I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

S. Carlos

CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE
DOS MÉTODOS (h, l) DE BROWN

Messias Meneguette Junior

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE
DOS MÉTODOS (h, l) DE BROWN

Messias Meneguette Junior

Class. -	<u>T</u>
Cott. -	<u>M541C</u>
	<u>2.3</u>
Tombo -	<u> </u>

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Marielza Jorge Favaro

Dissertação apresentada ao Instituto de
Ciências Matemáticas de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, para obten-
ção do título de "Mestre em Matemática"

SÃO CARLOS

1981

CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE
DOS MÉTODOS (k, ℓ) DE BROWN

MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JULIO DE MESQUITA FILHO"

INSTITUTO DE PLANEJAMENTO E ESTUDOS AMBIENTAIS

Departamento de Matemática

Orientadora: Prof.^a Dr.^a MARIELZA JORGE FAVARO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos

Aos meus pais e irmãos, pelo
esforço conjunto e apoio sem
limites,

dedico este trabalho

AGRADECIMENTOS

À professora doutora Marielza Jorge Favaro, pela confiança, atenção e orientação objetiva a mim dedicadas.

Aos amigos: Edson Sardella, professor João Sampaio e esposa, em especial aos professores José Alberto Cuminato e Laudecir Miguel Ferrari pelo constante apoio humano e técnico a mim dispensados.

Aos colegas do ICMSC-USP e do IPEA-UNESP; aos professores da graduação (IBLCE-UNESP) pelo incentivo e formação básica.

Aos meus pais e irmãos pela harmonia e amizade constantes.

Aos meus sogros e minha esposa pelo apoio e incentivo.

Enfim, a todos aqueles que de alguma maneira tiveram participação neste trabalho, particularmente ao Marcos pelo esmerado serviço de datilografia.

Ao CNPq, FAPESP e UNESP(IPEA) pelo apoio financeiro recebido.

ABSTRACT

The present study involves a detailed attempt for understanding the class of (K, ℓ) Brown's methods with an emphasis on theoretical results of its principal characteristics and the algebraic study of stability.

Such methods are specially used in discretization of stiff initial value problems.

The stiff problem is looked under different angles. The behavior of the error constant is introduced. The principal characteristics are given a detailed study.

The main results appear in the algebraic study of absolute stability: characterization of $A(0)$, stiff and A_0 stabilities; selection of K and ℓ such that the corresponding method is stiffly stable.

Numerical applications are present with some conclusions that will be useful on a implementation of algorithms with variable step size and order.

RESUMO

O propósito deste trabalho é apresentar um estudo detalhado da classe dos métodos (K, ℓ) de Brown, enfatizando resultados teóricos sobre suas principais características e o estudo algébrico sobre estabilidade.

Tais métodos são usados na discretização de problemas de valor inicial, especialmente, para aqueles "stiff".

O problema "stiff" é apresentado sob vários aspectos. O comportamento da constante do erro é introduzido. As principais características são estudadas em detalhes.

Os resultados centrais aparecem no estudo algébrico, feito para a estabilidade absoluta: caracterização algébrica para $A(0)$, "stiff" e A_0 estabilidades; escolha de K e ℓ para os quais temos métodos "stiffly" estáveis.

Aplicações numéricas são apresentadas com algumas conclusões, visando uma implementação com controle do erro e variação de passo e ordem.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 0: Prê-requisitos	
0.1 - Sobre o problema "stiff"	2
0.2 - Sobre funções algébricas	9
0.3 - Resultados usados	11
CAPÍTULO I: Construção dos métodos (K, l)	
1.1 - Ordem máxima atingível	17
1.2 - Cálculo dos coeficientes	24
1.3 - Especificação de alguns métodos	29
CAPÍTULO II: Características dos métodos (K, l)	
2.1 - Ordem e constante do erro	36
2.2 - Estabilidade, convergência e raiz principal ..	38
2.3 - Erro global e expansão assintótica	63
CAPÍTULO III: Estabilidade dos métodos (K, l)	
3.1 - Comportamento dos métodos quanto a <u>estabilida</u> <u>de</u>	76
3.2 - Polinômio de estabilidade, ramo principal e <u>es</u> <u>tabilidade no infinito</u>	86
3.3 - Caracterização algébrica para $A(0)$ e "stiff" estabilidades	95
3.4 - A_0 e "stiff" estabilidades	104
CAPÍTULO IV: Aplicações numéricas	
4.1 - Exemplos e métodos usados	119
4.2 - Conclusões	128
BIBLIOGRAFIA	131
APÊNDICE	134

INTRODUÇÃO

O estudo dos métodos (K, ℓ) de Brown é de real importância, visto que sistemas de equações diferenciais ordinárias, que apresentam o problema "stiff" aparecem com frequência em áreas como engenharia química, teoria do controle, circuitos elétricos, etc. Um outro aspecto que garante a importância do estudo dos métodos, é a possibilidade de se obter métodos (K, ℓ) com ordem tão alta quanto desejável e que tenha região de estabilidade adequada.

Métodos lineares de passo múltiplo que usam derivadas de ordem superior, surgiram com os chamados métodos de Obreckoff, c.f. Lambert [24, pag. 199]. O uso de derivadas adiciona condições analíticas e portanto o método fornece melhor solução. Enright [8] desenvolveu uma classe de métodos, que usam a 2.^a derivada, bastante satisfatórios para sistemas com problema "stiff". Outros métodos razoáveis são os baseados na diferenciação numérica ($K \leq 6$), c.f. Enright et al [9].

Os métodos (K, ℓ) de Brown surgiram de um trabalho feito por Brown [5] no qual, através da plotagem da fronteira da região de estabilidade, procurou dentro da classe dos métodos de passo múltiplo com multiderivadas, aqueles com máxima ordem e com região de estabilidade dada pelo semi-plano complexo esquerdo, ou quase isto. Além desse trabalho Jeltsch and Kratz [20] deram algumas propriedades e Jeltsch [22] estudou a estabilidade dos métodos (K, ℓ) . Existem ainda outros trabalhos sobre métodos usando derivadas; citamos principalmente Jeltsch [18], [19], [21].

O estudo dos métodos (K, ℓ) é bem recente, possibilitando vasta área de pesquisa a ser desenvolvida. Por exemplo: parece ser possível melhorar a definição de "stiff" estabilidade, não exigindo A_0 estabilidade. Não foi encontrado, computacionalmente, método (K, ℓ) estável (zero-estável), ele ou era fortemente estável ou não era estável; daí a conjectura de que métodos (K, ℓ) zero estáveis são A_0 estáveis e fortemente estáveis e portanto (teor. 3.6) "stiff" estáveis (c.f. [22]). Um outro exemplo a ser citado é a possibilidade do uso destes métodos para a discretização de equações integrodiferenciais que eventualmente apresentem a mesma dificuldade computacional.

A nossa proposta, em função do exposto, foi uniformizar a teoria para os métodos (K, ℓ) de Brown, usando os resultados disponíveis na literatura, melhorando-os e os adequando aos métodos. Dentro desta ênfase procuramos estudar o problema "stiff" e suas interpretações, assim como resultados importantes sobre funções algébricas (capítulo 0). Daí desenvolvemos a construção dos métodos, onde destacamos a máxima ordem atingível e a unicidade do método (K, ℓ) (capítulo 1). No capítulo 2, através da observação de resultados computacionais, formalizamos o comportamento da constante do erro (estes resultados não se encontram na bibliografia) e detalhamos as características dos métodos, adequando resultados existentes.

A ênfase principal ficou para o estudo da estabilidade (capítulo 3), na qual melhoramos alguns resultados de Jeltsch [22] no sentido de que os conseguimos com menos hipóteses. Nesse capítulo investigamos para quais K e ℓ

temos métodos "stiffly" estáveis, ficando isto como resultado central. Finalmente, apresentamos (capítulo 4) resultados numéricos como ilustração e também fornecemos algumas conclusões.

Capítulo 0 - Prê-requisitos

Neste capítulo vamos fazer um apanhado geral sobre o problema "stiff" em E.D.O. e apresentar resultados necessários, inclusive sobre funções algébricas, na sequência em que foram usados no trabalho. Juntamente com estes é fornecida a referência.

Em certos campos da Física, da Química, etc. aparecem problemas cujo equacionamento exige o conhecimento da solução de equações do tipo $F(x, y, y', \dots, y^{(p)}) = 0$, ($y = y(x)$, $x \in [a, b]$) ditas equações diferenciais ordinárias (E.D.O.) de ordem p . Uma função $y(x)$ p vezes diferenciável num sub-intervalo I do $[a, b]$ tal que $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(p)}(x)) = 0$, $x \in I$ é dita uma solução da equação diferencial. Um caso de relevante importância é quando $p = 1$ e temos $y' = f(x, y)$, para o qual fixamos a condição $y(a) = \eta$; este caso especial recebe a denominação de problema de valor inicial.

É possível demonstrar ([13 pag.15]) que se $f(x, y)$ é y -Lipschitz em $[a, b]$, então existe uma única solução $y(x)$ de problema $y' = f(x, y)$ tal que $y(a) = \eta$. Embora a existência e unicidade da solução estejam garantidas, nem sempre é possível tê-la expressa em termos de funções elementares.

Uma opção que aparece é o processo de discretização, que consiste em calcularmos o valor da solução $y(x)$ apenas num conjunto de pontos discretos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$. De maneira geral não é possível calcular os valores $y(x_1), \dots, y(x_N)$ exatamente, o que se faz é aproximá-los por métodos que forneçam valores que representem a solução com

erro aceitável.

A aproximação é feita computacionalmente e alguns problemas exigem excessivo esforço computacional (por exemplo, medido pelo número de avaliações da função $f(x,y)$), dentre os quais estão os problemas "stiff". No nosso trabalho estudamos estes problemas e uma classe de métodos com condições de fornecer aproximação aceitáveis para a solução em pontos discretos, igualmente espaçado de h onde $Nh \leq b-a$.

0.1 - Sobre o problema "stiff":

Existem problemas de valor inicial, que apresentam um certo grau de dificuldade computacional. Nestes sistemas, às vezes, somos forçados à situação desagradável de integrar uma componente usando um tamanho de passo desnecessariamente pequeno. A situação mais comum é termos de integrar um dado sistema com um passo excessivamente pequeno em relação ao tamanho do intervalo de integração.

Como ilustração servimo-nos de um exemplo da do por Lambert [25].

Consideremos $y' = Ay + \phi$; $y, \phi \in \mathbb{R}^2$, $y = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2000 & 999.75 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000.25 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Os auto-valores de A são $\lambda_1 = -2000.5$, $\lambda_2 = -0.5$.

A solução exata é dada por:

$$u(x) = -1.4998875e^{-0.5x} + 0.499875e^{-2000.5x} + 1$$

$$v(x) = -2.99975e^{-0.5x} - 0.00025e^{-2000.5x} + 1.$$

A forma da curva solução pode ser dada por:

A variação mais rápida vai até por volta de $x = 0.002$. Depois uma variação mais lenta vai até por volta de $x = 10$ e daí para a frente a solução é praticamente constante 1.

Se vamos integrar numericamente no intervalo $[0, 0.002]$, então um passo muito pequeno é inevitável. Se en tretanto vamos integrar em $x > 0.002$ por um método inapropriado, ainda devemos usar um passo muito pequeno, para evitar mos instabilidade; devido a região de estabilidade absoluta do método. Por exemplo se usamos um método Runge Kutta de ordem 4 explícito, precisamos ter $h < 0.00138$ e tomaríamos 7692 passos para alcançar a solução praticamente constante, teríamos mais de 30.000 avaliações da função.

Este problema ocorre porque a região de esta bilidade absoluta do método é limitada (contida num compacto) e portanto inadequada.

Desta maneira, métodos com regiões de estabilidade do tipo anterior são inadequados para resolver problema "stiff" por exigirem passo muito pequeno.

Os métodos mais apropriados são métodos cuja região de estabilidade absoluta tem certas propriedades, como as exigidas por A_0 estabilidade, $A(\alpha)$ estabilidade, "stiff" estabilidade (cap. 3), por exemplo.

É interessante notar que as restrições feitas aos métodos aceitáveis, quanto a região de estabilidade absoluta, não são suficientes:

Consideremos por exemplo a regra do trapézio, que esta nas condições acima, aplicada ao problema

$y' = \lambda y$, $\lambda \ll 0$, com passo h .

$$\text{Temos: } y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left[f_{n+1} + f_n \right] = y_n + \frac{h}{2} \left[\lambda y_{n+1} + \lambda y_n \right].$$

$$\text{Portanto } \left[\frac{y_{n+1}}{y_n} \right] = \left[\frac{1 + \frac{h}{2}\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda} \right].$$

Desta maneira, quando $h\lambda \rightarrow -\infty$ temos $\left[\frac{y_{n+1}}{y_n} \right] \rightarrow 1$.

Portanto $|Y_n|$ tende a zero muito vagarosamente, ao passo que a solução $e^{\lambda x}$ tende a zero rapidamente. Assim, claramente, o método do trapézio não é apropriado para problemas excessivamente "stiff".

Finalmente para o método ser razoável, para problemas "stiff", ainda deve apresentar solução (solução da eq. de diferenças definida pelo método) com um certo grau de decaimento (estabilidade no infinito).

Vamos, agora, dar algumas interpretações do problema "stiff":

I - Formal

Consideremos $Y' = Ay + \phi(x)$ $y, \phi \in \mathbb{R}^m$, A : matriz $m \times m$ cujos autovalores são λ_i ($i=1, \dots, m$) assumidos distintos.

Sejam c_i os autovetores associados.

Então a solução geral fica:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^m K_i e^{\lambda_i x} c_i + \Psi(x)$$

Def. 0.1: O sistema acima é dito ser "stiff" se:

- i) $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $i=1, \dots, m$
- ii) $(\max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|) / (\min_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|) = S \gg 1$.

S é dito razão de "stiffness".

Um sistema $Y' = A(x)y + \phi(x)$ com coeficientes variáveis ou um sistema não linear $Y' = f(x,y)$ é dito ser

"stiff" num intervalo I , se para todo $x \in I$ temos os autovalores $\lambda(x)$ de $A(x)$ ou da "jacobiana" $\partial f / \partial y$ respectivamente, satisfazendo i) e ii).

Obs.: 0.1 - A condição i) não é essencial para sistemas lineares com coeficientes variáveis e problemas não lineares.

0.2 - No caso de $m=1$ ocorre problema "stiff" quando $\operatorname{Re} \lambda \ll 0$, ou seja, problemas cuja solução apresenta uma rápida variação, em geral, decaimento grande.

0.3 - Algumas vezes os problemas "stiff" são denominados dos sistemas com constante de Lipschitz grande.

0.4 - Um outro conceito é que o problema "stiff" ocorre quando a escolha do passo é ditada pelas condições de estabilidade e não pela condição de precisão.

0.5 - No exemplo dado temos $S = 4001$. De acordo com a bibliografia este valor é modesto, porque nos problemas reais S é da ordem de 10^6 e se encontram em áreas como engenharia química, química cinética, procedimentos que envolvem equilíbrio, descarregamento de capacitores, teoria do controle em circuitos elétricos, etc.

II - Geométrica

Para termos uma idéia vamos tomar uma componente da solução e apenas a parte sem variação acentuada. Na figura abaixo a linha mais forte é a componente e as mais fracas representam a família de curvas, integrais formadas pelo campo de vetores vizinhos da componente da solução de problemas não-"stiff" e "stiff".

Desta maneira se integrarmos a componente "stiff" pelo método de Euler, por exemplo, teríamos o seguinte:

que ilustra o por quê da grande instabilidade.

III - Mal Condicionamento

Uma outra interpretação que podemos ter para problemas "stiff" é por analogia a sistemas mal condicionados.

Se $y' = f(x, y)$ é sistema "stiff" e $f \in C^1$, então a constante de Lipschitz L pode ser tomada por:

$$L = \sup \|\partial f / \partial y\| > \rho(\partial f / \partial y) \gg 1; \rho(\cdot): \text{raio spectral}$$
 e podemos interpretar o problema "stiff" como um "mal condicionamento" da função f .

IV - Perturbação Singular

Vamos ilustrar esta interpretação para o caso de um sistema linear com coeficientes constantes 2×2 .

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}' = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} ; A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ autovalores de } A,$$

λ_1 e λ_2 : reais com $\lambda_1 \ll \lambda_2 < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Temos: } du' &= dau + dbv \\ bv' &= bcu + bdv \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad du' - bv' = (ad - bc)u.$$

Por outro lado

$$u'' = au' + bv' \Rightarrow bv' = u'' - au'.$$

Assim obtemos: $u'' - (a+d)u' + (ad-bc)u = 0$.

Como λ_1 e λ_2 são autovalores de A temos que λ_1 e λ_2 são raízes da equação $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$.

Temos, então que $\lambda_1\lambda_2$ é o termo independente, $-(\lambda_1 + \lambda_2)$ é o coeficiente do termo de 1º grau. Portanto temos:

$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$ que nos fornece equivalentemente

$$\frac{u''}{\lambda_1} - \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)u' + \lambda_2 u = 0.$$

O que temos é uma típica situação de perturbação singular quando $\lambda_1 \rightarrow -\infty$.

Quanto maior a razão de "stiffness", mais caracterizada fica a situação de singularidade.

Uma interpretação similar pode ser feita para sistema $m \times m$. ($m \geq 3$).

0.2 - Sobre funções algébricas:

O estudo da estabilidade (cap. 3) tem como pano de fundo a teoria das funções algébricas, da qual da remos, baseando-nos em Simis [31], uma rápida visão através de alguns lemas e teoremas.

O ponto de vista das funções algébricas é exatamente o seguinte: começamos com um polinômio $P(x,y)$ a duas indeterminadas, com coeficientes em C e consideramos os zeros da equação $P(x,y) = 0$. Tais zeros definem y implicitamente como função multivalente de x (ou x como função de y); precisamente para cada $x \in C$ existem $0 \leq k \leq \text{grau}_y P$ complexos $y_1, \dots, y_k$ tais que $P(x, y_i) = 0$ ($1 \leq i \leq k$).

Temos então que $y(x)$ é a função algébrica definida por $P(x,y) = 0$ e $y_i(x)$ são analíticas e apresentam no máximo um polo nos pontos críticos de $P(x,y)$. Salientamos que ∞ será ponto crítico de $P(x,y)$ se 0 for ponto crítico de $x^m P(\frac{1}{x}, y) = 0$, $m = \text{grau}_x P$.

Def. 0.2: Seja $P(x,y) = \sum_{i=0}^m p_i(x)y^{n-i}$ $\in C[x,y]$ polinômio irreduzível. Um ponto $a \in C$ é dito não crítico (regular) de P (ou da função algébrica em x definida implicitamente pela equação $P(x,y)=0$) se as seguintes condições são satisfeitas:

i) $p_0(a) \neq 0$

ii) Para todo w tal que $P(a,w) = 0$, tem-se $\frac{\partial P}{\partial y}(a,w) \neq 0$.

Caso contrário, a é um crítico (da função algébrica y).

Teor. 0.1: Seja $P(x,y) = p_0(x)y^n + \dots + p_n(x) \in C[x,y]$ um polinômio irredutível, onde $p_0(x)$ não é o polinômio nulo.

Seja $a \in C$ tal que $p_0(a) \neq 0$ e $\frac{\partial P}{\partial y}(a,w) \neq 0$ sempre que $P(a,w) = 0$.

Então existe $\rho > 0$ e n funções analíticas $f_1, \dots, f_n$ e $|z-a| < \rho$ satisfazendo as seguintes condições:

- i) $P(z, f_i(z)) = 0 \quad |z-a| < \rho \quad 1 \leq i \leq n$
- ii) $f_i(a) = b_i$ onde $b_1, \dots, b_n$ são as raízes de $P(a,y)$
- iii) Se $(z,w) \in C^2$ é tal que $P(z,w) = 0$ e $|z-a| < \rho$

então $w = f_i(z)$ para algum i ($1 \leq i \leq n$).

Obs. 0.6 - Vemos então, que na vizinhança de um ponto não crítico, uma função algébrica definida implicitamente por $P(x,y) = 0$ explicita-se como n funções (univalentes) analíticas ($n = \text{grau}_y P$). Se a é ponto não crítico em questão, qualquer dessas funções analíticas admite então uma representação da forma $x-a = t$, $y = \sum_{i \geq 0} C_i t^i$, onde tal série é convergente num disco $|t| < \rho$.

Def. 0.3: Um ramo de P (ou da função algébrica definida por $P(x,y) = 0$) é dito estar centrado em um zero (a,b) de P se $(a,b) = (\xi(0), \eta(0))$, onde $(\xi(t), \eta(t))$ é uma parametrização que representa o ramo em questão.

Teor. 0.2: Em um zero $(a,b) \in C^2$ de um polinômio $P \in C[x,y]$ está centrado pelo menos um e no máximo um número finito de ramos de P (ou da função algébrica definida por $P(x,y) = 0$).

Lema 0.1: Seja $P(x,y) = 0$ e (a,b) um ponto satisfazendo

$P(a,b)=0$ tal que $\frac{\partial P}{\partial x}(a,b)$ e $\frac{\partial P}{\partial y}(a,b)$ não são ambos nulos. Então P admite um único ramo centrado em (a,b) .

Teor. 0.3: Seja $P = p_0(x)y^n + \dots + p_n(x) \in C[x,y]$ irredutível, onde $p_0(x) \neq 0$. Seja (a,b) um ponto de $P(x,y)=0$. Então P admite um número finito de ramos centrados em (a,b) da forma: $x = a + t^{r_i}$, $y = \sum_{\alpha} C_{\alpha,i} t^{\alpha}$, $i = 1, \dots, h$. Além disso, o número $\sum_{i=1}^h r_i$ é a multiplicidade de b como raiz de $P(a,y) = p_0(a)y^n + \dots + p_n(a) \in C[y]$.

Obs. 0.7:- Desta maneira ficam determinados todos os ramos de uma função algébrica. Um método prático para determiná-los é o método do polígono de Newton.

0.3 - Resultados usados:

Os resultados abaixo foram usados no decorrer do trabalho.

Lema 0.2: Se $K \in \mathbb{N}^*$ então $\sum_{i=0}^{K-1} (-1)^i \binom{K}{i} (K-i)^K = K!$.

Dem: Richardson [30, pag. 43]

Lema 0.3: A solução da equação de diferenças

$$(0) \quad \alpha_{Kn} Y_{n+K} + \dots + \alpha_{0n} Y_n = \gamma_{n+K}, \text{ satisfazendo}$$

$z_0 = z_1 = \dots = z_{K-1} = 0$ é para $n > K$ representada por:

$$z_n = \sum_{m=K}^{\infty} \gamma_m Y_{n,m}$$

onde a) $y_{n,m} = 0$ p/ $n=0,1, \dots, m-1$ ($m \geq K$)

$$b) \quad y_{n,m} = \frac{1}{\alpha_{K,m-K}} \quad p/ \quad n = m$$

$$c) \quad y_{n,m} = \text{solução da equação homogênea associada a (0)}$$

para $n > m$.

Dem: Henrici [13, pag. 212]

Def. 0.4: (c.f. Miller [28]) Um polinômio de grau n é do tipo (p_1, p_2, p_3) se, contando as multiplicidades, tem p_1 raízes dentro, p_2 raízes sobre e p_3 raízes fora do círculo unitário. ($p_1 + p_2 + p_3 = n$).

Lema 0.4: Se $K, \ell \in \mathbb{N}^*$ e $0 \leq i \leq K-1$

Então:

$$\sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell} = \sum_{j_1=1}^K j_1^{-1} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} j_2^{-1} \dots \sum_{j_{\ell-1}=1}^{j_{\ell-2}-1} j_{\ell-1}^{-1} \binom{j_{\ell-1}-1}{K-1-i}.$$

Dem: Jeltsch [20]

Lema 0.5: Existem constantes positivas K_ℓ e C_ℓ tais que

$$\sum_{j=0}^{K-1} (-1)^{K-j-1} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell} \leq K_\ell + C_\ell \ln^\ell(K); \quad K, \ell = 1, 2, \dots$$

Dem: Jeltsch [20]

Teor. 0.4 - Critério de Schur-Cohn:

Seja $\phi(z)$ polinômio de grau exatamente m com coeficientes reais ou complexos.

Seja

$$\phi^*(z) = z^m \overline{\phi(\bar{z}^{-1})} \quad \text{e} \quad \hat{\phi}(z) = (\phi^*(0) \phi(z) - \phi(0) \phi^*(z)) / z$$

Se $|\phi^*(0)| \neq |\phi(0)|$ então $\phi(z)$ é do tipo (p_1, p_2, p_3) ;
 $(p_1 + p_2 + p_3 = m)$

se e somente se

- i) $|\phi^*(0)| > |\phi(0)|$ e $\hat{\phi}$ é do tipo (p_1^{-1}, p_2, p_3)
- ii) $|\phi^*(0)| < |\phi(0)|$ e $\hat{\phi}$ é do tipo (p_3^{-1}, p_2, p_1) .

Dem: Miller [28]

Teor. 0.5 - de Eneström, Kakeya, Cohn

$$\text{Seja } \phi(z) = C_0 + C_1 z + \dots + C_m z^m$$

Se $0 < C_0 < C_1 < \dots < C_m$ então $\phi(z)$ é do tipo $(m, 0, 0)$.

Dem: Marden [27, pag. 197]

Lema 0.6: Para $\ell \geq 9$ e $K \leq 2\ell + 2$ temos:

$$2 \binom{K}{K-i+1} \frac{1}{(K-i+1)^\ell} < \binom{K}{K-i} \frac{1}{(K-i)^\ell}, \quad i = 1, 2, \dots, K-1.$$

Dem: Jeltsch [20]

Teor. 0.6: Consideremos o polinômio a 2 indeterminados

$$\phi(z(\lambda), \lambda) = \sum_{j=0}^{\ell} \lambda^j \rho_j(z) = \sum_{i=0}^K z^i \eta_i(\lambda) = \phi(z, \lambda(z)) = 0$$

$$\text{onde } \rho_j(z) = \sum_{i=0}^K \alpha_{ji} z^i \quad \text{e} \quad \eta_i(z) = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_{ji} \lambda^j$$

Sejam $\phi(z, \lambda)$ irredutível e $z(\lambda)$ definida por

$\phi(z(\lambda), \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in A$;

$A = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid z_1(\lambda) \in D(0,1), 1 = 1, 2, \dots, K\}$; $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

onde $z_1(\lambda)$ são os ramos de $z(\lambda)$. Seja $0 \in \bar{A}$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$,

$\phi^* \in (0, 2\pi]$ e $T = \min \{\ell, [\pi/(2\alpha)]\}$; $[\]$: função maior inteiro.

Então as seguintes 4 condições são equivalentes:

I) Para qualquer ε , $0 < \varepsilon \leq \alpha$, existe $r, r > 0$ tal que:

$$S(0, \phi^*, \alpha - \varepsilon, r) \subset A$$

II) Sempre que um ramo de $\lambda(z)$ tende a zero, ele é da forma:

$$\lambda(z) = \frac{e^{i\phi^*}}{\mu} \left(\frac{z - z^*}{z^*} \right)^\eta + O((z^* - z)^{\tilde{\eta}}), \quad z^* \neq 0$$

ou

$$\lambda(z) = \mu z^\eta + O(z^{\tilde{\eta}})$$

com $0 < \eta < \tilde{\eta}$; $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{Q}$. Além disso temos o seguinte:

II₁) $z^* \in \bar{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

II₂) Se $|z^*| = 1$ então $\eta = \frac{1}{q}$ onde $q \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq q \leq T$ e

$$n^q \in S(0, 0, \frac{\pi}{2} - q\alpha, \infty)$$

III)

III₁) As raízes de $\rho_0(z)$ estão em $\bar{D}(0,1)$

III₂) Seja z^* raiz de $\rho_0(z)$ com $|z^*| = 1$ e seja m_j a multiplicidade dela como raiz de $\rho_j(z)$, com $m_j = 0$ se $\rho_j(z^*) \neq 0$.

Seja $\eta \in \mathbb{Q}$, $\eta > 0$; tal que $\xi \in \{0, 1, \dots, \ell\}$ com $m_\xi > 0$ e

$$m_j \geq -\eta(j - \xi) + m_\xi, \quad j = 0, 1, \dots, \ell$$

onde a igualdade é atingida para pelo menos um $j \neq \xi$.

Então $\eta = 1/q$, onde $q \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq q \leq T$. Além disso, seja s o menor inteiro para o qual obtemos igualdade. Então as raízes do polinômio $P(\mu) = \sum_{j=0}^m \delta_j \mu^j$ estão no setor $S(0, 0, \frac{\pi}{2} - q\alpha, \infty)$;

$$\delta_j = e^{i\phi^*jq} (-z^*)^{-j} \frac{1}{(m(j))!} \left. \frac{d^{m(j)} \rho_{t(j)}(z)}{dz^{m(j)}} \right|_{z=z^*}$$

onde $t(j) = s + iq$ e $m(j) = m_s - j$

IV) Os ramos $z(\lambda)$ tem a forma:

$$z(\lambda) = z^*(1 - \mu(e^{-i\phi^*} \lambda)^\eta + O(\lambda^{\tilde{\eta}})), \quad z^* \neq 0$$

ou
$$z(\lambda) = \mu \lambda^\eta + O(\lambda^{\tilde{\eta}})$$

com $0 < \eta < \tilde{\eta}$; $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{Q}$. Além disso, temos o seguinte:

IV₁) $z^* \in \overline{D}(0,1)$

IV₂) Se $|z^*| = 1$ então $\eta = q$, $q \in \mathbb{N}^*$ e $1 \leq q \leq T$ e

$$\mu \in s(0, 0, \frac{\pi}{2} - q\alpha, \infty).$$

Dem: Jeltsch [19]

Obs. 0.8 - Se $\infty \in A$, podemos usar este teorema, aplicado a $\tilde{\lambda}(z)$ e $\tilde{\lambda} = 0$ onde $\tilde{\lambda}(z)$ é definida por $\chi(z, \tilde{\lambda}(z)) = 0$, com $\chi(z, \lambda) = \lambda^\ell \phi(z, 1/z)$ donde $\lambda(z) = 1/\tilde{\lambda}(z)$, para obter:

São equivalentes:

I') $\forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq \alpha; \exists r > 0 \mid s(\infty, \phi^*, \alpha - \epsilon, r) \subset A$

II') As raízes de $\rho_\ell(z)$ estão em $D(0,1)$.

Lema 0.7: Se $1 \leq K \leq 3.3(\ell+1)$ e $\ell \geq 8$; $(K, \ell \in \mathbb{N})$, então

$$\sum_{j=0}^{K-1} (-1)^{K-1-j} \binom{K}{j} (K-j)^{1-\ell} (1+x)^j (x-1)^{K-1-j} > K(1+x)^{K-2}$$

para todo $x \in [0, \infty)$.

Dem: Jeltsch [22]

Lema 0.8: Se $3 \leq K \leq 1.5(\ell+1)$ e $\ell \geq 8$; $(K, \ell \in \mathbb{N})$, então

$$|P(x)| \leq \frac{1}{4} K(K-1)(K-2)^2 3^{2-\ell} (1+x)^{K-2} \text{ para todo } x \in [0, \infty)$$

onde $P(x) =$

$$= \sum_{j=0}^{K-3} (-1)^{K-1-j} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell} (1+x)^j \prod_{i=1}^u \binom{K-j}{2i+1} (x-1)^{K-1-j-2i} 4^i (-x)^i,$$

onde $u = [(K-1-j)/2]$, $[]$: função maior inteiro:

Dem: Jeltsch [22]

Lema 0.9: Sejam $S_n = S + hS_n$ e $S_m^n = S_{n-1}S_{n-2}\dots S_m$

Se existem constantes C_0 , C_1 e h_0 tais que para todo

$h \in (0, h_0]$ temos:

$$|S^j| \leq C_0, \quad j \geq 1 \quad \text{e} \quad |S_n| \leq C_1,$$

então

$$|S_m^n| = \|S_{n-1}S_{n-2}\dots S_m\| \leq C_0 e^{(n-m)hC_0C_1}$$

Dem: Brown [5].

Capítulo 1 - Construção dos métodos (K, ℓ)

Neste capítulo vamos determinar os coeficientes dos métodos (K, ℓ) de Brown. Será calculada a maior ordem possível para os métodos e, através desta, calcularemos os coeficientes.

Os métodos (K, ℓ) de Brown são métodos lineares de K passos, usando ℓ derivadas, da forma:

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j f_{n+K}^{(j-1)} = 0$$

com $\sum_{i=0}^K |\alpha_i| > 0$ e $\sum_{j=1}^{\ell} |\beta_j| > 0$, onde α_i e β_j são escolhidos tais que o método tenha maior ordem de erro possível.

1.1 - Ordem máxima atingível:

Associamos aos métodos o operador

$$L[y(x), h] = \sum_{i=0}^K \alpha_i y(x+ih) - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j f^{(j-1)}(x+Kh, y(x+Kh)).$$

Considerando uma função $y(x)$ continuamente derivável, podemos desenvolver $L[y(x), h]$ em série de potência de h , obtendo:

$$L[y(x), h] = C_0 y(x) + C_1 h y^{(1)}(x) + \dots + C_q h^q y^{(q)}(x) + \dots$$

Def. 1.1: Um método (K, ℓ) tem ordem p se:

$$L[y(x), h] = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x) + O(h^{p+2}) \quad ; \quad C_{p+1} \neq 0$$

Obs.: 1.1 - Um método (K, ℓ) tem ordem p se, no desenvolvimento de $L[y(x), h]$, temos $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$, $C_{p+1} \neq 0$.

Desenvolvendo $L[y(x), h]$ temos:

$$\begin{aligned} L[y(x), h] &= \sum_{i=0}^K \alpha_i y(x+ih) - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j f^{(j-1)}(x+Kh, y(x+Kh)) = \\ &= \sum_{i=0}^K \alpha_i y(x+ih) - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j y^{(j)}(x+Kh) = \\ &= \alpha_0 y(x) + \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{h^i}{i!} y^{(i)}(x) + \alpha_2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2h)^i}{i!} y^{(i)}(x) + \\ &\quad \dots + \alpha_K \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Kh)^i}{i!} y^{(i)}(x) - \beta_1 h \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Kh)^i}{i!} y^{(i+1)}(x) - \\ &\quad \dots - \beta_{\ell} h^{\ell} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Kh)^i}{i!} y^{(\ell+1)}(x) + \dots \end{aligned}$$

Assim obtemos

$$L[y(x), h] = C_0 y(x) + C_1 h y'(x) + C_2 h^2 y''(x) + \dots,$$

onde

$$C_0 = \sum_{i=0}^K \alpha_i$$

$$C_1 = \sum_{i=1}^K i \alpha_i - \beta_1$$

$$C_j = \sum_{i=1}^K \frac{i^j}{j!} \alpha_i - \sum_{i=1}^j \frac{K^{j-1}}{(j-1)!} \beta_i, \quad j = 2, 3, \dots, \ell$$

$$C_m = \sum_{i=1}^K \frac{i^m}{m!} \alpha_i - \sum_{i=1}^{\ell} \frac{K^{m-1}}{(m-1)!} \beta_i, \quad m = \ell+1, \ell+2, \dots$$

A fim de determinarmos os coeficientes dos métodos (K, ℓ) , vamos usar a seguinte proposição:

Proposição 1.1: Um método (K, ℓ) tem ordem p se e somente se

$$L[e^x, h] = C_{p+1} h^{p+1} e^x + O(h^{p+2}), \quad C_{p+1} \neq 0$$

Dem: A demonstração é imediata e segue do fato de que a ordem do método só depende da escolha dos coeficientes α_i e β_j .

Vamos mostrar que não existe um método (K, ℓ) com ordem $p \geq K + \ell$.

Aplicando a proposição aos métodos obtemos:

$$L[e^x, h] = \sum_{i=0}^K \alpha_i e^{x+ih} - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j e^{x+Kh} = C_{p+1} h^{p+1} e^x + O(h^{p+2})$$

Chamando α_K de $-\beta_0$ temos:

$$\sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i e^{x+ih} - \sum_{j=0}^{\ell} h^j \beta_j e^{x+Kh} = C_{p+1} h^{p+1} e^x + O(h^{p+2})$$

Multiplicando tudo por e^{-x-Kh} obtemos:

$$\sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i e^{(i-K)h} - \sum_{j=0}^{\ell} h^j \beta_j = C_{p+1} h^{p+1} (1 - Kh + \frac{(Kh)^2}{2!} - \dots) + O(h^{p+2})$$

Obtemos:

$$\sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i e^{(i-K)h} - \sum_{j=0}^{\ell} h^j \beta_j = C_{p+1} h^{p+1} + O(h^{p+2})$$

Desenvolvendo a expressão acima em série de potência de h , temos:

$$-\sum_{j=0}^{\ell} h^j \beta_j + \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i e^{(i-K)h} = -\sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j + \sum_{i=0}^K \alpha_i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[(i-K)h]^j}{j!} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^K \alpha_i + h(-\beta_1 + \sum_{i=0}^{K-1} (i-K)\alpha_i) + h^2(-\beta_2 + \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(i-K)^2}{2!} \alpha_i) + \\
&+ \dots + h^\ell(-\beta_\ell + \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(i-K)^\ell}{\ell!} \alpha_i) + h^{\ell+1}(\sum_{i=0}^{K-1} \frac{(i-K)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \alpha_i) + \\
&+ h^{\ell+2}(\sum_{i=0}^{K-1} \frac{(i-K)^{\ell+2}}{(\ell+2)!} \alpha_i) + \dots
\end{aligned}$$

Daí obtemos:

$$\ell^{-x-Kh} L[\ell^x, h] = \bar{c}_0 + \bar{c}_1 h + \bar{c}_2 h^2 + \dots$$

onde

$$\bar{c}_j = -\beta_j + \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \frac{(i-K)^j}{j!}, \quad j = 0, \dots, \ell$$

$$\bar{c}_m = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \frac{(i-K)^m}{m!}, \quad m \geq \ell+1$$

Obs.: 1.2 - Como $L[e^x, h] = c_0 h e^x + c_1 h^2 e^x + c_2 h^3 e^x + \dots$, temos:

$$\begin{aligned}
&\bar{c}_0 + \bar{c}_1 h + \bar{c}_2 h^2 + \dots = e^{-x-Kh} L[e^x, h] = \\
&= e^{-x-Kh} (c_0 e^x + c_1 h e^x + c_2 h^2 e^x + \dots) = \\
&= e^{-Kh} (c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots)
\end{aligned}$$

Portanto, fazendo o produto $\tilde{a}$ Cauchy, na última igualdade, temos:

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{K+\ell} = 0 \quad \text{se e somente se}$$

$$\bar{C}_0 = \bar{C}_1 = \dots = \bar{C}_{K+\ell} = 0$$

Desta maneira, vamos usar $\bar{C}_i$, $0 \leq i \leq \ell+K$ para mostrar que não existe método de ordem $p \geq K+\ell$.

Igualando, então, os primeiros $\ell+K+1$ coeficientes da expansão à zero, temos:

$$\bar{C}_0 = \sum_{i=0}^K \alpha_i = 0$$

$$\bar{C}_1 = -\beta_1 + \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i (i-K) = 0$$

⋮

$$\bar{C}_\ell = -\beta_\ell + \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \frac{(i-K)^\ell}{\ell!} = 0$$

$$\bar{C}_{\ell+1} = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \frac{(i-K)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} = 0$$

⋮

$$\bar{C}_{\ell+K} = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \frac{(i-K)^{\ell+K}}{(\ell+K)!} = 0$$

Podemos assim formar o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} D_1 & \ell+1 \times K & I_{\ell+1 \times \ell+1} \\ D_2 & K \times K & \Theta_{K \times \ell+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \Theta_{\ell+K+1 \times 1}$$

onde $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{K-1}]^t$, $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\ell]^t$,

$\theta_{r \times p}$ é a matriz nula $r \times p$, $I_{r \times r}$ é a identidade de ordem r e além disso:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}_{\ell+K+1 \times K} \quad \text{com } d_{ij} = \frac{(j-K)^i}{i!},$$

para $i = 0, 1, \dots, \ell+K$ e
 $j = 0, 1, \dots, K-1$.

