Invariantes do tipo Vassiliev de aplicações estáveis
de 3-variedade em $\mathbb{R}^4$

Catiana Casonatto

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 02/08/2011

Assinatura: _____

Invariantes do tipo Vassiliev de aplicações estáveis de 3- variedade em $\mathbb{R}^4$

Catiana Casonatto

Orientadora: Profa. Dra. Roberta Godoi Wik Atique

Co-orientadora: Profa. Dra. María del Carmen Romero Fuster

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.
VERSÃO REVISADA.

USP – São Carlos
Agosto de 2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C341i Casonatto, Catiana
Invariantes do tipo Vassiliev de aplicações
estáveis de 3-variedade em R^4 / Catiana Casonatto;
orientadora Roberta Godoi Wik-Atique -- São Carlos,
2011.
114 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Classificação de singularidades. 2. Conjuntos
de bifurcação. 3. Invariantes do tipo Vassiliev. I.
Wik-Atique, Roberta Godoi, orient. II. Título.

Ao meu amado Jean, companheiro de todas as horas.

Ao meu anjinho Joaquim.

AGRADECIMENTOS

À Deus, simplesmente por tudo.

Com muita gratidão, respeito e admiração, agradeço às minhas orientadoras Roberta Godoi Wik Atique e María del Carmen Romero Fuster, pela significativa contribuição em minha iniciação à pesquisa matemática, pelo exemplo de profissionalismo e pela amizade.

Aos meus pais, Carlos e Marilene, por todo amor e apoio incondicional. Pelo exemplo de perseverança, determinação e caráter.

À minha irmã e amiga Susiéli, ao meu querido cunhado Ariel e ao meu amado sobrinho afilhado Joaquim por estarem ao meu lado em todos os momentos e fazerem os meus dias mais felizes.

Ao meu noivo, meu grande amor e companheiro, por estar sempre ao meu lado, me dando o exemplo, a força e a coragem que necessito para não desistir da luta diária de me tornar uma profissional e uma pessoa melhor.

Aos professores do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação (ICMC-USP) pelos valiosos ensinamentos, em especial, à Professora Maria Aparecida Soares Ruas.

Aos professores, funcionários e alunos do departamento de Topología y Geometría da Universidad de Valencia pela calorosa acolhida.

Ao amigo Raúl, pelas divertidas e produtivas discussões matemáticas.

Aos meus amigos que estiveram ao meu lado nesta caminhada, tornando tudo mais agradável e divertido: Nazira Harb, Marcio Fenille, Thaís Monis, Kleyber Cunha, Thaís Jordão, Éder Aragão, Mario Henrique, Luiz Hartmann, Romero Melo, Thiago Catalan, Flank Bezerra, Márcio Jorge.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho obtemos que o espaço dos invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem de aplicações estáveis de 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$ é 4-dimensional. Damos uma interpretação geométrica para 2 dos 4 geradores deste espaço, a saber, I_Q o número de pontos quádruplos e $I_{C/P}$ o número de pares de pontos do tipo crosscap/plano, da imagem de uma aplicação estável. Ao reduzir o espaço das aplicações para o das imersões estáveis, obtemos que o espaço dos invariantes locais de imersões estáveis é 3-dimensional. Os invariantes que obtemos são: I_Q o número de pares de pontos quádruplos da imagem de uma imersão estável e dois índices de interseção $I_{\ell+}$ e $I_{\ell-}$ introduzidos por V. Goryunov em [15].

Como início de um estudo que almejamos realizar sobre a geometria de uma m -variedade em $\mathbb{R}^{m+1}$ com singularidades, obtemos os tipos de contatos genéricos da suspensão do crosscap (única singularidade estável de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$) com hiperplanos de $\mathbb{R}^4$.

ABSTRACT

In this work we obtain that the space of first order local Vassiliev type invariants of stable maps of oriented 3-manifolds in $\mathbb{R}^4$ is 4-dimensional. We give a geometric interpretation for two of the four generators of this space, namely, I_Q the number of quadruple points and $I_{C/P}$ the number of pairs of points of crosscap/plane type, of the image of a stable map. In the case of stable immersions, we obtain that the space of local invariants of stable immersions is 3-dimensional. The invariants that we obtain are: I_Q the number of pairs of quadruple points of the image of a stable immersion and the positive and negative linking invariants $I_{\ell+}$ and $I_{\ell-}$ introduced by V. Goryunov in [15].

As a beging of a study that we want to realise about the geometry of a m -manifold in $\mathbb{R}^{m+1}$ with singularities, we obtain the generic contacts of the suspension of crosscap (the only stable singularity from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^4$) with hyperplanes of $\mathbb{R}^4$.

