SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 06.08.2001

Assinatura:

Propriedades genéricas de equilíbrios de equações parabólicas

Daniel Wellichan Mancini

Orientador: *Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP – São Carlos
Agosto/2001

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. José Gaspar Ruas Filho

Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco

À Carolina

Agradecimentos¹

Agradeço a todos aqueles que contribuíram, sob as mais variadas formas, para a conclusão deste trabalho. Em especial, registro minha gratidão ao Prof. José Gaspar Ruas Filho, pela paciência e generosidade com que tem me assitado e orientado desde o início de meus estudos na graduação.

¹Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP

Resumo

Nesta dissertação estudaremos a hiperbolicidade genérica dos equilíbrios de equações parabólicas da forma

$$u_t = \Delta u + f(x, u, \nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

$$u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Primeiramente, fixada uma função suave f , mostraremos que todos os seus equilíbrios são hiperbólicos quando a região Ω percorre um conjunto residual de uma classe de domínios regulares. Depois, fixada uma região regular Ω , suporemos que f independe de ∇u e provaremos que todos os equilíbrios são hiperbólicos quando f varia em um subconjunto residual de um conjunto de funções suficientemente regulares. Para a obtenção destes dois resultados utilizamos uma generalização, obtida por D. Henry, do Teorema da Transversalidade, cuja demonstração apresentamos neste trabalho.

Abstract

In this dissertation we study the generic hyperbolicity of the equilibria of parabolic equations in the form

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + f(x, u, \nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

First, we fix a smooth function f and show that all equilibria of this equation are hyperbolic when the domain Ω runs over a residual set in a certain class of regular domains. Then, we fix a region Ω and, supposing that f does not depend on ∇u , we proof that all equilibria are hyperbolic when f belongs to a residual subset in a set of sufficiently smooth functions. To obtain these two results we use a generalization, due to D. Henry, of the Transversality Theorem, whose proof we present in this work.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Operadores de Fredholm	9
3 Perturbação de Contorno	21
3.1 Cálculo Diferencial das Perturbações de Fronteira	21
3.2 Teorema da Transversalidade	27
4 Propriedades Genéricas de Equilíbrios de Equações Parabólicas	41
4.1 Simplicidade Genérica das Soluções de $\Delta u + f(x, u) = 0$	42
4.2 Simplicidade Genérica dos Autovalores Reais	46
4.3 Simplicidade Genérica das Soluções de $\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$	49
Bibliografia	57

Introdução

Nesta dissertação estudaremos a hiperbolicidade genérica dos equilíbrios de equações parabólicas sob duas perspectivas distintas, refletidas basicamente em dois resultados.

Primeiramente, fixado um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, limitado e com fronteira C^3 -regular, consideramos o problema de Dirichlet para a equação de reação-difusão

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + f(x, u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

em que $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^k ($k \geq 2$). Provaremos que todos os equilíbrios da equação acima são hiperbólicos qualquer que seja a função f de classe C^k exceto, possivelmente, para f escolhida em um subconjunto magro (segundo a topologia de Whitney) do espaço das funções de classe C^k .

Em seguida, fixada uma função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 , nos dedicamos ao estudo da equação

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + f(x, u, \nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,\end{aligned}$$

com o objetivo de verificar que todos os seus equilíbrios são hiperbólicos quando Ω percorre o complementar de um subconjunto magro da classe das regiões abertas, limitadas, conexas e C^3 -regulares.

Neste último caso, baseamo-nos no trabalho desenvolvido em [12] por D. Henry, que dispensou especial atenção ao problema de perturbações da fronteira, introduzindo novas técnicas e ferramentas, entre as quais se destaca uma generalização do *Teorema da Transversalidade* enunciado por Abraham e Thom [1] essencial na obtenção do segundo resultado.

No Capítulo 1 são apresentadas definições, fixadas notações e expostos alguns resultados preliminares referentes a operadores diferenciais em hipersuperfícies, operadores elípticos e imersões de espaços de Sobolev.

O Capítulo 2 reservamos para o estudo dos operadores de Fredholm entre espaços de Banach, sobretudo os limitados (objetos presentes muito freqüentemente no restante do trabalho),

provando propriedades que serão úteis nos capítulos subsequentes.

Ocupamo-nos no Capítulo 3 com a exposição de técnicas desenvolvidas por D. Henry em [12] para abordar a questão das perturbações de fronteira em problemas de contorno, mostrando um tipo de cálculo diferencial envolvendo tais perturbações e a demonstração da versão generalizada do *Teorema da Transversalidade* a que nos referimos anteriormente.

Por fim, reunidos nos três primeiros capítulos os instrumentos adequados para o estudo da hiperbolicidade générica dos equilíbrios, no Capítulo 4 tratamos os dois problemas apresentados nos parágrafos iniciais desta introdução.

Capítulo 1

Preliminares

Sejam E um espaço vetorial normado, $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $f : U \rightarrow E$ uma aplicação m -vezes diferenciável em $x \in U$. Podemos considerar a m -ésima derivada de f em x , $D^m f(x)$, como uma forma m -linear simétrica sobre $\mathbb{R}^n$

$$D^m f(x) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$$
$$D^m f(x) \cdot v_1 \dots v_m = \frac{\partial^m f}{\partial v_m \partial v_{m-1} \dots \partial v_1}(x)$$

ou como a coleção de derivadas parciais

$$D^m f(x) = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x); |\alpha| = m \right\},$$

onde o multi-índice α é uma n -upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de inteiros não-negativos, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ e

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \dots \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}.$$

Às vezes, escrevemos D^α em lugar de $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha$.

Desse modo, a norma $|D^m f(x)|$ pode significar

$$\max_{|\alpha|=m} \left\| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha f(x) \right\| \quad \text{ou} \quad \max_{|h| \leq 1} \|D^m f(x)h^m\|,$$

segundo a interpretação adotada para $D^m f(x)$.

Se Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, indicaremos sua fronteira por $\partial\Omega$ e seu fecho por $\overline{\Omega}$. Dado um inteiro $m \geq 0$ e considerando ainda E um espaço vetorial normado, denotaremos por $C^m(\Omega, E)$ o espaço das aplicações $f : \Omega \rightarrow E$ limitadas, m -vezes diferenciáveis, com derivadas contínuas e limitadas que se estendem continuamente ao fecho $\overline{\Omega}$, munido da norma usual

$$\|f\|_{C^m(\Omega, E)} = \max_{0 \leq j \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^j f(x)|.$$

$C_0^m(\Omega, E)$ indicará o subespaço de $C^m(\Omega, E)$ consistindo de todas as funções $f \in C^m(\Omega, E)$ com suporte compacto.

$C_{unif}^m(\Omega, E)$ denotará o subespaço fechado de $C^m(\Omega, E)$ consistindo das funções cuja m -ésima derivada é uniformemente contínua. Observe que $C_{unif}^m(\Omega, E)$ e $C^m(\Omega, E)$ coincidem quando Ω é limitado.

$C^{m,\alpha}(\Omega, E)$ é o subespaço de $C_{unif}^m(\Omega, E)$ formado pelas aplicações cuja m -ésima derivada é Hölder contínua com expoente α , $0 < \alpha \leq 1$, provido da norma

$$\|f\|_{C^{m,\alpha}(\Omega,E)} = \max \{ \|f\|_{C^m(\Omega,E)}, H_\alpha^\Omega(D^m f) \},$$

em que

$$H_\alpha^\Omega(f) = \sup \{ |f(x) - f(y)| / |x - y|^\alpha; x \neq y \in \Omega \}.$$

No caso em que $E = \mathbb{R}$ omitimos o espaço E , escrevendo apenas $C^m(\Omega)$, $C_0^m(\Omega)$, etc.

Dizemos que um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é C^m -regular [$C^{m,\alpha}$ -regular] — ou que Ω tem fronteira C^m -regular [$C^{m,\alpha}$ -regular] — se existe $\phi \in C^m(\mathbb{R}^n)$ [$\phi \in C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^n)$], que está pelo menos em $C_{unif}^1(\mathbb{R}^n)$, tal que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) > 0\}$$

e $\phi(x) = 0$ implica que $|\nabla \phi(x)| \geq 1$.

D. Henry demonstra em [12] que esta definição de região C^m -regular equivale àquela usada por Agmon-Douglis-Nirenberg [3] em seu artigo sobre problemas de contorno para operadores elípticos.

Se $m \geq 1$ é um inteiro e p é um número real com $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ que têm todas as suas derivadas fracas de ordem $\leq m$ em $L^p(\Omega)$, ou seja,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \text{para todo } \alpha \text{ com } |\alpha| \leq m, \text{ existe } D^\alpha u \in L^p(\Omega)$$

$$\text{tal que } \int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u \phi, \forall \phi \in C_0^1(\Omega)\}.$$

Em $W^{m,p}(\Omega)$ consideramos a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Se $1 \leq p < \infty$, $W_0^{m,p}(\Omega)$ designará o fecho de $C_0^m(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.

Precisaremos, em algumas circunstâncias, utilizar operadores diferenciais em uma hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^n$. As definições que inserimos a seguir são intrínsecas a S e independem do ambiente $\mathbb{R}^n$.

Sejam S uma hipersuperfície de classe C^1 em $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^1 (de modo que φ pode ser estendida a uma aplicação de classe C^1 em uma vizinhança de S).

Definimos $\nabla_S \varphi$ como o campo vetorial tangente sobre S tal que para cada curva $x(t) \subset S$ de classe C^1 temos

$$\frac{d}{dt} \varphi(x(t)) = (\nabla_S \varphi)(x(t)) \cdot x'(t).$$

Sejam S uma hipersuperfície de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$ e $\vec{a} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 . Então $\text{div}_S \vec{a} : S \rightarrow \mathbb{R}$ é a função contínua tal que, para cada função $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 com suporte compacto em S ,

$$\int_S (\text{div}_S \vec{a}) \varphi = - \int_S \vec{a} \cdot \nabla_S \varphi.$$

Por fim, se $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 , então $\Delta_S u = \text{div}(\nabla_S u)$ ou, equivalentemente, é a função contínua que satisfaz

$$\int_S \varphi \Delta_S u = - \int_S \nabla_S \varphi \cdot \nabla_S u.$$

No teorema abaixo estão reunidos alguns fatos relacionados aos objetos definidos acima.

Teorema 1.1. (1) Se S é uma hipersuperfície de classe C^1 e $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação C^1 em uma vizinhança de S , então

$$\nabla_S \varphi(x) = \nabla \varphi(x) - \frac{\partial \varphi}{\partial N}(x) \cdot N,$$

onde N é um campo vetorial normal unitário sobre S .

(2) Sejam S uma hipersuperfície de classe C^2 , $\vec{a} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1 em uma vizinhança de S , $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial unitário de classe C^1 em uma vizinhança de S , que é um campo normal a S sobre os pontos de S . Então

$$\text{div}_S \vec{a} = \text{div} \vec{a} - (\text{div} N) \vec{a} \cdot N - \frac{\partial \vec{a}}{\partial N} \cdot N.$$

(3) Sejam S uma hipersuperfície de classe C^2 , $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um função de classe C^2 em uma vizinhança de S e N um campo vetorial unitário normal para S , como em (2). Então

$$\Delta_S u = \Delta u - \text{div} N \frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} + \nabla_S u \cdot \frac{\partial N}{\partial N}$$

sobre S .

Os próximos resultados, com os quais finalizamos este capítulo reservado aos pré-requisitos, tratam de operadores elípticos e podem ser encontrados em [8], [2] e [13]. Serão utilizados com frequência no Capítulo 4.

Vamos considerar operadores L da forma

$$u \mapsto Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

com coeficientes $a_{ij} = a_{ji}$, b_i , c , $i, j = 1, \dots, n$, definidos em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Dizemos que L é *elíptico* em um ponto $x \in \Omega$ se a matriz dos coeficientes $[a_{ij}(x)]$ é positiva, ou seja, se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ denotam o menor e o maior autovalores de $[a_{ij}(x)]$, respectivamente, então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2,$$

para todo $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Se $\lambda(x) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ então L é elíptico em Ω . Quando, para alguma constante λ_0 , temos $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$ qualquer que seja $x \in \Omega$, dizemos que L é *estritamente elíptico* em Ω .

Teorema 1.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo, L um operador estritamente elíptico em Ω com coeficientes $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\Omega)$, $b_i = c = 0$, $i, j = 1, \dots, n$ e $u \in H^2(\Omega)$ uma função tal que*

$$|(Lu)(x)| \leq K (|\nabla u(x)| + |u(x)|),$$

em quase todo ponto de Ω , para alguma constante $K > 0$. Se B é uma bola que intercepta a fronteira de Ω em uma hipersuperfície $B \cap \partial\Omega$ e $u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em quase todo ponto de $B \cap \partial\Omega$, então $u = 0$ em quase todo ponto de Ω .

Teorema 1.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto de classe C^2 e L um operador estritamente elíptico em Ω , com coeficientes $a_{ij} \in C^2(\Omega)$, $b_i \in C^1(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$ e $c \in L^\infty(\Omega)$. Sejam ainda $p, q > 1$, $f \in L^q(\Omega)$ e suponha que $u \in L^p(\Omega)$ satisfaz*

$$\int_{\Omega} u L\varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

para qualquer função $\varphi \in C^2(\Omega)$, com $\varphi = 0$ sobre $\partial\Omega$. Então $u \in W^{2,q} \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ e u é uma solução forte de

$$\begin{cases} L^*u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 1.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe $C^{1,1}(\Omega)$ e L um operador estritamente elíptico com coeficientes $a_{ij} \in C^0(\Omega)$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$, com $c \leq 0$. Então, se $f \in L^p(\Omega)$ e $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, o problema de Dirichlet $Lu = f$ em Ω e $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$.*

É consequência do teorema anterior o fato de que se $1 < p < \infty$ e $L : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ é um operador estritamente elíptico com coeficientes $a_{ij} \in C^0(\Omega)$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$, onde $c \leq 0$, então L é um isomorfismo.

Teorema 1.5. *Seja $u \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ uma solução da equação elíptica $Lu = f$ em um domínio Ω , em que os coeficientes de L pertencem a $C^{k-1,1}(\Omega)$ ($C^{k-1,\alpha}(\Omega)$), $f \in W_{loc}^{k,q}(\Omega)$ ($C^{k-1,\alpha}(\Omega)$), com $1 < p, q < \infty$, $k \geq 1$, $0 < \alpha < 1$. Então $u \in W_{loc}^{k+2,q}(\Omega)$ ($C^{k+1,\alpha}(\Omega)$). Além disso, se Ω*

é de classe $C^{k+1,1}$ ($C^{k+1,\alpha}$) e L é estritamente elíptico em Ω , com coeficientes em $C^{k-1,1}(\Omega)$ ($C^{k-1,\alpha}(\Omega)$) e $f \in W^{k,q}(\Omega)$ ($C^{k-1,\alpha}(\Omega)$), então $u \in W^{k+2,q}(\Omega)$.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe C^3 e $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Suponha que $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, com $p > n/2$, seja solução $\Delta u + f(x, u) = 0$ em Ω . Como $W^{2,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$ para algum $0 < \alpha < 1$, vemos que $f(\cdot, u(\cdot)) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Pelo Teorema 1.5, $u \in W^{3,q}(\Omega)$ para todo $q \in (0, \infty)$, resultando que $u \in C^{2,\nu}(\Omega)$ para todo $0 < \nu < 1$.

Sejam agora $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe C^3 , $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, solução de $\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$ em Ω . Aqui, usando que $W^{2,p}(\Omega) \subset C^{1,\alpha}(\Omega)$ para algum $0 < \alpha < 1$, concluímos que $f(\cdot, u(\cdot), \nabla u(\cdot)) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Novamente, usando o Teorema 1.5, obtemos que $u \in W^{3,q}(\Omega)$ para todo $q \in (0, \infty)$, do que decorre que $u \in C^{2,\nu}(\Omega)$ qualquer que seja $0 < \nu < 1$.

Os comentários acima se baseiam não somente no Teorema 1.5 como também no teorema sobre imersões de espaços de Sobolev que enunciamos abaixo.

Teorema 1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio Lipschitz regular. Temos as seguintes inclusões contínuas:*

$$W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,q}(\Omega) \text{ se } m - \frac{n}{p} \geq k - \frac{n}{q}, p \leq q < \infty$$

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^\nu(\Omega) \text{ se } m - \frac{n}{p} \geq \nu \geq 0 \text{ (com } m - \frac{n}{p} > \nu \text{ se estes números são inteiros).}$$

Se Ω é limitado, tais inclusões são compactas quando ocorre a desigualdade estrita: $m - n/p > k - n/q$ ou $m - n/p > \nu$, respectivamente.

Encerramos este capítulo com a exposição de um resultado devido a Sard.

Teorema 1.7. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação de classe C^k , onde k é um inteiro positivo e $k > n - m$. Então o conjunto dos valores críticos de f tem medida nula em $\mathbb{R}^m$ e é magro.*

Capítulo 2

Operadores de Fredholm

Com vista à utilização do *Teorema da Transversalidade* enunciado por D. Henry, faremos um estudo prévio dos operadores de Fredholm limitados, em que obteremos propriedades que serão empregadas repetidas vezes nos próximos capítulos.

Sejam X e Y espaços de Banach. Dado um operador fechado $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ tal que $\mathcal{R}(T)$ é subespaço fechado de Y , sejam $n(T) = \dim \mathcal{N}(T)$ e $d(T) = \text{codim } \mathcal{R}(T)$. Chamamos $n(T)$ e $d(T)$ de *nulidade* e *deficiência* de T , respectivamente. Se ao menos uma delas, $n(T)$ ou $d(T)$, é finita, dizemos que T é *semi-Fredholm* e definimos o índice de T como sendo

$$\text{ind } T = n(T) - d(T).$$

Quando $\text{ind } T < \infty$ (caso em que $\dim \mathcal{N}(T) < \infty$) T é semi-Fredholm à esquerda e quando $\text{ind } T > -\infty$ (caso em que $\text{codim } \mathcal{R}(T) < \infty$) T é semi-Fredholm à direita. Se ambas, $d(T)$ e $n(T)$, são finitas (ou seja, se T é semi-Fredholm à esquerda e à direita simultaneamente) T é chamado um *operador de Fredholm*.

O resultado que apresentamos a seguir garante que se $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ é um operador fechado é suficiente que tenhamos $\text{codim } \mathcal{R}(T) < \infty$ para que T seja semi-Fredholm à direita. Em particular, para concluirmos que T é Fredholm, basta verificarmos que $\dim \mathcal{N}(T) < \infty$ e $\text{codim } \mathcal{R}(T) < \infty$.

Proposição 2.1. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : \mathcal{D}(T) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear fechado. Suponha que existe subespaço fechado M de Y tal que $\mathcal{R}(T) \cap M = \{0\}$ e o subespaço $\mathcal{R}(T) \oplus M$ é fechado. Então $\mathcal{R}(T)$ é fechado.*

Demonstração. Seja $\mathcal{D}(T) \times M$ o domínio do operador linear $T_1 : \mathcal{D}(T) \times M \subset X \times Y \longrightarrow Y$ definido por

$$T_1(x, m) = Tx + m, \quad (x, m) \in \mathcal{D}(T) \times M.$$

O fato de T ser fechado nos leva facilmente à conclusão de que T_1 é também operador fechado.

Como $\mathcal{R}(T_1) = \mathcal{R}(T) \oplus M$ é subespaço fechado de Y , existe constante $c > 0$ satisfazendo

$$\|T_1(x, m)\|_Y \geq c \operatorname{dist}((x, m), \mathcal{N}(T_1)), \quad (x, m) \in \mathcal{D}(T) \times M.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \|T_1(x, 0)\|_{X \times Y} \geq c \operatorname{dist}((x, 0), \mathcal{N}(T_1)) \\ &= c \operatorname{dist}((x, 0), \mathcal{N}(T) \times \{0\}) \\ &= c \operatorname{dist}(x, \mathcal{N}(T)), \end{aligned}$$

resultando que $\mathcal{R}(T)$ é subespaço fechado. $\square$

No que segue apresentamos alguns exemplos de operadores Fredholm e semi-Fredholm.

Exemplo 1. Se X e Y são espaços de dimensão finita, qualquer operador linear $T : X \rightarrow Y$ é Fredholm com $\operatorname{ind} T = \dim X - \dim Y$. Com efeito, seja $n = \dim \mathcal{N}(T)$. Então $\operatorname{codim} \mathcal{R}(T) = \dim Y - (\dim X - n)$. Logo, $\operatorname{ind} T = n - (\dim Y - \dim X + n) = \dim X - \dim Y$ independe de T .

Se um dos espaços X, Y tem dimensão finita, situação análoga ocorre: todo operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é semi-Fredholm e $\operatorname{ind} T = \dim X - \dim Y$, como antes.

