . Se  $I$  é conexo e  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2 : I \rightarrow L$  são tais que  $f \circ \tilde{\alpha}_i = \alpha$  com  $\tilde{\alpha}_i(t_0) = y$ , para  $i = 1, 2$ , então  $\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_2$ .*

**Demonstração.** Dado  $y \in L$ , seja  $V$  uma vizinhança de  $y$  tal que  $f|_V : V \rightarrow f(V)$  seja um difeomorfismo. Então  $f(V)$  é uma vizinhança de  $f(y) = \alpha(t_0)$  e conseqüentemente  $U = \alpha^{-1}(f(V))$  é uma vizinhança de  $t_0$ . Assim, podemos definir

$$\tilde{\alpha}(t) = (f|_V)^{-1} \circ \alpha(t)$$

onde  $(f|_V)^{-1}$  é a inversa local de  $f$ . As propriedades desse levantamento local seguem imediatamente da sua definição.

Pela continuidade das aplicações, unicidade local e o fato de  $L$  ser um espaço de Hausdorff o conjunto  $A = \{t \in I; \tilde{\alpha}_1(t) = \tilde{\alpha}_2(t)\}$  é aberto e fechado. Uma vez que,  $I$  é conexo temos  $I = A$  o que finaliza a prova.  $\square$

**Lema 4.4.** *Sejam  $f : L \rightarrow N$  um difeomorfismo local sobrejetor,  $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow N$  curvas tais que  $\alpha(0) = \beta(0)$  e  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow N$  continua com  $H(0, t) = \alpha(t)$ ,  $H(1, t) = \beta(t)$  e  $H(s, 0) = \alpha(0)$ . Tome  $y \in L$  tal que  $f(y) = \alpha(0)$  e suponha que para todo  $s \in [0, 1]$  a curva  $t \rightarrow H(s, t)$  se levanta para uma curva em  $L$ , digamos  $\tilde{H}(s, t)$ , tal que  $\tilde{H}(s, 0) = y$ , para todo  $s \in [0, 1]$ . Então a aplicação  $(s, t) \rightarrow \tilde{H}(s, t)$  é contínua e conseqüentemente uma homotopia entre  $\tilde{H}(0, t)$  e  $\tilde{H}(1, t)$ , levantamentos de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente.*

**Demonstração.** Tome um levantamento contínuo local de  $H$  em torno do ponto  $(0, 0)$ , utilizando a unicidade de levantamento de caminhos obtemos a continuidade de  $\tilde{H}$  em  $(0, 0)$ . Fixando  $s \in [0, 1]$  e seja  $m$  o supremo de  $t$  tal que  $H$  é contínua  $(s, \tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $\tilde{H}(s, m)$  tal que  $f : V \rightarrow f(V)$  é um difeomorfismo. Então em uma vizinhança  $U$  de  $(s, m)$ ,  $H$  se levanta continuamente para uma aplicação  $\tilde{H}_1$ , tendo imagem em  $V$ . Porém, para  $\tau$  suficientemente próximo de  $m$ ,  $\tilde{H}(s, \tau)$  pertence a  $V$  pela continuidade da aplicação  $\tau \rightarrow \tilde{H}(s, \tau)$ . Desse modo, pela continuidade de  $\tilde{H}$  em  $(s, t)$  segue que  $\tilde{H}(\sigma, \tau)$  pertence a  $V$  se  $(\sigma, \tau)$  é suficientemente próximo a  $(s, m)$ . Portanto, pela unicidade do levantamento das curvas  $\tau \rightarrow \tilde{H}(\sigma, \tau)$  concluímos que  $\tilde{H} = \tilde{H}_1$  sobre  $U$ . Isto implica que  $m = 1$ , concluindo a prova.  $\square$

Como consequência desse lema temos que curvas homotópicas se levantam a curvas com o mesmo ponto final, caso a homotopia entre elas se levante.

**Lema 4.5.** *Sejam  $\alpha, \beta$  como no lema anterior, além disso  $\alpha(1) = \beta(1)$  e  $H$  é uma homotopia que fixa os pontos finais. Então os levantamentos  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  começando em  $y$  de  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente, satisfazem  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ .*

**Demonstração.** De fato,  $\tilde{H}(s, 1)$  é uma função constante.  $\square$

Nos lemas anteriores assumimos a existência do levantamento  $\tilde{H}$  para mostrar sua continuidade. Em geral, não é possível fazer tal levantamento como vemos no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.6.** *Considere a aplicação  $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = z^3 - 3z$ . Para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ ,  $f'(z) \neq 0$ , o que pelo teorema da função inversa implica que  $f$  é um difeomorfismo local. De modo simples, obtemos que  $f$  é sobrejetor. Porém,  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$  não é*

simplesmente conexo e  $\mathbb{C}$  é simplesmente conexo, o que significa que existem homotopias em  $\mathbb{C}$  que não podem ser levantadas para  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ .

Como nosso interesse é sobre trajetórias mostraremos como realizar o levantamento para tal caso. Considere  $f : L \rightarrow N$  um difeomorfismo local e  $X$  um campo vetorial definido sobre a variedade  $N$ . Vamos definir  $\tilde{X}$  sobre  $L$  por

$$\tilde{X}(x) = d(f^{-1})(X(f(x))),$$

onde  $f^{-1}$  é a inversa local de  $f$  em torno de  $x$ , como na figura abaixo. Assim, a aplicação  $X \rightarrow \tilde{X}$  é injetora e  $f$  leva uma trajetória de  $\tilde{X}$  em uma trajetória de  $X$ . Por outro lado, se  $\alpha$  é uma trajetória de  $X$  e  $\tilde{\alpha}$  é uma curva em  $L$  tal que  $f(\tilde{\alpha}) = \alpha$  então  $\tilde{\alpha}$  é uma trajetória de  $\tilde{X}$ . Todavia, como na aplicação  $p|_{(0, \frac{3}{2})}$ , as trajetórias de  $X$  podem não ser inteiramente levantadas para trajetórias de  $\tilde{X}$ .

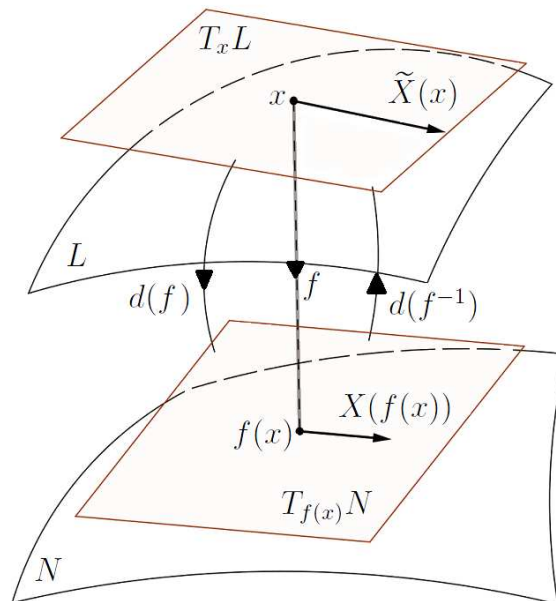


Figura 4.2: Levantamento do campo  $X$  para  $\tilde{X}$ .

Tomando o sistema de controle  $\Sigma$ , se levantarmos o espaço vetorial  $E$  para  $\tilde{E}$  obtemos um sistema de controle  $\tilde{\Sigma}$  em  $L$  tal que ambos  $\Sigma$  e  $E$  estão em bijeção com  $\tilde{\Sigma}$  e  $\tilde{E}$ , respectivamente. Devido a essa bijeção, as funções de controle de  $\Sigma$  são também as

funções de controle de  $\tilde{\Sigma}$ . Desse modo, usaremos o mesmo espaço de controle  $\mathcal{U}$  para ambos os sistemas. Dado  $u \in \mathcal{U}$  as trajetórias correspondentes de  $\tilde{\Sigma}$  são levadas nas trajetórias de  $\Sigma$ , ou seja, se  $f(y_0) = x_0$  então  $\text{trj}_{x_0}(u) = f \circ \widetilde{\text{trj}}_{y_0}(u)$ . Tal equivalência implica a seguinte afirmação.

**Proposição 4.7.** *Um controle  $u$  é regular em  $x \in L$  com respeito ao sistema  $\tilde{\Sigma}$  se, e somente se, é regular em  $f(x)$  como respeito ao sistema  $\Sigma$ .*

Para sistemas de controle relacionados por meio de difeomorfismos locais utilizaremos a seguinte terminologia.

**Definição 4.8.** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  sistemas de controle em  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Dizemos que,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é uma aplicação de controle entre  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  se  $f$  é um difeomorfismo local e  $df(\Sigma_1) = \Sigma_2$ . Caso  $f$  seja sobrejetora diremos que  $f$  é um recobrimento do controle.*

## 4.2 Levantamento de $\Sigma$ para $\Gamma(\Sigma, x_0)$

No capítulo anterior vimos que a aplicação ponto final

$$\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \longrightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0), \quad [\gamma]_m \longmapsto \gamma(1)$$

é um difeomorfismo local. Desse modo, a restrição do sistema  $\Sigma$  para  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  pode ser levantado para  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Denotaremos este sistema levantado por  $\widehat{\Sigma}$ . Para um campo vetorial  $X$  em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ , escreveremos  $\widehat{X}$  o campo levantado para  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Recordando que

$$\widehat{X}(y) = d(\varepsilon^{-1})(X(\varepsilon(y)))$$

para todo  $y \in \Gamma(\Sigma, x_0)$  e  $\varepsilon^{-1}$  é a inversa local em torno do ponto  $y \in M$ . Também, denotaremos por  $\widehat{\text{trj}}_y(u)$  a trajetória de  $\widehat{\Sigma}$  correspondente ao controle  $u$  começando no ponto  $y \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ .

Nosso objetivo com este capítulo é estudar o sistema  $\widehat{\Sigma}$  e estabelecer uma relação entre as suas propriedades e a homotopia monotônica das trajetórias de  $\Sigma$ . Um dos principais cuidados que devemos tomar em relação ao levantamento é com os seguintes fatos:

1. Em geral, o ponto  $x_0$  não pertence ao conjunto  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ ;
2. As trajetórias  $\text{trj}_{x_0}(u)$  podem não estar inteiramente contidas em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

Inicialmente veremos as relações entre os sistemas  $\Sigma$  e  $\widehat{\Sigma}$ . Para superar as dificuldades técnicas em 1 e 2 tomaremos posteriormente, para fim de levantamento,  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e uma trajetória a partir de  $z_0$  inteiramente contida em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

**Proposição 4.9.** *O sistema  $\widehat{\Sigma}$  é completo se o sistema  $\Sigma$  o for.*

**Demonstração.** Sejam  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ ,  $u \in \mathcal{U}$  e  $\widehat{\alpha} = \widehat{\text{trj}}_{y_0}(u)$ . Devemos verificar que  $\widehat{\alpha}$  é definido em todo intervalo  $[0, 1]$ . Para tanto, denote  $z_0 = \varepsilon(y_0) \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  e  $\alpha = \text{trj}_{z_0}(u)$  a trajetória de  $\Sigma$  começando em  $z_0$  associada ao controle  $u$ . Como assumimos que  $\Sigma$  é completo, a trajetória  $\alpha$  se estende por todo intervalo  $[0, 1]$ . Além disso, como vimos acima  $\widehat{\alpha}$  é um levantamento de  $\alpha$ . Assim, se verificarmos que  $\alpha$  se levanta completamente para  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ , a completude do sistema  $\widehat{\Sigma}$  segue do lema 4.3.

Desse modo, iremos construir explicitamente o levantamento de  $\alpha$ . Denote por  $\bar{\alpha}$  o caminho contínuo no espaço das trajetórias que é definido por

$$\bar{\alpha}(s)(t) = \alpha(st), \quad s, t \in [0, 1].$$

Assim para cada  $s \in [0, 1]$ ,  $\bar{\alpha}(s) = \alpha|_{[0, s]}$ . Agora considere  $\beta$  o representante da classe  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ . Logo,  $\beta(1) = \varepsilon(y_0) = z_0$ , o que nos permite efetuar a concatenação  $\bar{\alpha}(s) * \beta$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Pela proposição 1.17 a trajetória  $\bar{\alpha}(s) * \beta \in R(\Sigma, x_0)$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Tomando para cada  $s \in [0, 1]$  a classe  $[\bar{\alpha}(s) * \beta]_m$ , definimos a curva  $\widehat{\alpha}_1(s) = [\bar{\alpha}(s) * \beta]_m$  em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

O ponto final da trajetória  $\bar{\alpha}(s) * \beta$  é  $\alpha(s)$ . Desse modo, pela definição da aplicação avaliação temos  $\varepsilon([\bar{\alpha}(s) * \beta]_m) = \alpha(s)$  para todo  $s \in [0, 1]$ . Como  $\bar{\alpha}(0) * \beta = \beta$ , tem-se  $[\bar{\alpha}(0) * \beta]_m = y_0 = [\beta]_m$ . Portanto, pela unicidade do levantamento temos  $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}_1$  o único levantamento de  $\alpha$  começando em  $y_0$ . Observe a figura abaixo.  $\square$

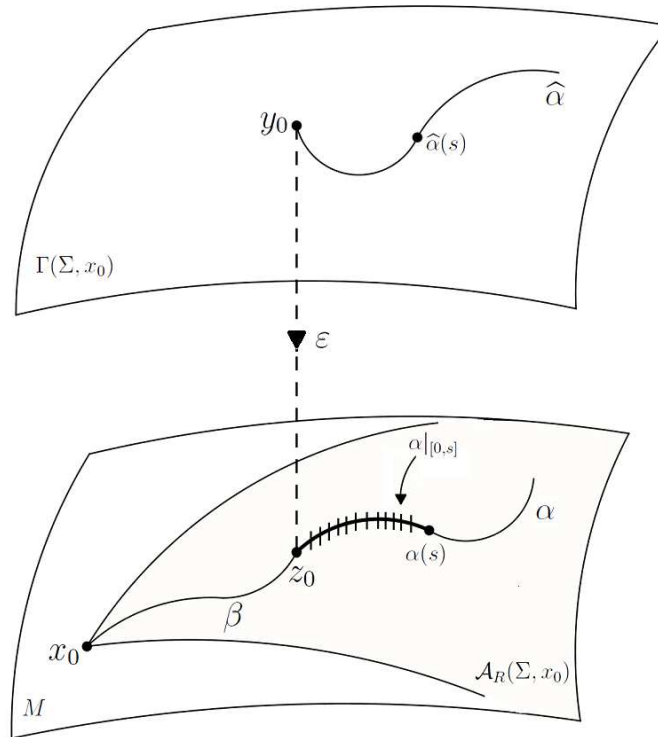


Figura 4.3: O levantamento  $\hat{\alpha}$  da trajetória  $\alpha$  pela aplicação  $\varepsilon$  começando em  $y_0$ .

Temos então o seguinte.

**Proposição 4.10.** *Seguindo as notações acima,  $\hat{\alpha}(s) = [\bar{\alpha}(s) * \beta]_m$ . Em particular, o ponto final de  $\hat{\alpha}$  é a classe de homotopia da concatenação  $\alpha * \beta$ , se  $\beta$  é o representante de  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ .*

Como veremos no decorrer do trabalho, a curva que foi construída durante a demonstração será uma importante ferramenta para a ideia de recobrimento do controle.

Na teoria de espaços de recobrimento temos o seguinte resultado: Duas curvas em um espaço  $M$  com os mesmos pontos iniciais e finais são homotópicas se, e somente se, seus levantamentos, para o espaço de recobrimento simplesmente conexo  $\tilde{M}$  a partir de um mesmo ponto inicial, possuem o mesmo ponto final. O que desejamos é provar um resultado semelhante no contexto da homotopia monotônica.

Como citamos anteriormente, existem complicações técnicas que impedem o levantamento imediato. O exemplo a seguir, exhibe um sistema cujas trajetórias (regulares ou não) a partir de  $x_0$  podem não estar inteiramente contidas em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

**Exemplo 4.11.** Seja  $\Sigma = \langle X, Y \rangle$  em  $\mathbb{R}^2$ , onde  $X = \frac{\partial}{\partial x}$  e  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$  são campos de vetores básicos. Então  $\mathcal{A}_R(\Sigma, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y > 0\}$  e a aplicação  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, 0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, 0)$  é um difeomorfismo. Observe que uma trajetória regular gerada por um controle constante por pedaços fica em algum período de tempo sobre um dos eixos coordenados.

Vamos superar esse problema do seguinte modo. Fixando  $x_0$  tome  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Iremos provar que duas trajetórias regulares a partir de  $z_0$  com o mesmo ponto final são monotonicamente homotópicas se, e somente se, seus levantamentos para  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  a partir de uma mesma classe  $y_0$  tem o mesmo ponto final.

Na realidade, verificamos algo mais forte que isso, obtemos que  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  é uma sub-variedade aberta da variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ , quando  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

**Lema 4.12.** Sejam  $\beta_1, \beta_2 \in R(\Sigma, x_0)$ , com o mesmo ponto final  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Tome  $\alpha$  uma trajetória de  $\Sigma$  começando em  $z_0$ . Se  $\alpha * \beta_1 \simeq_m \alpha * \beta_2$ , então  $\beta_1 \simeq_m \beta_2$ .

**Demonstração.** Suponha que  $\beta_1$  não seja monotonicamente homotópica a  $\beta_2$ , isto é,  $[\beta_1]_m \neq [\beta_2]_m$ . Para  $i = 1, 2$ , denote por  $\gamma_i$  o levantamento de  $\alpha$  começando no ponto  $[\beta_i]$ . Desse modo,  $\gamma_i = \widehat{\text{trj}}_{[\beta_i]}(u)$ , sendo  $u$  o controle que define  $\alpha$ .

Note que,  $\varepsilon \circ \gamma_i(t) = \alpha(t)$ , para todo  $t \in [0, 1]$ . Como  $[\beta_1]_m \neq [\beta_2]_m$  e  $[0, 1]$  é conexo, pelo lema 4.3 da unicidade de levantamento de caminhos os pontos finais das trajetórias  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são diferentes. Isto é um absurdo, pois pela proposição 4.10 o ponto final das trajetórias  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  é a classe  $[\alpha * \beta_i]_m$ ,  $i = 1, 2$ . Portanto,  $\beta_1 \simeq_m \beta_2$ .  $\square$

Fazendo a reversão no tempo obtemos uma relação análoga entre homotopia monotônica e concatenação.

**Corolário 4.13.** Seja  $\beta$  uma trajetória regular começando em  $x_0$  e tendo como seu ponto final  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Então duas trajetórias regulares  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tendo o mesmo ponto final são homotópicas monotonicamente se, e somente se,  $\alpha_1 * \beta \simeq_m \alpha_2 * \beta$ .

**Demonstração.** Por um lado, sendo  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$  pela proposição 2.2 segue imediatamente que  $\alpha_1 * \beta \simeq_m \alpha_2 * \beta$ . Agora, supondo que  $\alpha_1 * \beta \simeq_m \alpha_2 * \beta$  e considerando o sistema  $-\Sigma$  segue pelo lema anterior que  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são homotópicas monotonicamente.  $\square$

Utilizando esses resultados podemos relacionar, como havíamos mencionado, os espaços  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  e  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  para todo  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Para isso, fixemos uma trajetória regular  $\beta$  entre  $x_0$  e  $z_0$ . Desse modo, a aplicação concatenação leva uma trajetória  $\alpha \in R(\Sigma, z_0)$  na trajetória  $\alpha * \beta \in R(\Sigma, x_0)$ . Além disso, pelo corolário 4.13, se  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$  então  $\alpha_1 * \beta \simeq_m \alpha_2 * \beta$ .

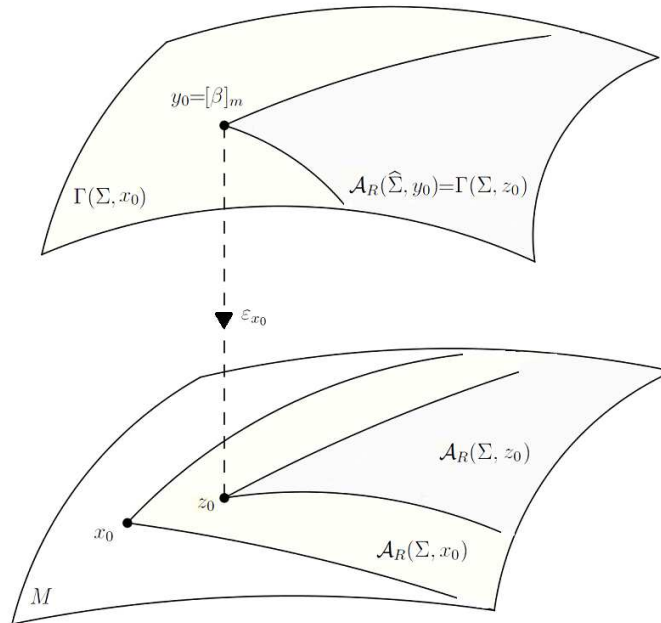
Portanto, temos a seguinte aplicação bem definida

$$I_\beta : \Gamma(\Sigma, z_0) \longrightarrow \Gamma(\Sigma, x_0), \quad [\alpha]_m \longmapsto I_\beta[\alpha]_m = [\alpha * \beta]_m$$

Note que, o mesmo corolário garante ainda a injetividade da aplicação  $I_\beta$ .

