I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ÍNDICE DE UMA VARIEDADE FIBRADA

1
19 i

DIRCEU PENTEADO

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

ÍNDICE DE UMA VARIEDADE FIBRADA

Class. -	T
Cutt. -	P419 i
	e. 1
Tombo -	

DIRCEU PENTEADO

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS, DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE "MESTRE EM MATEMÁTICA".

ORIENTADOR: Prof. Dr. JANEY ANTONIO DACCACH

SÃO CARLOS

1979

ÍNDICE DE UMA VARIEDADE FIBRADA

DIRCEU PENTEADO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. JANEY ANTONIO DACCACH

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Doutor Janey Antonio Daccach pela dedicação da assistência que me foi confiada durante a orientação.

Quero também estender meus agradecimentos aos Professores: Alice K.M. Libardi, Edson de Oliveira e Pedro Luiz Queiroz Pergher, os quais ouviram a exposição deste trabalho contribuindo com valiosas sugestões.

Sou grato ao Departamento de Matemática da UFSCar, ao ICMSC e aos professores da graduação a quem devo o incentivo inicial.

Este trabalho dependeu parcialmente de auxílios das seguintes entidades: CAPES, CNPq, FAPESP e FINEP.

ABSTRACT

The purpose of this work is to prove a generalization of the multiplicative index of a product manifold in the case of a fiber manifold in which the fundamental group of the base space acts trivially on the cohomology ring of the fiber.

In Chapters 1 and 2 we introduce the basic tools: Leary-Serre Theorem, index of a manifold, index of a Poincaré ring and its algebraic properties-

In Chapter 3 we characterize the spectral sequence of the Leary-Serre Theorem and prove the main theorem of this work.

In Chapter 4, we present an application.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

1 - Fibração	1
2 - Ação de $\pi_1(B, b_0)$ no anel de cohomologia $H^*(F)$	3
3 - Sequência Espectral	4
4 - Teorema de Leary-Serre	5

CAPÍTULO II

1 - Índice de uma forma bilinear real simétrica	8
2 - Índice de uma variedade	8
3 - Propriedades Algébricas do índice de uma matriz	9
4 - Índice de uma variedade produto	14
5 - Anéis de Poincaré	17

CAPÍTULO III

1 - Índice de uma variedade fibrada	23
---	----

CAPÍTULO IV

1 - Aplicação	35
---------------------	----

INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é generalizar para fibrados, onde o grupo fundamental da base atua trivialmente no anel de cohomologia da fibra, o seguinte resultado: "Se M e N são variedades compactas sem bordos, então o índice de $M \times N$ é o produto do índice de M pelo índice de N , ou seja: $I(M \times N) = I(M) \cdot I(N)$ ".

Na aplicação do teorema principal usamos o teorema 2.8, o qual caracteriza o índice de uma variedade como um invariante da classe de cobordismo. Sob este aspecto o teorema 3.7 estabelece condição necessária para que dada uma variedade fibrada E com espaço base B e fibra F seja cobordante com a variedade $B \times F$.

Para a demonstração do nosso objetivo, seguimos as linhas contidas no artigo: "On the Index of Fibered Manifold" - CHERN SS, HIRZEBRUCH and SERRE J.P., apresentando-o em quatro partes.

No capítulo I colocamos o teorema de Leary-Serre o qual nos garante a existência de uma sequência espectral, ferramenta básica para a demonstração do teorema 3.7.

No capítulo II, introduzimos o índice de uma variedade procurando caracterizá-lo através da matriz que o define. Isto permitiu demonstrar o índice multiplicativo de uma variedade produto de modo mais simples.

Ainda neste capítulo definimos o índice num anel de Poincaré e o anel derivado de um anel de Poincaré relacionando-os em termos de índices com o Lema 2.14.

No capítulo III, apresentamos inicialmente alguns resultados da sequência espectral garantido pelo Teorema de Leary-Serre e por fim o teorema 3.7 relacionando o índice de uma variedade fibrada em termos dos índices da base e da fibra.

No capítulo IV, finalizamos este trabalho com uma aplicação do teorema 3.7.

CAPÍTULO I

§ 1 - Fibração

Definição 1.1

Uma aplicação p de E em B contínua tem a propriedade do levantamento em relação ao espaço X se para toda aplicação $f: X \rightarrow E$ e uma homotopia $G: X \times I \rightarrow B$ de $p \circ f$, existe uma homotopia $F: X \times I \rightarrow E$, com $F_0 = f$ e $p \circ F = G$, ou seja, existe uma homotopia F que faz comutar o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow p & \\ X \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow F \\ \searrow G \end{array} \quad \text{tal que } F_0 = f$$

A homotopia F é um levantamento de G .

Definição 1.2

Uma aplicação $p: E \rightarrow B$ contínua é uma fibração se tem a propriedade de levantamento em relação a qualquer subespaço X .

Dada uma fibração $p: E \rightarrow B$ e $f: X \rightarrow B$ uma aplicação contínua, considere o seguinte conjunto:

$$E_f = \{(x, e) \in X \times E, f(x) = p(e)\} \subset X \times E.$$

As projeções $\pi_1: X \times E \rightarrow X$ e $\pi_2: X \times E \rightarrow E$ quando restritas dão origem às aplicações $\pi_1|_{E_f} = p_f: E_f \rightarrow X$ e $\pi_2|_{E_f} = \bar{f}: E_f \rightarrow E$ tal que o diagrama comuta:

Proposição 1.3

Seja $p: E \rightarrow B$ uma fibração e $f: X \rightarrow E$ contínua.

Então $p_f: E_f \rightarrow X$ é uma fibração com fibra homeomorfa a $F = p^{-1}(b_0) = p^{-1}(f(x_0))$.

Demonstração:

Suponha que $g: Y \rightarrow E_f$ seja uma aplicação contínua e $H: Y \times I \rightarrow X$ uma homotopia de $p_f \circ g$. Tem-se o seguinte diagrama:

Então $f \circ H$ é uma homotopia de $\bar{f} \circ g$. Como $p: E \rightarrow B$ é uma fibração, existe uma homotopia $H': Y \times I \rightarrow E$ de $\bar{f} \circ g$ levantando $f \circ H$.

Para todo $(y, t) \in Y \times I$, o par $(H(y, t), H'(y, t))$ pertence a E_f pois: $p(H'(y, t)) = f(H(y, t))$.

Definindo: $K: Y \times I \rightarrow E_f$, por $K = (H, H')$, obtém-se $K_0 = (H_0, H'_0) = (p_f \circ g, \bar{f} \circ g) = g$ e $p_f \circ K = H$, assim $p_f: E_f \rightarrow X$ é uma fibração. $\square$

Definição 1.4

A fibração induzida da fibração $p: E \rightarrow B$ relativamente à $f: X \rightarrow B$ é $p_f: E_f \rightarrow X$.

§ 2 - Ação de $\pi_1(B, b_0)$ no anel de cohomologia $H^*(F)$.

Notações

- i) $F_b = p^{-1}(b)$
- ii) $*$ denota o espaço de um único ponto.
- iii) f_b denota a aplicação $f_b: * \rightarrow B$, $f_b(*) = b$.
- iv) E_{f_b} é a fibração induzida por f_b da fibração $p: E \rightarrow B$.

Um caminho entre b_1 e b_2 pode ser interpretado como uma homotopia entre as aplicações f_{b_1} e f_{b_2} . Então existe uma aplicação fibrada $h_w: F_{b_1} \rightarrow F_{b_2}$, tal que se w' é outro caminho ligando b_1 e b_2 , homotópico a w relativamente a $\dot{I}$ e se $H: * \times I \times I \rightarrow B$ é a homotopia entre os caminhos, então existe uma homotopia fibrada entre h_w e $h_{w'}$. (Ver [7]).

Seja $PB(b_1, b_2)$ o conjunto das classes de homotopias de caminhos em B ligando b_1 a b_2 , tem-se a seguinte aplicação: Seja $\alpha: PB(b_1, b_2) \rightarrow [F_{b_1}, F_{b_2}]$ definida por $\alpha[w] = [h_w]$.

A função α obedece as seguintes propriedades:

- a) $\alpha[w * w'] = \alpha[w'] \cdot \alpha[w]$ onde $w \in PB(b_1, b_2)$ e $w' \in PB(b_2, b_3)$
- b) $\alpha[w_0] = [I_{p_b}]$, w_0 é o caminho constante.

Seja $p: E \rightarrow B$ uma fibração com B conexo e $F = p^{-1}(b_0)$.

