ICMSC-USP
PÓS-GRADUAÇÃO

I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE UM OSCILADOR NÃO LINEAR AMORTECIDO E FORÇADO

Mara Sueli Simão Moraes

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

BIFURCAÇÃO DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE UM OSCILADOR NÃO LINEAR AMORTECIDO E FORÇADO

Mara Sueli Simão Moraes

Orientador: Prof. Dr. Plácido Zoéga Táboas

Dissertação apresentada no Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de "Mestre em Matemática".

SÃO CARLOS - SP

1981

Aos meus pais,
pela dedicação e incentivo.
Ao Paulo,
pela compreensão.

ABSTRACT

Suppose the equation

$$\ddot{x} + g(x) = -\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 f \tag{1}$$

where f is a scalar function which is 2π-periodic, λ_1, λ_2 are real parameters, $xg(x) > 0$ for $x \neq 0$.

The initial problem is to characterize the existence and the number of 2π-periodic solutions of (1) which lie in a neighborhood of a 2π-periodic orbit of the degenerated equation

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \tag{2}$$

whose orbit in the $(x,\dot{x})$ - space encircles the origin.

The Liapunov-Schmidt reduction method is applied to obtain the bifurcation equations. The results are then obtained by successive use of the Implict Function theorem.

We also characterize the existence and the number of 4π-periodic solutions of (1) which lie in a neighborhood of a 2π-periodic orbit of (2).

AGRADECIMENTOS

Escrever uma Dissertação de Mestrado é um trabalho árduo que não se concretiza com o esforço apenas do autor. É evidente a importância de outros que com sua ajuda e incentivo tornam possível aquilo que, sem eles, jamais teria sido concluído. Como é impossível enumerar a todos, agradeço em especial:

- Professor Doutor Plácido Zoéga Táboas, Orientador e amigo, pelo tempo que me dedicou na elaboração deste, pela sua paciência e compreensão.

- Aos meus pais, por terem me propiciado sempre condições favoráveis de estudo.

- Ao Paulo, pela sua compreensão e apoio.

- A Lúcia, Cecília, Bia e Márcia, por sempre terem me hospedado da melhor forma possível em São Carlos.

- A todos os colegas e professores do ICMSC-USP, que de uma maneira ou de outra me ajudaram na realização deste.

- A Gisele Maria Saab, pela sua rapidez e eficiência no trabalho de datilografia.

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO 1

2. MÉTODO DE LIAPUNOV-SCHMIDT 6

3. UM PROBLEMA DE OSCILAÇÕES NÃO LINEARES 8

3.1. CASO HARMÔNICO 10

3.1.1. ENUNCIADO DO TEOREMA 12

3.1.2. EQUAÇÃO DE BIFURCAÇÃO 14

3.1.3. PROVA DO TEOREMA 26

3.1.4. FORMA GERAL DO TEOREMA 32

3.1.5. COMPORTAMENTO LIMITE DAS SOLUÇÕES 35

3.2. CASO SUB-HARMÔNICO 43

3.2.1. ENUNCIADO DO TEOREMA 45

3.2.2. EQUAÇÃO DE BIFURCAÇÃO 46

3.2.3. PROVA DO TEOREMA 48

4. BIBLIOGRAFIA 49

1. *Introdução*

Um número considerável de fenômenos estudados nas ciências físicas levam a equações matemáticas da forma

$$M(x,\lambda) = 0 \qquad (1)$$

onde x representa a solução procurada, e λ um parâmetro.

Vamos descrever rapidamente a idéia de *BIFURCAÇÃO*.

Suponhamos X,Z espaços de Banach, Λ um conjunto aberto em um espaço de Banach, $M : X \times \Lambda \to Z$ um operador continuamente diferenciável e consideremos a equação (1) para $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$.

Se necessário assumiremos que M tem derivadas contínuas de ordem superior a um.

Uma solução da equação (1) é um ponto $(x,\lambda) \in X \times \Lambda$, tal que, a equação (1) é satisfeita.

Seja $S \subset X \times \Lambda$ o conjunto das soluções da equação (1) e, para todo $\lambda \in \Lambda$, seja:

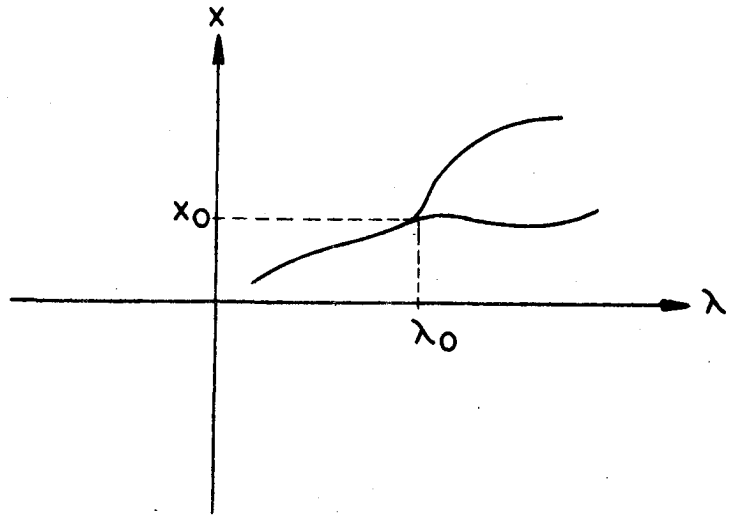
$$S_\lambda = \{ x \in X ; (x,\lambda) \in S \}$$

Desde que λ é usualmente um parâmetro físico, é natural discutirmos a dependência de S_λ em relação a λ.

Ainda, é de grande importância a determinação dos pontos $\lambda_o \in \Lambda$, de modo que, ao variar λ uma vizinhança arbitrária de λ_o, o conjunto S_λ varie radicalmente.

Um *PONTO DE BIFURCAÇÃO* é um valor $\lambda_o \in \Lambda$ do parâme

tro que satisfaz $S_{\lambda_o} \neq \emptyset$, e existe um $x_o \in S_{\lambda_o}$, tal que, para qualquer vizinhança U de (x_o,λ_o), existem duas soluções distintas (x_1,λ), $(x_2,\lambda) \in U$ e $x_1, x_2 \in S_\lambda$. Veja figura abaixo.



Existe mais do que uma definição de ponto de bifurcação, mas em cada problema específico fica claro o seu significado.

Exemplo: Sejam λ,x, escalares reais e

$$M(x,\lambda) = x^2 - \lambda = 0$$

Temos:

$$S = \{(x,\lambda);\ \lambda = x^2\}$$

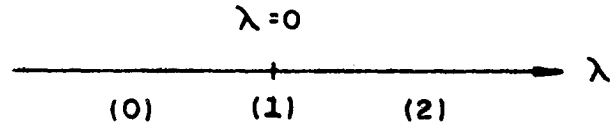
Portanto se:

$\lambda < 0 \Rightarrow S_\lambda = \emptyset$

$\lambda < 0 \Rightarrow S_o = \{0\}$

$\lambda > 0 \Rightarrow S_\lambda = \{ + \lambda^{1/2} , -\lambda^{1/2} \}$

Portanto, o ponto $\lambda = 0$ é um ponto de bifurcação, como mostra o diagrama abaixo.



Em Hale [3] e Stakgold [8] o leitor pode encontrar vários exemplos ilustrativos do problema de bifurcação.

No problema estudado neste trabalho, temos dois parâmetros, isto é, o parâmetro λ considerado na discussão acima é bidimensional. Neste caso o diagrama anterior se faz no plano; ao invés de pontos de bifurcação, em geral se obtém curvas de bifurcação. Acreditamos que essas idéias se tornarão precisas com o decorrer do texto.

Consideremos a equação

$$\ddot{x} + g(x) = -\lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 f \qquad [\dot{} = \frac{d}{dt}] \qquad (2)$$

onde f é uma função contínua 2π-periódica, isto é, $f(t+2\pi) = f(t)$, λ_1, λ_2 são parâmetros reais e $xg(x) > 0$, se $x \neq 0$.

A equação (2) representa um oscilador amortecido e forçado. Os termos em λ_1, λ_2 representam o amortecimento e o termo forçante, respectivamente.

Nestas condições, a origem do plano $(x,\dot{x})$ é um centro para a equação degenerada

$$\ddot{x} + g(x) = 0 \qquad (3)$$

O problema inicial é caracterizar a existência e o número de soluções 2π-periódicos da equação (2) cujas as órbitas estejam próximas de uma órbita 2π-periódica da equação degenerada. Mais precisamente, investigaremos a ocorrência de bifurcação de soluções 2π-periódicas da equação (2), com órbitas próximas de uma órbita 2π-periódica da equação (3).

A equação (3) representa o oscilador livre não amortecido.

Chamamos o problema acima de *CASO HARMÔNICO*, já que procuramos soluções com o mesmo período do termo forçante f e da solução p de (3) que dá origem à órbita 2π-periódica.

Para chegarmos às equações de bifurcação usamos o método de redução de Liapunov-Schmidt, que é descrito no parágrafo 2. Estas são analisadas por aplicações sucessivas do Teorema das Funções Implícitas.

Uma questão importante que estudamos ainda no parágrafo 3.1, é o comportamento limite das soluções de (2), isto

é, a continuidade das soluções de (2) em relação aos parâmetros no ponto $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$. Em outras palavras, se as soluções de (2) tendem a uma solução de (3), quando os parâmetros tendem a zero.

No parágrafo 3.2, chamado de *CASO SUB-HARMÔNICO*, o problema é caracterizar a existência e o número de soluções 4π-periódicas da equação (2), cujas as órbitas estejam próximas de uma órbita 2π-periódicas da equação (3). Isto é, como em 3.1 investigamos a ocorrência de bifurcação de soluções, neste caso 4π-periódicas, da equação (2) próximas de uma solução da equação (3).

Uma característica deste problema que o difere dos problemas usuais da teoria de bifurcação é que a equação degenerada, por ser autônoma, tem uma família a um parâmetro de soluções obtidas por translações no tempo. Um exame na literatura mostra que uma hipótese corrente é que a solução da equação degenerada seja isolada.

Ao que sabemos, o primeiro a considerar esse problema foi Loud [7] utilizando um outro método, mas foi em Hale e Táboas [4] que ficou claramente caracterizado tratar-se de um problema de bifurcação a partir de uma família de soluções.

O parágrafo 3.1 contém a essência deste trabalho. Nele procuramos apresentar uma versão mais detalhada e com alguma pretensão didática do trabalho de Hale e Táboas [4]. Quanto ao parágrafo 3.2, não conhecemos nenhuma referência onde seja estudado o caso, por nós chamado *SUB-HARMÔNICO*.