Formamos assim um sistema linear homogêneo

$$A \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = 0.$$

Além disso $\det(A) = \det(I_{\ell+1 \times \ell+1}) \cdot \det(D_{2_{K \times K}})$.

Temos

$$D_{2_{K \times K}} = \begin{bmatrix} \frac{(-K)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} & \frac{(1-K)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} & \dots & \frac{(-2)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} & \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \\ \frac{(-K)^{\ell+2}}{(\ell+2)!} & & \dots & & \frac{(-1)^{\ell+2}}{(\ell+2)!} \\ \dots & & & & \\ \frac{(-K)^{\ell+K}}{(\ell+K)!} & \frac{(1-K)^{\ell+K}}{(\ell+K)!} & \dots & & \frac{(-1)^{\ell+K}}{(\ell+K)!} \end{bmatrix}$$

Portanto

$$D_{2K \times K} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(\ell+1)!} & & & & & \\ & \theta & & & & \\ & & \frac{1}{(\ell+2)!} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \theta & \\ & & & & & \frac{1}{(\ell+K)!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -K & 1-K & \dots & -2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-K)^{K-1} & & & & (-1)^{K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-K)^{\ell+1} & & & & \theta \\ & (1-K)^{\ell+1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \theta & (-1)^{\ell+1} \end{bmatrix}.$$

Assim $\det(D_2) \neq 0$ e portanto $\det(A) \neq 0$.

Como o sistema é homogêneo, temos que $\alpha = \theta$ e $\beta = \theta$, ou seja, não existe método (K, ℓ) de ordem $p \geq \ell + K$. Portanto $p < \ell + K$. Vamos mostrar que existe um único método (K, ℓ) com ordem $p = K + \ell - 1$.

Usando $\ell + K - 1$ equações do sistema anterior, desprezando a última linha, temos um novo sistema não homogêneo:

$$\begin{bmatrix} D'_{1 \ell+1 \times K-1} & I_{\ell+1 \times \ell+1} \\ D'_{2 K-1 \times K-1} & \theta_{K-1 \times \ell+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ -\beta \end{bmatrix} = -\alpha_0 \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ d_{\ell+K-1} & 0 \end{bmatrix}$$

onde D_1' é a matriz D_1 com a primeira coluna suprimida, D_2' é a matriz D_2 com a primeira coluna e a última linha suprimidas e $\alpha' = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{K-1}]^t$

Temos então o sistema $A \begin{bmatrix} \alpha' \\ -\beta \end{bmatrix} = b$ com $\det(A) \neq 0$ por razões análogas ao sistema anterior. Portanto existe um único método (K, ℓ) com ordem $K+\ell-1$, o qual denominaremos, método (K, ℓ) de Brown.

Fica, assim, demonstrada a seguinte proposição:

Proposição 1.2: O método (K, ℓ) de Brown possui ordem $p = K+\ell-1$.

Obs.: 1.3 - Como $K, \ell \geq 1$ temos que os métodos de Brown são de ordem maior ou igual a 1.

1.4 - A observação 1.3 equivale a dizer que todo método (K, ℓ) de Brown é consistente.

1.2 - Cálculo dos coeficientes:

Tomando as últimas $K-1$ linhas do sistema, podemos determinar os α_i , $1 \leq i \leq K-1$ e por substituição nas outras linhas, determinar os β_j , $0 \leq j \leq \ell$.

Desta maneira temos:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{(1-K)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} & \frac{(2-K)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} & \dots & \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} & 0 \dots 0 \\
 \frac{(1-K)^{\ell+2}}{(\ell+2)!} & & & \frac{(-1)^{\ell+2}}{(\ell+2)!} & 0 \dots 0 \\
 \vdots & & & & \\
 \frac{(1-K)^{\ell+K-1}}{(\ell+K-1)!} & & & \frac{(-1)^{\ell+K-1}}{(\ell+K-1)!} & 0 \dots 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \alpha_1 \\
 \alpha_2 \\
 \vdots \\
 \alpha_K \\
 -\beta_0 \\
 \vdots \\
 -\beta_\ell
 \end{bmatrix}
 = -\alpha_0
 \begin{bmatrix}
 \frac{(-K)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \\
 \frac{(-K)^{\ell+2}}{(\ell+2)!} \\
 \vdots \\
 \frac{(-K)^{\ell+K-1}}{(\ell+K-1)!}
 \end{bmatrix}$$

Obtemos então:

$$\frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} \left[(K-1)^{\ell+1} \alpha_1 + (K-2)^{\ell+1} \alpha_2 + \dots + \alpha_{K-1} \right] = \frac{(-1)^{\ell+1}}{(\ell+1)!} K^{\ell+1} (-\alpha_0)$$

.....

$$\frac{(-1)^{\ell+K-1}}{(\ell+K-1)!} \left[(K-1)^{\ell+K-1} \alpha_1 + (K-2)^{\ell+K-1} \alpha_2 + \dots + \alpha_{K-1} \right] =$$

$$= \frac{(-1)^{\ell+K-1}}{(\ell+K-1)!} K^{\ell+K-1} (-\alpha_0) .$$

Dai segue o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix}
 K-1 & K-2 & \dots & 2 & 1 \\
 (K-1)^2 & (K-2)^2 & \dots & 2^2 & 1 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 (K-1)^{K-1} & (K-2)^{K-1} & \dots & 2^{K-1} & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 (K-1)^\ell \alpha_1 \\
 (K-2)^\ell \alpha_2 \\
 \vdots \\
 2^\ell \alpha_{K-2} \\
 \alpha_{K-1}
 \end{bmatrix}
 = -\alpha_0 K^{\ell+1}
 \begin{bmatrix}
 1 \\
 K \\
 \vdots \\
 K^{K-2}
 \end{bmatrix}$$

Usando a inversa da matriz de Vandermond, de acordo com Knuth [23, pag. 36] obtemos:

$$(K-i)^\ell \alpha_i = -\alpha_0 K^{\ell+1} \left\{ \sum_{j=1}^{K-1} K^{j-1} (-1)^{j+1} \right\}.$$

$$\sum_{\substack{1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{K-1-j} \leq K-1 \\ t_s \neq 1, \forall s}} (x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_{K-1-j}}) / x_i \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{K-1} (x_s - x_i)$$

onde $x_1 = K-1$.

Portanto temos:

$$\begin{aligned}
 (K-i)^\ell \alpha_i &= \frac{-\alpha_0 K^{\ell+1}}{\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{K-1} (K-s-K+1)} [S] = \frac{-\alpha_0 K^{\ell+1}}{(i-1)! (K-i)! (-1)^{i-K+1}} [S] = \\
 &= \frac{\alpha_0 K^{\ell+1} (-1)^{K-i}}{(K-i)! (i-1)!} [S], \quad \text{onde}
 \end{aligned}$$

$$S = \sum_{j=1}^{K-1} K^{j-1} (-1)^{j+1} \sum_{\substack{1 \leq t_1 < \dots < t_{K-1-j} \leq K-1 \\ t_s \neq 1, \forall s}} (K-t_1)(K-t_2)\dots(K-t_{K-1-j})$$

$$\text{Notemos que } (-1)^{j+1} \sum_{\substack{1 \leq t_1 < \dots < t_{K-1-j} \leq K-1 \\ t_s \neq 1, \forall s}} (K-t_1)\dots(K-t_{K-1-j})$$

é o coeficiente de x^{j-1} no polinômio:

$$\frac{((K-1)-x)((K-2)-x)\dots((K-(K-1))-x)}{((K-1)-x)}.$$

Assim S é justamente o polinômio com indeterminada K dado por:

$$\begin{aligned} \frac{((K-1)-K)((K-2)-K)\dots(K-(K-1)-K)}{(K-1-K)} &= (-1)(-2)\dots(-K+1)/(-1) = \\ &= (-1)^{K-1} (K-1)! / (-1) = \frac{(-1)^K (K-1)!}{1}. \end{aligned}$$

Finalmente chegamos à:

$$(K-i)^\ell \alpha_i = \frac{\alpha_0 (-1)^{K-1} K^{\ell+1} (-1)^K (K-1)!}{(K-i)!(i-1)! i} = \alpha_0 (-1)^K K^\ell \binom{K}{i} (-1)^{K-1}.$$

$$\text{Portanto } \alpha_i = \alpha_0 (-1)^K K^\ell \binom{K}{i} (-1)^{K-1} (K-1)^{-\ell}, \quad i = 1, 2, \dots, K-1.$$

Agora, se definimos α_0 por $\alpha_0 = (-1)^K K^{-\ell}$, temos:

$$\alpha_0 = (-1)^K K^{-\ell}$$

$$\alpha_i = (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell}, \quad i = 1, 2, \dots, K-1.$$

Por outro lado, usando nas primeiras $\ell+1$ equações do sistema, os valores de α_i obtidos, temos:

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i + \alpha_0 = \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell}.$$

Obs.: 1.5 - Tomamos inicialmente $\alpha_K = -\beta_0$.

$$\text{Portanto } \alpha_K = - \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell}$$

Ainda:

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{-\alpha_0 (-K)^j}{j!} - \sum_{i=1}^{K-1} \frac{(i-K)^j}{j!} \alpha_i = \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(K-1)^j (-1)^j}{j!} \alpha_i = \\ &= \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{K-1} (K-1)^j (-1)^{K-i} (K-i)^{-\ell} \binom{K}{i} = \\ &= \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{j-\ell}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\beta_j = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{j-\ell}, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Por outro lado, usando (1) temos:

$$C_{p+1} = C_{K, \ell} = \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i \frac{(i-K)^{\ell+K}}{(\ell+K)!} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(-1)^{\ell+K} (K-i)^{\ell+K}}{(\ell+K)!} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} = \\
&= \frac{1}{(\ell+K)!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{\ell-i} \binom{K}{i} (K-i)^K.
\end{aligned}$$

Portanto $C_{K,\ell} = \frac{1}{(\ell+K)!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{\ell-i} \binom{K}{i} (K-i)^K$.

Obs.: 1.6 - $C_{K,\ell}$ pode ser obtido, fazendo $j = \ell+K$ em β_j .

1.7 - Vamos tomar $C_{K,\ell}$ como constante do erro.

1.8 - Os coeficientes α_i , $i=0, \dots, K-1$ de um método (K,ℓ) de Brown são não nulos.

1.9 - Fazendo $i=K-1$ em α_i temos:

$$\alpha_{K-1} = -K.$$

1.10 - Fazendo $j = \ell$ em β_j temos:

$$\begin{aligned}
\beta_\ell &= \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} = \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (-1 + \sum_{i=0}^K (-1)^{K-i} \binom{K}{i}) = \\
&= \frac{(-1)^\ell}{\ell!} (-1) = \frac{(-1)^{\ell+1}}{\ell!}.
\end{aligned}$$

1.3 - Especificação de alguns métodos:

Os métodos (K,ℓ) de Brown são dados por:

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j f_{n+K}^{(j-1)}, \quad \sum_{i=0}^K |\alpha_i| > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\ell} |\beta_j| > 0$$

onde

$$\alpha_0 = (-1)^K K^{-\ell}$$

$$\alpha_1 = (-1)^{K-1} \binom{K}{1} (K-1)^{-\ell}, \quad i = 1, 2, \dots, K-1$$

$$\alpha_K = - \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i$$

$$\beta_j = \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-1} \binom{K}{1} (K-1)^{j-\ell}, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

e

$$C_{K,\ell} = \frac{1}{(\ell+K)!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{\ell-i} \binom{K}{1} (K-1)^K.$$

Calculamos os coeficientes de vários métodos, utilizando um computador PDP 11/45, sistema RSX-11M e uma rotina elaborada em FORTRAN IV PLUS. A rotina utiliza precisão dupla e fornece a constante do erro e os coeficientes.

Vamos, aqui, apresentar a listagem de coeficientes de alguns métodos (K, ℓ) .

Ainda, dentre os métodos, salientamos os principais, citados por Brown [4]: Métodos $(1,1)$; $(2,1)$; $(2,2)$; $(3,2)$; $(4,2)$; $(4,3)$; $(5,3)$; $(5,4)$; $(6,4)$; $(7,4)$ e $(8,4)$.

A região de estabilidade absoluta de tais métodos, é praticamente o semi-plano complexo esquerdo. (cf. Brown [4]).

COEFICIENTES DE ALGUNOS METODOS (K,L) DE BROWN

K= 1	L= 1	C(K,L)=-0.500000000				
ALFA(I)						
-1.000000000	1.000000000					
BETA(J)						
1.000000000						
K= 2	L= 1	C(K,L)=-0.333333333				
ALFA(I)						
0.333333333	-1.333333333	1.000000000				
BETA(J)						
0.666666667						
K= 3	L= 1	C(K,L)=-0.250000000				
ALFA(I)						
-0.181818182	0.818181818	-1.63636364	1.000000000			
BETA(J)						
0.545454545						
K= 4	L= 1	C(K,L)=-0.200000000				
ALFA(I)						
0.120000000	-0.640000000	1.440000000	-1.920000000	1.000000000		
BETA(J)						
0.480000000						
K= 5	L= 1	C(K,L)=-0.166666667				
ALFA(I)						
-0.875912409E-01	0.547445255	-1.45985401	2.18978102	-2.18978102	1.000000000	
BETA(J)						
0.437956204						
K= 6	L= 1	C(K,L)=-0.142857143				
ALFA(I)						
0.680272109E-01	-0.489795918	1.53061224	-2.72108844	3.06122449	-2.44897959	
1.000000000						
BETA(J)						
0.408163265						
K= 7	L= 1	C(K,L)=-0.125000000				
ALFA(I)						
-0.550964187E-01	0.449954086	-1.61983471	3.37465565	-4.49954086	4.04958678	
-2.69972452						
1.000000000						
BETA(J)						
0.385674931						
K= 8	L= 1	C(K,L)=-0.111111111				
ALFA(I)						
0.459922156E-01	-0.420499343	1.71703898	-4.12089356	6.43889619	-6.86815594	
5.15111695						
-2.94349540						
1.000000000						
BETA(J)						
0.367936925						
K= 9	L= 1	C(K,L)=-0.100000000				
ALFA(I)						
-0.392761958E-01	0.397671483	-1.81792678	4.94880067	-8.90784121	11.1348015	
-9.89760135						
6.36274372						
-3.18137186						
1.000000000						
BETA(J)						
0.353485762						
K= 10	L= 1	C(K,L)=-0.909090909E-01				
ALFA(I)						
0.341417152E-01	-0.379352391	1.92047148	-5.85286547	11.9496003	-17.2074245	
17.9244005						
-13.6566861						
7.68188592						
-3.41417152						
1.000000000						
BETA(J)						
0.341417152						
K= 11	L= 1	C(K,L)=-0.833333333E-01				
ALFA(I)						
-0.301035706E-01	0.364253204	-2.02362891	6.82974758	-15.6108516	25.4977243	
-30.5972692						
27.3189903						
-18.2126602						
9.10633011						
-3.64253204						
1.000000000						
BETA(J)						
0.331139277						
K= 12	L= 1	C(K,L)=-0.769230769E-01				
ALFA(I)						
0.268539078E-01	-0.351542065	2.12682950	-7.87714628	19.9390265	-36.4599342	
49.6260216						
-51.0439079						
39.8780530						
-23.6314388						
19.9390265						
10.6341475						
-3.86696272						
1.000000000						
BETA(J)						
0.322246893						
K= 13	L= 1	C(K,L)=-0.714285714E-01				
ALFA(I)						
-0.241886294E-01	0.340656531	-2.22975184	8.99333242	-24.9814789	50.5874949	
-77.0857065						
89.9333242						
-80.9399918						
56.2083276						
-29.9777747						
12.2636351						
1.000000000						
BETA(J)						
0.314452183						
K= 14	L= 1	C(K,L)=-0.666666667E-01				
ALFA(I)						
0.219674619E-01	-0.331201733	2.33221220	-10.1769260	30.7852011	-68.4115579	
115.444504						
-150.784658						
153.926005						
-123.140804						
76.9630027						
-37.3153952						
1.000000000						
BETA(J)						
0.307544466						

K= 15	L= 1	C(K,L)=-0.625000000E-01				
ALFA(I)						
-0.200910386E-01	0.322891691	-2.43410660	11.4267782	-37.3967286	90.5000832	
-167.592747	242.410937	-277.041071	251.289120	-181.000166	102.841004	
-45.7071127	15.8216929	-4.52048368	1.00000000			
BETA(J)						
0.301365578						
K= 1	L= 2	C(K,L)= 0.166666667				
ALFA(I)						
-1.00000000	1.00000000					
BETA(J)						
1.00000000	-0.50000000					
K= 2	L= 2	C(K,L)= 0.833333333E-01				
ALFA(I)						
0.142857143	-1.14285714	1.00000000				
BETA(J)						
0.857142857	-0.285714286					
K= 3	L= 2	C(K,L)= 0.500000000E-01				
ALFA(I)						
-0.470588235E-01	0.317647059	-1.27058824	1.00000000			
BETA(J)						
0.776470588	-0.211764706					
K= 4	L= 2	C(K,L)= 0.333333333E-01				
ALFA(I)						
0.216867470E-01	-0.154216867	0.520481928	-1.38795181	1.00000000		
BETA(J)						
0.722891566	-0.173493976					
K= 5	L= 2	C(K,L)= 0.238095238E-01				
ALFA(I)						
-0.119810300E-01	0.936017972E-01	-0.332806390	0.748814377	-1.49762875	1.00000000	
BETA(J)						
0.683917131	-0.149762875					
K= 6	L= 2	C(K,L)= 0.178571429E-01				
ALFA(I)						
0.741344799E-02	-0.640521907E-01	0.250203870	-0.593075840	1.00081548	-1.60130477	
1.00000000						
BETA(J)						
0.653866113	-0.133442064					
K= 7	L= 2	C(K,L)= 0.138888889E-01				
ALFA(I)						
-0.495662267E-02	0.472255993E-01	-0.204014589	0.531287992	-0.944511986	1.27509118	
-1.70012157	1.00000000					
BETA(J)						
0.629738910	-0.121437255					
K= 8	L= 2	C(K,L)= 0.111111111E-01				
ALFA(I)						
0.350565468E-02	-0.366305142E-01	0.174503699	-0.502570654	0.981583309	-1.39602960	
1.57053330	-1.79489519	1.00000000				
BETA(J)						
0.609783591	-0.112180950					
K= 9	L= 2	C(K,L)=0.909090909E-02				
ALFA(I)						
-0.258742536E-02	0.294723920E-01	-0.153978211	0.489023392	-1.05629053	1.65045395	
-1.95609357	1.88623309	-1.88623309	1.00000000			
BETA(J)						
0.592899280	-0.104790727					
K= 10	L= 2	C(K,L)= 0.757575758E-02				
ALFA(I)						
0.197460212E-02	-0.243778040E-01	0.138839212	-0.483576030	1.15185124	-1.99039894	
2.59166528	-2.63280283	2.22142739	-1.97460212	1.00000000		
BETA(J)						
0.578354693	-0.987301061E-01					
K= 11	L= 2	C(K,L)= 0.641025641E-02				
ALFA(I)						
-0.154798683E-02	0.206037047E-01	-0.127183362	0.482899329	-1.26145131	2.40376555	
-3.46142239	3.86319463	-3.43395078	2.57546309	-2.06037047	1.00000000	
BETA(J)						
0.565642373	-0.936532032E-01					
K= 12	L= 2	C(K,L)= 0.549450549E-02				
ALFA(I)						
0.124064506E-02	-0.177176419E-01	0.117910907	-0.485230068	1.38176844	-2.88761404	
4.58542414	-5.65972351	5.52707374	-4.36707061	2.94777266	-2.14383466	
1.00000000						
BETA(J)						
0.554397552	-0.893264443E-01					
K= 13	L= 2	C(K,L)= 0.476190476E-02				
ALFA(I)						
-0.101285289E-02	0.154530403E-01	-0.110342370	0.489552316	-1.51096394	3.44216472	
-5.99451816	8.15920527	-8.81194169	7.64925494	-5.43947018	3.33785670	
-2.22523780	1.00000000					
BETA(J)						
0.544350295	-0.855860692E-01					

K= 14	L= 2	C(K,L)= 0.416666667E-02				
ALFA(I)						
0.839935201E-03	-0.136377644E-01	0.104035307	-0.495242454	1.64791927	-4.06893646	
7.72462156	-11.5306304	13.7326606	-13.1833541	10.2994954	-6.65825966	
3.74527106	-2.30478219	1.00000000				
BETA(J)						
0.535295924	-0.823136497E-01					
K= 15	L= 2	C(K,L)= 0.367647059E-02				
ALFA(I)						
-0.705966931E-03	0.121563183E-01	-0.986891642E-01	0.501898365	-1.79190160	4.77004206	
-9.81490137	15.9711230	-20.8602423	22.0835281	-19.0801683	13.5512559	
-8.03037384	4.16961719	-2.38263839	1.00000000			
BETA(J)						
0.527075987	-0.794212798E-01					
K= 1	L= 3	C(K,L)=-0.416666667E-01				
ALFA(I)						
-1.000000000	1.000000000					
BETA(J)						
1.000000000	-0.500000000	0.166666667				
K= 2	L= 3	C(K,L)=-0.166666667E-01				
ALFA(I)						
0.666666667E-01	-1.066666667	1.000000000				
BETA(J)						
0.933333333	-0.400000000	0.888888889E-01				
K= 3	L= 3	C(K,L)=-0.833333333E-02				
ALFA(I)						
-0.139130435E-01	0.140869565	-1.12695652	1.000000000			
BETA(J)						
0.886956522	-0.344347826	0.626086957E-01				
K= 4	L= 3	C(K,L)=-0.46190476E-02				
ALFA(I)						
0.461933276E-02	-0.43781180E-01	0.221727973	-1.18254919	1.000000000		
BETA(J)						
0.852010265	-0.307955518	0.492728828E-01				
K= 5	L= 3	C(K,L)=-0.297619048E-02				
ALFA(I)						
-0.197518897E-02	0.192889548E-01	-0.914439340E-01	0.308623277	-1.23449311	1.000000000	
BETA(J)						
0.824298482	-0.281875927	0.411497703E-01				
K= 6	L= 3	C(K,L)=-0.198412698E-02				
ALFA(I)						
0.990351010E-03	-0.102679593E-01	0.501365199E-01	-0.158456162	0.401092159	-1.28349491	
BETA(J)						
0.801530687	-0.262046877	0.356526364E-01				
K= 7	L= 3	C(K,L)=-0.138888889E-02				
ALFA(I)						
-0.553959916E-03	0.615767481E-02	-0.319213862E-01	0.103910762	-0.246306992	0.498771659	
BETA(J)						
0.782330968	-0.246332126	0.316680419E-01				
K= 8	L= 3	C(K,L)=-0.101010101E-02				
ALFA(I)						
0.33584744E-03	-0.400744930E-02	0.222728837E-01	-0.769750862E-01	0.187927457	-0.356366140	
BETA(J)						
0.601367861	-1.37455511	1.000000000				
0.765813578	-0.233490277	0.286365648E-01				
K= 9	L= 3	C(K,L)=-0.757575758E-03				
ALFA(I)						
-0.216014824E-03	0.276811184E-02	-0.165279681E-01	0.612402027E-01	-0.158734605	0.310028526	
BETA(J)						
0.489921621	0.708636631	-1.41727326	1.000000000			
0.751377586	-0.222745615	0.262458011E-01				
K= 10	L= 3	C(K,L)=-0.582750583E-03				
ALFA(I)						
0.145843747E-03	-0.200060009E-02	0.128182981E-01	-0.510240514E-01	0.141792532	-0.294020994	
BETA(J)						
0.478549794	-0.648194430	0.820371076	-1.45843747	1.000000000		
0.738598147	-0.213585852	0.243072911E-01				
K= 11	L= 3	C(K,L)=-0.457875458E-03				
ALFA(I)						
-0.102331042E-03	0.149822878E-02	-0.102759176E-01	0.438934214E-01	-0.131040418	0.291322263	
BETA(J)						
-0.503404871	0.702294742	-0.832349324	0.936392989	-1.49822878	1.000000000	
0.727164752	-0.205657598	0.227004361E-01				
K= 12	L= 3	C(K,L)=-0.366300366E-03				
ALFA(I)						
0.741124301E-04	-0.115461709E-02	0.845237442E-02	-0.386482598E-01	0.123814078	-0.295709892	
BETA(J)						
0.547839083	-0.811427945	0.990512628	-1.04350302	1.05654680	-1.53679535	
1.000000000						
0.716844156	-0.198708322	0.213443799E-01				

K= 13	L= 3	C(K,L)=-0.297619048E-03				
ALFA(I)						
-0.551192267E-04	0.911030228E-03	-0.709659008E-02	0.346337251E-01	-0.118771348	0.304397975	
-0.605837757	0.962047920	-1.24681410	1.35287989	-1.28273056	1.18069517	
-1.57426023	1.00000000					
BETA(J)						
0.707457079	-0.192552235	0.201828235E-01				
K= 14	L= 3	C(K,L)=-0.245098039E-03				
ALFA(I)						
0.419285455E-04	-0.733148385E-03	0.605886893E-02	-0.314642390E-01	0.115166981	-0.315958795	
0.674806527	-1.15119014	1.59954140	-1.84267169	1.79948407	-1.55107045	
1.30871569	-1.61072700	1.00000000				
BETA(J)						
0.698863003	-0.187049259	0.191753215E-01				
K= 15	L= 3	C(K,L)=-0.204248366E-03				
ALFA(I)						
-0.325191864E-04	0.599957657E-03	-0.524532848E-02	0.288988863E-01	-0.112555843	0.329586019	
-0.753511703	1.37940577	-2.05905468	2.54310200	-2.63668815	2.34080979	
-1.84952872	1.44049833	-1.64628381	1.00000000			
BETA(J)						
0.690949921	-0.182091556	0.182920423E-01				
K= 1	L= 4	C(K,L)= 0.833333333E-02				
ALFA(I)						
-1.00000000	1.00000000					
BETA(J)						
1.00000000	-0.50000000	0.166666667	-0.416666667E-01			
K= 2	L= 4	C(K,L)= 0.277777778E-02				
ALFA(I)						
0.322580645E-01	-1.03225806	1.00000000				
BETA(J)						
0.967741935	-0.451612903	0.129032258	-0.215053763E-01			
K= 3	L= 4	C(K,L)= 0.119047619E-02				
ALFA(I)						
-0.437039060E-02	0.663753073E-01	-1.06200492	1.00000000			
BETA(J)						
0.942365474	-0.417918601	0.108167167	-0.147500683E-01			
K= 4	L= 4	C(K,L)= 0.595238095E-03				
ALFA(I)						
0.106423513E-02	-0.134540342E-01	0.102166573	-1.08977677	1.00000000		
BETA(J)						
0.921548791	-0.392584515	0.945986782E-01	-0.113518414E-01			
K= 5	L= 4	C(K,L)= 0.330687831E-03				
ALFA(I)						
-0.357100966E-03	0.435914266E-02	-0.275540869E-01	0.139492565	-1.11594052	1.00000000	
BETA(J)						
0.903966585	-0.372569142	0.849354729E-01	-0.929950433E-02			
K= 6	L= 4	C(K,L)= 0.198412698E-03				
ALFA(I)						
0.146702765E-03	-0.182521712E-02	0.111402412E-01	-0.469448848E-01	0.178243860	-1.14076070	
1.00000000						
BETA(J)						
0.888792541	-0.356197248	0.776351033E-01	-0.792194932E-02			
K= 7	L= 4	C(K,L)= 0.126262626E-03				
ALFA(I)						
-0.692827839E-04	0.898484374E-03	-0.558929159E-02	0.227428857E-01	-0.718787499E-01	0.218331703	
-1.16443575	1.00000000					
BETA(J)						
0.875477581	-0.342456612	0.718860845E-01	-0.693116517E-02			
K= 8	L= 4	C(K,L)= 0.841750842E-04				
ALFA(I)						
0.362280015E-04	-0.494426969E-03	0.320595450E-02	-0.132957345E-01	0.405753617E-01	-0.102590544	
0.259682315	-1.18711915	1.00000000				
BETA(J)						
0.863638820	-0.330693167	0.672170890E-01	-0.618291226E-02			
K= 9	L= 4	C(K,L)= 0.582750583E-04				
ALFA(I)						
-0.204733801E-04	0.295149566E-03	-0.201404852E-02	0.870630489E-02	-0.270800907E-01	0.661135028E-01	
-0.139300878	0.302233155	-1.20893262	1.00000000			
BETA(J)						
0.852998962	-0.320462151	0.633339261E-01	-0.559691029E-02			
K= 10	L= 4	C(K,L)= 0.416250416E-04				
ALFA(I)						
0.122997464E-04	-0.187467556E-03	0.135129049E-02	-0.614731180E-02	0.199301446E-01	-0.495925774E-01	
0.100896357	-0.182218465	0.345930367	-1.22997464	1.00000000		
BETA(J)						
0.843350959	-0.311448728	0.600426111E-01	-0.512489432E-02			
K= 11	L= 4	C(K,L)= 0.305250305E-04				
ALFA(I)						
-0.776354233E-05	0.125032626E-03	-0.952847322E-03	0.457883151E-02	-0.156225688E-01	0.405198324E-01	
-0.840219244E-01	0.146522608	-0.231541899	0.390726955	-1.25032626	1.00000000	
BETA(J)						
0.834536267	-0.303422679	0.572095748E-01	-0.473608430E-02			

```

K= 12      L= 4      C(K,L)= 0.228937729E-04
ALFA(I)
0.510406686E-05 -0.867464767E-04  0.698530341E-03 -0.354890180E-02  0.127904726E-01 -0.349119704E-01
0.754585245E-01 -0.134117825  0.204647561 -0.287461046  0.436581463 -1.27005517
1.00000000
BETA(J)
0.826430901 -0.296211081  0.547395660E-01 -0.440991377E-02

K= 13      L= 4      C(K,L)= 0.175070028E-04
ALFA(I)
-0.347224050E-05  0.621729644E-04 -0.528332186E-03  0.283628090E-02 -0.108073499E-01  0.311603126E-01
-0.708774902E-01  0.131309301 -0.204212225  0.276980557 -0.350158136  0.483456971
-1.28921859  1.00000000
BETA(J)
0.818936135 -0.289681083  0.525626610E-01 -0.413211087E-02

K= 14      L= 4      C(K,L)= 0.136165577E-04
ALFA(I)
0.243177218E-05 -0.457920044E-04  0.409969394E-03 -0.232255320E-02  0.935123788E-02 -0.285055262E-01
0.684905118E-01 -0.133533474  0.216463840 -0.299239612  0.365282730 -0.419808659
0.531320334 -1.30786544  1.00000000
BETA(J)
0.811972132 -0.283728641  0.506262618E-01 -0.389245666E-02

K= 15      L= 4      C(K,L)= 0.107499140E-04
ALFA(I)
-0.174622276E-05  0.345178547E-04 -0.324997911E-03  0.193977381E-02 -0.824188576E-02  0.265472789E-01
-0.674370748E-01  0.138884341 -0.236930555  0.341400191 -0.424756462  0.471365037
-0.496582096  0.580141584 -1.32603791  1.00000000
BETA(J)
0.805473453 -0.278270910  0.488899714E-01 -0.368343863E-02

```

Capítulo 2 - Características dos métodos (K, ℓ)

Vamos, aqui, estudar as principais características dos métodos (K, ℓ) , ou seja, estudar resultados sobre ordem, consistência, estabilidade, convergência e erro.

2.1 - Ordem e constante do erro:

Proposição 2.1: Existem exatamente p métodos (K, ℓ) de Brown com ordem p .

Dem: Temos que existe um único método (K, ℓ) de Brown com ordem $K + \ell - 1$.

Consideremos, agora, $p \geq 1$.

i) Se p é par temos: Os seguintes métodos (K, ℓ) possuem ordem p .

$$(1, p); (2, p-1); \dots; \left(\frac{p}{2}, \frac{p}{2}+1\right); \left(\frac{p}{2}+1, \frac{p}{2}\right); \dots; (p, 1).$$

Se $K \geq p+1$ temos $K + \ell - 1 \geq p + \ell - 1 > p$ pois $\ell \geq 1$ e o método (K, ℓ) não tem ordem p . Portanto apenas os métodos acima possuem ordem p .

ii) Se p é ímpar temos: Os seguintes métodos (K, ℓ) possuem ordem p .

$$(1, p); (2, p-1); \dots; \left(\frac{p+1}{2}, \frac{p+1}{2}\right); \dots; (p, 1).$$

De maneira análoga, apenas os métodos acima possuem ordem p .

Portanto existem exatamente p métodos de or-

dem p.

Vamos agora, dar alguns resultados obtidos sobre a constante do erro.

Proposição 2.2: Consideremos 2 métodos de Brown com um mesmo número de passos: (K, ℓ_1) e (K, ℓ_2) .

Então se $\ell_1 > \ell_2$ temos $|C_{K, \ell_1}| < |C_{K, \ell_2}|$.

Dem: Usando o lema 0.2 temos para $\ell_1 > \ell_2$

$$\begin{aligned} |C_{K, \ell_1}| &= \left| \frac{(-1)^{\ell_1} K!}{(K+\ell_1)!} \right| = \frac{K!}{(K+\ell_1)(K+\ell_1-1)\dots(K+\ell_2+1)(K+\ell_2)!} = \\ &= \frac{1}{(K+\ell_1)\dots(K+\ell_2+1)} \left| \frac{(-1)^{\ell_2} K!}{(K+\ell_2)!} \right| = \frac{1}{(K+\ell_1)\dots(K+\ell_2+1)} |C_{K, \ell_2}|. \end{aligned}$$

Portanto $|C_{K, \ell_1}| < |C_{K, \ell_2}|$.

Proposição 2.3: Consideremos 2 métodos de Brown que usem o mesmo número de derivadas: (K_1, ℓ) e (K_2, ℓ) .

Então se $K_1 > K_2$ temos $|C_{K_1, \ell}| < |C_{K_2, \ell}|$.

Dem: Usando o lema 0.2 temos para $K_1 > K_2$

$$\begin{aligned} |C_{K_1, \ell}| &= \frac{K_1}{(K_1+\ell)!} = \frac{K_1(K_1-1)\dots K_2!}{(K_1+\ell)(K_1+\ell-1)\dots(K_2+\ell)!} = \\ &= \frac{K_1(K_1-1)\dots(K_2+1)}{(K_1+\ell)\dots(K_2+\ell+1)} |C_{K_2, \ell}|. \end{aligned}$$

Portanto $|C_{K_1, \ell}| < |C_{K_2, \ell}|$.

Obs.: 2.1 - Levando em conta as proposições 2.2 e 2.3, observamos que a constante do erro em módulo decai mais rapidamente quando aumentamos o número de derivadas do que quando aumentamos o número de passos do método.

2.2 - A constante do erro $C_{K, \ell}$ do método (K, ℓ) de Brown é positiva ou negativa, conforme ℓ é par ou ímpar respectivamente. Além disso, como já era esperado, a constante do erro nunca se anula, pois $|C_{K, \ell}| = \frac{K!}{(K+\ell)!}$.

2.3 - Para métodos de mesma ordem p , temos que o módulo da constante do erro é menor para os métodos com maior número de derivadas.

2.4 - Na escolha de um método (K, ℓ) , dentre aqueles de ordem p , deve-se levar em conta a constante do erro, mas deve-se observar a dificuldade que o problema apresenta, quanto a possibilidade do número de derivadas, além da estabilidade satisfatória do método.

2.2 - Estabilidade, convergência e raiz principal:

Neste parágrafo, vamos considerar os métodos (K, ℓ) de Brown na forma:

$$Y_{n+K} = \Omega_n(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+K}, h) =$$

$$= \phi_n(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+K}, h) + h\psi_n(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+K}, h) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_K} \left(- \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i Y_{n+i} + h \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j h^{j-1} f_{n+K}^{(j-1)} \right).$$

Vamos considerar, ainda, $0 < h \leq h_0$ e $(n+K)h \leq b-a$.

$$Y_0 = W_0 + u_0; \dots; Y_{K-1} = W_{K-1} + u_{K-1}; Y_{n+K} = \Omega_n(Y_0, \dots, Y_{n+K}, h) + u_{n+K}$$

e

$$\tilde{Y}_0 = W_0 + \tilde{u}_0; \dots; \tilde{Y}_{K-1} = W_{K-1} + \tilde{u}_{K-1}; \tilde{Y}_{n+K} = \Omega_n(\tilde{Y}_0, \dots, \tilde{Y}_{n+K}, h) + \tilde{u}_{n+K}.$$

Def. 2.1: Dizemos que um método na forma $Y_{n+K} = \Omega_n$ é estável se a sequência Ω_n é estável, ou seja:

i) O problema $x = \Omega_n(Y_0, \dots, Y_{n+K-1}, x, h)$ possui solução única.

ii) Existe um nº real $\alpha > 0$ tal que:

$$\|Y_N - \tilde{Y}_N\| < \alpha \sum_{i=0}^N \|u_i - \tilde{u}_i\|, \quad Nh \leq b-a.$$

Obs.: 2.5 - Para h suficientemente pequeno, Ω_n é contração e portanto o problema em i) tem solução única.

Def. 2.2: O vetor

$$\ell_{n+K} = \Omega_n(Y(x_0), \dots, Y(x_0 + (n+K)h), h) - Y(x_0 + (n+K)h) \quad \text{é}$$

denominado erro de truncamento local.

Def. 2.3: O método determinado pela sequência Ω_n é consistente se

$$\max_{n \geq 0} \|\ell_{n+K}\| = o(h) \quad \text{quando } h \rightarrow 0.$$

Def. 2.4: O erro de discretização acumulado é dado pelo vetor $d_m = y_m - y(x_0 + mh)$, onde os y_m são determinados sucessivamente pela sequência Ω_n com valores iniciais $y_0, y_1, \dots, y_{K-1}$.

Def. 2.5: O método determinado pela sequência Ω_n é convergente se $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n \geq 0} \|d_n\| = 0$, sempre que para os valores iniciais temos

$$\|d_i\| = o(1) \quad , \quad i = 0, 1, \dots, K-1.$$

Obs.: 2.6 - $\|d_i\| = o(1) \iff \lim_{h \rightarrow 0} \|d_i\| = 0$.