CONTEÚDO

1	Classificação de multigerms de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ e de coposto 1	5
1.1	Teoria clássica de Singularidades	6
1.1.1	Relações de equivalências e espaços tangentes	7
1.1.2	Método de classificação	9
1.1.3	Desdobramentos versais	11
1.1.4	Operações de aumento e concatenação	12
1.1.5	Suspensão do crosscap	14
1.2	Classificação de bigermes	14
1.3	Classificação de trigermes	26
1.4	Classificação de quadrigermes, pentagermes e hexagermes	32
2	Conjuntos de bifurcação dos germes de $\mathcal{A}_e$-codimensão 2	40
2.1	Conjuntos de bifurcação dos monogermes	42
2.2	Conjuntos de bifurcação dos bigermes	48
2.3	Conjuntos de bifurcação de trigermes	58
2.4	Conjuntos de bifurcação dos quadrigermes, pentagermes e hexagermes	65
3	Invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem	73

3.1	Método de Vassiliev	73
3.2	Invariantes de aplicações estáveis de 3-variedades em $\mathbb{R}^4$	76
3.2.1	Coorientação dos estratos de codimensão 1	77
3.2.2	Partição dos estratos de codimensão 1	83
3.2.3	Condições de compatibilidade e geradores	85
3.2.4	Invariante não local de aplicação estável	98
3.3	Invariantes de imersões estáveis de 3-variedades em $\mathbb{R}^4$	99
4	Funções na suspensão do crosscap	102
4.1	Transversalidade	103
4.2	Geometria da suspensão do crosscap	103
	Apêndice	112
	Apêndice A: comandos dos programas Superfície I e Mathematica utilizados na visualização dos estratos de codimensão 1	112
	Apêndice B: formas normais $\mathcal{A}_e$ -equivalentes às obtidas no Capítulo 1	113

INTRODUÇÃO

Na década de 60 J. Mather desenvolveu uma série de trabalhos que contribuíram para o avanço de classificações de singularidades. De particular relevância podemos citar sua classificação de singularidades estáveis obtida em [22]. Tal classificação foi realizada segundo a $\mathcal{A}$ -equivalência, isto é, mudanças de coordenadas na fonte e na meta. A partir de então se iniciou o estudo de singularidades menos frequentes (as singularidades não estáveis) e classificações foram sendo obtidas considerando-se pares específicos de dimensões, singularidades de codimensão e coposto baixos, singularidades simples, entre outras. Algumas classificações conhecidas são:

- (i) Singularidades simples de germes de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, por V. I. Arnol'd em [2];
- (ii) Singularidades simples de germes de aplicações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, por D. Mond em [23];
- (iii) Singularidades simples de germes de aplicações de K^n em K^2 ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$), por J. H. Rieger e M. A. S. Ruas em [31];
- (iv) Singularidades simples de germes de aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, por W. L. Marar e F. Tari em [21];
- (v) Singularidades simples de germes de aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$, por K. Houston e Kirk em [19];
- (vi) Singularidades simples de multigerms de aplicações de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$, por R. G. Wik Atique em [36].

Os resultados sobre classificação de singularidades são aplicados em diversas situações interessantes. Um exemplo disto é a teoria dos invariantes do tipo Vassiliev. No início da década de 90, Vassiliev em [34] desenvolveu um método para definir invariantes numéricos de nós, hoje conhecidos como *invariantes do tipo Vassiliev de ordem finita*. Ele obteve estes invariantes estudando cuidadosamente uma certa partição do *subconjunto discriminante* Σ de $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^3)$, isto é, o subconjunto de $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^3)$ consistindo das aplicações não estáveis. Desde então este método tem sido aplicado com sucesso em diferentes espaços de aplicações estáveis $\mathcal{M}$ para a obtenção de *invariantes de primeira ordem*. Estes invariantes podem ser vistos como funções localmente constantes em $\mathcal{M} - \Sigma$, ou seja, funções localmente constantes em cada componente conexa por caminhos das aplicações estáveis. Quando o interesse é obter invariantes de primeira ordem, o

discriminante é particionado em vários estratos de codimensão 1 e 2. Já que estes invariantes são locais, esta partição é feita de acordo com o tipo local de singularidade que as aplicações em Σ apresentam. É neste aspecto que a classificação de germes de aplicações contribui para a obtenção de invariantes do tipo Vassiliev. O objetivo inicial é determinar o número de geradores do espaço dos invariantes de primeira ordem das aplicações estáveis em $\mathcal{M}$. Uma segunda etapa é obter interpretações geométrica para tais geradores ou para combinações lineares deles. Os invariantes do tipo Vassiliev de primeira ordem já obtidos são de:

- (i) Curvas planas imersas, por V. I. Arnol'd em [3];
- (ii) Aplicações estáveis de superfícies em $\mathbb{R}^3$, por V. Goryunov em [15];
- (iii) Aplicações estáveis de superfícies em $\mathbb{R}^2$, por T. Ohmoto e F. Aicardi em [26];
- (iv) Aplicações estáveis de 3-variedades em $\mathbb{R}^2$, por M. Yamamoto em [40];
- (v) Aplicações estáveis de 3-variedades em $\mathbb{R}^3$, por R. Oset Sinha e M. C. Romero Fuster em [27].