2. *MÉTODO DE LIAPUNOV - SCHMIDT*

Sejam X, Z espaços de Banach e B um operador definido de um espaço de X em Z, denotamos $\mathcal{D}(B)$, $R(B)$, $N(B)$ o domínio, imagem e núcleo respectivamente de B.

Seja E um operador definido em Z, linear, contínuo, indempotente, isto é, $E^2 = E$. Denominamos E operador projeção e denotamos $R(E)$ por Z_E.

Com o símbolo I denotamos o operador identidade.

Se $L : \mathcal{D}(L) \subset X \to Z$ é um operador linear, então k é dito um inverso à direita de L se k é um operador linear de $R(L)$ em $\mathcal{D}(L)$ e $LKz = z$.

Proposição: Sejam X,Z espaços de Banach e $L : \mathcal{D}(L) \subset X \to Z$ um operador linear e $N : X \to Z$ um operador não necessariamente linear. Consideremos a equação

$$Lx = Nx \tag{1}$$

Vamos supor satisfeitas as seguintes hipóteses:

(H_1) Existem projeções $P : X \to X$ e $Q : Z \to Z$; $X_P = N(L)$, $Z_{I-Q} = R(L)$.

(H_2) L tem um inverso à direita limitado K com $PK = 0$.

Então a equação (1) é equivalente ao sistema:

$$\begin{aligned} &(a)\ x = Px + k(I-Q)Nx \\ &(b)\ QNx = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Prova: Decompondo a equação (1) nos espaços suplementares determinados pela projeção Q, chega-se facilmente a que a equação (1) é equivalente ao sistema:

$$\begin{aligned} &(a)\ (I-Q)(Lx-Nx) = 0 \\ &(b)\ Q(Lx-Nx) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Por hipótese temos que $LX = (I-Q)Z$, portanto $QL = 0$. Logo o sistema (3) é equivalente:

$$\begin{aligned} &(a)\ Lx = (I-Q)Nx \\ &(b)\ QNx = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Agora, desde que $LK = I$ em $R(L)$ e $PK = 0$ temos $KL = I-P$ em $\mathcal{D}(L)$.

De fato, seja $x \in \mathcal{D}(L) \subset X$, com $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in X_p$ e $x_2 \in X_{I-P}$.

$KLx = KL(x_1+x_2) = K(Lx_1 + Lx_2) = KLx_2 = x_2+y$, $y \in X_P$.

Mas $PK = 0$, portanto, $R(K) \subset X_{I-P}$. Logo $y \in X_{I-P}$ e, conseqüentemente, $y = 0$, ou seja, $KLx = x_2$.

Portanto, $KLx = (I-P)x$, $x \in \mathcal{D}(L)$, o que justifica a nossa afirmação.

Dessa forma a equação (4)(a) é equivalente a:

$x = Px + K(I-Q)Nx$

O sistema (4) é equivalente ao seguinte:

$$\begin{aligned} &(a)\ x = Px + K(I-Q)Nx \\ &(b)\ QNx = 0 \end{aligned}$$

3. *UM PROBLEMA DE OSCILAÇÕES NÃO LINEARES*

Consideremos a equação escalar do oscilador não linear $\ddot{x} + g(x) = 0$ (1.1), onde g é força restauradora, isto é, $xg(x) > 0$, $x \neq 0$ e tem derivadas contínuas até a ordem que necessitamos. Deste modo, as soluções dos problemas de valor inicial de (1.1) são únicas.

Denotamos "." a derivada em relação a variável $t \in \in R$.

Usando Hale [2, cap. V] ou Urabe [10, cap. XIII], por exemplo, temos que a origem do plano $(x,\dot{x})$ é um centro, isto é, numa vizinhança de $(0,0)$ as órbitas de (1.1) são órbitas periódicas circundando a origem.

De fato, a equação (1.1) é equivalente ao seguinte sistema bidimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) \end{aligned} \qquad (1.2)$$

onde $E(x,y) = \int_o^x g(s)ds + \frac{1}{2}y^2$ é a energia do sistema (1.2).

Temos $E(x,y)$ = constante ao longo das soluções de (1.2), isto é, a energia do sistema mantém-se constante. Portanto, as órbitas das soluções no plano (x,y) são as curvas de nível de $E(x,y)$.

Ainda, $E(0,0) = 0$ e $E(x,y) > 0$ para $(x,y) \neq 0$, pois $x = 0$ é ponto de mínimo de $G(x) = \int_o^x g(s)ds$.

Portanto, $(0,0)$ é ponto de equilíbrio estável, e a origem do plano $(x,\dot{x})$ é um centro.

A solução geral de (1.1) numa vizinhança de $(0,0)$ pode se exprimir como $x(t) = \phi(\omega(a)(t+\alpha),a)$, onde $a \in R_+$ é chamado amplitude da solução e as órbitas cruzam o semi-eixo 0_x, $x \geq 0$ no ponto $(a,0)$; $\alpha \in R$ é um parâmetro chamado fase e $\phi(\theta,a) = \phi(\theta + 2\pi,a)$, isto é, as soluções tem período $\frac{2\pi}{\omega(a)}$. O número $\omega(a)$ é a freqüência da solução $\phi(\omega(a)(.+\alpha),a)$.

De fato, seja $x(t,a)$ solução de (1.1), tal que, $(x(0,a),\dot{x}(0,a)) = (a,0)$.

A equação (1.1) é autônoma, portanto, $x(.+\alpha,a)$, $\alpha \in R$ são todas as soluções com uma mesma órbita fixada passando por $(a,0)$.

Seja $T(a)$ o período dessas soluções.

Definamos ϕ por $\phi(\theta,a) = x(\frac{T(a)}{2\pi}\theta,a)$, portanto $\phi(\theta + 2\pi,a) = \phi(\theta,a)$.

A solução geral da equação (1.1) é dada por

$x(t+\alpha,a) = \phi(\omega(a)(t+\alpha),a)$, $a \geq 0$, $\alpha \in R$, $\omega(a) = \frac{2\pi}{T(a)}$.

3.1 *CASO HARMÔNICO*

Suponhamos f uma função contínua T-periódica e λ_1,λ_2 parâmetros reais.

Consideremos a equação:

$$\ddot{x} + g(x) = - \lambda_1\dot{x} + \lambda_2 f \qquad (1.3)$$

Seja uma solução de (1.1) $p = \phi(\omega(a_o)(.+\alpha),a_o)$ com órbita $C = \{(p(t), \dot{p}(t), t \in R\} \subset R^2$ e período $T = \frac{2\pi}{\omega(a_o)}$.

O nosso objetivo é determinar todas as soluções T-periódicas de (1.3) cujas as órbitas estejam próximas de C, quando o ponto $(\lambda_1,\lambda_2) \in R^2$ percorre uma vizinhança de (0,0).

Mas precisamente, fixada uma vizinhança U de C, dar uma descrição de como varia o número de soluções T-periódicas de (1.3), com órbita em U, quando o parâmetro $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$ percorre uma vizinhança de (0,0).

A esta altura é oportuno observar que os pontos $(\lambda_1,0)$ com $\lambda_1 \neq 0$, são tais que a equação (1.3) correspondente não possue soluções T-periódicas não triviais.

De fato, considerando o sistema bidimensional correspondente a (1.3), com $\lambda_2 = 0$:

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = - g(x) - \lambda_1 y$$

a energia do sistema é dada por:

$$E(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_o^x g(s)ds$$

e sua derivada ao longo das soluções é $\dot{E}(x,y) = -\lambda_1 y^2$.

Suponhamos que $x(.)$ é uma solução T-periódica não trivial de (1.3), com $\lambda_2 = 0$ e $\lambda_1 \neq 0$. Segue-se que $E(x(.),y(.))$ é uma função T-periódica.

Mas o cálculo de $\dot{E}(x(.),y(.))$ mostra ser $E(x(.),y(.))$ uma função crescente ou decrescente conforme seja $\lambda_1 < 0$ ou $\lambda_1 > 0$.

Este fato contradiz a periocidade de $E(x(.),y(.))$

3.1.1. ENUNCIADO DO TEOREMA

Uma hipótese fundamental neste trabalho é a seguinte:

(H_1) $\omega(a_o) = 1$, $\omega'(a_o) \neq 0$

Assim, se considerarmos p como a solução de amplitude a_o, com fase $\alpha = 0$, temos:

$p(t) = \phi(t, a_o)$, $p(0) = a_o$.

Nosso estudo depende também da seguinte hipótese:

(H_2) A função h dada por:

$$h(\alpha) = \int_o^{2\pi} \dot{p}(t) f(t-\alpha)\, dt \;/\; \int_o^{2\pi} \dot{p}^2(t)\, dt$$

tem um único máximo α_M e um único mínimo α_m em $[0, 2\pi)$, tais que, $h''(\alpha_M) \neq 0$, $h''(\alpha_m) \neq 0$.

O resultado final desta seção é o seguinte teorema, cuja prova será feita em 3.1.3.

Teorema: Se (H_1) e (H_2) estão satisfeitas, então existem vizinhanças U da órbita C,V de $(\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$ e curvas C_m, $C_M \subset V$, definidas respectivamente por:

$$\lambda_1 = c_m(\lambda_2)$$

$$\lambda_1 = c_M(\lambda_2)$$

com c_m, c_M continuamente diferenciáveis em λ_2 e tangentes, respectivamente, às retas:

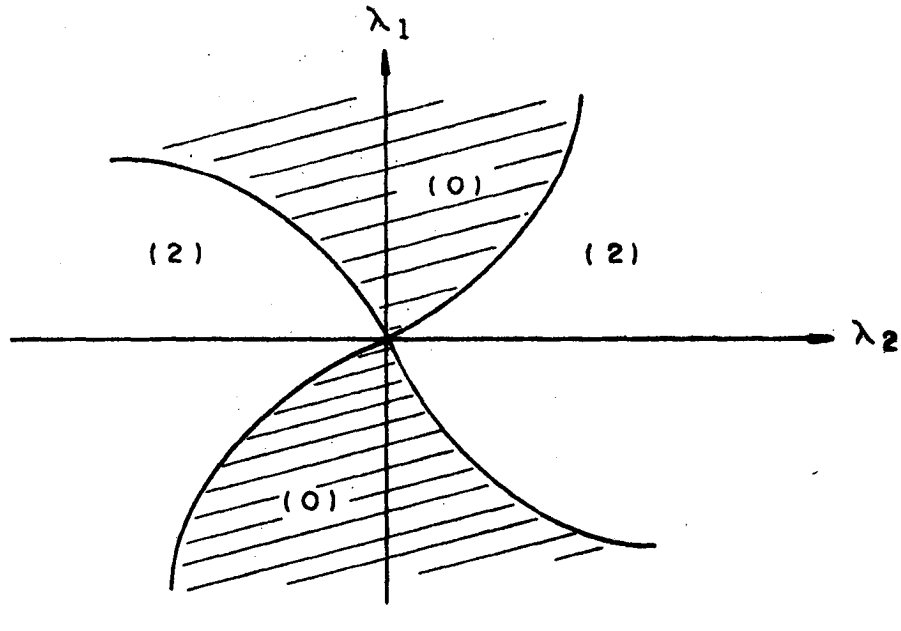
$$\lambda_1 = h(\alpha_m)\lambda_2$$

$$\lambda_1 = h(\alpha_M)\lambda_2$$

no ponto $(0,0)$.