Lema 2.1: Consideremos

$$\Psi_n(y_0, \dots, y_{n+K}, h) = \frac{1}{\alpha_K} \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i h^{i-1} f^{(i-1)}(x_{n+K}, y_{n+K}).$$

Se $\|f^{(j-1)}(x, y) - f^{(j-1)}(x, y^*)\| \leq L_j \|y - y^*\|$, $j = 1, \dots, \ell$; $x \in [a, b]$, então

$$\|\Psi_n(y_0, \dots, y_{n+K}, h) - \Psi_n(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n+K}, h)\| \leq \alpha \|y_{n+K} - \tilde{y}_{n+K}\|, \quad \text{com}$$

$$\alpha = \frac{\frac{1-h_0}{1-h_0} \max_{1 \leq i \leq \ell} |\beta_i| L_i}{|\alpha_K|} \geq 0, \quad \text{para } h \in (0, h_0].$$

$$\text{Dem: } \|\Psi_n(y_0, \dots, y_{n+K}, h) - \Psi_n(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n+K}, h)\| =$$

$$= \frac{1}{|\alpha_K|} \left\| \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i h^{i-1} [f^{(i-1)}(x_{n+K}, y_{n+K}) - f^{(i-1)}(x_{n+K}, \tilde{y}_{n+K})] \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\alpha_K|} \sum_{i=1}^{\ell} |\beta_i| h^{i-1} \|f^{(i-1)}(x_{n+K}, y_{n+K}) - f^{(i-1)}(x_{n+K}, \tilde{y}_{n+K})\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\alpha_K|} \sum_{i=1}^{\ell} |\beta_i| h^{i-1} L_1 \|y_{n+K} - \tilde{y}_{n+K}\| \leq$$

$$\leq \frac{\max_{1 \leq i \leq \ell} |\beta_i| L_1}{|\alpha_K|} \|y_{n+K} - \tilde{y}_{n+K}\| \sum_{i=1}^{\ell} h^{i-1} =$$

$$= \frac{\max_{1 \leq i \leq \ell} |\beta_i| L_1}{|\alpha_K|} \|y_{n+K} - \tilde{y}_{n+K}\| \frac{1-h^{\ell}}{1-h} \leq$$

$$\leq \frac{\max_{1 \leq i \leq \ell} |\beta_i| L_1}{|\alpha_K|} \|y_{n+K} - \tilde{y}_{n+K}\| \frac{1-h_0^{\ell}}{1-h_0} =$$

$$= \alpha \|y_{n+K} - \tilde{y}_{n+K}\| ,$$

$$\text{onde } \alpha = \frac{1-h_0^{\ell}}{1-h_0} \max_{1 \leq i \leq \ell} |\beta_i| L_1 .$$

Portanto o lema fica, assim, demonstrado.

Teorema 2.1: Suponhamos $f(x, y)$ satisfazendo a hipótese do lema 2.1.

O método (K, ℓ) de Brown na forma:

$$y_{n+K} = \Omega_n = \phi_n + h \Psi_n \text{ é estável se e somente se a}$$

sequência ϕ_n é estável.

Dem: i) Suficiência:

Suponhamos então ϕ_n estável e vamos mostrar que Ω_n é estável.

Vamos denotar $d_n = y_n - \tilde{y}_n$ e $\ell_n = u_n - \tilde{u}_n$.

Temos então:

$$y_{n+K} = \phi_n(y_0, \dots, y_{n+K}, h) + \{h\psi_n(y_0, \dots, y_{n+K}, h) + u_{n+K}\}$$

$$\tilde{y}_{n+K} = \phi_n(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n+K}, h) + \{h\psi_n(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_{n+K}, h) + \tilde{u}_{n+K}\}$$

para $n \geq 0$.

Desta maneira podemos considerar o cálculo do valor y_{n+K} através de ϕ_n , com uma perturbação causada por $h\psi_n + u_{n+K}$.

Como ϕ_n é estável temos que existe $\gamma > 0$ e $h_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|y_n - \tilde{y}_n\| &\leq \gamma \left\{ \sum_{i=0}^{K-1} \|u_i - \tilde{u}_i\| + \right. \\ &\left. + \sum_{i=K}^n \|h\psi_{i-K}(y_0, \dots, y_i, h) + u_i - h\psi_{i-K}(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_i, h) - \tilde{u}_i\| \right\}, \end{aligned}$$

com $h \in (0, h_1] \subset C(0, h_0]$ e $n \geq K$, $hn \leq b-a$.

Portanto

$$\|d_n\| \leq \gamma \left\{ \sum_{i=0}^n \|u_i - \tilde{u}_i\| + h \sum_{i=K}^n \|\psi_{i-K}(y_0, \dots, y_i, h) - \psi_{i-K}(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_i, h)\| \right\}.$$

Usando o lema 2.1 temos:

$$\|d_n\| \leq \gamma \sum_{i=0}^n \|\ell_i\| + \gamma \alpha h \sum_{i=K}^n \|d_i\| = \gamma \alpha h \|d_n\| + \gamma \alpha h \sum_{i=K}^{n-1} \|d_i\| + \gamma \sum_{i=0}^n \|\ell_i\|.$$

$$\text{Portanto } (1-\gamma \alpha h) \|d_n\| \leq \gamma \alpha h \sum_{i=K}^{n-1} \|d_i\| + \gamma \sum_{i=0}^n \|\ell_i\|.$$

Podemos tomar $h \in (0, h_2] \subset (0, h_1]$ tal que

$0 < 1 - \gamma \alpha h < 1$ e obter:

$$\|d_n\| \leq \frac{\gamma \alpha h}{1 - \gamma \alpha h} \sum_{i=0}^{n-1} \|d_i\| + \frac{\alpha}{1 - \gamma \alpha h} \sum_{i=0}^n \|\ell_i\|.$$

$$\text{Portanto } \|d_j\| \leq \beta h \sum_{i=0}^{j-1} \|d_i\| + s, \text{ onde } s = \lambda \sum_{i=0}^N \|\ell_i\|,$$

para todo $j \leq N$; N natural $|Nh \leq b-a$ e $h \in (0, h_2] \subset (0, h_0]$.

Notemos que $\lambda > 0$ e $\beta \geq 0$.

Se $\beta = 0$ temos $\|y_n - \tilde{y}_n\| \leq \lambda \sum_{i=0}^n \|u_i - \tilde{u}_i\|$ com $\lambda > 0$, $h \in (0, h_2]$

e n qualquer natural tal que $nh \leq b-a$. Portanto Ω_n é estável.

Se $\beta > 0$, vamos definir:

$$D_0 = s, \quad D_j = \beta h \sum_{i=0}^{j-1} \|d_i\| + s, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Temos, então, $\|d_i\| \leq D_i, \quad i = 1, \dots, N.$

Agora, $D_{i+1} - D_i = \beta h \|d_i\| \leq \beta h D_i$. Logo $D_{i+1} \leq (1 + \beta h) D_i$

para $i=1, \dots, N-1$; N : natural $|Nh \leq b-a$, $h \in (0, h_2] \subset (0, h_0]$.

Desta maneira temos:

$$\|Y_N - \tilde{Y}_N\| = \|d_N\| \leq D_N \leq (1+\beta h) D_{N-1} \leq \dots \leq (1+\beta h)^N D_0 \leq \ell^{\beta(b-a)} S =$$

$$= Q \sum_{i=0}^N \|u_i - \tilde{u}_i\|.$$

Portanto, existe $Q > 0$ e h_2 , $0 < h_2 < h_0$ tal que:

$$\|Y_N - \tilde{Y}_N\| \leq Q \sum_{i=0}^N \|u_i - \tilde{u}_i\| \text{ para cada } N \text{ natural, tal que } Nh \leq b-a.$$

Portanto Ω_n é estável.

ii) necessidade:

Suponhamos que Ω_n é estável. Vamos mostrar ,
que ϕ_n é estável.

$$\text{Notemos que } \Omega_n = \phi_n + h\Psi_n \iff \phi_n = \Omega_n + h(-\Psi_n)$$

Logo usando i) , temos que ϕ_n é estável.

Proposição 2.4: Seja a sequência ϕ_n dada por:

$$\phi_n(v_0, \dots, v_{n+K}, h) = - \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i v_{n+i}$$

onde $\alpha_0, \dots, \alpha_K$ são valores reais com $\alpha_K = 1$.

Seja o polinômio característico associado,

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^K \alpha_i z^i.$$

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade da sequência ϕ_n é que $\rho(z)$ tenha todas as raízes com módulo menor ou igual a 1 e, as de módulo 1 sejam simples.

Dem: Estudar as condições de estabilidade da sequência ϕ_n , é equivalente a estudar o problema:

$$y_{n+K} = \phi_n(y_0, \dots, y_{n+K}, h) = - \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i y_{n+i}$$

$$\text{Portanto } y_{n+K} = - \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i y_{n+i} \xrightarrow{\alpha_{K-1}} \sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = 0$$

Consideremos, então,

$$y_0 = w_0 + u_0, \dots, y_{K-1} = w_{K-1} + u_{K-1}, \quad \sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = u_{n+K}$$

e

$$\tilde{y}_0 = w_0 + \tilde{u}_0, \dots, \tilde{y}_{K-1} = w_{K-1} + \tilde{u}_{K-1}, \quad \sum_{i=0}^K \alpha_i \tilde{y}_{n+i} = \tilde{u}_{n+K},$$

$$n \geq 0, (n+K)h \leq b-a.$$

Denotando $d_n = y_n - \tilde{y}_n$ e $\ell_n = u_n - \tilde{u}_n$ temos:

$$d_i = \ell_i, \quad 0 \leq i \leq K-1 \quad \text{e}$$

$$(1) \quad \sum_{i=0}^K \alpha_i d_{n+i} = \ell_{n+K} \quad \text{para } n \geq 0 \quad \text{e } (n+K)h \leq b-a.$$

Usando o lema 0.3 temos que uma solução particular de (1) pode ser dada por:

$$(2) \quad \bar{d}_n = \sum_{m=K}^n \eta_{n,m} \ell_m, \text{ onde } \bar{d}_0 = \dots = \bar{d}_{K-1} = 0 \quad e$$

$$\eta_{nm} = \begin{cases} 0 & p/m > n \\ \frac{1}{\alpha_K} & p/m = n \\ \text{solução do problema homogêneo associado a (1)} & p/K \leq m < n. \end{cases}$$

Além disso $\sum_{i=0}^K \alpha_i \eta_{n+i,m} = 0$, $m < n+K$ pois nesse caso

$\eta_{n+i,m}$ é solução do problema homogêneo associado a (1).

Consideremos, agora, a solução geral de (1), com condições iniciais $d_0 = \ell_0, \dots, d_{K-1} = \ell_{K-1}$ e

$v_{n,i}$, $0 \leq i \leq K-1$ o sistema fundamental usual para o problema homogêneo em (1).

Assim a solução geral fica:

$$d_n = \sum_{i=0}^{K-1} C_i v_{n,i} + \bar{d}_n, \quad n \geq K$$

onde C_i são constantes determinadas, impondo as condições iniciais acima.

Notemos que as constantes C_i , $0 \leq i \leq K-1$ ficam determinadas em função das condições iniciais ℓ_j .

$$\text{Temos: } (D_0 v_{n,0} + \dots + C_{K-1} v_{n,K-1})(x_0) = \ell_0$$

$$(C_0 v_{n,0} + \dots + C_{K-1} v_{n,K-1})(x_1) = \ell_1$$

$$\vdots$$

$$(C_0 v_{n,0} + \dots + C_{K-1} v_{n,K-1})(x_{K-1}) = \ell_{K-1}, \text{ ou seja,}$$

temos um sistema $Ac = e$, donde $c = A^{-1}e$. Devemos salientar que A^{-1} sempre existe, pois $v_{n\ i}, 0 \leq i \leq K-1$ é o sistema fundamental usual.

Desta maneira: $C_j = \sum_{i=0}^{K-1} u_{i\ j} \ell_i$, $0 \leq j \leq K-1$ onde $u_{i\ j}$ são os elementos da matriz A^{-1} .

Reescrevendo a solução geral obtemos:

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{m=0}^{K-1} \left(\sum_{i=0}^{K-1} u_{i\ m} \ell_i \right) v_{n\ m} + \bar{d}_n = \sum_{m=0}^{K-1} \left(\sum_{i=0}^{K-1} u_{m\ i} \ell_i \right) \ell_m + \bar{d}_n = \\ &= \sum_{m=0}^{K-1} \eta_{n\ m} \ell_m + \bar{d}_n = \sum_{m=0}^{K-1} \eta_{n\ m} \ell_m + \sum_{m=K}^n \eta_{n\ m} \ell_m = \sum_{m=0}^n \eta_{n\ m} \ell_m, \end{aligned}$$

onde de maneira geral

$$\eta_{n\ m} = \begin{cases} 0 & p/n < m \\ 1 & p/n = m \\ w_{n\ m} & p/n > m \end{cases}$$

com $m, n = 0, 1, 2, \dots$, onde $w_{n\ m}$ é solução do problema homogêneo associado a (1). Notemos que $w_{n\ m} = \sum_{i=0}^{K-1} u_{m\ i} v_{n\ i}$, ($0 \leq m \leq K-1$). Ainda, como $\bar{d}_n$ é solução particular podemos tomar $w_{n\ m} = w_{n+K-m-1, K-1} = \sum_{i=0}^{K-1} u_{K-1, i} v_{n\ i}$, $m \geq K$.

1) suficiência:

Suponhamos que as raízes de $\rho(z)$ satisfazem as condições da proposição.

Seja $v_{n\ 0}, \dots, v_{n\ K-1}$ o sistema fundamental usual de soluções para a equação de diferenças, com polinômio característico associado $\rho(z)$.

Sejam r_i , $i=0, 1, \dots, s$ as raízes distintas de $\rho(z)$.

Então colocamos: se $\|r_i\| = 1$ então $v_{n\ i} = r_i^n$.

Se $|r_i| < 1$ então

$$v_{n \ i_0} = r_i^n, v_{n \ i_1} = nr_i^n, \dots, v_{n \ i_{s_i-1}} = n^{s_i-1} r_i^n,$$

onde s_i é a multiplicidade da raiz r_i .

Podemos considerar, sem perda de generalidade que r_j , $j=0, \dots, p$ sejam raízes simples.

Desta maneira, podemos escrever:

$$\eta_{n \ m} = \sum_{i=0}^{K-1} u_{m \ i} v_{n \ i} \quad p/n > m \quad ; \quad m, n \geq 0.$$

Temos então

$$\exists \gamma_m > 0 \quad | \quad \gamma_m \text{ independente de } n \text{ e } \|\eta_{n \ m}\| < \gamma_m.$$

De fato:

$$\begin{aligned} \|\eta_{n \ m}\| &= \left\| \sum_{i=0}^{K-1} u_{m \ i} v_{n \ i} \right\| \leq \max_{0 \leq i \leq K-1} \|u_{m \ i}\| \sum_{i=0}^{K-1} \|v_{n \ i}\| \leq \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq K-1} \|u_{m \ i}\| \{p+1 + \sum_{i=p+1}^{K-1} \|v_{n \ i}\|\} = \\ &= \max_{0 \leq i \leq K-1} \|u_{m \ i}\| \{p+1 + \sum_{i=p+1}^{K-1} \|p(n)\| \|r_i\|^n\} \end{aligned}$$

onde $p(n)$ é um polinômio em n com grau menor do que a multiplicidade da raiz r_i .

Como para $i = p+1, \dots, K-1$; $\|r_i\| < 1$, temos $\exists \bar{\beta}_i$

constante não dependendo de n , tal que $\|p(n)\| \|r_i\|^n < \bar{\beta}_i$.

$$\text{Logo } \|\eta_{n \ m}\| = \max_{0 \leq i \leq K-1} \|u_{m \ i}\| \{p+1 + \sum_{i=p+1}^{K-1} \bar{\beta}_i\}.$$

Portanto $\|\eta_{n\ m}\| < \gamma_m$, γ_m independente de n .

Assim

$$\|d_n\| = \left\| \sum_{m=0}^n \eta_{n\ m} \ell_m \right\| \leq \sum_{m=0}^n \|\eta_{n\ m}\| \|\ell_m\| < \max_{0 \leq m \leq K-1} \gamma_m \sum_{m=0}^n \|\ell_m\|$$

Portanto $\|d_n\| \leq \gamma \sum_{m=0}^n \|\ell_m\|$ com $\gamma > 0$ e γ independente de n .

Segue que: ϕ_n é estável.

ii) necessidade:

Suponhamos ϕ_n estável e vamos mostrar que as raízes de $\rho(z)$ satisfazem as condições da proposição.

Como ϕ_n é estável temos $\|d_n\| \leq \gamma \sum_{m=0}^n \|\ell_m\|$

Tomando $\ell_j = 0$ $j \neq m$ onde j é um inteiro entre $\{0, 1, \dots, K-1\}$ e $\ell_m \neq 0$ temos:

$$d_n = \eta_{n\ m} \ell_m \text{ donde } \|\eta_{n\ m}\| \|\ell_m\| = \|d_n\| < \alpha \|\ell_m\|.$$

Logo $\|\eta_{n\ m}\| < \alpha$.

Segue daí que para quaisquer coeficientes γ_m limitados, temos:

$$\left\| \sum_{i=0}^{K-1} \gamma_m \eta_{n\ m} \right\| < \gamma, \quad n \rightarrow \infty.$$

Podemos, então, obter, escolhendo γ_m adequados, o seguinte:

$$\left\| \sum_{m=0}^{K-1} \gamma_m \eta_{n\ m} \right\| = \|v_{n\ j}\| < \gamma, \quad n \rightarrow \infty \quad j=0, 1, \dots, K-1$$

onde $v_n j$ $0 \leq j \leq K-1$ formam o sistema fundamental de soluções para a equação de diferenças que tem $\rho(z)$ como polinômio ca racterístico associado.

De fato:

$$\sum_{m=0}^{K-1} \gamma_m \eta_{n m} = \sum_{m=0}^{K-1} \gamma_m \left(\sum_{i=0}^{K-1} u_{m i} v_{n i} \right) = v_{n j} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} u_{0 0} & & u_{K-1 0} \\ & & \\ u_{0 K-1} & & u_{K-1 K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \text{ na posição } j.$$

Este sistema possui solução única, já que $u_{i j}$ são elementos de uma matriz inversível.

$$\text{Portanto } \|v_{n j}\| < \gamma, \quad 0 \leq j \leq K-1.$$

Como $v_{n i}$ formam o sistema fundamental usual de soluções, temos:

$$v_{n j} = p(n) r_i^n \quad 0 \leq i \leq s, \quad 0 \leq j \leq K-1,$$

onde $p(n)$ é polinômio de grau menor ou igual a multiplicidade da raiz r_i .

Como $\|v_{n j}\| < \gamma$ temos:

$$\|p(n) r_i^n\| = \|p(n)\| \|r_i\|^n < \gamma \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|r_i\| \leq 1 \quad \text{para todo } 0 \leq i \leq s, \text{ ou seja, as raízes de } \rho(z) \text{ estão no disco unitário pois caso contrário } \|v_{n j}\| \text{ não seria limitada } (n \rightarrow \infty).$$

Além disso se $\|r_i\| = 1$ então r_i é uma raiz sim ples de $\rho(z)$ pois caso contrário $p(n)$ diverge $(n \rightarrow \infty)$ e $\|v_{n j}\|$ não seria limitada.

Portanto se ϕ_n é estável, então as raízes de $\rho(z)$ estão no disco unitário e as de módulo 1 são simples.

Teorema 2.2: Se o método determinado pela sequência Ω_n é estável e consistente, então o método é convergente.

Dem: Sejam $\{y_n\}$ e $\{\tilde{y}_n\}$ sequências determinadas pelo método Ω_n da seguinte maneira:

i) $\{y_n\}$ obtidos sem perturbações. Portanto $u_n = 0$ ($n \geq 0$)

ii) Queremos $\tilde{y}_n = y(x_n)$ ($n \geq 0$). Portanto calculamos $\tilde{y}_{n+K}$ através da sequência Ω_n com valores iniciais perturbados, i.e., $\tilde{y}_i = y_i - d_i = y(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, K-1$.

Assim $\tilde{y}_{n+K} = y(s_{n+K}) = \hat{y}_{n+K} - \ell_{n+K}$ ($n \geq 0$).

Temos então, $\hat{y}_{n+K} = \Omega_n(y(x_0), \dots, y(x_{n+K}), h)$. Além disso

$\tilde{u}_i = d_i$ $i = 0, \dots, K-1$ e $\tilde{u}_{n+K} = -\ell_{n+K}$ ($n \geq 0$).

Usando a estabilidade da sequência Ω_n temos:

$$\|y_N - \tilde{y}_N\| \leq \alpha \sum_{i=0}^N \|\tilde{u}_i\|, \quad \alpha > 0, \quad h \in (0, h_1] \subset (0, h_0], \quad N \text{ natural} \mid Nh \leq b-a.$$

Daí:

$$\|y_N - \tilde{y}_N\| \leq \alpha \sum_{i=0}^{K-1} \|\tilde{u}_i\| + \alpha \sum_{i=K}^N \|\tilde{u}_i\| \leq \alpha \sum_{i=0}^{K-1} \|d_i\| + \alpha (N-K+1) \max_{K \leq i \leq N} \|\ell_i\| \leq$$

$$\leq \alpha \sum_{i=0}^{K-1} \|d_i\| + \alpha N \max_{K \leq i \leq N} \|\ell_i\| \leq \alpha \sum_{i=0}^{K-1} \|\tilde{u}_i\| + \alpha \frac{b-a}{h} \max_{K \leq i \leq N} \|\ell_i\|.$$

Assim:

$$\|d_n\| = \|y_n - y(x_n)\| = \|y_n - \tilde{y}_n\| \leq \alpha \sum_{i=0}^{K-1} \|d_i\| + \alpha (b-a) \frac{\max_{K \leq i \leq N} \|\ell_i\|}{h}.$$

Usando a consistência do método, i.e., $\|\ell_i\| = o(h)$, $K \leq i \leq N$,

segue que $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n \geq 0} \|d_n\| = 0$ sempre que os valores iniciais

$y_0, \dots, y_{K-1}$ satisfazem $\|d_i\| = O(1)$, $i=0, \dots, K-1$.

Portanto se o método é estável e consistente então ele é convergente.

Proposição 2.5: Uma condição necessária para a convergência do método (K, ℓ) de Brown é que nenhuma das raízes do polinômio $p(z)$ exceda, em módulo, o valor 1 e, as de módulo 1 são simples.

Dem: Se o método é convergente, temos que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{n \geq 0} \|d_n\| = 0 \quad \text{sempre que } y_i \text{ satisfaz } \lim_{h \rightarrow 0} \|d_i\| = 0$$

para $i = 0, 1, \dots, K-1$.

Isto significa que $\lim_{h \rightarrow 0} y_n = y(x)$ para todo $x \in [a, b]$
 x fixo

e $\{y_n\}$ solução da equação de diferenças

$$y_{n+K} = \Omega_n(y_0, \dots, y_{n+K}, h) \quad \text{e} \quad y_i \text{ satisfazendo}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|d_i\| = 0 \quad i=0, \dots, K-1.$$

Como o método é convergente, temos que ele é convergente quando aplicado ao problema $y' = 0$, $y(0) = 0$, cuja solução é $y(x) = 0$, $x \in [a, b]$.

Aplicando o método a este problema, obtemos:

$$(3) \quad \alpha_K y_{n+K} + \dots + \alpha_0 y_n = 0 \text{ com } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \quad (h=x/n) \text{ para toda}$$

solução desta equação de diferenças, com $\lim_{h \rightarrow 0} y_i = 0$ ($0 \leq i \leq K-1$).

Seja $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$. $0 \leq \theta \leq 2\pi$, uma raiz de $\rho(z)$.

Como num método (K, l) de Brown os coeficientes são reais, temos que $\bar{z}$ também é raiz de $\rho(z)$.

Portanto $y_n = hr^n \cos n\theta$ é uma solução do problema (3).

Temos, então, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ($h = x/n$).

Se $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} hr^n = 0$ ($h = x/n$) $\Rightarrow r \leq 1$.

Se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$ podemos tomar $\sin^2 \theta \neq 0$ e fazer:

$$\begin{aligned} \frac{y_n^2 - y_{n+1}y_{n-1}}{\sin^2 \theta} &= \frac{h^2 r^2 \cos^2 n\theta - hr^{n+1} \cos(n+1)\theta \times hr^{n-1} \cos(n-1)\theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{h^2 r^{2n}}{\sin^2 \theta} (\cos^2 n\theta - \cos(n+1)\theta \cos(n-1)\theta) = \\ &= \frac{h^2 r^{2n}}{\sin^2 \theta} (\cos^2 n\theta \sin^2 \theta + \sin^2 n\theta \sin^2 \theta) = \\ &= \frac{h^2 r^{2n}}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta = h^2 r^{2n}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ temos $\lim_{h \rightarrow 0} (y_n^2 - y_{n+1}y_{n-1}) \frac{1}{\sin^2 \theta} = 0$.

Portanto $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 r^{2n} = 0$ ($h = x/n$) $\Rightarrow r \leq 1$.

Concluimos, então, que se o método é convergente então as raízes $\rho(z)$ estão no disco unitário.

Agora, vamos mostrar que se $z = e^{i\theta}$ é raiz de $\rho(z)$, então a multiplicidade de z como raiz é 1.

Suponhamos que a multiplicidade de $z = re^{i\theta}$

seja maior do que 1.

Temos que $y_n = h^{1/2} n r^n \cos n\theta$ é solução de (3).

O método é convergente e portanto segue que para $\theta=0$ ou $\theta=\pi$

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_n = h^{1/2} n r^n = 0 \Rightarrow r < 1 \quad (h = x/n) \quad \text{pois caso contrário}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |y_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/2} n^{1/2} r^n = \infty.$$

Estamos supondo sempre que y_i ($i = 0, 1, \dots, K-1$) satisfaz $\lim_{h \rightarrow 0} \|d_i\| = 0$.

Se $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$ fazemos para $z_n = n^{-1} h^{-1/2} y_n$, portanto $z_n = r^n \cos n\theta$, o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{z_n^2 - z_{n+1} z_{n-1}}{\sin^2 \theta} &= \frac{r^{2n} \cos^2 n\theta - r^{2n} \cos(n+1)\theta \cos(n-1)\theta}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{r^{2n}}{\sin^2 \theta} (\cos^2 n\theta \sin^2 \theta + \sin^2 n\theta \sin^2 \theta) = r^{2n} \end{aligned}$$

Com o $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ temos $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

$$\text{Portanto } \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0 \Rightarrow r < 1.$$

Fica assim demonstrado que se o método é convergente, então ele satisfaz a condição das raízes, ou seja, todas as raízes de $\rho(z)$ estão no disco unitário e além disso as de módulo 1 são simples.

Como conclusão dos resultados anteriores, temos o seguinte:

Teorema 2.3: Seja $f^{(i)}(x, y)$ y -lipschitz $0 \leq i \leq \ell-1$.

O método (K, ℓ) de Brown é convergente se e somente se é estável.

Dem: i) Necessidade:

O método é convergente. Portanto, pela proposição 2.5, as raízes de $\rho(z)$ estão no disco unitário e as de módulo 1 são simples. Pela proposição 2.4 temos que, neste caso, ϕ_n é estável. Assim, usando o teorema 2.1, obtemos que o método é estável.

ii) Suficiência:

Pela obs. 1.4 temos que o método (K, ℓ) de Brown é sempre consistente.

Como por hipótese o método é estável, segue pelo teorema 2.2 que o método é convergente.

Para efeito de ilustração, computamos numericamente, o valor absoluto das raízes de $\rho(z)$ associado a alguns métodos (K, ℓ) . Aproveitando esta tabela, usamos alguns métodos estáveis e instáveis para ilustrar a convergência e estabilidade.

O problema amostra é $y' = -2y$, $y(0) = 1$
 $\therefore y(x) = e^{-2x}$.

Calculamos, através dos métodos $(4, 1); (3, 2); (2, 3); (7, 1); (5, 3); (10, 1); (8, 3)$, aproximações de 0.0 a 4.0 com $h = 0.1$, $h = 0.08$ e $h = 0.05$.

A seguir damos a tabela dos módulos e os resultados obtidos, bem como as conclusões tiradas.

MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 1	L= 1								
1.000000									
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 2	L= 1								
0.333333	1.000000								
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 3	L= 1								
0.4264015	0.4264013	1.000000							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 4	L= 1								
0.3814785	0.5608615	0.5608613	1.000000						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 5	L= 1								
0.4176006	0.4176010	0.7087108	0.7087106	0.9999999					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 6	L= 1								
0.4061224	0.4740353	0.4740345	0.8633803	0.8633804	1.000000				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 7	L= 1								
0.4259126	0.4259025	0.5391409	0.5391429	1.022218	1.022218	1.000002			
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 8	L= 1								
0.4214110	0.4582342	0.4582335	0.6089716	0.6089718	0.9999989	1.183870			
1.183869									
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 9	L= 1								
0.4340689	0.4340629	0.4969828	0.4969859	0.6817465	0.6817465	1.000002			
1.347544	1.347544								
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=10	L= 1								
0.4319991	0.4552724	0.4552723	0.5395647	0.5395647	0.7565234	0.7565235			
1.000000	1.512740	1.512740							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=11	L= 1								
0.4408146	0.4408377	0.4814617	0.4814557	0.5846370	0.5846373	0.8327519			
0.8327520	0.9999998	1.679117	1.679117						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=12	L= 1								
0.4397129	0.4559365	0.4559506	0.5108124	0.5107991	0.6314521	0.6314562			
0.9100721	0.9100718	1.000000	1.846438	1.846438					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=13	L= 1								
0.4464526	0.4462858	0.4748333	0.4748987	0.5423515	0.5423471	0.6795554			
0.6795526	0.9999999	0.9882455	0.9882448	2.014527	2.014527				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=14	L= 1								
0.4456601	0.4577869	0.4578563	0.4965102	0.4964741	0.5753976	0.5754018			
0.7286384	0.7286380	0.9999514	1.067098	1.067098	2.183252	2.183252			
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=15	L= 1								
0.4487943	0.4514652	0.4739923	0.4725341	0.5195555	0.5199677	0.6097074			
0.6096663	0.7784665	0.7784666	0.9999999	1.146511	1.146511	2.352513			
2.352513									
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=16	L= 1								
0.4502615	0.4598222	0.4597766	0.4887406	0.4886907	0.5454029	0.5454792			
1.000104	0.6447687	0.6447383	0.8289050	0.8288991	1.226385	1.226385			
2.522229	2.522229								
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 1	L= 2								
1.000000									
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 2	L= 2								
0.1428571	1.000000								
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 3	L= 2								
0.2169305	0.2169304	1.000000							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 4	L= 2								
0.2260621	0.3097304	0.3097304	1.000000						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 5	L= 2								
0.2664489	0.2664441	0.4108071	0.4108061	1.000000					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 6	L= 2								
0.2767307	0.3167990	0.3167989	0.5166517	0.5166517	1.000000				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 7	L= 2								
0.3024240	0.3024243	0.3721476	0.3721484	0.6255490	0.6255494	1.000000			
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 8	L= 2								
0.3105915	0.3350300	0.3350301	0.4305456	0.4305449	0.7365245	0.7365243			
1.000000									
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 9	L= 2								
0.3284981	0.3284748	0.3714824	0.3714843	0.4910082	0.4910094	0.8489742			
0.8489743	1.000000								
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=10	L= 2								
0.3348702	0.3515218	0.3515255	0.4104409	0.4104415	0.5529609	0.5529606			
0.9625042	0.9625043	0.9999999							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=11	L= 2								
0.3481167	0.3480555	0.3777179	0.3777382	0.4510854	0.4510851	0.6160398			
0.6160395	1.076844	1.076844	1.000000						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=12	L= 2								
0.3533667	0.3652245	0.3652375	0.4060808	0.4060795	0.4929793	0.4929776			
0.6799932	0.6799927	1.191802	1.191802	1.000000					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=13	L= 2								
0.3634368	0.3633507	0.3851585	0.3851904	0.4359327	0.4359299	0.5358185			
0.5358182	0.7446447	0.7446447	1.307239	1.307239	0.9999991				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=14	L= 2								
0.3673714	0.3767707	0.3768170	0.4070468	0.4070821	0.4668683	0.4668311			
0.5794088	0.5794123	0.8098633	0.8098636	1.423052	1.423052	1.000002			
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=15	L= 2								
0.3708870	0.3795356	0.3948459	0.3913944	0.4296617	0.4299562	0.4986815			
0.4987779	0.6236162	0.6236048	0.8755503	0.8755504	1.539162	1.539162			
1.000006									
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=16	L= 2								
0.4072449	0.3692917	0.3910337	0.3941408	0.4102838	0.4543153	0.4535369			
0.5312478	0.5312902	0.6683057	0.6683075	0.9416289	0.9416288	1.655507			
1.655507	1.000002								

MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 1	L= 3						
1.000000							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 2	L= 3						
0.6666669E-01	1.000000						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 3	L= 3						
0.1179527	0.1179534	0.9999999					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 4	L= 3						
0.1393215	0.1820887	0.1820886	1.000000				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 5	L= 3						
0.1755394	0.1755393	0.2531796	0.2531796	0.9999999			
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 6	L= 3						
0.1933732	0.2178068	0.2178068	0.3285891	0.3285891	0.9999999		
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 7	L= 3						
0.2194279	0.2194631	0.2636194	0.2636207	0.4068588	0.4068568	1.000000	
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 8	L= 3						
0.2332469	0.2497424	0.2497438	0.3118120	0.3118092	0.4870967	0.4870961	
1.000000							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 9	L= 3						
0.2527275	0.2527603	0.2826474	0.2826532	0.3617330	0.3617307	0.5687380	
0.5687379	1.000000						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=10	L= 3						
0.2637253	0.2755792	0.2755936	0.3172295	0.3172847	0.4129441	0.4129415	
0.6514037	0.6514032	1.000000					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=11	L= 3						
0.2791943	0.2768625	0.3012950	0.3011306	0.3531210	0.3534087	0.4651492	
0.4651583	0.7348305	0.7348309	1.000000				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=12	L= 3						
0.2876145	0.2964031	0.2964458	0.3270405	0.3270656	0.3902484	0.3902363	
0.5181808	0.5181797	0.8188311	0.8188315	1.000000			
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=13	L= 3						
0.3056518	0.2934473	0.3163942	0.3163535	0.3535235	0.3554517	0.4280400	
0.4279526	0.5718506	0.5718426	0.9032690	0.9032696	0.9999999		
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=14	L= 3						
0.3344149	0.3065890	0.3243628	0.3071717	0.3346319	0.4663907	0.3844358	
0.3843526	0.4663737	0.6260378	0.6260368	0.9880428	0.9880430	1.000001	
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=15	L= 3						
0.3571104	0.3064776	0.3239016	0.3321437	0.3311857	0.3601859	0.5053077	
0.4120665	0.4124718	0.5052744	0.6806703	0.6806700	1.073075	1.073075	
1.000000							
MODIFICADA A PRECISÃO PARA 0.1000000E-04							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=16	L= 3						
0.3806797	0.2495539	0.3390053	0.3701260	0.3757953	0.3590959	0.3773702	
0.5445455	0.4429931	0.4417850	0.5447001	0.7356799	0.7356731	1.158310	
1.158309	1.000003						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 1	L= 4						
1.000000							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 2	L= 4						
0.3225806E-01	1.000000						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 3	L= 4						
0.6610844E-01	0.6610848E-01	0.9999999					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 4	L= 4						
0.8737597E-01	0.1103631	0.1103631	1.000000				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 5	L= 4						
0.1173335	0.1173334	0.1610548	0.1610546	1.000000			
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 6	L= 4						
0.1366451	0.1517929	0.1517929	0.2159800	0.2159800	0.9999999		
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 7	L= 4						
0.1605479	0.1607495	0.1891379	0.1892477	0.2738150	0.2738276	1.000000	
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 8	L= 4						
0.1766727	0.1877031	0.1877054	0.2286956	0.2287028	0.3337005	0.3337014	
1.000000							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K= 9	L= 4						
0.1956881	0.1958351	0.2167014	0.2167707	0.2699107	0.2699057	0.3950741	
0.3950737	0.9999997						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=10	L= 4						
0.2124333	0.2170188	0.2462184	0.2462075	0.2170265	0.3122714	0.3122673	
0.4575408	0.4575418	1.000000					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=11	L= 4						
0.2413967	0.2226101	0.2256448	0.2787693	0.2785083	0.3557350	0.3556890	
0.2401744	0.5208456	0.5208449	1.000000				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=12	L= 4						
0.2607390	0.2446814	0.2318048	0.3103719	0.2636772	0.2495162	0.3999709	
0.3999073	0.3116756	0.5847749	0.5847772	1.000000			
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=13	L= 4						
0.2869373	0.2404281	0.2698490	0.2634536	0.3448180	0.2909997	0.2492245	
0.4447904	0.4448011	0.3448685	0.6491965	0.6491967	0.9999998		
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=14	L= 4						
0.3108688	0.1961571	0.2927017	0.2760482	0.2990614	0.3188283	0.2952275	
0.3781008	0.4901070	0.4901428	0.3774743	0.7139943	0.7139946	1.000000	
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=15	L= 4						
0.3404441	0.3002717	0.2062974	0.2986696	0.3054277	0.2954990	0.4119622	
0.3411414	0.3005688	0.5359374	0.5359418	0.4118737	0.7790890	0.7790891	
1.000000							
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=16	L= 4						
0.3712312	0.2187656	0.1857728	0.3477904	0.3487816	0.3431314	0.3447054	
0.4466199	0.3667751	0.4464383	0.3425405	0.5821404	0.5821407	0.8444157	
0.8444159	1.000000						
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=17	L= 4						
0.3931591	0.1696321	0.1926762	0.3758367	0.3741477	0.3723631	0.3629079	
0.3970300	0.3697871	0.6286475	0.4813910	0.3736566	0.4814482	0.6286466	
0.9099241	0.9099244	1.000000					
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=18	L= 4						
0.4224525	0.1950563	0.1584467	0.3890063	0.3622082	0.3894811	0.3779262	
0.3818367	0.3920743	0.5168692	0.5169138	0.3834414	0.6754296	0.6754305	
0.4219176	0.9755747	0.9755751	1.000000				
MÓDULO DAS RAÍZES EM K=19	L= 4						
0.3584855	0.1364297	0.4130899	0.1790752	0.4127949	0.4178329	0.4058426	
0.3993941	0.4162000	0.5525431	0.4481522	0.5523825	0.4527782	0.4166774	
0.7224431	1.041336	1.041336	0.7224416	1.000000			

Damos, aqui, os métodos usados:

método (4,1)

ordem 4 $y_{n+4} = 1.92y_{n+3} - 1.44y_{n+2} + 0.64y_{n+1} - 0.12y_n + 0.48hf_{n+4}$
estável

método (3,2)

ordem 4 $2.3611111y_{n+3} = 3y_{n+2} - 0.75y_{n+1} + 0.1111111y_n +$
estável $+1.8333333hf_{n+3} - 0.5h^2 f'_{n+3}$

método (2,3)

ordem 4 $1.875y_{n+2} = 2y_{n+1} - 0.125y_n + 1.75hf_{n+2} - 0.75h^2 f'_{n+2} +$
estável $+0.16666667h^3 f''_{n+3}$

método (7,1)

ordem 7 $2.5928571y_{n+7} = 7y_{n+6} - 10.5y_{n+5} + 11.6666667y_{n+4} +$
não estável $-8.75y_{n+3} + 4.2y_{n+2} - 1.1666667y_{n+1} + 0.1428571y_n +$
 $+hf_{n+7}$

método (5,3)

ordem 7 $4.0502454y_{n+5} = 5y_{n+4} - 1.25y_{n+3} + 0.3703704y_{n+2} +$
estável $-0.078125y_{n+1} + 0.008y_n + 3.3386111hf_{n+5} +$
 $-1.1416667h^2 f'_{n+5} + 0.1666667h^3 f''_{n+5}$

método (10,1)

$$\begin{aligned} \text{ordem 10} \quad & 2.9289682y_{n+10} = 10y_{n+9} - 22.5y_{n+8} + 40y_{n+7} + \\ \text{não estável} \quad & -52.7y_{n+6} + 50.4y_{n+5} - 35y_{n+4} + 17.1428571y_{n+3} + \\ & -5.625y_{n+2} + 1.1111111y_{n+1} - 0.1y_n + hf_{n+10} \end{aligned}$$

método (8,3)

$$\begin{aligned} \text{ordem 10} \quad & 5.8200649y_{n+8} = 8y_{n+7} - 3.5y_{n+6} + 2.074074y_{n+5} + \\ \text{estável} \quad & -1.09375y_{n+4} + 0.448y_{n+3} - 0.1296296y_{n+2} + \\ & + 0.0233236y_{n+1} - 0.0019531y_n + 4.4570847hf_{n+8} + \\ & -1.3589286h^2f'_{n+8} + 0.1666667h^3f'''_{n+8}. \end{aligned}$$

Esses métodos foram implementados numa calculadora manual TI 58. A correção é feita apenas uma vez e usa como previsão o valor exato de e^{-2x} no ponto em questão; isto equivale a prever com método de ordem maior do que a ordem do corretor.