**Proposição 4.14.** *Com as condições acima sobre  $\beta$ , a imagem de  $I_\beta$  é o conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$  e  $I_\beta : \Gamma(\Sigma, z_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$  é um difeomorfismo sobre sua imagem. Além disso, se  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são trajetórias regulares de  $x_0$  para  $z_0$ , então  $I_{\beta_1} = I_{\beta_2}$  se, e somente se,  $\beta_1 \simeq_m \beta_2$ .*

**Demonstração.** Verificamos que o levantamento de trajetórias do sistema  $\Sigma$  são trajetórias do sistema  $\widehat{\Sigma}$ . Desse modo, a imagem de  $I_\beta$  está contida em  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$ . Como as trajetórias de  $\widehat{\Sigma}$  são projetadas em trajetórias de  $\Sigma$ , segue a outra inclusão. Sendo  $I_\beta$  injetora, a aplicação  $I_\beta : \Gamma(\Sigma, z_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, [\beta]_m)$  é uma bijeção.





Pela proposição 4.10,  $I_\beta[\alpha]$  é o ponto final do levantamento  $\hat{\alpha}$ , isto é,  $I_\beta[\alpha] = \hat{\alpha}(1)$ . Desse modo, a aplicação  $I_\beta$  pode ser representada localmente como  $\varepsilon_{x_0}^{-1} \circ \varepsilon_{z_0}$ , onde  $\varepsilon_{x_0}^{-1}$  é a inversa local de  $\varepsilon_{x_0} : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Portanto,  $I_\beta$  é diferenciável e sua diferencial é um isomorfismo em todo ponto, isto é,  $I_\beta$  é um difeomorfismo. A outra afirmação segue imediatamente do corolário 4.13.  $\square$

Como consequência dessa proposição, as trajetórias de  $\Sigma$  começando em  $z_0$  e tendo o mesmo ponto final são homotópicas monotonicamente se, e somente se, seus levantamentos tem o mesmo ponto final. Temos, portanto, o seguinte:

**Teorema 4.15.** *Sejam  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ ,  $y_0 \in \varepsilon_{x_0}^{-1}(z_0)$  e  $\alpha_1, \alpha_2$  trajetórias regulares de  $\Sigma$  começando em  $z_0$  e tendo o mesmo ponto final. Denote por  $\hat{\alpha}_1$  e  $\hat{\alpha}_2$  os respectivos levantamentos para  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  começando em  $y_0$ . Então  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$  se, e somente se,  $\hat{\alpha}_1$  e  $\hat{\alpha}_2$  tem o mesmo ponto.*

Agora estudaremos a homotopia monotônica para trajetórias na variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

**Proposição 4.16.** *Sejam  $\delta_1$  e  $\delta_2$  trajetórias de  $\hat{\Sigma}$  em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  tendo o mesmo ponto inicial  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$ . Então  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são monotonicamente homotópicas em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  se, e somente se, eles têm o mesmo ponto final.*

**Demonstração.** Considere as trajetórias de  $\Sigma$  sendo  $\alpha_i = \varepsilon(\delta_i)$ ,  $i = 1, 2$ , que tem o mesmo ponto final e inicial em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ , enquanto  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são seus respectivos levantamentos. Pelo teorema 4.15  $\alpha_1 \simeq_m \alpha_2$ , ou seja, existe uma homotopia por trajetórias  $h_t$  entre elas.

Para cada  $t$ , a correspondente trajetória  $h_t$  se levanta para uma trajetória  $\hat{h}_t$  de  $\hat{\Sigma}$  começando em  $y_0$ . Pelo lema 4.4 a aplicação  $\hat{h}_t$  é contínua. Além disso, pelo teorema 4.15 para cada  $t$  o ponto final de  $\hat{h}_t$  e de  $\delta_i$  coincidem. Portanto,  $\hat{h}_t$  é a homotopia entre  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .  $\square$

O resultado que acabamos de provar mostra que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é simplesmente conexo no sentido que trajetórias com o mesmo ponto inicial e final são monotonicamente homotópicas. Além disso, a construção de um recobrimento agora aplicado ao  $\hat{\Sigma}$  em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  com condições iniciais  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$  não gera novas variedades.

**Corolário 4.17.** *Para qualquer  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$  o espaço  $\Gamma(\widehat{\Sigma}, y_0)$  coincide com  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$  e, portanto, com  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  se  $z_0 = \varepsilon(y_0)$ .*

**Demonstração.** Note que, duas trajetórias regulares começando em  $y_0$  são monotonicamente homotópicas se, e somente se, possuem o mesmo ponto final. Pela proposição anterior, o difeomorfismo local  $\varepsilon : \Gamma(\widehat{\Sigma}, y_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$  é injetor, ou seja, um difeomorfismo sobre sua imagem. Utilizando a aplicação  $I_\beta$ , concluímos a demonstração.  $\square$

Para concluir o capítulo, discutimos a topologia sobre a homotopia monotônica. Relembramos que, duas trajetórias são homotópicas monotonicamente se pertencem a mesma componente conexa por caminhos de  $R(\Sigma, x, y)$ , que está munida com a topologia  $\mathcal{C}^1$ . Consequentemente, se duas trajetórias são  $\mathcal{C}^1$  monotonicamente homotópicas então são também  $\mathcal{C}^0$  monotonicamente homotópicas. Uma boa questão é saber quando vale a recíproca.

**Proposição 4.18.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  trajetórias regulares em  $R(\Sigma, x, z)$  e suponha que existe um caminho  $\xi$  em  $R(\Sigma, x, z)$  que liga  $\alpha$  e  $\beta$  e é  $\mathcal{C}^0$  contínuo. Então  $\alpha$  e  $\beta$  são  $\mathcal{C}^1$  homotópicas monotonicamente.*

**Demonstração.** Sejam  $x_0$  e  $x \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  tal que  $\Gamma(\Sigma, x)$  é equivalente a  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y)$ , para todo  $y \in \varepsilon_{x_0}^{-1}(x)$ . Definindo,  $H(s, t) = \xi(s)(t)$  segue do lema 4.4 que  $H$  se levanta para a homotopia  $\tilde{H}$  em  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y)$ , por que as curvas  $t \mapsto H(s, t)$  são trajetórias que são levantadas para  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y)$ .

Os levantamentos  $\widehat{\alpha}$  e  $\widehat{\beta}$ , começando em  $y$ , são  $\widehat{\alpha}(t) = \tilde{H}(0, t)$  e  $\widehat{\beta}(t) = \tilde{H}(1, t)$ . Como  $\tilde{H}$  é um levantamento de  $H$ , segue que  $\widehat{\alpha}$  e  $\widehat{\beta}$  tem o mesmo ponto final. Portanto, pelo teorema 4.15 são  $\mathcal{C}^1$  homotópicas monotonicamente.  $\square$



---

# Recobrimento Universal do Controle

---

## 5.1 Propriedade Universal de $\Gamma(\Sigma, x_0)$

No capítulo anterior mostramos que  $\varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  é uma aplicação de controle e  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é simplesmente conexo no sentido que duas trajetórias em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  que tem os mesmo pontos iniciais e finais são homotópicas monotonicamente.

No caso clássico, quando o recobrimento  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  é simplesmente conexo ele é dito universal, no sentido que para qualquer outro recobrimento de  $\pi : N \rightarrow M$  existe uma aplicação de recobrimento  $f : \widetilde{M} \rightarrow N$  tal que  $p = \pi \circ f$ . Isto é,  $\widetilde{M}$  recobre qualquer outro recobrimento. Assim, pretendemos construir uma propriedade análoga para o contexto do controle.

Consideremos um recobrimento do controle  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  entre um sistema  $\widetilde{\Sigma}$  em  $N$  e a restrição de  $\Sigma$  ao conjunto  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Nosso objetivo é mostrar a existência de uma aplicação do controle  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  entre os sistemas  $\widehat{\Sigma}$  e  $\widetilde{\Sigma}$ . Como o sistema  $\widetilde{\Sigma}$  pode não ser controlável, a aplicação  $f$  pode não ser sobrejetora e conseqüentemente um recobrimento do controle.

A construção da aplicação  $f$  é inspirada no caso clássico, veja o teorema 5.9 em [4], porém no presente contexto temos alguns obstáculos que devem ser superados. No caso clássico, a partir de um caminho  $\alpha$  iniciando em  $x_0$  obteríamos a aplicação  $f$  comparando seus levantamentos para as variedades  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  e  $N$ , respectivamente. O problema

desta construção está no fato que uma trajetória pode não estar inteiramente contida no conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

Para contornar este problema, inicialmente levantaremos as trajetórias a partir de  $z_0$ , para qualquer  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Desse modo, a aplicação  $f$  fica definida em  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  e depois estendemos esta aplicação para o conjunto  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ .

Iremos assumir que o sistema  $\tilde{\Sigma}$  em  $N$  é completo. Sobre esta condição, qualquer trajetória  $\alpha$  em  $\Sigma$  é levantada unicamente para uma trajetória  $\tilde{\alpha}$  com ponto inicial  $y_0$  fixado. De fato, se  $u$  é um controle que define  $\alpha$  então  $\tilde{\alpha} = \widetilde{\text{trj}}_{y_0}(u)$  é tal levantamento, onde  $\widetilde{\text{trj}}_{y_0}(u)$  denota a trajetória de  $\tilde{\Sigma}$  que corresponde a  $u$  começando em  $y_0$ . É de nosso interesse obter uma curva ligando  $x_0$  e  $z_0$  que esteja inteiramente contida em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  exceto possivelmente pelo ponto inicial  $x_0$ .

**Lema 5.1.** *Suponha que o sistema satisfaça a condição do posto 1.1.1 e, sejam  $x_0 \in M$  e  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Então existe uma seqüência  $(z_n)$  em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x_0$  e  $z_m \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z_n)$  para  $m < n$ .*

**Demonstração.** Construimos a seqüência indutivamente a partir de  $z_0$ . Tome uma seqüência de vizinhanças abertas  $U_n$ ,  $n \geq 1$ , de  $x_0$  tal que  $\{x_0\} = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ . Note que, isso é possível uma vez que  $M$  é métrico. Agora, definimos  $z_1 \in U_1 \cap \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  do seguinte modo: Escolha um controle regular  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x_0)$  tal que  $e_{x_0}(u) = z_0$ .