Ainda C_m, C_M definem setores em V, tais que, para (λ_1,λ_2) pertencentes aos setores contendo o eixo $\lambda_2 = 0$ a equação (1.3) não possui solução 2π-periódica e para (λ_1,λ_2) pertencente aos setores restantes a equação (1.3) tem exatamente duas soluções 2π-periódicas.

A figura abaixo é bastante ilustrativa com relação a idéia contida no teorema.



O índice (n) indica o número de soluções 2π-periódicas de (1.3).

3.1.2 *EQUAÇÃO DE BIFURCAÇÃO*

Vamos obter conveniente sistema de coordenadas para uma vizinhança de C.

Seja Z o espaço das funções 2π-periódicas contínuas com a norma do supremo.

Se $\alpha_o \in [0,2\pi)$, uma vizinhança de α_o será entendida como um intervalo aberto J_ε centrado em α_o, de raio $\varepsilon > 0$, módulo $[0,2\pi)$, isto é, $J_\varepsilon = \{\alpha_o \hat{+} s; |s| < \varepsilon\}$, onde $\alpha_o \hat{+} s = \alpha_o + s + 2j\pi$, sendo j um inteiro escolhido com a propriedade $(\alpha_o + s + 2j\pi) \in [0,2\pi)$.

Consideremos $\tau(\alpha) = (\dot{p}(\alpha), \ddot{p}(\alpha))$ tangente a C, e $\gamma(\alpha) = (\ddot{p}(\alpha), -\dot{p}(\alpha))$ ortogonal a $\tau(\alpha)$, para cada $\alpha \in [0,2\pi)$. (1.4).

Para um fixado α_o, aplicando o teorema da Função Inversa temos que a função:

$$\begin{aligned} x(\alpha,\sigma) &= p(\alpha) + \sigma\ddot{p}(\alpha) \\ y(\alpha,\sigma) &= \dot{p}(\alpha) - \sigma\dot{p}(\alpha) \end{aligned} \qquad (1.5)$$

é um homeomorfismo de uma vizinhança de $(\alpha_o,0)$ numa vizinhança de $(p(\alpha_o), \dot{p}(\alpha_o))$.

De fato, calculando a matriz Jacobiana da função definida em (1.5) no ponto $(\alpha_o,0)$, obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} \dot{p}(\alpha_o) & \ddot{p}(\alpha_o) \\ \ddot{p}(\alpha_o) & -\dot{p}(\alpha_o) \end{bmatrix}$$

onde $\det A \neq 0$ por (1.4).

Tomando $\sigma_o > 0$ suficientemente pequeno e usando a compacidade de C, podemos concluir após um número finito de aplicações do Teorema das Funções Inversas que existe em homeomorfismo entre o retângulo (α,σ), $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $|\sigma| < \sigma_o$ e uma vizinhança $U = \{(x,y)$ dada por (1.5), para $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $|\sigma| < \sigma_o\}$ de C. Isto é, os pares (α,σ), $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $|\sigma| < \sigma_o$ definem através de (1.5) um sistema de coordenadas para U.

A construção dada acima é de uma vizinhança tubular da órbita C, veja por exemplo Lima [6, p. 104].

Se $(x(t),y(t))$; $y(t) = \dot{x}(t)$ é uma solução 2π-periódica de (1.3) a qual está numa vizinhança suficientemente pequena de C, então o valor inicial $(x(0),y(0))$ é univocamente determinado por (α,σ).

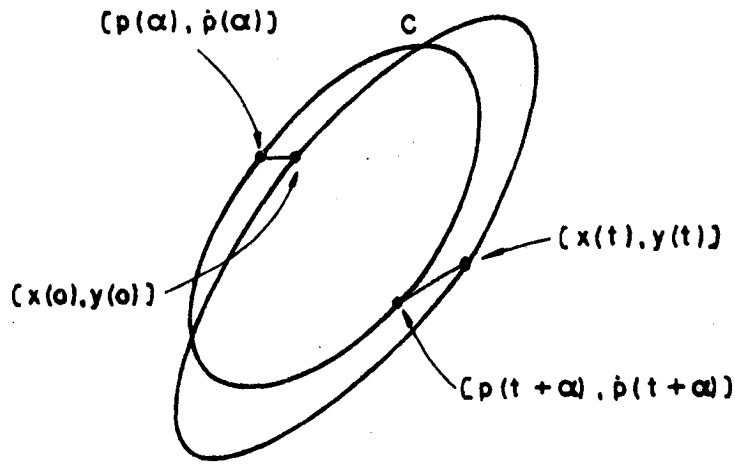
Portanto, é suficiente considerar somente aquelas soluções 2π-periódicas de (1.3) da forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t+\alpha) + z(t+\alpha) \\ y(t) &= \dot{p}(t+\alpha) + \dot{z}(t+\alpha) \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde $(z(\alpha), \dot{z}(\alpha)) = \sigma.\gamma(\alpha)$, isto é, $(z(\alpha), \dot{z}(\alpha))$ é ortogonal a $\tau(\alpha) = (\dot{p}(\alpha), \ddot{p}(\alpha))$.

De fato, dada uma tal solução, seu valor inicial $(x(0),y(0))$ satisfaz:

$$(x(0),y(0)) = (p(\alpha),\dot{p}(\alpha)) + \sigma.\gamma(\alpha)$$



Transcorrido um tempo t, definimos $(z(t+\alpha),\dot{z}(t+\alpha))$ pela relação:

$$(z(t+\alpha),\dot{z}(t+\alpha)) = (x(t),y(t)) - (p(t+\alpha),\dot{p}(t+\alpha))$$

Deste modo estamos procurando soluções $(x(t),y(t))$ de (1.3) dadas por (1.6).

Portanto, $x = p(.+\alpha) + z(.+\alpha)$. Fazendo essa mudança de variável em (1.3) e substituindo $g(p(.+\alpha) + z(.+\alpha))$ por sua expansão em torno de $p(.+\alpha)$ vem:

$$\ddot{p}(.+\alpha) + \ddot{z}(.+\alpha) + g(p(.+\alpha)) + g'(p(.+\alpha))\, z(.+\alpha) =$$

$$= -\lambda_1\dot{p}(.+\alpha) - \lambda_1\dot{z}(.+\alpha) + \lambda_2 f(.) + G(.+\alpha, z(.+\alpha)) \quad (1.7)$$

onde $G(.+2\pi,z) = G(.,z)$, $G(.,z) = 0(|z|^2)$, com $|z| \to 0$.

Observando que p é solução de (1.1) e dando uma translação no tempo, $t \to t-\alpha$, (1.7) se transforma em:

$$\ddot{z} + g'(p)z = -\lambda_1 \dot{z} - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 f_\alpha + G(.,z) \qquad (1.8)$$

onde $f_\alpha = f(.-\alpha)$.

Vamos aplicar o método de Liapunov-Schmidt para (1.8).

Seja L o operador linear, $Lv = \ddot{v} + g'(p)v$;
$L : X \to Z$, X subespaço vetorial de Z das funções 2π-periódicas de classe C^2 sobre a reta, munido com a norma C^2. Portanto, L é contínuo.

Sob a hipótese (H_1), o espaço das soluções 2π-periódicas da equação:

$$Lv = \ddot{v} + g'(p)v = 0 \qquad (1.9)$$

tem dimensão 1.

Isto decorre de que um sistema fundamental de soluções de (1.9) é dada por $\dot{p} = [\partial\emptyset(\omega(a)(.+\alpha),a)\,|\,\partial t]\Big|_{\substack{a=a_o \\ \alpha=0}}$ e $[\partial\emptyset(\omega(a)(.+\alpha),a)\,|\,\partial a]\Big|_{\substack{a=a_o \\ \alpha=0}}$ sendo que a primeira solução é 2π-periódica e a segunda não limitada devido a hipótese (H_1).

Mostremos que $\dot{p}$ é solução de (1.9).

De fato:

$$\ddot{\dot{p}} + g'(p)\dot{p} = [\ddot{p} + g(p)]^{\cdot} = 0$$

onde $\ddot{p} + g(p) = 0$, pois p é solução de (1.1).

Agora mostremos que $\frac{\partial \phi}{\partial a}\ (a = a_o,\ \alpha = 0)$ é solução de (1.9).

De fato, como $g \in C^k$ temos $\phi \in C^{k+1}$. Portanto podemos escrever:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)^{\cdot\cdot} = \frac{\partial \ddot{\phi}}{\partial a}$$

e, como para $a = 0$, $\alpha = 0$, temos que $p = \phi$, segue que:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial a}\right)^{\cdot\cdot} + g'(\phi)\ \frac{\partial \phi}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}[\ddot{\phi} + g(\phi)]\Big|_{\substack{a=a_o \\ \alpha=0}} = 0$$

onde $\ddot{\phi} + g(\phi) = 0$, pois ϕ é solução de (1.1).

Ainda $\frac{\partial \phi}{\partial a}\ (a = a_o,\ \alpha = 0)$ não é limitada, pela hipótese (H_1).

De fato:

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial a}(\omega(a)(t+\alpha), a)\right]\Big|_{\substack{a=a_o \\ \alpha=0}} = \frac{\partial \phi}{\partial \theta}(t, a_o).t.\omega'(a_o) + \frac{\partial \phi}{\partial a}(t, a_o)$$

Portanto, o termo $t.\omega'(a_o) \to \infty$ quando $t \to \infty$.

Logo, as soluções de (1.9) são múltiplas de $\dot{p}$, caso este em que C é chamada não degenerada.