Os resultados obtidos são dados nas tabelas a seguir, as quais mostram os pontos x_i e os erros $\ell_i = y_i - y(x_i)$ para cada método.

(4,1)		(4,1)		(4,1)	
0.1	-0.35E-04	0.08	-0.11E-04	0.05	-0.10E-05
0.2	-0.96E-04	0.16	-0.31E-04	0.1	-0.29E-05
0.3	-0.15E-03	0.24	-0.51E-04	0.15	-0.50E-05
0.4	-0.20E-03	0.32	-0.68E-04	0.2	-0.67E-05
0.5	-0.24E-03	0.4	-0.81E-04	0.25	-0.82E-05
0.6	-0.27E-03	0.48	-0.92E-04	0.3	-0.95E-05
0.7	-0.29E-03	0.56	-0.10E-03	0.35	-0.10E-04
0.8	-0.31E-03	0.64	-0.11E-03	0.4	-0.11E-04
0.9	-0.33E-03	0.72	-0.11E-03	0.45	-0.12E-04
1.0	-0.34E-03	0.8	-0.12E-03	0.5	-0.13E-04
3.6	-0.40E-03	3.68	-0.15E-03	3.8	-0.22E-04
3.7	-0.40E-03	3.76	-0.15E-03	3.85	-0.22E-04
3.8	-0.40E-03	3.84	-0.15E-03	3.9	-0.22E-04
3.9	-0.40E-03	3.92	-0.15E-03	3.95	-0.22E-04
4.0	-0.40E-03	4.0	-0.15E-03	4.0	-0.22E-04

(3,2)		(3,2)		(3,2)	
0.1	.68E-05	0.08	.22E-05	0.05	.22E-06
0.2	.14E-04	0.16	.47E-05	0.1	.47E-06
0.3	.20E-04	0.24	.69E-05	0.15	.71E-06
0.4	.25E-04	0.32	.87E-05	0.2	.92E-06
0.5	.29E-04	0.4	.10E-04	0.25	.11E-05
0.6	.33E-04	0.48	.11E-04	0.3	.12E-05
0.7	.35E-04	0.56	.12E-04	0.35	.14E-05
0.8	.38E-04	0.64	.13E-04	0.4	.15E-05
0.9	.39E-04	0.72	.14E-04	0.45	.17E-05
1.0	.41E-04	0.8	.15E-04	0.5	.18E-05
3.6	.48E-04	3.68	.19E-04	3.8	.29E-05
3.7	.48E-04	3.76	.19E-04	3.85	.29E-05
3.8	.48E-04	3.84	.19E-04	3.9	.29E-05
3.9	.48E-04	3.92	.19E-04	3.95	.29E-05
4.0	.48E-04	4.0	.19E-04	4.0	.29E-05

(2,3)		(2,3)		(2,3)	
0.1	-.25E-05	0.08	-.86E-06	0.05	-.8E-07
0.2	-.48E-05	0.16	-.16E-05	0.1	-.17E-06
0.3	-.67E-05	0.24	-.23E-05	0.15	-.24E-06
0.4	-.82E-05	0.32	-.29E-05	0.2	-.31E-06
0.5	-.95E-05	0.4	-.34E-05	0.25	-.37E-06
0.6	-.10E-04	0.48	-.38E-05	0.3	-.43E-06
0.7	-.11E-04	0.56	-.41E-05	0.35	-.48E-06
0.8	-.12E-04	0.64	-.44E-05	0.4	-.52E-06
0.9	-.12E-04	0.72	-.47E-05	0.45	-.56E-06
1.0	-.13E-04	0.8	-.49E-05	0.5	-.60E-06
3.6	-.15E-04	3.68	-.62E-05	3.8	-.95E-06
3.7	-.15E-04	3.76	-.62E-05	3.85	-.95E-06
3.8	-.15E-04	3.84	-.62E-05	3.9	-.95E-06
3.9	-.15E-04	3.92	-.62E-05	3.95	-.95E-06
4.0	-.15E-04	4.0	-.62E-05	4.0	-.95E-06

(7,1)		(7,1)		(7,1)	
0.08	-.22E-06	0.05	-.2E-07	0.01	-.12E-08
0.16	-.50E-06	0.1	-.8E-07	0.02	-.33E-08
0.24	-.50E-06	0.15	-.13E-06	0.03	-.12E-07
0.32	-.31E-06	0.2	-.19E-06	0.04	-.22E-07
0.4	-.34E-06	0.25	-.23E-06	0.05	-.29E-07
0.48	-.57E-06	0.3	-.27E-06	0.06	-.35E-07
0.56	-.59E-06	0.35	-.30E-06	0.07	-.43E-07
0.64	-.38E-06	0.4	-.31E-06	0.08	-.53E-07
0.72	-.33E-06	0.45	-.33E-06	0.09	-.60E-07
0.8	-.57E-06	0.5	-.37E-06	0.10	-.65E-07
3.68	-.23E-06	3.8	-.51E-06	3.96	.57E-06
3.76	-.26E-06	3.85	-.51E-06	3.97	.99E-05
3.84	-.81E-06	3.9	-.58E-06	3.98	.12E-06
3.92	-.86E-06	3.95	-.60E-06	3.99	-.11E-04
4.0	-.29E-06	4.0	-.53E-06	4.00	-.26E-05

(5,3)		(5,3)		(5,3)	
0.1	.69E-08	0.08	.16E-08	0.05	.2E-08
0.2	.14E-07	0.16	.63E-08	0.1	.49E-08
0.3	.20E-07	0.24	.10E-07	0.15	.74E-08
0.4	.25E-07	0.32	.13E-07	0.2	.97E-08
0.5	.29E-07	0.4	.16E-07	0.25	.11E-07
0.6	.32E-07	0.48	.19E-07	0.3	.13E-07
0.7	.35E-07	0.56	.21E-07	0.35	.15E-07
0.8	.37E-07	0.64	.22E-07	0.4	.16E-07
0.9	.39E-07	0.72	.24E-07	0.45	.18E-07
1.0	.41E-07	0.8	.25E-07	0.5	.19E-07
3.6	.47E-07	3.68	.33E-07	3.8	.31E-07
3.7	.47E-07	3.76	.33E-07	3.85	.31E-07
3.8	.48E-07	3.84	.33E-07	3.9	.31E-07
3.9	.48E-07	3.92	.33E-07	3.95	.31E-07
4.0	.48E-07	4.0	.33E-07	4.0	.31E-07

Observamos que, no caso do método estável (5,3), o erro diminui quando $h \rightarrow 0$. Já no caso do método instável (7,1) ocorre um aumento do erro quando h diminui, ilustrando assim a não convergência do método. Ainda observamos uma certa oscilação no erro (característica de instabilidade Henrici [13, pag.242]). Esta oscilação é pequena devido ao fato de que uma raiz de $\rho(z)$, associado a (7,1) é ligeiramente maior do que 1.

(10,1)		(10,1)		(10,1)	
0.1	-.44E-07	0.08	-.11E-05	0.05	.87E-04
0.2	-.22E-06	0.16	-.28E-05	0.1	.18E-03
0.3	-.43E-06	0.24	-.17E-05	0.15	.66E-04
0.4	-.41E-06	0.32	-.67E-06	0.2	-.69E-04
0.5	-.35E-06	0.4	-.27E-05	0.25	.23E-03
0.6	-.72E-06	0.48	-.73E-05	0.3	.44E-03
0.7	-.10E-05	0.56	.18E-05	0.35	-.32E-03
0.8	-.25E-06	0.64	.94E-05	0.4	-.56E-03
0.9	-.31E-08	0.72	-.14E-04	0.45	.12E-02
1.0	-.19E-05	0.8	-.24E-04	0.5	.12E-02
3.6	-.14E-01	3.68	.4957E+02	3.8	-.93358E+09
3.7	-.10E-00	3.76	-.1213E+03	3.85	.21679E+10
3.8	.62E-01	3.84	-.7877E+02	3.9	.15169E+10
3.9	.22E-00	3.92	.3001E+03	3.95	-.53994E+10
4.0	-.20E-00	4.0	.9450E+02	4.0	-.19299E+10

(8,3)		(8,3)		(8,3)	
0.1	.96E-08	0.08	-.55E-08	0.05	.21E-08
0.2	.21E-07	0.16	.27E-08	0.1	.60E-08
0.3	.29E-07	0.24	.10E-07	0.15	.90E-08
0.4	.37E-07	0.32	.14E-07	0.2	.11E-07
0.5	.43E-07	0.4	.19E-07	0.25	.14E-07
0.6	.47E-07	0.48	.23E-07	0.3	.16E-07
0.7	.51E-07	0.56	.26E-07	0.35	.18E-07
0.8	.55E-07	0.64	.29E-07	0.4	.20E-07
0.9	.57E-07	0.72	.31E-07	0.45	.22E-07
1.0	.60E-07	0.8	.33E-07	0.5	.24E-07
3.6	.69E-07	3.68	.44E-07	3.8	.38E-07
3.7	.69E-07	3.76	.44E-07	3.85	.38E-07
3.8	.69E-07	3.84	.44E-07	3.9	.38E-07
3.9	.69E-07	3.92	.44E-07	3.95	.38E-07
4.0	.69E-07	4.0	.44E-07	4.0	.38E-07

A instabilidade e não convergência ficou, no método (10,1) bem caracterizada e ilustrada, pois o erro passou da ordem de 10^{-4} para 10^{10} .

O método (8,3) (estável) apresentou erro diminuindo quando, diminuimos o h, ilustrando assim, como os métodos (4,1) (3,2) e (2,3) a convergência e estabilidade.

Ainda, com relação aos métodos (4,1) (3,2) e (2,3) observamos que a solução melhorou quando, para a mesma ordem 4, aumentamos o nº de derivadas, o que já poderia ser esperado, lembrando do comportamento da constante do erro.

Obs.: 2.7 - Como todo método (K, ℓ) é consistente (Obs: 1.4), temos $C_0 = 0$, portanto $0 = \sum_{i=0}^K \alpha_i = \rho(1)$. Daí segue que 1 é raiz do polinômio associado ao método (K, ℓ) .

Por outro lado se o método é estável, temos que 1 é raiz simples.

Portanto, todo método (K, ℓ) convergente, tem 1 como raiz simples de $\rho(z)$. Esta raiz é denominada raiz principal.

2.3 - Erro global e expansão assintótica:

Neste parágrafo vamos dar um limitante para o erro global relativo à aplicação de métodos (K, ℓ) fortemente estáveis, visto que um método (K, ℓ) para ser "stiff" deve ser fortemente estável (este resultado veremos no próximo capítulo). Ainda será dado o primeiro termo da expansão assintótica do erro de discretização global.

Para facilidade de notação vamos usar os métodos da seguinte maneira:

$$\sum_{i=0}^K \bar{\alpha}_i y_{n-i} + \sum_{j=1}^{\ell} h^j \bar{\beta}_j f^{(j-1)}_n = 0, \quad \bar{\alpha}_i = \alpha_{K-i}, \quad \bar{\beta}_j = -\beta_j$$

Seja o vetor de resultados

$$Y_n = (y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-K}, h y'_n, h^2 y''_n, \dots, h^{\ell} y_n^{(\ell)})^t$$

As componentes de Y_n são numeradas de 0 à $\ell+K$.

Uma aproximação inicial para Y_n é feita por um operador preditor de ordem p , dado por B , aplicado à

y_{n-1} .

B é um operador que prevê valores para y_n , $hy'_n, \dots, h^\ell y_n^\ell$ e transfere y_n para y_{n-1} ; y_{n-1} para y_{n-2} ; ...; y_{n-K+1} para y_{n-K} .

Assim $B = \begin{bmatrix} \dots & b^t & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \hat{B} & \dots \end{bmatrix}$, onde b^t prevê valores para y_n , $\hat{I}$ faz a transferência acima e $\hat{B}$ prevê $hy'_n, \dots, h^\ell y_n^{(\ell)}$.

Os resultados serão obtidos para o problema $y' = f(x, y)$ com $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e depois vamos fazer consideração sobre $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Assumimos que o método (K, ℓ) seja aplicado M_n vezes, M_n : limitado. Assim o método serve como corretor iterativo.

Salientamos que quando tratamos com problema "stiff", normalmente não podemos fazer uso das aproximações sucessivas para procedermos a correção; nesse caso o problema exige h excessivamente pequeno. Assim substituímos o problema de aproximar y_n sucessivamente, pelo problema de determinarmos uma aproximação, através do método de Newton, da raiz da função $F(y_n)$ definida pelo método (K, ℓ) .

Desta maneira a aplicação do método pode ser representada por:

$$y_{n(0)} = BY_{n-1}$$

$$F(y_{n(m)}) = \bar{\alpha}_0 y_{n(m)} + \sum_{j=1}^{\ell} \bar{\beta}_j f^{(j-1)}(x_n, y_{n(m)}) + \sum_{i=1}^K \bar{\alpha}_i y_{n-i}$$

$$(4) \quad y_{n(m+1)} = y_{n(m)} + wC_0 F(y_{n(m)}) + \sum_{j=1}^{\ell} h^j C_{K+j} \Delta f_{n(m+1)}^{(j-1)}$$

onde

$$\Delta f_{n(m+1)}^{(1)} = \begin{cases} f^{(1)}(x_n, y_{n(m)}) - f^{(1)}(x_n, y_{n(m-1)}), & m > 0 \\ f^{(1)}(x_n, y_{n(0)}) - (y_{n(0)})_{K+1} h^{-1}, & m = 0. \end{cases}$$

W define o processo iterativo de Newton ou $\tilde{e}$ l (aproximações sucessivas) e $Y_n = Y_{n(M_n)}$.

Notemos que $Y_{n(m)}$ é a m-ésima iterada de Y_n e $Y_{n(m)} = (Y_{n(m)})_0$ é a primeira coordenada do vetor $Y_{n(m)}$ e ainda pode ser dada por $C_0^t Y_{n(m)}$ pois C_1 denota o i-ésimo vetor de $\ell+K+1$ componentes, também enumeradas de 0 até $\ell+K$. Além disso, através de $\Delta f_{n(m+1)}^{(j-1)} e C_{K+j}$ trocamos, na (m+1)-ésima iterada, o valor de $f_{n(m-1)}^{(j-1)}$ por $f_{n(m)}^{(j-1)}$ na (K+j)-ésima componente de $Y_{n(m+1)}$.

Observemos, ainda que, durante a correção, as componentes de $Y_{n(m)}$ de 1 até K não são modificados.

Teorema 2.4: Dados:

1) Um método (K, ℓ) com ordem $p \geq 1$ cujo $\rho(z)/(z-1)$ possui raízes estritamente menores do que 1.

2) $y' = f(x, y)$, onde $f(x, y)$ é contínua para $y(x)$ limitada, $x_0 \leq x \leq x_f$, onde cada $f_y^{(j-1)}(x_n, y)$ $j = 1, \dots, \ell$ existe e é limitada por L_j e $f(x_n, y)$ é contínua em y nos pontos $x_n = x_0 + nh$, $n = 1, 2, \dots, N$.

3) O erro inicial $E_0 = Y_0 - Y(x_0)$ é limitado. $\|E_0\| \leq D' h^p$

4) $W = 1 + O(h)$

Então para o esquema anterior, iterado um número finito de vezes, existem constantes $C_0, \hat{C}_0, C_2, \hat{D}, h_0$ dependentes somente do método e de $f(x, y)$ tal que o vetor do erro global $E_n = Y_n - Y(x_n)$ satisfaz:

$$\|E_n\| \leq C_0 D' h^{p'} e^{C_2 b} + C_0 D h^p e^{C_2 b}, \quad \forall 0 < h \leq h_0, \quad b \geq Nh = x_f - x_0.$$

Dem: Vamos denotar o erro local por D_n . Seja $Y(x_n)$ o valor correto de Y_n . Apliquemos o método a $Y(x_{n-1})$.

Obtemos:

$$\tilde{Y}_{n(0)} = BY(x_{n-1})$$

$$(5) \quad \tilde{Y}_{n(m+1)} = \tilde{Y}_{n(m)} + WC_0 F(\tilde{Y}_{n(m)}) + \sum_{j=1}^{\ell} h^j C_{K+j} \Delta \tilde{f}^{(j-1)}_{n(m+1)},$$

onde

$$\Delta \tilde{f}^{(j)}_{n(m+1)} = \begin{cases} f^{(j)}(x_n, \tilde{Y}_{n(m)}) - f^{(j)}(x_n, \tilde{Y}_{n(m-1)}) & , m > 0 \\ f^{(j)}(x_n, \tilde{Y}_{n(0)}) - (\tilde{Y}_{n(0)})_{K+1} h^{-1} & , m=0 \text{ e } \tilde{Y}_n = \tilde{Y}_n(M_n). \end{cases}$$

Temos então, o erro de truncamento local

$$D_n = \tilde{Y}_n - \tilde{Y}(x_n).$$

Como o método é de ordem p , temos que o erro de truncamento local satisfaz:

$$\|D_n\| \leq \beta h^{p+1}.$$

$$\text{Seja } E_n = Y_n - Y(x_n) \text{ e } E_{n(m)} = Y_{n(m)} - \tilde{Y}_{n(m)}.$$

Temos:

$$E_{n(0)} = Y_{n(0)} - \tilde{Y}_{n(0)} = BY_{n-1} - BY(x_{n-1}) = BE_{n-1}.$$

$$E_n = Y_n - Y(x_n) = Y_n - \tilde{Y}_n + \tilde{Y}_n - Y(x_n) = E_{n(M_n)} + D_n.$$

Fazendo (5) menos (4) obtemos:

$$Y_{n(m+1)} - \tilde{Y}_{n(m+1)} = Y_{n(m)} - \tilde{Y}_{n(m)} + WC_0 (F(Y_{n(m)}) - F(\tilde{Y}_{n(m)})) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\ell} h^j c_{K+1} (\Delta f_{n(m+1)}^{(j-1)} - \Delta \tilde{f}_{n(m+1)}^{(j-1)}) ,$$

ou seja:

$$(E_{n(m+1)})_0 = (E_{n(m)})_0 + W[F(Y_{n(m)}) - F(\tilde{Y}_{n(m)})] \quad e$$

$$(E_{n(m+1)})_i = (E_{n(m)})_i + h^i [(Y_{n(m)}^{(i)} - \tilde{Y}_{n(m)}^{(i)}) - (Y_{n(m-1)}^{(i)} - \tilde{Y}_{n(m-1)}^{(i)})] =$$

$$= h^i (Y_{n(m-1)}^{(i)} - \tilde{Y}_{n(m-1)}^{(i)}) + h^i (Y_{n(m)}^{(i)} - \tilde{Y}_{n(m)}^{(i)}) +$$

$$- h^i (Y_{n(m-1)}^{(i)} - \tilde{Y}_{n(m-1)}^{(i)}) = h^i (Y_{n(m)}^{(i)} - \tilde{Y}_{n(m)}^{(i)}) =$$

$$= h^i f_Y^{(i-1)}(\bar{\xi}_i) (E_{n(m)})_0 , \quad i = K+1, K+2, \dots, K+\ell.$$

Obtemos então, desenvolvendo $F(Y_{n(m)}) - F(\tilde{Y}_{n(m)})$ e aplicando o teorema do valor médio:

$$(E_{n(m+1)})_0 = (E_{n(m)})_0 + W[(\bar{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{\ell} h^j \bar{\beta}_j f_Y^{(j-1)}(\xi_j)) (E_{n(m)})_0] +$$

$$+ W_1 \sum_{i=1}^K \bar{\alpha}_i (E_{n(i)})_0$$

$$(E_{n(m+1)})_{K+1} = h^i f_Y^{(i-1)}(\bar{\xi}_i) (E_{n(m)})_0 , \quad i = 1, 2, \dots, K.$$

$$(E_{n(m+1)})_j = (E_{n(m)})_j , \quad j = 1, \dots, K.$$

Observemos que $(E_{n(i)})_0 = C_i^t E_{n(m)}$, $i = 1, \dots, K$.

e que $(E_{n(m)})_0 = C_0^t E_{n(m)}$.

Temos então:

$$(E_{n(m+1)})_0 = [1 + W(\sum_{i=0}^K \bar{\alpha}_i C_i^t + \sum_{j=1}^{\ell} h^j \bar{\beta}_j f_Y^{(j-1)}(\xi_j) C_0^t)] E_{n(m)}$$

$$(E_{n(m+1)})_i = C_i^t E_{n(m)} \quad , \quad i = 1, \dots, K$$

$$(E_{n(m+1)})_{K+j} = h^j f_Y^{(j-1)}(\xi_j) C_0^t E_{n(m)} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, \ell.$$

Desta maneira podemos colocar:

$$E_{n(m+1)} = S_{m+1} E_{n(m)}$$

$$S_{m+1} = \begin{bmatrix} 1 + W(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{\ell} h^j \bar{\beta}_j f_Y^{(j-1)}(\xi_j)) & W\alpha_1 & W\alpha_2 & \dots & W\alpha_K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & & \\ 0 & & & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ h f_Y(\xi_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ h^2 f_Y'(\xi_2) & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \\ h^{\ell} f_Y^{(\ell-1)}(\xi_{\ell}) & 0 & & & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \\ \\ \\ K \\ K+1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

1 K $\ell+K+1 \times \ell+K+1$

Para facilidade de notação e sem perda de generalidade vamos omitir os argumentos de $f_Y^{(j-1)} = \partial f^{(j-1)} / \partial y$ que podem ser diferentes para cada $f_Y^{(j-1)}$ que aparece em S_{m+1} .

Desta maneira podemos escrever:

$$S_{m+1} = (1 + W\bar{\alpha}_0 + W \sum_{j=1}^{\ell} h^j \bar{\beta}_j f_Y^{(j-1)}) C_0 C_0^t + \sum_{i=1}^K (W\bar{\alpha}_i C_0 + C_i) C_i^t +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{\ell} h^j f_y^{(j-1)} c_{K+j} c_0^t = \\
& = [(1+W\bar{\alpha}_0) c_0 + \sum_{j=1}^{\ell} h^j f_y^{(j-1)} (W\bar{\beta}_j c_0 + c_{K+j})] c_0^t + \sum_{i=1}^K (W\bar{\alpha}_i c_0 + c_i) c_i^t.
\end{aligned}$$

Portanto, como $E_{n(m+1)} = S_{m+1} E_{n(m)}$ temos:

$$E_n(Mn) = \left(\prod_{m=1}^{Mn} S_m \right) E_n(0) = \left(\prod_{m=1}^{Mn} S_m \right) B E_{n-1} = S_n E_{n-1}$$

$$\text{com } S_n = \left(\prod_{m=1}^{Mn} S_m \right) B.$$

$$\text{Como } E_n = E_{n(Mn)} + D_n \text{ temos: } E_n = S_n E_{n-1} + D_n.$$

Como por hipótese temos $\|f_y^{(j-1)}\| < L_j$ e $W = 1 + O(h)$ temos:

$S_n = S_0 + h\tilde{S}_n$, onde $\tilde{S}_n$ é a matriz cujos elementos são polinômios em h com coeficientes limitados.

Como Mn é limitado $0 < h \leq h_0$ e $\|f_y^{(j-1)}\| < L_j$ temos que existe constante C_1 tal que $\|\tilde{S}_n\| \leq C_1$.

Por outro lado, podemos colocar, considerando $\bar{\alpha}_0 = -1$, S_0 como sendo:

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0 & \bar{\alpha}_1 & \dots & \bar{\alpha}_K \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \hat{I} & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \theta \end{bmatrix}^{Mn} \begin{bmatrix} b^t \\ \vdots \\ \hat{I} & \vdots & \theta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \hat{B} \end{bmatrix}$$

Para $Mn \geq 1$ temos, fazendo produto:

$$S_0 = \left[\begin{array}{cccc|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_K & 0 \\ & \mathbf{I} & & & \\ \hline & 0 & & & 0 \end{array} \right] \text{ cujos autovalores não nulos coincidem com as raízes do polinômio } \rho(z) \text{ pois o bloco não nulo é a matriz companheira de } \rho(z), \text{ pois } \alpha_0 = -1.$$

Como as raízes de $\rho(z)/(z-1)$ são em módulo menores do que 1 temos que existe C_0 tal que:

$$\|S_0^j\| < C_0.$$

Desta maneira, estamos nas hipóteses do lema 0.9 e portanto

$$\|S_m^n\| = \|S_{n-1}S_{n-2}\dots S_{n-m}\| \leq C_0 e^{h(n-m)C_0C_1}.$$

Logo, de $E_n = S_n E_{n-1} + D_n$ temos:

$$\begin{aligned} E_n &= S_n E_{n-1} + D_n = S_n (S_{n-1} E_{n-2} + D_{n-1}) + D_n = \\ &= \dots = \sum_{j=1}^n S_{j+1}^n D_j + S_1^{n+1} E_0, \end{aligned} \quad \text{tomamos}$$

$$S_m^n = I \text{ se } m > n.$$

Tomando $x_N = x_f$ temos:

$$E_N = \sum_{j=1}^N S_{j+1}^N D_j + S_1^{N+1} E_0.$$

$$\text{Portanto: } \|E_N\| \leq \sum_{j=1}^N \|S_{j+1}^N\| \|D_j\| + \|S_1^{N+1}\| \|E_0\| \leq$$

$$\leq D h^{p+1} \sum_{j=1}^N C_0 e^{h(N-j-1)C_0C_1} + C_0 e^{hNC_0C_1} D' h^{p'} \leq$$

$$\leq D h^{p+1} \sum_{j=1}^N C_0 e^{hNC_0C_1} + C_0 e^{hNC_0C_1} D' h^{p'} =$$

$$= Dh^{p+1} NC_0 e^{hNC_0 C_1} + C_0 e^{hNC_0 C_1} D'h^{p'} s$$

$$sDC_0 e^{bC_2} h^{p+C_0 D'} e^{bC_2} h^{p'} , \text{ com}$$

$$C_0 = C_0(x_f - x_0) \leq C_0 b , \quad C_2 = C_0 C_1 .$$

Obs.: 2.8 - Quando E_0 é da ordem $O(h^p)$, temos E_N da ordem $O(h^p)$ para um método (K, ℓ) de ordem p .

2.9 - Desta maneira $E_N \rightarrow 0$ com ordem p e portanto, daqui também temos que o método é convergente (de ordem $p-1$).

2.10 - O resultado que acabamos de obter é aplicável a sistemas porque podemos desenvolver todo o teorema para cada componente de $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, pois nesse caso $f_1: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, vale o teorema do valor médio. O desenvolvimento é análogo.

Vamos, agora, determinar o primeiro termo, da expansão assintótica do erro.

Lema 2.2: Se o método $\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j f_{n+K}^{(\ell)}$ é convergente, com ordem $p \geq 1$ e $\rho(z)/(z-1)$ com raízes, em módulo, menores do que 1, então $\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = h \beta_1 f_{n+K}$ é convergente de ordem $p' \geq 1$.

Dem: Seja $L[y(x), h] = \sum_{i=0}^K \alpha_i y(x_{n+i}) - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j f^{j-1}(x_{n+K}, y(x_{n+K}))$.

Para $y(x) = e^{\lambda x}$ temos:

$$L[e^{\lambda x}, h] = \sum_{i=0}^K \alpha_i e^{(x+ih)\lambda} - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j \lambda^j e^{(x+Kh)\lambda} =$$

$$= e^{\lambda x} [\rho(e^{h\lambda}) - \sum_{j=1}^{\ell} (h\lambda)^j \sigma_j(e^{h\lambda})], \quad \rho(z) = \sum_{i=0}^K \alpha_i z^i, \quad \sigma_j(z) = \beta_j z^K.$$

Como a ordem do método é p , temos:

$$L[e^{\lambda x}, h] = C_{p+1} (h\lambda)^{p+1} e^{\lambda x} + O(h^{p+2})$$

$$\text{Portanto } \rho(e^{\lambda h}) - \sum_{j=1}^{\ell} (h\lambda)^j \sigma_j(e^{\lambda h}) = C_{p+1} (\lambda h)^{p+1} + O((h\lambda)^{p+2}).$$

Escrevendo $h\lambda = \log(1+z)$ e usando $h\lambda = z + O(z^2)$ temos:

$$\rho(1+z) - \sum_{j=1}^{\ell} (\log(1+z))^j \sigma_j(1+z) = C_{p+1} z^{p+1} + O(z^{p+2}).$$

Agora, expandindo a expressão acima, em série de potências de $1+z$ nas vizinhanças do 1, obtemos:

$$\rho(1) + z\rho'(1) - z\sigma_1(1) + O(z^2) = C_{p+1} z^{p+1} + O(z^{p+2}).$$

Como $p \geq 1$ temos $\rho(1) = 0$ e $\rho(1) - \sigma_1(1) = 0$.

Assim o método $\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = h\beta_1 f_{n+K}$ é consistente, portanto de ordem $p' \geq 1$. Como $\rho(z)/(z-1)$ possui raízes menores do que 1, temos que o método acima é convergente (teorema 2.2).

Teorema 2.5: Seja um método (K, ℓ) fortemente estável, de ordem $p \geq 1$ aplicado ao problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

Suponhamos: 1) $f^{(p)}(x, y)$ continuamente diferenciável com respeito a x e $f_y^{(j)}(x, y)$, $(j=0, \dots, \ell-1)$ contínua em y para y limitado no domínio de x .

2) Todos os valores iniciais exatos.

Então o erro escalar global é dado por: $E_n = h^p \delta(x_n) + O(h^{p+1})$

onde $\delta(x)$ satisfaz: $\delta'(x) = f_y(x, y) \delta(x) - \frac{C_{p+1}}{\beta_1} y^{(p+1)}(x)$,
 $\delta(x_0) = 0$.

Dem: Consideremos o erro de discretização

$$\begin{aligned} L[y(x_n), h] &= \sum_{i=0}^K \alpha_i y(x_n + ih) - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j f^{(j-1)}(x_n + Kh, y(x_n + Kh)) = \\ (6) \quad &= C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) + O(h^{p+2}). \end{aligned}$$

Iterando até convergir temos:

$$(7) \quad 0 = \sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j f_{n+K}^{(j-1)}.$$

Subtraindo (6) de (7) temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^K \alpha_i E_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell} h^j \beta_j [f_{n+K}^{(j-1)} - f^{(j-1)}(x_n + Kh, y(x_n + Kh))] + \\ + C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x_n) = O(h^{p+2}). \end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$f_{n+K}^{(j-1)} - f^{(j-1)}(x_n + Kh, y(x_n + Kh)) = f_y^{(j-1)}(x_n + Kh, \theta + y(x_n + Kh)) E_{n+1}$$

$$0 < |\theta| < |E_{n-1}|.$$

Se os valores iniciais são exatos, temos pelo teorema 2.4 que $E_{n+1} = O(h^p)$ e então da expressão acima obtemos:

$$f_{n+K}^{(j-1)} - f^{(j-1)}(x_n + Kh, y(x_n + Kh)) = f_y^{(j-1)}(x_n + Kh, y(x_n + Kh)) + O(h^{2p}).$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } \sum_{i=0}^K \alpha_i E_{n+i}^{-h\beta_1 f_Y(x_{n+K}, Y(x_{n+Kh}))} E_{n+K}^{C_{p+1}} h^{p+1} Y^{p+1}(x_n) = \\ = \sum_{j=2}^{\ell} h^j \beta_j f_Y^{(j-1)}(x_{n+Kh}, Y(x_{n+Kh})) E_{n+K}^{C_{p+1}} + O(h^{p+2}). \end{aligned}$$

Seja $E_{n+i} = h^p \delta_{n+i}$ $p/ \delta_{n+i} = O(1)$.

Então:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^K \alpha_i h^p \delta_{n+i}^{-h\beta_1 f_Y(x_{n+K}, Y(x_{n+K}))} h^p \delta_{n+K}^{C_{p+1}} h^{p+1} Y^{p+1}(x_n) = \\ = \sum_{j=2}^{\ell} h^j \beta_j f_Y^{(j-1)}(x_{n+K}, Y(x_{n+K})) h^p \delta_{n+K}^{C_{p+1}} + O(h^{p+2}) = O(h^{p+2}). \end{aligned}$$

Dai, dividindo tudo por h^p segue que:

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i \delta_{n+i}^{-h\beta_1 f_Y(x_{n+K}, Y(x_{n+K}))} \delta_{n+K}^{C_{p+1} + \frac{hC_{p+1}}{\beta_1}} Y^{(p+1)}(x_{n+K})^* = O(h^2).$$

Em * usamos desenvolvimento, por Taylor, de $Y^{(p+1)}(x_n)$ em torno de x_{n+K} .

Desta maneira temos:

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i \delta_{n+i}^{-h\beta_1 f_Y(x_{n+K}, Y(x_{n+K}))} \delta_{n+K}^{C_{p+1} + \frac{hC_{p+1}}{\beta_1}} Y^{(p+1)}(x_{n+K}) = O(h^2).$$

Usando o lema 2.2 temos que a expressão acima é a aplicação de um método convergente que fornece aproximação numéricas δ_n para $\delta(x_n)$, com $\delta(x)$ solução do problema:

$$(8) \quad \delta'(x) = f_Y(x, Y(x)) \delta(x) - \frac{C_{p+1}}{\beta_1} Y^{p+1}(x), \text{ com ordem } O(h).$$

Assim $\delta_n = \delta(x_n) + O(h)$.

$$\text{Portanto } E_n = h^p \delta_n = h^p (\delta(x_n) + O(h)) =$$

$$= h^p \delta(x_n) + O(h^{p+1}) \text{ onde } \delta(x) \text{ satisfaz (8) com } \delta(x_0) = 0.$$

Obs.: 2.11 - A aplicação mais conhecida da fórmula assintótica para o erro $\tilde{e}$, sem dúvida, a extrapolação de Richardson. Resolvendo a equação para dois valores de h , ou seja, h e qh , $q \neq 0$, $q \neq 1$ encontramos

$$y(x) = \frac{y(x, qh) - q^p y(x, h)}{1 - q^p} + O(h^{p+1}).$$

O valor extrapolado aproxima o valor exato da solução com erro cuja ordem excede a ordem do método por 1.

2.12 - Uma outra aplicação seria resolver numericamente (8) e calcular $E_n = h^p \delta_n$ e somá-lo à solução da equação diferencial. Esta aplicação não é prática pois aumentaria o esforço computacional do método (K, ℓ) .

2.13 - O erro E_n calculado como em 2.12 poderia ser usado, para controle do erro em programas com passo e ordem variável, caso não fosse inviável. Geralmente isso é feito usando extrapolação local (veja Henrici [13, pag. 82]).

Capítulo 3 - Estabilidade dos métodos (K, ℓ)

Este capítulo é, sem dúvida, a parte fundamental do trabalho. Aqui, vamos caracterizar a estabilidade dos métodos. Dentre os principais tipos de estabilidade, atualmente estudados, salientamos a estabilidade "stiff", melhorada, de acordo com Jeltsch [19], dentro da qual os métodos (K, ℓ) serão enquadrados.

3.1 - Comportamento dos métodos quanto a estabilidade:

Estamos interessados, aqui, em determinarmos para quais K e ℓ que os métodos são estáveis ou instáveis. Ou de maneira mais geral: qual o comportamento da estabilidade quando K cresce, ou qual o comportamento da estabilidade quando ℓ cresce.

Vamos, então, olhar para as raízes de

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^K \alpha_i z^i.$$

Como $\rho(1) = 0$ podemos considerar apenas

$$\phi_0(z) = \rho(z)/(z-1) = \sum_{i=0}^{K-1} a_{i0} z^i.$$

Dividindo $\rho(z)$ por $z-1$ temos $a_{i0} = \sum_{j=i+1}^K \alpha_j$ $i=0, \dots, K-1$

Como $\sum_{i=0}^K \alpha_i = 0$ temos $\sum_{j=1+1}^K \alpha_j = -\sum_{j=0}^1 \alpha_j$.

Portanto:

$$a_{i0} = \sum_{j=i+1}^K \alpha_j = - \sum_{j=0}^i \alpha_j = \sum_{j=0}^i (-1)^{K-j+1} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell}, \quad i=0, \dots, K-1.$$

Consideremos o polinômio $\Psi(z) = (-1)^{K-1} \phi_0(-z)$.

Temos que $\phi_0(z)$ e $\Psi(z)$ são do mesmo tipo (p_1, p_2, p_3) , pois possuem as mesmas raízes, mas com sinal trocado.

De fato: Sejam $z_1, \dots, z_{K-1}$ as raízes de $\phi_0(z)$; então:

$$\gamma(z+z_1) \dots (z+z_{K-1}) = \gamma(-1)^{K-1} (-z-z_1) \dots (-z-z_{K-1}) = (-1)^{K-1} \phi_0(-z).$$

Escrevemos $\Psi(z) = (-1)^{K-1} \phi_0(-z) = \sum_{i=0}^{K-1} A_i z^i$ onde

$$\begin{aligned} A_i &= (-1)^{K-1} a_{i0} (-1)^i = \sum_{j=0}^i (-1)^{K-j+1} (-1)^{K-i+1} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell} = \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell}. \end{aligned}$$

Obs.: 3.1 - Pelo lema 0.4 temos $A_i > 0$, $i=0, \dots, K-1$. Além disso $A_{K-1} = a_{K-1,0} > 0$.

Consideremos $r_\ell(K) = a_{K-1,0} = A_{K-1} > 0$.

Lema 3.1: Para ℓ fixo temos $\lim_{K \rightarrow \infty} r_\ell^{-1}(K) = 0$ e $\lim_{K \rightarrow \infty} r_\ell(K) K^{-\epsilon} = 0$

para todo $\epsilon > 0$.