Um dos objetivos deste trabalho é estudar os invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem de aplicações estáveis de uma 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$.

Assim, no Capítulo 1 obtemos a classificação dos multigerms de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ sob a ação do grupo $\mathcal{A}$ com $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 2. Para isso utilizamos o método descrito por R. G. Wik Atique em [36] que nos permite reduzir a $\mathcal{A}$ -classificação de multigerms para a classificação de germes de funções definidos em $\mathbb{R}^4$ segundo o subgrupo $\nu\mathcal{K}$ do grupo de contato $\mathcal{K}$.

No Capítulo 2 determinamos os conjuntos de bifurcação dos multigerms de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2 e seus diagramas de adjacências. Para cada germe f de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2, seja $f_{u,v}$ uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de f , onde (u, v) são os parâmetros da família. O conjunto dos parâmetros para os quais o germe $f_{u,v}$ é não estável, $\mathcal{B}(f)$, é denominado *conjunto de bifurcação de f* . Para $(u, v) \in \mathcal{B}(f)$ identificamos os $f_{u,v}'s$ em nossa lista de germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão menor ou igual a 1, isto é, determinamos os *diagramas de adjacências de f* . Para obter os conjuntos de bifurcação dos monogermes utilizamos o método descrito por J. Rieger em [29], o qual descrevemos a seguir de maneira sucinta. Seja

$$D^k(f_{u,v}) = \overline{\{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3; f_{u,v}(x_1) = \dots = f_{u,v}(x_k), x_l \neq x_j \text{ se } l \neq j\}}$$

o espaço dos pontos k -múltiplos de $f_{u,v}$. Associamos a $f_{u,v}$ germes de aplicações G cujas funções coordenadas definem $D^k(f_{u,v})$. Em [20], W. L. Marar e D. Mond obtém estas funções coordenadas. O conjunto de bifurcação de f consiste dos parâmetros (u, v) para os quais os germes G são não submersivos. Para os multigerms procedemos de maneira análoga, só que neste caso cada função coordenada de G é calculada diretamente da definição de $D^k(f_{u,v})$.

Os resultados obtidos nos Capítulos 1 e 2 são o ponto de partida para o estudo dos invariantes do tipo Vassiliev que realizamos no Capítulo 3. A primeira etapa é aplicar o método desenvolvido por Vassiliev e obter o número de geradores do espaço dos invariantes locais de

aplicações estáveis de uma 3-variedade orientada M em $\mathbb{R}^4$. Como comentado anteriormente, o conjunto discriminante de $C^\infty(M, \mathbb{R}^4)$ é particionado em estratos de codimensão 1 e 2, os quais correspondem aos germes obtidos na nossa classificação. Para cada estrato de codimensão 1 associamos uma *coorientação* que consiste em estabelecer um critério que distinga quando um caminho transversal em $C^\infty(M, \mathbb{R}^4)$ cruza-o de maneira positiva ou negativa. Considerando a orientação da 3-variedade M obtemos uma partição dos estratos de codimensão 1. A importância de tal etapa é percebida durante o processo. Em seguida determinamos o *sistema coerente*, isto é, um sistema de equações lineares que é obtido tomando caminhos fechados ao redor de cada estrato de codimensão 2. Ao resolver este sistema de equações obtemos que o espaço dos invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem de aplicações estáveis de uma 3-variedade orientada em $\mathbb{R}^4$ é 4-dimensional. Para dois dos quatro geradores estabelecemos a seguinte interpretação geométrica: o número de pontos quádruplos I_Q da imagem de uma aplicação estável e o número de pares de pontos do tipo crosscap/plano $I_{C/P}$ de uma tal imagem.

Ainda no Capítulo 3, estudamos o caso de imersões estáveis e determinamos os invariantes locais para esta situação. Obtemos que o espaço dos invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem de imersões estáveis de uma 3-variedade orientada em $\mathbb{R}^4$ é 3-dimensional. Uma interpretação para cada gerador é: o número de pares de pontos quádruplos I_Q da imagem de uma imersão estável e dois índices de interseção $I_{\ell+}$ e $I_{\ell-}$ introduzidos por V. Goryunov em [15]. Provamos ainda que a característica de Euler da imagem das imersões estáveis é um invariante do tipo Vassiliev e a expressamos como combinação linear dos outros três invariantes.

Os resultados obtidos no caso de imersões estáveis estão reunidos no artigo *Topological invariants of stable immersions of oriented 3-manifolds in $\mathbb{R}^4$* , veja [7].

Para finalizar os estudos do Capítulo 3 obtemos como invariante não local do tipo Vassiliev o número de componentes conexas da curva de pontos triplos na imagem de uma aplicação estável.