Revertendo o tempo, vemos que  $-u$  é um controle regular em  $z_0$  do sistema  $-\Sigma$ . Denotando por  $e_{z_0}^-(v) = \text{trj}_{z_0}(v)(1)$ , para  $v \in -\Sigma$ , pelo corolário 1.14 a aplicação  $e_{z_0}^-$  é localmente sobrejetora e, portanto a imagem  $\text{Im}(e_{z_0}^-)$  cobre uma vizinhança de  $x_0$ . Logo,

$$\mathcal{A}_R(-\Sigma, z_0) \cap U_1 \cap \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) \neq \emptyset.$$

Assim, qualquer  $z$  na interseção satisfaz o desejado, pois  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z_1)$  se  $z_1 \in \mathcal{A}_R(-\Sigma, z_0)$ . Procedendo por indução, definimos analogamente

$$z_{n+1} \in \mathcal{A}_R(-\Sigma, z_n) \cap U_{n+1} \cap \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0),$$

usando as trajetórias regulares de  $x_0$  para  $z_n$ . Em cada passo, temos  $z_n \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z_{n+1})$

implicando  $z_m \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z_n)$ , se  $m < n$ . Além disso, por construção  $z_n \rightarrow x_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

A sequência  $(z_n)$  construída nos permite ligar  $z_{n+1}$  e  $z_n$  com trajetórias  $\beta_n$  do sistema  $\Sigma$ . Cada  $\beta_n$  é definida no intervalo  $[0, 1]$ , porém podemos reparametrizar o tempo de modo que  $\beta_n$  esteja definida no intervalo  $[-n - 1, -n]$ . Concatenando sucessivamente essas trajetórias obtemos uma curva contínua  $\beta$  definida em  $(-\infty, 0]$  que está inteiramente contida no conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ .

**Lema 5.2.** *Considerando as notações e hipóteses acima, existe uma curva contínua  $\beta : (-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  tal que  $\beta(0) = z_0$ , cada pedaço  $\beta|_{[a,b]}$ ,  $a < b \leq 0$ , de  $\beta$  é uma reparametrização de uma trajetória de  $\Sigma$  e, existe uma sequência  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que  $\beta(t_n) \rightarrow x_0$ .*

Agora levantamos a curva  $\beta$  do lema para uma curva  $\widehat{\beta}$  em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Para evitar o problema de existência de tal levantamento, construímos  $\widehat{\beta}$  mergulhando  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$  para algum  $x_1$  tal que  $x_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$ . Pela proposição 4.14, a variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  é difeomorfa ao conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  se  $\widehat{x} \in \Gamma(\Sigma, x_1)$  é escolhido de modo que ele é projetado no ponto  $x_0$ . Assim, o lema acima se aplica, dando uma curva em  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  em vez de  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ .

**Lema 5.3.** *Seja  $\widehat{x} \in \Gamma(\Sigma, x_1)$  de modo que  $\varepsilon(\widehat{x}) = x_0$  e fixe  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0) = \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$ . Então existe uma curva contínua  $\widehat{\beta} : (-\infty] \rightarrow \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  tal que  $\widehat{\beta}(0) = y_0$ , cada pedaço  $\widehat{\beta}|_{[a,b]}$ , com  $a < b \leq 0$ , de  $\widehat{\beta}$  é uma reparametrização de uma trajetória de  $\widehat{\Sigma}$  e existe uma sequência  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que  $\widehat{\beta}(t_n) \rightarrow \widehat{x}$ .*

Começemos a construção da aplicação  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$ . Seja  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  um recobrimento do controle e fixe  $z_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ ,  $y_0 \in \varepsilon^{-1}\{z_0\}$  e  $w_0 \in \pi^{-1}\{z_0\}$ .

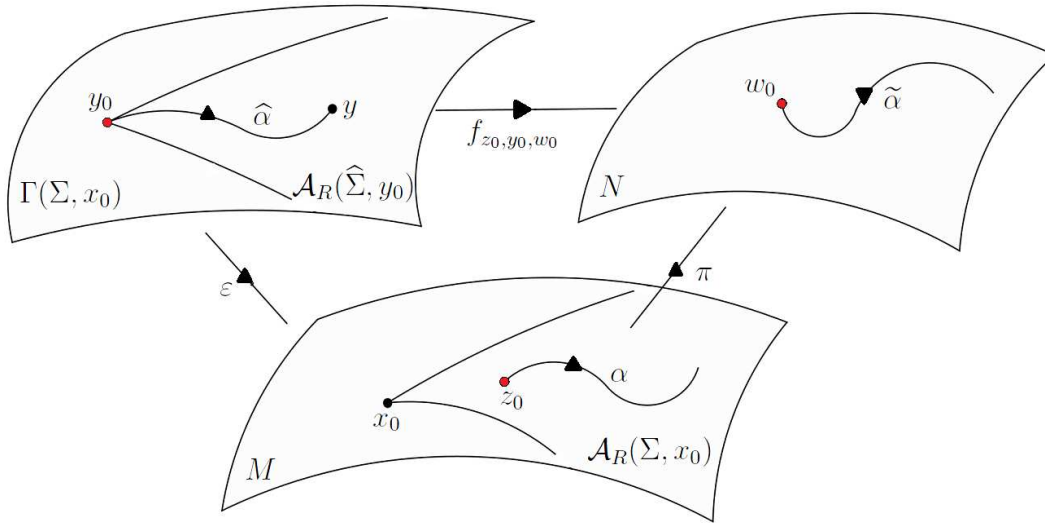


Figura 5.1: Diagrama entre os recobrimentos do controle.

Iremos definir a aplicação  $f_{z_0, y_0, w_0} : \Gamma(\Sigma, z_0) \rightarrow N$ . Pela proposição 4.14,  $\Gamma(\Sigma, z_0)$  é difeomorfo a  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$ . Dado  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$ , existe uma trajetória regular  $\alpha$  de  $\Sigma$  começando  $z_0$  tal que seu levantamento  $\widehat{\alpha}$  com ponto inicial  $y_0$  tem como ponto final  $y$ . Denote por  $\widetilde{\alpha}$  o levantamento de  $\alpha$  para  $N$  com ponto inicial  $w_0$ . Assim, definimos  $f_{z_0, y_0, w_0}(y) = \widetilde{\alpha}(1)$ .

**Lema 5.4.** *A aplicação  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é independente da trajetória  $\alpha$  usada na definição.*

**Demonstração.** Seja  $\alpha_1$  outra trajetória cujo levantamento  $\widehat{\alpha}_1$  tem ponto final  $y$ . Denote por  $\widetilde{\alpha}_1$  o levantamento de  $\alpha_1$  em  $N$  com ponto inicial  $w_0$ . Como o ponto final de  $\widehat{\alpha}$  e  $\widehat{\alpha}_1$  coincidem, segue do teorema 4.15 que as trajetórias  $\alpha_1$  e  $\alpha$  são monotonicamente homotópicas. Como o ponto inicial  $w_0$  é o mesmo para  $\widetilde{\alpha}$  e  $\widetilde{\alpha}_1$ , segue do lema 4.7 que o ponto final das trajetórias  $\widetilde{\alpha}$  e  $\widetilde{\alpha}_1$  coincidem. Portanto, a aplicação  $f_{z_0, y_0, w_0}$  está bem definida.  $\square$

**Lema 5.5.** *A aplicação  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é um difeomorfismo local.*

**Demonstração.** Como  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é definida como o ponto final de um levantamento, logo satisfaz  $\pi \circ f_{z_0, y_0, w_0} = \varepsilon$ . Sendo  $\pi$  um difeomorfismo local podemos escrever

$$f_{z_0, y_0, w_0} = \pi^{-1} \circ \varepsilon.$$

Onde  $\pi^{-1}$  denota a inversa local da aplicação  $\pi$ . Portanto,  $f_{z_0, y_0, w_0}$  é também um difeomorfismo local.  $\square$

Com a ideia da construção da aplicação entre  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, y_0)$  e  $N$ , repetimos a mesma construção ao longo do caminho  $\widehat{\beta} : (-\infty, 0] \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0) = \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  do lema 5.3. Denotamos por  $\beta = \varepsilon(\widehat{\beta})$  e  $\widetilde{\beta}$  o levantamento de  $\beta$  para  $N$  com  $\widetilde{\beta}(0) = w_0$ . Para cada  $t \in (-\infty, 0]$  temos o difeomorfismo local

$$f_{\beta(t), \widehat{\beta}(t), \widetilde{\beta}(t)} : \Gamma(\Sigma, \beta(t)) \rightarrow N.$$

Por simplicidade, escreveremos apenas  $f_t$ . Algo importante agora é relacionar as aplicações  $f_t$  para tempos diferentes e saber a relação entre os conjuntos  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  e  $\Gamma(\Sigma, \beta(t))$ .

**Lema 5.6.**  $\Gamma(\Sigma, x_0) = \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t))$ .

*Demonstração.* No lema 5.3 vimos que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  como o conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{x})$  contido em  $\Gamma(\Sigma, x_1)$  com  $x_0 \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x_1)$ . Considere  $y \in \Gamma(\Sigma, x_0)$  e seja  $\widehat{\alpha}$  uma trajetória de  $\widehat{\Sigma}$  regular em  $\widehat{x}$  terminando em  $y$ . Sabemos que ao reverter o tempo,  $\widehat{\alpha}^-$  é regular em  $y$  para o sistema reverso  $-\widehat{\Sigma}$ . Portanto, existe uma vizinhança  $U$  de  $\widehat{x}$  em  $\Gamma(\Sigma, x_1)$  tal que para todo  $z \in U$  temos  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, z)$ . Como  $\widehat{\beta}(t) \rightarrow \widehat{x}$ , segue que  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t))$  para algum  $t \in (-\infty, 0]$ .  $\square$

**Lema 5.7.** *Dados  $t_1, t_2 \in (-\infty, 0]$ , se  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t_1)) \cap \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t_2))$  então  $f_{t_1}(y)$  e  $f_{t_2}(y)$  coincidem.*

*Demonstração.* Suponha sem perda de generalidade que  $t_1 < t_2$  e denote por  $\widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  a restrição de  $\widehat{\beta}$  para o intervalo  $[t_1, t_2]$ , que é uma trajetória de  $\widehat{\Sigma}$ . Analogamente,  $\beta_{t_1, t_2}$  a projeção de  $\widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  para  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Sejam  $\widehat{\alpha}_1$  e  $\widehat{\alpha}_2$  trajetórias regulares de  $\widehat{\Sigma}$  começando em  $\widehat{\beta}(t_1)$  e  $\widehat{\beta}(t_2)$ , respectivamente, e tendo ambas  $y$  como ponto final. Denotamos por  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  as respectivas projeções em  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$ . Também, representamos por  $\widetilde{\alpha}_1$  o levantamento de  $\alpha_1$  começando em  $\widetilde{\beta}(t_1)$  e  $\widetilde{\alpha}_2$  o levantamento de  $\alpha_2$  iniciando em  $\widetilde{\beta}(t_2)$ . Pela definição das aplicações,  $f_{t_1}(y)$  e  $f_{t_2}(y)$  são os pontos finais de  $\widetilde{\alpha}_1$  e  $\widetilde{\alpha}_2$ , respectivamente.