Dem: Pelo lema 0.4 temos:

$$r_\ell(K) = \sum_{j_1=1}^K j_1^{-1} \sum_{j_2=1}^{j_1-1} j_2^{-1} \dots \sum_{j_{\ell-1}=1}^{j_{\ell-2}-1} j_{\ell-1}^{-1} \sum_{j_\ell=1}^{j_{\ell-1}-1} j_\ell^{-1} > 0$$

Assim $r_\ell(K) > \sum_{j=1}^K j^{-1}$ e como a série harmônica diverge, temos

$$\lim_{K \rightarrow \infty} r_{\ell}^{-1}(K) = 0.$$

Por outro lado, usando o lema 0.5 temos:

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} r_{\ell}(K) K^{-\varepsilon} &= \lim_{K \rightarrow \infty} (K_{\ell} + C_{\ell} \ln^{\ell}(K)) K^{-\varepsilon} = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} K_{\ell} K^{\varepsilon} + C_{\ell} \lim_{K \rightarrow \infty} \ln^{\ell}(K) K^{-\varepsilon} = \\ &= C_{\ell} \lim_{K \rightarrow \infty} \ln^{\ell}(K) K^{-\varepsilon} = \frac{C_{\ell} \ell!}{\varepsilon^{\ell-1}} \lim_{K \rightarrow \infty} \ln(K) K^{-\varepsilon} = \\ &= \frac{C_{\ell} \ell!}{\varepsilon^{\ell}} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K^{\varepsilon}} = 0 \quad \text{p/ } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Portanto $\lim_{K \rightarrow \infty} r_{\ell}(K) \cdot K^{-\varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$

Lema 3.2: Seja ℓ fixo e seja o polinômio

$$\begin{aligned} \phi_j(z) &= (\phi_{j-1}^*(0) \phi_{j-1}(z) - \phi_{j-1}(0) \phi_{j-1}^*(z)) / (z r_{\ell}(K)) = \\ &= \sum_{i=0}^{K-j-1} a_{i,j} z^i, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, \ell+2, \quad (K \geq \ell+3) \quad \text{onde} \end{aligned}$$

$$\phi_0(z) = \rho(z)/a-1 \quad \text{e} \quad \phi_j^*(z) = \overline{z^{K-j-1} \phi_j(\bar{z}^{-1})}.$$

Então para $j = 0, 1, \dots, \ell+1$

- a) $a_{i,j} = O(K^{i+j-\ell})$ quando $K \rightarrow \infty$ p/ $i = 0, 1, \dots, \ell-j+1$
- b) $a_{K-j-1-i,j} = O(K^i)$ quando $K \rightarrow \infty$ p/ $i = 1, 2, \dots, \ell-j+1$
- c) $a_{K-j-1,j} = O(r_{\ell}(K))$ quando $K \rightarrow \infty$.

Dem: Sejam K e ℓ fixos. Vamos mostrar o lema, usando indução

sobre j .

Para $j=0$ temos:

$$a_{K-j-1,j} = a_{K-1,0} = r_\ell(K) \therefore c) \text{ está satisfeita.}$$

Como $\binom{K}{j} = O(K^j)$ e $(K-j)^{-\ell} = O(K^{-\ell})$ $j = 0, \dots, \ell+1$ e $K \rightarrow \infty$ temos:

$$a_{1,0} = \sum_{j=0}^i (-1)^{K-j-1} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell} = \sum_{j=0}^i O(K^{j-\ell}) = O(K^{i-\ell}),$$

$i = 0, 1, \dots, \ell+1$ e portanto a) está satisfeita.

Ainda

$$\begin{aligned} a_{K-1-i,0} &= \sum_{j=0}^{K-1-i} \alpha_j = a_{K-1,0} - \sum_{j=K-i}^{K-1} \alpha_j = a_{K-1,0} - \sum_{j=K-i}^{K-1} (-1)^{K-j-1} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell} = \\ &= r_\ell(K) + \sum_{j=K-i}^{K-1} (-1)^{K-j} \binom{K}{K-j} (K-j)^{-\ell} = r_\ell(K) + \sum_{s=1}^i (-1)^s \binom{K}{s} s^{-\ell} = \\ &= O(K^i), \quad i = 1, 2, \dots, \ell+1 \text{ pelo lema 3.1.} \end{aligned}$$

Portanto a condição b) está satisfeita.

Suponhamos, agora, que a), b) e c) são verdadeiras p/ $j = 0, 1, \dots, s-1$ onde $s \leq \ell+1$.

Temos, usando a hipótese e a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} a_{1,s} &= (\bar{a}_{K-s,s-1} a_{i+1,s-1} - a_{0,s-1} \bar{a}_{K-s-i-1,s-1}) r_\ell^{-1}(K) = \\ &= \{O(r_\ell(K) K^{i+s-\ell}) + O(K^{s-\ell+i})\} r_\ell^{-1}(K) = O(r_\ell(K) K^{i+s-\ell}) r_\ell^{-1}(K) = \\ &= O(K^{i+s-\ell}) \quad \text{p/ } i = 0, 1, 2, \dots, \ell-s+1. \end{aligned}$$

Da mesma maneira

$$a_{K-s-1-i,s} = (\bar{a}_{K-s,s-1} a_{K-s-i,s-1} - a_{0,s-1} \bar{a}_{i,s-1}) r_\ell^{-1}(K) =$$

$$\begin{aligned}
&= \{O(r_\ell(K)K^1) + O(K^{2s-2-2\ell+1})\} r_\ell^{-1}(K) = \\
&= O(r_\ell(K)K^1) r_\ell^{-1}(K) = O(K^1) \quad p/ \quad i = 1, 2, \dots, \ell-s+1.
\end{aligned}$$

Para $i = 0$ em $a_{K-s-1-i,s}$ temos:

$$a_{K-s-1,s} = \{O(r_\ell^2(K) + O(K^{2s-2-2\ell}))\} r_\ell^{-1}(K) = O(r_\ell(K)).$$

Portanto a), b) e c) são verdadeiros para $s \leq \ell+1$ e fica demonstrado o lema 3.2 .

Teorema 3.1: Seja ℓ fixo. Então o método (K, ℓ) de Brown torna-se instável para todo K suficientemente grande.

Dem: Seja $\phi_0(z) = \rho(z)/(z-1)$.

Considerando K suficientemente grande, podemos aplicar $\ell+2$ vezes o critério de Schur-Cohn para $\phi_0(z)$. Construímos, então, recursivamente os polinômios: $\phi_j(z)$, como no lema 3.2 .

Notemos que $r_\ell^{-1}(K)$ em $\phi_j(z)$ é um fator escalar que não influencia na localização das raízes de $\phi_j(z)$ e que $a_{i,j}$ está associado aos coeficientes do método (K, ℓ) de Brown.

Vamos observar o comportamento dos coeficientes de $\phi_j(z)$ quando $K \rightarrow \infty$ e ℓ fixo.

Suponhamos que $\phi_0(z)$ seja do tipo (p_1, p_2, p_3) .

Pelo lema 3.2 temos:

$$\phi_j(0) = a_{0,j} = O(K^{j-\ell}) \quad e$$

$$\phi_j^*(0) = a_{K-j-1,j} = O(r_\ell(K)).$$

Assim para $j = 0, 1, \dots, \ell+1$, segue do lema 3.1 que para K suficientemente grande temos:

$$|\phi_j^*(0)| > |\phi_j(0)| \quad p/ \quad j = 0, 1, \dots, \ell$$

mas

$$|\phi_{\ell+1}^*(0)| < |\phi_{\ell+1}(0)|.$$

Desta maneira, temos pelo critério de Schur-Cohn que $\phi_j(z)$ é do tipo (p_1-j, p_2, p_3) $p/ \quad j = 0, 1, \dots, \ell+1$ e que $\phi_{\ell+2}(z)$ é do tipo: $(p_3-1, p_2, p_1-\ell-1)$.

Como $p_3-1, p_2, p_1-\ell-1 \geq 0$, temos $p_3 \geq 1$ e portanto $\phi_0(z)$ tem pelo menos uma raiz fora do círculo unitário.

Portanto $\rho(z)$ tem pelo menos uma raiz fora do círculo unitário.

Assim para todo K suficientemente grande temos o método (K, ℓ) instável. (ℓ fixo).

Teorema 3.2: Seja K fixo. Então o método (K, ℓ) de Brown torna-se estável para todo ℓ suficientemente grande.

Dem: Temos que todos os coeficientes de $\Psi(z)$ são positivos.

Para K fixo temos:

$$A_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell} = O((K-1)^{-\ell}), \quad \ell \rightarrow \infty \quad p/ \quad i = 0, 1, \dots, K-1.$$

$$\text{Assim: } A_0 = O(K^{-\ell}), \quad A_1 = O((K-1)^{-\ell}), \dots, A_{K-1} = O(1^{-\ell}), \quad (\ell \rightarrow \infty).$$

Portanto para K suficientemente grande temos:

$0 < A_0 < A_1 < \dots < A_{K-1}$ e pelo teorema de Enestron, Kakeya, Cohn temos $\Psi(z)$ do tipo $(K-1, 0, 0)$.

Segue daí que $\phi_0(z)$ é do tipo $(K-1,0,0)$, ou seja, $\rho(z)$ possui todas suas raízes, exceto a raiz principal, dentro do círculo unitário.

Portanto o método (K,ℓ) é fortemente estável para ℓ suficientemente grande.

Teorema 3.3: O método (K,ℓ) de Brown é fortemente estável se $K \leq 2(\ell+1)$.

Dem: 1) Para $\ell \geq 9$ e $K \leq 2(\ell+1)$ temos:

$$A_1 = \sum_{j=0}^1 (-1)^{1-j} \binom{K}{j} (K-j)^{-\ell} = \binom{K}{K-1} (K-1)^{-\ell} - \binom{K}{K-1+1} (K-1+1)^{-\ell} + A_{1-2}.$$

Pelo lema 0.6 e usando a convenção que $A_{-1} = 0$ temos:

$$\begin{aligned} A_1 &> A_{1-2} + \binom{K}{K-1+1} (K-1+1)^{-\ell} > -A_{1-2} + \binom{K}{K-1+1} (K-1+1)^{-\ell} = \\ &= A_{1-1}, (1 \leq i \leq K-1). \end{aligned}$$

Portanto $\Psi(z)$ satisfaz o teorema de Enestron, et alli; segue que $\Psi(z)$ é do tipo $(K-1,0,0)$ e portanto o método (K,ℓ) nas condições acima é fortemente estável.

ii) Para $1 \leq \ell \leq 8$ o cálculo direto mostra que $\Psi(z)$ com $K \leq 2(\ell+1)$ satisfaz o teorema de Enestron, et alli e portanto o método (K,ℓ) é fortemente estável.

Fica assim demonstrado o teorema.

Obs.: 3.2 - O cálculo direto foi feito por um programa em FORTRAN IV PLUS, executado por computador PDP 11/45 do ICMSC

-USP - São Carlos e serão fornecidos no final do item (pag. 85).

Obs.: 3.3 - Com a desigualdade obtida, confirmamos que os métodos usados na ilustração (pag. 59) são estáveis, exceto o (7,1) e o método (10,1). Como o (7,1) e (10,1) apresentaram instabilidade numérica, salientamos que a desigualdade é boa, pelo menos para $\ell = 1$.

3.4 - Observamos ainda que pelos módulos das raízes, que fornecemos anteriormente, temos:

Os métodos (K, ℓ) de Brown são fortemente estáveis para: $\ell = 1, K \leq 6$; $\ell = 2, K \leq 10$; $\ell = 3, K \leq 14$; $\ell = 4, K \leq 18$.

3.5 - Cryer [6] mostrou que os métodos $(K, 1)$ são instáveis para $K \geq 7$.

3.6 - Para facilitar o cálculo direto indicado em ii) do teorema 3.3 , usamos 2 lemas:

Lema 3.3: Para $K \in \mathbb{N}$ e $\ell \in \mathbb{N}$ temos:

$$A_1 > A_{1-1} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, [K/2],$$

onde $[]$: denota a função maior inteiro.

Dem: Usando o lema 0.4 temos:

$$A_1 - A_{1-1} = t_1^{\sum_{i=1}^K t_i - 1} t_1^{-1} t_2^{-1} \dots t_{\ell-1}^{-1} t_{\ell}^{\sum_{i=1}^{\ell-1} t_i - 1} \{ \binom{t_{\ell}-1}{K-1-1} - \binom{t_{\ell}-1}{K-1} \}$$

Notemos que para n fixo, o binômio $\binom{n}{m}$ é monotonicamente não crescente para $m \geq [\frac{n}{2}]$.

Daí segue que $A_1 - A_{1-1} \geq 0$ p/ $i = 1, 2, \dots, [\frac{K}{2}]$, pois para estes valores de i , $K-1-i \geq [(t_{\ell}-1)/2]$ p/ $t_{\ell} = 1, 2, \dots, K$.

Para $t_\ell = K-1$ temos: $\binom{t_\ell-1}{K-1-1} - \binom{t_\ell-1}{K-1} = 1$

Portanto temos $A_i - A_{i-1} > 0 \quad i = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{K}{2} \rfloor$.

Lema 3.4: Seja K_ℓ tal que $\Psi(z)$ satisfaz o teorema de Enestron. et alli; para todo $K \leq K_\ell$, mas não satisfaz o teorema para $K = K_\ell + 1$.

Então K_ℓ é uma função inteira de ℓ , não crescente.

Dem: Seja $A_i^{(j,\ell)}$ os coeficientes do polinômio $\Psi(z)$ definido a partir do método (j, ℓ) .

Suponhamos $0 < A_{i-1}^{(j,\ell)} < A_i^{(j,\ell)}$ para $i = 1, \dots, j-1$;

$j = 1, \dots, K$ para $\ell = n-1$. Vamos mostrar que isto acontece para $\ell = n$.

Pelo lema 0.4 temos:

$$\begin{aligned} A_i^{(K,\ell)} &= t_1^{\sum_{j=1}^K} t_1^{-1} t_2^{\sum_{j=1}^K} t_2^{-1} \dots t_{\ell-1}^{\sum_{j=1}^K} t_{\ell-1}^{-1} t_\ell^{\sum_{j=1}^K} t_\ell^{-1} \binom{t_\ell-1}{K-1-1} = \\ &= \sum_{s=1}^K s^{-1} t_1^{\sum_{j=1}^s} t_1^{-1} \dots t_{\ell-2}^{\sum_{j=1}^s} t_{\ell-2}^{-1} t_{\ell-1}^{\sum_{j=1}^s} t_{\ell-1}^{-1} \binom{t_{\ell-1}-1}{K-1-1} = \\ &= \sum_{s=1}^K s^{-1} t_1^{\sum_{j=1}^s} t_1^{-1} \dots t_{\ell-2}^{\sum_{j=1}^s} t_{\ell-2}^{-1} t_{\ell-1}^{\sum_{j=1}^s} t_{\ell-1}^{-1} \binom{t_{\ell-1}-1}{s-1-(1+s-K)} = \\ &= \sum_{s=1}^K s^{-1} A_{1+s-K}^{(s,\ell-1)}. \end{aligned}$$

Observemos que $1+s-K$ deve ser ≥ 0 , pois como não tem sentido $A_j^{(K,\ell)}$ para $j < 0$, tomamos $A_j^{(K,\ell)} = 0 \quad j < 0$.

Desta maneira $1+s-K \geq 0 \Rightarrow s \geq K-1$, donde obtemos:

$$A_i^{(K,\ell)} = \sum_{s=K-1}^K s^{-1} A_{1+s-K}^{(s,\ell-1)} \quad i = 0, \dots, K-1.$$

Portanto p/ $\ell = n$ temos; usando a hipótese de indução que

$$A_{i-1}^{(j,n)} = \sum_{s=j-i+1}^j s^{-1} A_{i-1+s-j}^{(j,n-1)} < \sum_{s=j-i}^j s^{-1} A_{i+s-j}^{(s,n-1)} = A_i^{(j,n)}.$$

Assim a suposição é verdadeira para $\ell = n$ e portanto $K_{\ell+1} \geq K_{\ell}$.

Portanto K_{ℓ} é uma função inteira não decrescente.

Obs.: 3.7 - Pelos lemas 3.3 e 3.4 fizemos então, apenas os cálculos para A_1 com $i = [\frac{K}{2}], \dots, K-1$; $1 \leq K \leq 4$ ($\ell=1$) e $2\ell+1 \leq K \leq 2\ell+2$ ($2 \leq \ell \leq 8$). Considerando A_1 como coeficientes do polinômio $\Psi(z)$ associado ao método (K, ℓ) .

3.8 - Os valores de A_1 obtidos, são dados a seguir. Vamos que realmente satisfazem o teorema de Enestron, Kakeya Cohn. Para $K=2$ fornecemos A_1 , talvez desnecessariamente, já que pelo lema 3.1 temos $A_0 < A_1$, pois $1 = \frac{K}{2}$.

COEFICIENTES DO POLINÔMIO $\Psi(z) = \phi(z)/(z-1)$ (TEOR. 3.3)

L=1, K=1			
0.1000000E+01			
L=1, K=2			
0.1500000E+01			
L=1, K=3			
0.1166667E+01	0.1833333E+01		
L=1, K=4			
0.1916667E+01	0.2083333E+01		
L=2, K=5			
0.8386112E+00	0.1661389E+01	0.3338611E+01	
L=2, K=6			
0.1496945E+01	0.2253056E+01	0.3746944E+01	
L=3, K=7			
0.4083670E+00	0.8879293E+00	0.1737071E+01	0.5262929E+01
L=3, K=8			
0.7540091E+00	0.1320065E+01	0.2179935E+01	0.5820065E+01

L=4, K=9					
0.1497341E+00	0.3424534E+00	0.6945836E+00	0.1555416E+01	0.7444583E+01	
L=4, K=10					
0.2815800E+00	0.5387325E+00	0.9427489E+00	0.1869751E+01	0.8130249E+01	
L=5, K=11					
0.4398667E-01	0.1038533E+00	0.2184123E+00	0.4606001E+00	0.1258150E+01	0.9741850E+01
L=5, K=12					
0.8367393E-01	0.1697661E+00	0.3136324E+00	0.5917174E+00	0.1470783E+01	0.1052922E+02
L=6, K=13					
0.1077553E-01	0.2600431E-01	0.5636369E-01	0.1181969E+00	0.2741214E+00	0.9446286E+00
0.1205537E+02					
L=6, K=14					
0.2065986E-01	0.4370485E-01	0.8442316E-01	0.1599616E+00	0.3393525E+00	0.1082523E+01
0.1291748E+02					
L=7, K=15					
0.2263441E-02	0.5550358E-02	0.1232873E-01	0.2610967E-01	0.5720332E-01	0.1508442E+00
0.6694682E+00	0.1433053E+02				
L=7, K=16					
0.4364644E-02	0.9526556E-02	0.1907998E-01	0.3683042E-01	0.7425356E-01	0.1818050E+00
0.7556950E+00	0.1524430E+02				
L=8, K=17					
0.4161050E-03	0.1032884E-02	0.2340693E-02	0.5027658E-02	0.1081362E-01	0.2550230E-01
0.7814045E-01	0.4531096E+00	0.1654689E+02			
L=8, K=18					
0.8058932E-03	0.1802287E-02	0.3718112E-02	0.7334415E-02	0.1459967E-01	0.3209223E-01
0.9227908E-01	0.5053772E+00	0.1749463E+02			

3.2 - Polinômio de estabilidade, ramo principal e estabilidade no infinito:

Neste parágrafo vamos iniciar o estudo da estabilidade mais especificamente. Faremos uma justificativa rápida do uso da equação teste $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$ para a determinação do polinômio de estabilidade. Ainda, vamos estudar o comportamento dos ramos do polinômio de estabilidade $\phi(z, \mu) = 0$, para μ numa vizinhança da origem e nas vizinhanças do infinito.

Vimos que convergência acarreta alguma propriedade sobre a estabilidade do método, mas isto é concer-

nente ao fato de $h \rightarrow 0$. Na prática é interessante saber o que acontece com o erro global E_n quando $n \rightarrow \infty$ e $h > 0$ permanece fixo.

De maneira geral isto depende do problema de valor inicial, mas é usual usar uma equação teste para observar este comportamento. A equação usual é $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

O argumento para usarmos esta equação pode ser dado como segue:

Se $y(x)$ é solução de $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$, $y, f \in \mathbb{R}^m$, então numa vizinhança desta solução, podemos representar o problema acima por $y' \cong \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) \cdot (y - y(x)) + f(x, y(x))$.

Assumimos que $\frac{\partial f}{\partial y}$ seja localmente constante. Daí temos $y' \cong A(y - y(x)) + f(x, y(x))$, onde A é matriz constante $m \times m$.

Em geral, daqui, assume-se duas posições: ou i), ou ii).

i) Toma-se o modelo $y' = Ay + \phi(x)$, e como a estabilidade depende essencialmente de A e não de ϕ , toma-se o modelo $y' = Ay$.

ii) Toma-se o modelo $y' = A(y - y(x)) + y'(x)$ chegando-se ao modelo $y' = A(y - g(x)) + g'(x)$ com $g(x)$ função limitada.

No nosso estudo, tomamos o modelo i). $y' = Ay$. Supondo que A é diagonalizável, temos que existe H não singular tal que $H^{-1}AH = \Lambda: \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ onde λ_j ($j=1, \dots, m$) são autovalores de A .

Mudando a variável de y para z , onde $y = Hz$, temos o modelo $z' = \Lambda z$. Como o sistema obtido já é diagonal, podemos representar o modelo por $z' = \lambda z$, λ autovalor de A . Portanto, podemos usar λ como um complexo e temos equivalen

temente ao modelo 1), o modelo $y' = \lambda y$. (equação teste).

Notemos que aplicar o método (K, ℓ) à equação $y' = Ay$, é equivalente a aplicá-lo à equação $y' = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

De fato:

Aplicando o método (K, ℓ) à $y' = Ay$ obtemos:

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j h^j A^j y_{n+K} = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j (hA)^j y_{n+K}.$$

Substituindo $y = Hz$ tem-se:

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i H z_{n+i} = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j (hA)^j H z_{n+K}.$$

Daí temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^K \alpha_i H z_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j (hA)^j H z_{n+K} &= 0 = \\ &= H^{-1} \left(\sum_{i=0}^K \alpha_i H z_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j (hA)^j H z_{n+K} \right). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^K \alpha_i z_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j h^j H^{-1} A^j H z_{n+K} = \\ &= \sum_{i=0}^K \alpha_i z_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j h^j \Lambda^j z_{n+K} \quad \text{que é equivalente a aplicar o} \\ \text{método } (K, \ell) \text{ ao modelo } z' &= \Lambda z. \text{ Portanto o modelo } y' = \lambda y \text{ é} \\ \text{satisfatório, } (\lambda \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Vamos agora deduzir o polinômio de estabilidade dos métodos (K, ℓ) . Consideremos um método (K, ℓ) de ordem p .

Aplicando o método (K, ℓ) à equação teste $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ temos:

$\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j (h\lambda)^j y_{n+K} = 0$ que é uma equação à diferenças com coeficientes constantes, cuja equação característica as sociada é

$$\phi(z, \mu) = \rho(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \mu^j \sigma_j(z), \quad \text{com } \mu = h\lambda.$$

onde

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^K \alpha_i z^i \quad \text{e} \quad \sigma_j(z) = \beta_j z^K, \quad (j = 1, \dots, \ell).$$

Portanto o polinômio de estabilidade do método (K, ℓ) é dado por $\phi(z, \mu) = \rho(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \mu^j \sigma_j(z) = 0$.

A estabilidade, relativamente às raízes (ramos) de $\phi(z, \mu) = 0$ será estudada de acordo com o enfoque das funções algébricas.

Vamos observar o comportamento dos ramos $z_i(\mu)$, $(i=1, \dots, K)$, da função algébrica $z(\mu)$ definida por $\phi(z, \mu) = 0$, quando $\mu \rightarrow 0$.

Notemos que $\phi(z, \mu) \rightarrow \rho(z)$ quando $\mu \rightarrow 0$ e que $z_i(\mu) \rightarrow z_i$ $(i=1, \dots, K)$ onde z_i é raiz de $\rho(z)$. É interessante notar que isto é verdade, pois $z_i(\mu)$ é analítica.

Como o método é consistente (Obs. 1.4) temos $C_0 = 0$; portanto $0 = \sum_{i=0}^K \alpha_i = \rho(1) \Rightarrow 1$ é raiz de $\phi(z, 0)$.

Seja $z_1(\mu)$ o ramo de $z(\mu)$ tal que $z_1(\mu) \rightarrow 1$ para $\mu \rightarrow 0$.

Por outro lado temos que $L[y(x), h] = O(h^{p+1})$, portanto

$$L[e^{\lambda x}, h] = \sum_{i=0}^K e^{\lambda(x+ih)} - \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j (h\lambda)^j e^{\lambda(x+Kh)} = O(\mu^{p+1}),$$

Portanto

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i (e^{\mu})^i - \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \mu^j (e^{\mu})^K = \rho(e^{\mu}) - \sum_{j=1}^{\ell} \mu^j \sigma_j(e^{\mu}) = O(\mu^{p+1}).$$

Temos então: $\phi(e^\mu, \mu) = O(\mu^{p+1})$

Como $\phi(z, \mu) = Q(z - z_1(\mu))(z - z_2(\mu)) \dots (z - z_K(\mu)) = O(\mu^{p+1})$,

temos: $\phi(e^\mu, \mu) = Q(e^\mu - z_1(\mu))(e^\mu - z_2(\mu)) \dots (e^\mu - z_K(\mu)) = O(\mu^{p+1})$.

Quando $\mu \rightarrow 0$ temos $e^\mu \rightarrow 1$ e $z_i(\mu) \rightarrow z_i$ ($i=1, \dots, K$)

Assim o primeiro fator $(e^\mu - z_1(\mu)) \rightarrow 0$ quando $\mu \rightarrow 0$.

Se o método é convergente, então $z_1 = 1$ é raiz simples e portanto nenhum outro fator tende a zero.

Portanto concluímos que $e^\mu - z_1(\mu) = O(\mu^{p+1})$ ($\mu \rightarrow 0$)

Assim $z_1(\mu) = e^\mu + O(\mu^{p+1})$ para $\mu \rightarrow 0$.

Vamos denominar $z_1(\mu)$ de ramo principal de $z(\mu)$ definida por $\phi(z, \mu) = 0$, ou simplesmente de ramo principal de $\phi(z, \mu) = 0$.

Passamos, agora, a estudar o comportamento de $z_1(\mu)$ para $\mu \rightarrow \infty$. Este comportamento é importante, principalmente quando trabalhamos com problemas excessivamente "stiff". Para isto vamos precisar de algumas definições:

Def. 3.1: Seja $\phi(z, \mu) = \rho(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \mu^j \sigma_j(z) = 0$ o polinômio de estabilidade do método (K, ℓ) de Brown.

Então o método tem ordem de decaimento E no infinito se

$$\max_{1 \leq i \leq K} \{|z_i(\mu)|\} = O\left(\frac{1}{\mu^E}\right) \quad \mu \rightarrow \infty, \quad \text{Re}(\mu) < 0.$$

onde $z_1(\mu), \dots, z_K(\mu)$ são ramos de $z(\mu)$ definida por $\phi(z, \mu) = 0$.

Def. 3.2: Um método (K, ℓ) de Brown é dito estável no infinito se $E > 0$.

Def. 3.3: Seja um método (K, ℓ) de Brown. Então o conjunto $P = \{(i, 0) \text{ se } \alpha_i \neq 0\} \cup \{(K, j) \text{ se } \beta_j \neq 0\}$ é chamado o conjunto de Puiseux do método. O gráfico de P em $\mathbb{R}^2$ é denominado o diagrama de Puiseux associado e é denotado por $G(P)$.

Obs.: 3.9 - A definição 3.1 equivale a dizer que:

$|\mu|^\eta \max_{1 \leq i \leq K} \{|z_i(\mu)|\}$ é limitado para μ numa vizinhança do infinito e todo $\eta \leq E$.

3.10 - Como os ramos $z_i(\mu)$ ($i=1, \dots, K$) são funções analíticas, podemos representá-los por séries. Para μ numa vizinhança da origem, o estudo é feito usando o polígono de Newton. De maneira inteiramente análoga, o estudo de $z_i(\mu)$, $\mu \rightarrow \infty$ é feito usando o de Puiseux.

3.11 - Para os métodos (K, ℓ) é sabido que $\alpha_i \neq 0$ $i=0, \dots, K$ e pelo menos $\beta_\ell \neq 0$. Portanto, pelo menos os pontos $(0, 0)$; $(1, 0)$; ...; $(K, 0)$ e (K, ℓ) estão em P .

3.12 - No caso do polígono de Newton, exige-se que em $\phi(z, \mu) = 0$ tenhamos: $\exists \bar{z} \in \mathbb{C} \mid \rho(\bar{z}) = \sigma_j(\bar{z}) = 0$. ($j=1, \dots, \ell$). No nosso caso também, pois estudar $z_i(\mu)$, $\mu \rightarrow \infty$ é equivalente a estudar $\mu^\ell \phi(z, \frac{1}{\mu}) = 0$, $\mu \rightarrow 0$. Para os métodos (K, ℓ) temos $\alpha_0 \neq 0$ e portanto 0 não é raiz de $\rho(z) = 0$; para $\sigma_j(z) = \beta_j z^K = 0$ só temos raiz nula. Logo esta hipótese é sempre verificada para os métodos de Brown.

Teorema 3.4: Seja um método (K, ℓ) e seu diagrama $G(P)$. Então a ordem de decaimento E é o menor coeficiente angular de todas as retas que tem coeficiente angular finito e que passa pelos pontos (K, ℓ) e qualquer outro ponto de $G(P)$.

Dem: Do polinômio de estabilidade temos:

$$\phi(z, \mu) = \rho(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \mu^j \sigma_j(z) = \sum_{i=0}^K \eta_i(\mu) z^i = 0$$

$$\text{onde } \eta_i(\mu) = \alpha_i \quad (i=0, \dots, K-1) \text{ e } \eta_K(\mu) = \alpha_K - \sum_{j=1}^{\ell} \mu^j \beta_j$$

Temos $z_i(\mu)$, $(\mu \rightarrow \infty)$ $(i=1, \dots, K)$ dado como série convergente por:

$$z_i(\mu) = \ell_{1i} \mu^{-E_{1i}} + \ell_{2i} \mu^{-E_{2i}} + \ell_{3i} \mu^{-E_{3i}} + \dots; -\infty < E_{1i} < E_{2i} < \dots \quad \text{e}$$

$$\ell_{1i} \neq 0 \quad (i=1, \dots, K). \quad \text{Alhfors [1, pag. 295].}$$

Portanto temos que a ordem de decaimento é da da por:

$$(9) \quad E = \min_{1 \leq i \leq K} \{E_{1i}\}.$$

Para simplificar a notação, vamos tomar

$$z_i(\mu) = z(\mu).$$

Assim temos:

$$\begin{aligned} 0 \equiv \phi(z, \mu) &= \sum_{i=0}^K \eta_i(\mu) z^i = \eta_K(\mu) (\ell_1 \mu^{-E_1} + \ell_2 \mu^{-E_2} + \dots)^K + \\ &+ \eta_{K-1}(\mu) (\ell_1 \mu^{-E_1} + \ell_2 \mu^{-E_2} + \dots)^{K-1} + \dots + \\ &+ \eta_1(\mu) (\ell_1 \mu^{-E_1} + \ell_2 \mu^{-E_2} + \dots) + \eta_0(\mu) = \\ (10) \quad &= (\alpha_K - \sum_{j=1}^{\ell} \mu^j \beta_j) (\ell_1 \mu^{-E_1} + \ell_2 \mu^{-E_2} + \dots)^K + \dots + \\ &+ \alpha_1 (\ell_1 \mu^{-E_1} + \ell_2 \mu^{-E_2} + \dots) + \alpha_0 = 0. \end{aligned}$$

Como $z(\mu)$ é absolutamente convergente para $\mu \rightarrow \infty$, podemos desenvolver a expressão acima em série de potências de μ . Logo, por (10), a maior potência de μ ocorre no conjunto:

$$(11) \quad \{\alpha_K \ell_1^K \mu^{-KE_1}, -\beta_\ell \ell_1^K \mu^{\ell+KE_1}, \alpha_{K-1} \ell_1^{K-1} \mu^{-(K-1)E_1}, \dots, \alpha_0 \mu^0\}$$

Como os coeficientes dos elementos em (11) são não nulos, temos que existem pelo menos 2 elementos com uma mesma potência de μ , que seja maior que todas as outras; por que de (10) temos que a série de potências de μ deve ser identicamente nula.

Desta maneira temos a seguinte condição para determinar E : ordem de decaimento:

Usando (11) temos de (9) que E é dado pelo menor E_{1i} ($i = 1, \dots, K$) tal que pelo menos 2 elementos do conjunto:

$$(12) \quad \{-mE_{1i}, (m=0, \dots, K); \ell - KE_{1i}\} \text{ sejam iguais e maiores do que todos os outros.}$$

Por outro lado se passamos, por cada ponto do conjunto $E(P) = \{(i, j) \in P \mid (i, j+t) \notin P, t = 1, 2, \dots\} \cup \{(0, K)\}$ uma reta com coeficiente angular E_1 temos:

$$i) \text{ pelos pontos } (i, 0) (i=0, \dots, K), y-0 = (x-i)E_1 \Rightarrow y = xE_1 - iE_1$$

$$ii) \text{ pelo ponto } (K, \ell), y-\ell = (x-K)E_1 \Rightarrow y = xE_1 + \ell - KE_1.$$

Tal reta intersepta o eixo y no ponto $(0, -iE_1)$ ($i = 0, \dots, K$) ou $(0, \ell - KE_1)$ conforme passe pelos pontos $(i, 0)$ ou (K, ℓ) respectivamente. Como vemos, a reta intersepta o eixo y , justamente nos valores do conjunto (12).

Logo, fica determinado um critério para esco-

lhermos E_1 quando exigimos que a reta que determine o maior elemento de (11), passe por 2 pontos de $E(P)$; conforme a condição para E .

Mostremos, agora, que esta reta deve passar por (K, ℓ) . Suponhamos que passe por 2 pontos de $E(P)$ que não sejam (K, ℓ) .

Temos:

A reta passando por pelo menos 2 pontos de $E(P)$ distintos de (K, ℓ) é a reta $y = 0$. (coeficiente angular 0).

Passando esta reta por todos os de $E(P)$ temos:

Temos então o maior elemento de (12) dado por $\ell - KE_1 = \ell$.

De acordo com o critério este coeficiente angular $E_1 = 0$ não determina a ordem de decaimento porque a reta que intersepta o eixo y no maior valor de (12) passa por apenas um ponto de $E(P)$.

Portanto a reta que determina E , necessariamente passa por (K, ℓ) . De (9) temos que E é o menor coefici

ente angular das retas que passam por (K, ℓ) , ficando demonstrado o teorema.

Corolário 3.1: Seja um método (K, ℓ) de Brown.

Então a ordem de decaimento no infinito para este método é dada por:

$$E = \frac{\ell}{K}.$$

Dem: Pelo teorema 3.4, E é dado pelo mínimo dos coeficientes angulares finitos das retas que passam por (K, ℓ) e qualquer outro ponto de $E(P)$.

Estas retas são determinadas pelos pontos (K, ℓ) e $(i, 0)$, $(i=0, \dots, K-1)$ porque $\alpha_i \neq 0$ ($i=1, \dots, K-1$) e $\beta_\ell \neq 0$ e ainda, excluimos o ponto $(K, 0)$ pois a reta que passa por (K, ℓ) e $(K, 0)$ é considerada não ter coeficiente angular finito.

Assim temos os coeficientes angulares

$$\ell-0 = (K-i)E_{1,i+1} \quad i=0, \dots, K-1.$$

$$\text{Logo } E_{1,i} = \frac{\ell}{K-i+1}, \quad i=1, \dots, K.$$

$$\text{Como } E = \min_{1 \leq i \leq K} E_{1i}, \quad \text{temos } E = \frac{\ell}{K}.$$

Obs.: 3.13 - Jeltsch [18] denomina métodos com ordem de decaimento ℓ/K de métodos com ordem ótima de decaimento.

3.3 - Caracterização algébrica para $A(0)$ e "stiff" estabilidade:

A caracterização será feita em termos da A_0

estabilidade e das raízes de $\rho(z)$. Para isso vamos usar alguns resultados sobre funções algébricas que foram fornecidos no capítulo 0.

Sem perda de generalidade vamos assumir que $\phi(z, \mu) = 0$ seja irredutível. Seja $z_1(\mu)$ os ramos de $z(\mu)$ definida por $\phi(z(\mu), \mu) = 0$. Se o método é convergente então colocamos $z_1(\mu)$ como ramo principal.

Seja Ω a maior região na qual $z_1(\mu)$ possui continuação analítica.

Os conjuntos $A = \{\lambda \in \bar{C} / |z_1(\lambda)| < 1, i = 1, 2, \dots, K\}$

e $R = \{\lambda \in \Omega / |z_1(\lambda)| < |z_1(\lambda)|, i = 2, 3, \dots, K\}$

são chamados de regiões de estabilidade absoluta e relativa respectivamente. $\bar{C}$ denota $C \cup \{\infty\}$.

Consideremos D , θ e a constantes positivas e definimos os conjuntos: $R_1 = \{\lambda \in C / \operatorname{Re} \lambda < -D\}$

$$R_2 = \{\lambda \in C / \operatorname{Re} \lambda \leq -a, |\operatorname{Im} \lambda| < \theta\}$$

$$R_3 = \{\lambda \in C / |\operatorname{Re} \lambda| < a, |\operatorname{Im} \lambda| < \theta\}.$$

Def. 3.3: Um método é chamado A_0 estável se A contém o eixo negativo aberto.

Def. 3.4: Um método é dito $A(\alpha)$ estável se

$$S_\alpha = \{\lambda \in C / |\arg(-\lambda)| < \alpha, \lambda \neq 0\} \subset A$$

É dito $A(0)$ estável se é $A(\alpha)$ para algum $\alpha > 0$.

Def. 3.5:

Um método é dito "stiffly" estável se é convergente,

A_0 estável e se para algumas constantes positivas D , θ e a temos $R_1 \cup R_2 \subset A$ e $R_3 \subset R$

Obs.: 3.14 - Esta definição é ligeiramente mais explícita do que a introduzida por Gear [11], [12].

3.15 - No caso em que $\ell = 1$ podemos suprimir da definição 3.5 a condição de A_0 estabilidade pois pode-se mostrar, que nesse caso todo método "stiffly" estável é A_0 estável (Jeltsch [17]). Além disso Cryer [6] mostrou que os métodos $(K, 1)$ são instáveis para $K \geq 7$.

Def. 3.6: Definimos por setor o seguinte:

$$S(\lambda^*, \phi, \alpha, r) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\phi - \arg(\lambda - \lambda^*)| \leq \alpha, 0 < |\lambda| < r\}, & \text{se } \lambda^* \neq \infty \\ \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\phi - \arg(\lambda)| \leq \alpha, |\lambda| > \frac{1}{r}\} & \text{se } \lambda^* = \infty \end{cases}$$

Definimos por disco o seguinte:

$$D(\lambda^*, r) = \begin{cases} \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \lambda^*| < r\} & \text{se } \lambda^* \neq \infty \\ \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > \frac{1}{r}\} & \text{se } \lambda^* = \infty \end{cases}$$

Exemplo: $S(\infty, \pi, \alpha, \infty) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\pi - \arg(\lambda)| \leq \alpha, \quad |\lambda| > 0\}$

$$S(0, \pi, \alpha, \infty) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\pi - \arg(\lambda)| \leq \alpha, \quad 0 < |\lambda| < \infty\}.$$

$$\text{Temos } S(\infty, \pi, \alpha, \infty) = S(0, \pi, \alpha, \infty).$$

Geometricamente temos:

Teorema 3.5:

$$\text{Seja } \rho(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \lambda^j \sigma_j(z) = 0; \quad (\rho(z) = \sum_{i=0}^K \alpha_i z^i; \quad \sigma_j(z) = \beta_j z^K)$$

associado a um método (K, ℓ) de Brown, convergente.

Então o método é $A(0)$ -estável se e somente se:

i) O método é A_0 -estável.

ii) Seja z^* raiz de $\rho(z)$ com módulo 1, então $\sigma_1(z^*) \neq 0$

e além disso

$$- \operatorname{Re} \left(\frac{\sigma_1(z^*)}{z^* \rho'(z^*)} \right) > 0.$$

Dem: ($\Rightarrow$) i) Seque das definições de $A(0)$ e A_0 -estabilidade

ii) Seja $z^*(\lambda)$ o ramo que tende à z^* . Como o método é convergente, temos z^* raiz simples e portanto $z^*(\lambda)$ é analí

tica na origem.