Como outra aplicação da classificação de singularidades podemos citar o trabalho de J. W. Bruce e J. M. West [6], onde investigam a geometria do crosscap em $\mathbb{R}^3$ através do seu contato com planos de $\mathbb{R}^3$ na origem. Este estudo é feito por meio da família de funções altura. Seja g uma parametrização do crosscap, ou seja, g é $\mathcal{A}$ -equivalente a $f(x, y) = (x, y^2, xy)$. A imagem de f é chamada de crosscap padrão. Bruce e West observam que uma função altura definida na imagem de g pode ser vista como uma função definida no crosscap padrão. Então, eles mostram que genericamente os germes de funções altura definidos no crosscap tem $_X\mathcal{R}$ -codimensão no máximo 2, onde X é o crosscap padrão. Desta maneira, analisando as singularidades destes germes de funções, obtém informações sobre a geometria da curva de pontos duplos do crosscap e sobre o contato dele com planos.

Analogamente, no Capítulo 4, obtemos informações sobre a geometria da suspensão do crosscap (única singularidade estável de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$, cuja parametrização g é $\mathcal{A}$ -equivalente a $f(x, y, z) = (x, y, z^2, yz)$) considerando seu contato com hiperplanos de $\mathbb{R}^4$ na origem. Observamos que uma função altura definida na imagem de g pode ser vista como uma função definida na imagem de f . Em seguida mostramos que genericamente os germes de funções altura definidos na suspensão do crosscap tem $_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -codimensão no máximo 3, onde $\mathcal{V}$ é a imagem de f . Estu-

dando as singularidades das composições das funções altura com f obtemos o tipo de contato da suspensão do crosscap com hiperplanos em $\mathbb{R}^4$.

Classificação de multigerms de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ e de coposto 1

Nosso objetivo neste capítulo é obter as formas normais dos multigerms simples de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e 2 e coposto 1. Tal classificação é fundamental para o estudo que desenvolveremos no Capítulo 3 sobre os invariantes locais do tipo Vassiliev de uma 3-variedade fechada em $\mathbb{R}^4$.

A lista dos multigerms estáveis foi obtida por Mather em [22] e é a seguinte:

1. $(x, y, z, 0)$
2. (x, y, z^2, yz)
3. $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \end{cases}$
4. $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \end{cases}$
5. $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \end{cases}$
6. $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (0, x, y, z) \end{cases}$

Em [19], K. Houston e N.P. Kirk obtém uma classificação para monogermes. Os de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e 2 são:

<i>Monogermes</i>	$\mathcal{A}_e$ – codimensão	Nome
$(x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^k)), \quad k = 1, 2$	k	$A_k^{\pm\pm}$
$(x, y, z^3 + xz, z^{k+3} + yz), \quad k = 1, 2$	k	R_k
$(x, y, z^2, z(z^4 \pm x^2 \pm y^2))$	2	A_3
$(x, y, z^3 \pm y^2z, xz + yz^2)$	2	$S^\pm$

Na Seção 1.1 apresentamos algumas definições básicas e resultados da teoria de singularidade que se fazem necessários para o bom entendimento de nosso trabalho. É também nesta seção que descrevemos o método que utilizamos na obtenção dos multigerms de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e 2 e coposto 1. Nas demais seções desenvolvemos tal método obtendo a classificação desejada.

1.1 Teoria clássica de Singularidades

Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Consideremos o conjunto de todas as aplicações de classe C^∞ $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$, onde U é uma vizinhança de S em $\mathbb{R}^n$. Neste conjunto introduzimos a seguinte relação de equivalência: duas aplicações $f : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $g : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$ são equivalentes se existir uma vizinhança $U \subset U_1 \cap U_2$ de S em $\mathbb{R}^n$ tal que $f|_U = g|_U$. As classes de equivalência são chamadas *multigerms* de f em S e denotadas por $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^p, f(S))$. Quando S consiste de um único elemento tais classes são também chamadas *monogermes*. Quando não houver a necessidade de especificação usaremos o termo *germe* para denominar um monogermes ou multigermes.

Consideremos S um conjunto finito, ou seja, $S = \{s_1, \dots, s_r\}$. É suficiente estudarmos multigerms onde $f(S) = 0$, uma vez que a classificação de multigerms com $f(S)$ finito e não unitário se reduz a este caso. O germe de f em s_i será chamado de *ramo* e denotado por $f^{(i)} : (\mathbb{R}^n, s_i) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$. Quando necessário mencionarmos o número de ramos de um multigermes, o denominaremos por *r-germe*.

Sejam $\mathcal{E}_n$ o anel local dos germes de funções de classe C^∞ $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ e $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n; f(0) = 0\}$ seu ideal maximal. O conjunto dos monogermes $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, denotado por $\mathcal{E}_{n,p}$, é um $\mathcal{E}_n$ -módulo livre de posto p . O submódulo consistindo dos germes que satisfazem $f(0) = 0$ é dado por $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$. Assim, o conjunto dos multigerms $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é isomorfo à $\oplus_1^r \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$, isto é, à soma direta de r cópias de $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$.