O ponto final de  $\widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  é  $\widehat{\beta}(t_2)$ , assim a concatenação  $\widehat{\alpha}_2 * \widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  está bem definida. O que nos dá uma trajetória de  $\widehat{\Sigma}$  começando em  $\widehat{\beta}(t_1)$  e terminando em  $y$ . Desse modo,  $\widehat{\alpha}_1$



e  $\widehat{\alpha}_2 * \widehat{\beta}_{t_1, t_2}$  possuem o mesmo ponto final  $y$ , implicando que suas projeções  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 * \beta_{t_1, t_2}$  são homotópicas monotonicamente.

Portanto, seus levantamentos  $\widetilde{\alpha}_1$  e  $\widetilde{\alpha}_2 * \widetilde{\beta}_{t_1, t_2}$  começando em  $\widetilde{\beta}(t_1)$  possuem o mesmo ponto final. Por isso, para concluir a prova basta observar que  $\widetilde{\alpha}_2$  e  $\widetilde{\alpha}_2 * \widetilde{\beta}_{t_1, t_2}$  possuem o mesmo ponto final. Mas isto segue do fato de  $\widetilde{\alpha}_2$  tem como ponto inicial  $\widetilde{\beta}(t_2)$ , o que implica  $\widetilde{\alpha}_2 * \widetilde{\beta}_{t_1, t_2} = \widetilde{\alpha}_2 * \widetilde{\beta}_{t_1, t_2}$  e possuem o mesmo ponto final. O que nos permite concluir que  $f_{t_1}(y) = f_{t_2}(y)$ .

□

Utilizando os dois lemas anteriores podemos definir agora a aplicação

$$f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N,$$

escrevendo  $f(y) = f_t(y)$  onde  $y \in \mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t))$  para algum  $t \in (-\infty, 0]$ . Resumindo, temos o teorema.

**Teorema 5.8.** *Assuma que o sistema  $\Sigma$  em  $M$  satisfaz a condição do posto e considere  $x_0 \in M$ . Seja  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  um recobrimento do controle do sistema  $\widetilde{\Sigma}$  em  $M$ , onde os sistemas  $\Sigma$  e  $\widetilde{\Sigma}$  são completos. Então existe uma aplicação de controle  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  tal que  $\pi \circ f = \varepsilon$ .*

**Demonstração.** Por construção  $f$  é igual a  $f_t$  para um subconjunto aberto  $\mathcal{A}_R(\widehat{\Sigma}, \widehat{\beta}(t))$ . Portanto, as propriedades de  $f$  são herdadas de  $f_t$ , mostrando que  $f$  é um difeomorfismo local que leva  $\widehat{\Sigma}$  em  $\widetilde{\Sigma}$ . □

Em geral, a aplicação  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  não é sobrejetora. Para cada  $t$  a imagem de  $f_t$  é o conjunto acessível  $\mathcal{A}_R(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\beta}(t))$ , assim a imagem de  $f$  é

$$\text{Im}(f) = \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \mathcal{A}_R(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\beta}(t)),$$

que pode ser um subconjunto próprio de  $N$ , caso  $\widetilde{\Sigma}$  não seja controlável.

---

# Recobrimento de Sistemas Simétricos

---

A homotopia monotônica entre duas trajetórias de um sistema de controle naturalmente implica a homotopia clássica entre as mesmas. Porém, vimos na seção 2.1 do capítulo 2 que a recíproca de tal propriedade não é verdadeira. Assim, podemos afirmar que seus respectivos espaços de recobrimento, do controle  $\Gamma(\Sigma, x)$  e o clássico  $\widetilde{M}$ , em geral não coincidem. Desse modo, algo a se questionar é sobre quais hipóteses temos a igualdade entre os recobrimentos. Logo, a motivação desse capítulo é estudar a classe de sistemas simétricos.

**Definição 6.1.** *Um sistema de controle  $\Sigma$  é dito simétrico quando  $\Sigma = -\Sigma$ .*

A escolha de tal tipo de sistema se justifica pelo fato de obtermos a controlabilidade da variedade  $M$ , pelo teorema de Rashevskii-Chow como vemos a seguir.

**Teorema 6.2.** (*Rashevskii-Chow*): *Seja  $M$  uma variedade diferenciável conexa e seja  $\Sigma \subset \mathcal{X}^\infty(M)$ . Se  $\Sigma$  satisfaz a condição do posto*

$$\dim \mathcal{L}(\Sigma)(x) = n, \text{ para todo } x \in M \tag{6.0.1}$$

*então*

$$G_\Sigma(x) = M \text{ para todo } x \in M.$$

**Demonstração.** Segue pelo corolário do teorema da órbita, 1.3, (isto é,  $\mathcal{L}(\Sigma)(y) \subset T_y G_\Sigma(x)$  para todo  $y \in G_\Sigma(x)$ ) que a igualdade 6.0.1 significa que qualquer órbita  $G_\Sigma(x)$  é um aberto na variedade  $M$ , o que é uma união (naturalmente disjunta) de classes de equivalência assim como definida no capítulo 1. Cada classe é um subconjunto aberto de  $M$  que é conexa. Portanto, existe somente uma única classe não vazia, o que acarreta que  $M$  possui uma só órbita  $G_\Sigma(x)$ .  $\square$

Para sistemas simétricos os conjuntos acessíveis coincidem com órbitas e, portanto, tem-se o seguinte.

**Corolário 6.3.** *Um sistema simétrico  $\Sigma$  sobre uma variedade conexa  $M$  que satisfaz condição do posto é controlável.*

Desse modo, dado  $x \in M$  tem-se  $\mathcal{A}_\Sigma(x) = M$ . Como qualquer ponto de  $M$  é atingido por  $x$  por meio de trajetórias segue que todo ponto é atingido por meio de trajetórias regulares, isto é,  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x) = M$ .

Sob tais hipóteses, a aplicação ponto final  $\varepsilon_x : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow M$  é agora um difeomorfismo local sobrejetor. Essa propriedade é fundamental, uma vez que para conseguirmos a identificação dos espaços é preciso provarmos, entre outras coisas, que tal função possui a propriedade do levantamento de caminhos.

## 6.1 Propriedade de Levantamento de Caminhos

Inicialmente, consideremos uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  onde  $E$  é chamado de espaço total e  $B$  de espaço base. As seguintes definições foram tomadas em [6].

**Definição 6.4.** *Uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  é dita possuir a propriedade de levantamento (único) de caminhos, se para cada  $e_0 \in E$  e cada caminho  $c : [0, 1] \rightarrow B$  tal que  $p(e_0) = c(0)$ , existe um (único) caminho  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow E$  tal que  $\tilde{c}(0) = e_0$  e  $p \circ \tilde{c} = c$ , além disso o levantamento  $\tilde{c}$  depende continuamente de  $e_0$  e  $c$ .*

Tal propriedade pode ser vista localmente do seguinte modo. Se dado  $b_0 \in B$ , existe uma vizinhança  $U_0$  de  $b_0$  em  $B$  tal que a aplicação  $p|_{p^{-1}(U_0)} : p^{-1}(U_0) \rightarrow U_0$  tem a propriedade do levantamento (único) de caminhos. Logo, dizemos que  $p$  possui a propriedade

local de levantamento (único) de caminhos. Além do levantamento de caminhos, também estamos interessados no levantamento de homotopias.

**Definição 6.5.** *A aplicação  $p : E \rightarrow B$  é dita possuir a propriedade do levantamento de homotopias para o espaço  $X$ , se para toda aplicação  $f^* : X \rightarrow E$  e toda homotopia  $f_t : X \rightarrow B$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , da aplicação  $f = p \circ f^* : X \rightarrow B$ , existe uma homotopia  $f_t^* : X \rightarrow E$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , de  $f^*$  que cobre a homotopia  $f_t$ .*

Dizemos que a aplicação  $p$  é uma fibração, no sentido de Hurewicz, se possui a propriedade de levantamento de homotopia para qualquer espaço triangulável  $X$ . Para a continuação desse assunto é necessário algumas implicações que são encontradas em [6]. Primeiro, quando o espaço base  $B$  é um paracompacto de Hausdorff a propriedade local de levantamento de caminhos implica a propriedade de levantamento de caminhos. Também, a aplicação  $p : E \rightarrow B$  tem a propriedade do levantamento de caminhos se, e somente se, tem a propriedade de levantamento de homotopias. Portanto, qualquer aplicação  $p : E \rightarrow B$  cuja base é um espaço paracompacto de Hausdorff é uma fibração de Hurewicz se satisfaz a propriedade local de levantamento de caminhos. Para referências futuras firmamos o seguinte resultado.

**Lema 6.6.** *Sejam  $X$  e  $Y$  duas variedades diferenciáveis suaves e  $h : X \rightarrow Y$  um difeomorfismo local sobrejetor que possui a propriedade de levantamento de caminhos. Se  $X$  é conexo e  $Y$  é simplesmente conexo, então  $h$  é um difeomorfismo de  $X$  sobre  $Y$ .*

**Demonstração.** Sejam  $x_0, x_1 \in X$  tal que  $h(x_0) = h(x_1)$ . Como  $X$  é conexo e localmente conexo por caminhos, pois é uma variedade, existe um caminho  $\tilde{c} : [0, 1] \rightarrow X$  com  $\tilde{c}(0) = x_0$  e  $\tilde{c}(1) = x_1$ . O caminho  $c = h \circ \tilde{c}$  é um laço em  $Y$  e, portanto homotópico a uma constante. Segue da propriedade de levantamento de caminhos que o levantamento  $\tilde{c}$  de  $c$  é também um laço em  $X$ . Portanto,  $x_0 = x_1$  e  $h$  é um difeomorfismo.  $\square$

Para atingir nosso objetivo, a ideia é aplicar o lema anterior ao difeomorfismo local sobrejetor  $\varepsilon_x : \Gamma(\Sigma, x) \rightarrow M$ . Embora não seja necessário, vamos supor sem perda de generalidade que o espaço estado  $M$  é simplesmente conexo. Note que, para aplicar o lema ainda falta mostrarmos que:

(i)  $\Gamma(\Sigma, x)$  é conexo;

(ii)  $\varepsilon_x$  satisfaz a propriedade de levantamentos de caminhos.