Define-se a ação do grupo $\pi_1(B, b_0)$ sobre o anel de cohomologia $H^*(F)$ através da função:

$\theta: \pi_1(B, b_0) \times H^*(F) \rightarrow H^*(F)$, definido por

$$\theta([w], x) = \langle \alpha[w]^*, x \rangle$$

Definição 1.5

O grupo fundamental $\pi_1(B)$ atua trivialmente no anel de cohomologia da fibra $H^*(F)$ se essa ação for trivial, ou seja:

$$\theta([w], x) = \langle \alpha[w]^*, x \rangle = x \text{ para todo } [w] \in \pi_1(B) \text{ e } x \in H^*(F).$$

§ 3 - Sequência Espectral

R denotará um domínio de ideal principal.

Os módulos considerados serão sobre R .

Definição 1.6

Um módulo bigraduado é uma coleção de R -módulos $E^{p,q}$ indexada por pares de inteiros (p, q) .

Definição 1.7

Seja E um módulo bigraduado.

Uma diferencial $d: E \rightarrow E$ de bi-grau $(r, 1-r)$ é uma coleção de homomorfismos $d: E^{p,q} \rightarrow E^{p+r, q-r+1}$ para todo par (p, q) de inteiros e tal que $d^2 = 0$.

Definição 1.8

Uma sequência espectral do 1º quadrante consiste:

- i) módulos bi-graduados $E_r = \{E_r^{p,q}\}, r \geq 0$.
- ii) diferenciais de bi-grau $(r, 1-r)$, $d_r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$ tal que a homologia de E_r é E_{r+1} , ou seja:
$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker d_r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}}{\text{imagem } d_r: E_r^{p-r, q+r+1} \rightarrow E_r^{p, q}}$$
- iii) Se $p < 0$ ou $q < 0$, então $E_r^{p,q} = 0$.

LEMA 1.9

Se $N > p$ e $N > q + 1$, então $E_N^{p,q} = E_{N+1}^{p,q} = \dots = E_\infty^{p,q}$

Demonstração:

$$\text{Seja } E_{N+1}^{p,q} = \frac{\ker d_N: E_N^{p,q} \rightarrow E_N^{p+N, q-N-1}}{\text{imagem } d_N: E_N^{p-N, q+N-1} \rightarrow E_N^{p, q}}$$

Como $N > p$ e $N > q+1 \Rightarrow p - N < 0$ e $q - N + 1 < 0$, e portanto $E_N^{p-N, q+N-1} = E_N^{p+N, q-N-1} = 0$. Segue-se o resultado. $\square$

§ 4 - Teorema de Leary-Serre

Seja $p: E \rightarrow B$ uma fibração, onde B é conexo com uma estrutura de CW-complexo.

Notações:

- i) B^λ denota o λ -esqueleto de B .
- ii) E^λ é a imagem inversa de B^λ ; $E^\lambda = p^{-1}(B^\lambda)$.
- iii) F é uma fibra fixada de E .

TEOREMA 1.10 (Leary-Serre)

Seja $p: E \rightarrow B$ uma fibração com fibra F , onde B é conexo com uma estrutura de CW complexo.

Se $\pi_1(B)$ atua trivialmente no anel de cohomologia $H^*(F)$, então existe uma sequência espectral na qual:

- i) $E_0^{p,q} = C^{p+q}(E^p, E^{p-1})$ e d_0 é o operador cobordo da cohomologia $C^*(E^p, E^{p-1})$
- ii) $E_1^{p,q} = C^p(B, H^q(F))$ e d_1 é o operador cobordo de $C^*(B, H^q(F))$.
- iii) $E_2^{p+q} = H^p(B, H^q(F))$
- iv) $E_N^{p+q} = \frac{\text{Ker}\{H^{p+q}(E) \rightarrow H^{p+q}(E^{p-1})\}}{\text{Ker}\{H^{p+q}(E) \rightarrow H^{p+q}(E^p)\}}$

Demonstração: (Ver [7])

Observações

- i) Se considerar o anel de coeficientes como sendo o anel dos números reais, então:

$$E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(F)$$

ii) Definindo $D^{p,q}$ como sendo o conjunto:

$$D^{p,q} = \text{Ker}\{H^{p+q}(E) \rightarrow H^{p+q}(E^{p-1})\},$$

$$\text{então } H^n(E) = D^{0,n} \quad D^{1,n-1} \quad \dots \quad D^{n+1,-1} = 0$$

Os grupos $D^{i,j}$ dão uma filtração de $H^n(E)$ cujo o módulo graduado associado é $\sum_{p+q=n} E_{\infty}^{p,q}$ e $E_{\infty}^{p,q} = \frac{D^{p,q}}{D^{p+1,q-1}}$.

CAPÍTULO II

§ 1 - Índice de uma forma bilinear real e simétrica

Seja V um espaço vetorial real de dimensão r .

Uma forma bilinear real e simétrica sobre V , não degenerada, será denotada por $\langle x, y \rangle$.

Pode-se achar uma base $\{e_i\}$ de V , $1 \leq i \leq r$, tal que

$$F(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p x^i y^i - \sum_{i=p+1}^{p+q=r} x^i y^i, \quad \text{onde } x = \sum_{i=1}^r x^i e_i \text{ e } y = \sum_{i=1}^r y^i e_i$$

O número $p-q$ é o índice de F . Notação: $I(F)$.

Prova-se que o índice de F não depende da base.

A cada forma $\langle x, y \rangle$ está associada uma matriz simétrica

$$C = (C_{ij}), \quad \text{onde } C_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle, \quad 1 \leq i, j \leq r.$$

Se X e Y são os vetores colunas representantes de x e y em relação à base $\{e_i\}$, então $\langle x, y \rangle = X^t C Y$

§ 2 - Índice de uma variedade

Sejam M^n uma variedade compacta, sem bordo, orientada de dimensão $n = 4K$ e R o corpo dos números reais.

Considere a seguinte aplicação bilinear real e simétrica:

$$\begin{aligned} H^{2k}(M; R) \otimes H^{2k}(M, R) &\rightarrow R \\ x \otimes y &\rightarrow \langle x \cup y, [M] \rangle \end{aligned}$$

Decorre da dualidade de Poincaré e do teorema dos coeficientes universais que tal forma é não degenerada.

O índice da variedade M^n (notação $I(M)$) é o índice da forma bilinear $\langle, \rangle$ definida acima, se $n \equiv 0$ módulo 4. Se $n \not\equiv 0$ módulo 4, por definição $I(M) = 0$.

§ 3 - Propriedades Algébricas do Índice de uma Matriz

Neste parágrafo considere V um espaço vetorial de dimensão r com uma base fixada β .

Se C é uma matriz simétrica, a forma bilinear simétrica associada é dada por $g(x, y) = X^t C Y$, onde X e Y são matrizes colunas representando x e y em relação à base β .

O índice de uma matriz simétrica é o índice da forma bilinear associada.

Propriedade 21

Para qualquer matriz T , não singular, de ordem r , tem-se $I(T^t C T) = I(C)$.

Demonstração:

Interpretando T como uma matriz de mudança da base β para uma base β' , tem-se: $X = TX'$ e $Y = TY'$.

Então: $\langle x, y \rangle = X^t C Y = (TX')^t C (TY') = X'^t T^t C TY'$, logo a matriz da forma $\langle, \rangle$ em relação a base β' é $T^t C T$. Como o índi-

ce depende apenas da forma, segue o resultado. $\square$

Observações

- i) Para uma matriz simétrica C , existe uma matriz P tal que $P^t C P$ é a matriz diagonal formada pelos seus autovalores. Desse modo, o $l(C)$ é a diferença entre o número de autovalores positivos e o número de autovalores negativos.
- ii) Se $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$, onde A e B são matrizes simétricas, então o $l(C)$ é a soma dos índices de A e de B ; basta notar que os autovalores de C são os autovalores de A e de B .

LEMA 2.2

Seja C uma matriz da forma $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & A & B \\ L^t & B^t & D \end{bmatrix}$, onde A e L são ma-

trizes quadradas, não singulares, A e D matrizes simétricas.

Então existe uma matriz T não singular tal que

$$T^t C T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

Demonstração:

Basta fazer

$$T = \begin{bmatrix} \frac{Y+I}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{Y-I}{\sqrt{2}} \\ \frac{X}{\sqrt{2}} & I & \frac{X}{\sqrt{2}} \\ \frac{L^{-1}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{L^{-1}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

onde $X = -A^{-1}BL^{-1}$ e $Y = \frac{1}{2}(L^{-1})^t [B^t A^{-1} B(-D)] (L^{-1})$. $\square$

Observação:

O Lema 2.2 continua válido se A é a matriz vazia; neste caso

$$T = \begin{bmatrix} \frac{Y+I}{\sqrt{2}} & \frac{Y-I}{\sqrt{2}} \\ \frac{L^{-1}}{\sqrt{2}} & \frac{L^{-1}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \text{ onde}$$

$$Y = \frac{1}{2} (L^{-1})^t (-D) (L^{-1})$$

Propriedade 2.3

Se C é uma matriz da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & A & 0 \\ L^t & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde A é simétrica com A e L matrizes não singulares, então

$$I(C) = I(A).$$

Demonstração:

Pelo lema 2.2, existe uma matriz T tal que

$$T^t C T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Da propriedade 2.1 e da observação 11, $I(C) = I(T^t C T) = I(A)$. $\square$

Propriedade 2.4

O índice de uma matriz

$$C = \begin{bmatrix} 0 & L \\ L^t & 0 \end{bmatrix}$$

é zero, onde C é não singular e L uma matriz quadrada.