Definimos em Z a projeção P dada por:

$$P\phi = \dot{p} \int_0^{2\pi} \dot{p}\phi \; / \; \eta$$

onde $\eta = \int_0^{2\pi} \dot{p}^2$.

Dessa forma, $X_p = N(L)$, onde $N(L)$ é o espaço das soluções 2π-periódicas da equação (1.9).

Afirmamos que para cada $\phi \in Z$ a equação $Lv = \phi$ tem solução em Z, se, e somente se, $P\phi = 0$.

Vamos demonstrar este fato utilizando o seguinte resultado:

- Alternativa de Fredholm: "Seja A e f pertencente a Z, então a equação $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ tem uma solução em Z, se e somente se,

$$\int_0^{2\pi} y(t) f(t) dt = 0$$

para toda solução y da equação adjunta

$$\dot{y} = - yA(t)"$$

Para uma prova ver Hale [2, p. 146]

Seja o sistema bidimensional associado a equação (1.9).

$$\dot{v} = u$$

$$\dot{u} = - g'(p)v$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(p) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$$

Como dim $N(L) = 1$, segue-se que toda solução do sistema acima em Z é múltipla de $\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix}$

Procuremos soluções da adjunta $\dot{y} = -yA$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g'(p) & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema associado a $\dot{y} = -yA$ é:

$$\begin{bmatrix} \dot{r} & \dot{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ g'(p) & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, toda solução de $\dot{y} = -yA$ em Z é múltipla de $\begin{bmatrix} -\ddot{p} & -\dot{p} \end{bmatrix}$ isto é, toda solução do tipo $k\begin{bmatrix} -\ddot{p} & -\dot{p} \end{bmatrix}$, $k \in R$.

Logo, de acordo com a Alternativa de Fredholm, para que $Lv = \emptyset$ tenha solução 2π-periódica é necessário e suficiente que:

$$\int_0^{2\pi} k \begin{bmatrix} -\ddot{p} & -\dot{p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \emptyset \end{bmatrix} = 0$$

o que é equivalente a:

$$\int_0^{2\pi} \dot{p}\emptyset = 0, \quad \text{ou seja,} \quad P\emptyset = 0.$$

Da afirmação acima decorre que $Z_{I-P} = R(L)$.

Seja $N : X \to Z$; $Nz = -\lambda_1 \dot{z} - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 f_\alpha + G(.,z)$

Portanto podemos escrever (1.8) como:

$$Lz = N(z,\lambda_1,\lambda_2,\alpha) \tag{1.10}$$

Ainda $R(L)$ é um subespaço fechado de Z e $(I-P)X$ é subespaço fechado de X.

De fato, mostraremos que $R(L) \subset Z$ como subespaço fechado.

Vamos mostrar que $R(L) = f^{-1}\{0\}$, onde f é uma função contínua.

Pela Alternativa de Fredholm, dado $\emptyset \in Z$ a equação $Lv = \emptyset$ tem solução em Z, se, e somente se, $P\emptyset = 0$.

Portanto, definimos f de Z em R por $f\emptyset = \int \dot{p}\emptyset$.

Temos que f é linear e contínua.

De fato, seja $\emptyset n \in Z$, tal que, $\emptyset n \to 0$, com $n \to \infty$.

Portanto $\int \dot{p}\emptyset n \to 0$, com $n \to \infty$.

Logo, $R(L)$ é subespaço fechado de Z.

Mostremos que $(I-P)X$ é subespaço fechado de X.

De fato, temos que P definida na p.19 é contínua em relação a norma C^2.

Agora, seja $v_n \in (I-P)X$, tal que, $v_n \to v$, com $n \to \infty$.

Logo, $Pv_n = 0$ e $Pv_n \to Pv$, com $n \to \infty$.

Portanto, $Pv = 0$, ou seja, $v \in (I-P)X$, o que implica que $(I-P)X$ é subespaço fechado de X.

A restrição de L a $(I-P)X$ é uma bijeção sobre $R(L)$, portanto L tem um operador inverso à direita limitado, $K : R(L) \to (I-P)X$.

Este fato decorre do seguinte corolário do teorema da aplicação aberta:

"Seja f uma aplicação linear, biunívoca e contínua de um espaço de Banach E sobre um espaço de Banach F, então f é bicontínua, isto é, f^{-1} é também contínua".

Para uma prova em Hönig [5, p. 245].

Com as considerações acima, estamos em condição de aplicar o método de Liapunov-Schmidt.

Portanto, a equação (1.10) é equivalente ao sistema:

$$z = k(I-P)[-\lambda_1 \dot{z} - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 f_\alpha + G(.,z)]$$

$$P[-\lambda_1 \dot{z} - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 f_\alpha + G(.,z)] = 0.$$

Definamos:

$$J(z,\lambda_1,\lambda_2,\alpha) = z - k(I-P)[-\lambda_1 \dot{z} - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 f_\alpha + G(.,z)] \tag{1.11}$$

Portanto temos:

$$J(0,0,0,\alpha) = 0$$

$$D_z J(0,0,0,\alpha) = I$$

onde D_z indica a derivada parcial em relação a z e I é o operador identidade em $(I-P)X$.

Pelo Teorema das Funções Implícitas existe uma vizinhança U_α de cada ponto $(0,0,\alpha)$ com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, e uma única função $z^*_\alpha : U_\alpha \to (I-P)X$, tal que, (1.11) está satisfeita para $z = z^*_\alpha(\lambda,\alpha)$ em U_α e $z^*_\alpha(0,\alpha) = 0$, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Usando a compacidade do segmento S, $S = \{(0,0,\alpha), 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$, obtemos uma subcobertura finita de S por U_α e pela unicidade das funções z^*_α em cada vizinhança U_α, $\exists\, \delta > 0$, independente de α e uma única função z^* de $U = \{(\lambda_1,\lambda_2,\alpha); |\lambda_1|, |\lambda_2| < \delta, 0 \leq \alpha \leq 2\pi\}$ em $(I-P)X$, tal que, (1.11) está satisfeita com $z = z^*(\lambda,\alpha)$ em U e $z^*(0,\alpha) = 0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Portanto,a equação (1.10) tem solução se, e somente se, $z = z^*(\lambda,\alpha)$ e (λ,α) satisfaz à equação de bifurcação:

$$P[-\lambda_1 \dot{z} - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 f_\alpha + G(.,z)] = 0 \qquad (1.12)$$

Definamos:

$$F(\alpha,\lambda) = \int_0^{2\pi} \dot{p}[-\lambda_1 \dot{z}^* - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 f_\alpha + G(.,z^*)] / \eta = 0 \qquad (1.13)$$

Portanto,a equação (1.10) tem solução se, e somente se, (λ,α) satisfaz (1.13), onde $\eta = \int_0^{2\pi} \dot{p}^2$.

Ainda temos:

$$F(\alpha,0) = 0$$

$$F(\alpha,\lambda) = -\lambda_1 + h(\alpha)\lambda_2 + t.o.s \qquad (1.14)$$

onde a abreviação t.o.s indica termos de ordem $0(|\lambda|^2)$ quando $|\lambda| \to 0$ e $h(\alpha) = \int_0^{2\pi} \dot{p} f(.-\alpha) / \eta$.

O problema ficou reduzido ao estudo das soluções $(\lambda_1,\lambda_2,\alpha)$ da equação:

$$\lambda_1 = h(\alpha)\lambda_2 + t.o.s \qquad (1.15)$$

com (λ_1,λ_2) numa vizinhança suficientemente pequena de $(0,0)$, $\alpha \in [0,2\pi]$.

Afirmamos que toda solução de (1.15) satisfaz a seguinte estimativa a priori:

$$|\lambda_1| \leq c\,|\lambda_2|;\ c \in R \tag{1.16}$$

em alguma vizinhança de $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$, $\alpha \in [0,2\pi]$.

De fato, suponhamos por absurdo que tal não ocorra. Então existe uma sequência $(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\alpha^n)$, $n = 1,2,\ldots$, de (1.15), tal que, $(\lambda_1^n,\lambda_2^n) \to (0,0)$ e $\dfrac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Substituindo em (1.15) e dividindo por λ_1^n, $n = 1,2,\ldots$, obtemos:

$$1 = h(\alpha^n)\,\frac{\lambda_2^n}{\lambda_1^n} + A(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\alpha^n) \tag{1.17}$$

onde $A(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\alpha^n) \to 0$, quando $n \to \infty$.

Observando que o segundo membro de (1.17) tende a zero quando $n \to \infty$, temos uma contradição.

A estimativa encontrada em (1.16) mostra que as soluções de (1.15) são tais que o par $(\lambda_1^o,\lambda_2^o)$ permanece em setores do plano (λ_1,λ_2) como mostra a figura da p. seguinte.

Podemos então procurar soluções sobre as retas $\lambda_1 = \beta\lambda_2$, $\beta \in R$, pois ao fazer β percorrer um conveniente sub-conjunto compacto de R a reta acima percorre toda região que é permissível a $(\lambda_1^o,\lambda_2^o)$ pertencer, quando $(\lambda_1^o,\lambda_2^o,\alpha^o)$ é solução de (1.15).

Façamos $\lambda_1 = \beta\lambda_2$, $\beta \in R$ em (1.15).

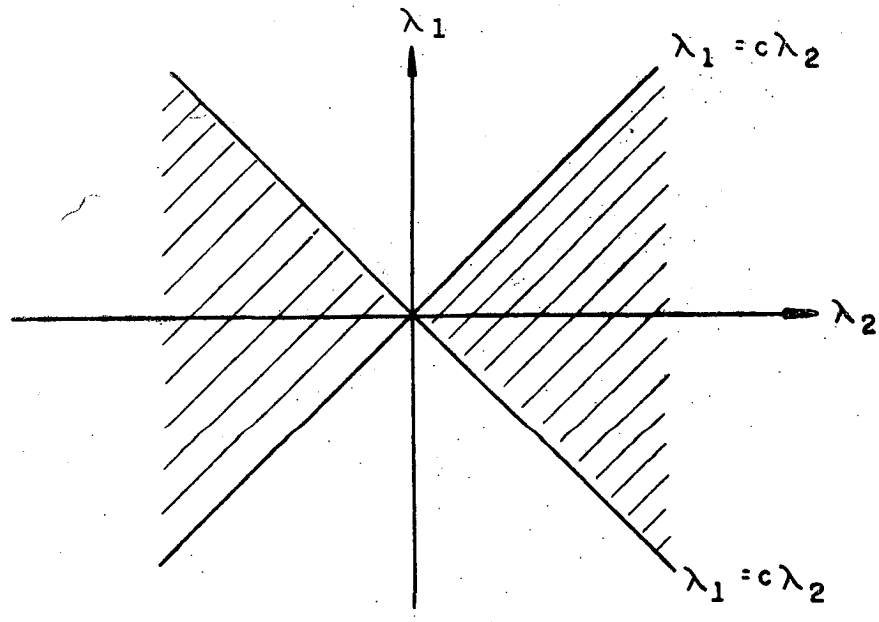
Obtemos:

$$h(\alpha)\lambda_2 - \beta\lambda_2 + Q(\alpha,\beta\lambda_2,\lambda_2) = 0$$

Portanto:

$$h(\alpha) - \beta + Q(\alpha,\beta,\beta\lambda_2,\lambda_2) = 0 \qquad (1.18)$$

onde $Q(\alpha,\beta,\beta\lambda_2,\lambda_2)$ é suficientemente suave de acordo com as condições assumidas para g e $Q(\alpha,\beta,0) = 0$.