Um germe $f \in \mathcal{E}_{n,p}$ induz o homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{ccc} f^* : \mathcal{E}_p & \rightarrow & \mathcal{E}_n \\ h & \mapsto & h \circ f \end{array}$$

A *multiplicidade local* de um germe de aplicação $f \in \mathcal{E}_{n,p}$ é

$$m_f(0) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{f^* \mathcal{M}_p}$$

Denotamos por $J^k(n, p)$ o espaço vetorial real das aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ onde cada função coordenada f_i de f é um polinômio de grau menor ou igual a k nas coordenadas $x_1, \dots, x_n$ e com termo constante nulo. Os elementos de $J^k(n, p)$ são chamados *k-jatos*.

Sejam $f \in \mathcal{E}_{n,p}$ e $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$. O *k-jato* de f em a , denotado por $j^k f(a)$, é definido por

$$Df_{(a)}(x) + \frac{1}{2!} D^2 f_{(a)}(x, x) + \dots + \frac{1}{k!} D^k f_{(a)}(x, \dots, x),$$

isto é, $j^k f(a)$ é a expansão em série de potências de $f(x+a) - f(a)$ em torno da origem, truncada no termo de grau k .

Um germe $f \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$ é dito *k - G-determinado* (onde $\mathcal{G}$ é um grupo de Mather) se qualquer $g \in \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{E}_{n,p}$ tal que $j^k g(0) = j^k f(0)$ é $\mathcal{G}$ -equivalente a f . Se f é *k - G-determinado* para algum k diremos simplesmente que f é finitamente $\mathcal{G}$ -determinado.

1.1.1 Relações de equivalências e espaços tangentes

Introduzimos algumas relações de equivalências considerando os grupos de Mather $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{K}$ e os subgrupos ${}_V \mathcal{R}$ e ${}_V \mathcal{K}$. Para ver detalhes de definições básicas e resultados destas e de outras relações de equivalências utilizadas na teoria de singularidades, veja [5, 10, 35].

Seja $\mathcal{R}$ o grupo de germes de difeomorfismos $\psi : (\mathbb{R}^n, s) \rightarrow (\mathbb{R}^n, s)$ com a operação de composição. Este grupo age em $\mathcal{E}_{n,p}$ da seguinte maneira: dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, s) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são *R-equivalentes* se existir $\psi \in \mathcal{R}$ tal que $g = f \circ \psi^{-1}$. Denominamos tal grupo de *grupo das mudanças de coordenadas na fonte*.

Seja $\mathcal{A}$ o grupo dos pares de germes de difeomorfismos (ψ, φ) , onde $\psi \in \mathcal{R}$ e $\varphi : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, com a operação de composição em cada coordenada. Este grupo age em $\mathcal{E}_{n,p}$ da seguinte maneira: dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, s) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são *A-equivalentes* se existir $(\psi, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi \circ g = f \circ \psi$.

A *A-equivalência* de multigerms é definida como segue: dois *r*-germes $f, g : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ são *A-equivalentes* se existirem $(\psi^{(i)}, \varphi) \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, r$, tais que $\varphi \circ g^{(i)} = f^{(i)} \circ \psi^{(i)}$. Isto significa que para cada ramo podemos escolher uma mudança de coordenadas na fonte, enquanto que na meta a mesma mudança de coordenadas deve ser aplicada para todos os ramos.

Consideremos $(\mathcal{V}, 0)$ um germe de uma subvariedade analítica em $(\mathbb{R}^p, 0)$ (para mais detalhes, veja [16]) e seja I o ideal em $\mathcal{E}_p$ que define $\mathcal{V}$, isto é, o ideal dos germes de funções que se anulam em $\mathcal{V}$. Denotamos por ${}_V \mathcal{R}$ o subgrupo de $\mathcal{R}$ consistindo dos germes em $\mathcal{R}$ tais que $\psi^*(I) = I$, ou seja, $\psi(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$.

Definimos $\mathcal{K}$ (*grupo de contato*) como sendo o grupo dos germes de difeomorfismos $H : (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0)$ dados por $H(x, t) = (\psi(x), \tilde{H}(x, t))$, onde $\psi \in \mathcal{R}$ e $\tilde{H}(x, 0) = 0$. Este grupo age em $\mathcal{E}_p$ da seguinte maneira: se $h_1, h_2 \in \mathcal{E}_p$, então h_1 e h_2 são $\mathcal{K}$ -*equivalentes* se existir $H \in \mathcal{K}$ tal que $H(x, h_1(x)) = (\psi(x), h_2(\psi(x)))$. Em outras palavras, H leva o gráfico de h_1 no gráfico de h_2 . Denotamos por ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ o subgrupo de $\mathcal{K}$ consistindo dos germes de difeomorfismos $H = (\psi, \tilde{H})$ como acima, tais que $\psi \in {}_{\mathcal{V}}\mathcal{R}$. E por ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^k$, o subgrupo de ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ consistindo dos k -jatos de germes de difeomorfismos em ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$.