Para obter a primeira afirmação basta mostrarmos que  $R(\Sigma, x)$  é conexo por caminhos. Para isso, utilizaremos os lemas a seguir retirados de [10].

**Lema 6.7.** *Uma trajetória  $\alpha$  de  $\Sigma$  regular em  $x \in M$  pode ser escrita como a concatenação de uma trajetória  $\beta$  com uma trajetória regular  $\gamma$ .*

**Demonstração.** Seja  $\alpha = \text{trj}_x(u)$  para algum controle regular  $u \in \mathcal{R}_\Sigma(x)$ . Desse modo, a trajetória  $\alpha$  possui uma vizinhança de posto máximo  $\mathcal{N}$  no seu ponto final que está contida no conjunto acessível por controles regulares  $\mathcal{A}_R(\Sigma, x)$ . Denote por  $\bar{\alpha}$  o caminho no espaço de trajetórias que é definido por

$$\bar{\alpha}(s)(t) = \alpha(st), \quad s, t \in [0, 1].$$

Para cada  $s$ , a trajetória  $\bar{\alpha}(s)$  é um pedaço de  $\alpha$  em  $[0, s]$  que denotaremos por  $\beta$ . Claramente,  $\beta$  é uma trajetória de  $\Sigma$  começando em  $x$ , porém  $\beta$  pode falhar em ser regular em  $x$ , uma vez que pode não existir uma vizinhança de posto máximo em  $\beta(1) = \alpha(s)$ . Tome  $v \in \text{int } \mathcal{U}$  tal que  $\beta = \text{trj}_x(v)$ . Por outro lado, para cada  $s$  o pedaço  $\hat{\alpha}(s)$  de  $\alpha$  restrita ao intervalo  $[s, 1]$ , que é dado por

$$\hat{\alpha}(s)(t) = \alpha(t + (1 - t)s), \quad s, t \in [0, 1],$$

é uma trajetória regular no ponto final de  $\beta$ , já que o ponto final de  $\hat{\alpha}(s)$  possui uma vizinhança de ponto máximo  $\mathcal{N}$ . Denote por  $\gamma$  este pedaço regular de  $\alpha$  começando em  $\alpha(s)$  e por  $w$  seu respectivo controle. Segue que,

$$(w * v)(t) = \begin{cases} v(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ w(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

é regular em  $x$ , pois  $w$  é regular no ponto final de  $\text{trj}_x(v)$ . É claro que esta concatenação é nada mais do que o controle  $u$  que é regular em  $x$ . Desse modo, temos que  $\alpha = \gamma * \beta$ .  $\square$

Agora exibimos explicitamente uma homotopia monotônica que será utilizada adiante.

**Lema 6.8.** *Seja  $\Sigma$  um sistema de controle simétrico em  $M$  satisfazendo a condição do posto. Dado  $x \in M$ , existe uma trajetória fechada regular  $\delta \in R(\Sigma, x, x)$  que pode ser encolhida monotonicamente ao ponto  $x$ .*

**Demonstração.** Considere o ponto  $y \in M$ . Como  $R(\Sigma, y, x)$  é não vazio, existe uma trajetória regular  $\alpha \in R(\Sigma, y, x)$ . Denote por  $\alpha^-$  a trajetória de  $-\Sigma$  dada como a trajetória reversa  $\alpha^-(t) = \alpha(1-t)$  que é também regular no ponto  $x$ . Pois a regularidade é preservada no tempo reverso.

Como  $\Sigma$  é simétrico, segue que  $\alpha^-$  é uma trajetória de  $\Sigma$  começando em  $x$ , o que nos permite realizar a concatenação de  $\alpha$  e  $\alpha^-$ , a qual denotaremos por  $\delta$ .

$$\begin{aligned} \delta(t) = \alpha^- * \alpha(t) &= \begin{cases} \alpha^-(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(1 - 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo,  $\delta$  é um laço regular em  $x$ . Construimos a deformação contínua de  $\delta$  para  $\{x\}$  enquanto  $s$  percorre o intervalo  $[0, 1]$ . Primeiro, consideramos o pedaço de  $\alpha^-$  restrito ao intervalo  $[0, 1 - s]$  pela metade do tempo e então continuamos o resto do tempo com pedaço regular  $\hat{\alpha}(s)$  de  $\alpha$  em  $\alpha(s) = \alpha^-(1 - s)$ . No entanto, para realizar tal concatenação precisamos reparametrizar ambos os pedaços para defini-los em  $[0, \frac{1}{2}]$  e em  $[\frac{1}{2}, 1]$ , respectivamente. Como qualquer laço obtido deste modo é regular em  $x$ , apresentamos explicitamente a homotopia monotônica  $\phi_s : [0, 1] \rightarrow M$ , onde cada  $\phi_s(t)$  é dada como abaixo.

$$\phi_s(t) = \begin{cases} \alpha^-(2(1-s)t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-s)t + 2s - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Para finalizar, definimos a homotopia monotônica tomando  $\delta_s(t) = \phi_{1-s}(t)$ . Desse modo, temos no instante  $s = 0$  a trajetória constante  $\delta_0(t) = \{x\}_m$  e no instante  $s = 1$  a

trajetória  $\delta_1(t) = \delta(t)$ .

□

Utilizando esses dois lemas mostramos que  $R(\Sigma, x)$  é conexo por caminhos. Note que, a maior dificuldade desse resultado reside no fato de garantirmos que as trajetórias intermediárias são regulares.

**Proposição 6.9.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  trajetórias regulares em  $R(\Sigma, x)$ . Então existe um caminho contínuo  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow R(\Sigma, x)$  tal que  $\Gamma(0) = \alpha$  e  $\Gamma(1) = \beta$ .*

**Demonstração.** Denotemos por  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  os caminhos no espaço das trajetórias que são definidos por  $\bar{\alpha}(s)(t) = \alpha(st)$  e  $\bar{\beta}(s)(t) = \beta(st)$  para  $s, t \in [0, 1]$ . Claramente,  $\bar{\alpha}$  e  $\bar{\beta}$  são contínuas com respeito a topologia  $\mathcal{C}^0$  e para cada  $s$ ,  $\bar{\alpha}(s)$  e  $\bar{\beta}(s)$  são os pedaços das trajetórias  $\alpha$  e  $\beta$  no intervalo  $[0, s]$ , respectivamente.

Inicialmente, consideramos o caminho contínuo  $\gamma$  no espaço das trajetórias  $T(\Sigma, x)$  que é dado por

$$\gamma(s) = \begin{cases} \bar{\alpha}(1 - 2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\beta}(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Observe a semelhança entre  $\gamma$  e  $\varphi$  definida em 2.2.1. Intuitivamente,  $\gamma$  contrai  $\alpha$  ao longo dela até o seu ponto inicial na metade do tempo e continua com pedaços crescentes de  $\beta$  no restante do tempo.

A aplicação  $\gamma$  liga  $\alpha$  e  $\beta$  através de trajetórias que com exceção dos tempos 0 e 1 não são necessariamente regulares em  $x$ . Contudo, podemos manipular o caminho  $\gamma$  de modo a ter um caminho contínuo no espaço de trajetórias regulares  $R(\Sigma, x)$ . A ideia é concatenar as trajetórias  $\gamma(s)$  com trajetórias regulares suficientemente pequenas, o que produz trajetórias regulares.

Pelo lema 6.8 existe um laço  $\delta$  regular em  $x$  que é monotonicamente homotópico ao laço constante  $\{x\}$ . Denote por,  $\tilde{\delta}_s$  ( $0 \leq s \leq 1$ ) a homotopia monotônica entre  $\tilde{\delta}_1(t) = \delta(t)$  e  $\{x\}$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Para fins de continuidade, em vez de trabalharmos com a família  $\tilde{\delta}_s$ , trabalhamos com

$\delta_s$  ( $s \neq 0$ ) que é definida por

$$\delta_s(\tau) = \begin{cases} \tilde{\delta}_s(\tau/s), & 0 \leq \tau \leq s \\ x, & s \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

Assim,  $\delta_s$  é um laço que gasta  $T = s$  unidades de tempo para completar a volta e fica fixo em  $x$  o restante do tempo. Por simplicidade o chamaremos de  $s$ -laço. Note que, ainda temos a mesma família de laços. No entanto, será mais conveniente tomarmos  $2s$ -laços para  $s \in [0, 1/2]$  e  $(2 - 2s)$ -laços quando  $s \in [1/2, 1]$  já que consideramos as trajetórias  $\delta_{2s} * \alpha|_{[0, 1-2s]}(\tau)$  e  $\delta_{2-2s} * \beta|_{[0, 2s-1]}$  em  $R(\Sigma, x)$  definidos por

$$\delta_{2s} * \alpha|_{[0, 1-2s]}(\tau) = \begin{cases} \delta_{2s}(\tau), & 0 \leq \tau \leq 2s \\ \alpha(\tau - 2s), & 2s \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

e

$$\delta_{2-2s} * \beta|_{[0, 2s-1]}(\tau) = \begin{cases} \delta_{2-2s}(\tau), & 0 \leq \tau \leq 2 - 2s \\ \beta(\tau - 2 + 2s), & 2 - 2s \leq \tau \leq 1 \end{cases}$$

Para  $s = \frac{1}{2}$  temos  $\delta * \alpha(0) = \delta = \delta * \beta(0)$ . Portanto, definimos o caminho desejado como a extensão contínua

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \alpha, & s = 0 \\ \delta_{2s} * \alpha|_{[0, 1-2s]}, & 0 < s \leq \frac{1}{2} \\ \delta_{2-2s} * \beta|_{[0, 2s-1]}, & \frac{1}{2} \leq s < 1 \\ \beta, & s = 1 \end{cases},$$

o que completa a demonstração. □

Pela proposição 6.9 segue então que  $R(\Sigma, x)$  é conexo por caminhos e conseqüentemente é conexo. Considerando a aplicação projeção  $\pi : R(\Sigma, x) \rightarrow \Gamma(\Sigma, x)$  que é contínua, segue que  $\Gamma(\Sigma, x) = \pi(R(\Sigma, x))$  é conexo. Note que, a controlabilidade não é essencial para conexidade de  $\Gamma(\Sigma, x)$ .

O resultado principal deste capítulo é baseado no seguinte lema.