Demonstração:

Da observação que segue o lema 2.2 existe uma matriz T , tal que $T^t C T$ é da forma

$$T^t C T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

segue o resultado. $\square$

Propriedade 2.5

Seja C uma matriz não singular da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & & & L_0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ L_m & & & 0 \end{bmatrix},$$

onde cada L_i é quadrada e transposta de L_{m-i} .

Então

$$I(C) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \text{ é ímpar} \\ I(L_{\frac{m}{2}}), & \text{se } m \text{ é par} \end{cases}$$

Demonstração:

Se m é ímpar, segue que $C = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & L_0 \\ & \ddots & & \\ & & L_{\frac{m-1}{2}} & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Pela propriedade 2.3, conclui-se que } I(C) = 0.$$

$$\text{Se } m \text{ é par, tem-se que } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & L_{\frac{m}{2}} & 0 \\ A^t & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Desde que } C \text{ é}$$

não singular, $L_{\frac{m}{2}}$ e A são não singulares.

Da propriedade 2.3, conclui-se que $I(C) = I(L_{\frac{m}{2}})$. $\square$

LEMA 2.6

Sejam A e B duas matrizes quadradas, ambas simétricas ou ambas anti-simétricas. Então o produto tensorial $A \otimes B$ é simétrico e

$$I(A \otimes B) = \begin{cases} 0, & \text{se } A \text{ e } B \text{ são anti-simétricas} \\ I(A) \cdot I(B), & \text{se } A \text{ e } B \text{ são simétricas} \end{cases}$$

Demonstração:

Se A e B são anti-simétricas, $A \otimes B$ é simétrica, pois

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(u, v) \otimes (u', v') &= A(u, v) \otimes B(u', v') = A(v, u) \otimes B(v', u') = \\ &= (A \otimes B)(v, u) \otimes (v', u') \end{aligned}$$

Neste caso a $\dim V = 2K$ e portanto existem matrizes P e P' tais que: $\bar{A} = P^t A P$ e $\bar{B} = P'^t B P'$, com $\bar{A}$ e $\bar{B}$ da forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{bmatrix}, \text{ com } A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J$$

$$\text{Como } I \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} 0 & J \\ J^t & 0 \end{bmatrix} = 0, \text{ segue que}$$

$$I(A \otimes B) = 0.$$

Se A e B são simétricas, sejam $\alpha_i > 0$, $1 \leq i \leq p$ e $\alpha_j < 0$, $p+1 \leq k \leq p+q$ os autovalores de A e $\beta_k > 0$, $1 \leq k \leq p'$ e $\beta_\ell < 0$, $p'+1 \leq \ell \leq p'+q'$ os autovalores de B ; então $\alpha_u \beta_t$, $1 \leq u \leq p+q$ e $1 \leq t \leq p'+q'$ são os autovalores de $A \otimes B$.

$$\text{Segue que } I(A \otimes B) = (p-q)(p'-q') = I(A) \cdot I(B). \quad \square$$

§ 4 - Índice de uma variedade produto

Será demonstrado neste parágrafo que o índice de uma variedade produto é o produto dos índices. O objetivo desta dissertação é generalizar este resultado para uma variedade fibrada.

TEOREMA 2.7

O índice de uma variedade é multiplicativo, ou seja:

$$I(M \times N) = I(M) \cdot I(N).$$

Demonstração:

Seja $P = M \times N$, onde P , M e N são variedades compactas, sem

bordo, orientadas de dimensão p , m e n respectivamente.

Se $m + n \not\equiv 0$ módulo 4, então m ou n não é congruo a zero módulo 4 e portanto $I(p) = 0 = I(M) \cdot I(N)$.

Seja $p = 4K = m + n$; pela fórmula de Künneth:

$$H^{2k}(P, R) \cong \sum_{s=0}^{2k} [H^s(M; R) \otimes H^{2k-s}(N; R)]. \text{ Para } s > m, H^s(M; R) = 0$$

Denotando $V_s = H^s(M; R) \otimes H^{2k-s}(N; R)$ e escrevendo:

$$* H^{2k}(P, R) \cong \sum_{s=0}^m V_s, \text{ obtem-se o seguinte fato:}$$

Se $x \in V_i$ e $y \in V_j$, com $i + j \neq m$, então $xy = 0$.

Sejam $x = a_i \otimes b_{2k-i}$ e $y = a_j \otimes b_{2k-j}$, onde $a_i \in H^i(M; R)$, $b_{2k-i} \in H^{2k-i}(N; R)$ e $a_j \in H^j(M; R)$ e $b_{2k-j} \in H^{2k-j}(N; R)$.

Se $i + j \neq m$, tem-se: $a_i \cup a_j = 0$ quando $i + j > m$ e $b_{2k-i} \cup b_{2k-j} = 0$ quando $i + j < m$, segue que:

$$xy = (-1)^{J(2k-i)} (a_i \cup a_j) \otimes (b_{2k-i} \cup b_{2k-j}) = 0.$$

A matriz da forma bilinear $\langle, \rangle$ definida em $H^{2K}(P; R)$ segundo a decomposição $*$ é da forma:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & & & L_0 \\ & \ddots & & \\ & & L_m & 0 \end{bmatrix}; \text{ onde cada } L_i \text{ é uma matriz quadrada não}$$

singular e $L_i = L_{m-i}^t$.

Se m é ímpar, segue da propriedade 2.6 que:

$$I(P) = I(D) = 0 = I(M) \cdot I(N).$$

Se m é par, então $I(D) = I(L_{\frac{m}{2}})$

A matriz $L_{\frac{m}{2}}$ é a matriz da forma bilinear $\langle, \rangle$ em

$H^{\frac{m}{2}}(M; R) \otimes H^{\frac{n}{2}}(N; R)$; assim $L_{\frac{m}{2}}$ é o produto tensorial da forma bilinear

em $H^{\frac{m}{2}}(M;R)$ e em $H^{\frac{n}{2}}(N;R)$. Decorre do Lema 2.7 que:

Se $\frac{m}{2}$ é ímpar, $m \not\equiv 0$ módulo 4 é a forma bilinear em $H^{\frac{n}{2}}(N;R)$ e em $H^{\frac{n}{2}}$ são anti-simétricas e portanto $I(P) = I(D) = 0 = I(M) \cdot I(N)$.

Se $\frac{m}{2}$ é par, então $I(P) = I(L_{\frac{m}{2}}) = I(M) \cdot I(N)$. $\square$

TEOREMA 2.8

Se M é uma variedade com bordo ∂M , compacta, orientada de dimensão $4n+1$, então o índice de ∂M é zero.

Demonstração:

Sejam $J: \partial M \rightarrow M$ a inclusão, ξ a classe fundamental tal que $\delta(\xi)$ é classe fundamental de $H_{4n}(\partial M;R)$ e $\langle, \rangle$ a forma bilinear definida em $H^{2n}(\partial M;R)$

Se $J^*(\alpha)$ e $J^*(\beta)$ são elementos de $H^{2n}(\partial M;R)$, então:

$$\begin{aligned} \langle J^*(\alpha) \cup J^*(\beta) \rangle &= \langle J^*(\alpha) \cup J^*(\beta), \partial(\xi) \rangle = \\ &= \langle J^*(\alpha \cup \beta), \partial(\xi) \rangle = \\ &= \langle \alpha \cup \beta, J_* \partial(\xi) \rangle = 0 \end{aligned}$$

Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} H^{2n}(M;R) & \xrightarrow{J^*} & H^{2n}(\partial M;R) & & \\ \downarrow D' & \searrow \quad \nearrow & \downarrow D & & \\ H_{2n+1}(M, \partial M;R) & \xrightarrow{\delta} & H_{2n}(\partial M;R) & \xrightarrow{J_*} & H_{2n}(M;R), \quad \text{onde} \end{array}$$

D e D' são isomorfismos da dualidade de Lefschetz. Como $D(J^*(\alpha)) = \delta D'(\alpha)$ conclui-se que a dimensão da imagem J^* é igual a dimensão do Kernel J_* .

Como R é um corpo, pelo teorema dos coeficientes universais,

tem-se o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 H^{2n}(M;R) & \xrightarrow{\quad} & H_{\text{om}}(H_{2n}(M;R), R) \\
 \downarrow J^* & \searrow & \downarrow J_*^\# \\
 H^{2n}(\partial M;R) & \xrightarrow{\quad} & H_{\text{om}}(H_{2n}(\partial M;R), R)
 \end{array}$$

As linhas horizontais representam isomorfismos.