Para mais detalhes da próxima definição, veja [35].

O espaço tangente a $\mathcal{A}$ -órbita de $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é dado por

$$T\mathcal{A} \cdot f = tf(\mathcal{M}_n\theta(n)_S) + \omega f(\mathcal{M}_p\theta(p)) \subseteq \mathcal{M}_n\theta(f)$$

onde $\theta(n)$ consiste dos germes em 0 de campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$, $\theta(n)_S$ é a soma direta de r -cópias de $\theta(n)$ e $\theta(f)$ consiste dos germes em 0 de campos vetoriais ao longo de f . Neste caso $\theta(f)$ é a soma direta de $\theta(f^{(i)})$, onde $f^{(i)}$ é ramo de f , e pode ser identificado com a soma direta de r -cópias de $\mathcal{E}_{n,p}$. O espaço tangente estendido é dado por

$$T\mathcal{A}_e \cdot f = tf(\theta(n)_S) + \omega f(\theta(p)) \subseteq \theta(f)$$

e a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f é dada por

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta(f)}{T\mathcal{A}_e \cdot f} = \dim_{\mathbb{R}} N\mathcal{A}_e f,$$

onde a dimensão é como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $N\mathcal{A}_e f$ é chamado de espaço normal a f .

O próximo resultado nos fornece o espaço tangente a $h \in \mathcal{E}_p$ segundo o grupo ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{R}$ (veja [5]).

Lema 1.1 *Seja $h \in \mathcal{E}_p$. Então*

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{R} \cdot h = \{\xi \cdot h; \xi \in \mathcal{M}_p\theta(p) \cap \text{Derlog}(\mathcal{V})\}$$

e

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{R}_e \cdot h = \{\xi \cdot h; \xi \in \text{Derlog}(\mathcal{V})\}$$

onde $\text{Derlog}(\mathcal{V}) = \{\xi \in \theta(p); \xi \cdot \tilde{h} \in I, \forall \tilde{h} \in I\}$ e $I \subseteq \mathcal{E}_p$ é um ideal que define $\mathcal{V}$.

Usaremos o programa Macaulay [4] para calcular o $\text{Derlog}(\mathcal{V})$ onde necessário.

O espaço tangente a $h \in \mathcal{E}_p$ segundo o grupo ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ é

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K} \cdot h = T_{\mathcal{V}}\mathcal{R} \cdot h + h^*(\mathcal{M}_1) \cdot \mathcal{M}_p.$$

O espaço tangente estendido é

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}_e \cdot h = T_{\mathcal{V}}\mathcal{R}_e \cdot h + h^*(\mathcal{M}_1) \cdot \mathcal{M}_p.$$

e a $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão de h é

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\theta(h)}{T_{\nu\mathcal{K}_e} \cdot h} = \dim_{\mathbb{R}} N_{\nu\mathcal{K}_e} \cdot h.$$

Observemos que se a origem é fixada por todos os elementos de $Derlog(\mathcal{V})$, então $T_{\nu\mathcal{R}} \cdot h = T_{\nu\mathcal{R}_e} \cdot h$. Logo, $T_{\nu\mathcal{K}} \cdot h = T_{\nu\mathcal{K}_e} \cdot h$.

Seja $\nu\mathcal{R}_k$ o subgrupo de $\nu\mathcal{R}$ que consiste dos elementos de $\nu\mathcal{R}$ cujo k -jato é a identidade.

O espaço tangente a $h \in \mathcal{E}_p$ segundo o grupo $\nu\mathcal{R}_1$ é

$$T_{\nu\mathcal{R}_1} \cdot h = \{\xi \cdot h; \xi \in \mathcal{M}_p^2 \theta(p) \cap Derlog(\mathcal{V})\}$$

e o espaço tangente segundo o grupo $T_{\nu\mathcal{K}_1} \cdot h$ é

$$T_{\nu\mathcal{K}_1} \cdot h = T_{\nu\mathcal{R}_1} \cdot h + h^*(\mathcal{M}_1) \cdot \mathcal{M}_p.$$

1.1.2 Método de classificação

Determinar as $\mathcal{A}$ -classes de germes finitamente determinados em $\oplus_1^r \mathcal{E}_{n,p}$ não é uma tarefa fácil. Afortunadamente, no caso $(n, n+1)$ podemos reduzir a $\mathcal{A}$ -classificação de multigerme para a $\nu\mathcal{K}$ -classificação de monogermes de funções em $\mathcal{E}_{n+1}$. O resultado que nos permite tal abordagem é devido a R. G. Wik Atique (veja [36]) e é o seguinte.