Escrevendo $z^*(\lambda)$ em série de λ temos:

$$z^*(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i \lambda^i.$$

Assim $z^*(0) = z_0 = z^*$. Portanto $z^*(\lambda) = z^* + z_1 \lambda + O(\lambda^2)$.

Por outro lado $z^*(\lambda)$ é raiz de $\phi(z, \lambda) = 0$.

Logo $\rho(z^*(\lambda)) - \sum_{j=1}^{\ell} \lambda^j \sigma_j(z^*(\lambda)) = 0$.

Assim $\sum_{i=0}^K \alpha_i (z^* + z_1 \lambda + O(\lambda^2))^i - \lambda \beta_1 (z^* + z_1 \lambda + O(\lambda^2))^K - \dots$

$$\dots - \beta_{\ell} \lambda^{\ell} (z^* + z_1 \lambda + O(\lambda^2))^K = 0.$$

Donde $\rho(z^*) + \rho'(z^*) \lambda - \sigma_1(z^*) \lambda + O(\lambda^2) \equiv 0$.

Portanto $\lambda(z_1 \rho'(z^*) - \sigma_1(z^*)) + O(\lambda^2) \equiv 0$.

e portanto $z_1 \rho'(z^*) = \sigma_1(z^*)$.

Como z^* é raiz simples (o método é convergente) temos

$\rho'(z^*) \neq 0$ e portanto $\sigma_1(z^*) \neq 0$. Segue que $z_1 = \frac{\sigma_1(z^*)}{\rho'(z^*)}$.

Temos então,

$$z^*(\lambda) = z^* \left(1 + \frac{\sigma_1(z^*) \lambda}{z^* \rho'(z^*)} + O(\lambda^2) \right).$$

Pela condição IV₂) do teorema 0.6, temos que,

$$-\frac{\sigma_1(z^*)}{z^* \rho'(z^*)} \in S(0, 0, \pi/2 - \alpha, \infty).$$

Portanto $-\operatorname{Re} \frac{\sigma_1(z^*)}{z^* \rho'(z^*)} > 0$.

($\Leftarrow$) Se o método satisfaz i) e ii) devemos mostrar, então, que $\exists \alpha > 0$ tal que $|z_i(\lambda)| < 1$, $\lambda \in S(0, \pi, \alpha, \infty)$, ($i = 1, \dots, K$).

Os polinômios $\rho(z)$ e $\sigma_j(z)$ são de coeficientes reais; assim temos $z(\bar{\lambda}) = \bar{z}(\lambda)$ e portanto podemos nos restringir à $\text{Im} \lambda > 0$. Para $\text{Im} \lambda = 0$ temos por i) que $|z(\lambda)| < 1$ para $\lambda \in (-\infty, 0)$.

Como o método é convergente, temos raiz de $\rho(z)$ em $\bar{D}(0, 1)$ e portanto III₁) do lema 0.6 está satisfeita. Além disso se z^* raiz de $\rho(z)$ tal que $|z^*| = 1$, temos z^* raiz simples e então III₂) do teorema 0.6 fica satisfeita:

De fato:

Temos $\sigma_j(z^*) = \beta_j(z^*)^K \neq 0$ donde $m_j = 0$.

Como z^* é raiz simples temos $m_0 = 1$.

Usando $q = 1$, $s = 0$, $m_0 = 1$, $\phi^* = \pi$ e $\alpha_1 \in (0, \pi/2]$

temos:

$$P(\mu) = \sum_{j=0}^1 \delta_j \mu^j = \delta_0 + \delta_1 \mu,$$

$$\delta_0 = e^0 (-z^*)^0 \frac{d\rho(z)}{dz} \Big|_{z=z^*} = \rho'(z^*), \quad (t(0) = 0+0 = 0, \quad m(0) = 1-0=1)$$

$$\delta_1 = e^{i\pi} (-z^*)^{-1} \cdot \sigma_1(z) \Big|_{z=z^*} = \frac{\sigma_1(z^*)}{z^*}, \quad (t(1) = 1, \quad m(1) = 1-1=0)$$

$$\text{Portanto } P(\mu) = \rho'(z^*) + \frac{\sigma_1(z^*)}{z^*} \mu \quad \text{cuja raiz é } \mu = \frac{-\rho'(z^*) z^*}{\sigma_1(z^*)}$$

$$\text{Por ii) temos } \text{Re } \mu = -\text{Re} \left(\frac{z^* \rho'(z^*)}{\sigma_1(z^*)} \right) > 0.$$

Portanto a raiz de $P(\mu)$ está no setor

$$S(0, 0, \pi/2 - \alpha_1, \infty)$$

Assim, equivalentemente, pelo teorema 0.6 te-

mos que existem r_0 e $\alpha_0 \in (0, \pi/2]$ tais que para todo $\lambda \in S(0, \pi, \alpha_0/2, r_0)$ temos $|z_1(\lambda)| < 1$ ($i = 1, \dots, K$).

Por outro lado temos raízes de $\sigma_\ell(z) = \beta_\ell z^K$ em $D(0, 1)$ ($\beta_\ell \neq 0$) e portanto pela obs. 0.7 temos equivalentemente que existem r_∞ e $\alpha_\infty \in (0, \pi/2]$ tais que para todo $\lambda \in S(\infty, \pi, \alpha_\infty/2, r_\infty)$ temos $|z_1(\lambda)| < 1$, ($i = 1, \dots, K$).

Notemos que existe α^* tal que $z(\lambda)$ não possui polos ou pontos de ramificação em $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \pi - \alpha^* < \arg \lambda < \pi, \lambda \neq 0\}$. Portanto cada ramo $z_1(\lambda)$ pode ser definido unicamente em S e tem uma extensão contínua em $S \cup [-r_\infty, -r_0]$. Para cada ramo $z_1(\lambda)$ temos $|z(\lambda)| < 1$ para $\lambda \in [-r_\infty, r_0]$. Da continuidade de cada ramo temos que existe α com $0 < \alpha < \min\{\alpha^*, \alpha_0/2, \alpha_\infty/2\}$ e $|z(\lambda)| < 1$ para todo λ , com $\pi - \alpha < \arg(\lambda) \leq \pi$, $\lambda \neq 0$.

Portanto o método é $A(\alpha)$ estável e assim $A(0)$ estável.

Obs.: 3.16 - Se o método é fortemente estável, então ele é $A(0)$ estável se e somente se é A_0 estável. ($-\frac{\sigma(1)}{\rho'(1)} = 1 > 0$).

Teorema 3.6: Um método (K, ℓ) de Brown é "stiffly" estável se e somente 1) $E' A_0$ estável

ii) E' fortemente estável.

Dem:

($\Rightarrow$) Se o método é "stiffly" estável temos por definição que é convergente e A_0 estável. Portanto i) está satisfeita. Além disso temos que as raízes de $\rho(z)$ estão em $\bar{D}(0, 1)$ e ainda existe o ramo principal $z_1(\mu)$ de $\phi(z, \mu) = 0$ que ten-

de a raiz principal 1.

Como $R_3 \subset \mathbb{R}$ temos $\exists r > 0$ tal que

$$|z_1(\lambda)| < |z_1(0)|, \lambda \in D(0, r)$$

Desta maneira $|z_1(0)| < |z_1(0)| = 1$, $i = 2, \dots, K$ e portanto o método é fortemente estável e ii) está satisfeita.

($\Leftarrow$) Por hipótese temos que o método é A_0 estável e fortemente estável e portanto convergente (teor. 2.3). Devemos determinar D, θ e a tais que $R_1 U R_2 \subset A$ e $R_3 \subset \mathbb{R}$. (def. 3.5).

Como o método é A_0 estável e fortemente estável, temos pela obs. 3.15 que o método é $A(0)$ estável.

De ii) segue que $\exists r > 0$ tal que $D(0, r) \subset \mathbb{R}$. Desta maneira conseguimos $a > 0$ e $\theta > 0$ tal que $R_3 \subset \mathbb{R}$ e $R_2 \subset A$.

Precisamos, agora, mostrar a existência de $D > 0$, tal que $R_1 \subset A$.

Vamos aplicar o teorema 0.6 no problema $X(z, \lambda) = 0$ dado pela obs. 0.7.

A condição III) do teorema 0.6 é satisfeita pois $\sigma_\ell(z) = 0$ só possui raízes nulas. Assim temos para $z(\frac{1}{\lambda})$, com $\lambda \rightarrow 0$, somente ramos da forma:

$$z(\lambda) = z\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \mu \lambda^{-\eta} + O(\lambda^{-\tilde{\eta}})$$

Portanto $\exists r_1, r_1 > 0$ tal que $|z_1(\lambda)| < 1$ p/ $\lambda \in D(\infty, r_1)$ ($i = 1, \dots, K$)

Concluimos então que $|z_1(\lambda)| < 1$ para todo λ tal que $\operatorname{Re} \lambda < -r_1$. Fica assim determinado D e temos $R_1 U R_2 C A$ e $R_3 C R$. Logo se o método satisfaz i) e ii) temos que o método é "stiffly" estável.

Teorema 3.7: Seja um método (K, ℓ) "stiffly" estável. Então existe $r > 0$ tal que $D(-r, r) C A$.

Dem: Se o método é "stiffly" estável, então ele é fortemente estável e consequentemente convergente, donde $\sigma_1(1) \neq 0$ e $\mu = \frac{-\sigma_1(1)}{\rho^+(1)} > 0$. Desta maneira a condição III) do teorema 0.6 está satisfeita e temos

$$z(\lambda) = z^*(1 + \mu \lambda^\eta + O(\lambda^{\tilde{\eta}})) \quad z^* \neq 0.$$

com $0 < \eta < \tilde{\eta}$; $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{Q}$. Além disso $z^* \in \bar{D}(0, 1)$ e se $z^* = 1$ então $\eta = 1$ e $\mu \in S(0, 0, 0, \infty)$.

Se fazemos a transformação $\lambda = \frac{1}{\tilde{\lambda}}$ temos:

$$z(\lambda) = z\left(-\frac{1}{\tilde{\lambda}}\right) = z^*(1 + \mu \lambda^{-\eta} + O(\lambda^{-\tilde{\eta}})) \quad z^* \neq 0.$$

portanto existe $\tilde{D}$ tal que $|z(\tilde{\lambda}^{-1})| < 1$ para $\tilde{\lambda}$ com $\operatorname{Re} \tilde{\lambda} < -\tilde{D}$.

Mas a transformação $\tilde{\lambda} = \lambda^{-1}$ leva o conjunto $\{\tilde{\lambda} \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \tilde{\lambda} < -\tilde{D}\}$ no disco $D(-1/(2\tilde{D}), 1/(2\tilde{D}))$.

Seja $r = 1/(2\tilde{D})$. Temos $|z_1(\lambda)| < 1$ para todo $\lambda \in D(-r, r)$ ou seja $D(-r, r) C A$.

Obs.: 3.17 - Este teorema nos ajuda a caracterizar a região de estabilidade absoluta. Podemos associar 3 parâmetros ao método "stiffly" estável, as quais caracterizam a região de estabilidade absoluta. Seja $D \geq 0$ o menor D tal que $R_1 C A$. Seja $\alpha > 0$ o maior α tal que $S = \{\lambda \mid |\arg(-\lambda)| < \alpha\} C A$ e seja $r > 0$ o

maior r tal que $D(-r, r) \subset A$. Temos D , α e r unicamente determinados e independentes entre si.

3.4 - A_0 e "stiff" estabilidades:

Vimos no teorema 3.1 que métodos (K, ℓ) são instáveis para K suficientemente grande. Como A_0 estabilida de implica estabilidade (zero-estabilidade), então existem métodos não A_0 estáveis.

Portanto, neste parágrafo, vamos deduzir condições necessárias e suficientes para que métodos (K, ℓ) sejam A_0 estáveis. Através destas condições investigaremos para quais K e ℓ temos métodos "stiffly" estáveis.

Seja

$$\phi(\xi, \mu) = \rho(\xi) - \mu \eta(\mu) \xi^K, \quad \eta(\mu) = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \mu^{j-1};$$

associado ao método (K, ℓ) .

Para este estudo vamos usar a transformação

$$z = \frac{\xi-1}{\xi+1}, \quad -\xi = \frac{z+1}{z-1} \quad \text{que aplica o disco unitário do plano } \xi$$

sobre o semiplano esquerdo $H = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} z < 0\}$ do plano z e introduzimos:

$$\begin{aligned}\Psi(z, \mu) &= (z-1)^K \phi\left(\frac{z+1}{z-1}, \mu\right) = (z-1)^K \left[\rho\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - \mu \eta(\mu) \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^K \right] = \\ &= (z-1)^K \rho\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - \mu \eta(\mu) (z+1)^K = r(z) - \mu \eta(\mu) (z+1)^K.\end{aligned}$$

Lema 3.5: Todo método (K, ℓ) de Brown satisfaz

$$(-1)^{j+1} \beta_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, \ell.$$

Dem: Usando a expressão de β_j obtida na construção dos métodos, temos:

$$(-1)^{j+1} \beta_j = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i-1} \binom{K}{i} (K-i)^{j-\ell} ; \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

Por outro lado usando o lema 0.4 temos:

$$\sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-1-i} \binom{K}{i} (K-i)^{j-\ell} = \sum_{t_1=1}^K t_1^{-1} \sum_{t_2=1}^{t_1} t_2^{-1} \dots \sum_{t_{\ell-j}=1}^{t_{\ell-j-1}} t_{\ell-j}^{-1} > 0;$$

$$j = 1, 2, \dots, \ell-1.$$

Além disso pela obs. 1.10 temos $(-1)^{\ell+1} \beta_\ell = \frac{1}{\ell!} > 0$

$$\text{Portanto } (-1)^{j+1} \beta_j > 0 \quad j = 1, 2, \dots, \ell.$$

Lema 3.6: Um método (K, ℓ) é A_0 estável se e somente se

$$r(iy) - \mu \eta(\mu) (iy+1)^K \neq 0 ; \quad \forall \mu \in (-\infty, 0) \text{ e } \forall y \in \mathbb{R}.$$

Dem: Como a ordem do método (K, ℓ) é sempre $p \geq 1$, temos que 1 é raiz de $\rho(\xi)$. Seja m a multiplicidade da raiz 1. ($m \geq 1$).

Usando o fato de que a transformação de variáveis, acima considerada, aplica $\xi = 1$ em $z = \infty$; obtemos que o polinômio $r(z)$ é de grau exatamente $K-m$.

Com efeito:

Consideremos

$$\rho(\xi) = c(\xi-1)^m (\xi-\xi_1)^{m_1} \dots (\xi-\xi_s)^{m_s}; \sum_{i=1}^s m_i + m = K$$

$$\begin{aligned} \text{Assim } \rho\left(\frac{z+1}{z-1}\right) &= c\left(\frac{z+1}{z-1}-1\right)^m \left(\frac{z+1}{z-1}-\xi_1\right)^{m_1} \dots \left(\frac{z+1}{z-1}-\xi_s\right)^{m_s} = \\ &= \frac{2^m c}{(z-1)^K} (z(1-\xi_1)+1+\xi_1)^{m_1} \dots (z(1-\xi_s)+1+\xi_s)^{m_s}. \end{aligned}$$

Portanto $r(z) = (z-1)^K \rho\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ é de grau exatamente $\sum_{i=1}^s m_i = K-m$.

Por outro lado pelo lema 3.5 temos que $\mu\eta(\mu) < 0$; $\forall \mu \in [-\infty, 0)$

Portanto $\Psi(z, \mu)$ é de grau exatamente K em z ; $\forall \mu \in [-\infty, 0)$.

Seja, agora, $z(\mu)$ a função algébrica definida por $\Psi(z, \mu) = 0$ e $z_i(\mu)$ $i = 1, 2, \dots, K$ seus ramos.

Como a transformação aplica o disco unitário no semiplano H , temos que um método é A_0 estável se e somente se $\operatorname{Re}(z_i(\mu)) < 0$; $i = 1, \dots, K$, para todo $\mu \in (-\infty, 0)$.

Agora, em função do comportamento dos ramos $z_i(\mu)$, vamos finalizar o lema:

Como $\Psi(z, \mu)$ é de grau K , temos $z_i(\mu)$ são valores finitos para $\mu \in [-\infty, 0)$ ($i = 1, \dots, K$) e podem ser definidas como funções contínuas de μ , $\mu \in [-\infty, 0)$. Além disso $z_i(\infty) = -1$ ($i = 1, \dots, K$)
De fato:

Para estudar o comportamento de $z_i(\mu)$ para $\mu \rightarrow \infty$ devemos estudar a equação $\mu^\ell \Psi(z, \frac{1}{\mu}) = 0$ para $\mu \rightarrow 0$.

Temos então:

$$\begin{aligned}\mu^\ell \Psi(z, \frac{1}{\mu}) &= \mu^\ell r(z) - \frac{\mu^\ell}{\mu} \eta(\frac{1}{\mu}) (z+1)^K = \\ &= -\beta_\ell (z+1)^K + O(\mu),\end{aligned}$$

Quando $\mu \rightarrow 0$ temos $\mu^\ell \Psi(z, \frac{1}{\mu}) = 0$ se e somente se $\beta_\ell (z+1)^K = 0$; segue que $z(0) = -1$.

Portanto temos os ramos de $z(\mu)$, definida por $\Psi(z, \mu) = 0$, dados por $z_i(\infty) = -1$; $i = 1, 2, \dots, K$.

Finalmente como $z_i(\infty) = -1 < 0$ e como um método é A_0 estável se e somente se $\operatorname{Re}(z_i(\mu)) < 0$, $\mu \in (-\infty, 0)$; ($i=1, \dots, K$) temos que o método (K, ℓ) é A_0 estável se e somente se nenhum gráfico de $z_i(\mu)$ intersepta o eixo imaginário para $\mu \in (-\infty, 0)$, ou seja,

$$r(iy) - \mu \eta(\mu) (iy+1)^K \neq 0; \quad \forall \mu \in (-\infty, 0), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Obs.: 3.18 - Este lema nos dá uma caracterização para a A_0 estabilidade, mas não é possível usá-lo na investigação de quais métodos são A_0 estáveis.

Lema 3.7: Seja um método (K, ℓ) e $\rho(z)$ associado a ele; então

$$(-1)^K \rho(-1) > 0.$$

$$\text{Dem: } (-1)^K \rho(-1) = (-1)^K \sum_{i=0}^K \alpha_i (-1)^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K+i} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} + (-1)^K \alpha_K (-1)^K =$$

$$= \sum_{i=0}^{K-1} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} - \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} =$$

$$= \sum_{i=0}^{K-1} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} (1 - (-1)^{K-i}) > 0.$$

Portanto $(-1)^K \rho(-1) > 0$.

Teorema 3.8: Um método (K, ℓ) é A_0 -estável se e somente

$$Q(\tau_j) \geq 0 \quad j=1, \dots, s. \quad ; \text{ onde}$$

$$Q(\tau) = \operatorname{Re} \{ r(iy) (-iy+1)^K \}; \quad (\tau=y^2) \text{ e } \tau_j, j=1, \dots, s$$

são todas as raízes reais não negativas de $P(\tau)$ com

$$P(\tau) = -y^{-1} \operatorname{Im}(r(iy) (-iy+1)^K).$$

Dem: Pelo lema 3.6 temos que o método é A_0 estável se e somente se

$$r(iy) (iy+1)^{-K} \neq \mu_n(\mu), \quad \mu \in [-\infty, 0)$$

Como, pelo lema 3.5, $\mu_n(\mu) < 0$ para $\mu \in [-\infty, 0)$ temos que o método é A_0 -estável se e somente se

$$(13) \quad r(iy) (iy+1)^{-K} \notin (-\infty, 0) ; \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Agora, } r(iy) (-iy+1)^{-K} = r(iy) (-iy+1)^K \frac{1}{(1+y^2)^K} \text{ e como } y \in \mathbb{R}$$

temos (13) se e somente se $r(iy) (-iy+1)^K \notin (-\infty, 0)$.

$$\text{Mas } r(iy) (-iy+1)^K = Q(y^2) - iy P(y^2).$$

Portanto o método é A_0 -estável se e somente se

$$(14) \quad Q(y^2) - iy P(y^2) \notin (-\infty, 0) ; \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Finalmente se a expressão acima se verifica temos $Q(0) \geq 0$ e $Q(\tau_j) \geq 0 ; j=1, \dots, s$.

Notemos que como $P = P(y^2)$, estamos interessados apenas nas raízes não negativas. Ainda, do lema 3.7 temos $Q(0) > 0$ pois $Q(0) = r(0) = (-1)^K \rho(-1)$.

Portanto se o método é A_0 -estável então

$$Q(\tau_j) \geq 0, \quad j=1, \dots, s.$$

Falta-nos mostrar que se $Q(\tau_j) \geq 0$ então o método é A_0 -estável.

Vamos mostrar por absurdo que $Q(\tau_j) \geq 0$ implica (14). Suponhamos que existe y_0 tal que $Q(y_0^2) - iy_0 P(y_0^2) \in (-\infty, 0)$ então $Q(y_0^2) - iy_0 P(y_0^2)$ é real e temos $Q(y_0^2) < iy_0 P(y_0^2)$, mas $iy_0 P(y_0^2)$ é real se e somente se for zero; segue que $y_0 = 0$ ou $P(y_0^2) = 0$.

Se $y_0 = 0$ temos $Q(0) < 0$ que é uma contradição pelo lema 3.7.

Se $P(y_0^2) = 0$ temos $Q(y_0^2) < 0$ que é uma contradição pois $Q(\tau_j) \geq 0$.

Portanto não existe y_0 tal que

$$Q(y_0^2) - iy_0 P(y_0^2) \in (-\infty, 0) \quad e$$

então temos: Se $Q(\tau_j) \geq 0$; $j = 1, \dots, s$ então o método é A_0 -estável.

Assim o método é A_0 -estável se e somente se $Q(\tau_j) \geq 0$ $j = 1, \dots, s$.

Proposição 3.1: Seja um método (K, ℓ) . Então a multiplicidade da raiz 1 de $\rho(z)$ é $m = 1$.

Dem: Consideremos $\rho(z)$ associado ao método (K, ℓ) .

A ordem do método é $p \geq 1$; donde $\rho(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \rho'(1) &= \sum_{i=1}^K i \alpha_i = K \alpha_K + \sum_{i=1}^{K-1} i \alpha_i = \sum_{i=1}^{K-1} i \alpha_i - \sum_{i=0}^{K-1} K \alpha_i = \\ &= -K \alpha_0 + \sum_{i=1}^{K-1} (i-K) \alpha_i = -K \alpha_0 - \sum_{i=1}^{K-1} (K-i) \alpha_i = -\sum_{i=0}^{K-1} (K-i) \alpha_i = \\ &= -\sum_{i=0}^{K-1} (K-i) (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} = \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i-1} \binom{K}{i} (K-i)^{1-\ell}. \end{aligned}$$

Portanto pelo lema 0.4 temos $\rho'(1) > 0$ para $\ell \geq 2$.

Para $\ell = 1$ temos

$$\rho'(1) = \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i-1} \binom{K}{i} = 1 > 0.$$

Assim $\rho'(1) > 0$ e portanto a multiplicidade da raiz 1 é $m = 1$.

Obs.: 3.19 - Temos portanto que o grau de $r(z)$ é exatamente $K-1$ e assim

$$r(z) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i z^i \quad \text{com } a_{K-1} \neq 0.$$

Teorema 3.9: Um método (K, ℓ) é A_0 -estável e fortemente estável se e somente se $Q(\tau_j) > 0$ onde τ_j $j = 1, \dots, s$ são as raízes não negativas de $P(\tau)$. $Q(\tau)$ e $P(\tau)$ como no teorema 3.8.

Dem: (I) Como vimos (lema 3.6) os ramos $z_i(\mu)$ são funções contínuas e além disso $\operatorname{Re} z_1(\mu) < 0$ para $\mu \in (-\infty, 0)$.

Como $a_{K-1} \neq 0$ (proposição 3.1) apenas 1 destes ramos $z_i(\mu)$, vamos denotá-lo por $z_1(\mu)$, tende a infinito quando $\mu \rightarrow 0^-$, enquanto os outros tendem a valores finitos.

$$\text{Portanto } \lim_{\mu \rightarrow 0^-} z_i(\mu) = z_i(0) < \infty; \quad i = 2, 3, \dots, K.$$

($\Rightarrow$) Como a transformação aplica o círculo unitário no eixo $\operatorname{Im}(z)$, temos que se o método é fortemente estável, então $\operatorname{Re}(z_i(0)) < 0$. $i = 2, \dots, K$; $\operatorname{Re}(z_1(0))$ finito.

Portanto, usando a demonstração do lema 3.6, temos que (13) se verifica para todo $\mu \in (-\infty, 0]$.

De maneira inteiramente análoga à demonstração do teorema 3.8 obtemos que (14) se verifica para todo

$\mu \in (-\infty, 0]$ e todo $y \in \mathbb{R}$.

Ainda, analogamente à demonstração do teorema 3.8 temos $Q(\tau_j) > 0$; $j = 1, \dots, s$.

($\Leftarrow$) Se $Q(\tau_j) > 0$; $j = 1, \dots, s$ temos pelo teorema 3.8 que o método é A_0 estável.

De maneira idêntica à feita na demonstração do teorema 3.8, temos que (14) se verifica para todo $\mu \in (-\infty, 0]$ e todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto $r(iy)(iy+1)^K \notin (-\infty, 0]$.

Portanto, agora, usando (I) temos que $z_1(\mu)$ não intersepta o eixo imaginário para $\mu \in (-\infty, 0]$; ($i = 1, \dots, K$)
Portanto $\operatorname{Re}(z_i(\mu)) < 0$; $\mu \in (-\infty, 0]$ $i = 2, \dots, K$.

Em particular $\operatorname{Re}(z_i(0)) < 0$; $i = 2, 3, \dots, K$. Pela transformação usada temos que as raízes de $\rho(\xi)$ estão no interior do disco unitário. Assim o método é fortemente estável.

Portanto se $Q(\tau_j) > 0$ ($j = 1, \dots, s$) então o método é A_0 -estável e fortemente estável.

Obs. 3.20 - Do teorema 3.9 e do teorema 3.6 segue que um método (K, ℓ) é "stiffly"-estável se e somente se $Q(\tau_j) > 0$; $j = 1, \dots, s$.

3.21 - Se o método (K, ℓ) é fortemente estável, temos que todas as raízes de $r(z) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i z^i$ estão no semiplano H. Daí, a_0 e a_{K-1} possuem o mesmo sinal. Como $a_0 > 0$ teríamos que $a_{K-1} > 0$ é condição necessária para o método ser fortemente estável. Esta condição, $a_{K-1} > 0$, se verifica para todo método (K, ℓ) . (Vide obs. 3.22).

3.22 - Pela obs. 3.19 temos que, para qualquer método

(K, ℓ) , $r(z) = \sum_{i=0}^{K-1} a_i z^i$ é de grau $K-1$ e $a_{K-1} \neq 0$. Portanto

$$\begin{aligned} r(z) &= (z-1)^K \sum_{i=0}^K \alpha_i \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^i = \sum_{i=0}^K \alpha_i (z+1)^i (z-1)^{K-i} = \\ &= \alpha_K (z+1)^K + \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i (z+1)^i (z-1)^{K-i} = \\ &= - \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i (z+1)^K + \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i (z+1)^i (z-1)^{K-i} = \\ &= \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} [(z+1)^i (z-1)^{K-i} - (z+1)^K] \quad e \end{aligned}$$

como $(z+1)^i (z-1)^{K-i} - (z+1)^K = (z+1)^i [(z-1)^{K-i} - (z+1)^{K-i}]$

obtemos, usando a relação: $x^n - a^n = (x-a) \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} a^i$,

que o coeficiente de z^{K-1} é dado por: $-2(K-1)$

Portanto $a_{K-1} = 2 \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-i-1} \binom{K}{i} (K-i)^{1-\ell}$: Pelo lema 0.4

$a_{K-1} > 0$ p/ $\ell \geq 2$. Para $\ell = 1$, $a_{K-1} = 1 > 0$.

Assim para qualquer método (K, ℓ) temos $a_{K-1} > 0$.

Obs.: 3.23 - Através da obs. 3.22, eliminamos a hipótese $a_{K-1} > 0$ que Jeltsch [22] exigia no teorema 3.9 ; fornecendo portanto o resultado melhorado.

Conolário 3.2: Se $P(\tau) \neq 0$ para $\tau \in (0, \infty)$ então o método (K, ℓ) associado é A_0 estável, fortemente estável e "stiffly" estável.

Dem: Se $P(\tau) \neq 0$ para $\tau \in (0, \infty)$ temos $Q(y^2) - iy P(y^2) \notin (-\infty, 0)$ pois nesse caso $iy P(y^2)$ é imaginário puro e $Q(y^2)$ é real.

Notemos que $Q(0) > 0$ pelo lema 3.7.

Logo $Q(y^2) - iy P(y^2) \notin (-\infty, 0]$, $y \in \mathbb{R}$ e de maneira inteiramente análoga à demonstração ($\Leftarrow$) do teorema 3.9 temos que o método A_0 estável e fortemente estável.

Portanto pelo teorema 3.6 o método é "stiffly" estável.

Obs.: 3.24 - Com esse corolário estabelecemos um critério para determinar métodos (K, ℓ) "stiffly" estáveis.

3.25 - Se os coeficientes de $P(\tau)$ tem o mesmo sinal, então o método é "stiffly" estável.

Teorema 3.10: Se $K \leq \frac{3}{2}(\ell+1)$ então o método (K, ℓ) é "stiffly" estável.

Dem: A demonstração será feita usando o corolário 3.2. Devemos mostrar que se K e ℓ satisfazem a hipótese então $P(\tau)$ não possui raízes positivas.

Usando $r(z)$ dado na obs. 3.22 e a definição de $P(\tau)$ dada no teorema 3.8, obtemos, depois de cálculos puramente algébricos, que

$$P(\tau) = 2 \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-1-i} \binom{K}{i} (K-1)^{-\ell} (1+\tau)^i.$$

$$\cdot \sum_{j=0}^u \binom{K-1}{2j+1} (\tau-1)^{K-1-i-2j} 4^j (-\tau)^j,$$

onde $u = [(K-1-i)/2]$; $[]$: função maior inteiro.

Dividimos, agora, a demonstração em 2 casos:

1) $\ell \leq 7$. Por cálculo direto, com precisão dupla, no PDP 11/45 obtivemos que todos os coeficientes de $P(\tau)$ são

positivos, quando $K \leq 1.5(\ell+1)$. Portanto $P(\tau) \neq 0$, $\tau \in (0, \infty)$.
A tabela dos coeficientes é fornecido, em anexo, no final da demonstração.

11) $\ell > 7$. Podemos reescrever $P(\tau)$ como segue:

$$\frac{1}{2}P(\tau) = \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-1-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} (1+\tau)^i (\tau-1)^{K-1-i} .$$

$$+ \sum_{j=0}^u \binom{K-1}{\alpha_{j+1}} (\tau-1)^{-2j} 4^j (-\tau)^j .$$

Notemos que para $j = K-1$ e $j = K-2$ temos $u = 0$.

Assim desmembrando da somatória $\sum_{j=0}^u$ a parcela definida por $j = 0$, obtemos:

$$\frac{1}{2}P(\tau) = S(\tau) + T(\tau) \text{ onde}$$

$$S(\tau) = \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^{K-1-i} \binom{K}{i} (K-i)^{1-\ell} (1+\tau)^i (\tau-1)^{K-1-i} \quad e$$

$$T(\tau) = \sum_{i=0}^{K-3} (-1)^{K-1-i} \binom{K}{i} (K-i)^{-\ell} (1+\tau)^i (\tau-1)^{K-1-i} .$$

$$+ \sum_{j=1}^u \binom{K-1}{2j+1} (\tau-1)^{-2j} 4^j (-\tau)^j .$$

Agora, para $K = 1, 2$ temos $T(\tau) = 0$

Portanto usando o lema 0.7 temos:

$$\frac{1}{2}P(\tau) = S(\tau) > K (1+\tau)^{K-2} > 0, \quad \forall \tau \in (0, \infty) .$$

Para $\ell \geq 8$ e $3 \leq K \leq 1.5(\ell+1)$ temos pelo lema 0.7 $S(\tau) > 0$ e usando o lema 0.8 temos:

$$\frac{1}{2}P(\tau) = S(\tau) + T(\tau) \geq S(\tau) - |T(\tau)| \geq$$

$$\geq (1+\tau)^{K-2} \left\{ K - \frac{1}{4} K(K-1)(K-2)^2 3^{2-\ell} \right\} ; \quad \forall \tau \in [0, \infty) .$$

Portanto $P(\tau)$ não tem raiz positiva se

$$K - \frac{1}{4} K(K-1)(K-2)^2 3^{2-\ell} \geq 0 \iff 3^\ell \geq \frac{9}{4} (K-1)(K-2)^2 ;$$

$$(3 \leq K \leq 1.5(\ell+1)).$$

Como o lado direito da desigualdade é monotonicamente crescente, temos a desigualdade satisfeita se

$$\begin{aligned} 3^\ell &\geq \frac{9}{4} (1.5(\ell+1)-1)(1.5(\ell+1)-2)^2 = \\ &= \frac{9}{32} (3\ell+1)(3\ell-1)^2. \end{aligned}$$

Mostremos agora que se $\ell \geq 8$ então a desigualdade é satisfeita.

Notemos que

$$\begin{aligned} (14) \quad 32 \cdot 3^{\ell-5} \geq (\ell+1)\ell^2 &\iff 3^\ell \geq \frac{3^5}{32} (\ell+1)\ell^2 \geq \frac{3^4}{32} (3\ell+1)\ell^2 \geq \\ &\geq \frac{9}{32} (3\ell+1)(3\ell)^2 \geq \frac{9}{32} (3\ell+1)(3\ell-1)^2 \end{aligned}$$

Vamos provar por indução sobre ℓ que $(\ell+1)\ell^2 \leq 32 \cdot 3^{\ell-5}$; $\ell \geq 8$.

I) Para $\ell = 8$ a desigualdade é satisfeita pois:

$$32 \cdot 3^{\ell-5} = 3 \cdot 2 \cdot 3^3 = 8 \cdot 9 \cdot 12 < 8^2 \cdot 9 = (\ell+1)\ell^2.$$

II) Suponhamos que $(\ell+1)\ell^2 \leq 32 \cdot 3^{\ell-5}$ é verdade para $8 \leq \ell \leq n$ e vamos mostrar que a desigualdade é satisfeita para $\ell = n+1$.

Inicialmente, notemos que $(\ell+2) \cdot (\ell+1) < 3 \cdot \ell^2$ para $\ell \geq 8$.

Com efeito: Seja $f(x) = 3x^2 - x^2 - 3x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$.

Então $f'(x) = 4x - 3$ e portanto $f(x)$ é crescente para $x > \frac{3}{4}$. Portanto usando I) temos $(\ell+2)(\ell+1) < 3\ell^2$; $\ell \geq 8$

Agora, tomando $\ell = n+1$ e usando a nota acima temos:

$$(n+2)(n+1)^2 = (n+2)(n+1)(n+1) \leq 3n^2(n+1).$$

Pela hipótese de indução temos:

$$(n+2)(n+1)^2 \leq 3 \cdot 32 \cdot 3^{n-5} = 32 \cdot 3^{n+1-5},$$

Portanto por I) e II) temos $(\ell+1) \leq 32 \cdot 3^{\ell-5}$, $\ell \geq 8$.

Usando (14) temos $\frac{1}{2}P(\tau) > S(\tau) - |T(\tau)| > 0$; $\ell \geq 8$;
 $K \leq 1.5(\ell+1)$.

Portanto por i) e ii) temos $P(\tau) \neq 0$; $\tau \in [0, \infty)$
e $K \leq 1.5(\ell+1)$, donde segue pelo corolário 3.2 que os métodos (K, ℓ) são "stiffly" estáveis se $K < 1.5(\ell+1)$.

COEFICIENTES DO POLINÔMIO $P(\tau)$ (TEOR. 3.10)

L=1 K=2	3.00000000	3.00000000			
L=1 K=3	7.00000003	12.6666667	7.00000003		
L=2 K=2	2.50000000	2.50000000			
L=2 K=3	4.83333334	9.22222222	4.83333334		
L=2 K=4	8.58333334	22.9722222	22.9722222	8.58333334	
L=3 K=2	2.25000000	2.25000000			
L=3 K=3	3.86111111	7.57407407	3.86111111		
L=3 K=4	6.00694445	17.1782407	17.1782407	6.00694445	
L=3 K=5	8.96361112	32.8029630	47.8067037	32.8029630	8.96361112
L=3 K=6	13.1775000	56.8841667	105.977444	105.977444	56.8841667
L=4 K=2	2.12500000	2.12500000			
L=4 K=3	3.41203704	6.77469136	3.41203704		
L=4 K=4	4.91377315	14.4812886	14.4812886	4.91377315	
L=4 K=5	6.70649537	25.9556543	38.5239179	25.9556543	6.70649537
L=4 K=6	8.90274537	42.1428442	82.1424797	82.1424797	42.1428442
L=4 K=7	11.6714942	64.2786621	153.267261	201.293531	153.267261
L=5 K=2	2.06250000	2.06250000			
L=5 K=3	3.19984568	6.38323045	3.19984568		
L=5 K=4	4.42828896	13.2033983	13.2033983	4.42828896	
L=5 K=5	5.76958804	22.8228181	34.1115801	22.8228181	5.76958804
L=5 K=6	7.25337893	35.6162135	70.6248115	70.6248115	35.6162135
L=5 K=7	8.92073523	52.0522584	128.136348	170.005842	128.136348
L=5 K=8	10.8295765	72.7131343	212.771276	350.509105	350.509105
L=5 K=9	13.0629827	98.3083098	331.272296	649.005390	805.961178
	331.272296	98.3083098	13.0629827		649.005390

L=6 K=2					
2.03125000	2.03125000				
L=6 K=3					
3.09786523	6.19024348	3.09786523			
L=6 K=4					
4.20493747	12.5889583	12.5889583	4.20493747		
L=6 K=5					
5.35885508	21.3584594	32.0002326	21.3584594	5.35885508	
L=6 K=6					
6.56775156	32.6533500	65.1294939	65.1294939	32.6533500	6.56775156
L=6 K=7					
7.84214231	46.6571385	116.088036	154.545537	116.088036	46.6571385
7.84214231					
L=6 K=8					
9.19583938	63.5884226	189.341585	314.447211	314.447211	189.341585
63.5884226	9.19583938				
L=6 K=9					
10.6472819	83.7074076	289.738040	575.900506	718.445664	575.900506
289.738040	83.7074076	10.6472819			
L=6 K=10					
12.2214940	107.321443	422.498397	976.432404	1458.06926	1458.06926
976.432404	422.498397	107.321443	12.2214940		
L=7 K=2					
2.01562500	2.01562500				
L=7 K=3					
3.04824674	6.09466449	3.04824674			
L=7 K=4					
4.09948111	12.2901508	12.2901508	4.09948111		
L=7 K=5					
5.17125212	20.6613238	30.9803481	20.6613238	5.17125212	
L=7 K=6					
6.26587739	31.2748009	62.4965876	62.4965876	31.2748009	6.26587739
L=7 K=7					
7.38618343	44.2059838	110.355394	147.071109	110.355394	44.2059838
7.38618343					
L=7 K=8					
8.53566335	59.5407201	178.229076	296.732404	296.732404	178.229076
59.5407201	8.53566335				
L=7 K=9					
9.71869468	77.3772065	269.962911	538.950425	673.292104	538.950425
269.962911	77.3772065	9.71869468			
L=7 K=10					
10.9408441	97.8280454	389.589957	906.556576	1358.04945	1358.04945
906.556576	389.589957	97.8280454	10.9408441		
L=7 K=11					
12.2092986	121.022214	541.338446	1437.94937	2510.88091	3010.91409
2510.88091	1437.94937	541.338446	121.022214	12.2092986	
L=7 K=12					
13.5334826	147.106405	729.622349	2177.20818	4340.21754	6066.87785
6066.87785	4340.21754	2177.20818	729.622349	147.106405	13.5334826

Capítulo 4 - Aplicações Numéricas

Neste capítulo são fornecidos alguns resultados numéricos, apenas à título de ilustração, já que o trabalho é fundamentalmente teórico. Através desses resultados procuramos, como conclusão final, firmar a viabilidade prática dos métodos estudados.