Segue-se que: $\dim(\text{im } j^*) = \dim J_*^\# = \dim J_*$, portanto:

$$2\dim(\text{im } J^*) = \dim \ker J_* + \dim J_* =$$

$$= \dim H_{2n}(\partial M;R) = \dim H^{2n}(\partial M;R)$$

Escolhendo-se uma base $\{e_i\}$ para a imagem de J^* e complementando-a com vetores $\{e_j\}$, de modo que $\{e_i, e_j\}$ forma uma base de $H^{2n}(\partial M;R)$.

Relativamente a esta base a matriz da forma bilinear em $H^{2n}(\partial M;R)$ é:

$$\begin{bmatrix} 0 & L \\ L^t & * \end{bmatrix}.$$

Pela observação que segue o lema 2.2, conclui-se que $I(\partial M) = 0$. $\square$

§ 5 - Anéis de Poincaré

Definição 2.9

Um anel A é um anel de Poincaré se satisfaz as seguintes condições:

- 1 - A é um anel que se decompõe em soma direta $A = \sum_{r \geq 0} A^r$. Cada A^r é um espaço vetorial de dimensão finita e existe $\bar{n}$ tal que para $r > n$ $A^r = 0$ e dimensão de A^n é um.

2 - Se $y \in A^i$ e $y \in A^j$, então $xy \in A^{i+j}$ e $xy = (-1)^{i \cdot j} yx$

Seja $\xi \neq 0$ uma base de A^n ; relativamente a esta base tem-se a seguinte forma bilinear:

$$\begin{aligned} A^r \otimes A^{n-r} &\longrightarrow R \\ x \otimes y &\longrightarrow xy_\xi = \langle x, y \rangle_\xi \end{aligned}$$

O produto $xy \in A^n$ e $\langle x, y \rangle_\xi$ é a coordenada de xy em relação à base ξ .

Considere a função linear i_{n-r} , definida em A^{n-r} com valores em $(A^r)^*$, dada por:

$$\begin{aligned} i_{n-r}: A^{n-r} &\longrightarrow (A^r)^* \\ y &\longrightarrow \langle -, y \rangle_\xi \quad \text{e} \quad \langle -, y \rangle_\xi: A^r \longrightarrow R \\ x &\longrightarrow \langle x, y \rangle_\xi \end{aligned}$$

3 - A função i_{n-r} é um isomorfismo.

O anel de cohomologia de uma variedade orientada compacta com coeficientes reais é um anel de Poincaré.

Diferenciação num anel de Poincaré

Definição 2.10

Uma diferenciação num anel de Poincaré é um endomorfismo $d: A \rightarrow A$ satisfazendo as seguintes condições:

- a) $d(A^r) \subset A^{r+1}$
- b) $d \circ d = 0$
- c) $d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^r x \cdot d(y)$ com $x \in A^r$
- d) $d(A^{n-1}) = 0$

As condições a e b e as restrições do endomorfismo d a cada A^r definem um complexo de cadeias

$$0 \longrightarrow A^1 \longrightarrow A^2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A^{n-1} \longrightarrow A^n \longrightarrow 0$$

Definição 2.11

O anel derivado A' do anel de Poincaré A é definido por $A' = \sum_{r \geq 0} A'^r$, onde $A'^r = \frac{d^{-1}(0) \cap A^r}{d(A^{r-1})}$

LEMA 2.12

O anel derivado de um anel de Poincaré com diferenciação é um anel de Poincaré.

Demonstração:

Da propriedade d da diferenciação, tem-se:

$$\dim A'^n = \frac{d^{-1}(0) \cap A^n}{d(A^{n-1})} = \frac{A^n}{0} \simeq A^n \text{ e portanto } \dim A'^n = 1.$$

A multiplicação em A' é definido por: $x'y' = xy + d(A^{i+J-1})$, onde $x' = x + d(A^{i-1})$ e $y' = y + d(A^{J-1})$.

A multiplicação está bem definida. Suponha que

$$x' = x + d(A^{i-1}) = \bar{x} + d(A^{i-1}) \text{ e } y' = y + d(A^{J-1}) = \bar{y} + d(A^{J-1})$$

$$\text{com } d_i(\bar{x}) = d_i(x) = 0 \text{ e } d_J(\bar{y}) = d_J(y) = 0 \quad (d_J = d/A^J).$$

$$\text{Então: } x = \bar{x} + d(a_{i-1}); \quad y = \bar{y} + d(a_{J-1}) \text{ e}$$

$$xy = \bar{x}\bar{y} + (d(a_{i-1})\bar{y} + (-1)^{i-1}a_{i-1}d_J(\bar{y})) + (\bar{x}d(a_{J-1}) + (-1)^{i+1}d_i(\bar{x})a_{J-1}) + d(a_{i-1}).d(a_{J-1})$$

$$xy = \bar{x}\bar{y} + d(a_{i-1}\bar{y}) + d(\bar{x}a_{J-1}) + d(a_{i-1}).d(a_{J-1}).$$

O termo $d(a_{i-1}) \cdot d(a_{j-1}) \in d(A^{i+j-1})$, pois

$$\theta = \frac{1}{2} [a_{i-1}d(a_{j-1}) + a_{j-1}d(a_{i-1})]. \quad \theta \in A^{i+j-1} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} d(\theta) &= \frac{1}{2} [d(a_{i-1})d(a_{j-1}) + d(a_{j-1})d(a_{i-1})] = \\ &= d(a_{i-1}) \cdot d(a_{j-1}) \end{aligned}$$

Além disso:

$$\begin{aligned} x'y' &= xy + d(A^{i+j-1}) = (-1)^{i \cdot j} yx + d(A^{i+j-1}) = \\ &= (-1)^{i \cdot j} [yx + d(A^{i+j-1})] = (-1)^{i \cdot j} y'x' \end{aligned}$$

Se $x \in A^r$ e $y \in A^{n-r-1}$, pela propriedade d) segue que:

$$0 = d(x, y) = d(x) \cdot y + (-1)^r x d(y) \quad \text{ou}$$

$$\langle d(x), y \rangle = (-1)^{r-1} \langle x, d(y) \rangle$$

Esta última relação independe da escolha da base e equivale a dizer que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc} \longrightarrow & A^{n-r-1} & \xrightarrow{d} & A^{n-r} & \xrightarrow{d} & A^{n-r+1} & \longrightarrow \\ & \downarrow i_{n-r-1} & \searrow & \downarrow i_{n-r} & \searrow & \downarrow i_{n-r+1} & \\ & (A^{r+1})^* & \xrightarrow{(-1)^{r-1} t_d} & (A^r)^* & \xrightarrow{(-1)^r t_d} & (A^{r-1})^* & \longrightarrow \end{array}$$

t_d é o homorfismo dual de d .

As linhas horizontais são complexos de códex e as linhas ver ticais são isomorfismos comutando o diagrama, portanto $(A^r)^* \cong (A^{r*})^*$. $\square$

Definição 2.13

Analogamente ao índice de uma variedade orientada, define-se de um anel de Poincaré A como sendo:

- i) $I_{\xi}(A) = 0$, se $n \neq 0$ módulo 4
- ii) se $n \equiv 0$ módulo 4, então $I_{\xi}(A)$ é o índice da forma bilinear:
$$A^{2k} \otimes A^{2k} \longrightarrow R$$
$$x \otimes y \longrightarrow \langle x, y \rangle_{\xi} \quad (\xi \text{ é a base de } A^n)$$

Observações:

- i) Como i_{2k} é isomorfismo e $2k$ é par, a forma bilinear acima é simétrica e não degenerada
- ii) Se ξ_1 é um múltiplo positivo de ξ , isto é, $\xi_1 = \lambda \xi$ $\lambda > 0$, então $I_{\xi_1}(A) = I_{\xi}(A)$. Basta notar que a matriz da forma bilinear fica multiplicada por $\lambda > 0$.

LEMA 2.14

Seja A um anel de Poincaré com diferenciação d , ξ é uma base de A^n e ξ' a classe residual que contém ξ . Então

$$I_{\xi}(A) = I_{\xi'}(A').$$

Demonstração:

Considere $n = 4K$ e sejam $B^{2k} = d(A^{2k-1})$ e $Z^{2k} = d^{-1}(0) \cap A^{2k}$.