Exemplo 2. Se X e Y são espaços de Banach de dimensão infinita, operadores compactos de X em Y não são semi-Fredholm. De fato, se $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ é um operador compacto com $\mathcal{R}(K)$ fechada, seja $Y_1 = \mathcal{R}(K)$ e defina $K_1 \in \mathcal{L}(X, Y_1)$ por $K_1 x = Kx$, $x \in X$. Da hipótese de que $\mathcal{R}(K)$ é fechada segue que K_1 é compacto e de $\mathcal{R}(K_1) = Y_1$ obtemos que o operador compacto $K_1^* \in \mathcal{L}(Y_1^*, X^*)$ possui inversa contínua. Então $I_{Y_1^*} = (K_1^*)^{-1} K_1^*$ é compacta, implicando que $\dim Y_1^* < \infty$. Logo, $\dim Y_1 < \infty$. Quanto à dimensão do núcleo de K , observamos que não podemos ter $\dim \mathcal{N}(K) < \infty$ pois nesse caso construiríamos um isomorfismo entre um espaço de dimensão infinita e outro de dimensão finita.

Exemplo 3. Considere l_2 o espaço das seqüências $x = (x_1, x_2, \dots)$ de números reais tais que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$.

A translação $S : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots)$ é Fredholm com índice 1 e, em geral, S^m é Fredholm com índice m , para $m = 1, 2, \dots$. A adjunta de S , $S^* : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$, é Fredholm com índice -1 e $(S^*)^m$ tem índice $-m$, $m = 1, 2, \dots$.

O operador $L : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, 0, x_2, 0, \dots)$ é semi-Fredholm à esquerda, com índice $-\infty$ e seu adjunto $L^* : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, x_3, x_5, \dots)$ é semi-Fredholm à direita com índice ∞ . Observe que L^*L é a identidade, mas LL^* não é semi-Fredholm.

Os dois próximos teoremas evidenciam a conexão entre os operadores de Fredholm e os operadores da forma $I + K$, em que $K \in \mathcal{L}(X)$ é um operador compacto: os operadores de Fredholm são, na verdade, uma generalização dos operadores da forma $I + K$ em que K é compacto.

Teorema 2.2. *Sejam X um espaço de Banach e $K \in \mathcal{L}(X)$ um operador compacto. Então*

- (i) $\mathcal{N}(I - K)$ tem dimensão finita.
- (ii) $\mathcal{R}(I - K) = \mathcal{N}(I - K^*)^\perp$ (portanto, $\mathcal{R}(I - K)$ tem codimensão finita).
- (iii) $\mathcal{N}(I - K) = \{0\}$ se, e somente se, $\mathcal{R}(I - K) = X$.

Demonstração. (i) Se B é a bola unitária fechada em $\mathcal{N}(I - K)$, então $B = K(B)$. Sendo K compacto, B é compacto, o que garante que $\mathcal{N}(I - T)$ tem dimensão finita.

(ii) Como $\dim \mathcal{N}(I - K) < \infty$, existe subespaço fechado $X_1 \subset X$ tal que $X = \mathcal{N}(I - K) \oplus X_1$. Seja $S \in \mathcal{L}(X_1, X)$ definido por $Sx = x - Kx$, $x \in X_1$. Claramente, S é injetora e $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(I - K)$. É conhecido o fato de que $\mathcal{N}(I - K^*) = \mathcal{R}(I - K)^\perp$ (ver [5]) e, portanto, $\mathcal{N}(I - K^*)^\perp = (\mathcal{R}(I - K)^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{R}(I - K)}$. Basta então verificarmos que $\mathcal{R}(I - K)$ é subespaço fechado de X , o que faremos provando que existe $r > 0$ tal que $\|Sx\| \geq r\|x\|$ para todo $x \in X_1$.

Suponha, por absurdo, que não exista um tal $r > 0$. Então existe uma sequência $\{x_n\}$ de vetores unitários em X_1 tal que $Sx_n \rightarrow 0$. De fato, fazendo $r_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, concluímos que existe uma sequência $\{\tilde{x}_n\}$ em X_1 com a propriedade de que

$$\|S\tilde{x}_n\| < \frac{\|\tilde{x}_n\|}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tomando $x_n = \tilde{x}_n / \|\tilde{x}_n\|$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos a sequência desejada.

Pela compacidade de K , existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}$ tal que $Kx_{n_k} \rightarrow x_0$. Assim, $x_{n_k} = Sx_{n_k} + Kx_{n_k} \rightarrow x_0$, com $\|x_0\| = 1$. Logo, $Sx_0 = \lim Sx_{n_k} = 0$, contrariando o fato de que $\mathcal{N}(S) = \{0\}$.

(iii) Suponha que $\mathcal{N}(I - T) = \{0\}$ e assuma, para obter uma contradição, que $X_1 = \mathcal{R}(I - K) \not\subset X$. Por (ii), sabemos que X_1 é subespaço fechado de X , de maneira que X_1 , com a norma herdada de X , é um espaço de Banach. Notamos também que

$$K(X_1) = K((I - K)(X)) = (I - K)K(X) \subset (I - K)(X) = X_1,$$

do que segue que $K|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1$ é também um operador compacto. Seja $X_2 = (I - K)(X_1)$. Novamente, por (ii), X_2 é subespaço fechado de X_1 . Além disso, $X_2 \subsetneq X_1$. Com efeito, escolha $x \in X \setminus X_1$ e vejamos que $(I - K)x \notin X_2$. Se $(I - K)x \in X_2$, teríamos $(I - K)x = (I - K)x_1$ para algum $x_1 \in X_1$. Como $\mathcal{N}(I - K) = \{0\}$, concluiríamos que $x \in X_1$, contrariando a escolha de x .

Em geral, tomando $X_n = (I - K)^n(X)$ obtemos uma sequência estritamente decrescente de subespaços fechados de X . O Lema de Riesz (ver [5]) garante a existência de uma sequência $\{u_n\}$ satisfazendo $\|u_n\| = 1$, $u_n \in X_n \setminus X_{n+1}$ e $\text{dist}(u_n, X_{n+1}) \geq 1/2$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Se $n > m$, considerando que

$$X_{n+1} \subset X_n \subset X_{m+1} \subset X_m,$$

vemos que

$$-(I - K)u_n + (I - K)u_m + u_n \in X_{m+1}.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|Ku_n - Ku_m\| &= \|[-(I - K)u_n + (I - K)u_m + u_n] - u_m\| \\ &\geq \text{dist}(u_m, X_{m+1}) \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

o que implica que $\{Ku_n\}$ não admite subsequência convergente, contrariando a compacidade de K . Segue que $\mathcal{R}(I - K) = X$.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{R}(I - K) = X$. Neste caso, $\mathcal{N}(I - K^*) = \mathcal{R}(I - K)^\perp = X^\perp = \{0\}$. Sendo K^* compacto, $\mathcal{R}(I - K^*)^\perp = X^*$. Por fim, $\mathcal{N}(I - K) = \mathcal{R}(I - K^*)^\perp = (X^*)^\perp = \{0\}$. $\square$

Teorema 2.3. *Sejam X um espaço de Banach e $K \in \mathcal{L}(X)$ um operador compacto. Então $I - K$ é um operador de Fredholm com índice zero.*

Demonstração. Sejam $n = \dim \mathcal{N}(I - K)$ e $r = \text{codim } \mathcal{R}(I - K)$. Assuma que $n > r$. Temos que $X = \mathcal{N}(I - K) \oplus X_1$ e $X = \mathcal{R}(I - K) \oplus X_2$, para subespaços fechados X_1 e X_2 , com $\dim X_2 = r$.

Como $n > r$, existe transformação linear $A : \mathcal{N}(I - K) \rightarrow X_2$ sobrejetora, com núcleo não trivial. Defina $\bar{K} = K - AP$, onde $P \in \mathcal{L}(X)$ é a projeção de X sobre $\mathcal{N}(I - K)$ ao longo de X_1 . Note que $AP \in \mathcal{L}(X)$ é um operador compacto pois $\dim \mathcal{R}(AP) < \infty$.

Se $x \in X_1$ então $Px = 0$ e $\bar{K}x = Kx$, o que fornece $(I - \bar{K})(X_1) = (I - K)(X_1) = \mathcal{R}(I - K)$. Ainda, se $x \in \mathcal{N}(I - K)$ então $(I - \bar{K})x = (x - Kx) + Ax = Ax$, mostrando que $(I - \bar{K})(\mathcal{N}(I - K)) = A(\mathcal{N}(I - K)) = X_2$. Logo, fica evidente que $X = \mathcal{R}(I - K) \oplus X_2 \subset \mathcal{R}(I - \bar{K})$, isto é, $\mathcal{R}(I - \bar{K}) = X$.

Agora, existe $x_0 \in \mathcal{N}(I - T) \setminus \{0\}$ tal que $Ax_0 = 0$, resultando que $\bar{K}x_0 - x_0 = Kx_0 + Ax_0 - x_0 = Kx_0 - x_0 = 0$. Então $\bar{K}$ é um operador compacto com $\mathcal{N}(I - \bar{K}) \neq \{0\}$ e $\mathcal{R}(I - \bar{K}) = X$, contrariando a conclusão do Teorema 2.2. Portanto, $n \leq r$.

Observe que $\dim \mathcal{N}(I - K^*) = \text{codim } \mathcal{R}(I - K) = r$ e $\text{codim } \mathcal{R}(I - K^*) = \dim \mathcal{N}(I - K) = n$ e podemos repetir o mesmo argumento com K^* em lugar de K para verificar que $n \geq r$. $\square$

A utilização do Teorema 2.2 permite a obtenção de uma caracterização dos operadores de Fredholm limitados, enunciada a seguir.

Teorema 2.4. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T é Fredholm.

(ii) Existe $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ tal que $TS - I \in \mathcal{L}(Y)$ e $ST - I \in \mathcal{L}(X)$ são operadores compactos.

(iii) Existem $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ tais que $TS_1 - I \in \mathcal{L}(Y)$ e $S_2T - I \in \mathcal{L}(X)$ são operadores compactos.

Demonstração. A implicação (ii) $\Rightarrow$ (iii) é imediata. Suponha que existam $S_1, S_2 \in \mathcal{L}(Y, X)$ tais que $K_1 = TS_1 - I$ e $K_2 = S_2T - I$ são operadores compactos. Temos

$$\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(S_2T) = \mathcal{N}(I + K_2)$$

$$\mathcal{R}(T) \supset \mathcal{R}(TS_1) = \mathcal{R}(I + K_1).$$

Como $\dim \mathcal{N}(I + K_2) < \infty$ e $\text{codim } \mathcal{R}(I + K_1) < \infty$, segue que $\dim \mathcal{N}(T) < \infty$ e $\text{codim } \mathcal{R}(T) < \infty$.

Admita agora que T é Fredholm. Então existem subespaços fechados $E \subset X$ e $F \subset Y$ tais que $X = \mathcal{N}(T) \oplus E$ e $Y = F \oplus \mathcal{R}(T)$. Seja $T_0 : E \rightarrow \mathcal{R}(T)$ o operador dado por $T_0x = Tx$, $x \in E$. T_0 é claramente um isomorfismo. Defina $S : Y \rightarrow X$ por

$$S(f + Te) = e, \quad e \in E, f \in F.$$

Se $P : Y \rightarrow Y$ é a projeção (contínua) de Y sobre $\mathcal{R}(T)$ ao longo de F , temos

$$\begin{aligned} \|S(f + Te)\|_X &= \|S(P(f + Te))\|_X = \|T_0^{-1}(P(f + Te))\|_X \\ &\leq \|T_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{R}(T), E)} \|P\|_{\mathcal{L}(Y)} \|f + Te\|_Y, \end{aligned}$$

para quaisquer $e \in E$, $f \in F$, o que demonstra que $S \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Resta ainda verificar que $ST - I$ e $TS - I$ são operadores compactos. Sejam $Q_1 : X \rightarrow X$ a projeção de X sobre $\mathcal{N}(T)$ ao longo de E e $Q_2 : Y \rightarrow Y$ a projeção de Y sobre F ao longo de $\mathcal{R}(T)$. Tais projeções são compactas uma vez que $\mathcal{N}(T)$ e F têm dimensão finita.

Se $x \in X$, podemos escrever $x = u + e$, com $u \in \mathcal{N}(T)$ e $e \in E$. Assim,

$$(ST - I)x = ST(u + e) - (u + e) = Ste - (u + e) = -u,$$

provando que $ST - I = -Q_1$ é um operador compacto. Da mesma forma, podemos escrever $y \in Y$ como $y = f + Te$, onde $f \in F$ e $e \in E$. Neste caso, temos

$$(TS - I)y = (TS - I)(f + Te) = TS(Te) - (f + Te) = -f,$$

o que estabelece que $TS - I = -Q_2$ é também um operador compacto. $\square$

A propriedade de um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ser semi-Fredholm se transfere para o seu conjugado $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. Embora os índices de T e T^* não coincidam, eles guardam uma forte relação, expressa no teorema abaixo.

Teorema 2.5. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. T é semi-Fredholm se, e somente se T^* é semi-Fredholm. Neste caso, $\text{ind } T^* = -\text{ind } T$.*

Demonstração. O Teorema 5.13 em [14] afirma que $\mathcal{R}(T)$ é fechada se, e somente se, $\mathcal{R}(T^*)$ é fechada. Logo, $\mathcal{R}(T) = \mathcal{N}(T^*)^\perp$ o que fornece $\text{codim } \mathcal{R}(T) = \dim \mathcal{N}(T)^\perp$ e $\mathcal{R}(T^*) = \mathcal{N}(T)^\perp$, implicando $\text{codim } \mathcal{R}(T^*) = \dim \mathcal{N}(T)$. $\square$

O subconjunto de $\mathcal{L}(X, Y)$ formado pelos operadores semi-Fredholm é aberto em $\mathcal{L}(X, Y)$ conforme expressa o enunciado do próximo teorema.

Teorema 2.6. *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é semi-Fredholm, existe $\delta > 0$ tal que se $\|S - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \delta$ então S é semi-Fredholm, com $\text{ind } S = \text{ind } T$.*

Demonstração. Vamos supor inicialmente que T é Fredholm. Então $X_1 = \mathcal{N}(T)$ e $Y_2 = \mathcal{R}(T)$ são subespaços fechados de X e Y , respectivamente. Além disso, existem subespaços fechados $X_2 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$ (este último de dimensão finita) tais que $X = X_1 \oplus X_2$ e $Y = Y_1 \oplus Y_2$.

Considerando tais decomposições dos espaços X e Y , cada operador $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ admite uma representação matricial na forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 \end{pmatrix},$$

com $A_{ij} \in \mathcal{L}(X_i, Y_j)$, $i, j = 1, 2$.

Em particular,

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

mas $T_{11} = 0$ e $T_{12} = 0$ já que $\mathcal{R}(T) = Y_2$ e $T_{21} = 0$ pois $\mathcal{N}(T) = X_1$, de modo que, na realidade,

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix},$$

onde $T_{22} : X_2 \longrightarrow Y_2$ é claramente um isomorfismo.

Seja $L : Y \longrightarrow Y$ a projeção de Y sobre Y_2 paralelamente a Y_1 . Para cada $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ temos

$$\|A_{22} - T_{22}\|_{\mathcal{L}(X_2, Y_2)} \leq \|L\|_{\mathcal{L}(Y)} \|A - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}.$$

Sendo o subconjunto dos operadores inversíveis de $\mathcal{L}(X_2, Y_2)$ um subconjunto aberto, podemos escolher $\delta > 0$ tal que $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $\|S - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \delta$ implicam que S_{22} é um isomorfismo.

Fixado $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ satisfazendo $\|S - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \delta$, tome

onde

$$\begin{aligned} P &= -S_{12}S_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(Y_2, Y_1) \\ Q &= -S_{22}^{-1}S_{21} \in \mathcal{L}(X_1, X_2). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{pmatrix} I_{Y_1} & P \\ 0 & I_{Y_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{Y_1} & -P \\ 0 & I_{Y_2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ Q & I_{X_2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ -Q & I_{X_2} \end{pmatrix}$$

e, portanto,

$$\begin{pmatrix} I_{Y_1} & P \\ 0 & I_{Y_2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ Q & I_{X_2} \end{pmatrix}$$

são isomorfismos de Y em Y e de X em X , respectivamente.

Por fim, observando que

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} & 0 \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix},$$

chegamos à conclusão de que $\text{codim } \mathcal{R}(\tilde{S}) = \text{codim } \mathcal{R}(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})$ e $\dim \mathcal{N}(\tilde{S}) = \dim \mathcal{N}(S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21})$, onde $S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} \in \mathcal{L}(X_1, Y_1)$. Como X_1 e Y_1 são espaços de dimensão finita, obtemos que

$$\text{ind } S = \text{ind } \tilde{S} = \dim X_1 - \dim Y_1 = \text{ind } T.$$

Tratemos agora o caso em que T é semi-Fredholm à esquerda, isto é, $\mathcal{N}(T)$ tem dimensão finita e $\mathcal{R}(T)$ é fechada. Se $X_1 = \mathcal{N}(T)$, podemos escolher subespaço fechado X_2 tal que $X = X_1 \oplus X_2$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado, a restrição de T a uma aplicação de X_2 em $\mathcal{R}(T)$ é um isomorfismo. Logo, existe $c > 0$ satisfazendo

$$\|Tx\| \geq c\|x\|$$

para todo $x \in X_2$. Se $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ com $\|S - T\| \leq \frac{c}{8}$, para $x \in X_2$

$$\|Sx\| \geq \|Tx\| - \|S - T\|\|x\| \geq \frac{7c}{8}\|x\|,$$

de maneira que a restrição de S a X_2 é injetora e tem imagem fechada. Como X_1 tem dimensão finita, $\mathcal{R}(S) = S(X_2) + S(X_1)$ é fechada. Além disso, $\dim \mathcal{N}(S) \leq \dim X_1$. Portanto S é semi-Fredholm à esquerda.

Admita que $\text{ind } T = -\infty$, ou seja, $\mathcal{R}(T)$ tem codimensão infinita. Usando o Lema de Riesz podemos então construir uma sequência $\{y_n\}$ em Y tal que

$$\|y_n\| = 1 \quad \text{e} \quad \text{dist}(y_n, [\mathcal{R}(T) \cup \{y_1, \dots, y_{n-1}\}]) \geq \frac{3}{4},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Assim, se $j > k$ e $x \in X_2$, temos

$$\begin{aligned} \|y_j - y_k - Sx\| &\geq \max \left\{ \|y_j - y_k - Tx\| - \frac{c}{8}\|x\|, \|Sx\| - 2 \right\} \\ &\geq \max \left\{ \frac{3}{4} - \frac{c}{8}\|x\|, \frac{7c}{8}\|x\| - 2 \right\} \\ &\geq \frac{7}{8} \left(\frac{3}{4} - \frac{c}{8}\|x\| \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{7c}{8}\|x\| - 2 \right) = \frac{13}{32}. \end{aligned}$$

Isto implica que $S(X_2)$ tem codimensão infinita. Com efeito, se isto não for verdade, escolha um subespaço de dimensão finita Y_1 tal que $Y = Y_1 \oplus S(X_2)$ e seja $P \in \mathcal{L}(Y)$ a projeção sobre Y_1 ao longo de $S(X_2)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X_2$ tal que $y_n = Py_n + Sx_n$ e se $j > k$ teremos

$$\|Py_j - Py_k\| = \|y_j - y_k - S(x_j - x_k)\| \geq \frac{13}{32},$$

resultando que $\{Py_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{R}(P)$ que não admite subsequências convergentes, o que contraria o fato de $\mathcal{R}(P)$ ter dimensão finita.

Segue que $\text{codim } S(X_2) = \infty$ e, por conseguinte, $\text{codim } R(S) = \infty$, uma vez que $\mathcal{R}(S) = S(X_1) + S(X_2)$ e $S(X_1)$ tem dimensão finita.

O caso que ainda não tratamos, ou seja, aquele em que T é semi-Fredholm à direita, pode ser reduzido ao anterior se levamos em consideração o Teorema 2.5 e o fato de que T_1^* se aproxima arbitrariamente de T^* quando T_1 se aproxima suficientemente de T . $\square$

Corolário 2.7. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ um operador semi-Fredholm sobrejetor. Então todo S suficientemente próximo de T é também sobrejetor.*

Demonstração. Para S próximo de T temos $\text{ind } S = \text{ind } T = \dim \mathcal{N}(T)$ e $\dim \mathcal{N}(S) \leq \dim \mathcal{N}(T)$, como está evidente na demonstração anterior. Portanto,

$$\text{codim } \mathcal{R}(S) = \dim \mathcal{N}(S) - \text{ind } S \leq \dim \mathcal{N}(T) - \text{ind } T = \text{codim } \mathcal{R}(T) = 0,$$

provando o resultado. $\square$

Além de mostrar que o conjunto dos operadores semi-Fredholm é um aberto de $\mathcal{L}(X, Y)$, o Teorema 2.6 fornece ainda que o índice é constante nas componentes conexas daquele conjunto.

Utilizando o Teorema 2.4 conseguimos demonstrar de modo muito simples que dados operadores $T, K \in \mathcal{L}(X, Y)$, com T Fredholm e K compacto, a soma $T + K$ é Fredholm e, além disso, $\text{ind}(T + K) = \text{ind } T$. Esta afirmação pode ser estendida para operadores semi-Fredholm, mas exige uma demonstração mais cuidadosa.