4.1 - Métodos e exemplos usados:

Escolhemos 5 métodos, todos de ordem 5 e "stiffly"-estáveis, que foram implementados com passo constante h e dentro de uma mesma característica.

Métodos:

Met. 1: Método (5,1) de Brown (cf. pag.31 deste trabalho), particularmente chamado de método BDM de ordem 5 (cf. [24, pag.242]).

$$y_{n+5} = 2.18978102y_{n+4} - 2.18978102y_{n+3} + 1.45985401y_{n+2} + \\ -0.547445255y_{n+1} + 0.875912409E-01y_n + 0.437956204hf_{n+5} .$$

Met. 2: Método (4,2) de Brown (cf. pag.32).

$$y_{n+4} = 1.38795181y_{n+3} - 0.520481928y_{n+2} + 0.154216867y_{n+1} + \\ -0.021686747y_n + 0.722891566hf_{n+4} - 0.173493976h^2f'_{n+4} .$$

Met. 3: Método (3,3) de Brown (cf. pag.33).

$$y_{n+3} = 1.12695652y_{n+2} - 0.140869565y_{n+1} + 0.139130435E-01y_n +$$

$$+ 0.886956522hf_{n+3} - 0.344347826h^2f'_{n+3} +$$

$$+ 0.626086957E-01h^3f''_{n+3} .$$

Met. 4: Método cíclico de ordem 5, K= 3, M= 3 (cf. [2]).

$$I) y_{n+3} = 0.375y_{n+2} + 0.956y_{n+1} - 0.331y_n + h(0.335166667f_{n+3} +$$

$$+ 1.19916667f_{n+2} - 0.131833333f_{n+1} - 0.1085f_n) .$$

$$II) y_{n+3} = 2.659y_{n+2} - 1.363y_{n+1} - 0.296y_n + h(0.431791667f_{n+3} +$$

$$- 0.452916667E-01f_{n+2} - 1.34129167f_{n+1} +$$

$$- 0.208333333E-03f_n) .$$

$$III) y_{n+3} = 4.16003898y_{n+2} - 4.591y_{n+1} + 1.43096102y_n +$$

$$+ h(0.566291667f_{n+3} - 1.21813799f_{n+2} +$$

$$- 0.787176979f_{n+1} + 0.709945339f_n) .$$

Met. 5: Método usando a 2ª derivada, K= 3 (cf. [8]).

$$y_{n+3} = y_{n+2} + h(0.568518519f_{n+3} + 0.475f_{n+2} - 0.05f_{n+1} +$$

$$+ 0.648148148E-02f_n) - 0.105555556h^2f'_{n+3} .$$

Obs.: 4.1 - Os métodos 4 e 5 foram escolhidos para que possamos ter mais informações sobre o comportamento dos métodos (K, ℓ) estudados.

Implementação:

A implementação que fizemos é bastante pobre, desprovida de qualquer sofisticação; apenas procuramos implementar os métodos dentro de um mesmo padrão.

Os problemas básicos que a implementação desses métodos apresenta são: os K valores iniciais, a previsão de novo valor e a forma de correção.

Os K valores iniciais foram determinados pelo programa RKF 45, dado em Forsythe [10, pag. 134], que utilizamos. Este programa implementa métodos de Runge Kutta - Fehlberg de maneira bastante sofisticada, com variação de passo e ordem e controle sobre o erro. Os valores iniciais foram calculados exigindo erro local de ordem pelo menos 6.

A previsão foi também feita pelo programa RKF 45. Como o objetivo era ilustrar e observar o comportamento e não uma comparação mais refinada dos métodos, a previsão também foi feita exigindo erro local de ordem pelo menos 6.

A correção dos valores previstos foi feita usando o método de Newton modificado, dado na seguinte forma:

Consideremos um método dado por $F(y_{n+K})$ da seguinte maneira:

$$F(y_{n+K}) = \sum_{i=0}^K [\alpha_i y_{n+i} - \sum_{j=1}^{\ell_i} h^j \beta_{ij} f_{n+i}^{(j-1)}] = 0$$

Desta maneira, calcular uma aproximação para y_{n+K} é equivalente a calcular uma raiz de $F(y) = 0$.

Portanto podemos usar o processo de Newton e obter:

$$y^{[m+1]} = y^{[m]} - [F'(y^{[m]})]^{-1} F(y^{[m]})$$

onde $y^{[0]}$ é fornecido pela previsão e $F'(y)$ é a matriz jacobiana de $F(y)$.

Reescrevendo, podemos calcular y^{m+1} pela solução do sistema:

$$F'(y^{[m]}) y^{[m+1]} = F'(y^{[m]}) y^{[m]} - F(y^{[m]})$$

O método de Newton modificado que usamos, difere deste acima porque calculamos apenas uma aproximação para $F'(y^{[m]})$.

A aproximação para $F'(y^{[m]})$, é obtida baseada numa linearização do problema $y' = f(x, y)$ dada por:

$$y' \approx A(y - y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}$$

donde consideramos apenas $y' = Ay$. Portanto temos

$$f' \approx \frac{\partial f}{\partial y} = A, \quad f'' \approx \frac{\partial f'}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = A^2, \quad f^{(1)} \approx \frac{\partial f^{(1-1)}}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^1 = A^1$$

Obs.: 4.2 - Para os métodos lineares de passo múltiplo temos

$$F'(y^{[m]}) \approx [I - \beta_K h \frac{\partial f}{\partial y}](y^{[m]}).$$

4.3 - Para os métodos (K, ℓ) temos

$$F'(y^{[m]}) \approx [I - \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i h^i \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^i](y^{[m]})$$

Obs.: 4.4 - No caso do método composto, usamos para cada ponto x_1 , apenas um método linear e portanto $F'(y^{[m]})$ é dada como na obs. 4.2, para cada método linear que compõe o método composto.

4.5 - No caso do método 5, $F'(y^{[m]})$ é dada como na obs. 4.3.

Exemplos:

Escolhemos exemplos que envolvem problemas dos tipos "stiff", não "stiff" e com soluções que apresentam oscilação. Os exemplos foram assim escolhidos para que possamos ter uma visão mais ampla do comportamento dos métodos (K, ℓ) .

Ex.: 1 - ("stiff")

$$y' = -1000y, \quad y(0) = 1.5.$$

Ex.: 2 - ("stiff")

$$y' = -10000y, \quad y(0) = 1.5.$$

Ex.: 3 - ("stiff")

([25]) Linear com autovalores reais.

$$\lambda_1 = -2000.5, \quad \lambda_2 = -0.5$$

$$y'_1 = -2000y_1 + 999.75y_2 + 1000.25, \quad y_1(0) = 0$$

$$y'_2 = y_1 - y_2, \quad y_2(0) = -2.$$

Ex.: 4 - ("stiff")

([24, pag.229]) Linear com autovalores não sô reais (parte real negativa) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -40 + 40i$, $\lambda_3 = -40 - 40i$.

$$y'_1 = -21y_1 + 19y_2 - 20y_3, \quad y_1(0) = 1$$

$$y'_2 = 19y_1 - 21y_2 + 20y_3, \quad y_2(0) = 0$$

$$y'_3 = 40(y_1 - y_2 - y_3), \quad y_3(0) = -1.$$

Ex.: 5 - (solução oscilante)

([25]) Linear com autovalores não são reais (parte real positiva) $\lambda_1 = -50$, $\lambda_2 = 0.1 + 8i$, $\lambda_3 = 0.1 - 8i$.

$$y'_1 = 42.2y_1 + 50.1y_2 - 42.1y_3 , y_1(0.3926991) = 2.969257E-09$$

$$y'_2 = -66.1y_1 - 58y_2 + 58.1y_3 , y_2(0.3926991) = -1.0400511$$

$$y'_3 = 26.1y_1 + 42.1y_2 - 34y_3 , y_3(0.3926991) = -1.0400511 .$$

Ex.: 6 - ("stiff")

([9]) Não linear (ligação de componente com rápida variação e componente de variação suave). Auto-valores no zero:

$$\lambda_1 = -1 , \lambda_2 = -10 , \lambda_3 = -40 , \lambda_4 = -100 .$$

$$y'_1 = -y_1 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 , y_1(0) = 1$$

$$y'_2 = 10(-y_2 + y_3^2 + y_4^2) , y_2(0) = 1$$

$$y'_3 = 40(-y_3 + y_4^2) , y_3(0) = 1$$

$$y'_4 = -100y_4 + 2 , y_4(0) = 1 .$$

Ex.: 7 - ("stiff")

([9]) Não linear com autovalores reais (teoria de reação nuclear). Auto-valores no zero: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0.17, \lambda_3 = -60$.

$$y'_1 = 0.2(y_2 - y_1) , y_1(0) = 0$$

$$y'_2 = 10y_1 - (60 - 0.125y_3)y_2 + 0.125y_3 , y_2(0) = 0$$

$$y'_3 = 1 , y_3(0) = 0 .$$

Ex.: 8 - ("stiff")

([11]) Não linear com auto-valores reais (química). Auto-valores no zero $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -9.3E-03$, $\lambda_3 = -3500$.

$$y'_1 = -y_1(0.013 + 1000y_3) , y_1(0) = 1$$

$$y'_2 = -2500 y_2 y_3 , y_2(0) = 1$$

$$y'_3 = y'_1 + y'_2 \quad , \quad y_3(0) = 0 .$$

Ex.: 9 - ("stiff")

([9]) Não linear com auto-valores não sô reais (física) Auto valores no zero:

$$\lambda_1 = 0.0062 + 0.011i \rightarrow -0.015 \quad ; \quad \lambda_2 = 0.0062 - 0.011i \rightarrow -4.E-04 ;$$

$$\lambda_3 = -55 \rightarrow 81 .$$

$$y'_1 = -(55 + y_3)y_1 + 65y_2 \quad , \quad y_1(0) = 1$$

$$y'_2 = 0.0785(y_1 - y_2) \quad , \quad y_2(0) = 1$$

$$y'_3 = 0.1y_1 \quad , \quad y_3(0) = 0 .$$

Ex.: 10 - (Não "stiff")

([16]) Reação química linear $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -3$.

$$y'_1 = -y_1 + y_2 \quad , \quad y_1(0) = 2$$

$$y'_2 = y_1 - 2y_2 + y_3 \quad , \quad y_2(0) = 0$$

$$y'_3 = y_2 - y_3 \quad , \quad y_3(0) = 1 .$$

Ex.: 11 - (Não "stiff")

([16]) Reação química não linear.

Auto-valores no zero $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$.

$$y'_1 = -y_1 \quad , \quad y_1(0) = 1$$

$$y'_2 = y_1 - y_2^2 \quad , \quad y_2(0) = 0$$

$$y'_3 = y_2^2 \quad , \quad y_3(0) = 0 .$$

Ex.: 12 - (Não "stiff")

$$y' = -xy^2 \quad , \quad y(0) = 2 \quad \text{solução exata } y = \frac{2}{x^2 + 1} .$$

Obs.: 4.6 - Como a maioria dos exemplos, não possui solução

exata, usamos o programa RKF 45 para fornecer uma solução, de ordem pelo menos 7, com a qual comparamos as soluções obtidas pelos métodos.

Resultados: A ênfase sobre os resultados, foi dada para o número de avaliação da função, das derivada e 2ª derivada da função f e para o número de iterações do processo de Newton. A precisão obtida pelos métodos é "confiável" até ordem 6 devido o exposto na obs. 4.6.

Ex.: 1	$x_1 = 0$	$h = 0.08$	$x_f = 10$	Erro em $x = 10$
Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it. Newton
1	134	-	-	134
2	125	125	-	125
3	124	124	124	124
4	250	-	-	124
5	250	124	-	124

Ex.: 2	$x_1 = 0$	$h = 0.08$	$x_f = 10$	Erro em $x = 10$
Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it. Newton
1	128	-	-	128
2	123	123	-	123
3	123	123	123	123
4	248	-	-	123
5	248	123	-	123

Ex.: 3	$x_1 = 0.3926991$	$h = 0.08$	$x_f = 9.993$	Erro em $x = 9.993$
Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it. Newton
1	247	-	-	247
2	125	125	-	125
3	158	158	158	158
4	251	-	-	125
5	250	124	-	124

Ex.: 4	$x_1 = 0$	$h = 0.08$	$x_f = 10$	Erro em $x = 10$
Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it. Newton
1	247	-	-	247
2	133	133	-	133
3	127	127	127	127
4	347	-	-	221
5	258	132	-	132

Ex.: 5	$x_1 = 0.392996$	$h = 0.08$	$x_f = 9.993$	Erro em $x = 9.993$
Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it. Newton
1	237	-	-	237
2	237	237	-	237
3	353	353	353	353
4	358	-	-	237
5	358	237	-	237

Ex.: 6 $x_1 = 0$. $h = 0.08$ $x_f = 10$
Erro em $x = 10$

Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it.	Newton	y_1	y_2	y_3	y_4
1	265	-	-	265		0.2×10^{-5}	0.1×10^{-10}	0.5×10^{-11}	0.5×10^{-10}
2	215	215	-	215		0.7×10^{-7}	0.2×10^{-10}	0.5×10^{-11}	0.3×10^{-10}
3	173	173	173	173		-0.3×10^{-8}	-0.2×10^{-10}	-0.5×10^{-11}	-0.1×10^{-10}
4	312	-	-	186		-0.7×10^{-8}	0.3×10^{-10}	0.4×10^{-11}	-0.1×10^{-8}
5	299	173	-	173		0.3×10^{-8}	0.	-0.1×10^{-19}	0.

Ex.: 7 $x_1 = 0$. $h = 0.08$ $x_f = 10$
Erro em $x = 10$

Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it.	Newton	y_1	y_2	y_3
1	247	-	-	247		0.3×10^{-4}	0.4×10^{-4}	0.1×10^{-1}
2	225	225	-	225		0.4×10^{-7}	0.6×10^{-7}	0.2×10^{-4}
3	229	229	229	229		-0.1×10^{-6}	-0.1×10^{-6}	-0.3×10^{-4}
4	353	-	-	227		-0.3×10^{-7}	-0.4×10^{-7}	-0.2×10^{-4}
5	250	124	-	124		-0.1×10^{-9}	0.4×10^{-9}	-0.5×10^{-7}

Ex.: 8 $x_1 = 0$. $h = 0.002$ $x_f = 10$
Erro em $x = 10$

Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it.	Newton	y_1	y_2	y_3
1	247	-	-	247		-0.1×10^{-3}	0.1×10^{-3}	0.3×10^{-8}
2	223	223	-	223		0.4×10^{-5}	0.5×10^{-5}	0.3×10^{-8}
3	230	230	230	230		-0.6×10^{-5}	-0.7×10^{-5}	0.1×10^{-9}
4	349	-	-	223		-0.3×10^{-5}	-0.4×10^{-5}	0.3×10^{-8}
5	250	124	-	124		0.1×10^{-8}	0.1×10^{-8}	0.3×10^{-8}

Ex.: 9 $x_1 = 0$ $h = 0.08$ $x_f = 10$
Erro em $x = 10$

Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it.	Newton	y_1	y_2	y_3
1	364	-	-	364		0.2×10^{-3}	0.2×10^{-3}	0.2×10^{-2}
2	231	231	-	231		0.6×10^{-5}	0.5×10^{-5}	0.6×10^{-5}
3	234	234	234	234		-0.9×10^{-5}	-0.8×10^{-5}	-0.8×10^{-5}
4	371	-	-	245		-0.5×10^{-5}	-0.4×10^{-5}	-0.5×10^{-5}
5	252	126	-	126		-0.2×10^{-8}	-0.8×10^{-9}	-0.7×10^{-8}

Ex.: 10 $x_1 = 0$ $h = 0.08$ $x_f = 10$
Erro em $x = 10$

Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it.	Newton	y_1	y_2	y_3
1	319	-	-	319		0.2×10^{-5}	0.2×10^{-5}	0.3×10^{-5}
2	247	247	-	247		0.5×10^{-5}	0.5×10^{-5}	0.5×10^{-5}
3	229	229	229	229		-0.6×10^{-5}	-0.6×10^{-5}	-0.6×10^{-5}
4	375	-	-	249		-0.3×10^{-5}	-0.3×10^{-5}	-0.3×10^{-5}
5	250	124	-	124		0.6×10^{-8}	0.4×10^{-8}	0.6×10^{-8}

Ex.: 11 $x_1 = 0$ $h = 0.08$ $x_f = 10$

Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it.	Newton	y_1	y_2	y_3
1	255	-	-	255		-0.1×10^{-5}	-0.2×10^{-3}	-0.2×10^{-3}
2	215	215	-	215		0.2×10^{-9}	0.2×10^{-6}	0.4×10^{-5}
3	220	220	220	220		-0.3×10^{-9}	-0.3×10^{-6}	-0.6×10^{-5}
4	357	-	-	231		0.9×10^{-10}	-0.1×10^{-6}	-0.3×10^{-5}
5	250	124	-	124		0.4×10^{-12}	0.3×10^{-10}	-0.3×10^{-10}

Ex.: 12 $x_1 = 0$ $h = 0.08$ $x_f = 10$
Erro em $x = 10$

Met.	Av.f	Av.f'	Av.f''	Nº it.	Newton	
1	250	-	-	250		0.9×10^{-6}
2	136	136	-	136		0.1×10^{-6}
3	129	129	129	129		-0.6×10^{-6}
4	301	-	-	175		-0.3×10^{-7}
5	254	128	-	128		-0.6×10^{-8}

4.2 - Conclusões:

Neste item procuramos firmar a viabilidade dos métodos e fazer alguns comentários sobre a importância do estudo efetuado, visando uma implementação mais sofisticada dos métodos (K, ℓ) . Em Davemport [7] vemos que a tendência atual é dar mais importância a uma boa implementação, principalmente quando tratamos de programas com variação de passo e ordem; a maneira de variação do passo e a sensibilidade do programa, quanto às dificuldades computacionais, são essenciais.

Com relação a problemas "stiff", Gear [12, pag. 236] e Lambert [25] citam a falta de um estudo teórico e a promissora qualidade dos métodos que usam derivadas. Enright [8] introduziu métodos nesse sentido mas não apresentou um estudo mais profundo dos mesmos. Neste trabalho procuramos estudar com detalhes a classe dos métodos (K, ℓ) ; salientamos os resultados teóricos sobre as principais características e o estudo algébrico sobre estabilidade. O estudo teórico nos proporcionou uma visão mais crítica sobre o comportamento dos métodos, o qual ficou ilustrado nos exemplos executados.

De acordo com [9] os métodos BDM, $K \leq 6$ (métodos $(K, 1)$) e os métodos introduzidos em [8] mostraram-se bastante bons para problemas "stiff". Observando os exemplos executados vemos que o método 2 (método $(4, 2)$) funcionou tão bem, e na grande maioria usou menos avaliações de f , quanto o método 5, ficando portanto, como conclusão, firmada a viabilidade dos métodos (K, ℓ) .

Apesar da constante do erro do método (3,3) ser menor do que a do método (4,2), tivemos aquele menos competitivo em problemas com auto-valores próximos do eixo y . Isto ocorreu principalmente devido a região de estabilidade absoluta de tal método não ser muito adequada. Em outros exemplos tivemos mais avaliações de f para o método (3,3) devido a ordem de decaimento deste ser 1 e os problemas serem medianamente "stiff".

Outros fatos que também ficaram ilustrados nos exemplos foi que a baixa ordem de decaimento e o maior conhecimento sobre valores da f forneceram melhor solução em termos de ordem para os problemas fracamente "stiff"; que o método (5,1) foi melhor em termos de número de avaliações em problemas $y' = f(x,y)$, $y \in \mathbb{R}$, medianamente "stiff"; que os métodos funcionam razoavelmente bem para problemas não-"stiff" e apenas de maneira razoável (pelo menos com implementação de passo constante) para problemas cuja solução apresenta oscilações sem decaimento.

Vemos então que o estudo da estabilidade absoluta, da estabilidade no infinito, além de uma classe de métodos é fundamental para o propósito de um programa com variação de ordem, onde a escolha do método é essencial.

O estudo de uma classe é importante para o caso em que se exige alta precisão. Enright et al [9] citam que a implementação dos métodos BDM foi menos competitiva neste caso. Isto se deve justamente porque os métodos que compunham o programa eram de ordem baixa.

Salientamos ainda a importância do estudo feito para o erro global e assintótico, cujos resultados faci-

litam o estudo sobre o controle da mudança de passo e ordem. Neste estudo os métodos já foram colocados numa forma que facilita a implementação de variação de passo e ordem. (olhar Gear [12, cap.9]).

Observemos finalmente que o método cíclico apesar de bom, carece de tais estudos teóricos e portanto dificulta bastante uma implementação sofisticada.

Através dos fatos teóricos estudados, cujas relações foram enfatizadas nesses comentários, poderemos, numa próxima etapa, fornecer uma boa implementação dos métodos (K, ℓ) se adicionarmos certa sensibilidade no programa, com relação às dificuldades computacionais que surgem: em problemas "stiff", em problemas cujas soluções apresentam oscilações, problemas que apresentam descontinuidade, etc.

Bibliografia

1. AHLFORS, L.V.: *Complex analysis*, MacGraw Hill Kogakusha, Tōkio, 1966.
2. ALBRECHT, P.: *On the order of composite multistep methods for ordinary differential equations*, Numer.Math. 29(1978), pp. 381-396.
3. ANDRADE, C.M.F.: *Aspectos construtivos do teorema fundamental da álgebra*. Tese Mestrado. USP-São Carlos 1973.
4. BLISS, Y.A.: *Algebraic functions*, A.Math.S., Colloquium Publ. 1933.
5. BROWN, R.L.: *Some characteristics of implicit multistep multi-derivative integrations formulas*, SIAM J. Numer. Anal., 14(1977), pp. 982-993.
6. CRYER, C.W.: *On the instability of high order backward difference multistep methods*, BIT 12(1972), pp.17-25.
7. DAVENPORT, S.M; SHAMPINE, L.F. and WATTS, H.A.: "Comparison of some codes for the initial value problem for ordinary differential equations". *Numerical solutions boundary value problems for ordinary differential equations*. Compilado por Aziz, A.K. Academic Press, N.Y. 1975.
8. ENRIGHT, W.H.: *Second derivative multistep methods for stiff ordinary differential equations*, SIAM J. Numer. Anal., 11(1974), pp. 321-331.
9. —————; HULL, T.E. and LINDEBERG, B.: *Comparing methods for stiff systems of O.D.E.'s*, BIT 15(1975), pp. 10-48.
10. FORSYTHE, G.E.; MALCOLN, M.A. and MOLER, C.B.: *Computer methods for mathematics computation*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1977.
11. GEAR, C.W.: *The automatic integration of stiff ordinary differential equations*, Information Processing 68, A.J.Morell ed., North Holland Amsterdam, 1969, pp. 187-193.

12. —————: *Numerical Initial Value Problems in ordinary differential equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1971.
13. HENRICI, P.: *Discrete variable methods in ordinary differential equations*, John Wiley, N.Y., 1962.
14. —————: *Error propagation for difference methods*, John Wiley, N.Y., 1963.
15. HILLE, E.: *Analytic function theory*, vol.II. Ginn Boston, 1962.
16. HULL, T.E.; ENRIGHT, W.H.; FELLEN, B.M. and SEDGWICK, A.E.: *Comparing Numerical methods for ordinary differential equations*, SIAM J. Numer. Anal. 4(1972), pp. 603-637.
17. JELTSCH, R.: *Stiff stability and its relations to A_0 - and $A(0)$ - stability*, SIAM J. Numer. Anal., 13(1976), pp. 8-17.
18. —————: *Multistep methods using higher derivatives and damping at infinity*, Math. Comp., 31(1977), pp. 124-138.
19. —————: *Stiff stability of multistep multiderivative methods*, SIAM. J. Num. Anal., 14(1977), pp.760-772.
20. —————; KRATZ, L.: *On the stability properties of Brown's multistep multiderivative methods*, Num.Math., 30(1978), pp. 25-38.
21. —————; *Corrigendum to "Stiff stability of multistep multiderivative methods"*. SIAM. J. Num. Anal. 16 (1979), pp. 339-345.
22. —————: *A_0 - stability and stiff stability of Brown's multistep multiderivative methods*, Numer.Math. 32(1979), pp. 167-181.
23. KNUTH, D.E.: *The art of computer programming*, vol. 1. Reading-Mass Addison - Wesley, N.Y., 1968.
24. LAMBERT, J.D.: *Computational methods in ordinary differential equations*, J. Wiley & Sons, London 1973.

25. ————— "Stiffness". *Computational techniques for ordinary differential equations*. Compilado por Gladwell, I. and Sayers, D.K., Academic Press, London 1980.
26. LINIGER, W.: A stopping criterion for the Newton - Raphson method in implicit multistep integration algorithms for nonlinear systems of ordinary differential equations, *Comm. ACM.*, 14(1971), pp. 600-601.
27. MARDEN, M.: *Geometry of polynomials*, Providence, Rhode-Island, Amer. Math. Soc., 1966.
28. MILLER, J.J.H.: On the location of zeros of certain classes of polynomials with applications to numerical analysis, *J. Inst. Math. Appl.*, 8(1971), pp.397-406.
29. MOLER, C.B.: Algorithm 423, Linear equations solver, *Comm. ACM.*, 15(1972) p. 274.
30. RICHARDSON, C.H.: *An introduction to the calculus of finite differences*. D. Van Nostrand Co., London, 1954.
31. SIMIS, A.: *Introdução às funções algébricas e funções abelianas*. IMPA, Poços de Caldas, 1975.
32. SPIJKER, M.N.: Convergence and stability of step-by-step methods for the numerical solution of initial-value problems. *Numer. Math.* 8(1966), pp. 161-177.

Apêndice - Listagem dos programas usados:

No desenvolvimento do trabalho foram usados alguns programas. Aqui damos as listagens dos mesmos, colocando-os na ordem em que apareceram.

- 1) Programa que calcula os coeficientes de alguns métodos.
- 2) Usando um arquivo para os coeficientes, este programa calcula as raízes de $\rho(z)$ e seus módulos.
- 3) Programas usados para ilustrar a convergência e estabilidade.
- 4) Programa que auxilia na demonstração do teorema 3.3, calculando os coeficientes do polinômio $\Psi(z) = \rho(z)/(z-1)$.
- 5) Programa que calcula os coeficientes do polinômio $P(\tau)$, (teorema 3.10).
- 6) Programa usado para ilustração do comportamento dos métodos (K, ℓ) . (capítulo 4).

1) PROGRAMA QUE CALCULA OS COEFICIENTES DE ALGUNS MÉTODOS

C ROTINA AUXILIAR

```

SUBROUTINE DIV(ALFA,BETA,K,L)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION(A-H,O-Z)
DIMENSION ALFA(21),BETA(8)
T=ALFA(K+1)
DO 10 I=1,K
10  ALFA(I)=ALFA(I)/T
    ALFA(K+1)=1.D+00
    DO 20 I=1,L
20  BETA(I)=BETA(I)/T
    RETURN
END

```

C CÁLCULO DO FATORIAL

```

FUNCTION FAT(MX)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
FAT=1.D+00
DO 10 IL=1,MX
10  FAT=FAT*IL
RETURN
END

```

C CÁLCULO DOS COEFICIENTES DO METODO (K,L); $K \leq 15$, $L \leq 4$

```

IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION ALFA (21), BETA(8)
CALL ASSIGN (5,'LP:')
DO 100 L=1,4
BETA(L)=(-1.D+00)**(L+1)/FAT(L)
BR=BETA(L)
DO 100 K=1,15
ALFA(1)=(-1.D+00)**K*DFLOAT(K)**(-L)
S=ALFA(1)-K
IF(K.EQ. 2) GO TO 30
IF(K.NE. 1) GO TO 10
ALFA(2)=-ALFA(1)
GO TO 40
10  DO 20 I=2,K-1
    ALFA(I)=(-1.D+00)**(K-I+1)*FAT(K)/(FAT(I-1)*FAT(K-I+1))/(
(K-I+1.D+00)**L
    S=S+ALFA(I)
20  CONTINUE
30  ALFA(K+1)=-S
    ALFA(K)=-K
40  DO 60 J=1,L-1
    S=0.D+00
    DO 50 I=0,K-1
50  S=S+(-1.D+00)**(K-I)*(FAT(K)/(FAT(K-I)*FAT(I)))*DFLOAT(K-I)
    *** (J-L)
60  BETA(J)=(-1.D+00)**(J)/FAT(J)*S
    S=(-1.D+00)**L*FAT(K)/FAT(K+L)
    CALL DIV(ALFA,BETA,K,L)
    WRITE(5,70)K,L,S
70  FORMAT(/5X,'K='I3,5X,'L='I3,10X,'C(K,L)='G16.9)
    WRITE(5,80)(ALFA(I),I=1,K+1)
80  FORMAT(5X,'ALFA(I)/(1X,6G18.9))
    WRITE (5,90)(BETA(I),I=1,L)
90  FORMAT(5X,'BETA(J)/(1X,6G18.9))
100 BETA(L)=BR
END

```

2) PROGRAMA QUE CALCULA O MÓDULO DAS RAÍZES DO POLINÔMIO $p(z)$ ASSOCIADO AO MÉTODO (K,L)

SUBROUTINE ANIKE(J,EPS)

C CALCULA AS RAÍZES DE UM POLINÔMIO

```

COMMON PRA(21), PIA(21), PRQD(21), CR(21),
*CI(21),C(21),PRZ(20), PIZ(20), PIQD(21)
LIMIT1=0
LIMIT2=0
LIM=500
CT1=PRA(1)
CT2=PIA(2)
M=J-1
DT=CT1*CT1+CT2*CT2
IF(M)5,75,5
5  DO 70 I=1,M
    N=J-I+1
    N1=N+1
    D=DT*N

```

C PRIMEIRA APROXIMAÇÃO

```

PRZ1=- (PIA(2)*CT2+PRA(2)*CT1)/D
PIZ1=(PRA(2)*CT2-PIA(2)*CT1)/D
CALL VPOLP(PRZ1,PIZ1, N)
CI(N1)=PIQD(1)
CR(N1)=PRQD(1)
C(N1)=SQRT(CR(N1)*CR(N1)+CI(N1)*CI(N1))
D=SQRT(PRQD(N1)*PRQD(N1)+PIQD(N1)*PIQD(N1))

```

C INICIO DO PASSO NORMAL

```

10 LIMIT1=LIMIT1+1
IF (LIMIT1 .LT. LIM) GO TO 13
LIMIT1=0
EPS=EPS*10.
WRITE(5,12)EPS
12 FORMAT(1X,'MODIFICADA A PRECISÃO PARA'G14.7)
13 IF(D-EPS) 65,65,15
15 CALL VDPOP(PRZ1, PIZ1,N)
RS=C(1)
AMIN=(RS/C(N1))*(1./FLOAT(N))
L=N1
IDF=N-1
DO 30 IM=1,IDF
ID=N1-IM
IF (C(ID)-.0001) 30,30,20
20 R=(RS/C(ID))*(1./FLOAT(ID-1))
IF (AMIN-R) 30,30,25
25 AMIN=R
L=ID
30 CONTINUE
ACL=ARGUM(C(R1),CI(1))
ACL=(ACL-ARGUM(CR(L),CI(L))+3.1415926)/(L-1)
PRZ2=AMIN*COS(ACL)+PRZ1
PIZ2=AMIN*SIN(ACL)+PIZ1
JL=L-1
35 IF (AMIN-EPS) 65,65,40
40 CALL VPOLP(PRZ2,PIZ2,N)
RT=SQRT(PRQD(N1)*PRQD(N1)+PIQD(N1)*PIQD(N1))
IF (RT-D-EPS) 45,45,50
45 PRZ1=PRZ2
PIZ1=PIZ2
D=RT
GO TO 10

```

C INICIO DO PASSO DE EMERGÊNCIA

```

50 LIMIT2=LIMIT2+1
IF (LIMIT2 .LT. LIM) GO TO 53
LIMIT2=0
EPS=EPS*10.
WRITE(5,12)EPS
53 AMIN=AMIN*.5
AMAX=0.
DO 60 IL=2,JL
Q=C(IL)*AMIN*(IL-1)
IF (Q-AMAX) 60,60,55
55 AMAX=Q
L=IL
60 CONTINUE
ACL=(ACL-ARGUM(CR(L),CI(L))+3.1415926)/(L-1)
PRZ2=AMIN*COS(ACL)+PRZ1
PIZ2=AMIN*SIN(ACL)+PIZ1
GO TO 35
65 PRZ(I)=PRZ1
PIZ(I)=PIZ1
DO 70 K=2,N
PRA(K)=PRQD(K)
PIA(K)=PIQD(K)
70 CONTINUE

```

C CÁLCULO DA ÚLTIMA RAIZ

```

PRZ(J)=- (CT1*PRA(2)+CT2*PIA(2))/DT
PIZ(J)= (CT2*PRA(2)-CT1*PIA(2))/DT
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE VPOLP(PRX,PIX,N)

```

C CALCULA O VALOR DE UM POLINÔMIO NUM PONTO

```

COMMON PRA(21), PIA(21),PRQD(21),CR(21),
*CI(21),C(21),PRZ(20),PIZ(20),PIQD(21)
DO 80 I=1,N
J=I+1
PRQD(J)=PRA(J)+PRX*PRQD(I)-PIX*PIQD(I)
80 PIQD(J)=PIA(J)+PRX*PIQD(I)+PIX*PRQD(I)
RETURN
END

```

```

      SUBROUTINE VDPOP (PRX,PIX,N)

C   CALCULA OS COEFICIENTES DE TAYLOR DUM
C   POLINÔMIO NUM CERTO PONTO

      COMMON PRA(21),PIA(21),PRQD(21),CR(21),
      *CI(21),C(21),PRZ(20),PIZ(20),PIQD(21)
      DIMENSION AUX1(21),AUX2(21),PRD(21),PID(21)
      N1=N+1
      DO 83 I=2,N1
        AUX1(I)=PRA(I)
        AUX2(I)=PIA(I)
        PRD(I)=PRQD(I)
        PID(I)=PIQD(I)
      83 CONTINUE
      CR(1)=PRQD(N1)
      CI(1)=PIQD(N1)
      C(1)=SQRT(CR(1)*CR(1)+CI(1)*CI(1))
      DO 90 I=2,N
        NI=N-I+2
        DO 85 I=2,NI
          PRA(J)=PRQD(J)
          PIA(J)=PIQD(J)
        85 CONTINUE
        NID=NI-1
        CALL VPOLF (PRX,PIX,NID)
        CR(I)=PRQD(NI)
        CI(I)=PIQD(NI)
        C(I)=SQRT(CR(I)*CR(I)+CI(I)*CI(I))
      90 CONTINUE
      DO 95 I=2,N1
        PRA(I)=AUX1(I)
        PIA(I)=AUX2(I)
        PRQD(I)=PRD(I)
        PIQD(I)=PID(I)
      95 CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

      FUNCTION ARGUM(A,B)

C   CALCULA O ARGUMENTO DE UM NUM.COMPLEXO
C   DA FORMA A+IB

      IF(A) 120,100,125
100 IF(B) 105,110,115
105 ARGUM=4.712389
      RETURN
110 ARGUM=0.
      RETURN
115 ARGUM=1.570796
      RETURN
120 ARGUM=3.1415926+ATAN(B/A)
      RETURN
125 IF(B) 130,110,140
130 ARGUM=6.281385+ATAN (B/A)
      RETURN
140 ARGUM=ATAN(B/A)
      RETURN
      END

```

```

C   PROGRAMA PRINCIPAL
      DIMENSION DR(20)
      COMMON PRA(21),PIA(21),PRQD(21),CR(21),
      *CI(21),C(21),PRZ(20),PIZ(20),PIQD(21)
      CALL ASSIGN (3,'ARQ.DAT')
      CALL ASSIGN (5,'LP=')
      DO 10 IT=1,152
        READ(3,2) J
      2 FORMAT(I2)
        READ(3,3) (PRA(I),I=1,J+1)
      3 FORMAT(4E14.7)
        DO 4 I=1,J+1
          PIA(I)=0.
          EPS=1.OE-06
          CALL ANIKE(J,EPS)
          DO 5 I=1,J+1
            DR(I)=SQRT(PRZ(I)*PRZ(I)+PIZ(I)*PIZ(I))
          5 CONTINUE
          WRITE(5,6)J
      6 FORMAT(1X,'MODULO DAS RAÍZES EM K=' I2)
          WRITE(5,9) (DR(I),I=1,J)
      9 FORMAT(<J> (1X,7G16.7/))
      10 CONTINUE
      END

```

3) PROGRAMAS PARA ILUSTRAÇÃO DA CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE (TI - 58)

Métodos:

(4,1)	(3,2)	(2,3)	(7,1)	(5,3)	(10,1)	(8,3)
RCL 06	RCL 06	RCL 06	RCL 09	RCL 09	RCL 12	RCL 12
+	+	+	+	+	+	+
RCL 05	RCL 05	RCL 05	RCL 08	RCL 06	RCL 11	RCL 09
"	"	"	"	"	"	"
STO 06	STO 06	STO 06	STO 09	STO 09	STO 12	STO 12
R/S	R/S	R/S	R/S	R/S	R/S	R/S
RCL 03	(	(	(	(	(	(
x	RCL 02	RCL 01	RCL 06	RCL 04	RCL 09	RCL 07
1.92	x	x	x	x	x	x
-	3.	2.	7.	5.	10.	8
RCL 02	-	-	-	-	-	-
x	RCL 01	RCL 00	RCL 05	RCL 03	RCL 08	RCL 06
1.44	x	x	x	x	x	x
+	0.75	.125	10.5	1.25	22.5	3.5
RCL 01	+	-	+	+	+	+
x	RCL 00	RCL 07	RCL 04	RCL 02	RCL 07	RCL 05
.64	x	x	x	x	x	x
-	.1111111	(	11.6666667	.3703704	40.	2.074074
RCL 00	-	RCL 05	-	-	-	-
x	RCL 07	x	RCL 03	RCL 01	RCL 06	RCL 04
.12	x	3.5	x	x	x	x
-	(	+	8.75	.078125	52.5	1.09375
RCL 05	RCL 05	RCL 04	+	+	+	+
x	x	x	RCL 02	RCL 00	RCL 05	RCL 03
.96	3.6666666	3.	x	x	x	x
x	+	+	4.2	.008	50.4	.448
RCL 07	RCL 04	RCL 03	-	-	-	-
"	x	x	RCL 01	RCL 10	RCL 04	RCL 02
STO 04	2.	1.3333333	x	x	x	x
-	)	)	1.1666667	(	35.	.1296296
RCL 07	)	)	+	RCL 06	+	+
"	+	+	RCL 00	x	RCL 03	RCL 01
R/S	2.3611111	1.875	x	6.6772222	x	x
RCL 06	"	"	.1428571	+	17.1428571	.0233236
x	STO 03	STO 02	-	RCL 07	-	-
2.	-	-	RCL 08	x	RCL 02	RCL 00
"	RCL 07	RCL 07	x	4.5666668	x	x
-/+	"	"	2.	+	5.625	.0019531
INV	R/S	R/S	x	RCL 08	-	-
Ln	RCL 06	RCL 06	RCL 10	x	RCL 01	RCL 13
STO 07	x	x	)	1.3333336	x	x
RCL 01	2.	2.	+	)	1.1111111	(
STO 00	"	"	2.5928571	)	-	RCL 09
RCL 02	-/+	-/+	"	+	RCL 00	x
STO 01	INV	INV	STO 07	4.0502454	x	8.9141694
RCL 03	Ln x	Ln x	-	"	0.1	+
STO 02	STO 07	STO 07	RCL 10	STO 05	-	RCL 10
RCL 04	RCL 01	RCL 01	"	-	RCL 11	x
STO 03	STO 00	STO 06	R/S	RCL 10	x	5.4357144
RST	RCL 02	RCL 02	RCL 09	"	2.	+
	STO 01	STO 01	x	R/S	x	RCL 11
	RCL 03	RST	2.	RCL 09	RCL 13	x
	STO 02		"	x	)	1.3333336
	RST		-/+	2.	+	)
00 y_n		00 y_n	INV	"	2.9289682	)
01 y_{n+1}		01 y_{n+1}	Ln x	-/+	"	+
02 y_{n+2}		02 y_{n+2}	STO 10	INV	STO 10	"
03 y_{n+3}	00 y_n	03 h^3	RCL 01	Ln x	RCL 13	STO 08
04 y_{n+4}	01 y_{n+1}	04 h^2	STO 00	STO 10	"	-
05 h	02 y_{n+2}	05 h	RCL 02	RCL 01	R/S	RCL 13
06 x_1	03 y_{n+3}	06 x_1	STO 01	STO 00	RCL 12	"
07 e^{-2x_1}	04 h^2	07 e^{-2x_1}	RCL 03	RCL 02	x	R/S
	05 h		STO 02	STO 01	2.	RCL 12
	06 x_1		RCL 04	RCL 03	"	x
	07 e^{-2x_1}		STO 03	STO 02	-/+	2.
			RCL 05	RCL 04	INV	"
			STO 04	STO 03	Ln x	-/+
			RCL 06	RCL 05	STO 13	INV
			STO 05	STO 04	RCL 01	Ln x
			RCL 07	RST	STO 00	STO 13
			STO 06		RCL 02	RCL 01
			RST		STO 01	STO 00
					RCL 03	RCL 02
					STO 02	STO 01
					RCL 04	RCL 03
					STO 03	STO 02
					RCL 05	RCL 04
					STO 04	STO 03
					RCL 06	RCL 05
					STO 05	STO 04
					RCL 07	RCL 06
					STO 06	STO 05
					RCL 08	STO 07
					STO 07	STO 06
					RCL 09	RCL 08
					STO 08	STO 07
					RCL 10	RST
					STO 09	.
					RST	.
					.	.
					.	.
					10 y_{n+10}	08 y_{n+8}
					11 h	09 h
					12 x_1	10 h^2
					13 e^{-2x_1}	11 h^3
						12 x_1
						13 e^{-2x_1}

4) PROGRAMA QUE AUXILIA NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOR. 3.3;
CALCULA OS COEFICIENTES DO POLINÔMIO $\Psi(Z) = \rho(Z)/(Z-1)$

C CÁLCULO DO NÚMERO BINOMIAL (COMBINAÇÕES DE M1 TOMADOS A M2)

```

      FUNCTION BIN(M1,M2)
      BIN=1.
      IF (M2 .EQ. 0) RETURN
      S1=1.
      DO 1 I=0,M2-1
1      S1=S1*(M1-I)
      S2=1.
      DO 5 J=1,M2
      S2=S2*J
5      CONTINUE
      BIN=S1/S2
      RETURN
      END

```

C PROGRAMA PRINCIPAL

```

      DIMENSION A(30)
      CALL ASSIGN (5,'LP:')
      DO 25 K=1,4
      K1=K-1
      N=K/2
      DO 15 I=N,K1
      S=0.
      DO 10 J=0,I
10      S=S+(-1)**(I-J+2)*BIN(K,J)/(K-J)
15      A(I+1)=S
      WRITE(5,20) (A(I+1),I=N,K1)
20      FORMAT(/2X,7(E14.7,2X))
25      CONTINUE
      DO 40 L=2,8
      N1=2*L+1
      N2=N1+1
      DO 40 K=N1,N2
      K1=K-1
      N=K/2
      DO 35 I=N,K1
      S=0.
      DO 30 J=0,I
      T=K-J
30      S=S+(-1)**(I-J+2)*BIN(K,J)/T**L
35      A(I+1)=S
      WRITE(5,20) (A(I+1),I=N,K1)
40      CONTINUE
      END

```

5) PROGRAMA QUE CALCULA OS COEFICIENTES DO POLINÔMIO $P(\tau)$,
AUXILIANDO NA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.10

C CÁLCULO DO NÚMERO BINOMIAL (COMBINAÇÕES DE MI TOMADOS A NI)

```

      FUNCTION BIN(MI,NI)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      FAT1=1.
      FAT2=1.
      IF (MI .EQ. 0 .OR. NI .EQ. 0 ) GO TO 20
      DO 10 I=1, NI
      FAT1=FAT1*I
      FAT2=FAT2*(MI-I+1)
10      CONTINUE
20      BIN=FAT2/FAT1
      RETURN
      END

```

C O PROGRAMA GERA OS COEFICIENTES DO POLINÔMIO $P(X)$ DEFINIDO
NO TEOREMA 3.10 PARA $L \leq 8$ E $K \leq 1.5(L+1)$

```

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION C(13)
      CALL ASSIGN (1,'LP:')
      DO 170 L=1,7
      KI=1.5*(L+1)
      DO 170 K=2,KI
      DO 101 I=1,K
      C(I)=0.
10      CONTINUE
      DO 140 J=0,K-1
      IU=(K-1-J)/2
      CO=BIN(K,J)*(FLOAT(K-J))**(-L)
      DO 140 N=0,J
      C1=BIN(J,N)
      DO 140 IT=0,IU
      KMJ=K-J
      IT2=2*IT+1
      C2=BIN(KMJ,IT2)
      KMJ=KMJ-1-2*IT
      DO 140 M=0,KMJ
      C3=BIN(KMJ,M)*(-4)**IT
      S=C0*C1*C2*C3
      IND =N+M+IT+1
      GO TO (20,30,40,50,60,70,80,90,100,110,120,130),IND

```

```
20      C(1)=C(1)+S
      GO TO 140
30      C(2)=C(2)+S
      GO TO 140
40      C(3)=C(3)+S
      GO TO 140
50      C(4)=C(4)+S
      GO TO 140
60      C(5)=C(5)+S
      GO TO 140
70      C(6)=C(6)+S
      GO TO 140
80      C(7)=C(7)+S
      GO TO 140
90      C(8)=C(8)+S
      GO TO 140
100     C(9)=C(9)+S
      GO TO 140
110     C(10)=C(10)+S
      GO TO 140
120     C(11)=C(11)+S
      GO TO 140
130     C(12)=C(12)+S
140     CONTINUE
      WRITE(1,150)
150     FORMAT(1X)
      WRITE(1,160) (C(I),I=1,K)
160     FORMAT(2X,6G18.9)
170     CONTINUE
      STOP
      END
```

6) PROGRAMA USADO PARA ILUSTRAÇÃO (MÉTODOS DO CAP. 4)

C PRODUTO DE 2 MATRIZES

```

SUBROUTINE PRODM(A,B,C,N)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A(4,4),B(4,4),C(4,4)
DO 2 J=1,N
DO 2 I=1,N
S=0.
DO 1 K=1,N
1 S=S+A(J,K)*B(K,I)
2 C(J,I)=S
RETURN
END

```

C PRODUTO DE MATRIZ POR VETOR

```

SUBROUTINE PRODV(A,V,UPLA,N)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A(4,4),V(4),UPLA(4)
DO 2 I=1,N
S=0.
DO 1 J=1,N
1 S=S+A(I,J)*V(J)
2 UPLA(I)=S
RETURN
END

```

C O PROBLEMA ($Y' = F$)

```

SUBROUTINE YD1(T,Y,YD)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(4),YD(4)
YD(1)=-2000.*Y(1)+999.75*Y(2)+1000.25
YD(2)=Y(1)-Y(2)
RETURN
END

```

C A DERIVADA ($Y'' = F'$)

```

SUBROUTINE YD2(T,Y,YD,Y2D)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(4),YD(4),Y2D(4)
Y2D(1)=-2000.*YD(1)+999.75*YD(2)
Y2D(2)=YD(1)-YD(2)
RETURN
END

```

C A 2. DERIVADA ($Y''' = F''$)

```

SUBROUTINE YD3(T,Y,YD,Y2D,Y3D)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(4),YD(4),Y2D(4),Y3D(4)
Y3D(1)=(2000.*2000.+999.75)*YD(1)-2001.*999.75*YD(2)
Y3D(2)=-2001.*YD(1)+1000.75*YD(2)
RETURN
END

```

C A "JACOBIANA" DF/DY

```

SUBROUTINE FJAC(T,Y,FJ)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(4),FJ(4,4)
FJ(1,1)=-2000.
FJ(1,2)=999.75
FJ(2,1)=1.
FJ(2,2)=-1.
RETURN
END

```

C DECOMPOSIÇÃO D'UMA MATRIZ COM PIVOTAMENTO PARCIAL

```

SUBROUTINE DEC(N,A,IP,IER)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A(4,4),IP(4)
IER=0
IP(N)=1
IF(N.EQ.1) GO TO 70
NM1=N-1
DO 60 K=1,NM1
KP1=K+1
M=K
DO 10 I=KP1,N

```



```

10  IF (ABS (A (I,K)) .GT. ABS (A (M,K))) M=I
    IP (K)=M
    TZ=A (M,K)
    IF (M.EQ.K) GO TO 20
    IP (N)=-IP (N)
    A (M,K)=A (K,K)
    A (K,K)=TZ
20  IF (TZ.EQ.0.) GO TO 80
    TZ=1./TZ
    DO 30 I=KP1,N
    A (I,K)=-A (I,K)*TZ
30  DO 50 J=KP1,N
    TZ=A (M,J)
    A (M,J)=A (K,J)
    A (K,J)=TZ
    IF (TZ.EQ.0.) GO TO 50
    DO 40 I=KP1,N
40  A (I,J)=A (I,J)+A (I,K)*TZ
50  CONTINUE
60  CONTINUE
70  K=N
    IF (A (N,N).EQ.0.) GO TO 80
    RETURN
80  IER=K
    IP (N)=0
    RETURN
    END

```

C RESOLVE UM SISTEMA LINEAR USANDO A MATRIZ DECOMPOSTA

```

SUBROUTINE SOL (N,A,B,IP)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION A (4,4), B (4), IP (4)
IF (N.EQ.1) GO TO 50
NM1=N-1
DO 20 K=1,NM1
KP1=K+1
M=IP (K)
TZ=B (M)
B (M)=B (K)
B (K)=TZ
10 DO 10 I=KP1,N
B (I)=B (I)+A (I,K)*TZ
20 CONTINUE
DO 40 KB=1,NM1
KM1=N-KB
K=KM1+1
B (K)=B (K)/A (K,K)
TZ=-B (K)
DO 30 I=1,KM1
30 B (I)=B (I)+A (I,K)*TZ
40 CONTINUE
50 B (1)=B (1)/A (1,1)
RETURN
END

```

C MÉTODO (5,1)

```

SUBROUTINE FORM1 (T,V1,Y,YD,FJ,MYD1,N1,N,H)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION V1 (4,5), Y (4), YD (4), WORQ (4), W (4,4), B (4)
1 ,V (4), FJ (4,4), IP (4), TRAB (4,4)
M=0
1 DO 2 I=1,N
W (I,I)= 1.-.437956204*H*FJ (I,I)+M
WORQ (I)=Y (I)
DO 2 J=1,N
IF (I.EQ.J) GO TO 2
W (I,J)=-.437956204*H*FJ (I,J)
2 CONTINUE
IF (M.EQ.1) GO TO 20
DO 15 I=1,N
DO 15 J=1,N
15 TRAB (I,J)=W (I,J)
20 CALL DEC (N,W,IP,IER)
IF (IER.EQ.0) GO TO 4
M=1
GO TO 1
4 CALL YD1 (T,WORQ,YD)
MYD1=MYD1+1
CALL PRODV (TRAB,WORQ,V,N)
DO 5 I=1,N
5 B (I)=V (I)-WORQ (I)+2.18978102*V1 (I,5)-2.18978102*V1 (I,4)+
1 1.45985401*V1 (I,3)-.547445255*V1 (I,2)+.875912409D-01*V1 (I,1)+
2 .437956204*H*YD (I)
CALL SOL (N,W,B,IP)
N1=N1+1
DO 6 I=1,N
IF (ABS (B (I)-WORQ (I)) .GT. 1.0D-06) GO TO 9
6 CONTINUE
DO 8 I=1,N
DO 7 J=1,4
7 V1 (I,J)=V1 (I,J+1)
8 V1 (I,5)=B (I)
RETURN
9 DO 10 I=1,N
10 WORQ (I)=B (I)
GO TO 4
END

```

C MÉTODO (4,2)

```

      SUBROUTINE FORM2(T,V2,Y,YD,FJ,F2J,Y2D,MYD2,MY2D1,N2,N,H)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION V2(4,4),Y(4),YD(4),Y2D(4),W(4,4),B(4),IP(4),
1  WORQ(4),TRAB(4,4),V(4),FJ(4,4),F2J(4,4)
      M=0
      CALL PRODM(FJ,FJ,F2J,N)
1  DO 2 I=1,N
      W(I,I)=1.-.722891566*H*FJ(I,I)+.173493976*H*H*F2J(I,I)+M
      WORQ(I)=Y(I)
      DO 2 J=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 2
      W(I,J)=-.722891566*H*FJ(I,J)+.173493976*H*H*F2J(I,J)
2  CONTINUE
      IF(M.EQ.1) GO TO 20
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
15  TRAB(I,J)=W(I,J)
20  CALL DEC(N,W,IP,IER)
      IF(IER.EQ.0) GO TO 3
      M=1
      GO TO 1
3  CALL YD1(T,WORQ,YD)
      MYD2=MYD2+1
      CALL YD2(T,WORQ,YD,Y2D)
      MY2D1=MY2D1+1
      CALL PRODV(TRAB,WORQ,V,N)
      DO 4 I=1,N
4  B(I)=V(I)-WORQ(I)+1.38795181*V2(I,4)-.520481928*V2(I,3)+
1  .154216867*V2(I,2)-.021686747*V2(I,1)+.722891566*H*YD(I)-
2  .173493976*H*H*Y2D(I)
      CALL SOL(N,W,B,IP)
      N2=N2+1
      DO 6 I=1,N
      IF(ABS(B(I)-WORQ(I)).GT. 1.0D-06) GO TO 9
6  CONTINUE
      DO 8 I=1,N
      DO 7 J=1,3
7  V2(I,J)=V2(I,J+1)
8  V2(I,4)=B(I)
      RETURN
9  DO 10 I=1,N
10  WORQ(I)=B(I)
      GO TO 3
      END

```

C MÉTODO (3,3)

```

      SUBROUTINE FORM3(T,V3,Y,YD,Y2D,FJ,F2J,MYD3,MY2D2,MY3D,N3,N,H)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION V3(4,3),Y(4),YD(4),Y2D(4),Y3D(4),WORQ(4),IP(4),V(4),
1  B(4),TRAB(4,4),W(4,4),FJ(4,4),F2J(4,4),F3J(4,4)
      M=0
      CALL PRODM(FJ,F2J,F3J,N)
1  DO 2 I=1,N
      W(I,I)=1.-H*.886956522*FJ(I,I)+.344347826*H*H*F2J(I,I)-
1  .626086957D-01*H*H*H*F3J(I,I)+M
      WORQ(I)=Y(I)
      DO 2 J=1,N
      IF(I.EQ.J) GO TO 2
      W(I,J)=-.886956522*H*FJ(I,J)+.344347826*H*H*F2J(I,J)-
1  .626086957D-01*H*H*H*F3J(I,J)
2  CONTINUE
      IF(M.EQ.1) GO TO 20
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
15  TRAB(I,J)=W(I,J)
20  CALL DEC(N,W,IP,IER)
      IF(IER.EQ.0) GO TO 3
      M=1
      GO TO 1
3  CALL YD1(T,WORQ,YD)
      MYD3=MYD3+1
      CALL YD2(T,WORQ,YD,Y2D)
      MY2D2=MY2D2+1
      CALL YD3(T,WORQ,YD,Y2D,Y3D)
      MY3D=MY3D+1
      CALL PRODV(TRAB,WORQ,V,N)
      DO 4 I=1,N
4  B(I)=V(I)-WORQ(I)+1.12695652*V3(I,3)-.140869565*V3(I,2)+
1  .139130435D-01*V3(I,1)+.886956522*H*YD(I)-.344347826*H*H*Y2D(I)+
2  .626086957D-01*H*H*H*Y3D(I)
      CALL SOL(N,W,B,IP)
      N3=N3+1
      DO 5 I=1,N
      IF(ABS(B(I)-WORQ(I)).GT. 1.0E-06) GO TO 8
5  CONTINUE
      DO 7 I=1,N
      DO 6 J=1,2
6  V3(I,J)=V3(I,J+1)
7  V3(I,3)=B(I)
      RETURN
8  DO 9 I=1,N
9  WORQ(I)=B(I)
      GO TO 3
      END

```

C MÉTODO COMPOSTO, 1 COMPONENTE

```

      SUBROUTINE FORM41(T,V4,YV4,Y,YD,FJ,MYD4,N4,N,H)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION V4(4,3),YV4(4,3),Y(4),YD(4),WORQ(4),IP(4),V(4),W(4,4),
1  FJ(4,4),TRAB(4,4),B(4)
      M=0
      DO 2 I=1,N
      W(I,I)=1.-H*.335166667*FJ(I,I)+M
      WORQ(I)=Y(I)
      DO 2 J=1,N
      IF(I .EQ. J) GO TO 2
      W(I,J)=-H*.335166667*FJ(I,J)
2  CONTINUE
      IF(M.EQ.1) GO TO 20
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
15  TRAB(I,J)=W(I,J)
20  CALL DEC(N,W,IP,IER)
      IF(IER .EQ. 0) GO TO 4
      M=1
      GO TO 1
4  CALL YD1(T,WORQ,YD)
      MYD4=MYD4+1
      CALL PRODV(TRAB,WORQ,V,N)
      DO 5 I=1,N
      B(I)=V(I)-WORQ(I)+.375*V4(I,3)+956*V4(I,2)-.331*V4(I,1)+
1  H*(.335166667*YD(I)+1.19916667*YV4(I,3)-.131833333*YV4(I,2)-
20.1085*YV4(I,1))
      CALL SOL(N,W,B,IP)
      N4=N4+1
      DO 6 I=1,N
      IF(ABS(B(I)-WORQ(I)) .GT. 1.0E-06) GO TO 9
6  CONTINUE
      CALL YD1(T,B,YD)
      MYD4=MYD4+1
      DO 8 I=1,N
      DO 7 J=1,2
      V4(I,J)=V4(I,J+1)
7  YV4(I,J)=YV4(I,J+1)
      V4(I,3)=B(I)
      YV4(I,3)=YD(I)
8  CONTINUE
      RETURN
9  DO 10 I=1,N
10  WORQ(I)=B(I)
      GO TO 4
      END

```

C 2 COMPONENTE

```

      SUBROUTINE FORM42(T,V4,YV4,Y,YD,FJ,MYD4,N4,N,H)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION V4(4,3),YV4(4,3),Y(4),YD(4),WORQ(4),V(4),B(4),IP(4),
1  W(4,4),TRAB(4,4),FJ(4,4)
      M=0
      DO 2 I=1,N
      W(I,I)=1.-.431791667*H*FJ(I,I)+M
      WORQ(I)=Y(I)
      DO 2 J=1,N
      IF(I .EQ. J) GO TO 2
      W(I,J)=-.431791667*H*FJ(I,J)
2  CONTINUE
      IF(M.EQ.1) GO TO 20
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
15  TRAB(I,J)=W(I,J)
20  CALL DEC(N,W,IP,IER)
      IF(IER .EQ. 0) GO TO 4
      M=1
      GO TO 1
4  CALL YD1(T,WORQ,YD)
      MYD4=MYD4+1
      CALL PRODV(TRAB,WORQ,V,N)
      DO 5 I=1,N
      B(I)=V(I)-WORQ(I)+2.659*V4(I,3)-1.363*V4(I,2)-.296*V4(I,1)+
1  1H*(.431791667*YD(I)-.452916667D-01*YV4(I,3)-1.34129167*YV4(I,2)-
2.208333333D-03*YV4(I,1))
      CALL SOL(N,W,B,IP)
      N4=N4+1
      DO 6 I=1,N
      IF(ABS(B(I)-WORQ(I)) .GT. 1.0E-06) GO TO 9
6  CONTINUE
      CALL YD1(T,B,YD)
      MYD4=MYD4+1
      DO 8 I=1,N
      DO 7 J=1,2
      V4(I,J)=V4(I,J+1)
7  YV4(I,J)=YV4(I,J+1)
      V4(I,3)=B(I)
      YV4(I,3)=YD(I)
8  CONTINUE
      RETURN
9  DO 10 I=1,N
10  WORQ(I)=B(I)
      GO TO 4
      END

```

C 3 COMPONENTE

```

      SUBROUTINE FORM43(T,V4,YV4,Y,YD,FJ,MYD4,N4,N,H)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION V4(4,3),YV4(4,3),Y(4),YD(4),V(4),B(4),IP(4),WORQ(4),
1  FJ(4,4),TRAB(4,4),W(4,4)
      M=0
1  DO 2 I=1,N
      W(I,I)=1.-H*.566291667*FJ(I,I)+M
      WORQ(I)=Y(I)
      DO 2 J=1,N
      IF(I.EQ. J) GO TO 2
      W(I,J)=-H*.566291667*FJ(I,J)
2  CONTINUE
      IF(M.EQ.1) GO TO 20
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
15  TRAB(I,J)=W(I,J)
20  CALL DEC(N,W,IP,IER)
      IF(IER.EQ. 0) GO TO 4
      M=1
      GO TO 1
4  CALL YD1(T,WORQ,YD)
      MYD4=MYD4+1
      CALL PRODV(TRAB,WORQ,V,N)
      DO 5 I=1,N
5  B(I)=V(I)-WORQ(I)+4.16003898*V4(I,3)-4.591*V4(I,2)+1.43096102
1  *V4(I,1)+H*(.566291667*YD(I)-1.21813799*YV4(I,3)-.787176979*
2  YV4(I,2)+.709945339*YV4(I,1))
      CALL SOL(N,W,B,IP)
      N4=N4+1
      DO 6 I=1,N
      IF(ABS(B(I)-WORQ(I)).GT. 1.0E-06) GO TO 9
6  CONTINUE
      CALL YD1(T,B,YD)
      MYD4=MYD4+1
      DO 8 I=1,N
      DO 7 J=1,2
7  V4(I,J)=V4(I,J+1)
      YV4(I,J)=YV4(I,J+1)
      V4(I,3)=B(I)
      YV4(I,3)=YD(I)
8  RETURN
9  DO 10 I=1,N
10  WORQ(I)=B(I)
      GO TO 4
      END

```

C MÉTODO DE ENRIGHT

```

      SUBROUTINE FORM5(T,V5,YV5,Y,YD,Y2D,MYD5,FJ,F2J,MY2D3,N5,N,H)
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      DIMENSION V5(4,1),YV5(4,3),Y(4),YD(4),Y2D(4),V(4),B(4),IP(4),
1  WORQ(4),TRAB(4,4),FJ(4,4),F2J(4,4),W(4,4)
      M=0
1  DO 2 I=1,N
      W(I,I)=1.-H*(.568518519*FJ(I,I)-.105555556*H*F2J(I,I))+M
      WORQ(I)=Y(I)
      DO 2 J=1,N
      IF(I.EQ. J) GO TO 2
      W(I,J)=-H*(.568518519*FJ(I,J)-.105555556*H*F2J(I,J))
2  CONTINUE
      IF(M.EQ.1) GO TO 20
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
15  TRAB(I,J)=W(I,J)
20  CALL DEC(N,W,IP,IER)
      IF(IER.EQ. 0) GO TO 4
      M=1
      GO TO 1
4  CALL YD1(T,WORQ,YD)
      MYD5=MYD5+1
      CALL YD2(T,WORQ,YD,Y2D)
      MY2D3=MY2D3+1
      CALL PRODV(TRAB,WORQ,V,N)
      DO 5 I=1,N
5  B(I)=V(I)-WORQ(I)+V5(I,1)+H*(.568518519*YD(I)+0.475*YV5(I,3)-
1  .05*YV5(I,2)+.648148148D-02*YV5(I,1))-
2  .105555556*H*Y2D(I)
      CALL SOL(N,W,B,IP)
      N5=N5+1
      DO 6 I=1,N
      IF(ABS(B(I)-WORQ(I)).GT. 1.0E-06) GO TO 9
6  CONTINUE
      CALL YD1(T,B,YD)
      MYD5=MYD5+1
      DO 8 I=1,N
      DO 7 J=1,2
7  YV5(I,J)=YV5(I,J+1)
      YV5(I,3)=YD(I)
8  V5(I,1)=B(I)
      RETURN
9  DO 10 I=1,N
10  WORQ(I)=B(I)
      GO TO 4
      END

```

```

SUBROUTINE RKF45(F,NEQN,Y,T,TOUT,RELERR,ABSERR,IFLAG,WORK,IWORK)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION IWORK(5),WORK(1),Y(NEQN)
EXTERNAL F
K1M=NEQN+1
K1=K1M+1
K2=K1+NEQN
K3=K2+NEQN
K4=K3+NEQN
K5=K4+NEQN
K6=K5+NEQN
CALL RKFS(F,NEQN,Y,T,TOUT,RELERR,ABSERR,IFLAG,WORK(1),WORK(K1M),
1      WORK(K1),WORK(K2),WORK(K3),WORK(K4),WORK(K5),WORK(K6),
2      WORK(K6+1),IWORK(1),IWORK(2),IWORK(3),IWORK(4),IWORK(5))
RETURN
END
SUBROUTINE RKFS(F,NEQN,Y,T,TOUT,RELERR,ABSERR,IFLAG,YP,H,F1,F2,F3,
1      F4,F5,SAVRE,SAVAE,NFE,KOP,INIT,JFLAG,KFLAG)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(NEQN),YP(NEQN),F1(NEQN),F2(NEQN),F3(NEQN),F4(NEQN)
1,F5(NEQN)
LOGICAL HFAILD,OUTPUT
EXTERNAL F
DATA REMIN/1.E-12/
DATA MAXNFE/3000/
IF (NEQN .LT. 1) GO TO 10
IF ((RELERR .LT. 0.0) .OR. (ABSERR .LT. 0.0)) GO TO 10
MFLAG=IABS(IFLAG)
IF ((MFLAG .EQ. 0) .OR. (MFLAG .GT. 8)) GO TO 10
IF (MFLAG .NE. 1) GO TO 20
EPS = 1.0
5 EPS = EPS/2.0
EPSP1 = EPS + 1.0
IF (EPSP1 .GT. 1.0) GO TO 5
U26 = 26.0*EPS
GO TO 50
10 IFLAG=8
RETURN
20 IF ((T .EQ. TOUT) .AND. (KFLAG .NE. 3)) GO TO 10
IF (MFLAG .NE. 2) GO TO 25
IF ((KFLAG .EQ. 3) .OR. (INIT .EQ. 0)) GO TO 45
IF (KFLAG .EQ. 4) GO TO 40
IF ((KFLAG .EQ. 5) .AND. (ABSERR .EQ. 0.0)) GO TO 30
IF ((KFLAG .EQ. 6) .AND. (RELERR .LE. SAVRE) .AND.
1      (ABSERR .LE. SAVAE)) GO TO 30
GO TO 50
25 IF (IFLAG .EQ. 3) GO TO 45
IF (IFLAG .EQ. 4) GO TO 40
IF ((IFLAG .EQ. 5) .AND. (ABSERR .GT. 0.0)) GO TO 45
30 STOP
40 NFE=0
IF (MFLAG .EQ. 2) GO TO 50
45 IFLAG=JFLAG
IF (KFLAG .EQ. 3) MFLAG=IABS(IFLAG)
50 JFLAG=IFLAG
KFLAG=0
SAVRE=RELERR
SAVAE=ABSERR
RER=2.0*EPS+REMIN
IF (RELERR .GE. RER) GO TO 55
RELERR=RER
IFLAG=3
KFLAG=3
RETURN
55 DT=TOUT-T
IF (MFLAG .EQ. 1) GO TO 60
IF (INIT .EQ. 0) GO TO 65
GO TO 80
60 INIT=0
KOP=0
A=T
CALL F(A,Y,YP)
NFE=1
IF (T .NE. TOUT) GO TO 65
IFLAG=2
RETURN
65 INIT=1
H=DABS(DT)
TOLN=0.
DO 70 K=1,NEQN
TOL=RELERR*DABS(Y(K))+ABSERR
IF (TOL .LE. 0.) GO TO 70
TOLN=TOL
YPK=DABS(YP(K))
IF (YPK*H**5 .GT. TOL) H=(TOL/YPK)**0.2
70 CONTINUE
IF (TOLN .LE. 0.0) H=0.0
H=DMAX1(H,U26*DMAX1(DABS(T),DABS(DT)))
JFLAG=ISIGN(2,IFLAG)
80 H=DSIGN(H,DT)
IF (DABS(H) .GE. 2.0*DABS(DT)) KOP=KOP+1
IF (KOP .NE. 100) GO TO 85
KOP=0
IFLAG=7
RETURN

```

```

85 IF(DABS(DT) .GT. U26*DABS(T)) GO TO 95
DO 90 K=1,NEQN
90 Y(K)=Y(K)+DT*YP(K)
A=TOUT
CALL F(A,Y,YP)
NFE=NFE+1
GO TO 300
95 OUTPUT= .FALSE.
SCALE=2.0/RELERR
AE=SCALE*ABSERR
100 HFAILD= .FALSE.
HMIN=U26*DABS(T)
DT=TOUT-T
IF (DABS(DT) .GE. 2.0*DABS(H)) GO TO 200
IF (DABS(DT) .GT. DABS(H)) GO TO 150
OUTPUT= .TRUE.
H=DT
GO TO 200
150 H=0.5*DT
200 IF(NFE .LE. MAXNFE) GO TO 220
IFLAG=4
KFLAG=4
RETURN
220 CALL FEHL(F,NEQN,Y,T,H,YP,F1,F2,F3,F4,F5,F1)
NFE=NFE+5
EEOET=0.0
DO 250 K=1,NEQN
ET=DABS(Y(K))+DABS(F1(K))+AE
IF (ET .GT. 0.0) GO TO 240
IFLAG=5
RETURN
240 EE=DABS((-2090.0*YP(K)+(21970.0*F3(K)-15048.0*F4(K)))+
1 (22528.0*F2(K)-27360.0*F5(K)))
250 EEOET=DMAX1(EEOET,EE/ET)
ESTTOL=DABS(H)*EEOET*SCALE/752400.0
IF (ESTTOL .LE. 1.0) GO TO 260
HFAILD= .TRUE.
OUTPUT= .FALSE.
S=0.1
IF (ESTTOL .LT. 59049.0) S=0.9/ESTTOL**0.2
H=S*H
IF (IDABS(H) .GT. HMIN) GO TO 200
IFLAG=6
KFLAG=6
RETURN
260 T=T+H
DO 270 K=1,NEQN
270 Y(K)=F1(K)
A=T
CALL F(A,Y,YP)
NFE=NFE+1
S=5.0
IF (ESTTOL .GT. 1.889568E-4) S=0.9/ESTTOL**0.2
IF (HFAILD) S=DMIN1(S,1.0D+00)
H=SIGN(DMAX1(S*DABS(H),HMIN),H)
IF (OUTPUT) GO TO 300
IF (IFLAG .GT. 0) GO TO 100
IFLAG=-2
RETURN
300 T=TOUT
IFLAG=2
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE FEHL(F,NEQN,Y,T,H,YP,F1,F2,F3,F4,F5,S)
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DIMENSION Y(NEQN),YP(NEQN),F1(NEQN),F2(NEQN),
1 F3(NEQN),F4(NEQN),F5(NEQN),S(NEQN)
CH=H/4.0
DO 221 K=1,NEQN
221 F5(K)=Y(K)+CH*YP(K)
CALL F(T+CH,F5,F1)
CH=3.0*H/32.0
DO 222 K=1,NEQN
222 F5(K)=Y(K)+CH*(YP(K)+3.0*F1(K))
CALL F(T+3.0*H/8.0,F5,F2)
CH=H/2197.0
DO 223 K=1,NEQN
223 F5(K)=Y(K)+CH*(1932.0*YP(K)+(7296.0*F2(K)-7200.0*F1(K)))
CALL F(T+12.0*H/13.0,F5,F3)
CH=H/4104.0
DO 224 K=1,NEQN
224 F5(K)=Y(K)+CH*((8341.0*YP(K)-845.0*F3(K))+
1 (29440.0*F2(K)-32832.0*F1(K)))
CALL F(T+H,F5,F4)
CH=H/20520.0
DO 225 K=1,NEQN
225 F1(K)=Y(K)+CH*((-6080.0*YP(K)+(9295.0*F3(K)-
1 5643.0*F4(K)))+(41040.0*F1(K)-28352.0*F2(K)))
CALL F(T+H/2.0,F1,F5)
CH=H/7618050.0
DO 230 K=1,NEQN
230 S(K)=Y(K)+CH*((902880.0*YP(K)+(3855735.0*F3(K)-
1 1371249.0*F4(K)))+(3953664.0*F2(K)+
2 277020.0*F5(K)))
RETURN
END

```

```

C   PROGRAMA PRINCIPAL

      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
      EXTERNAL YD1
      DIMENSION Y(4),WORK(27),IWORK(5),V1(4,5),V2(4,4),V3(4,3),V4(4,3)
      1,FJ(4,4),V5(4,1),YV5(4,3),YV4(4,3),YD(4),Y2D(4),F2J(4,4)

      CALL ASSIGN (6,'LP:')
      CALL ASSIGN (1,'COMES.DAT')
      READ(1,1) NEQN,H
      1   FORMAT(I2/F9.4)
      N=NEQN
      READ(1,2) T,(Y(IY),IY=1,N)
      2   FORMAT(<N+1>(F14.7))
      WRITE(6,9999)NEQN,H
      9999  FORMAT(' ORDEM E H LIDOS 'I4,F14.7)
      WRITE(6,9998)T,(Y(IY),IY=1,N)
      9998  FORMAT(' T E VALORES INICIAIS '<N+1>(F14.7))
      DO 5 I=1,N
      5   V1(I,1)=Y(I)
      RELERR = 0.0D-7
      ABSERR = 1.0D-8
      TFINAL = 10.
      TPRINT = H
      IFLAG = 1
      TOUT = T
      N1=1
      N2=1
      N3=1
      N4=1
      N5=1
      MYD1=1
      MYD2=1
      MY2D1=1
      MYD3=1
      MY2D2=1
      MY3D=1
      MYD4=1
      MYD5=1
      MY2D3=1
      ITEST=1
      IT2=1
      10  IF(T .GT. 10.) GO TO 170
      CALL RK45(YD1,NEQN,Y,T,TOUT,RELERR,ABSERR,IFLAG,WORK,IWORK)
      GO TO (80,90,30,40,50,60,70,80), IFLAG
      30  WRITE(6,31)T,RELERR,ABSERR
      GO TO 10
      40  WRITE(6,41)
      GO TO 10
      50  ABSERR = 1.0E-9
      WRITE(6,31)T,RELERR,ABSERR
      GO TO 10
      60  RELERR = 10.0*RELERR
      WRITE(6,31)T, RELERR,ABSERR
      IFLAG = 2
      GO TO 10
      70  WRITE(6,71)
      IFLAG = 2
      GO TO 10
      80  WRITE(6,81)
      STOP
      31  FORMAT(17H TOLERANCES RESET, 3E12.3)
      41  FORMAT(11H MANY STEPS)
      71  FORMAT(12H MUCH OUTPUT)
      81  FORMAT(14H IMPROPER CALL)
      90  TOUT=T+TPRINT
      GO TO (100,110,120,130,140),ITEST
      100  DO 105 I=1,N
      V1(I,2)=Y(I)
      V2(I,1)=Y(I)
      105  CONTINUE
      ITEST=2
      GO TO 10
      110  CALL YD1(T,Y,YD)
      DO 115 I=1,N
      T1=Y(I)
      T2=YD(I)
      V1(I,3)=T1
      V2(I,2)=T1
      V3(I,1)=T1
      V4(I,1)=T1
      YV5(I,1)=T2
      YV4(I,1)=T2
      115  CONTINUE
      ITEST=3
      GO TO 10
      120  CALL YD1(T,Y,YD)
      DO 125 I=1,N
      T1=Y(I)
      T2=YD(I)
      V1(I,4)=T1
      V2(I,3)=T1
      V3(I,2)=T1
      V4(I,2)=T1
      YV5(I,2)=T2
      YV4(I,2)=T2

```

```

125     CONTINUE
        ITEST=4
        GO TO 10
130     CALL YD1(T,Y,YD)
        DO 135 I=1,N
            T1=Y(I)
            T2=YD(I)
            V1(I,5)=T1
            V2(I,4)=T1
            V3(I,3)=T1
            V4(I,3)=T1
            V5(I,1)=T1
            YV5(I,3)=T2
            YV4(I,3)=T2
135     CONTINUE
        ITEST=5
        GO TO 10
140     CALL FJAC(T,Y,FJ)
        CALL FORM1(T,V1,Y,YD,FJ,MYD1,N1,N,H)
        CALL FORM2(T,V2,Y,YD,FJ,F2J,Y2D,MYD2,MY2D1,N2,N,H)
        CALL FORM3(T,V3,Y,YD,Y2D,FJ,F2J,MYD3,MY2D2,MY3D,N3,N,H)
        GO TO (142,144,146),IT2
142     CALL FORM41(T,V4,YV4,Y,YD,FJ,MYD4,N4,N,H)
        IT2=2
        GO TO 150
144     CALL FORM42(T,V4,YV4,Y,YD,FJ,MYD4,N4,N,H)
        IT2=3
        GO TO 150
146     CALL FORM43(T,V4,YV4,Y,YD,FJ,MYD4,N4,N,H)
        IT2=1
150     CALL FORM5(T,V5,YV5,Y,YD,Y2D,MYD5,FJ,F2J,MY2D3,N5,N,H)
        IF(T.LT. 9.) GO TO 10
        WRITE(6,91)T
        DO 160 I=1,N
            T1=Y(I)
            A1=V1(I,5)-T1
            A2=V2(I,4)-T1
            A3=V3(I,3)-T1
            A4=V4(I,3)-T1
            A5=V5(I,1)-T1
160     WRITE(6,99)A1,A2,A3,A4,A5
        GO TO 10
170     WRITE(6,109)MYD1,MYD2,MY2D1,MYD3,MY2D2,MY3D,MYD4,MYD5,MY2D3
        WRITE(6,129) N1,N2,N3,N4,N5
91      FORMAT(/10X,F8.3/)
99      FORMAT(8X,5(2X,G16.9))
109     FORMAT(/8X,9(2X,I5))
129     FORMAT(/10X,5I7)
        STOP
        END

```