Teorema 1.2 *Dados $\tilde{S} = \{s_1, \dots, s_{r-1}\}$ e $S = \tilde{S} \cup \{s_r\}$ subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ e $\tilde{f} : (\mathbb{C}^n, \tilde{S}) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um multigerme finitamente $\mathcal{A}$ -determinado, consideremos $g, \tilde{g} : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ multigermes finitamente $\mathcal{A}$ -determinados tais que $g^{(i)} = \tilde{g}^{(i)} = f^{(i)}$ para $i = 1, \dots, r-1$. Então g e $\tilde{g}$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes se, e somente se, h e $\tilde{h}$ são $\nu\mathcal{K}$ -equivalentes onde $h, \tilde{h} \in \mathcal{O}_{n+1}$ são equações reduzidas que definem as imagens de $g^{(r)}$ e $\tilde{g}^{(r)}$, respectivamente, e $\mathcal{V}$ é a imagem de $\tilde{f}$.*

Precisamos agora de uma relação entre as $\mathcal{A}_e$ -codimensões de f e g com a $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão de h . Neste sentido temos o seguinte resultado (veja [36]).

Teorema 1.3 *Sejam $\tilde{S} = \{s_1, \dots, s_{r-1}\}$ e $S = \tilde{S} \cup \{s_r\}$ subconjuntos de $\mathbb{C}^n$, $f : (\mathbb{C}^n, \tilde{S}) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um multigerme finitamente $\mathcal{A}$ -determinado e $g, \tilde{g} : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ satisfazendo $g^{(i)} = f^{(i)}$ para $i = 1, \dots, r-1$ e $g^{(r)}$ uma imersão. Se $h \in \mathcal{O}_{n+1}$ é uma equação reduzida que define a imagem de $g^{(r)}$ e $\mathcal{V}$ é a imagem de f , então a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de g é dada pela soma das $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f e a $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão de h .*

O próximo resultado foi obtido por J. Mather em [22] e nos dá como determinar as G -órbitas em M , onde G é um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável.

Proposição 1.4 (Lema de Mather) *Sejam G um grupo de Lie que age numa variedade diferenciável M e S uma subvariedade de M que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) Para qualquer $x \in S$, $T_x G \cdot x \supseteq T_x S$;
- (2) A dimensão de $T_x G \cdot x$ independe de $x \in S$;
- (3) S é conexa.

Então S está contida numa única G -órbita.

O método da transversal completa que descrevemos abaixo, juntamente com o Lema de Mather, nos permite obter as $\nu\mathcal{K}^k$ -órbitas em $J^k(n+1, 1)$ da seguinte maneira:

- (i) Dado um determinado k -jato, aplicamos a transversal completa para obter as possíveis órbitas em $J^{k+1}(n+1, 1)$ de $(k+1)$ -jatos cujo k -jato é o considerado;
- (ii) A fim de reduzir esta lista aplicamos o Lema de Mather ou realizamos mudanças de coordenadas apropriadas;
- (iii) Para cada possível $(k+1)$ -jato verificamos a ordem de sua determinação como germe. Se for $(k+1)$ -determinado obtemos o representante de uma $\nu\mathcal{K}$ -órbita em $\mathcal{E}_{n+1}$. Caso contrário, repetimos o procedimento descrito em (i).

É com o Teorema da Transversal Completa que produzimos uma lista de possíveis $(k+1)$ -jatos.

Teorema 1.5 (Teorema da Transversal Completa) *Sejam $\sigma \in J^k(n+1, 1)$, $H^{k+1} \subset J^{k+1}(n+1, 1)$, o subespaço das aplicações polinomiais homogêneas de grau $k+1$, e $T = \langle \beta_1, \dots, \beta_r \rangle \subset H^{k+1}$ subespaço tais que*

$$\mathcal{M}_{n+1}^{k+1} \cdot \mathcal{E}_{n+1} \subset T_{\nu\mathcal{K}_1} \cdot \sigma + T + \mathcal{M}_{n+1}^{k+2} \cdot \mathcal{E}_{n+1}.$$

Então para qualquer $\tilde{\sigma} \in J^{k+1}(n+1, 1)$ com $j^k \tilde{\sigma}(0) = \sigma$ é $\nu\mathcal{K}_1^{k+1}$ -equivalente a

$$\sigma + \sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

O subespaço $T = \langle \beta_1, \dots, \beta_r \rangle$ é a transversal completa.

Por fim, um critério para a $\nu\mathcal{K}$ -determinação finita. O resultado seguinte é análogo ao do grupo $\mathcal{K}$ (veja [36]).