Os subespaços B^{2k} e Z^{2k} são ortogonais em relação a forma bilinear $\langle, \rangle$ pois para todo $v \in B^{2k}$ e $u \in Z^{2k}$ com $v = d(a_{2k-1})$ e $d(u) = 0$. Tem-se:

$$I \quad \langle v, u \rangle = \langle d(0_{2k-1}), u \rangle = (-1)^{2k-2} \langle a_{2k-1}, d(u) \rangle = 0$$

Por outro lado, se v e v' e B^{2k} , com $v = d(a_{2k-1})$ e $v' = d(a'_{2k-1})$, então:

$$II \quad \langle v, v' \rangle = \langle d(a_{2k-1}), d(a'_{2k-1}) \rangle = (-1)^{2k-2} \langle a_{2k-1}, d(d(a'_{2k-1})) \rangle = 0$$

Sejam a , b e c as dimensões de A^{2k} , Z^{2k} , B^{2k} , segue que $a = b + c$ respectivamente, como $B^{2k} \subset Z^{2k} \subset A^{2k}$, segue que $a = b + c$

Considere $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq b$, base de B^{2k} ; e_j , $b+1 \leq j \leq c$ elementos de Z^{2k} ; e_k elementos de A^{2k} , $c+1 \leq k \leq a$, de tal forma que $\{e_i, e_j, e_k\}$ forma uma base de A^{2k} .

Relativamente a essa base e de I e II a matriz da forma bilinear é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & L \\ 0 & Q & * \\ L^t & * & * \end{bmatrix}$$

Pelo lema 2.2 e da propriedade 2.6 tem-se:

$I_{\xi}(A) = I(Q)$. Como $\{e_{\xi} + B^{2k}\}$ é base para $\frac{Z^{2k}}{B^{2k}}$ segue que

$$I(Q) = I_{\xi}(A'). \quad \square$$

CAPÍTULO III

Neste capítulo, o propósito é demonstrar a generalização do teorema que caracteriza o índice de uma variedade produto. Através da identificação $H^*(E^\lambda, E^{\lambda-1}) = \prod_{\lambda\text{-cel em } B} H^*(p^{-1}(e_\lambda), p^{-1}(\partial e_\lambda))$ (Ver [4]) e do Teorema de Leary-Serre serão demonstrados alguns lemas, estabelecendo resultados da sequência espectral proveniente da filtração do anel de cohomologia de E.

Seja (E, B, p) um fibrado com fibra F; onde E, B e F são variedades compactas, conexas e sem bordo, além disso o grupo fundamental $\pi_1(B)$ atua trivialmente no anel de cohomologia $H^*(F)$.

Convenções:

- i) B^p denotará o p-esqueleto do espaço base B.
- ii) $E^p = p^{-1}(B^p)$
- iii) $B^{-1} = \emptyset$

Definição 3.1

Para cada p não negativo, D^p é o núcleo do homomorfismo:
 $i^*: H^*(E) \longrightarrow H^*(E^{p-1})$, onde $i: E^{p-1} \longrightarrow E$ é a inclusão, isto é:
 $D^p = \ker \{H^*(E) \longrightarrow H^*(E^{p-1})\}.$

Definição 3.2

Para p e q inteiros com $p \geq 0$, define-se:
 $D^{p,q} = D^p \cap H^{p+q}(E)$, ou seja $D^{p,q} = \ker \{H^{p+q}(E) \longrightarrow H^{p+q}(E^{p+q-1})\}$

Nos lemas seguintes, as dimensões de E , B e F são, respectivamente, $4K$, $4K - m$ e m .

LEMA 3.2

Seja (E, B, p) um fibrado. Valem as seguintes afirmações:

a) $D^S \supset D^{S+1}$

b) $D^{r+1, -1} = 0$

Demonstração:

a) Por definição, tem-se:

$$D^S = \ker\{H^*(E) \xrightarrow{i_1^*} H^*(E^{S-1})\}$$

$$D^{S+1} = \ker\{H^*(E) \xrightarrow{i_2^*} H^*(E^S)\}$$

Considere as inclusões $E^{S-1} \xrightarrow{i_3} E^S \xrightarrow{i_2} E$ e portanto

$$i_1 = i_2 \circ i_3.$$

Se $x \in D^{S+1}$, então $i_2^*(x) = 0$; logo $i_3^* \circ i_2^*(x) = i_1^*(x) = 0$ e daí $x \in D^S$.

b) Considere as inclusões: $E^r \xrightarrow{i_r} E^{r+1} \xrightarrow{i} E$

Da sequência do par (E^{J+1}, E^J) :

$$\rightarrow H^r(E^{J+1}, E^J) \rightarrow H^r(E^{J+1}) \rightarrow H^r(E^J) \rightarrow H^{r+1}(E^{J+1}, E^J) \rightarrow$$

Como $H^r(E^{J+1}, E^J) = \prod H^r(p^{-1}(e_{J+1}), p^{-1}(\partial e_{J+1}))$, então para $J \geq r$ i_J^* é injetora.

Observando-se que $D^{r+1, r} = \ker\{H^r(E) \xrightarrow{i^*} H^r(E^r)\}$, pode-se encerrar a função i como a composição das inclusões:

$$E^r \xrightarrow{i_r} E^{r+1} \xrightarrow{i_{r+1}} E^{r+2} \rightarrow \dots \rightarrow E^{4K-m} \rightarrow E.$$

Em nível de cohomologia, tem-se:

$$H^r(E) \longrightarrow H^r(E^{4k-m}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H^r(E^{r+2}) \longrightarrow H^r(E^{r+1}) \longrightarrow H^r(E^r)$$

Desde que $E^{4k-m} = E$ e i_j^* é injetora para $j \geq r$, conclui-se que $\ker\{H^r(E) \longrightarrow H^r(E^r)\} = 0 = D^{r+1, -1}$. $\square$

OBSERVAÇÃO:

i) D^0 é igual a $H^*(E)$

ii) $D^{4k+1} = 0$

Do teorema Leary-Serre 1.10 e das observações que seguem o mesmo, obtém-se uma sequência espectral de primeiro quadrante,

$\{E_r^{p,q}, d_r\}$ $r \geq 0$, tal que

$$a) E_2^{p,q} \cong H^p(B, H^q(F)) \cong H^p(B) \otimes H^q(F)$$

$$b) E_\infty^{p,q} = \frac{D^{p,q}}{D^{p+1, q-1}}$$

LEMA 3.3

a) $D^{4k-i, i} = 0$ para $i < m$ e $D^{4k-i, i} = H^{4k}(E)$ para $i \geq m$.

$$b) H^{4k}(E) = D^{4k-m, m} = E_\infty^{4k} = E_\infty^{4k-m, m}$$

Demonstração:

a) Lembrando-se que $D^{4k-i, i} = \ker \{H^{4k}(E) \xrightarrow{i^*} H^{4k}(E^{4k-i, i})\}$,

tem-se: $i < m$, então $4k-i > 4k-m$; isto significa que

$E^{4k-i-1} = E$ e daí segue que i^* é iso e $D^{4k-i, i} = 0$.

Se $i \geq m$, então $H^{4k}(E^{4k-i-1}) \xrightarrow{j^*} H^{4k}(E^{4k-i-2})$ é isomorfismo.

Considere a sequência exata do par (E^{4k-i-1}, E^{4k-i-2}) :

$$\begin{aligned} \rightarrow H^{4k}(E^{4k-i-1}, E^{4k-i-2}) &\rightarrow H^{4k}(E^{4k-i-1}) \rightarrow H^{4k}(E^{4k-i-2}) \rightarrow \\ \rightarrow H^{4k+1}(E^{4k-i-1}, E^{4k-i-2}) &\rightarrow \end{aligned}$$

Mas $H^{4k}(E^{4k-i-1}, E^{4k-i-2})$

$$\overline{\prod_{(4k-i-1) \text{ cel de } B}} H^{4k}(p^{-1}(e_{4k-i-1}), p^{-1}(\partial e_{4k-i-1})) = 0, \text{ pois}$$

$i + 1 > m$. Analogamente $H^{4k+1}(E^{4k-i-1}, E^{4k-i-2}) = 0$, segue que J^* é isomorfismo.

Considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^{4k}(E) & \xrightarrow{i_1^*} & H^{4k}(E^{4k-i-1}) \\ \downarrow I & \searrow \text{curved arrow} & \downarrow J^* \\ H^{4k}(E) & \xrightarrow{i_2^*} & H^{4k}(E^{4k-i-2}) \end{array}$$

As setas verticais são isomorfismos, então

$$D^{4k-i, i} = \text{Ker } i_1^* = \text{Ker } i_2^* = D^{4k-i-1, i+1}, \text{ em particular:}$$

$$D^{0, 4k} = \text{Ker}\{H^{4k}(E) \rightarrow H^{4k}(E^{-1})\} = H^{4k}(E), \text{ e assim}$$

$$D^{4k-i, i} = H^{4k}(E) \text{ para } i \geq m.$$

b) Sejam $E_{\infty}^{4k} = \sum_{p+q=4k} E_{\infty}^{p,q}$ e $E_{\infty}^{p,q} = \frac{D^{p,q}}{D^{p-1,q+1}}$ com $p = 4k-q$

se $q > m$, $D^{4k-q,q} = D^{4k-q-1,q-1} = H^{4k}(E)$ e portanto

$E_{\infty}^{p,q} = 0$ se $q < m-1$, $D^{4k-q,q} = D^{4k-q-1,q-1} = 0$ e portanto

$E_{\infty}^{p,q} = 0$ se $q = m$, $D^{4k-m,m} = H^{4k}(E)$ e $D^{4k-m-1,m+1} = 0$,

portanto $E_{\infty}^{4k-m,m} = D^{4k-m,m}$.