3.1.3 PROVA DO TEOREMA

A prova do teorema recai na análise da equação de bifurcação (1.18).

Definamos:

$$H(\alpha,\beta,\lambda_2) = h(\alpha) - \beta + Q(\alpha,\beta,\beta\lambda_2,\lambda_2) = 0 \qquad (1.19)$$

Portanto, encontrar todas as soluções de (1.15) numa vizinhança de $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$ é equivalente a encontrar todas as soluções da equação (1.19), qualquer $\alpha, \beta \in R$, λ_2 numa vizinhança de zero.

Para $\lambda_2 = 0$ as soluções da equação (1.19) não correspondem a solução 2π-periódica de (1.3), como já foi observado na página 10. Entretanto, como buscamos as soluções com $|\lambda_2|$ pequeno, vamos estudar a equação (1.19) para (α,β,λ_2) próximo de soluções da forma $(\alpha_o,\beta_o,0)$. Neste caso os únicos valores α_o,β_o possíveis são os que satisfazem $\beta_o = h(\alpha_o)$.

Temos:

$$\begin{aligned} &H(\alpha_o,\beta_o,0) = 0 \\ &D_\alpha H(\alpha_o,\beta_o,0) = h'(\alpha_o) \end{aligned} \qquad (1.20)$$

Portanto, se α_o é tal que $h'(\alpha_o) \neq 0$, pelo teorema das Funções Implícitas existe um $\delta(\alpha_o,\beta_o) > 0$ e uma única função $\alpha^*(\beta,\lambda_2)$, $|\beta-\beta_o|, |\lambda_2| < \delta(\alpha_o,\beta_o)$, tal que, $\alpha^*(\beta_o,0) = \alpha_o$

e $H(\alpha^*(\beta,\lambda_2), \beta,\lambda_2) = 0$. Daí se conclui que o número de soluções de (1.19) é constante quando α varia numa vizinhança de um ponto α_o com $h'(\alpha_o) \neq 0$, ou seja, quando β_o não for um valor crítico de h, podemos garantir que não ocorre bifurcação.

Assim implica que se α_o for tal que $h'(\alpha_o) \neq 0$, existe uma única solução de (1.3) com fase próxima de α_o cuja órbita está em U, desde que $|\lambda_1|, |\lambda_2|$ sejam pequenos e a razão $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ esteja próxima de β_o.

Dizemos que a fase de uma $(x,\dot{x})$ solução 2π-periódica, com órbita em U, tem fase próxima de α_o se o seu valor inicial $(x(0),\dot{x}(0))$ for aproximadamente $(p(\alpha_o),\dot{p}(\alpha_o))$.

Agora, se α_o é tal que $h'(\alpha_o) = 0$, pela hipótese (H_2), $h''(\alpha_o) \neq 0$. Portanto, aplicando o teorema das Funções Implícitas para $D_\alpha H$, existe um $\delta_1(\alpha_o,\beta_o) > 0$ e uma única função $\alpha^*(\beta,\lambda_2)$, $|\beta-\beta_o|, |\lambda_2| < \delta_1(\alpha_o,\beta_o)$, tal que, $\alpha^*(\beta_o,0) = \alpha_o$ e $D_\alpha H(\alpha^*(\beta,\lambda_2), \beta,\lambda_2) = 0$.

Definamos:

$$M(\beta,\lambda_2) = H(\alpha^*(\beta,\lambda_2), \beta,\lambda_2) \tag{1.21}$$

Portanto, (1.21) é um valor de máximo ou de mínimo de $H(\alpha,\beta,\lambda_2)$ relativamente a α para cada (β,λ_2).

Temos:

$$\begin{aligned} &M(\beta_o,0) = 0 \\ &D_\beta M(\beta_o,0) = -1 \end{aligned} \tag{1.22}$$

Portanto, o teorema das Funções Implícitas implica que existe $\delta_2(\beta_o) > 0$ e uma única função $\beta^*(\lambda_2)$, $|\lambda_2| < \delta_2(\beta_o)$, tal que, $\beta^*(0) = \beta_o$ e $M(\beta^*(\lambda_2),\lambda_2) = 0$.

Suponhamos que $h''(\alpha_o) > 0$.

Por continuidade, $h''(\alpha^*(\beta,\lambda_2)) > 0$ e $M(\beta,\lambda_2) = H(\alpha^*(\beta,\lambda_2),\beta,\lambda_2)$ é um valor de mínimo de $H(\alpha,\beta,\lambda_2)$ relativamente a α, para cada (β,λ_2).

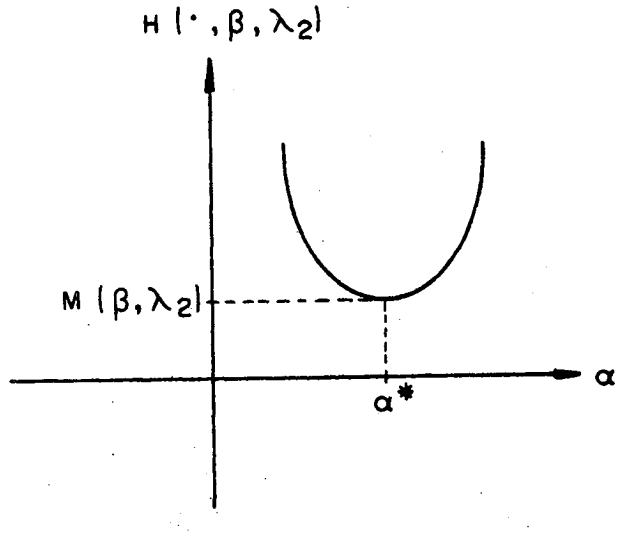
Por (1.22) e o teorema das Funções Implícitas temos uma curva $\beta = \beta^*(\lambda_2)$ no plano (β,λ_2), tal que, tomando-se $(\bar{\beta},\bar{\lambda}_2)$ sobre ela o valor de mínimo da função $H(.,\beta,\lambda_2)$ é nulo.

Por continuidade, $D_\beta M(\beta^*(\lambda_2),\lambda_2) < 0$, para $|\lambda_2|$ suficientemente pequeno.

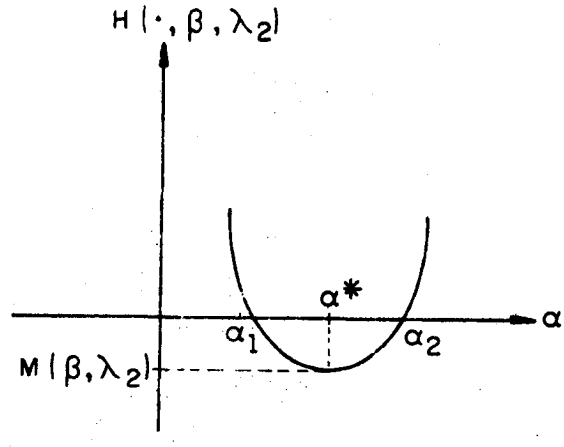
Assim, para $\beta < \beta^*(\lambda_2)$, temos $M(\beta,\lambda_2) > 0$; e para $\beta > \beta^*(\lambda_2)$, temos $M(\beta,\lambda_2) < 0$.

Veja as figuras a seguir.

CASO ① : $\beta < \beta^*(\lambda_2)$



CASO ②: $\beta > \beta^*(\lambda_2)$



No caso (1), não há solução de (1.19) com fase próxima de α_o e no caso (2), temos duas soluções de (1.19) com fases α_1 e α_2, próximos de α_o.

Analogamente para $h''(\alpha_o) < 0$.

Portanto, existem duas soluções de (1.19) com fase próxima de α_o sobre um lado da curva $\beta = \beta^*(\lambda_2)$ e nenhuma solução do outro lado.

Em termos das coordenadas originais $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, isto implica que existem duas soluções de (1.19) com fase próxima de α_o sobre um lado da curva $\lambda_1 = \beta^*(\lambda_2)\lambda_2$ e nenhuma do outro lado.

A curva $\lambda_1 = \beta^*(\lambda_2)\lambda_2$ é uma curva de bifurcação e é tangente a reta $\lambda_1 = \beta_o\lambda_2$ em $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = (0,0)$.

A análise acima pode ser aplicada a cada ponto α_1, α_2 da hipótese (H_2).

Podemos escolher um $\delta > 0$, tal que, qualquer solução

de (1.19) para $|\alpha-\alpha_j| < \delta$, $j = 1,2$, $|\lambda| < \delta$ são obtidas com o argumento acima.

O complemento da região $|\alpha-\alpha_j| < \delta$, $j = 1,2$, em $[0,2\pi]$ é compacto e $h'(\alpha) \neq 0$ neste conjunto. Assim um número finito de aplicações do teorema das Funções Implícitas mostra que nenhuma bifurcação adicional tem lugar para $|\lambda_1|, |\lambda_2| < \delta$.

Portanto, isto mostra que graficamente o teorema acima estabelece que o diagrama da bifurcação é dado na figura da página 13.

3.1.4 FORMA GERAL DO TEOREMA

Conservando-se as mesmas notações de (3.1). Consideremos as seguintes hipóteses:

(H_1') $\omega(a_o) = 1$, $\omega'(a_o) \neq 0$

Logo, se considerarmos p como a solução de amplitude de a_o, com fase $\alpha = 0$, temos:

$$p(t) = \phi(t,a_o),\ p(0) = a_o$$

(H_2') A função h dada por:

$$h(\alpha) = \int_o^{2\pi} \dot{p}(t) f(t-\alpha)dt \ / \int_o^{2\pi} \dot{p}^2(t)dt$$

tem um número finito de valores extremos α_j, $j = 1,\ldots,n$; $\alpha_j \in [0,2\pi)$ com $h''(\alpha_j) \neq 0$.