Teorema 2.8. *Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ um operador semi-Fredholm. Se $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ é compacto então $T + K$ é semi-Fredholm, com $\text{ind}(T + K) = \text{ind } T$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que T é semi-Fredholm à esquerda. Se $X_1 = \mathcal{N}(T)$, escolha um complementar fechado X_2 para X_1 .

Seja $\{x_n\}$ uma sequência limitada em $\mathcal{N}(T + K)$. Escrevendo $x_n = x_n^1 + x_n^2$, $x_n^1 \in X_1$, $x_n^2 \in X_2$, notamos que $\{x_n^1\}$ e $\{Kx_n\}$ estão em conjuntos compactos, o que permite a escolha de uma subsequência $\{x_{n_j}\}$ tal que as sequências $\{x_{n_j}^1\}$ e $\{Kx_{n_j}\}$ convergem. Logo, $\{Tx_{n_j}\}$ e $\{Tx_{n_j}^1\}$ são também convergentes, do que decorre a convergência de $\{Tx_{n_j}^2\}$. Observando que a restrição de T a uma transformação linear entre os espaços X_2 e $\mathcal{R}(T)$ é um isomorfismo (pelo Teorema do Gráfico Fechado), concluímos que $\{x_{n_j}\}$ converge. Com isso provamos que conjunto limitado em $\mathcal{N}(T + K)$ é relativamente compacto, o que implica $\dim \mathcal{N}(T + K) < \infty$.

Como $\dim \mathcal{N}(T + K) < \infty$, podemos escrever $X_2 = (X_2 \cap \mathcal{N}(T + K)) \oplus X_3$ para algum subespaço fechado X_3 , de modo que $\mathcal{R}(T + K) = K(X_1) + (T + K)(X_3)$. Isto mostra que $\mathcal{R}(T + K)$ será fechada se, e somente se, $(T + K)(X_3)$ for fechado, conclusão a que chegamos baseados no fato de que $\dim X_1 < \infty$.

Para verificarmos que $(T + K)(X_3)$ é fechado, seja $\{x_n\}$ sequência em X_3 tal que $(T + K)x_n \rightarrow y$. Suponha, por absurdo, que $\{x_n\}$ não seja limitada. Podemos admitir que $\|x_n\| \rightarrow \infty$ (senão, passamos a uma subsequência com esta propriedade). Neste caso, $u_n = x_n/\|x_n\|$ é uma sequência de vetores unitários em X_3 e $(T + K)u_n \rightarrow 0$. Sendo K compacto, existe uma subsequência $\{u_{n_j}\}$ tal que $\{Ku_{n_j}\}$ converge e, conseqüentemente, $\{Tu_{n_j}\}$ converge. Novamente, por ser a restrição de T a uma transformação linear entre os espaços X_2 e $\mathcal{R}(T)$ um isomorfismo, concluímos que $\{u_{n_j}\}$ converge, digamos, para $u \in X_3$. Mas então $(T + K)u = 0$, com $u \in X_3$ e $\|u\| = 1$, uma contradição.

Portanto, $\{x_n\}$ é limitada e utilizando uma vez mais a hipótese de que K é compacto é possível supor que $\{Kx_n\}$ converge, do que segue a convergência de $\{Tx_n\}$ que, por sua vez, fornece a convergência de $\{x_n\}$. Assim, $x_n \rightarrow x \in X_3$ e $y = (T + K)x \in (T + K)(X_3)$.

Até aqui provamos apenas que $T + K$ é semi-Fredholm à esquerda, sem obter informação sobre o seu índice. Para obtê-la, observamos que $T + tK$ é semi-Fredholm à esquerda para todo $t \in [0, 1]$ e, pelo Teorema 2.6, $t \mapsto \text{ind}(T + tK)$ é localmente constante e, por conseguinte, constante. Logo, $\text{ind}(T + K) = \text{ind } T$.

Finalmente, se T não é semi-Fredholm à esquerda então o Teorema 2.5 e o fato de K^* ser compacto possibilitam a redução do problema ao caso anterior, completando a demonstração. $\square$

Exemplo 4. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo e limitado, com fronteira C^2 -regular. Considere L o operador linear

$$L : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

$$u \longmapsto \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

com coeficientes $a_{ij} \in C^0(\Omega)$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, para $i, j = 1, \dots, n$. Suponha que L é um operador estritamente elíptico em Ω , ou seja, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad x \in \Omega, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Pelo Teorema 1.4, se tomarmos $\lambda > \|c\|_{L^\infty(\Omega)}$ então $L - \lambda : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ é um isomorfismo e, portanto, um operador de Fredholm com índice zero. Como $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ (usamos o símbolo $\hookrightarrow$ para indicar imersão compacta), o operador $\lambda : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ é compacto e pelo Teorema 2.8 segue que $L = (L - \lambda) + \lambda$ é um operador de Fredholm com índice zero.

Exemplo 5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira C^3 -regular, $p > n/2$ e $L : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ o operador dado por $Lu = \Delta u + a(x)u$, onde $a \in L^\infty(\Omega)$. Então

$$\mathcal{R}(L) = \left\{ v \in L^p(\Omega); \int_{\Omega} uv = 0 \text{ para toda } u \in \mathcal{N}(L) \right\}.$$

De fato, seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de $\mathcal{N}(L)$. Sabemos que $u_i \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$, para todo $\alpha \in (0, 1)$. A limitação de Ω assegura que $u_i \in L^q(\Omega)$, onde $q > 1$ e $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Observando que

$$\int_{\Omega} u_i L\dot{u} = \int_{\Omega} (\Delta \dot{u} + a \dot{u}) u_i = \int_{\Omega} (\Delta u_i + a u_i) \dot{u} = 0, \quad \dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega),$$

para $i = 1, \dots, n$, concluímos que $\{u_1, \dots, u_n\} \subset \mathcal{N}(L^*)$. Segue do exemplo anterior que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de $\mathcal{N}(L^*)$ e $\mathcal{R}(L) = \overline{\mathcal{R}(L)} = \mathcal{N}(L^*)^\perp$, o que prova nossa afirmação.

A composição de dois operadores semi-Fredholm limitados produz, desde que seus índices possam ser somados, um operador semi-Fredholm limitado que tem por índice exatamente a soma dos índices dos operadores presentes na composição. Encerramos o capítulo dedicado aos operadores de Fredholm enunciando este resultado.

Teorema 2.9. *Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Se $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ e $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ são operadores semi-Fredholm e seus índices podem ser somados, então $TS \in \mathcal{L}(X, Z)$ é semi-Fredholm com $\text{ind}(TS) = \text{ind} T + \text{ind} S$.*

Demonstração. Faremos a demonstração assumindo inicialmente que cada um dos operadores T e S possui nulidade ou deficiência igual a zero. Há, portanto, quatro casos a distinguir:

caso 1: $\text{codim } \mathcal{R}(T) = 0, \text{codim } \mathcal{R}(S) = 0$. Como T e S são sobrejetoras, TS é sobrejetora e, além disso, $\dim \mathcal{N}(TS) = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{N}(S)$, quer este número seja finito ou não. Segue que $\text{ind}(TS) = \text{ind } T + \text{ind } S$.

caso 2: $\dim \mathcal{N}(T) = 0, \dim \mathcal{N}(S) = 0$. Claramente $\dim \mathcal{N}(TS) = 0$. Como $\mathcal{R}(T)$ e $\mathcal{R}(S)$ são fechadas, existem $c_T > 0$ e $c_S > 0$ que cumprem

$$\|Tx\| \geq c_T \|x\|, x \in X \quad \text{e} \quad \|Sy\| \geq c_S \|y\|, y \in Y.$$

Em particular,

$$\|TSx\| \geq c_S c_T \|x\|, x \in X,$$

com o que provamos que $\mathcal{R}(TS)$ é fechada.

Neste caso, verificar que $\text{ind}(TS) = \text{ind } T + \text{ind } S$ equivale a verificar que $\text{codim } \mathcal{R}(TS) = \text{codim } \mathcal{R}(T) + \text{codim } \mathcal{R}(S)$. Se $\text{codim } \mathcal{R}(T) = \infty$ ou $\text{codim } \mathcal{R}(S) = \infty$ é imediata a conclusão de que $\text{codim } \mathcal{R}(TS) = \infty$.

Suponha então que T e S são operadores de Fredholm. Sob tal hipótese sabemos que $Y = Y_1 \oplus Y_2$ e $Z = Z_1 \oplus Z_2$, onde $Y_1 = \mathcal{R}(S)$, $Z_1 = \mathcal{R}(T)$ e Y_1 e Z_2 são subespaços de dimensão finita. De $\mathcal{N}(T) = \{0\}$ e $\dim Y_2 < \infty$ obtemos que $Z = Z_1 \oplus Z_2 = T(\mathcal{R}(S)) \oplus T(Y_2) \oplus Z_2$, com $\dim T(Y_2) = \dim Y_2$. Logo, $\text{codim } \mathcal{R}(TS) = \dim T(Y_2) + \dim Z_2 = \text{codim } \mathcal{R}(S) + \text{codim } \mathcal{R}(T)$.

caso 3: $\dim \mathcal{N}(T) = 0, \text{codim } \mathcal{R}(S) = 0$. Aqui, $\dim \mathcal{N}(TS) = \dim \mathcal{N}(S) = \text{ind } S$ e $\text{codim } \mathcal{R}(TS) = \text{codim } \mathcal{R}(T) = \text{ind } T$. Se os índices de T e S podem ser somados, ou seja, se um dos operadores T e S possui índice finito, então TS é semi-Fredholm, com $\text{ind}(TS) = \text{ind } T + \text{ind } S$.

caso 4: $\text{codim } \mathcal{R}(T) = 0, \dim \mathcal{N}(S) = 0$. Sejam $Y_1 = \mathcal{R}(S) \cap \mathcal{N}(T)$, Y_2 um subespaço tal que $\mathcal{N}(T) = Y_1 \oplus Y_2$ e Y_3 um subespaço satisfazendo $Y = \mathcal{R}(S) \oplus Y_2 \oplus Y_3$. Desde que T é sobrejetora,

$$Z = T(\mathcal{R}(S) \oplus Y_2 \oplus Y_3) = \mathcal{R}(TS) \oplus T(Y_3),$$

o que torna evidente a desigualdade $\text{codim } \mathcal{R}(S) \geq \text{codim } \mathcal{R}(TS)$.

Para que os índices de T e S possam ser somados, pelo menos um deles deve ser finito.

Se $\text{ind } T = \infty$, necessariamente $\text{codim } \mathcal{R}(S) < \infty$ e, pela discussão inicial, $\text{codim } \mathcal{R}(TS) < \infty$. Além disso, $\dim \mathcal{N}(T) = \infty$, do que concluímos que TS é semi-Fredholm com $\text{ind}(TS) = \infty$.

Se, por outro lado, $\text{ind } T < \infty, \dim \mathcal{N}(T) = \text{ind } T < \infty$. Nestas circunstâncias, $\dim Y_2 < \infty$ e, conseqüentemente, $\text{codim } \mathcal{R}(TS) = \text{codim } \mathcal{R}(S) - \dim Y_2$. Ainda, pela injetividade de S temos

$\dim \mathcal{N}(TS) = \dim Y_1 < \infty$. Portanto, TS é semi-Fredholm e

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(TS) &= \dim Y_1 - (\operatorname{codim} \mathcal{R}(S) - \dim Y_2) = \\ &= (\dim Y_1 + \dim Y_2) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(S) \\ &= \dim \mathcal{N}(T) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(S) \\ &= \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S. \end{aligned}$$

Cuidemos agora do caso geral. Se $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ é semi-Fredholm com índice menor ou igual a zero devemos ter $\mathcal{N}(S)$ de dimensão finita, digamos m , e $\operatorname{codim} \mathcal{R}(S) \geq m$. Escolha um subespaço m dimensional $Y_1 \subset Y$ com $Y_1 \cap \mathcal{R}(S) = \{0\}$ e um isomorfismo S_1 entre $\mathcal{N}(S)$ e Y_1 . Se $X_1 = \mathcal{N}(S)$, escolha um subespaço fechado X_2 que verifique $X = X_1 \oplus X_2$ e seja $G : X \rightarrow Y$ o operador de posto finito (e portanto compacto) dado por $G(x_1 + x_2) = S_1 x_1$. O operador $S + G$ é injetor. De fato, $(S + G)(x_1 + x_2) = 0 \iff Sx_2 + S_1 x_1 = 0 \iff Sx_2 = S_1 x_1 = 0 \iff x_2 = x_1 = 0$.

Por outro lado, se o índice de S é maior ou igual a zero então $\operatorname{codim} \mathcal{R}(S) = m$ para algum inteiro positivo m e $\dim \mathcal{N}(S) \geq m$. Escolha agora subespaços $X_1 \subset X$ e $Y_1 \subset Y$, de dimensão finita m , tais que $X_1 \subset \mathcal{N}(S)$ e $Y_1 \cap \mathcal{R}(S) = \{0\}$. Note que $Y = Y_1 \oplus \mathcal{R}(S)$ e existe subespaço fechado $X_2 \subset X$ satisfazendo $X = X_1 \oplus X_2$. Tome um isomorfismo S_1 entre os espaços X_1 e Y_1 e defina $L : X \rightarrow Y$ por $L(x_1 + x_2) = S_1 x_1$. Por sua construção L é compacto e $S + L$ é sobrejetor.

Dessa forma, se $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ e $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ são operadores semi-Fredholm para os quais a soma $\operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S$ está definida, podemos escolher $L_1 \in \mathcal{L}(Y, Z)$ e $L_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, compactos, tais que cada um dos operadores $T + L_1$ e $S + L_2$ é injetor ou sobrejetor. Pelo que provamos anteriormente, $(T + L_1)(S + L_2)$ é semi-Fredholm com índice $\operatorname{ind}(T + L_1) + \operatorname{ind}(S + L_2)$. Por fim, a observação de que $K = L_1 S + T L_2 + L_1 L_2$ é um operador cuja imagem tem dimensão finita (e portanto compacto) nos conduz, se aplicamos o Teorema 2.8, à conclusão de que $TS = (T + L_1)(S + L_2) - K$ é semi-Fredholm e, mais ainda,

$$\operatorname{ind}(TS) = \operatorname{ind}(T + L_1) + \operatorname{ind}(S + L_2) = \operatorname{ind} T + \operatorname{ind} S.$$

□

Capítulo 3

Perturbação de Contorno

Este capítulo compõe-se de duas seções nas quais apresentamos técnicas e ferramentas empregadas para lidar com o problema da perturbação dos domínios de definição de um problema de contorno. Na primeira seção exporemos um tipo de cálculo diferencial relacionado às perturbações de fronteira. Na segunda, enunciaremos e provaremos uma generalização, obtida por D. Henry, do *Teorema da Transversalidade* estabelecido por Abraham e Thom.

3.1 Cálculo Diferencial das Perturbações de Fronteira

Nesta seção abordaremos um tipo de cálculo em que pretendemos que a variável independente seja o domínio de definição de um problema de contorno.

Há duas maneiras usuais de descrever a deformação de uma região:

(i) descrição lagrangeana: dada uma região inicial $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, temos uma aplicação $(t, p) \mapsto x(t, p)$ que fornece a posição da partícula $p \in \Omega$ no instante t .

(ii) descrição euleriana: escrevemos a velocidade e outras variáveis como função do tempo e da posição em um sistema de coordenadas fixado. Nesta forma temos, por exemplo, uma função velocidade $V(t, x)$ que indica a velocidade que uma partícula teria no ponto x , no instante t . Se $x(t, p)$ é a posição que a partícula $p \in \Omega$ ocupa no instante t , então

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t, p) = V(t, x(t, p)).$$

Vamos considerar um operador diferencial não linear $u \mapsto v$,

$$v(y) = f\left(y, u(y), \frac{\partial u}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n}(y), \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}(y), \frac{\partial^2 u}{\partial y_2 \partial y_1}(y), \dots\right), \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

em que f é uma função fixada.

Para tornar a notação mais compacta, definiremos um operador diferencial linear L por

$$Lu(y) = \left(u(y), \frac{\partial u}{\partial y_1}(y), \dots, \frac{\partial u}{\partial y_n}(y), \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}(y), \frac{\partial^2 u}{\partial y_2 \partial y_1}(y), \dots\right)$$

com tantos termos quantos forem necessários, de modo que o operador diferencial não linear inicial assume a forma

$$u(\cdot) \mapsto f(\cdot, Lu(\cdot)).$$

Mais precisamente, suponha $f : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação definida em um aberto U , Ω um aberto de $\mathbb{R}^n$ e admita ainda que $Lu(y) \in \mathbb{R}^p$ onde estiver definido. Para funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suficientemente suaves, tais que $(x, Lu(x)) \in U$ para todo $x \in \bar{\Omega}$, definimos F_Ω por

$$F_\Omega(u)(x) = f(x, Lu(x)), \quad x \in \Omega.$$

Se, para sermos mais específicos, f é uma função contínua, Ω é limitado e o operador linear L envolve derivadas até ordem m , o domínio de F_Ω será um subconjunto aberto de $C^m(\Omega)$ (possivelmente vazio) e os valores de F_Ω estarão em $C^0(\Omega)$. Naturalmente, outros espaços de funções podem ser utilizados, como os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, por exemplo.

Dizemos que uma aplicação $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um mergulho de classe C^m se h é um difeomorfismo de classe C^m de Ω sobre $h(\Omega)$. Dado um mergulho $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos o *pull-back* h^* por

$$h^*u(x) = u(h(x)), \quad x \in \Omega,$$

que aplicamos a funções u definidas em $h(\Omega)$. Claramente, h^* é um isomorfismo de $C^m(h(\Omega))$ sobre $C^m(\Omega)$, cuja inversa é $(h^{-1})^*$. Usamos a mesma notação para o *pull-back* em outros espaços de funções. Assim, escrevemos $h^* : W^{m,p}(h(\Omega)) \rightarrow W^{m,p}(\Omega)$ para espaços de Sobolev, $h^* : C^{k,\beta}(h(\Omega)) \rightarrow C^{k,\beta}(\Omega)$, $0 \leq k + \beta \leq m$, para os espaços de Hölder, etc.

No caso em que Ω é limitado e o domínio $\mathcal{D}(F_\Omega)$ de F_Ω é não vazio, para $h \in \text{Diff}^m(\Omega)$ em uma vizinhança suficientemente pequena de i_Ω , o domínio de $F_{h(\Omega)}$ é também não-vazio. De fato, se $v \in \mathcal{D}(F_\Omega)$ então $u = h^{*-1}v \in \mathcal{D}(F_{h(\Omega)})$, para h na vizinhança em questão.

Ao passarmos da região Ω para a região $h(\Omega)$ por meio do mergulho h , podemos visualizar o operador diferencial não-linear formal $v(\cdot) \mapsto f(\cdot, Lv(\cdot))$ em $h(\Omega)$ de duas maneiras: o operador não linear

$$F_{h(\Omega)} : \mathcal{D}(F_{h(\Omega)}) \subset C^m(h(\Omega)) \rightarrow C^0(h(\Omega))$$

é sua forma euleriana, enquanto a forma lagrangeana corresponde ao operador

$$h^*F_{h(\Omega)}h^{*-1} : h^*(\mathcal{D}(F_{h(\Omega)})) \subset C^m(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega),$$

sendo empregada a mesma terminologia quando outros espaços de funções substituem $C^m(h(\Omega))$ e $C^m(\Omega)$.

A forma lagrangeana apresenta a conveniência de atuar em espaços que independem de h , além de servir a nosso propósito de calcular derivadas com respeito aos domínios: um modo natural de fazê-lo é tomar derivadas com respeito à variável h .

Atendo-nos à forma lagrangeana, consideramos a aplicação

$$F : (h, u) \longmapsto h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u)$$

definida em

$$\mathcal{D}(F) = \bigcup_{h \in \text{Diff}^m(\Omega)} \{(h, u); h^{*-1}u \in \mathcal{D}(F_{h(\Omega)})\},$$

que é um aberto de $\text{Diff}^m(\Omega) \times C^m(\Omega)$. Precisamos estudar sua diferenciabilidade e obter ferramentas para o cálculo de derivadas com respeito a h .

Observando que

$$\begin{aligned} h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u)(x) &= F_{h(\Omega)}(h^{*-1}u)(h(x)) \\ &= f(h(x), L(h^{*-1}u)(h(x))) \\ &= f(h(x), h^* L h^{*-1}u(x)), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

concluímos que é suficiente examinarmos a diferenciabilidade da aplicação

$$(h, u) \longmapsto h^* L h^{*-1}u : \text{Diff}^m(\Omega) \times C^m(\Omega) \longrightarrow C^0(\Omega).$$

Por se tratar de uma aplicação linear em u , nossa preocupação recai somente sobre as derivadas em h .