Segue-se que $H^{4k}(E) = D^{4k-m,m} = E^{4k-m,m} = E^{4k}$. $\square$

O lema seguinte dá informações a respeito do anel de Poincaré-
 E_2 da sequência espectral. As hipóteses do teorema de Leory-Serre es
 tão satisfeitas; desse modo pode-se identificar E_2 com
 $H^*(B) \otimes H^*(F)$. Através desse isomorfismo a multiplicação em E_2 é
 dada por:

$$(b \otimes f) \cdot (b' \otimes f') = (-1)^{p \cdot q'} (b \cup b') \otimes (f' \cup f), \text{ onde}$$

$$b \in H^p(B), \quad b' \in H^{p'}(B), \quad f \in H^q(F) \quad \text{e} \quad f' \in H^{q'}(F).$$

Além disso, as orientações de B e de F definem o gerador
 ξ_2 de E_2^{4k} , dado por:

$$\xi_2 = \xi_B \otimes \xi_F$$

LEMA 3.4

- a) $E_2^{2k-i, i} = 0$, para $i > m$.
- b) $E_2^s = 0$, para $s > 4k$
- c) $E_2^{4k} = E_2^{4k-m, m}$
- d) Se $x \in E_2^{2k-q, q}$ e $y \in E_2^{2k-q', q'}$ com $q + q' \neq m$, então
 $xy = 0$
- e) $\dim E_2^{2k-q, q} = \dim E_2^{2k-m+q, q}$

Demonstração:

- a) Sabe-se que $E_2^{2k-i, i} = H^{2k-i}(B) \otimes H^i(F)$, como para $i > m$,
 $H^i(F) = 0$, segue que $E_2^{2k-i, i} = 0$

$$b) E_2^s = \sum_{p+q=s} E_2^{p,q} \text{ e } E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(F), \text{ se } q > m,$$

$H^q(F) = 0$. Como $p = s - q$ e $s > 4K$, então $p > 4K - m$, portanto $H^p(B) = 0$ e assim $E_2^{p,q} = 0$ se $s > 4K$; segue o resultado

c) Da definição de E_2^{4k} , tem-se:

$$E_2^{4k} = \sum_{p+q=4k} E_2^{p,q}$$

Cada $E_2^{p,q}$ é da forma: $E_2^{4k-q,q} = H^{4k-q}(B) \otimes H^q(F)$

$H^q(F) = 0$ quando $q > m$ e quando $q < m$,

$4k - q > 4k - m$, e então $H^{4k-q}(B) = 0$.

Segue-se que $E_2^{4k} = \sum_{p+q=4k} E_2^{p,q} = E_2^{4k-m,m}$,

d) Sejam $x \in E_2^{2k-q,q} = H^{2k-q}(B) \otimes H^q(F)$ e

$y \in E_2^{2k-q',q'} = H^{2k-q'}(B) \otimes H^{q'}(F)$, com

$x = x_B \otimes x_F$, $y = y_B \otimes y_F$ e $q + q' \neq m$.

Então:

$$xy = (-1)^{q(2k-q')} (x_B \cup y_B) \otimes (x_F \cup y_F)$$

Para $q + q' > m$, $x_F \cup y_F \in H^{q+q'}(F) = 0$ e para

$q + q' < m$ tem-se: $4k - (q+q') > 4k - m$; portanto

$x_B \cup y_B \in H^{4k-(q+q')}(B) = 0$.

Em qualquer caso $xy = 0$.

e) Pela dualidade de Poincaré aplicada a B e a F , segue que:

$$H^{2k-q}(B) \cong H_{2m-m+q}(B) \text{ e } H^q(F) \cong H_{m-q}(F)$$

Pelo teorema dos coeficientes universais:

$$H^{2k-m+q}(B) = \text{Hom}(H_{2k-m+q}(B); R) \oplus \text{Ext}(H_{2k-m+q-1}(B); R)$$

Como R é um corpo, então $\text{Ext}(H_{2k-m+q}(B); R) = 0$.

Segue-se que: $H^{2k-m+q}(B) \cong H_{2k-m+q}(B)$

Analogamente $H^{m-q}(F) \cong H_{m-q}(F)$. Portanto:

$$\dim E_2^{2k-q, q} = \dim E_2^{2k-m+q, m-q}. \quad \square$$

LEMA 3.5

E_r é um anel de Poincaré com diferenciação d_r , $2 \leq r \leq \infty$.

Demonstração:

E_2 é um anel de Poincaré com relação à graduação:

$$E_2 = \sum_{0 \leq s} E_2^s, \quad E_2^s = 0 \text{ para } s > 4K \text{ e } E_2^{4k} = E_2^{4k-m, m}$$

O anel E_2 é isomorfo ao anel de cohomologia $H^*(B \times F)$

De fato, usando a fórmula de Künneth:

$$H^r(B \times F) = \sum_{i=0}^r H^{r-i}(B) \otimes H^i(F) = \sum_{i=0}^r E_2^{r-i, i}. \text{ Portanto,}$$

$$\sum_{r \geq 0} H^r(B \times F) = \sum_{r \geq 0} E_2^r = E_2$$

Além disso d_r é uma diferenciação segundo a definição 2.11.

As condições a) e b) seguem da própria definição da sequência espectral, para a condição c)

Falta mostrar a condição d), isto é, que d_r anula em E_r^{4k-1} .

Como $\dim E_2^{4k} = \dim E_\infty^{4k} = 1$ (Lemas 3.3 e 3.4) e E_{r+1} é a homologia de E_r , então:

$1 = \dim E_{\infty}^{4k} \leq \dots \leq \dim E_N^{4k} \leq \dots \leq \dim E_2^{4k} = 1$,
segue-se que $\dim E_r^{4k} = 1$ para $r \geq 2$. Lembrando que $E_2^s = 0$ para
 $s > 4k$ e que E_{r+1} é a homologia de E_r , implica que d_2 anula
 E_2^{4k-1} , mais geralmente d_r anula em E_r^{4k-1} .

Pelo lema 2.13, E_3 é um anel de Poincaré, tendo d_3 como uma
diferenciação. Aplicando o mesmo Lema segue que E_4 é um anel de
Poincaré e assim por diante. Finalmente tem-se que E_{∞} é um anel de
Poincaré.

Considere as seguintes decomposições de $H^{2k}(E)$ e de E_{∞}^{2k} em
sombras diretas de subespaços:

$$I \quad H^{2k}(E) = V_0 + V_1 + \dots + V_m \text{ onde os } V_i \text{ são definidos atra} \\
\text{vés da fórmula } \sum_{r=0}^q V_i = D^{2k-q,q}$$

$$II \quad E_{\infty}^{2k} = E_{\infty}^{2k,0} + E_{\infty}^{2k-1,1} + \dots + E_{\infty}^{2k-m,m} = \Sigma_0$$

O Lema 3.6 garante que é possível encontrar subespaços V_i ,
 $0 \leq i \leq m$, os quais são ortogonais se $i + j < m$.

Por outro lado, a decomposição de E^k acima fornece uma decom
posição ortogonal. No caso em que $i + j = m$, a forma bilinear em
 E_{∞}^{2k} está relacionada com a cohomologia de $H^{2k}(E)$.

LEMA 3.6

$$a) \quad D^{p,q} \cdot D^{p',q'} = D^{p+q',q+q'}$$

$$b) \quad D^{2k-r,s} = D^{2k-m,m}, \text{ para } s > m$$

$$c) \quad \text{Se } x \in V_i \text{ e } y \in V_j, \text{ com } i + j < m, \text{ então } \langle x, y \rangle = 0$$

d) Sejam $\bar{x}$ e $\bar{y}$ as imagens de x e y respectivamente, a-
través dos homomorfismos canônicos:

$$D^{2k-q,q} \xrightarrow{\quad} E_{\infty}^{2k-q,q}$$

$$D^{2k-q',q'} \xrightarrow{\quad} E_{\infty}^{2k-q',q'}$$

Então, $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle x, y \rangle$ para $q + q' = m$ e $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$ para $q + q' \neq m$.