**Lema 6.10.** *Seja  $\Sigma$  um sistema simétrico satisfazendo a condição do posto 1.1.1. Então*



a aplicação ponto final  $\varepsilon_{x_0} : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow M$  possui a propriedade de levantamento de caminhos e, portanto, é uma fibração de Hurewicz.

**Demonstração.** Dado  $y_0 \in \Gamma(\Sigma, x_0)$  e um caminho  $c : [0, 1] \rightarrow M$  tal que  $\varepsilon_{x_0}(y_0) = c(0)$ . Como  $M$  é uma variedade e toda variedade é um espaço paracompacto de Hausdorff, basta provarmos que o caminho  $c : [0, 1] \rightarrow M$  é levantado localmente por  $\varepsilon_{x_0}$ . O levantamento todo segue de partição da unidade (veja o teorema de uniformização de Hurewicz em [7]).

Começamos o levantamento em torno de uma vizinhança de  $c(0)$ . Para fazermos o levantamento vamos utilizar as cartas locais 3.1.1 da variedade  $\Gamma(\Sigma, x_0)$ . Tome  $(\psi(W_0), \psi)$  uma carta local em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  em torno do ponto  $y_0$ , onde  $W_0$  é uma seção da aplicação avaliação 1.2.1  $e_{x_0}$  para algum controle regular  $u_0$  em  $x_0$ . Como a carta local é definida  $\psi = \pi \circ \text{trj}_{x_0} : W_0 \rightarrow \Gamma(\Sigma, x_0)$  e  $\varepsilon_{x_0} \circ \psi = e_{x_0}$ , segue que  $e_{x_0}(W_0)$  é uma vizinhança aberta de  $e_{x_0}(u_0)$  e a restrição  $e_{x_0} : W_0 \rightarrow e_{x_0}(W_0)$  é um difeomorfismo, escreveremos  $e_{x_0}(W_0) = U_0$ .

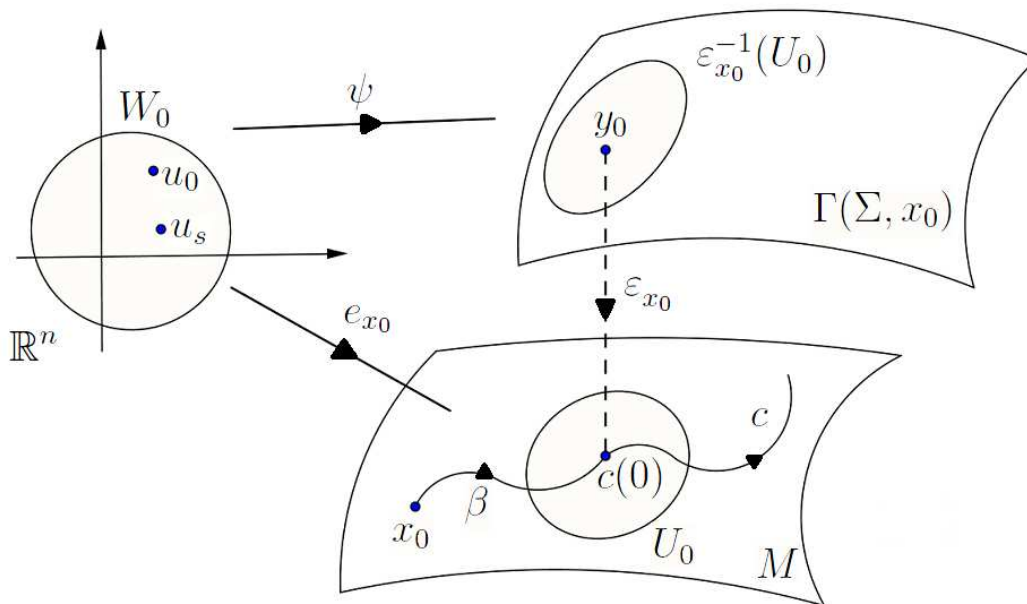


Figura 6.1: Representação do diagrama  $\varepsilon_{x_0} \circ \psi = e_{x_0}$ .

Seja  $\beta$  o representante da classe  $y_0$ , logo  $\beta$  é uma trajetória regular em  $x_0$  cujo ponto final é  $c(0)$ . Assim,  $U_0$  é uma vizinhança de  $c(0)$  em  $M$  tal que a pré-imagem  $\varepsilon_{x_0}^{-1}(U_0)$  é  $\psi(W_0)$ , já que localmente  $\psi = \varepsilon_{x_0}^{-1} \circ e_{x_0}$ .

Dado  $c(s) \in U_0 \cap C((0, 1])$ , existe um controle  $u_s \in W_0$  tal que  $e_{x_0}(u_s) = c(s)$ , ou seja,  $c(s) = \alpha_s(1)$  sendo  $\alpha_s = \text{trj}_{x_0}(u_s)$ . Note que, tais trajetórias não possuem necessariamente a propriedade de regularidade no ponto  $x_0$ . Todavia, sendo o sistema  $\Sigma$  simétrico podemos tomar uma trajetória regular fechada  $\delta$  em  $x_0$  e concatenar com as trajetórias  $\alpha_s$ . Este processo resulta trajetórias  $\alpha_s * \delta$  que são regulares em  $x_0$ .

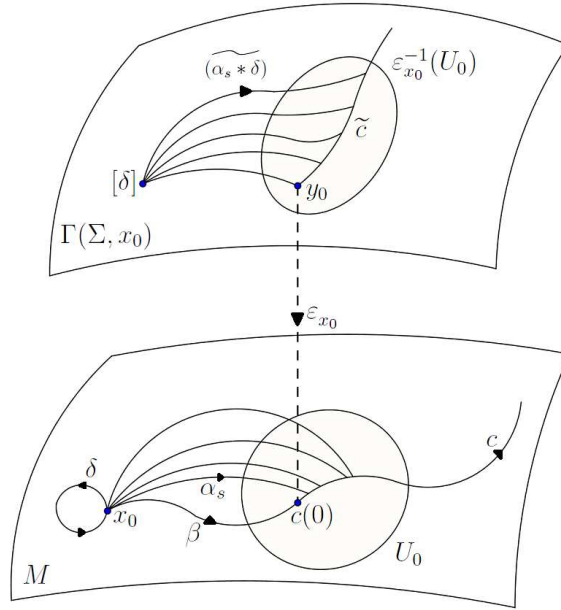


Figura 6.2: Levantamento do caminho  $c$ .

Com essa construção obtemos uma família contínua de trajetórias regulares começando em  $x_0$  e tendo seus pontos finais no pedaço do caminho  $c$  em  $U_0$ . Cada membro da família é levantado  $C^0$  continuamente para uma trajetória em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  começando no mesmo ponto inicial  $[\delta]$ . Assim, definimos o levantamento do caminho  $c$  como

$$\tilde{c}(s) = (\widetilde{\alpha_s * \delta})(1) \in \Gamma(\Sigma, x_0) \cap \varepsilon_{x_0}^{-1}(U_0).$$

De fato, para todo  $s \in [0, 1]$  temos  $\varepsilon_{x_0} \circ \tilde{c}(s) = \varepsilon_{x_0}([\alpha * \delta]) = \alpha_s * \delta(1) = c(s)$ . Note que, ainda não garantimos que o ponto inicial  $\tilde{c}(0)$  é  $y_0$ . Porém, caso tenhamos  $\tilde{c}(0) \neq y_0$  teríamos uma contradição pois inicialmente supomos que  $\varepsilon_{x_0}(y_0) = c(0)$  e  $\varepsilon_{x_0}$  restrito a  $\varepsilon_{x_0}^{-1}(U_0)$  é uma aplicação injetora. Portanto, pode-se definir  $\tilde{c}$  localmente e depois globalmente colando as vizinhanças.

□

Combinando os lemas 6.6 e 6.10 temos o seguinte teorema.

**Teorema 6.11.** *Seja  $\Sigma$  um sistema simétrico satisfazendo a condição do posto. Assuma que  $M$  é simplesmente conexo e fixe  $x_0 \in M$ . Então o recobrimento universal  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  de  $\Sigma$  é difeomórfo ao recobrimento universal  $\widetilde{M}$  de  $M$ . Em outras palavras, podemos obter o recobrimento universal do espaço estado  $M$  usando a configuração do controle.*

**Demonstração.** Considere o diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\Sigma, x_0) & & \widetilde{M} \\ & \searrow \varepsilon_{x_0} & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

Logo,  $\varepsilon_{x_0}$  e  $\pi$  são difeomorfismos locais sobrejetores com a propriedade de levantamento de caminhos. Pela lema 6.6,  $\varepsilon_{x_0}$  e  $\pi$  são difeomorfismos e, portanto  $\pi^{-1} \circ \varepsilon : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \widetilde{M}$  é um difeomorfismo. □

Seguem deste teorema os seguintes resultados.

**Corolário 6.12.** *Duas trajetórias homotópicas em  $M$  são também monotonicamente homotópicas em  $M$ .*

**Demonstração.** Sabemos que duas trajetórias em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  tendo o mesmo ponto inicial são homotópicas monotonicamente se, e somente se, possuem o mesmo ponto final. Por outro lado, duas trajetórias em  $M$  com os mesmos extremos são homotópicas por caminhos. Pelo teorema anterior a aplicação ponto final  $\varepsilon_{x_0} : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow M$  é um difeomorfismo. Em particular,  $\varepsilon_{x_0}$  é injetora, o que garante que homotopia implica homotopia monotônica. □

O próximo corolário é consequência imediata do fato que  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  e  $\widetilde{M}$  são difeomorfos.

**Corolário 6.13.** *A aplicação ponto final  $\varepsilon_{x_0} : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow M$  é uma aplicação de recobrimento.*

Inicialmente, argumentamos que a hipótese de  $M$  ser simplesmente conexo não é necessária para obtermos o resultado do teorema 6.11. Suponha que  $M$  não é simplesmente conexo e denote por  $\widehat{\Sigma}$  o sistema em  $\Gamma(\Sigma, x_0)$  obtido a partir do levantamento de  $\Sigma$  por meio do difeomorfismo local  $\varepsilon_{x_0}$ . Tome  $N$  uma variedade dotada com um sistema de controle  $\widetilde{\Sigma}$  tal que  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0)$  é um difeomorfismo local sobrejetor que aplica  $\widetilde{\Sigma}$  em  $\Sigma$ , isto é,  $d\pi(\widetilde{\Sigma}) = \Sigma$ .