Levando em consideração que um operador diferencial linear formal L tem o aspecto

$$u(\cdot) \longmapsto \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_1} u(\cdot), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_k} u(\cdot) \right),$$

onde $\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}) \in \mathbb{N}^n$, com $|\alpha_i| = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \leq m$, para $i = 1, \dots, k$ e

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha_i} u = \prod_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)^{\alpha_{i,j}} u,$$

podemos supor que L é simplesmente da forma

$$u(\cdot) \longmapsto \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{\alpha} u(\cdot),$$

com $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ satisfazendo $|\alpha| \leq m$.

Neste caso, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} h^* \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) h^{*-1}u(x) &= \frac{\partial(u \circ h^{-1})}{\partial y_1}(h(x)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \frac{\partial h_j^{-1}}{\partial y_i}(h(x)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) [h'(x)]_{ji}^{-1}, \end{aligned}$$

onde $[h'(x)]_{ji}^{-1}$ é o ji -ésimo elemento da inversa da matriz (nas bases canônicas) da derivada de h no ponto x . Logo,

$$\begin{aligned} h^* \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha h^{*-1} u(x) &= \prod_{i=1}^n \left(h^* \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) h^{*-1} \right)^{\alpha_i} u(x) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n [h'(x)]_{ji}^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_i} u(x), \end{aligned}$$

do que segue a conclusão de que, na verdade, $(h, u) \mapsto h^* L h^{*-1} u$ é analítica no aberto $\text{Diff}^m(\Omega)$ em h . Conseqüentemente, se f é de classe C^k então $F : \mathcal{D}(F) \subset \text{Diff}^m(\Omega) \times C^m(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ também será de classe C^k . Os resultados de suavidade são essencialmente os mesmos quando são empregados outros espaços de funções.

Nossa intenção agora será a de calcular a derivada de Gâteaux de $h \mapsto F(h, u) = h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1}(u)$, ou seja, a t -derivada ao longo de uma curva de mergulhos $t \mapsto h(t, \cdot)$ de classe C^1 .

Suponha que desejamos calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{\Omega(t)}(v)(y) = \frac{\partial}{\partial t} f(y, Lv(y))$$

com y fixado em $\Omega(t) = h(t, \Omega)$. Como $y = h(t, x)$ para algum $x \in \Omega = \Omega(0)$, para mantê-lo fixo x precisa se mover. Assim, devemos ter $y = h(t, x(t))$ com

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} x'(t),$$

de modo que se $U(x, t) = (\frac{\partial h}{\partial x})^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}$, $x(t)$ deve ser solução da equação diferencial $dx/dt = -U(x, t)$. Com isso, a derivada parcial em t na forma euleriana com $y = h(t, x)$ fixado corresponde à *derivada anti-convectiva* D_t da forma Lagrangeana na região de referência Ω :

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \quad U(x, t) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Mais precisamente, temos o seguinte.

Lema 3.1. *Suponha $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e que $\det h_x(x, t) \neq 0$ na região de interesse. Então*

$$D_t(h^*(t)\psi(\cdot, t)) = h^*(t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(\cdot, t),$$

onde $h^*(t)$ é o pull-back relativo a $h(\cdot, t)$.

Demonstração. Seja $\Phi(\cdot, t) = h^*(t)\psi(\cdot, t)$, ou seja, $\Phi(x, t) = \psi(h(x, t), t)$. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial \psi}{\partial x}(h(x, t), t) \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(h(x, t), t) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(h(x, t), t) \frac{\partial h_j}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(h(x, t), t) \end{aligned}$$

e

$$U(x, t) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) = \sum_{k=1}^n U_k(x, t) \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}(x, t) = \sum_{k=1}^n U_k(x, t) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(h(x, t), t) \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x, t) \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_t(h^*(t)\psi(\cdot, t))(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) - U(x, t) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(h(x, t), t) \frac{\partial h_j}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(h(x, t), t) - \sum_{k=1}^n U_k(x, t) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(h(x, t), t) \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x, t) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(h(x, t), t) \left(\frac{\partial h_j}{\partial t}(x, t) - \sum_{k=1}^n U_k(x, t) \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x, t) \right) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(h(x, t), t). \end{aligned}$$

Agora,

$$U_k(x, t) = \sum_{i=1}^n (h_x(x, t))_{ki}^{-1} \frac{\partial h_i}{\partial t}(x, t),$$

resultando que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n U_k(x, t) \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x, t) &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n (h_x(x, t))_{ki}^{-1} \frac{\partial h_i}{\partial t}(x, t) \right) \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial t}(x, t) \left(\sum_{k=1}^n (h_x(x, t))_{ki}^{-1} \frac{\partial h_j}{\partial x_k}(x, t) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial t}(x, t) \delta_{ij} = \frac{\partial h_j}{\partial t}(x, t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} D_t(h^*(t)\psi(\cdot, t))(x) &= \frac{\partial \psi}{\partial t}(h(\cdot, t), t)(x) \\ &= \left(h^*(t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(\cdot, t) \right)(x), \end{aligned}$$

o que significa precisamente que

$$D_t(h^*(t)\psi(\cdot, t)) = h^*(t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(\cdot, t).$$

□

Teorema 3.2. Suponha $f(t, y, \lambda)$ de classe C^1 em um aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, L um operador diferencial com coeficientes constantes de ordem $\leq m$, com $Lv(y) \in \mathbb{R}^p$ onde estiver definido, e para conjuntos $Q \subset \mathbb{R}^n$ e funções v de classe C^m em Q , seja $F_Q(t)v$ a função

$$(F_Q(t)v)(y) = f(t, y, Lv(y)), \quad y \in Q,$$

para as funções v em que $F_Q(t)$ estiver definida.

Suponha $t \mapsto h(t, \cdot)$ uma curva de mergulhos de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega(t) = h(t, \Omega)$ e que para $|j| \leq m$, $|k| \leq m+1$, $(t, x) \mapsto \partial_t \partial_x^j h(t, x)$, $\partial_x^k h(t, x)$, $\partial_t \partial_x^j u(t, x)$, $\partial_x^k u(t, x)$ são contínuas em $\mathbb{R} \times \Omega$ próximo de $t = 0$, e

$$(h^*(t))^{-1}u(t, \cdot)$$

está no domínio de $F_{\Omega(t)}(t)$. Então, em pontos de Ω ,

$$D_t(h^*(t)F_{\Omega(t)}(h^*(t))^{-1})(u) = (h^*(t)\dot{F}_{\Omega(t)}(h^*(t))^{-1})(u) + (h^*(t)F'_{\Omega(t)}(t)(h^*(t))^{-1})(u)((h^*(t))^{-1}D_t u)$$

onde D_t é a derivada anti-convectiva,

$$(\dot{F}_Q(t)v)(y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y, Lv(y)), \quad y \in Q$$

e

$$(F'_Q(t)v \cdot w)(y) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y, Lv(y))Lw(y), \quad y \in Q$$

é a linearização de $v \mapsto F_Q(t)v$.

Demonstração. Seja $v(t, \cdot) = (h^*(t))^{-1}u(t, \cdot)$. Pelo Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned} D_t(h^*(t)L(h^*(t))^{-1})(u(t, \cdot)) &= D_t(h^*(t)Lv(t, \cdot)) \\ &= h^*(t)L\frac{\partial v}{\partial t}(t, \cdot) = h^*(t)L(h^*(t))^{-1}D_t u(t, \cdot), \end{aligned}$$

já que

$$D_t u(t, \cdot) = D_t(h^*v(t, \cdot)) = h^*(t)\frac{\partial v}{\partial t}(t, \cdot).$$

Logo,

$$\begin{aligned} D_t(h^*(t)F_{\Omega(t)}(t)(h^*(t))^{-1}u(t, \cdot)) &= D_t(h^*(t)f(t, \cdot, Lv(t, \cdot))) \\ &= h^*(t)\frac{\partial}{\partial t}f(t, \cdot, Lv(t, \cdot)) \\ &= h^*(t)\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot, Lv(t, \cdot)) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \cdot, Lv(t, \cdot))L\frac{\partial v}{\partial t}(t, \cdot)\right] \\ &= h^*(t)\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot, Lv(t, \cdot)) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \cdot, Lv(t, \cdot))L((h^*(t))^{-1}D_t u(t, \cdot)) \\ &= h^*(t)\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot, L((h^*(t))^{-1}u(t, \cdot))) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \cdot, L((h^*(t))^{-1}u(t, \cdot)))L((h^*(t))^{-1}D_t u(t, \cdot)) \\ &= h^*(t)\dot{F}_{\Omega(t)}(t)(h^*(t))^{-1}u(t, \cdot) \\ &\quad + h^*(t)(F'_{\Omega(t)}(t)(h^*(t))^{-1}u(t, \cdot))((h^*(t))^{-1}D_t u(t, \cdot)). \end{aligned}$$

□

Exemplo: Suponha que estejamos lidando com o operador linear

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(y) \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^\alpha,$$

que não depende explicitamente de t e seja $h(t, x) = x + tV(x)$, para t em uma vizinhança de 0 e $x \in \Omega$. Então, pelo Teorema 3.2, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h^* A h^{*-1} u)|_{t=0} &= D_t(h^* A h^{*-1} u)|_{t=0} + h_x^{-1} h_t \nabla(h^* A h^{*-1} u)|_{t=0} \\ &= A \left(\frac{\partial u}{\partial t} - V \cdot \nabla u \right) + V \cdot \nabla(Au) \\ &= A \frac{\partial u}{\partial t} + [V \cdot \nabla, A]u. \end{aligned}$$

O comutador de $V \cdot \nabla$ e A , que indicamos acima por $[V \cdot \nabla, A]$ é ainda um operador de ordem m , embora $A V \cdot \nabla$ e $V \cdot \nabla A$ sejam operadores de ordem $m + 1$, podendo ser calculado em funções de classe C^m .

Até agora vimos adotando Ω como “origem” ou região de referência, mas podemos transferi-la facilmente para qualquer região Ω_1 difeomorfa a Ω . Seja $H_1 : \Omega \rightarrow \Omega_1$ um difeomorfismo. Para cada mergulho $h : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, defina o mergulho $h_1 = h \circ H_1$. Da mesma forma, defina $x_1 = H_1^{-1}x$ e $u_1 = u \circ H_1$. Então

$$h^* F_{h(\Omega_1)} h^{*-1} u(x) = h_1^* F_{h_1(\Omega)} h_1^{*-1} u_1(x_1).$$

Esta mudança de origem nos permitirá calcular derivadas com respeito à variável h em $h = i_\Omega$, onde os cálculos são mais simples.

3.2 Teorema da Transversalidade

Reservamos esta seção para a apresentação do enunciado e da demonstração de uma importante generalização do *Teorema da Transversalidade* de Abraham e Thom [1], que D. Henry prova em [12] visando aplicações em dimensão infinita, com ênfase para o caso de índice negativo.

Esta generalização, bem como o cálculo diferencial desenvolvido na seção precedente, são essenciais na obtenção do resultado sobre hiperbolicidade genérica exposto na última seção do Capítulo 4.

Antes que enuncieemos o resultado algumas definições são necessárias.

Um subconjunto S de um espaço topológico X é *magro* (em X) quando é uma reunião enumerável $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ tal que, para cada n , o fecho de S_n tem interior vazio.

Para que S seja magro em X é condição necessária e suficiente que tenhamos $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, onde $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ são fechados com interior vazio.

Uma propriedade que se infere imediatamente da definição anterior é que a reunião de uma família enumerável de subconjuntos magros em X resulta ainda em um subconjunto magro em X .

Dizemos que um subconjunto S é *residual* se o seu complementar é magro, ou seja, se S contém uma intersecção enumerável de abertos densos.

Se X e Y são espaços de Banach, $U \subset X$ é um aberto e $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$), diremos que um ponto $x \in U$ é um *ponto regular* de f se a derivada $f'(x)$ é sobrejetora e seu núcleo admite um complementar fechado. Um *valor crítico* de f é a imagem, por f , de algum ponto crítico de f . Todos os demais pontos de Y são chamados *valores regulares* de f , incluindo aqueles no complementar da imagem de f .

Em nossas aplicações, o núcleo de $f'(x)$ sempre terá dimensão finita, de modo que x será um ponto crítico de f se, e somente se, $f'(x)$ não for sobrejetora.

Teorema 3.3. (Teorema da Transversalidade) *Sejam k um inteiro positivo, X , Y e Z variedades de Banach de classe C^k , $A \subset X \times Y$ aberto, $f : A \rightarrow Z$ aplicação de classe C^k e $\xi \in Z$. Suponha que para todo $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$ tenhamos:*

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) : T_x X \rightarrow T_\xi Z$ é semi-Fredholm com índice $< k$.

(2) Uma das seguintes alternativas é válida:

(a) $Df(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) : T_x X \times T_y Y \rightarrow T_\xi Z$ é sobrejetora, ou

(b) $\dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x, y)) / \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right\} \geq 1 + \dim \mathcal{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$.

Suponha ainda que

(3) $(x, y) \mapsto y : f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$ é uma aplicação σ -própria, ou seja, $f^{-1}(\xi) = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ é uma reunião enumerável de conjuntos M_j tais que $(x, y) \mapsto y : M_j \rightarrow Y$ é uma aplicação própria para cada j .

Sejam $A_y = \{x \in X; (x, y) \in A\}$ e

$$Y_{\text{crit}} = \{y \in Y; \xi \text{ é um valor crítico de } f(\cdot, y) : A_y \rightarrow Z\}.$$

Então Y_{crit} é um conjunto magro em Y .

Antes de apresentarmos a demonstração do teorema acima julgamos oportuno fazer duas observações sobre o seu enunciado.

Observação 1: Se $f^{-1}(\xi)$ é um espaço de Lindelöf (ou seja, se toda cobertura aberta de $f^{-1}(\xi)$ admite subcobertura enumerável) e em todo ponto $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$ a hipótese (1) está satisfeita, então a hipótese (3) estará automaticamente satisfeita. Provaremos esta afirmação no Lema 3.5 que apresentamos a seguir.

Uma situação particular em que $f^{-1}(\xi)$ é um espaço de Lindelöf é aquela em que X e Y são espaços métricos separáveis.

Observação 2: A hipótese (2)(b) é mais geral para o caso de índice negativo. Com efeito, se a hipótese (2)(b) se verifica em um ponto $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$, como

$$\text{codim } \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \geq \dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x, y)) / \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right\}$$

temos que

$$\text{ind} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \leq \dim \mathcal{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) - \dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x, y)) / \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right\} \leq -1.$$

Sendo assim, a hipótese (2)(b) só pode ser verdadeira em um ponto $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$ se o índice de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é negativo.

Por outro lado, se o índice de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ é negativo e a hipótese (2)(a) vale, então

$$\text{codim } \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x, y)) / \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right\}$$

e

$$\dim \mathcal{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) - \dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x, y)) / \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right\} \leq -1,$$

resultando que

$$\dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x, y)) / \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right\} \geq 1 + \dim \mathcal{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right).$$

Fracionaremos a demonstração do Teorema 3.3 em vários resultados auxiliares.

Lema 3.4. *Sejam X, Y, Z variedades de Banach de classe C^1 e f uma aplicação de um aberto $A \subset X \times Y$ em Z . Suponha (x_0, y_0) um ponto de A tal que f é de classe C^1 em uma vizinhança W_0 de (x_0, y_0) , $f(x_0, y_0) = \xi$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é um operador semi-Fredholm à esquerda. Então existe vizinhança W de (x_0, y_0) , com $\overline{W} \subset W_0$, tal que $(x, y) \mapsto y : f^{-1}(\xi) \cap \overline{W} \rightarrow Y$ é aplicação própria.*

Demonstração. Sendo o resultado local, podemos supor que X, Y e Z são espaços de Banach. A hipótese de que $L = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é semi-Fredholm à esquerda fornece que $X_1 = \mathcal{N}(L)$ tem dimensão finita, de modo que existe subespaço fechado $X_2 \subset X$ tal que $X = X_1 \oplus X_2$ e a restrição de L a X_2 é um isomorfismo de X_2 em $\mathcal{R}(L)$. Observe que a inversa de tal restrição é contínua já que $\mathcal{R}(L)$ é subespaço fechado. Assim, existe $c > 0$ satisfazendo $\|Lx_2\| \geq c\|x_2\|$ para todo $x_2 \in X_2$.

Como f é de classe C^1 , se $B = 1 + \left\| \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right\|$, existe uma vizinhança W de (x_0, y_0) satisfazendo $\overline{W} \subset W_0$ e

$$\|f(x, y) - f(x', y') - L(x - x')\| \leq \frac{c}{2}\|x - x'\| + B\|y - y'\|,$$

quaisquer que sejam (x, y) e (x', y') em W .

Considere $\{(x_n, y_n)\}$ sequência em $f^{-1}(\xi) \cap \overline{W}$ para a qual $y_n \rightarrow y$ em Y . Então

$$\|L(x_n - x_m)\| = \|f(x_n, y_n) - f(x_m, y_m) - L(x_n - x_m)\| \leq \frac{c}{2}\|x_n - x_m\| + B\|y_n - y_m\|.$$

Escrevendo $x_n = x_n^1 + x_n^2$, com $x_n^1 \in X_1$ e $x_n^2 \in X_2$, notamos que $\{x_n^1\}$ é uma sequência limitada em um espaço de dimensão finita (a limitação é consequência do fato de que, na verdade, $\{(x_n, y_n)\}$ é limitada). Então existe subsequência $\{x_{n_k}^1\}$ convergente. Mas

$$\begin{aligned} c\|x_{n_k}^2 - x_{n_l}^2\| &\leq \|L(x_{n_k}^2 - x_{n_l}^2)\| = \|L(x_{n_k} - x_{n_l})\| \\ &\leq \frac{c}{2}\|x_{n_k} - x_{n_l}\| + B\|y_{n_k} - y_{n_l}\|, \end{aligned}$$

resultando que

$$\|x_{n_k}^2 - x_{n_l}^2\| \leq \|x_{n_k}^1 - x_{n_l}^1\| + \frac{2B}{c}\|y_{n_k} - y_{n_l}\|,$$

o que mostra que $\{x_{n_k}^2\}$ é sequência de Cauchy no espaço de Banach X_2 . Segue que $\{x_{n_k}\}$ e $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$ são sequências convergentes. Se (x, y) é o limite de $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$, a continuidade de f e o fato de $\overline{W}$ ser fechado asseguram que $(x, y) \in f^{-1}(\xi) \cap \overline{W}$, o que completa a demonstração. $\square$

Lema 3.5. *Sejam k um inteiro positivo, X, Y, Z variedades de Banach de classe C^k , $A \subset X \times Y$ um aberto, $f : A \rightarrow Z$ uma aplicação de classe C^k e ξ um ponto de Z . Suponha que*

- (1) *Para todo $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$ o operador $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) : T_x X \rightarrow T_\xi Z$ é semi-Fredholm à esquerda, e*
- (2) *O espaço $f^{-1}(\xi)$ é Lindelöf.*

Então a aplicação $(x, y) \mapsto y : f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$ é σ -própria.

Demonstração. Seja $p = (x, y) \in f^{-1}(\xi)$. A hipótese (1) e o fato de que f é de classe C^1 em A possibilitam a aplicação do Lema 3.4 para obtermos uma vizinhança $W_p \subset \overline{W}_p \subset A$ do ponto p tal que $(a, b) \mapsto b : \overline{W}_p \cap f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$ é própria. A hipótese (2), por sua vez, garante que podemos extrair da cobertura $\{W_p \cap f^{-1}(\xi)\}_{p \in f^{-1}(\xi)}$ uma subcobertura enumerável, digamos $\{W_{p_n} \cap f^{-1}(\xi)\}$. Assim é possível escrever $f^{-1}(\xi) = \bigcup_{n \geq 0} \overline{W}_{p_n} \cap f^{-1}(\xi)$, reunião em que $(a, b) \mapsto b : \overline{W}_{p_n} \cap f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$ é aplicação própria para cada n . $\square$

Lema 3.6. *Sejam k um inteiro positivo, X, Y, Z variedades de Banach de classe C^k , f uma aplicação de classe C^k de um aberto $A \subset X \times Y$ em Z e ξ um ponto de Z . Suponha que para $(x_0, y_0) \in f^{-1}(\xi)$ tenhamos:*

- (1) *$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) : T_{x_0} X \rightarrow T_\xi Z$ é um operador semi-Fredholm de índice $< k$.*
- (2) *Uma das seguintes alternativas é verdadeira:*

(a) *$Df(x_0, y_0) : T_{x_0} \times T_{y_0} \rightarrow T_\xi Z$ é sobrejetora, ou*

$$(b) \dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x_0, y_0)) / \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) \right\} \geq 1 + \dim \mathcal{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right).$$

Então existem vizinhanças abertas U de x_0 , V de y_0 e um subconjunto aberto $V^0 \subset V$, denso em V , tais que $\bar{U} \times \bar{V} \subset A$ e ξ é um valor regular de $f(\cdot, y)|_U : U \rightarrow Z$ para todo $y \in V^0$.