Demonstração:

a) Tem-se que $E_{\infty}^{p,q} \cdot E_{\infty}^{p',q'} = E_{\infty}^{p+p',q+q'}$, já que do Lema 3.5,

$$E_{\infty} \text{ é um anel de Poincaré. Como } E_{\infty}^{p,q} = \frac{D^{p,q}}{D^{p+1,q-1}},$$

$$E_{\infty}^{p',q'} = \frac{D^{p',q'}}{D^{p'+1,q'-1}} \text{ e } E_{\infty}^{p+p',q+q'} = \frac{D^{p+p',q+q'}}{D^{p+p'+1,q+q'-1}} \text{ da}$$

$$\text{afirmação acima: } D^{p,q} \cdot D^{p',q'} = D^{p+p',q+q'}$$

b) $D^{2k-s,s} = D^{2k-m,m}$ para $s \geq m$

Considere a sequência exata do par (E^{2k-s-1}, E^{2k-s-2}) ;

$$\dots \rightarrow H^{2k}(E^{2k-s-1}, E^{2k-s-2}) \rightarrow H^{2k}(E^{2k-s-1}) \rightarrow H^{2k}(E^{2k-s-2}) \rightarrow$$

$$\rightarrow H^{2k+1}(E^{2k-s-1}, E^{2k-s-2}) \rightarrow \dots$$

$$\text{Mas, } H^{2k}(E^{2k-s-1}, E^{2k-s-2})$$

$$\pi_{(2k-s-1)\text{ cel de } B} \prod H^{2k}(p^{-1}(e_{2k-s-1}), p(\partial(e_{2k-s-1}))) \text{ pois } s+1 > m.$$

$$\text{Analogamente, } H^{2k+1}(E^{2k-s-1}, E^{2k-s-2}) = 0$$

Considere agora o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} H^k(E) & \xrightarrow{i_1^*} & H^k(E^{2k-s-1}) \\ \downarrow l^* & \searrow & \downarrow i_3^* \\ H^{2k}(E) & \xrightarrow{i_2^*} & H^{2k}(E^{2k-s-2}) \end{array}$$

Como as setas verticais são isomorfismos,

$$D^{2k-s,s} = \ker i_1^* = \ker i_2^* = D^{2k-(s+1),s+1}, \text{ segue o resultado.}$$

Pelo lema 3.3, $D^{4k-(i+J),i+J} = 0$, desde que $i + J < m$

d) Sejam $\bar{x} \in E_{\infty}^{2k-q,q}$ e $\bar{y} \in E_{\infty}^{2k-q',q'}$. Então

$$\bar{x} = x + D^{2k-q+1,q-1} \quad \text{e} \quad \bar{y} = y + D^{2k-q'+1,q'-1}.$$

Segue-se que $\bar{x}\bar{y} = xy + D^{2k-(q+q')+1,q+q'-1}$ com

$$xy \in D^{4k-(q+q'),q+q'}$$

Se $q + q' > m$, então $D^{4k-(q+q'),q+q'} = D^{4k-(q+q')+1,q+q'-1}$,

segue que $\bar{x}\bar{y} = 0$

Se $q + q' < m$, então $D^{4k-(q+q'),q+q'} = 0$ e $\bar{x}\bar{y} = 0$

Se $q + q' = m$, $\bar{x}\bar{y} = xy + D^{4k-m+1,m-1}$; como $D^{4k-m+1,m-1} = 0$

segue que $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle x, y \rangle$.

TEOREMA 3.7

Seja (E, B, p) um fibrado, com fibra típica F , tal que as seguintes condições estão satisfeitas:

- 1) E, B, F são variedades compactas e conexas
- 2) O grupo fundamental $\pi_1(B)$ atua trivialmente no anel de cohomologia $H^*(F)$.

Se E, B e F são orientadas coerentemente de modo que a orientação de E é induzida pela orientação de F e de B , então o índice de E é produto dos índices de F e de B , isto é:

$$I(E) = I(F) \cdot I(B).$$

Demonstração:

Considere a sequência espectral de cohomologia $E_r^{p,q}$, $2 \leq r \leq \infty$, do fibrado (E, B, p)

$$\text{Sejam } E_r^s = \sum_{p+q=s} E_r^{p,q} \text{ e } E_r = \sum_{s \geq 0} E_r^s$$

Do lema 3.5 o anel E_2 é isomorfo ao anel de cohomologia $H^*(B \times F)$. Este isomorfismo define o gerador $\xi_2 = \xi_B \times \xi_F$, onde ξ_2 , ξ_B e ξ_F são respectivamente os geradores de E_2^{4k} , $H^{4k-m}(B)$ e $H^m(F)$.

Será provado, inicialmente, que $I(E_2) = I(F) \cdot I(B)$.

Decompondo E_2^{2k} em:

$$E_2^{2k} = E_2^{2k,0} + \dots + E_2^{2k-m,m},$$

a matriz C da forma bilinear do anel de Poincaré E_2 é, pelo lema 3.6 d), formada apenas por blocos não nulos na diagonal secundária:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & & & L_0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ L_m & & & 0 \end{bmatrix}$$

Além disso, pelo lema 3.4 e), cada L_i é uma matriz quadrada não singular e sua transposta é L_{m-i} . Isto decorre do fato de que E_2 é um anel de Poincaré.

Da propriedade 2.6, o índice da matriz C é zero se m é ímpar e; se m é par, então $I(C) = I(L_{\frac{m}{2}})$.

Se m é ímpar, $I(F) = 0$ e portanto,

$$I(E_2) = I(C) = 0 = I(F) \cdot I(B)$$

Se m é par, $L_{\frac{m}{2}}$ é a matriz da forma bilinear acima restrita a $E_2^{2k-\frac{m}{2}, \frac{m}{2}} H^{\frac{2k-m}{2}}(B) \times H^{\frac{m}{2}}(F)$; isto significa que a matriz $L_{\frac{m}{2}}$ é o produto tensorial das matrizes que definem $\langle, \rangle$ em B e em F .

Pelo lema 2.7, as matrizes que definem $\langle, \rangle$ em $H^*(B)$ e em $H^*(F)$ são anti-simétricas quando $\frac{m}{2}$ é ímpar, logo

$$I(E_2) = 0 = I(B) \cdot I(F) \quad (m \not\equiv \text{mod } 4).$$

$$\text{Se } \frac{m}{2} \text{ é par, } I(E_2) = I(L \frac{m}{2}) = I(B) \cdot I(F)$$

E_r é o anel derivado do anel de Poincaré E_{r-1} , como $I(E_r) = I(E_{r-1})$ pelo Lema 2.14, segue que:

$$I(B) \cdot I(F) = I(E_2) = I(E_3) = \dots = I(E_\infty).$$

Será mostrado agora que $I(E_\infty) = I(E)$.

Considerando as seguintes decomposições de $H^{2k}(E)$ e de E_∞^{2k} .

$$H^{2k}(E) = V_0 + V_1 + \dots + V_m, \quad \text{onde } \sum_{i=0}^q V_i = D^{2k-q, q}$$

$$E_\infty^{2k} = E_\infty^{2k, 0} + \dots + E_\infty^{2k-m, m}$$

Pelo lema 3.6, a matriz de $\langle, \rangle_{\xi_E}$ em $H^{2k}(E)$ é da forma:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & & & & L_0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ L_m & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde cada } L_i \text{ é uma matriz simétrica e não singular com } L_i = L_{m-i}^t$$

Pelo mesmo lema, a matriz de $\langle, \rangle_{\xi_\infty}$ em E_∞ é da forma

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & & & & L_0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ L_m & & & & 0 \end{bmatrix}$$

O isomorfismo $H^{4k}(E) = E_\infty^{4k}$ lema ξ_E em ξ_∞ .

Pelo Lema 2.2 e propriedade 2.6, as matrizes X e Y tem o mesmo índice, ou seja

$$I(E) = I(X) = I(Y) = I(E_\infty). \text{ Como } I(E_\infty) = I(F) \cdot I(B) \text{ segue que } I(E) = I(F) \cdot I(B). \quad \square$$

CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO

Ação de um Grupo numa Variedade.

Definição:

Sejam $(G,*)$ um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável.

Uma ação diferenciável de G em M é uma função $\phi: G \times M \rightarrow M$ satisfazendo as seguintes condições:

- 1) $\phi(g_1, \phi(g_2, x)) = \phi(g_1 g_2, x)$, $\forall x \in M$ e $\forall g_1, g_2 \in G$
- 2) $\phi(e, x) = x$ (e é o elemento neutro de G).
- 3) ϕ é diferenciável

Subgrupo de isotropia de um ponto x

Definições:

Seja ϕ uma ação de G em M , dado um ponto x o conjunto $G_x = \{g \in G, \phi(g, x) = x\}$ é o subgrupo de isotropia do ponto x .

A ação ϕ é livre se $G_x = \{e\}$, $\forall x \in M$.

O conjunto dos pontos fixos de uma ação é definido por:

$$M^G = \{x \in M, G_x = G\}.$$

Uma ação ϕ é semi-livre se qualquer $x \in M - M^G$, então $G_x = \{e\}$.

Sejam M uma variedade de dimensão $4r$ e ϕ uma ação semi-livre de S^1 em M .