A aplicação é um recobrimento do controle. Pelo teorema 5.8, existe uma aplicação de levantamento  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  que relaciona  $\widehat{\Sigma}$  e  $\widetilde{\Sigma}$ , isto é, um difeomorfismo local  $f$  tal que  $\pi \circ f = \varepsilon_{x_0}$  e  $df(\widehat{\Sigma}) = \widetilde{\Sigma}$ . Onde ambos  $\widehat{\Sigma}$  e  $\widetilde{\Sigma}$  são sistemas de controle completos nas correspondentes variedades.

Em geral, a aplicação  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow N$  não é sobrejetora, uma vez que a imagem

$$\text{Im}(f) = \bigcup_{t \in (-\infty, 0]} \mathcal{A}_R(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{\beta}(t)) \subset N$$

pode não ser toda a variedade  $N$  devido à controlabilidade do sistema  $\widetilde{\Sigma}$ .

Tomando agora  $N = \widetilde{M}$  temos  $f : \Gamma(\Sigma, x_0) \rightarrow \widetilde{M}$  um difeomorfismo local sobrejetor cuja imagem é simplesmente conexa. Note que,  $\pi : N \rightarrow \mathcal{A}_R(\Sigma, x_0) = M$  é nada mais que a aplicação de recobrimento  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  definido por  $\pi([\alpha]) = \alpha(1)$ . Além disso, vimos que  $\varepsilon_{x_0}$  é uma fibração no sentido de Hurewicz. Como  $f$  é localmente dada pela composição  $\pi^{-1} \circ \varepsilon_{x_0}$  admite a propriedade local de levantamento de caminhos. Sendo  $\widetilde{M}$  uma variedade, segue que  $f$  possui a propriedade de levantamento de caminhos. Aplicando o lema 6.6 para a aplicação  $f$  provamos o resultado desejado.

Para concluir o trabalho, consideramos a relação entre diferentes recobrimentos. Em particular, mostramos que o espaço de recobrimento não depende da escolha da condição inicial.

**Proposição 6.14.** *Seja  $\Sigma$  um sistema simétrico em  $M$  satisfazendo a condição do posto. Então para quaisquer  $x, z \in M$  os espaços de recobrimentos  $\Gamma(\Sigma, x)$  e  $\Gamma(\Sigma, z)$  são isomórficos.*

**Demonstração.** Como  $\Sigma$  é simétrico, logo  $x \in \mathcal{A}_R(\Sigma, z)$  e  $z \in \mathcal{A}_R(\Sigma, x)$  para quaisquer  $x, z \in M$ . Assim,  $\Gamma(\Sigma, x)$  é uma subvariedade aberta de  $\Gamma(\Sigma, z)$  e  $\Gamma(\Sigma, z)$  é uma

subvariedade aberta de  $\Gamma(\Sigma, x)$ . Portanto, segue o resultado.  $\square$

A seguinte proposição considera a relação entre recobrimentos associados com sistemas de controle evoluindo em diferentes variedades diferenciáveis.

**Proposição 6.15.** *Sejam  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  dois sistemas de controle nas variedades  $N_1$  e  $N_2$ , respectivamente. Sejam  $f : N_1 \rightarrow N_2$  uma aplicação de controle tal que  $f(x_1) = x_2$  para algum  $x_1 \in N_1$  e  $x_2 \in N_2$ . Então, existe uma aplicação de controle  $F : \Gamma(\Sigma_1, x_1) \rightarrow \Gamma(\Sigma_2, x_2)$  entre os levantamentos de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ .*

*Em particular, se  $f$  é um difeomorfismo, então  $\Gamma(\Sigma_1, x_1)$  e  $\Gamma(\Sigma_2, x_2)$  são recobrimentos isomórficos.*

**Demonstração.** Considere o diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\Sigma_1, x_1) & \longrightarrow & \Gamma(\Sigma_2, x_2) \\ \varepsilon_{x_1} \downarrow & & \varepsilon_{x_2} \downarrow \\ \mathcal{A}_R(\Sigma_1, x_1) & \xrightarrow{f} & \mathcal{A}_R(\Sigma_2, x_2) \end{array}$$

A composição  $\hat{f} = \varepsilon_{x_2}^{-1} \circ f \circ \varepsilon_{x_1}$ , sendo  $\varepsilon_{x_2}^{-1}$  é a inversa local de  $\varepsilon_{x_2}$ . O que estabelece o difeomorfismo local desejado. Como  $d\varepsilon_{x_1}$  e  $d\varepsilon_{x_2}$  é um isomorfismo e  $df(\Sigma_1) = \Sigma_2$ , vemos que  $d\hat{f}(\hat{\Sigma}_1) = \hat{\Sigma}_2$ , isto é,  $\hat{f} : \Gamma(\Sigma_1, x_1) \rightarrow \Gamma(\Sigma_2, x_2)$  é uma aplicação de controle.

Em particular, se  $f$  é um difeomorfismo então temos um recobrimento isomórfico. Em outras palavras, sistemas equivalentes produzem recobrimentos isomórficos. De fato,

$$f_* : \Gamma(\Sigma_1, x_1) \longrightarrow \Gamma(\Sigma_2, x_2), \quad [\gamma]_m \longmapsto [f \circ \gamma]_m$$

é um difeomorfismo entre  $\Gamma(\Sigma_1, x_1)$  e  $\Gamma(\Sigma_2, x_2)$ .

$\square$

# Considerações finais

---

Entre todos os resultados apresentados vale de destacar a estrutura de variedade diferenciável no espaço das classes de equivalência das trajetórias regulares  $\Gamma(\Sigma, x)$ , uma vez que tal estrutura possibilitou fazer o levantamento das trajetórias. Além disso, para sistemas simétricos foi provado, após um estudo bastante topológico que a aplicação ponto final é uma fibração de Hurewicz. Obtendo, nesse caso, o mesmo espaço de recobrimento com ambas as homotopias.

Outro ponto relevante é não termos, em geral, a equivalência entre as homotopias. No exemplo exibido na seção 2.1 do capítulo 2, o espaço  $\Gamma(\Sigma, x)$  é diferente de  $S^2$ , pois a homotopia clássica não implica a homotopia monotônica. Todavia, ainda não sabemos dizer a quem o espaço  $\Gamma(\Sigma, x)$  é homeomorfo.

Finalmente, gostaríamos de exaltar a diversidade do trabalho. Apesar de aparentemente estar vinculado a área de geometria e topologia, o estudo desse tipo de homotopia exigiu a utilização de resultados tanto da álgebra quanto da análise. Isso vem apenas enriquecer o valor desse tipo de homotopia, pois ela mostra que a matemática de fato está vinculada em todos os seus ramos de conhecimento e por diversas vezes é possível encontrar as suas interseções.



# Referências Bibliográficas

---

- [1] ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E., AND RATIU, T. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, second ed., vol. 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] COLONIUS, F., KIZIL, E., AND SAN MARTIN, L. A. B. Covering space of monotonic homotopy of trajectories of control system. *Journal of Differential Equations* 203 (2005), 324–353.
- [3] COLONIUS, F., AND KLIEMANN, W. The dynamics of control. *Birkhäuser* (2000).
- [4] CROOM, F. *Basic Concepts of Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [5] DOMINY, J., AND RABITZ, H. Dynamic homotopy and landscape dynamical set topology in quantum control. *arXiv:1102.4360v2[quant-ph]* (2011).
- [6] HU, S. T. *Homotopy Theory*. Academic Press, New York, 1959.
- [7] HUREWICZ, W. On the concept of fiber space. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 41 (1955), 956–961.
- [8] JURDJEVIC, V. *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [9] KIZIL, E. Universal covering of driftless controls systems. *Journal of Dynamical and Control Systems* 14 (2008), 453–464.



- 
- [10] KIZIL, E. Addendum to “universal covering of driftless control systems”. *Journal of Dynamical and Control Systems* 15 (2009), 445–448.
- [11] LAWSON, J. D. Free local semigroup constructions. *Monatsh. Math.* (1998), 309–333.
- [12] LAWSON, J. D. Universal objects in lie semigroup theory. *Semigroup forum* (1998), 121–132.
- [13] SARYCHEV, A. Nonlinear control systems: Topological properties of trajectory space. In *Analysis of Controlled Dynamical Systems* (Boston, 1991), B. Bonnard, B. Bride, J. Gauthier, and I. Kupka, Eds., vol. 8 of *Progress in Systems and Control Theory*, Birkhäuser, pp. 358–371.
- [14] SARYCHEV, A. On homotopy properties of the space of trajectories of a completely nonholonomic differential systems. *Soviet Math. Dokl.* 42 (1991), 674–678.
- [15] SONTAG, E. *Mathematical Control Theory*. Springer, Berlin, 1998.
- [16] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [17] STEFAN, P. Accessible sets, orbits, and foliations with singularities. *J. London Math Soc.* 29 (1974), 699–713.
- [18] SUSSMANN, H. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Trans. Amer. Math Soc.* 180 (1973), 171–188.
- [19] SUSSMANN, H. Some properties of vector fields system that are not altered by small perturbations. *Journal of Differential Equations* 20 (1976), 292–315.
- [20] SUSSMANN, H. Existence and uniqueness of minimal realizations of non-linear systems. *Mathematical Systems Theory* 10 (1977), 263–284.
- [21] VIEIRA, M. G. O. *Homotopia entre Trajetórias de Equações Dirigidas por Caminhos Rugosos*. Tese (Doutorado em Matemática), IMECC/Unicamp, Campinas, 2009.

# Índice Remissivo

---

Órbita, 7, 54

positiva, 6

Teorema da, 8

Acessibilidade, 9

local, 9

normal, 10

regular, 17

Aplicação

avaliação, 13, 16, 27, 32

de controle, 39

ponto final, 27

Condição do Posto, 9, 20, 27

Conjunto

acessível, 7, 13

Controle(s), 13

Concatenação de, 18

constantes por pedaços, 5

normal(is), 10, 20

regular(es), 16

Difeomorfismo local, 35

Fibração de Hurewicz, 55

Homotopia Monotônica, 21

Levantamento

de caminhos, 36, 54

de homotopias, 36, 55

de sistemas, 38

de trajetórias, 38

Projeção

terminal, 24

Recobrimento

diferenciável, 35

do controle, 39

Universal, 24, 47

Sistema

acessível, 9

controlável, 8, 54

de controle, 5, 47

reverso, 19

Simétrico, 7, 53

Teorema

da função implícita, 16, 29

de Krener, 9

de Rashevskii-Chow, 53

Topologia

$\mathcal{C}^0$ , 13, 32, 45

$\mathcal{C}^1$ , 14, 32, 45

forte, 31

fraca\*, 31

Trajetória(s)

Conjunto das, 13

regular(es), 17, 21, 28

reparametrização de, 12