Demonstração. Novamente o resultado é local — nas proximidades de $(x_0, y_0) \in X \times Y$ e $\xi \in Z$ — e não há perda de generalidade em considerar X, Y, Z espaços de Banach, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\xi = 0$ e f de classe C^k em uma vizinhança de $(0, 0) \in X \times Y$. Para (x, y) na vizinhança acima podemos escrever

$$f(x, y) = Lx + My + o(\|x\| + \|y\|),$$

onde $M = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $L = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é um operador semi-Fredholm com índice $< k$.

Segundo a primeira observação que fizemos a respeito do enunciado do Teorema da Transversalidade, se a hipótese (2)(a) estiver satisfeita com $\text{ind} L < 0$ então também o estará a hipótese (2)(b). Por esta razão é suficiente demonstrar o resultado no caso (a) apenas quando $\text{ind} L \geq 0$ e no caso (b), quando necessariamente $\text{ind} L < 0$.

Caso (a): Iremos supor que $\mathcal{R}(L, M) = Z$ e $\text{ind} L \geq 0$. Como $\text{ind} L$ é finito, L é Fredholm. Desse modo, se $X_1 = \mathcal{N}(L)$ e $Z_2 = \mathcal{R}(L)$, existem subespaços fechados $X_2 \subset X$ e $Z_1 \subset Z$ tais que $X = X_1 \oplus X_2$, $Z = Z_1 \oplus Z_2$, o operador $L_2 = L|_{X_2} : X_2 \rightarrow Z_2$ é um isomorfismo e $\text{ind} L = \dim X_1 - \dim Z_1$. Observamos que o fato de termos $Z = Z_2 \oplus \mathcal{R}(M)$ permite a suposição adicional de que $Z_1 \subset \mathcal{R}(M)$.

Seja Y_1 um subespaço de Y para o qual $M_1 = M|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow Z_1$ é um isomorfismo e defina $Y_2 = M^{-1}(Z_2)$. Então $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Escrevendo f em termos de suas componentes nestes espaços, temos

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, y_1, y_2) &= (M_1 y_1 + o_1(\|x\| + \|y\|), L_2 x_2 + M y_2 + o_2(\|x\| + \|y\|)) \\ &= (M_1 y_1 + g(x_1, x_2, y_1, y_2), L_2 x_2 + h(x_1, x_2, y_1, y_2)), \end{aligned}$$

onde g e h são aplicações de classe C^k , g, h, g_x, g_y e h_x se anulam todas em $(0, 0)$, embora talvez possamos ter $h_y \neq 0$, dependendo do comportamento de M no subespaço Y_2 . Notando que $\frac{\partial f}{\partial (x_2, y_1)}(0, 0, 0, 0) = (L_2, M_1)$ é um isomorfismo, utilizamos o teorema da função implícita para resolver a equação $f(x, y) = 0$ para $x_2 = \psi(x_1, y_2)$ e $y_1 = \phi(x_1, y_2)$, com ψ e ϕ funções de classe C^k em uma vizinhança de $(0, 0) \in X_1 \times Y_2$. Podemos então selecionar uma vizinhança W de $(0, 0) \in X \times Y$ com a seguinte propriedade: se $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in W$ e $f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ então $x_2 = \psi(x_1, y_2)$ e $y_1 = \phi(x_1, y_2)$.

Na forma matricial $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ se escreve como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} g_{x_1}(x, y) & g_{x_2}(x, y) \\ h_{x_1}(x, y) & h_{x_2}(x, y) \end{pmatrix}$$

e pode ser reescrita como o produto

$$\begin{pmatrix} g_{x_1}(x, y) & g_{x_2}(x, y) \\ h_{x_1}(x, y) & h_{x_2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Z_1} & p(x, y) \\ 0 & I_{Z_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta(x, y) & 0 \\ 0 & L_2 + h_{x_2}(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{X_1} & 0 \\ q(x, y) & I_{X_2} \end{pmatrix},$$

no qual

$$\Delta(x, y) = g_{x_1}(x, y) - g_{x_2}(x, y)(L_2 + h_{x_2}(x, y))^{-1}h_{x_1}(x, y) : X_1 \longrightarrow Z_1$$

$$q(x, y) = (L_2 + h_{x_2}(x, y))^{-1}h_{x_1}(x, y) : X_1 \longrightarrow Z_2$$

$$p(x, y) = g_{x_2}(x, y)(L_2 + h_{x_2}(x, y))^{-1} : Z_2 \longrightarrow Z_1,$$

para (x, y) em uma vizinhança $W_1 \subset W$ escolhida pequena o suficiente para que $L_2 + h_{x_2}$ seja inversível. Como os operadores dados pelas matrizes nas extremidades do produto matricial acima são sobrejetores, resulta que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, para $(x, y) \in W_1$, é sobrejetor se, e somente se, $\Delta(x, y)$ é sobrejetor.

Levando em consideração que $f(x_1, \psi(x_1, y_2), \phi(x_1, y_2), y_2) = 0$, obtemos as identidades

$$\begin{cases} h_{x_1}(\sigma(x_1, y_2)) + (L_2 + h_{x_2}(\sigma(x_1, y_2)))\psi_{x_1}(x_1, y_2) + h_{y_1}(\sigma(x_1, y_2))\phi_{x_1}(x_1, y_2) = 0 \\ g_{x_1}(\sigma(x_1, y_2)) + g_{x_2}(\sigma(x_1, y_2))\psi_{x_1}(x_1, y_2) + (M_1 + g_{y_1}(\sigma(x_1, y_2)))\phi_{x_1}(x_1, y_2) = 0, \end{cases}$$

em que $\sigma(x_1, y_2) = (x_1, \psi(x_1, y_2), \phi(x_1, y_2), y_2)$.

Se estivermos restritos a uma vizinhança de $(0, 0) \in X_1 \times Y_2$ pequena o bastante para que $L_2 + h_{x_2}(\sigma(x_1, y_2))$ seja inversível, podemos resolver a primeira equação para ψ_{x_1} e substituir na primeira, obtendo

$$\Delta(\sigma(x_1, y_2)) + [M_1 + g_{y_1}(\sigma(x_1, y_2)) - g_{x_2}(\sigma(x_1, y_2))(L_2 + h_{x_2}(\sigma(x_1, y_2)))^{-1}h_{y_1}(\sigma(x_1, y_2))] \phi_{x_1}(x_1, y_2) =$$

para todo (x_1, y_2) em tal vizinhança. Escolha então um aberto $W_{1,2}$ contendo $(0, 0) \in X_1 \times Y_2$, contido na vizinhança acima, pequeno o bastante para que o coeficiente de ϕ_{x_1} seja um isomorfismo para todo $(x_1, y_2) \in W_{1,2}$.

Tome agora $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\tilde{U} = \{x_1 + x_2; \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} < \epsilon\}$ e $V = \{y_1 + y_2; \max\{\|y_1\|, \|y_2\|\} < \delta\}$, então $\tilde{U} \times V \subset W_1$ e se $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \tilde{U} \times V$ então $(x_1, y_2) \in W_{1,2}$. Nestas condições, temos que 0 é valor regular de $f(\cdot, y_1 + y_2)|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow Z$ se, e somente se, y_1 é valor regular de $\phi(\cdot, y_2)|_{B_{X_1}(0, \epsilon)} : B_{X_1}(0, \epsilon) \longrightarrow Y_1$.

Por fim, fixado y_2 com $\|y_2\| < \delta$, o Teorema de Sard garante a existência de um subconjunto denso D_{y_2} de $B_{Y_1}(0, \delta)$ tal que todo $y_1 \in D_{y_2}$ é valor regular da aplicação $\phi(\cdot, y_2) : B_{X_1}(0, \epsilon) \longrightarrow Y_1$. Segue que 0 é valor regular de $f(\cdot, y_1 + y_2)|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \longrightarrow Z$ sempre que $y_1 \in D_{y_2}$. Definamos pois

$$\tilde{V}^0 = \bigcup_{\|y_2\| \leq \delta} \{y_1 + y_2; y_1 \in D_{y_2}\}.$$

Pelo Lema 3.4 existe um aberto W' em torno de (x_0, y_0) para o qual $(a, b) \mapsto b : f^{-1}(\xi) \cap \overline{W'} \rightarrow Z$ é uma aplicação própria. Não há perda de generalidade em supor que $\tilde{U} \times V \subset W'$. Escolha um aberto U contendo x_0 tal que $\bar{U} \subset \tilde{U}$. Afirmamos que fixado $\bar{y} \in \tilde{V}^0$, existe uma vizinhança $V_{\bar{y}}$ de $\bar{y}$, tal que $V_{\bar{y}} \subset V$, com a seguinte propriedade: se $y' \in V_{\bar{y}}$ então a aplicação $f(\cdot, y')|_U : U \rightarrow Z$ tem o zero como valor regular.

De fato, suponha que não exista uma tal vizinhança. Então existem seqüências $\{y_n\}$ em V e $\{x_n\}$ em U , com $y_n \rightarrow y$, tais que $f(x_n, y_n) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)$ não é sobrejetora para todo n . Como $(x_n, y_n) \in f^{-1}(0) \cap \overline{W'}$ para todo n e $y_n \rightarrow y$, a seqüência $\{x_n\}$ admite uma subsequência convergente $\{x_{n_k}\}$. Se $\bar{x} = \lim x_{n_k}$ temos que $\bar{x} \in \tilde{U}$, $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$ não é sobrejetora, o que contraria o fato de que $f(\cdot, y)|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow Z$ tem o zero como valor regular para todo $y \in \tilde{V}^0$.

Assim, tomando

$$V^0 = \bigcup_{\bar{y} \in \tilde{V}^0} V_{\bar{y}},$$

temos que V^0 é aberto e denso em V (pois $\tilde{V}^0$ é claramente denso em V) e, além disso, zero é valor regular de $f(\cdot, y)|_U : U \rightarrow Z$ para todo $y \in V^0$.

Caso (b): Aqui, $\dim\{\mathcal{R}(L, M)/\mathcal{R}(L)\} > \dim \mathcal{N}(L)$ e $\text{ind } L < 0$. Sejam $n = \dim \mathcal{N}(L)$ e $V \subset \mathcal{R}(M)$ tal que $\mathcal{R}(L, M) = \mathcal{R}(L) \oplus V$. Então $\dim V \geq n + 1$ e existe subconjunto $\{f_1, \dots, f_{n+1}\} \subset V$ linearmente independente. Se $f_i = My_i$, para $i = 1, \dots, n + 1$, o conjunto $\{y_1, \dots, y_{n+1}\}$ é linearmente independente (caso contrário $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ não o seria). Tome $Y_1 = [\{y_1, \dots, y_{n+1}\}]$. Note que $M(Y_1) \cap \mathcal{R}(L) = \{0\}$ e que M é injetora sobre Y_1 , o que se deve novamente ao fato de $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ ser linearmente independente. Sejam $Z_1 = M(Y_1)$ e $Z_2 \subset Z$ um subespaço tal que $\mathcal{R}(L) \subset Z_2$ e $Z = Z_1 \oplus Z_2$. Tome $Y_2 = M^{-1}(Z_2)$, de modo que $Y = Y_1 \oplus Y_2$. Sejam, por fim, $X_1 = \mathcal{N}(L)$ e $X_2 \subset X$ tal que $X = X_1 \oplus X_2$. Temos que $n = \dim X_1 < \dim Z_1 = \dim Y_1$.

Nestas circunstâncias f assume a forma

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, y_1, y_2) &= (M_1 y_1 + o_1(\|x\| + \|y\|), L_2 x_2 + M y_2 + o_2(\|x\| + \|y\|)) \\ &= (M_1 y_1 + g(x_1, x_2, y_1, y_2), L_2 x_2 + h(x_1, x_2, y_1, y_2)), \end{aligned}$$

onde $M_1 = M|_{Y_1} : Y_1 \rightarrow Z_1$ é um isomorfismo e $L_2|_{X_2} : X_2 \rightarrow Z_2$ é injetora com imagem fechada. Além disso, g e h são aplicações de classe C^k em uma vizinhança de $(0, 0) \in X \times Y$ e g, g_x, g_y, h, h_x se anulam no ponto $(0, 0)$. Definindo $\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = M_1 y_1 + g(x_1, x_2, y_1, y_2)$, observamos que $\frac{\partial \Phi}{\partial y_1}(0, 0, 0, 0) = M_1$ é um isomorfismo e $\Phi(0, 0, 0, 0) = 0$. Empregando o teorema da função implícita solucionamos $M_1 y_1 + g(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ para $y_1 = \psi(x_1, x_2, y_2)$ aplicação de classe C^k em uma vizinhança de $(0, 0, 0) \in X_1 \times X_2 \times Y_2$, com $\psi_x(0, 0, 0) = 0$. Seja W uma vizinhança de $(0, 0) \in X \times Y$ com a propriedade de que se $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in W$ e $\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ então $y_1 = \psi(x_1, x_2, y_2)$.

Escolha agora $\delta > 0$ de modo que tenhamos $\{(x_1 + x_2, y_1 + y_2); \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} < \delta \text{ e } \max\{\|y_1\|, \|y_2\|\} < \delta\} \subset W$. Fixe y_2 com $\|y_2\| < \delta$ e seja

$$S(y_2) = \{x = (x_1, x_2); \|x_1\| < \delta, \|x_2\| < \delta, f(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2, y_2), y_2) = 0\}.$$

Sejam ainda $p_1 : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1$ a projeção sobre X_1 e $\pi(y_2) = p_1|_{S(y_2)} : S(y_2) \rightarrow X_1$. Se $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, $\pi(y_2)$ é injetora com inversa lipschitziana. Assumindo isto obtemos que

$$\psi(S(y_2), y_2) = \psi(\cdot, y_2) \circ (\pi(y_2))^{-1}(\pi(y_2)(S(y_2))) \subset Y_1$$

é a imagem lipschitziana de um conjunto em X_1 . Como $\dim X_1 < \dim Y_1$, chegamos à conclusão de que $\psi(S(y_2), y_2)$ tem medida nula em Y_1 , do que resulta ser $\psi(S(y_2), y_2)$ magro em Y_1 . Portanto o conjunto $D_{y_2} = \{y_1 \in Y_1; \|y_1\| < \delta \text{ e } y_1 \notin \psi(S(y_2), y_2)\}$ é denso em $B_{Y_1}(0, \delta)$. Se $\tilde{U} = \{x_1 + x_2; \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} < \delta\}$, notamos que 0 é valor regular de $f(\cdot, y_1 + y_2)|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow Z$ para todo $y_1 \in D_{y_2}$ pois 0 não é atingido.

Considere então $V = \{y_1 + y_2; \max\{\|y_1\|, \|y_2\|\} < \delta\}$ e

$$\tilde{V}^0 = \bigcup_{\|y_2\| < \delta} \{y_1 + y_2; y_1 \in D_{y_2}\}.$$

Escolhendo um aberto U contendo x_0 , com $\bar{U} \subset \tilde{U}$, usamos raciocínio análogo ao que desenvolvemos no caso (a) para mostrar que para cada $\bar{y} \in \tilde{V}^0$ existe um aberto $V_{\bar{y}} \subset V$, contendo $\bar{y}$, tal que zero é valor regular de $f(\cdot, y')|_U : U \rightarrow Z$ sempre que $y' \in V_{\bar{y}}$. Definindo

$$V^0 = \bigcup_{\bar{y} \in \tilde{V}^0} V_{\bar{y}}$$

terminamos a demonstração.

Provemos agora nossa afirmação de que $\pi(y_2)$ tem inversa lipschitziana para $\delta > 0$ convenientemente escolhido. Sabemos que $\|Lx_2\| \geq c\|x_2\|$, $x_2 \in X_2$ para alguma constante $c > 0$. Uma vez que $\psi_x(0, 0, 0) = 0$, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\|f(x, \psi(x, y_2), y_2) - f(\bar{x}, \psi(\bar{x}, y_2), y_2) - L(x - \bar{x})\| \leq \frac{c}{2}\|x - \bar{x}\|$$

para $\|x\| < \delta$, $\|\bar{x}\| < \delta$ e $\|y_2\| < \delta$.

Se, adicionalmente, $x, \bar{x} \in S(y_2)$ obtemos

$$\begin{aligned} c\|x_2 - \bar{x}_2\| &\leq \|L(x_2 - \bar{x}_2)\| = \|L(x - \bar{x})\| \leq \frac{c}{2}\|x - \bar{x}\| \\ &\leq \frac{c}{2}\|x_1 - \bar{x}_1\| + \frac{c}{2}\|x_2 - \bar{x}_2\|, \end{aligned}$$

de modo que

$$\|x_2 - \bar{x}_2\| \leq \|x_1 - \bar{x}_1\| = \|\pi(y_2)(x) - \pi(y_2)(\bar{x})\|,$$

ou seja,

$$\|\pi(y_2)(x) - \pi(y_2)(\bar{x})\| \geq \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|$$

o que completa a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema da Transversalidade. Admitiremos inicialmente que $(x, y) \mapsto y : f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$ é própria e provaremos que Y_{crit} é fechado com interior vazio.

Para verificarmos que Y_{crit} é fechado seja $\{y_n\}$ uma sequência em Y_{crit} que converge em Y para um ponto $\bar{y}$. Para cada inteiro positivo n existe $x_n \in A_{y_n}$ ponto crítico de $f(\cdot, y_n) : A_{y_n} \rightarrow Z$ tal que $f(x_n, y_n) = \xi$. A suposição de que $(x, y) \mapsto y : f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$ é própria implica a existência de uma subsequência convergente $\{(x_{n_k}, y_{n_k})\}$, convergindo, digamos, para $(\bar{x}, \bar{y}) \in f^{-1}(\xi)$. Se o operador $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$ fosse sobrejetor, concluiríamos que para n suficientemente grande os operadores $\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n)$ são sobrejetores, uma contradição. Segue que $\bar{x}$ é ponto crítico de $f(\cdot, \bar{y}) : A_{\bar{y}} \rightarrow Z$, com $f(\bar{x}, \bar{y}) = \xi$, isto é, $\bar{y} \in Y_{crit}$.

Resta ainda demonstrar que Y_{crit} tem interior vazio, ou seja, precisamos verificar que dado $y \in Y_{crit}$ existe y' arbitrariamente próximo de y tal que ξ é valor regular de $f(\cdot, y') : A_{y'} \rightarrow Z$. Para isto, tome $y \in Y_{crit}$ e seja $K_y = \{x; f(x, y) = \xi\}$. Da hipótese de que $(x, y) \mapsto y : f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$ é própria segue que K_y é compacto.

Para cada $x \in K_y$ podemos aplicar o Lema 3.6 para o ponto (x, y) , obtendo abertos $U_x \subset X$, $V_x \subset Y$ e $V_x^0 \subset V_x$ tais que $x \in U_x$, $y \in V_x$, V_x^0 é denso em V_x , $\bar{U}_x \times \bar{V}_x \subset A$ e $f(\cdot, y') : U_x \rightarrow Z$ tem ξ como valor regular para todo $y' \in V_x^0$.

A compacidade de K_y garante a existência de $x_1, \dots, x_N \in K_y$ tais que $K_y \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_N}$. Sejam $\tilde{U} = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_N}$, $\tilde{V} = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_N}$ e $\tilde{V}^0 = V_{x_1}^0 \cap \dots \cap V_{x_N}^0$. É fácil ver que $\tilde{V}^0$ é denso em $\tilde{V}$ e que ξ é valor regular de $f(\cdot, \tilde{y})|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow Z$ para todo $\tilde{y} \in \tilde{V}^0$.

Afirmamos que, na verdade, ξ é valor regular de $f(\cdot, \tilde{y}) : A_{\tilde{y}} \rightarrow Z$ para todo $\tilde{y} \in \tilde{V}^0$ suficientemente próximo de y .

Para sermos mais precisos, seja $\mathcal{B} = \{B_n\}$ uma base enumerável de vizinhanças em y para a topologia de Y e, para cada, n considere $W_n = \cap_{i=1}^n B_i$. Claramente os W_n são abertos com $W_1 \supset W_2 \supset W_3 \supset \dots$.

Suponha, para chegar a um absurdo, que tenhamos $(W_n \cap \tilde{V}^0) \cap Y_{crit} \neq \emptyset$ para cada n . Então existe uma sequência $\{y_n\}$ em $\tilde{V}^0$ tal que $y_n \rightarrow y$ e ξ é valor crítico de $f(\cdot, y_n) : A_{y_n} \rightarrow Z$ para todo n . Desse modo, para cada n existe $x_n \in A_{y_n}$ ponto crítico de $f(\cdot, y_n) : A_{y_n} \rightarrow Z$, com $f(x_n, y_n) = \xi$. Usando uma vez mais o fato de que $(x, y) \mapsto y : f^{-1} \rightarrow Y$ é própria, podemos supor que $x_n \rightarrow x$ em X (caso contrário passamos a uma subsequência convergente). Agora $f(x, y) = \xi$, de maneira que $x \in K_y$. Logo, para n suficientemente grande concluímos que $x_n \in U$, $y_n \in \tilde{V}^0$ e chegamos a uma contradição.

Portanto, existe N_0 tal que $(W_{N_0} \cap \tilde{V}^0) \cap Y_{crit} = \emptyset$ e por conseguinte $(W_n \cap \tilde{V}^0) \cap Y_{crit} = \emptyset$ para todo $n \geq N_0$.