(H_3') $h(\alpha_j) \neq h(\alpha_k)$, $j \neq k$

Nestas condições o teorema 3.1.1 pode ser estabelecido numa forma mais geral:

Teorema: Suponhamos satisfeitas as hipóteses acima: (H_1'), (H_2'), (H_3'). Então existem vizinhanças U da órbita C, V de $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$ e curvas C_j, $j = 1,\ldots,n$; $C_j \subset V$ definidas por $\lambda_1 = c_j(\lambda_2)$, $j = 1,\ldots,n$; com c_j continuamente diferenciáveis em λ_2 e tangentes, respectivamente, às retas

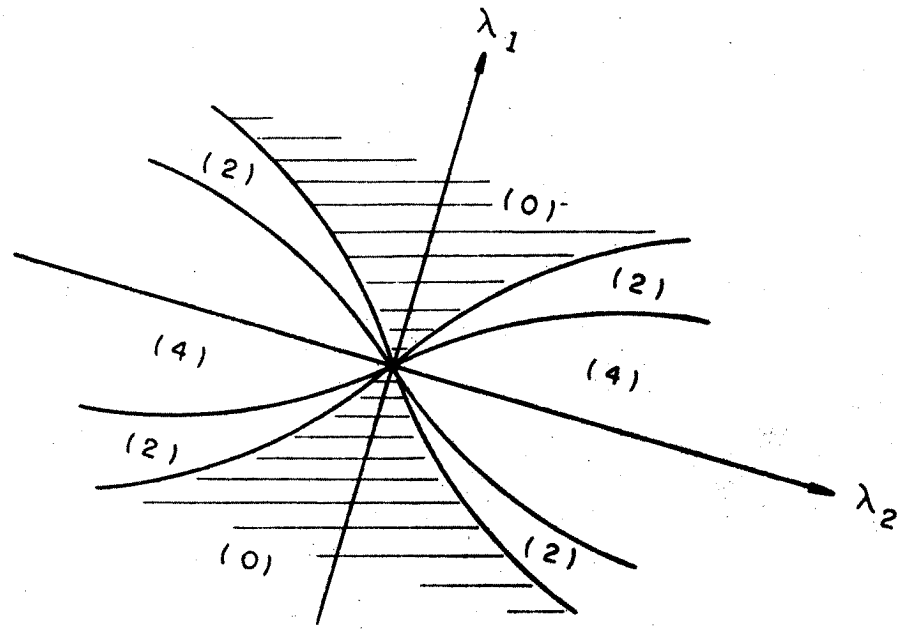
$\lambda_1 = h(\alpha_j)\lambda_2$, $j = 1,\ldots,n$; no ponto $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$.

Ainda, C_j definem setores em V, tais que, para (λ_1,λ_2) pertencentes aos setores contendo o eixo $\lambda_2 = 0$ a equação (1.3) não possui solução 2π-periódica ao passar (λ_1,λ_2) por uma das curvas C_j acima o número de soluções 2π-periódicas da equação (1.3) varia de dois.

Com algumas adaptações a prova do teorema acima é análoga a do teorema (3.1.1).

Uma observação importante é que a hipótese (H_3') tem por objetivo simplificar a análise do problema, isto é, (H_3') pode ser omitida em troca de algumas discussões laterais. Mais precisamente, a ocorrência de α_j,α_k tais que $h(\alpha_j) = h(\alpha_k)$, $j \neq k$, implica na existência de duas curvas de bifurcação, C_j e C_k tangentes a mesma reta $\lambda_1 = h(\alpha_j)\lambda_2$ no ponto $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$. Essas curvas podem eventualmente coincidir em V.

Se $h(\alpha)$ tem dois pontos de mínimo e dois pontos de máximo, então existem quatro curvas de bifurcação e a figura a seguir é bastante ilustrativa com relação ao diagrama de bifurcação.



O índice (n) indica o número de soluções 2π-periódicas de (1.3).

3.1.5 *COMPORTAMENTO LIMITE DAS SOLUÇÕES*

Neste parágrafo estudaremos o comportamento das soluções de (1.3) com relação à família de soluções $p(.+\alpha)$, $0 \leq \leq 2\pi$, de (1.1) quando os parâmetros tendem a zero.

Para tanto, necessitamos do Teorema de Ascoli-Arzelá na formulação dada a seguir:

"Seja $D \subset R^n$ compacto e $C(D,R^n)$ o espaço das funções contínuas $\phi : D \to R^n$, com a topologia uniforme. Se $\phi_j \in \in C(D,R^n)$, $j = 1,2,...,$ tal que, (ϕ_j) uniformemente limitada e equicontínua então existe subseqüência convergente de (ϕ_j); em outras palavras, se $A \subset C(D,R^n)$ equicontínuo e limitado, então A é relativamente compacto".

Teorema: Suponhamos que as hipóteses (H_1) e (H_2) estejam satisfeitas com $f \in C^1$, que $V \subset R^2$ vizinhança de $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$, U vizinhança da órbita C sejam as mesmas do teorema (3.1.1), e consideremos uma curva contínua γ, contida num setor de V onde existam soluções 2π-periódicas de (1.3), parametrizada por $\lambda_1 = \lambda_1(\beta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\beta)$, $0 \leq \beta \leq 1$, de modo que $\lambda_1^2(\beta) + \lambda_2^2(\beta) = 0$ se, e somente se, $\beta = 0$.

Suponhamos também que a cada ponto $(\lambda_1(\beta),\lambda_2(\beta)) \subset \gamma$, $0 \leq \beta \leq 1$, corresponda uma solução $x(t,\beta) \in U$ da equação (1.3) a qual dependa continuamente de β no intervalo $(0,1]$.

Então o conjunto $S(\gamma) = \{x(.,\beta),\ 0 < \beta \leq 1\} \subset X$ é relativamente compacto e todo ponto limite com $\beta \to 0$ é uma solução 2π-periódica de (1.1)

Além disso se definirmos:

$$h_m(\gamma) = \lim_{\beta \to 0} \inf \frac{\lambda_1(\beta)}{\lambda_2(\beta)}$$

$$h_M(\gamma) = \lim_{\beta \to 0} \sup \frac{\lambda_1(\beta)}{\lambda_2(\beta)}$$

então existe um intervalo $I(\gamma) \subset [0,2\pi]$, tal que $h(I(\gamma)) = [h_m(\gamma), h_M(\gamma)]$ e $\overline{S(\gamma)} - S(\gamma) = \{p(.+\alpha) \in X;\ \alpha \in I(\gamma)\}$

Prova: Como $x(t,\beta) \in U$, $t \in R$, $0 < \beta \leq 1$, segue-se da definição da vizinhança U, dada em 3.1.2 que existem limitantes para $x(.,\beta)$, $\dot{x}(.,\beta)$, uniformes em β, com $\beta \in (0,1]$.

Além disso temos para cada $\beta \in (0,1]$:

$$\ddot{x}(t,\beta) = -g(x(t,\beta)) - \lambda_1(\beta)\dot{x}(t,\beta) - \lambda_2(\beta)f(t) \quad (1.23)$$

Da limitação do segundo membro da equação (1.23) uniforme com respeito a $\beta \in (0,1]$, podemos garantir que $\ddot{x}(.,\beta)$ é uniformemente limitada.

Assim, $x(.,\beta)$ é limitada na norma C^2.

Ainda, observando que $\frac{dg}{dx}(\xi)$ é limitada, quando $|\xi| \leq k$, decorre de (1.23) que $\ddot{x}(.,\beta)$, $0 < \beta \leq 1$ é limitada.

Deste modo, as famílias das soluções $x(.,\beta)$, suas derivadas primeiras $\dot{x}(.,\beta)$ e suas derivadas segundas $\ddot{x}(.,\beta)$, $0 < \beta \leq 1$, além de uniformemente limitadas, são também, via Teorema da Média, equicontínuas.

Portanto, para que $S(\gamma) = \{x(.,\beta),\ 0 < \beta \leq 1\} \subset X$

seja relativamente compacto na norma C^2, é suficiente-mente mostrar que $S(\gamma)$, $\dot{S}(\gamma) = \{\dot{x}(.,\beta),\ 0 < \beta \leq 1\}$, $\ddot{S}(\gamma) = \{\ddot{x}(.,\beta),\ 0 < \beta \leq 1\}$ são relativamente compactos na norma do supremo.

Mas isto é conseqüência direta do Teorema de Ascoli-Arzelá. Logo $S(\gamma)$ é relativamente compacto na norma C^2.

Provemos que todo ponto limite com $\beta \to 0$ é uma solução 2π-periódica de (1.1).

De fato, o sistema bidimensional associado a (1.23) é:

$$\dot{x}(t,\beta) = y(t,\beta)$$

$$\dot{y}(t,\beta) = -g(x(t,\beta)) - \lambda_2(\beta)\dot{x}(t,\beta) + \lambda_2(\beta)f(t)$$

Portanto, a equação integral de (1.23) é:

$$\begin{bmatrix} x(t,\beta) \\ y(t,\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0,\beta) \\ y(0,\beta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t y(s,\beta)ds \\ \int_0^t [-g(x(s,\beta)-\lambda_1(\beta)y(t,\beta)+\lambda_2(\beta)f(s)]ds \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

Seja (β_n) tal que $\beta_n \to 0$ com $n \to \infty$.

Logo, fazendo $\beta = \beta_n$ em (1.24) e calculando o limite para $n \to \infty$, temos:

$$\begin{bmatrix} x(t,0) \\ y(t,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0,0) \\ y(0,0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t y(s,0)ds \\ \int_0^t -g(x(s,0))ds \end{bmatrix}$$

Para provarmos a segunda parte do teorema notemos que:

$$S(\gamma,\beta_o) = \{x(.,\beta) \in X, \quad 0 < \beta \leq \beta_o\}$$

pertence a vizinhança U de C, se β_o é suficientemente pequeno.

Portanto, se β_o é suficientemente pequeno, existem funções contínuas $\alpha(\beta)$, $z(t+\alpha(\beta),\beta)$, de modo que:

$$x(t,\beta) = p(t+\alpha(\beta)) + z(t+\alpha(\beta),\beta) \tag{1.25}$$

onde $z(t+\alpha(\beta),\beta) = z^*(\alpha(\beta),\lambda_1(\beta),\lambda_2(\beta))$ é uma solução de (1.11) .