Considere a seguinte relação de equivalência em M :

$$x R y \iff \exists \lambda \in S^1, \text{ tal que } x = \phi(\lambda, y).$$

Quando a ação ϕ é livre pode-se dar uma estrutura de variedade diferenciável ao conjunto quociente $\frac{M}{S^1}$.

No Lema 4.1 será usado o seguinte resultado "Se ϕ é uma ação diferenciável de S^1 em M^{4r} , então o fibrado normal de cada componente do conjunto dos pontos fixos tem uma estrutura complexa, de modo que a ação de S^1 neste fibrado é a multiplicação escalar".

([1], Lema 2.2)

Notações:

- i) Decorre do resultado acima que cada componente do conjunto dos pontos fixos tem codimensão par, assim F^{n-2k} denota a componente de M^G de codimensão $2k$.
- ii) ν^k é o fibrado normal complexo a F^{n-2k} .
- iii) $S(\nu^k)$ é o fibrado de esferas de ν^k .
- iv) $CP(\nu^k)$ é o fibrado projetivo complexo associado a ν^k .

LEMA 4.1

Sejam M^n uma variedade C^∞ orientada compacta sem bordo e $\phi: S^1 \times M^n \rightarrow M^n$ uma ação semi-livre.

Se F^{n-2k} é uma componente do conjunto dos pontos fixos, então:

- a) $\sum_{k \geq 1} [CP(\nu^k)] = 0$
- b) $[M^n] = \sum_{k \geq 0} [CP(\nu^k \oplus \theta^1)]$

Observação:

A variedade entre colchete indica sua classe de cobordismo orientado no anel Ω_* e θ^1 é o fibrado complexo um-dimensional trivial.

Demonstração:

Parte a) pode-se supor $F^n = \emptyset$, pois do contrário a ação seria trivial.

Denotando N^k a vizinhança tubular de F^{n-2k} na qual a ação de S^1 é invariante, considere

$B^n = M^n - \bigcup_{k \geq 1} \text{int } N^k$. O grupo S^1 atua livremente na subvariedade B^n ; obtém-se então a variedade B^n/S^1 , cujo bordo é a união dos $CP(v^k)$ e portanto

$$\sum_{k \geq 1} [CP(v^k)] = 0.$$

Parte b) Sejam $D^2 \times M^n$ e τ_1, τ_2 duas ações de S^1 em $D^2 \times M^n$ definida por:

$$\tau_1(\lambda, (z, x)) = (\lambda z, x)$$

$$\tau_2(\lambda, (z, x)) = (\lambda z, \phi(\lambda, x))$$

$\tilde{M}_1$ denota a variedade $D^2 \times M^n$ com a ação τ_1 .

$\tilde{M}_2$ denota a variedade $-D^2 \times M^n$ com a ação τ_2 .

Seja $f: \partial \tilde{M}_1 \rightarrow \partial \tilde{M}_2$, dada por $f(\lambda, x) = (\lambda, \phi(\lambda, x))$

f é um difeomorfismo equivariante entre $\partial \tilde{M}_1$ e $\partial \tilde{M}_2$, de fato:

f é claramente diferenciável e sua inversa é dado por

$$f^{-1}(\lambda, x) = (\lambda, \phi(\lambda^{-1}, x)) \text{ e}$$

$$f \circ \tau_1(\lambda, (z, x)) = f(\lambda z, x) = (\lambda z, \phi(\lambda z, x))$$

$$\tau_2(\lambda, f(z, x)) = \tau_2(\lambda, (z, \phi(z, x))) = (\lambda z, \phi(\lambda, \phi(z, x))) = (\lambda z, \phi(\lambda z, x))$$

Logo $f \circ \tau_1 = \tau_2 \circ f$

Considere agora $\tilde{M}$ a união disjunta de $\tilde{M}_1$ e $\tilde{M}_2$ com os pontos de $\partial \tilde{M}_1$ e $\partial \tilde{M}_2$ identificados através da f .

Tem-se assim uma ação natural τ de S^1 em $\tilde{M}$. A ação de τ_1 é livre em $\tilde{M}_1 - (0 \times M^n)$, pois se $(z, x) \in \tilde{M}_1 - (0 \times M^n)$, significa que $z \neq 0$ e assim $\tau_1(\lambda, (z, x)) = (z, x) \Leftrightarrow \lambda = e$ e portanto $G_{(z, x)} = \{e\}$.

Os pontos de $(0 \times M^n) \cap \tilde{M}_1$ são os pontos fixos de τ_1 , de fato:

$$\tau_1(\lambda, (z, x)) = (z, x) \quad \forall \lambda \in S^1$$

$$(\lambda z, x) = (z, x) \Leftrightarrow z = 0$$

Analogamente τ_2 é uma ação livre em $\tilde{M}_2 - (0 \times M^n)$, pois se $(z, x) \in \tilde{M}_2 - (0 \times M^n)$, implica que $z \neq 0$ e assim $\tau_2(\lambda, (z, x)) = (z, x)$ se e somente se $\lambda = e$.

Por outro lado o conjunto dos pontos fixos de $0 \times M^n \cap \tilde{M}_2$ é $0 \times M^G$, onde M^G é o conjunto dos pontos fixos de M^n , pois se

$$\tau_2(\lambda, (0, x)) = (0, x) \quad \forall \lambda \in S^1$$

$(\lambda \cdot 0, \phi(\lambda, x)) = (0, x) \Leftrightarrow \phi(\lambda, x) = x \quad \forall \lambda \in S^1$ isto só acontece se $x \in M^G$.

Peça a) se $\xi^{k'}$ é o fibrado normal da componente $F^{(n+2)-2k}$, então $\sum_{k \geq 1} [CP(\xi^{k'})] = 0$.

No caso em que $k' = 1$, $\xi^{1'}$ é o fibrado normal a $0 \times M^n$, $S(\xi^{1'})$ é o fibrado $S^1 \times M^n$ e $CP(\xi^{1'}) = \text{ponto} \times M^n \simeq M^n$.

Nos demais casos, $\xi^{k'}$ é o fibrado normal a $0 \times F^{n-2k}$,

então $\xi^{k'} = v^k \oplus \theta^1$ e assim

$$\sum_{k' \geq 0} [CP(\xi^{k'})] = [+M^n] + \sum_{k \geq 0} [-CP(v^k \oplus \theta^1)] = 0$$

e portanto $[M^n] = \sum_{k \geq 0} [CP(v^k \oplus \theta^1)]$. $\square$

TEOREMA 4.2

Seja M^n uma variedade orientada fechada sem bordo e $\phi: S^1 \times M^n \rightarrow M^n$ uma ação semi-livre. Então cada componente F^{n-2k} pode ser canonicamente orientada de modo que o índice de M^n é a soma dos índices de F^{n-2k} , ou seja:

$$I(M^n) = \sum_{k=0}^n I(F^{n-2k})$$

Demonstração:

Pelo lema anterior: $[M^n] = \sum_{k \geq 0} [CP(v^k \oplus \theta^1)]$, segue que

$$I(M^n) = \sum_{k \geq 0} I(CP(v^k \oplus \theta^1)).$$

A dimensão real de cada fibra de $v^k \oplus \theta^1$ é $2k + 2$ portanto a dimensão da fibra do fibrado $CP(v^k \oplus \theta^1)$ é $2k$.

A fibra do fibrado $CP(v^k \oplus \theta^1)$ é $CP(k)$, cujo o índice é dado por: $I(CP(k)) = \begin{cases} 1, & \text{se } k \text{ é par} \\ 0, & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$

Com o fibrado $CP(v^k \oplus \theta^1)$ orientado, isto implica que $\pi_1(F^{n-2k})$ atua trivialmente no anel de cohomologia $H^*(CP(k))$, pelo teorema 3.7, tem-se então

$$I(M^n) = \sum_{k \geq 0} I(CP(v^k \oplus \theta^1)) = \sum_{k \geq 0} I(CP(k)) \cdot I(F^{n-2k}) = \sum_{k \text{-par}} I(F^{n-2k}). \square$$

BIBLIOGRAFIA

1. CHERN, S.S.; HIRZEBRUCH, F. and SERRE, J.P.: On the Index of a
fibered manifold
2. CONNER, P.E.; FLOYD, E.E. - Differentiable Periodic Maps
3. KAWAKUBO, K.; UCHIDA, F. - On the Index of a Semi free
4. SPANIER, E.H. - Algebraic Topology, McGraw Hill Book Company, N.Y.
5. STEENROD, N. - The topology of fibre bundles, Princeton University
Press, N.J.; 1951
6. STONG, R.E. - Notes on Cobordism Theory, Princeton University Press
N.J., 1968
7. SWITZER, R.M. - Algebraic Topology: Homotopy on Homology, Springer-
-Verlag, 1957
8. UCHIDA, F. - Cobordism Groups of Semi Free S^1 and S^3 -Actions, Osaka
J.Math 7 (1970) 340-351
9. VICK, J. - Homology Theory, N.York and London Academic Press, 1973