Finalmente, seja W um aberto de Y que contém y . Escolha $\tilde{N} > N_0$ tal que $y \in W_{\tilde{N}} \subset W$. Então $\tilde{V} \cap W_{\tilde{N}}$ é vizinhança de y em $\tilde{V}$. Pela densidade de $\tilde{V}^0$ em $\tilde{V}$ existe $p \in \tilde{V} \cap W_{\tilde{N}} \cap \tilde{V}^0$. Como $\tilde{N} > N_0$, temos $(W_{\tilde{N}} \cap \tilde{V}^0) \cap Y_{crit} = \emptyset$ e, necessariamente, $p \notin Y_{crit}$. Segue que $p \in W \cap Y_{crit}^c$. Com isto finalizamos a demonstração de que Y_{crit} tem interior vazio.

Por fim, suponha que $(x, y) \mapsto y : f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$, ao invés de própria, seja apenas σ -própria. Neste caso, $f^{-1}(\xi) = \cup_{j=1}^{\infty} M_j$ e $(x, y) \mapsto y : M_j \rightarrow Y$ é própria para todo j . Defina

$$Y_{crit}^j = \{y; \text{ existe um ponto crítico } x \text{ de } f(\cdot, y) : A_y \rightarrow Z \text{ tal que } f(x, y) = \xi \text{ e } (x, y) \in M_j\}.$$

É imediata a conclusão de que $Y_{crit} = \cup_{j=1}^{\infty} Y_{crit}^j$. Repetindo o argumento que utilizamos acima, demonstramos que Y_{crit}^j é fechado e tem interior vazio para cada j , obtendo que Y_{crit} é subconjunto magro de Y . $\square$

Sob hipóteses um pouco mais restritivas é possível obter informações mais precisas, em algum sentido, sobre o conjunto Y_{crit} . É disso que trata o Corolário 3.7 que provaremos a seguir. Antes, porém, precisamos de algumas definições.

Dizemos que um espaço topológico X é um *espaço de Baire* se todo subconjunto magro de X tem interior vazio. É nesses espaços que a noção de subconjunto magro realmente destaca uma classe de conjuntos que são insignificantes diante do espaço todo.

Seja E um espaço topológico de Baire. Para qualquer subconjunto fechado ou σ -fechado $F \subset E$ e qualquer inteiro $m \geq 0$, $\text{codim } F > m$ significa que o conjunto

$$\{\phi \in C(S^m, E); \phi(S^m) \cap F \neq \emptyset\}$$

é magro em $C(S^m, E)$. Aqui, $S^m = \partial \overline{B^{m+1}}$, onde B^{m+1} é a bola unitária em $\mathbb{R}^{m+1}$, para $m > 0$, $S^0 = \{0\}$ e $C(S^m, E)$ está munido da topologia compacto-aberta.

Analogamente, se E é um espaço de Banach ou uma variedade de Banach de classe C^1 dizemos que C^1 - $\text{codim } F > m$ se o conjunto

$$\{\phi \in C^1(S^m, E); \phi(S^m) \cap F \neq \emptyset\}$$

é magro em $C^1(S^m, E)$.

Prova-se que se $\text{codim } F > m$ para algum $m > 0$ então $\text{codim } F > m - 1$. Isto nos permite definir a codimensão e não somente a frase “ $\text{codim } F > m$ ”.

Assim, se E é um espaço de Baire e $F \subset E$ é um subconjunto fechado ou σ -fechado, afirmamos que $\text{codim } F = m$ quando $\text{codim } F \not> m$ e $m = 0$ ou $\text{codim } F > m - 1$. Assim, para

cada subconjunto fechado ou σ -fechado F existe $m \in \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ tal que $\text{codim } F = m$ e chamamos m de *codimensão* de F .

Corolário 3.7. *Sejam k e m inteiros positivos, X, Y e Z variedades de Banach de classe C^k , $A \subset X \times Y$ aberto, $f : A \rightarrow Z$ aplicação de classe C^k e $\xi \in Z$. Suponha que para todo $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$ tenhamos:*

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) : T_x X \rightarrow T_\xi Z$ é semi-Fredholm com índice $\leq -m$.

(2) Uma das seguintes alternativas é válida:

(a) $Df(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) : T_x X \times T_y Y \rightarrow T_\xi Z$ é sobrejetora, ou

(b) $\dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x, y)) / \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \right\} \geq m + \dim \mathcal{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$.

Suponha ainda que

(3) $(x, y) \mapsto y : f^{-1}(\xi) \rightarrow Y$ é uma aplicação σ -própria, ou seja, $f^{-1}(\xi) = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ é uma reunião enumerável de conjuntos M_j tais que $(x, y) \mapsto y : M_j \rightarrow Y$ é uma aplicação própria para cada j .

Sejam $A_y = \{x \in X; (x, y) \in A\}$ e

$$Y_{\text{crit}} = \{y \in Y; \xi \text{ é um valor crítico de } f(\cdot, y) : A_y \rightarrow Z\}.$$

Então $Y_{\text{crit}} = \{y; \xi \in f(A_y, y)\}$ tem codimensão $\geq m$ em Y .

Demonstração. Primeiramente observamos que a hipótese de que $\text{ind } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \leq -m$ para todo $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$ implica que $\text{codim } \mathcal{R} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) > 0$ qualquer que seja $(x, y) \in f^{-1}(\xi)$, o que é suficiente para concluirmos que $Y_{\text{crit}} = \{y; \xi \in f(A_y, y)\}$.

Serão tratados separadamente os casos $m = 1$ e $m > 1$. No primeiro caso, $m = 1$, estão satisfeitas a hipótese (3) e as hipóteses (1) e (2)(b) do Teorema da Transversalidade em todos os pontos de $f^{-1}(\xi)$. Isto garante que

$$Y_{\text{crit}} = \{y; \xi \in f(A_y, y)\}$$

é magro e tem, portanto, codimensão ≥ 1 .

Para tratarmos o caso $m > 1$ reduziremos o problema ao caso $m = 1$ da seguinte maneira. Sejam $\tilde{X} = X \times S^{m-1}$, $\tilde{Y} = C^k(S^{m-1}, Y)$, $\tilde{Z} = Z$ e $\tilde{A} = \{(x, t, \tilde{y}); (x, \tilde{y}(t)) \in A\}$. Defina $\tilde{f} : \tilde{A} \subset \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow \tilde{Z}$ por $\tilde{f}(x, t, \tilde{y}) = f(x, \tilde{y}(t))$. Veremos que $\tilde{f}$ satisfaz as mesmas hipóteses do enunciado, exceto pela substituição de m por 1.

Sabemos que $f^{-1}(\xi) = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$ é uma reunião enumerável de conjuntos M_j tais que $(x, y) \mapsto y : M_j \rightarrow Y$ é própria para cada j . Defina $\tilde{M}_j = \{(x, t, \tilde{y}); (x, \tilde{y}(t)) \in M_j\}$, $j = 1, 2, \dots$.

Fixemos um inteiro positivo arbitrário j e provemos que $(x, t, \tilde{y}) \mapsto \tilde{y} : \tilde{M}_j \rightarrow \tilde{Y}$ é própria. Seja $\{(x_n, t_n, \tilde{y}_n)\}$ sequência em $\tilde{M}_j$ tal que $\tilde{y}_n \rightarrow y$ em $\tilde{Y}$. Como S^{m-1} é compacto,

podemos supor que $\{t_n\}$ converge para $t \in S^{m-1}$ (se assim não o for basta tomarmos uma subsequência convergente). Logo, $\{(x_n, \tilde{y}_n(t_n))\}$ é sequência em M_j tal que $\tilde{y}_n(t_n) \rightarrow \tilde{y}(t)$. Como $(x, y) \mapsto y : M_j \rightarrow Y$ é própria, existe subsequência $\{x_{n_k}, \tilde{y}_{n_k}(t_{n_k})\}$ que converge em M_j , do que segue a convergência de $\{(x_{n_k}, t_{n_k}, \tilde{y}_{n_k})\}$ em M_j . Portanto, $\tilde{f}$ satisfaz a hipótese (3).

Tome agora $(x, t, \tilde{y}) \in \tilde{f}^{-1}(\xi)$, ou seja, $f(x, \tilde{y}(t)) = \xi$. Temos

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial(x, t)}(x, t, \tilde{y})(u, s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t))u + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}(t))\tilde{y}'(t) \right) s,$$

para $(u, s) \in T_x X \times T_t(S^{m-1})$ e

$$D\tilde{f}(x, t, \tilde{y})(u, s, h) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t))u + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}(t))\tilde{y}'(t) \right) s + \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}(t))h(t),$$

para $(u, s, h) \in T_x X \times T_t(S^{m-1}) \times C^k(S^{m-1}, Y)$.

Sejam p e q as dimensões dos espaços

$$\frac{\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)\right)}{\left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t))\right) \cap \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)\right)\right)}$$

e

$$\frac{\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}(t))\right)}{\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}(t))\right) \cap \left(\mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t))\right) + \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)\right)\right)},$$

respectivamente. Temos

$$\dim \mathcal{N}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial(x, t)}(x, t, \tilde{y})\right) = \dim \mathcal{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t))\right) + (m-1) - q$$

e

$$\text{codim } \mathcal{R}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial(x, t)}(x, t, \tilde{y})\right) = \text{codim } \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t))\right) - q,$$

resultando que

$$\text{ind } \frac{\partial \tilde{f}}{\partial(x, t)}(x, t, \tilde{y}) = \text{ind } \frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t)) + (m-1) \leq -1.$$

Além disso, $p + q = \dim \left\{ \mathcal{R}(Df(x, \tilde{y}(t))) / \mathcal{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t))\right) \right\}$ e a validade, para a função f , da hipótese (2)(b) no ponto $(x, \tilde{y}(t))$ fornece que $p + q \geq m + \dim \mathcal{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, \tilde{y}(t))\right)$. Assim,

$$\dim \left\{ \frac{\mathcal{R}(D\tilde{f}(x, t, \tilde{y}))}{\mathcal{R}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial(x, t)}(x, t, \tilde{y})\right)} \right\} \geq p \geq 1 + \dim \mathcal{N}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial(x, t)}(x, t, \tilde{y})\right).$$

Acabamos de demonstrar que as hipóteses (1) e (2)(b) também são satisfeitas pela aplicação $\tilde{f}$ com 1 em lugar de m . Concluimos então que o conjunto

$$\{\tilde{y} \in C^k(S^{m-1}, Y); \xi = f(x, \tilde{y}(t)) \text{ para algum } (x, t), \text{ com } (x, \tilde{y}(t)) \in A\}$$

é magro em $C^k(S^{m-1}, Y)$, o que significa precisamente que $\{\tilde{y} \in C^k(S^{m-1}, Y); \tilde{y}(S^{m-1}) \cap Y_{\text{crit}}\}$ é magro. Portanto Y_{crit} tem C^k -codimensão $\geq m - 1$ e, conseqüentemente, tem codimensão $\geq m - 1$.

□

Capítulo 4

Propriedades Genéricas de Equilíbrios de Equações Parabólicas

Se $\mathcal{P}$ é uma propriedade dependente de um parâmetro $x \in X$, onde X é um espaço topológico de Baire, dizemos que $\mathcal{P}$ é *genérica* (em X) quando se verifica em todos os pontos de X , exceto nos pontos de um subconjunto magro de X .

Neste capítulo apresentamos dois exemplos, de naturezas distintas, tratando da hiperbolicidade genérica dos equilíbrios de equações parabólicas.

No primeiro deles, que ocupa a Seção 4.1, mostraremos que fixada uma região Ω , limitada e com fronteira suave, todos os equilíbrios (soluções estacionárias) do problema de Dirichlet para a equação de reação-difusão

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + f(x, u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

são hiperbólicos, qualquer que seja a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tomada em um espaço conveniente de funções, a menos de um subconjunto magro. Assim, a genericidade se refere às funções f neste caso.

No segundo exemplo, apresentado na Seção 4.3, a situação é outra: provaremos que dada uma função bem comportada $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, todos os equilíbrios do problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u + f(x, u, \nabla u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega\end{aligned}$$

são hiperbólicos, qualquer que seja a região Ω escolhida em uma certa classe de regiões, exceto talvez para Ω em um subconjunto magro desta classe. Portanto, aqui estabelecemos a genericidade com respeito às regiões Ω .

Na Seção 4.2 apresentamos um resultado cuja inserção se justifica não apenas pelo fato de ser empregado no segundo exemplo, mas também por seu valor intrínseco.

4.1 Simplicidade Genérica das Soluções de $\Delta u + f(x, u) = 0$

Considere o problema de Dirichlet para a equação de reação-difusão

$$(4.1) \quad u_t = \Delta u + f(x, u), \quad t > 0, \quad x \in \Omega$$

$$(4.2) \quad u = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave e f é uma função suficientemente regular em $\Omega \times \mathbb{R}$.

Provaremos nesta seção que a hiperbolicidade dos equilíbrios de (4.1), (4.2) é uma propriedade genérica. Em termos precisos, se Ω é um domínio limitado de classe C^3 e $\mathcal{C}$ denota o conjunto de todas as funções $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , $k \geq 2$, munido da topologia de Whitney, mostraremos que existe um conjunto residual $\mathcal{C}^H \subset \mathcal{C}$ tal que para toda função $f \in \mathcal{C}^H$ todos os equilíbrios u de (4.1), (4.2) são hiperbólicos, ou seja, a linearização

$$w \mapsto \Delta w + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x))w : W^{2,p} \cap W_0^{1,p} \rightarrow L^p(\Omega)$$

de $v \mapsto \Delta v + f(x, v) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ no ponto u é um isomorfismo. Neste caso também é costume dizer que u é uma solução simples de $\Delta v + f(x, v) = 0$. Assim, ora faremos referência a u como um equilíbrio hiperbólico, ora como uma solução simples, indiscriminadamente.

Recordamos que a topologia de Whitney é aquela para a qual a coleção de conjuntos

$$\{g \in \mathcal{C}; |D^i f(x, u) - D^i g(x, u)| < \delta(u), \quad i = 1, \dots, k, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u \in \mathbb{R}\},$$

onde $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva contínua, constitui uma base de vizinhanças para um elemento f . A topologia de Whitney faz de $\mathcal{C}$ um espaço de Baire.

Teorema 4.1. *Existe um conjunto residual $\mathcal{C}^H$ em $\mathcal{C}$ tal que para qualquer $f \in \mathcal{C}^H$ todos os equilíbrios de (4.1), (4.2) são hiperbólicos.*

Demonstração. Para cada $n = 1, 2, \dots$ seja

$$\mathcal{C}_n^H = \{f \in \mathcal{C}; \text{ cada equilíbrio } u \text{ de (4.1), (4.2) com } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq n \text{ é hiperbólico}\}.$$

Vamos demonstrar que $\mathcal{C}_n^H$ é aberto e denso em $\mathcal{C}$ para cada inteiro positivo n , de modo que ao tomar $\mathcal{C}^H = \bigcap_1^\infty \mathcal{C}_n^H$ obtemos um conjunto residual com a propriedade requerida. Com efeito, fixada $g \in \mathcal{C}^H$, se u é um equilíbrio de (4.1), (4.2), temos que $u \in C^2(\Omega)$ e, portanto,

existe inteiro $m > 0$ tal que $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} < m$. Como $g \in \mathcal{C}_m^H$, concluímos que u é um equilíbrio hiperbólico.

Para verificar que $\mathcal{C}_n^H$ é aberto, mostraremos que $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n^H$ é fechado. Sejam $f_0 \in \overline{\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n^H}$ e $\{f_k\}$ uma sequência em $\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n^H$ convergindo para f_0 na topologia de Whitney. Em particular, $f_k \rightarrow f_0$ e $\frac{\partial f_k}{\partial u} \rightarrow \frac{\partial f_0}{\partial u}$ uniformemente no compacto $\overline{\Omega} \times [-n, n]$.

Pela definição de $\mathcal{C}_n^H$ existe uma sequência $\{u_k\}$ em $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq n \quad \text{e} \quad \Delta u_k(x) + f_k(x, u_k(x)) = 0, \quad x \in \Omega,$$

tal que a linearização de $u \mapsto \Delta u + f_k(x, u) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ no ponto u_k , para cada k , não é um isomorfismo.

Levando em consideração que $u_k \in C^2(\Omega)$, o que assegura que $\frac{\partial f_k}{\partial u}(\cdot, u_k(\cdot)) \in C^0(\Omega)$, observamos que $w \mapsto \Delta w + \frac{\partial f_k}{\partial u}(x, u_k(x))w : W_0^{2,p} \cap W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ (a linearização de $u \mapsto \Delta u + f_k(x, u)$ no ponto u_k) é um operador de Fredholm de índice zero.

Portanto, deve também existir uma sequência $\{v_k\}$ em $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\|v_k\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta v_k(x) + \frac{\partial f_k}{\partial u}(x, u_k(x))v_k(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

para todo inteiro positivo k .

Afirmamos que a sequência $\{u_k\}$ é limitada em $W^{2,p}(\Omega)$. De fato, podemos supor que para alguma constante $M > 0$ tenhamos

$$|f_k(x, u)| \leq M, \quad (x, u) \in \overline{\Omega} \times [-n, n],$$

pois se não for este o caso, basta que passemos a uma subsequência $\{f_{k_j}\}$ conveniente.

Assim, para $k = 1, 2, \dots$

$$|\Delta u_k(x)| = |f_k(x, u_k(x))| \leq M,$$

qualquer que seja $x \in \Omega$. Usando a limitação de Ω , obtemos que

$$\|\Delta u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq M(m(\Omega))^{1/p},$$

onde $m(\Omega)$ é a medida do aberto Ω .

Sendo o operador $\Delta : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ um isomorfismo, concluímos que $\|u_k\|_{W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)} \leq M'$ para algum $M' > 0$, do que segue a limitação da sequência $\{u_k\}$ em $W^{2,p}(\Omega)$.

Como $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, não há perda de generalidade em supor que $\{u_k\}$ converge em $W^{1,p}(\Omega)$ para uma função $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, que satisfaz $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq n$.

Agora, para $p > N$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$, o que nos possibilita supor ainda que $u_k \rightarrow u_0$ em $C(\overline{\Omega})$. Este fato, juntamente com a continuidade uniforme de f_0 no compacto $\overline{\Omega} \times [-n, n]$, a

convergência uniforme da sequência $\{f_k\}$ para f_0 em $\overline{\Omega} \times [-n, n]$ e a limitação de Ω nos levam facilmente a concluir que $f_k(\cdot, u_k(\cdot)) \rightarrow f_0(\cdot, u_0(\cdot))$ em $L^p(\Omega)$.

Usando uma vez mais que $\Delta : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$ é um isomorfismo, obtemos que

$$\Delta^{-1}(f_k(\cdot, u_k(\cdot))) \rightarrow \Delta^{-1}(f_0(\cdot, u_0(\cdot))) \text{ em } W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mas para todo k ,

$$u_k = -\Delta^{-1}(f_k(\cdot, u_k(\cdot)))$$

resultando que

$$u_k \rightarrow -\Delta^{-1}(f_0(\cdot, u_0(\cdot))) \text{ em } W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

Já tínhamos que $u_k \rightarrow u_0$ em $W^{1,p}(\Omega)$ e, portanto, $u_0 = \Delta^{-1}(f_0(\cdot, u_0(\cdot))) \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Finalmente, como $\Delta u_k \rightarrow \Delta u_0$ em $L^p(\Omega)$ (pois $u_k \rightarrow u_0$ em $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$) e $f_k(\cdot, u_k(\cdot)) \rightarrow f_0(\cdot, u_0(\cdot))$ em $L^p(\Omega)$, vemos que $\Delta u_k + f_k(\cdot, u_k(\cdot)) \rightarrow \Delta u_0 + f_0(\cdot, u_0(\cdot))$ em $L^p(\Omega)$, o que implica que $\Delta u_0(x) + f_0(x, u_0(x)) = 0$, $x \in \Omega$, ou seja, u_0 é um equilíbrio de (4.1), (4.2), quando consideramos f_0 .

Raciocínio inteiramente análogo, aplicado à sequência $\{v_k\}$, fornece que $\{v_k\}$ converge em $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para uma função v_0 que satisfaz $\|v_0\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e $\Delta v_0(x) + \frac{\partial f_0}{\partial u}(x, u_0(x))v_0(x) = 0$, $x \in \Omega$, o que significa que u_0 não é um equilíbrio hiperbólico, embora tenhamos $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq n$. Provamos pois que $f_0 \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_n^H$.

Vejamos agora que $\mathcal{C}_n^H$ é denso. Para isto, fixe $f \in \mathcal{C}$ e escolha uma função auxiliar $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞ , com suporte compacto, que é idêntica a 1 no intervalo $[-n-1, n+1]$.

Vamos verificar que existe um conjunto denso de funções b em $C^k(\Omega)$ para as quais a função $f(x, u) + b(x)\eta(u)$ pertence a $\mathcal{C}_n^H$. É claro que esta é uma função arbitrariamente próxima de f em $\mathcal{C}$ desde que b esteja suficientemente próxima de 0, do que decorrerá a densidade de $\mathcal{C}_n^H$.