Ainda, a equação de bifurcação toma a forma:

$$h(\alpha(\beta)) - \frac{\lambda_1(\beta)}{\lambda_2(\beta)} + Q(\alpha(\beta), \frac{\lambda_1(\beta)}{\lambda_2(\beta)},\lambda_1(\beta),\lambda_2(\beta)) = 0 \tag{1.26}$$

Seja (β_n), $\beta_n \to 0$ e $\frac{\lambda_1(\beta_n)}{\lambda_2(\beta_n)} \to h_m(\gamma)$.

Se necessário tomo subseqüência para garantir que $\alpha(\beta_n)$ converge.

Assim, se $\alpha(\beta_n) \to \alpha_m$, temos que:

$$h(\alpha_m) = \lim_{n\to\infty} h(\alpha(\beta_n))$$

Logo, fazendo $\beta = \beta_n$ em (1.26) e calculando o limite para $n \to \infty$, temos:

$$h(\alpha_m) = h_m(\gamma) \tag{1.27}$$

Analogamente prova-se que existe α_M, tal que:

$$h(\alpha_M) = h_M(\gamma)$$

Definamos:

$$\hat{I}(\gamma) = h^{-1}([h_m(\gamma), h_M(\gamma)])$$

De acordo com a hipótese (H_2), $\hat{I}(\gamma)$ é um intervalo fechado ou a união de dois intervalos fechados de $[0,2\pi)$ [com a topologia introduzida anteriormente, p. 14.

Definamos:

$$\alpha((0,\beta_o]) = \{\alpha \in [0,2\pi);\ \exists\ \beta \in (0,\beta_o];\ \alpha = \alpha(\beta)\}$$

De (1.26) temos que dado $\varepsilon > 0, h(\alpha(\beta)) \subset [h_m(\gamma) - \varepsilon, h_M(\gamma) + \varepsilon]$ para $\beta \in (0,\beta_o]$, com β_o suficientemente pequeno.

Então:

$$\alpha((0,\beta_o]) \subset h^{-1}([h_m(\gamma) - \varepsilon,\ h_M(\gamma) + \varepsilon]) \qquad (1.28)$$

Ainda, tomando ε suficientemente pequeno, posso garantir que $h^{-1}([h_m(\gamma) - \varepsilon, h_M(\gamma) + \varepsilon])$ tem o mesmo número de componentes conexas que $\hat{I}(\gamma)$ e cada uma dessas componentes contém precisamente uma componente conexa de $\hat{I}(\gamma)$.

Como $\alpha((0,\beta_o])$ é conexo, segue-se de (1.28) que $\alpha((0,\beta_o]) \cap \hat{I}(\gamma)$ é um intervalo.

Definamos:

$$\alpha(0,\beta_o]) \cap \hat{I}(\gamma) = I(\gamma)$$

Pela própria construção, temos que:

$$h(I(\gamma)) \subset [h_m(\gamma),\ h_M(\gamma)] \tag{1.29}$$

Seja $\eta \in [h_m(\gamma),\ h_M(\gamma)]$. Logo existe (β_n), $\beta_n \to 0$ e $\dfrac{\lambda_1(\beta_n)}{\lambda_2(\beta_n)} \to \eta$. Por um raciocínio análogo ao desenvolvido em (1.27) temos que $\eta = h(\alpha_o)$ para $\alpha_o \in I(\gamma)$, isto é, $\eta \in h(I(\gamma))$.

Portanto, $[h_m(\gamma),\ h_M(\gamma)] \subset h(I(\gamma))$. E usando (1.29) temos:

$$h(I(\gamma)) = [h_m(\gamma),\ h_M(\gamma)]$$

Ainda, fazendo $\beta = \beta_n$ em (1.25) e calculando o limite para $n \to \infty$, temos:

$$x(t,\beta_n) - p(t+\alpha_o) \to 0.$$

Pelas definições de α_m e α_M, se $\alpha_o \notin I(\gamma)$ então $p(.+\alpha_o)$ não pode ser ponto limite de $S(\gamma)$.

Logo, o conjunto $\overline{S(\gamma)} - S(\gamma)$ é dado pela seguinte expressão:

$$\overline{S(\gamma)} - S(\gamma) = \{p(.+\alpha) \in X;\ \alpha \in I(\gamma)\}.$$

Corolário: Se γ, $x(.,\beta)$ satisfazem as condições do teorema acima, então uma condição necessária e suficiente para que $x(.,\beta)$ seja contínua em $\beta = 0$ é que $\lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{\lambda_1(\beta)}{\lambda_2(\beta)} = h_o$ exista.

Neste caso, $x(.,\beta) \to p(.+\alpha_o)$ onde α_o é tal que, $h(\alpha_o) = h_o$.

Prova: Provemos inicialmente a condição necessária. Como γ está num setor que não contém o eixo dos λ_1, a razão $\lambda_1(\beta)/\lambda_2(\beta)$ é limitada, $0 < \beta \leq 1$. Assim, se não existir o seu limite, quando $\beta \to 0$, podemos considerar dois pontos limites distintos, c_1 e c_2, de $\lambda_1(\beta)/\lambda_2(\beta)$. Portanto, existem duas seqüências (β_n^1), (β_n^2), com $\beta_n^i \to 0$, quando $n \to \infty$, de modo que $\lambda_1(\beta_n^i)/\lambda_2(\beta_n^i) \to c_i$, quando $n \to \infty$, $i = 1,2$.

Agora, se necessário for, tomo subseqüência para garantir que $\alpha(\beta_n^i) \to \alpha_o^i$, $i = 1,2$. Fazendo $\beta = (\beta_n^i)$ em (1.25), $i = 1,2$, temos que $x(t,\beta_n^i) \to p(t,\alpha_o^i)$, $i = 1,2$, isto é, construímos dois pontos - limite distintos de $x(t,\beta)$, quando $\beta \to 0$, contrariando a hipótese. Logo, existe

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\lambda_1(\beta)}{\lambda_2(\beta)} .$$

Para obtermos a suficiência, consideremos uma seqüência (β_n), $\beta_n \to 0$, quando $n \to \infty$. Portanto, $\lambda_1(\beta_n)/\lambda_2(\beta_n) \to h_o$, quando $n \to \infty$. Logo, desenvolvendo raciocínio análogo acima e utilizando novamente a expressão (1.25), temos $x(t,\beta_n) \to p(t+\alpha_o)$. Da arbitrariedade da seqüência β_n, segue-se a tese.

Ainda,

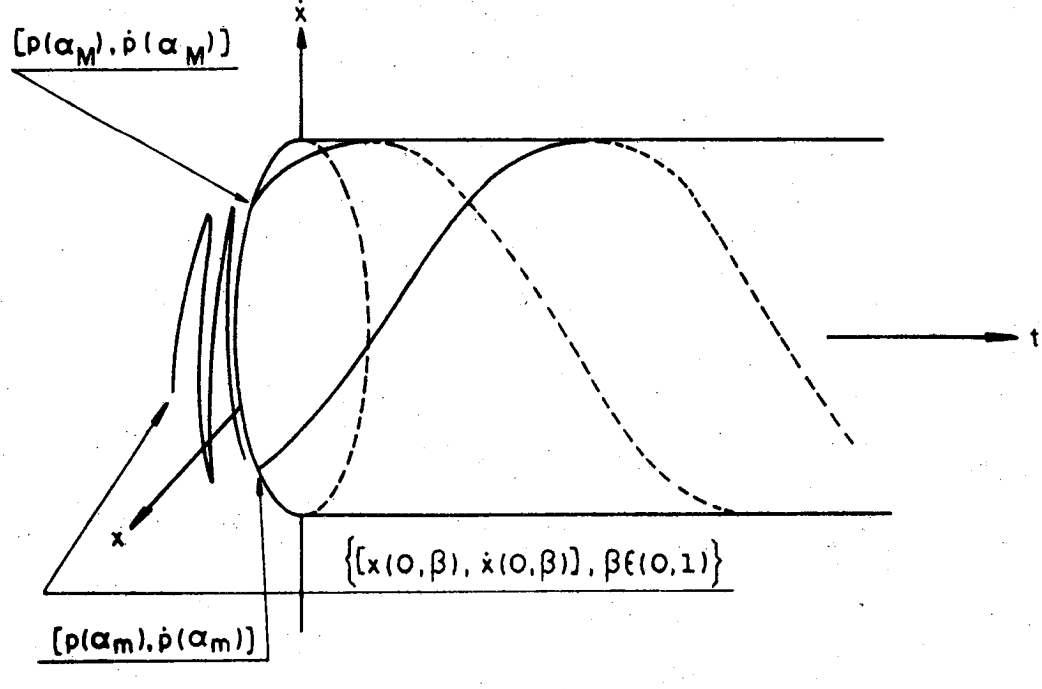
$$h(\alpha_o) = \lim_{n \to \infty} h(\alpha(\beta_n))$$

E utilizando (1.26) temos:

$$h(\alpha_o) = h_o$$

Se a curva γ for escolhida de modo que $\lim_{\beta\to 0} \lambda_1(\beta)/\lambda_2(\beta)$ não exista (e isto sempre pode ser feito), o corolário acima implica que a solução $x(.,\beta)$ não tende a nenhuma solução $p(.+\alpha)$ da equação degenerada, entretanto o teorema anterior assegura que a família das soluções $x(.,\beta)$, $0 < \beta \leq 1$, tende a família das soluções $p(.+\alpha)$, $\alpha \in [0,2\pi)$, na topologia C^2, quando $\beta \to 0$.

Na figura abaixo está representado o cilindro descrito pelos gráficos de $(p(.+\alpha), \dot{p}(.+\alpha))$, quando α percorre o intervalo $[0,2\pi)$. A curva $(x(0,\beta), \dot{x}(0,\beta))$ do plano de fase tende ao arco da órbita C determinado pelos pontos $(p(\alpha_m),\dot{p}(\alpha_m))$ e $(p(\alpha_M),\dot{p}(\alpha_M))$; $h(\alpha_m) = h_m(\gamma)$ e $h(\alpha_M) = h_M(\gamma)$. Nestas condições os gráficos de $(x(.,\beta), \dot{x}(.,\beta))$ em R^3, $0 < \beta \leq 1$, descrevem uma superfície que tende à faixa $\{(p(t+\alpha),\dot{p}(t+\alpha)), t \in R, \alpha_m \leq \alpha \leq \alpha_M\}$, quando $\beta \to 0$.



3.2 CASO SUB-HARMÔNICO

Admitindo a mesma hipótese (H_1) e notações das equações (1.1) e (1.3) do caso Harmônico, um problema que se põe naturalmente é o de saber da existência e número de soluções 4π-periódicas de (1.3) com órbita em U, quando o par (λ_1,λ_2) varia livremente em V, onde U é uma vizinhança da órbita $C = \{(p(t), \dot{p}(t)), t \in R\}$ e V é uma vizinhança de $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$.

Uma solução pode ser encaminhada de forma completamente análoga ao caso Harmônico, como segue.

3.2.1 ENUNCIADO DO TEOREMA

Seja a hipótese

(H_1^*) $\omega(a_o) = 1$, $\omega'(a_o) \neq 0$

Portanto, considerando p como a solução de amplitude a_o, com fase $\alpha = 0$, temos:

$p(t) = \phi(t,a_o)$, $p(0) = a_o$

Agora, consideremos a hipótese:

(H_2^*) A função h dada por:

$$h(\alpha) = \int_o^{4\pi} \dot{p}(t) f(t-\alpha)\,dt \,/ \int_o^{4\pi} \dot{p}^2(t)\,dt$$

têm dois pontos de máximo α_M, α_M' em $[0,4\pi)$ e dois pontos de mínimos α_m, α_m' em $[0,4\pi)$, tais que, $h''(\alpha_M)$, $h''(\alpha_M')$, $h''(\alpha_m)$, $h''(\alpha_m') \neq 0$.

Teorema: Se (H_1^*) e (H_2^*) estão satisfeitas, então existem vizinhanças U da órbita C, V de $(\lambda_1,\lambda_2) = (0,0)$ e curvas C_m, C_m', C_M, $C_M' \subset V$, definidas respectivamente por:

$\lambda_1 = c_m(\lambda_2)$, $\lambda_1 = c_m'(\lambda_2)$

$\lambda_1 = c_M(\lambda_2)$, $\lambda_1 = c_M'(\lambda_2)$

com c_m, c'_m, c_M, c'_M continuamente diferenciáveis em λ_2 e tangentes duas a duas, respectivamente, às retas:

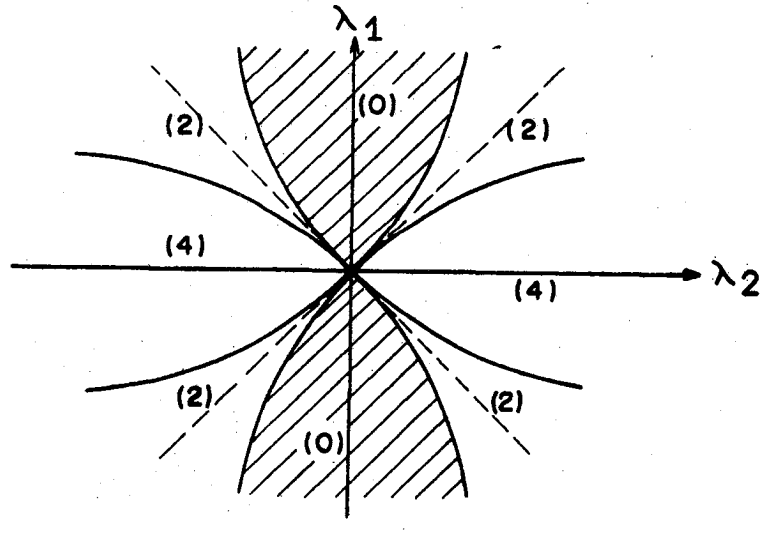
$$\lambda_1 = h(\alpha_m)\lambda_2 = h(\alpha'_m)\lambda_2$$

$$\lambda_1 = h(\alpha_M)\lambda_2 = h(\alpha'_M)\lambda_2$$

no ponto (0,0).

Ainda C_m, C'_m, C_M, C'_M definem setores em V, tais que para (λ_1,λ_2) pertencentes aos setores contendo o eixo $\lambda_2 = 0$ a equação (1.3) não possui solução 4π-periódica e ao passar (λ_1,λ_2) por uma das curvas acima o número de soluções 4π-periódicas da equação (1.3) varia de dois. Este fato sempre ocorre de forma que fique definido um setor do plano para o qual existem 4 soluções 4π-periódicas.

A figura abaixo é bastante ilustrativa com relação a idéia contida no teorema.



O índice (n) indica o número de soluções 4π-periódicas de (1.3).

3.2.2 *EQUAÇÃO DE BIFURCAÇÃO*

O sistema de coordenadas em torno de C é obtido do mesmo modo como em (3.1.2), mas agora procurando soluções da forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t+\alpha) + z(t+\alpha) \\ y(t) &= \dot{p}(t+\alpha) + \dot{z}(t+\alpha) \end{aligned} \tag{2.1}$$

com $\alpha \in [0,4\pi]$.

Seja $P_{4\pi}$ o espaço das funções 4π-periódicas contínuas com a norma do supremo. Definamos:

$$\int_0^{4\pi} \dot{p}^2 = \eta \tag{2.2}$$

e $P : P_{4\pi} \to P_{4\pi}$, projeção contínua, tal que,

$$P\phi = \dot{p} \int_0^{4\pi} \phi\dot{p} \,/\, \eta \tag{2.3}$$

Como em (3.1.2), a hipótese (H_1^*) implica que o espaço das soluções 4π-periódicas de:

$$Lv = \ddot{v} + g'(p)v = 0 \tag{2.4}$$

é gerado por $\dot{p}$.

Portanto para $\phi \in P_{4\pi}$, a alternativa de Fredholm implica que a equação:

$$\ddot{v} + g'(p)v = \phi(t)$$

tem solução 4π-periódica, se, e somente se, $P\phi = 0$.

Logo, a equação de bifurcação se transforma em:

$$F(\alpha,\lambda) = \int_0^{4\pi} \dot{p}[\lambda_1 \dot{z}^*(\alpha,\lambda) - \lambda_1 \dot{p} + \lambda_2 f_\alpha + G(.,z^*(\alpha,\lambda))] \,/\, \eta = 0 \qquad (2.5)$$

Ainda:

$$F(\alpha,0) = 0$$

$$F(\alpha,\lambda) = -\lambda_1 + h(\alpha)\lambda_2 + \text{t.o.s} \qquad (2.6)$$

onde t.o.s indica termos de ordem $0(|\lambda|^2)$ com $|\lambda| \to 0$, 4π-periódico e $h(\alpha) = \int_0^{4\pi} \dot{p} f(.-\alpha) \,/\, \eta$.

Do mesmo modo que (3.1.2) a equação de bifurcação (2.6) é equivalente a:

$$h(\alpha) - \beta + Q(\alpha,\beta,\beta\lambda_2,\lambda_2) = 0$$

onde $\lambda_1 = \beta\lambda_2$, $\beta \in R$, $Q(\alpha,\beta,\beta\lambda_2,\lambda_2)$ é suficientemente suave de acordo com as condições assumidas para g, $Q(\alpha,\beta,0) = 0$ e é 4π-periódica.

3.2.3 PROVA DO TEOREMA

De acordo com (3.1.3) os pontos α_o, tais que, $h'(\alpha_o) \neq 0$ não fornecem bifurcação de soluções.

Suponhamos então (α_o,β_o), tal que, $h(\alpha_o) = \beta_o$ e $h'(\alpha_o) = 0$.

Observando que o integrando de:

$$h(\alpha) = \int_o^{4\pi} \dot{p}f(.-\alpha) \; / \; \eta$$

com $\alpha \in [0,4\pi]$ é 2π-periódico, temos que h também é 2π-periódica.

Portanto em virtude da 2π-periocidade de h, a α_o corresponde $\overline{\alpha_o}$, tal que, $|\alpha_o - \overline{\alpha_o}| = 2\pi$ e $h(\overline{\alpha_o}) = \beta_o$ e $h'(\overline{\alpha_o}) = 0$.

Repetindo o raciocínio da prova do teorema (3.1.1) para cada par (α_o,β_o), $(\overline{\alpha_o},\beta_o)$ obtemos um par de funções $M(\beta,\lambda_2)$ e $\overline{M}(\beta,\lambda_2)$, as quais nos levam de modo completamente análogo a um par de curvas $\beta = \beta^*(\lambda_2)$ e $\overline{\beta} = \overline{\beta}^*(\lambda_2)$ com as mesmas propriedades especificadas em (3.1.3).

Nas coordenadas originais temos, $\lambda_1 = \beta^*(\lambda_2)\lambda_2$ e $\lambda_1 = \overline{\beta}^*(\lambda_2)\lambda_2$, ambas tangentes a reta $\lambda_1 = \beta_o\lambda_2$.

Portanto podemos concluir que quando (λ_1,λ_2) passa pelas vizinhanças da reta $\lambda_1 = \beta_o\lambda_2$, o número de soluções 4π-periódicas de (1.3) muda de quatro.

Qualitativamente o diagrama de bifurcação pode assumir o aspecto da figura da p. 45.

4. BIBLIOGRAFIA

[1] - DICKEY, R.W. - Bifurcation Problems in Nonlinear Elasticity. London, Pitman, 1976.

[2] - HALE, J.K. - Ordinary Differential Equations.2 ed. New York, Krieger, 1980.

[3] - ———— - Generic Bifurcation With Applications. In: KNOPS, R.J. - Nonlinear Analysis and Mechanics. Heriot--Watt Symposium. London, Pitman, 1977. V.1.

[4] - HALE, J.K. & TÁBOAS, P.Z. - Interaction of damping and forcing in a second order equation. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications,2(1):77-84,1978.

[5] - HÖING, C.S. - Análise Funcional e Aplicações. São Paulo, IME-USP, 1970.

[6] - LIMA, E.L. - Variedades Diferenciáveis. Rio de Janeiro, IMPA, 1973.

[7] - LOUD, W. - Branching of solutions of two parameters boundary value problems for order differential equations. Ingenieur Achiv, 45:347-359,1976.

[8] - STAKGOLD, I. - Branching of solutions of nonlinear equations. Siam Review, 13(3):289-332, 1971.

[9] - TÁBOAS, P.Z. - Um Caso de Bifurcação a Partir de Família de Soluções em um Problema de Oscilações Não Lineares. São Carlos, ICMSC-USP, 1979. (Tese Livre-Docência).

[10] - URABE, M. - Nonlinear Autonomous Oscillations. New York, Ac. Press, 1967.