Sejam

$$\begin{aligned} X &= \left\{ u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega); \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < n+1 \right\}, \\ Y &= C^k(\Omega), \\ Z &= L^p(\Omega). \end{aligned}$$

Consideramos a topologia em X induzida pela topologia de $W^{2,p}(\Omega)$. Aplicaremos o Teorema 3.3 para a aplicação $\Phi : X \times Y \rightarrow Z$ definida do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \Phi(u, b)(x) &= \Delta u(x) + f(x, u(x)) + b(x)\eta(u(x)) \\ &= \Delta u(x) + f(x, u(x)) + b(x), \quad x \in \Omega \end{aligned}$$

Observe que X e Y são espaços métrico separáveis e Φ é aplicação de classe C^1 . Além disso, para cada $(u, b) \in X \times Y$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, b) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

$$\dot{u} \longmapsto \Delta \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) \dot{u}$$

é um operador de Fredholm de índice zero, uma vez que $\frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u(\cdot)) \in C^0(\Omega)$.

Note também que $f(x, u) + b(x)\eta(u)$ é uma função de $\mathcal{C}_n^H$ se, e somente se, o operador

$$\dot{u} \longrightarrow \Delta \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial u}(u, u(x)) \dot{u} : W^{2,p} \cap W_0^{1,p} \longrightarrow L^p(\Omega)$$

é um isomorfismo para toda função $u \in X$ tal que $\Phi(u, b) = 0$, ou seja, se zero é um valor regular de $\Phi(\cdot, b) : X \longrightarrow Z$.

As hipóteses (1) e (3) do Teorema 3.3 estão nitidamente satisfeitas pela aplicação Φ , restando apenas a verificação de que para cada $(u, b) \in \Phi^{-1}(0)$ a derivada total $D\Phi(u, b)$ é sobrejetora, ou seja, de que vale a hipótese (2)(a).

Sejam $(u, b) \in \Phi^{-1}(0)$ e $h \in L^p(\Omega)$. Queremos encontrar $\dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\dot{b} \in C^k(\Omega)$ tais que $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, b)\dot{u} + \frac{\partial \Phi}{\partial b}(u, b)\dot{b} = h$, isto é,

$$\Delta \dot{u}(x) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) \dot{u}(x) = h(x) - \dot{b}(x), \quad x \in \Omega.$$

A equação acima admite solução para $\dot{u}$ desde de que escolhamos $\dot{b}$ satisfazendo

$$\int_{\Omega} (h(x) - \dot{b}(x)) v_i(x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

para uma base $\{v_1, \dots, v_m\}$ de $\mathcal{N}(\Delta + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)))$. Sendo as v_i 's linearmente independentes, concluímos sem dificuldades que o sistema

$$\int_{\Omega} \dot{b}(x) v_1(x) dx = \int_{\Omega} h(x) v_1(x) dx$$

⋮

$$\int_{\Omega} \dot{b}(x) v_m(x) dx = \int_{\Omega} h(x) v_m(x) dx$$

possui uma solução $\dot{b} \in C^k(\Omega)$. Logo, $D\Phi(u, b)$ é sobrejetora sempre que $(u, b) \in \Phi^{-1}(0)$ e podemos empregar o Teorema 3.3 para obter um subconjunto denso $A_f \subset C^k(\Omega)$ com a propriedade de que zero é valor regular de $\Phi(\cdot, b) : X \longrightarrow Z$ para cada $b \in A_f$, ou, em outras palavras, $f(x, u) + b(x)\eta(u) \in \mathcal{C}_n^H$ para cada $b \in A_f$. $\square$

4.2 Simplicidade Genérica dos Autovalores Reais

Vamos considerar o operador diferencial de segunda ordem

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x, \lambda) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x, \lambda),$$

onde $a_{ij} = a_{ji} \in C^2$ e $b_j(x, \lambda)$, $c(x, \lambda)$ são polinômios em λ com coeficientes C^1 que assumem valores reais quando λ é real. Assumiremos que $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq c_0 |\xi|^2$, quaisquer que sejam $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, para alguma constante $c_0 > 0$.

Dada uma região aberta, limitada, conexa e C^3 -regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seja $A_\Omega(\lambda)$ o operador $A(\lambda)$ definido de $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$. Diremos que λ é um *autovalor* de $A_\Omega(\lambda)$ se existe uma solução não nula de

$$(4.3) \quad A_\Omega(\lambda)u = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Diremos que λ é um *autovalor simples* se $\mathcal{N}(A_\Omega(\lambda))$ é unidimensional e sua imagem, contida em $L^p(\Omega)$, não contém $\frac{d}{d\lambda}(A_\Omega(\lambda))u$ para $u \in \mathcal{N}(A_\Omega(\lambda)) \setminus \{0\}$.

Mostraremos nesta seção que, genericamente no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abertas, limitadas, conexas e C^3 -regulares, todos os autovalores de (4.3) são simples. Notemos que nossas hipóteses não excluem o caso em que $A_\Omega(\lambda)$ independe de λ . Neste caso, $\frac{d}{d\lambda}(A_\Omega(\lambda)) = 0$ e não podem existir autovalores simples para (4.3). Desse modo, provaremos que $A_\Omega(\lambda)$ é genericamente um isomorfismo quando não depende de λ .

Proposição 4.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região aberta, limitada, conexa e C^3 -regular e $h \in \text{Diff}^3(\Omega)$. A aplicação*

$$G_h : (W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \longrightarrow L^p(\Omega) \\ (u, \lambda) \longmapsto h^* A_{h(\Omega)} h^{*-1} u$$

tem zero como valor regular se, e somente se, todos os autovalores reais de

$$(4.4) \quad h^* A_{h(\Omega)} h^{*-1} u = 0 \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad u \neq 0$$

são simples.

Demonstração. Seja $A'_{h(\Omega)}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(A_{h(\Omega)}(\lambda))$. A derivada de G_h em $(u, \lambda) \in (W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ é

$$DG_h(u, \lambda) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R} \longrightarrow L^p(\Omega) \\ (\dot{u}, \dot{\lambda}) \longmapsto h^* A_{h(\Omega)} h^{*-1} \dot{u} + \dot{\lambda} h^* A'_{h(\Omega)} h^{*-1} u.$$

Pelo Exemplo 4 do Capítulo 2, $A_{h(\Omega)}(\lambda) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(h(\Omega)) \longrightarrow L^p(h(\Omega))$ é um operador de Fredholm com índice 0. Assim, o operador linear $(\dot{u}, \dot{\lambda}) \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R} \longmapsto$

$h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1} \dot{u} \in L^p(\Omega)$ é um operador de Fredholm com índice 1. Observando agora que o operador $(\dot{u}, \dot{\lambda}) \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R} \longrightarrow \dot{\lambda} h^* A_{h(\Omega)} h^{*-1} u \in L^p(\Omega)$ é compacto, concluímos, pelo Teorema 2.3, que $DG_h(u, \lambda)$ é Fredholm com índice 1.

Suponha que zero é valor regular de G_h . Sejam λ um autovalor de (4.4) e $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $h^* A_{h(\Omega)} h^{*-1} u = 0$. Como $\text{ind}(DG_h(u, \lambda)) = 1$ e $DG_h(u, \lambda)$ é sobrejetora, chegamos à conclusão de que $\mathcal{N}(DG_h(u, \lambda)) = [(u, 0)]$, o que fornece que $\dim \mathcal{N}(h^* A_{h(\Omega)} h^{*-1}) = 1$ e que $h^* A'_{h(\Omega)} h^{*-1} u \notin \mathcal{R}(h^* A_{h(\Omega)} h^{*-1})$.

Reciprocamente, suponha que todos os autovalores de (4.4) são simples. Tome $(u, \lambda) \in G_h^{-1}(0)$. Então $\mathcal{N}(h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1}) = [u]$ e $\dot{\lambda} h^* A'_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1} u \notin \mathcal{R}(h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1})$ quaisquer que sejam $\dot{\lambda} \neq 0$ e $\dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, o que mostra que $\mathcal{N}(DG_h(u, \lambda)) = [(u, 0)]$. Por fim, recorrendo ao fato de que $\text{ind}(DG_h(u, \lambda)) = 1$, obtemos que $DG_h(u, \lambda)$ é sobrejetora. $\square$

Proposição 4.3. λ é um autovalor simples de (4.4) se, e somente se, λ é um autovalor simples de

$$(4.5) \quad A_{h(\Omega)}(\lambda)v = 0 \text{ em } h(\Omega), \quad v = 0 \text{ sobre } \partial h(\Omega), \quad v \neq 0.$$

Demonstração. Observemos que

$$h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1} u = 0 \iff A_{h(\Omega)}(\lambda)(h^{*-1} u) = 0$$

já que h^* é um isomorfismo. Então $v = h^{*-1} u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)(h(\Omega))$ é autofunção de (4.5) associada a λ se, e somente se, $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ é autofunção de (4.4) associada a λ , de maneira que $\mathcal{N}(h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1}) \subset W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ é unidimensional se, e somente se, $\mathcal{N}(A_{h(\Omega)}(\lambda)) \subset W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(h(\Omega))$ é unidimensional.

Para finalizarmos a demonstração, basta verificarmos que

$$\frac{d}{d\lambda} (A_{h(\Omega)}(\lambda)) v \in \mathcal{R}(A_{h(\Omega)}(\lambda)) \iff \frac{d}{d\lambda} (h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1}) u \in \mathcal{R}(h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1}).$$

Como $\frac{d}{d\lambda} (h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1}) = h^* \frac{d}{d\lambda} (A_{h(\Omega)}(\lambda)) h^{*-1}$ e h^* é um isomorfismo, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (A_{h(\Omega)}(\lambda)) v \in \mathcal{R}(A_{h(\Omega)}(\lambda)) &\iff \frac{d}{d\lambda} (A_{h(\Omega)}(\lambda)) h^{*-1} u \in \mathcal{R}(A_{h(\Omega)}(\lambda)) h^{*-1} u \in \mathcal{R}(A_{h(\Omega)}(\lambda)) \\ &\iff h^* \frac{d}{d\lambda} (A_{h(\Omega)}(\lambda)) h^{*-1} u \in \mathcal{R}(h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1}), \end{aligned}$$

do que segue o resultado desejado. $\square$

Os resultados enunciados na Proposição 4.2 e na Proposição 4.3 evidenciam que para obtermos a simplicidade genérica dos autovalores de (4.3) é suficiente provarmos que, fixada uma região aberta, limitada, conexa e C^3 -regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para a “maioria” dos difeomorfismos

$h \in \text{Diff}^3(\Omega)$ a aplicação G_h tem o zero como valor regular. Para prová-lo, vamos empregar o Teorema 3.3 para a aplicação diferenciável

$$F : (W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \text{Diff}^3(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

$$(u, \lambda, h) \longmapsto h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1} u.$$

Notando que para h fixado a aplicação $(u, \lambda) \longmapsto F(u, \lambda, h)$ é um operador de Fredholm de índice 1 e atentando para o fato de que todos os espaços envolvidos são separáveis, concluímos que F cumpre as hipóteses (1) e (3) do Teorema 3.3. Resta-nos apenas a verificação de que zero é valor regular de F , o que faremos por absurdo.

Suponha que existe um ponto crítico (u, λ, h) de F tal que $F(u, \lambda, h) = 0$. Seja $\Omega_1 = h(\Omega)$ e defina uma nova aplicação diferenciável

$$\tilde{F} : (W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega_1) \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \times \text{Diff}^3(\Omega_1) \longrightarrow L^p(\Omega_1)$$

$$(v, \lambda, g) \longmapsto g^* A_{h(\Omega_1)}(\lambda) g^{*-1} v.$$

Usando que $(g \circ h)^* = h^* g^*$ obtemos que

$$h^{*-1} F(h^* v, \lambda, g \circ h) = h^{*-1} (h^* g^*) A_{g(\Omega_1)}(\lambda) (g^{*-1} h^{*-1}) h^{*-1} v = \tilde{F}(v, \lambda, g).$$

Assim, levando em consideração que h^* é um isomorfismo, concluímos que $(h^{*-1} u, \lambda, i_{\Omega_1})$ é um ponto crítico de $\tilde{F}$, com $\tilde{F}(h^{*-1} u, \lambda, i_{\Omega_1}) = 0$. Procede, portanto, a seguinte

Observação: Não há perda de generalidade em supor que o ponto crítico (u, λ, h) de F tal que $F(u, \lambda, h) = 0$ tem $h = i_{\Omega}$, o que simplifica nossos cálculos e notações.

Calculando então a derivada de F no ponto crítico (u, λ, i_{Ω}) com o auxílio do Teorema 3.2, obtemos que o operador

$$DF(u, \lambda, i_{\Omega}) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathbb{R} \times C^3(\Omega, \mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

$$(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) \longmapsto A_{\Omega}(\lambda)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \dot{\lambda} A'_{\Omega}(\lambda)(u)$$

não é sobrejetor.

A imagem do subespaço $\{(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}); \dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega), \dot{\lambda} = 0, \dot{h} = 0\}$ pela aplicação $DF(u, \lambda, i_{\Omega})$ coincide com a imagem do operador de Fredholm $A_{\Omega}(\lambda)$ (que possui codimensão finita) o que nos permite concluir que $\mathcal{R}(DF(u, \lambda, i_{\Omega}))$ tem codimensão finita e, conseqüentemente, é fechada. Logo, existe $\psi \in L^q(\Omega) \setminus \{0\}$, onde $1 < p < \infty$ é tal que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, satisfazendo

$$\int_{\Omega} \psi DF(u, \lambda, i_{\Omega})(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = 0,$$

quaisquer que sejam $\dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $\dot{\lambda} \in \mathbb{R}$ e $\dot{h} \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Em particular, fixando $\dot{\lambda} = 0$ e $\dot{h} = 0$, temos

$$\int_{\Omega} \psi A_{\Omega}(\lambda) \dot{u} = 0$$

para toda função $\dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, do que decorre, se aplicamos o Teorema 1.3, que $\psi \in W^{2,p} \cap W^{1,p}(\Omega)$ e é solução forte de

$$A_{\Omega}^*(\lambda)\psi = 0 \text{ em } \Omega, \quad \psi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Mais ainda, pelo Teorema 1.5, $u, \psi \in W^{3,p}(\Omega)$, o que fornece, se apelamos ao Teorema 1.6, que $\psi, u \in C^2(\Omega)$.

Então, para cada $\dot{h} \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \psi A_{\Omega}(\lambda) \dot{h} \cdot \nabla u \\ &= \int_{\Omega} \{ \psi A_{\Omega}(\lambda) \dot{h} \cdot \nabla u - A_{\Omega}^*(\lambda) \psi \dot{h} \cdot \nabla u \} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot \nabla u \sum_{i,j=1}^n \psi_{x_i} a_{ij}(x) N_j \\ &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial N} \dot{h} \cdot N \sum_{j=1}^n N_j \nabla \psi \cdot (a_{1j}(x), \dots, a_{nj}(x)) \\ &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial N} \frac{\partial u}{\partial N} \dot{h} \cdot N \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) N_i N_j \right), \end{aligned}$$

do que vemos que $\frac{\partial u}{\partial N} \frac{\partial \psi}{\partial N} = 0$ sobre $\partial\Omega$, uma vez que $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) N_i N_j \geq c_0 |N|^2 \geq c_0$.

Admita que para algum $x_0 \in \partial\Omega$ tenhamos $\frac{\partial u}{\partial N}(x_0) \neq 0$. Então $\frac{\partial u}{\partial N} \neq 0$ em uma vizinhança V de x_0 em $\partial\Omega$, implicando que $\frac{\partial \psi}{\partial N} = 0$ nesta vizinhança. Assim, temos $\psi = 0$ e $\frac{\partial \psi}{\partial N} = 0$ em V , com $A_{\Omega}^*(\lambda)\psi = 0$ em Ω , do que resulta, pelo Teorema 1.2, que $\psi = 0$ em Ω , contrariando nossa escolha de ψ . Logo, $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Aplicando agora o Teorema 1.2 para u , somos levados à conclusão de que $u = 0$ em Ω , uma contradição.

Portanto zero é valor regular da aplicação F e o Teorema 3.3 garante, como queríamos, a simplicidade genérica dos autovalores reais.

4.3 Simplicidade Genérica das Soluções de $\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$

Nesta seção, fixada uma função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \geq 2$) de classe C^2 , perseguiremos o objetivo de provar que, genericamente no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abertas, limitadas, conexas e C^3 -regulares, todas as soluções u de

$$(4.6) \quad \Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0, \quad x \in \Omega$$

$$(4.7) \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

são simples, ou seja, a linearização

$$L_u : \dot{u} \longmapsto \Delta \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial p}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \nabla \dot{u} + \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u, \nabla u) \dot{u}$$

é um isomorfismo.

Para isto, vamos considerar X o conjunto de todas as regiões C^3 -difeomorfas a uma região Ω , conexa, limitada e de classe C^3 fixada, isto é,

$$X = \{h(\Omega); h \in \text{Diff}^3(\Omega)\}.$$

Introduzimos uma topologia em X definindo uma base de vizinhanças para uma região Ω' em X por

$$\{h(\Omega'); \|h - i_{\Omega'}\|_{C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)} < \epsilon\}$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. O espaço topológico obtido é um espaço métrico completo, fato provado por Michelletti em [15].

Na verdade, provaremos que todas as soluções de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$ são simples para h pertencente ao complementar de um subconjunto magro $\mathfrak{M} \subset \text{Diff}^3(\Omega)$. Como o conjunto $\mathfrak{M}$ de mergulhos excluídos será definido pelas propriedades das imagens dos mergulhos, $\mathfrak{M}$ será invariante por composição com difeomorfismos de classe C^3 de Ω em Ω , o que assegura que o subconjunto $\{h(\Omega); h \in \mathfrak{M}\}$ também é magro em X .

É consequência imediata do teorema da função inversa em espaços de Banach que se todas as soluções de (4.6), (4.4) em uma dada região Ω são simples, tais soluções formam um conjunto discreto. Em nosso caso, a limitação de f garante ainda mais: o conjunto das soluções de (4.6), (4.4), se Ω for uma região em que todas as soluções são simples, é finito. Realmente, se $\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$, temos que

$$\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} = \|f(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^p(\Omega)} \leq M,$$

onde $M = m(\Omega) \sup\{|f(x, y, z)|; (x, y, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\}$. Sendo $\Delta : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ um isomorfismo, existe $m > 0$ satisfazendo

$$M \geq \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \geq m\|u\|_{W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)},$$

do que decorre que

$$\|u\|_{W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{M}{m}.$$

Como a imersão de $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ é compacta e o conjunto das soluções é discreto, o número de soluções é necessariamente finito.

Proposição 4.4. *Fixada $h \in \text{Diff}^3(\Omega)$, considere $F_h : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ a aplicação dada por $F_h u = h^*(\Delta + f)h^{*-1}u$. Uma função $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução simples de $F_h v = 0$ se, e somente se, $h^{*-1}u$ é uma solução simples de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$.*

Demonstração. O fato de h^* ser isomorfismo assegura que se $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ então $F_h u = 0$ se, e somente se, $(\Delta + f)(h^{*-1}u) = 0$ (ou seja, se $h^{*-1}u$ é solução de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$). Além disso, a linearização $h^* L_{h^{*-1}u} h^{*-1}$ de F_h no ponto u é um isomorfismo de $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ se, e somente se, $L_{h^{*-1}u}$ é um isomorfismo de $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(h(\Omega))$ em $L^p(h(\Omega))$, conclusão a que chegamos levando em consideração que L_{h^*u} é Fredholm com índice zero. $\square$

Proposição 4.5. *Sejam $h \in \text{Diff}^3(\Omega)$ fixada e F_h como na Proposição 4.4. Se 0 é um valor regular de F_h então todas as soluções de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$ são simples.*

Demonstração. Suponha 0 um valor regular de F_h e seja $v \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(h(\Omega))$ uma solução de (4.6), (4.7). Então $u = h^*v$ satisfaz $F_h u = 0$. Logo, $h^* L_v h^{*-1}$ é sobrejetora, do que resulta imediatamente que L_v é também sobrejetora. Agora, L_v é Fredholm com índice zero, o que nos permite concluir que L_v é um isomorfismo. $\square$

As proposições acima mostram essencialmente que o estudo da simplicidade genérica se reduz ao problema de provarmos que para a “maioria” dos difeomorfismos $h \in \text{Diff}^3(\Omega)$, a aplicação F_h tem o zero como valor regular. Para solucioná-lo, considere E_1 e E_2 os seguintes subconjuntos de $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$$E_1 = \{h \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n); f(x, 0, 0) \equiv 0 \text{ em uma vizinhança de } \partial h(\Omega)\}$$

$$E_2 = \{h \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n); f(x, 0, 0) \neq 0 \text{ para algum } x \in \partial h(\Omega)\}.$$

Se $h_0 \in E_1$, seja W_{h_0} uma vizinhança de $\partial h_0(\Omega)$ em que $f(x, 0, 0) \equiv 0$. É possível escolher uma vizinhança V_{h_0} de h_0 em $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que se $h \in V_{h_0}$ então $\partial h(\Omega) \subset W_{h_0}$. Desse modo, $V_{h_0} \subset E_1$. Portanto, E_1 é aberto.

Se $h_0 \in E_2$, existe $x \in \partial h_0(\Omega)$ com $f(x, 0, 0) \neq 0$. Seja U uma vizinhança de x em $\mathbb{R}^n$ com a propriedade de que $f(x, 0, 0) \neq 0$ para $x \in U$. Neste caso, podemos selecionar uma vizinhança V_{h_0} de h_0 em $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que se $h \in V_{h_0}$ então $\partial h(\Omega) \cap U \neq \emptyset$, o que significa que $V_{h_0} \subset E_2$. Logo, E_2 é aberto.

Tomando $E = E_1 \cup E_2$, obtemos um subconjunto aberto e denso de $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Sendo assim, $D = E \cap \text{Diff}^3(\Omega)$, que pode ser escrito como a reunião disjunta $D = D_1 \cup D_2$, em que $D_1 = E_1 \cap \text{Diff}^3(\Omega)$ e $D_2 = E_2 \cap \text{Diff}^3(\Omega)$, é aberto e denso em $\text{Diff}^3(\Omega)$.

Para $h \in D_1$, seja W_h uma vizinhança tubular de $\partial h(\Omega)$ em que tenhamos $f(x, 0, 0) \equiv 0$. Podemos escolher uma vizinhança V_h de h em $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$, contida em D_1 , de maneira que se $\tilde{h} \in V_h$ então $\partial \tilde{h}(\Omega)$ está contida em W_h . Se $h \in D_2$, seja V_h uma vizinhança de h em $C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ contida em D_2 . O conjunto de tais vizinhanças constitui uma cobertura aberta

para D que, por ser D um espaço de Lindelöf, admite uma subcobertura enumerável, digamos $\{V_{h_1}, V_{h_2}, \dots, V_{h_k}, \dots\}$.

A partir de agora, nosso propósito será provar que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe um subconjunto magro H_k de D , contido em V_{h_k} , tal que se $h \in V_{h_k} \setminus H_k$ então todas as soluções de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$ são simples. Se o fizermos, teremos provado a simplicidade genérica das soluções de (4.6), (4.7), uma vez que $\text{Diff}^3(\Omega) \setminus (\cup_{k=1}^{\infty} (V_{h_k} \setminus H_k)) = D^c \cup (\cup_{k=1}^{\infty} H_k)$ é magro em $\text{Diff}^3(\Omega)$.

Fixe $k \in \mathbb{N}$ arbitrário e considere a aplicação

$$\begin{aligned} F : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times \text{Diff}^3(\Omega) &\longrightarrow L^p(\Omega) \\ (u, h) &\longmapsto h^*(\Delta + f)h^{*-1}u \end{aligned}$$

para algum $n < p < \infty$, de modo a termos $W^{2,p}(\Omega) \subset C^1(\Omega)$. Aplicaremos o Teorema 3.3 para concluir que existe um subconjunto magro H_k em V_{h_k} (e, portanto, magro em D) tal que se $h \in V_{h_k} \setminus H_k$ então zero é valor regular de $F(\cdot, h) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$. Recordando o Exemplo 4 do Capítulo 2 e levando em consideração que $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e V_{h_k} são espaços separáveis, vemos facilmente que a aplicação F satisfaz as hipóteses (1) e (3) do Teorema 3.3. Quanto à hipótese (2), será preciso proceder com maior cuidado.

Assuma que exista (u, i_Ω) ponto crítico de F com $F(u, i_\Omega) = 0$. Então a diferencial de F no ponto (u, i_Ω) ,

$$\begin{aligned} DF(u, i_\Omega) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times C^3(\Omega, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^p(\Omega) \\ (\dot{u}, \dot{h}) &\longmapsto L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u), \end{aligned}$$

não é sobrejetora. Observe que $\mathcal{R}(DF(u, i_\Omega)) = \mathcal{R}(L_u)$ é subespaço fechado de $L^p(\Omega)$ pois L_u é Fredholm. Portanto, se $p^{-1} + q^{-1} = 1$, existe uma função não nula $\psi \in L^q(\Omega)$ para a qual

$$\int_{\Omega} \psi L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) = 0$$

sejam quais forem $\dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\dot{h} \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Como u é solução de (4.6), (4.7) e $f \in C^2$, pela observação que fizemos no Capítulo 1, temos que $u \in C^{2,\alpha}$ para todo $\alpha < 1$, resultando que os coeficientes de L_u são, no mínimo, de classe C^2 .

Fixando $\dot{h} = 0$, obtemos que para cada $\dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \psi L_u \dot{u} = 0,$$

do que decorre que $\psi \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $L^* \psi = 0$, segundo o que nos permite concluir o Teorema 1.3. Observe que, como u, ψ é de classe $C^{2,\alpha}$.

Tomando $\dot{u} = 0$, verificamos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \psi L_u(\dot{h} \cdot \nabla u) \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \psi L_u(\dot{h} \cdot \nabla u) - (\dot{h} \cdot \nabla u) L_u^* \psi \right\} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ \psi \frac{\partial(\dot{h} \cdot \nabla u)}{\partial N} - \frac{\partial \psi}{\partial N} (\dot{h} \cdot \nabla u) + \psi (\dot{h} \cdot \nabla u) \frac{\partial f}{\partial p} \cdot N \right\} \\ &= - \int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \frac{\partial \psi}{\partial N} \frac{\partial u}{\partial N}, \end{aligned}$$

o que nos leva à conclusão de que $\frac{\partial \psi}{\partial N} \frac{\partial u}{\partial N} \equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Agora, $L_u^* \psi = 0$ significa precisamente que

$$\Delta \psi - \frac{\partial f}{\partial p}(x, u, \nabla u) \cdot \nabla \psi + \left(\frac{\partial f}{\partial u}(x, u, \nabla u) - \operatorname{div} \left(\frac{\partial f}{\partial p}(x, u, \nabla u) \right) \right) \psi = 0,$$

o que implica

$$\begin{aligned} |\Delta \psi(x)| &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla \psi(x) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x)) \psi(x) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_i}(x, u(x), \nabla u(x)) \psi(x) \right|, \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

A limitação de Ω e o fato de que $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R})$ e $u \in C^2(\Omega)$ garantem que

$$|\Delta \psi(x)| \leq C(|\nabla \psi(x)| + |\psi(x)|), \quad x \in \Omega,$$

onde

$$C = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), \nabla u(x)) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x)) \right|, \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial p_i}(x, u(x), \nabla u(x)) \right| \right\}.$$

Como $\psi \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$ satisfaz a desigualdade acima, temos pelo Teorema 1.2 que $\frac{\partial \psi}{\partial N} \neq 0$ quase sempre em $\partial\Omega$ e, conseqüentemente, $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ quase sempre em $\partial\Omega$.

Recordemos que há duas possibilidades para V_{h_k} : ou $V_{h_k} \subset D_1$ ou $V_{h_k} \subset D_2$. Se $V_{h_k} \subset D_1$, existe uma vizinhança W_{h_k} de $\partial\Omega$ tal que $f(x, 0, 0) = 0$ para todo $x \in W_{h_k}$. Desse modo, para alguma constante $K > 0$,

$$\begin{aligned} |\Delta u(x)| &= |f(x, u(x), \nabla u(x))| \\ &= |f(x, u(x), \nabla u(x)) - f(x, 0, 0)| \\ &\leq K(|u(x)| + |\nabla u(x)|) \end{aligned}$$

sempre que $x \in \Omega \cap W_{h_k}$.

Considerando que $u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0$ quase sempre em $\partial\Omega$, podemos recorrer ao Teorema 1.2 para obtermos que $u = 0$ em $\Omega \cap W_{h_k}$.

Defina $u_0 : \Omega \cup V \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u_0 = \begin{cases} u(x) & , x \in \Omega \setminus W_{h_k} \\ 0 & , x \in (\Omega \cap W_{h_k}) \cup (W_{h_k} \setminus \Omega) \end{cases}$$

Observe que para cada $h \in V_{h_k}$, $u_0|_{h(\Omega)}$ é solução de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$. Além disso, se u_1 é outra solução de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$, com $\frac{\partial u_1}{\partial N} = 0$ sobre $\partial h(\Omega)$, então $v = u_0 - u_1$ satisfaz

$$\Delta v + f(x, u_0, \nabla u_0) - f(x, u_1, \nabla u_1) = 0 \text{ em } h(\Omega),$$

$$v = 0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial N} = 0 \text{ sobre } \partial h(\Omega).$$

Ainda, para algum $M > 0$ temos

$$\begin{aligned} |\Delta v(x)| &= |f(x, u_0(x), \nabla u_0(x)) - f(x, u_1(x), \nabla u_1(x))| \\ &\leq M(|v(x)| + |\nabla v(x)|), \end{aligned}$$

qualquer que seja $x \in h(\Omega)$. Segue do Teorema 1.2 que $v = 0$ em $h(\Omega)$, ou seja, $u_0 = u_1$.

Seja então $\tilde{F} : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{u_0\} \times V_{h_k} \rightarrow L^p(\Omega)$ a restrição de F ao conjunto $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{u_0\} \times V_{h_k}$. Pela discussão acima, 0 é valor regular de $\tilde{F}$. Aplicando o Teorema 3.3 à aplicação $\tilde{F}$, obtemos um subconjunto magro $\tilde{H}_k \subset V_{h_k}$ tal que se $h \in V_{h_k} \setminus \tilde{H}_k$, todas as soluções de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$ são simples, exceto possivelmente a restrição de u_0 a $h(\Omega)$.

Contudo, sabemos pelo exemplo apresentado na Seção 4.2 que existe um subconjunto magro $H \subset V_{h_k}$ tal que $L_{h^*-1}u_0$ é um isomorfismo para toda $h \in V_{h_k} \setminus H$. Por fim, escolhendo $H_k = \tilde{H}_k \cup H$, conseguimos um subconjunto magro de V_{h_k} com a propriedade de que todas as soluções de (4.6), (4.7) em $h(\Omega)$ são simples para $h \in V_{h_k} \setminus H_k$.

Admita agora que $V_{h_k} \subset D_2$. Neste caso, $f(x, 0, 0) \neq 0$ para algum $x \in \partial\Omega$. Mostraremos que existe um subconjunto $O \subset V_{h_k}$, fechado e com interior vazio, tal que se $\tilde{F} : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times (V_{h_k} \setminus O) \rightarrow L^p(\Omega)$ é a restrição de F ao conjunto $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times (V_{h_k} \setminus O)$ então zero é valor regular de $\tilde{F}$.

Considere G a seguinte aplicação de classe C^1 :

$$\begin{aligned} G : W_0^{2,p}(\Omega) \times V_{h_k} &\rightarrow L^p(\Omega) \\ (u, h) &\mapsto h^*(\Delta + f)h^{*-1}u. \end{aligned}$$

Observe que uma função $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ pertence a $W_0^{2,p}(\Omega)$ se, e somente se, $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Com isso, teremos alcançado nosso objetivo se provarmos que para todo difeomorfismo $h \in V_{h_k}$, exceto aqueles em um subconjunto fechado e com interior vazio O , temos $G(u, h) \neq 0$ qualquer que seja $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$. Obteremos tal prova aplicando a G o Corolário 3.7.

Suponha que $G(u, i_\Omega) = 0$. Afirmamos que $\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega) = L_u|_{W_0^{2,p}(\Omega)}$ tem núcleo trivial. Com efeito, seja $v \in W_0^{2,p}(\Omega)$ tal que $L_u v = 0$. Então

$$\begin{aligned} |\Delta v(x)| &= \left| \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x))v(x) \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial f}{\partial p}(x, u(x), \nabla u(x)) \right| |\nabla v(x)| + \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x), \nabla u(x)) \right| |v(x)| \\ &\leq M(|v(x)| + |\nabla v(x)|), \quad x \in \Omega, \end{aligned}$$

para alguma constante $M > 0$, f é de classe C^2 . Recorremos uma vez mais ao Teorema 1.2 para inferir que $v = 0$.

Portanto, $\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega)$ é semi-Fredholm, com índice ≤ 0 . Quanto à verificação de que G satisfaz a hipótese (2)(b) do Corolário 3.7, mostraremos que o espaço $\mathcal{R}(DG(u, i_\Omega))/\mathcal{R}(\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega))$ tem dimensão infinita, argumentando por contradição.

Suponha que

$$m = \dim \left\{ \mathcal{R}(DG(u, i_\Omega))/\mathcal{R} \left(\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega) \right) \right\} < \infty.$$

Levando em consideração que $DG(u, i_\Omega) : W_0^{2,p}(\Omega) \times C^3(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\Omega)$ é dada por

$$DG(u, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{h}) = L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u),$$

deduzimos que existem $\{f_1, \dots, f_m\}$ em $L^p(\Omega)$, com $f_i = L_u(\dot{u}_i - \dot{h}_i \cdot \nabla u)$, $\dot{u}_i \in W_0^{2,p}(\Omega)$, $\dot{h}_i \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, m$, tais que para todo $(\dot{u}, \dot{h}) \in W_0^{2,p}(\Omega) \times C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existem $\dot{v} \in W_0^{2,p}(\Omega)$ e únicos $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ cumprindo

$$\sum_{i=1}^m c_i f_i + L_u \dot{v} = L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u),$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^m c_i L_u(\dot{u}_i - \dot{h}_i \cdot \nabla u) + L_u \dot{v} - L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) = 0,$$

resultando que

$$L_u \left(\dot{u} - \dot{v} - \sum_{i=1}^m c_i \dot{u}_i - \left(\dot{h} - \sum_{i=1}^m c_i \dot{h}_i \right) \cdot \nabla u \right) = 0.$$

Se $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ é uma base do operador de Fredholm $L_u : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$, temos

$$(4.8) \quad \dot{u} - \dot{v} - \sum_{i=1}^m c_i \dot{u}_i - \left(\dot{h} - \sum_{i=1}^m c_i \dot{h}_i \right) \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^k b_j \phi_j$$

para certas constantes $b_1, \dots, b_k$.

Já sabemos que $u \in W^{3,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$, de modo que $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para $i = 1, \dots, n$.

Calculando a derivada normal da igualdade em (4.8) sobre $\partial\Omega$, obtemos que

$$-\left(\dot{h} - \sum_{i=1}^m c_i \dot{h}_i\right) \cdot N \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = \sum_{j=1}^k b_j \frac{\partial \phi_j}{\partial N}.$$

Pelo Teorema 1.1 sabemos que $\Delta_{\partial\Omega} u = \Delta u - \operatorname{div}(N) \frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}$. Como $u = 0$ em $\partial\Omega$ temos que $\Delta_{\partial\Omega} = 0$ e, por conseguinte, $\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = \Delta u = -f(x, 0, 0)$ sobre $\partial\Omega$. Portanto, sobre $\partial\Omega$,

$$(4.9) \quad \dot{h} \cdot N f(x, 0, 0) = \sum_{i=1}^m c_i \dot{h}_i \cdot N f(x, 0, 0) + \sum_{j=1}^k b_j \frac{\partial \phi_j}{\partial N}.$$

Acabamos de demonstrar que para cada $\dot{h} \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existem constantes reais $c_1, \dots, c_m, b_1, \dots, b_k$ para as quais a igualdade (4.9) ocorre. Em outras palavras, provamos que o operador limitado

$$\dot{h} \mapsto \dot{h} \cdot N f(x, 0, 0)|_{\partial\Omega} : C^3(\Omega, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0(\partial\Omega, \mathbb{R})$$

tem imagem de dimensão finita, contrariando o fato de termos $f(x, 0, 0)|_{\partial\Omega} \neq 0$ e $\dim \partial\Omega \geq 1$.

Logo, a dimensão do espaço quociente $\mathcal{R}(DG(u, i_\Omega))/\mathcal{R}(\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega))$ é infinita e a hipótese (2)(b) do Corolário 3.7 está satisfeita pela aplicação G .

Por fim, vejamos que a aplicação $(u, h) \mapsto h : G^{-1}(0) \longrightarrow V_{h_k}$ é própria. Seja $\{(u_n, h_n)\}$ uma sequência em $G^{-1}(0)$ tal que $h_n \longrightarrow h$ em V_{h_k} . Então

$$\|\Delta h_n^{*-1} u_n\|_{L^p(h_n(\Omega))} = \|f(\cdot, h_n^{*-1} u_n, \nabla h_n^{*-1} u_n)\|_{L^p(h_n(\Omega))} \leq M$$

para alguma constante $M > 0$, já que f é limitada e $\{m(h_n(\Omega))\}$ é uma sequência limitada. Como Δ é um isomorfismo, sabemos que passando a uma subsequência, $\{\|h^{*-1} u_n\|_{W_0^{2,p}(h_n(\Omega))}\}$ converge.

Usando o fato de que $\{h_n^*\}$ é uma sequência de isomorfismos que converge para h^* , concluímos que

$$\|h^{*-1} u_n\|_{W^{2,p}(h_n^*(\Omega))} \geq m_n \|u_n\|_{W^{2,p}(h_n^*(\Omega))} \geq m \|u_n\|_{W_0^{2,p}(\Omega)},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de maneira que $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $W_0^{2,p}(\Omega)$. Mas, na verdade, por ser Ω uma região C^3 -regular, $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $W^{3,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$. A imersão compacta de $W^{3,p}(\Omega)$ em $W^{2,p}(\Omega)$ garante a existência de uma subsequência de $\{u_n\}$ que converge em $W_0^{2,p}(\Omega)$. Logo, $(u, h) \mapsto h : G^{-1}(0) \longrightarrow V_{h_k}$ é aplicação própria.

Podemos então aplicar o Corolário 3.7 para obter um subconjunto $O \subset V_{h_k}$, fechado e com interior vazio, tal que $0 \notin G(W_0^{2,p}(\Omega), h)$ sempre que $h \in V_{h_k} \setminus O$, como pretendíamos.

Considerando $\tilde{F} : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times (V_{h_k} \setminus O) \longrightarrow L^p(\Omega)$ a restrição de F ao conjunto $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times (V_{h_k} \setminus O)$, observamos que $\tilde{F}$ satisfaz as hipóteses (1), (2)(a) e (3) do Teorema 3.3 em todos os pontos de $\tilde{F}^{-1}(0)$. Sendo assim, sabemos que existe um subconjunto magro $\tilde{H}_k \subset V_{h_k} \setminus O$, com a propriedade de que zero é valor regular de F_h para todo difeomorfismo $h \in V_{h_k} \setminus (O \cup \tilde{H}_k)$. Fazendo $H_k = O \cup \tilde{H}_k$ chegamos ao subconjunto magro requerido.

Referências Bibliográficas

- [1] R. ABRAHAM E J. ROBIN, *Transversal Mappings and flows*, W. A. Benjamin, New York, 1967.
- [2] S. AGMON, *The L^p approach to the Dirichlet problem*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **13** (1959), 405-448.
- [3] S. AGMON, A. DOUGLIS E N. NIRENBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623-727.
- [4] S. B. ANGENENT, *The Morse-Smale property for a semilinear parabolic equation*, Journal of Differential Equations, **62** (1986), 427-442.
- [5] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.
- [6] P. BRUNOVSKÝ AND S. N. CHOW, *Generic properties of stationary solutions of Reaction diffusion equations*, J. Differential Equations, **53** (1984), 1-23.
- [7] P. BRUNOVSKÝ AND P. POLÁČIK, *The Morse-Smale structure of a generic reaction-diffusion equation in higher space dimension*, J. Differential Equations, **135** (1997), 129-181.
- [8] D. GILBARG E N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, Berlin, 1983.
- [9] J. K. HALE, L. T. MAGALHÃES AND W. M. OLIVA, *An Introduction to infinite dimensional dynamical systems – Geometric theory*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [10] D. HENRY, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics **840**, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [11] D. HENRY, *Some Infinite-Dimensional Morse-Smale Systems Defined by Parabolic Partial Differential Equations*, Journal of Differential Equations, **59** (1985).
- [12] D. HENRY, *Perturbation of the boundary for boundary value problems of partial differential operators*, Notas mimeografadas, IME-USP, São Paulo, 1985.

- [13] L. HORMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, New York; 1964.
- [14] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, New York, 1980.
- [15] A. M. MICHELETTI, *Perturbazione dello spettro dell'operatore de laplace in relazione ad una variazione del campo*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **26** (1972), 151-169.
- [16] P. POLÁČIK, *Transversal and nontransversal intersections of stable and unstable manifolds in reaction and diffusion equations on symmetric domains*, Differential and Integral Equations, **7** (1994), 1527-1545.
- [17] C. ROCHA, *Generic properties of equilibria of reaction-diffusion equations with variable diffusion*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser A, **101** (1985), 45-55.
- [18] J. SAUT AND R. TEMAM, *Generic properties of nonlinear boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations, **4** (1979), 293-319.