Proposição 1.6 *Seja $h \in \mathcal{E}_{n+1}$. Se $\mathcal{M}_{n+1}^{k+1} \subset \mathcal{M}_{n+1} \cdot T_{\nu\mathcal{R}} \cdot h + \mathcal{M}_{n+1}^{k+2} + h^*(\mathcal{M}_1) \cdot \mathcal{M}_{n+1}$, então h é $k - \nu\mathcal{K}$ -determinado.*

1.1.3 Desdobramentos versais

Um *desdobramento a m -parâmetros* de um r -germe $f_0 : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ é um r -germe

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, S \times \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m, 0) \\ (x, u) &\mapsto (f(x, u), u) \end{aligned}$$

tal que $f(x, 0) = f_0(x)$. O germe $f(x, u)$, que denotaremos por $f_u(x)$, é chamado uma *deformação* de f_0 .

Consideremos o grupo de Mather $\mathcal{A}$ (os resultados seguintes são análogos para qualquer outro grupo de Mather). Dois desdobramentos $F, G : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m, 0)$ de f_0 são *isomorfos* se existirem germes de difeomorfismos $\phi_i : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \{s_i\} \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0)$, $i = 1, \dots, r$, e $\psi : (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m, 0)$ que são desdobramentos a m -parâmetros dos germes da identidade em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente, e $G^{(i)} = \psi \circ F^{(i)} \circ \phi_i^{-1}$, $i = 1, \dots, r$, lembrando que $G^{(i)}$ e $F^{(i)}$ denotam o i -ésimo ramo de G e F .

Dado um germe $h : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ e F um desdobramento de f_0 , definimos o *pull-back* de F por h , denotado por h^*F , como sendo o desdobramento a t -parâmetros $h^*F(x, v) = (f(x, h(v)), v)$.

Dizemos que F e G são *equivalentes* se existir um difeomorfismo $\Phi : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ tal que G é isomorfo a Φ^*F . Se G é um desdobramento a t -parâmetros de f_0 (t não necessariamente igual a m), dizemos que G é *induzido* por F se existir um germe $h : (\mathbb{R}^t, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ tal que G é isomorfo a $h^*(F)$.

Seja $F(x, u) = (f(x, u), u)$ um desdobramento de f_0 . Dizemos que F é *versal* se todos os desdobramentos de f_0 são induzidos por F .

Enunciemos agora o teorema fundamental da existência de desdobramentos versais.

Teorema 1.7 *Um desdobramento a m -parâmetros $F(x, u) = (f(x, u), u)$ de f_0 é $\mathcal{A}_e$ -versal se, e somente se, a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f_0 é finita e*

$$T\mathcal{A}_e \cdot f_0 + \mathbb{R}\{\dot{F}_1, \dots, \dot{F}_m\} = \oplus_1^r \mathcal{E}_{n,n+1},$$

onde $\dot{F}_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, 0)$, para $i = 1, \dots, m$.

Observemos que se a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f_0 é c e $g_1, \dots, g_c \in \oplus_1^r \mathcal{E}_{n,n+1}$ formam uma $\mathbb{R}$ -base do complementar de $T\mathcal{A}_e \cdot f_0$ em $\oplus_1^r \mathcal{E}_{n,n+1}$, então

$$F(x, u) = (f_0(x) + \sum_{i=1}^c u_i g_i(x), u)$$

é um desdobramento de f_0 com $g_i = \dot{F}_i$ e portanto F é $\mathcal{A}_e$ -versal.

1.1.4 Operações de aumentação e concatenação

Todos os multigerms com mais de um ramo de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e coposto 1 de aplicações de classe C^∞ (ou analíticas) $(K^n, S) \rightarrow (K^p, 0)$, com $n \geq p - 1$, (n, p) nas boas dimensões segundo Mather e $K = \mathbb{C}$ ou $K = \mathbb{R}$, podem ser obtidos por operações de *aumentação* e *concatenação*. Para mais detalhes sobre o assunto veja o trabalho de T. Cooper, D. Mond e R. G. Wik-Atique [9].

Sejam $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 onde S é um subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ e

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, S \times \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0) \\ (x, u) &\mapsto (f_u(x), u) \end{aligned} .$$

um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de f . Definimos

$$\begin{aligned} A_f^\pm : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, S \times \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}, 0) \\ (x, \lambda) &\mapsto (f_{\pm\lambda^2}(x), \lambda) \end{aligned} .$$

A $\mathcal{A}$ -classe de equivalência de $A_f^\pm$ independe da escolha do desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal F de f . Chamamos A_f^+ de *aumentação positiva* de f e A_f^- de *aumentação negativa* de f . O germe $A_f^\pm$ tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de $A_f^\pm$ é dado por $G(x, \lambda, \mu) = (f_{\pm\lambda^2+\mu}(x), \lambda, \mu)$.

Exemplo 1.8 Seja $f^\pm(x, z) = (x, z^2, z^3 \pm x^2z)$ o germe de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Consideremos o seguinte desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de $f^\pm$,

$$F^\pm(x, z, u) = (x, z^2, z^3 \pm x^2z + uz, u).$$

Então, as aumentações positiva e negativa de f^+ são dadas por $A_{f^+}^\pm(x, z, u) = (x, z^2, z^3 + x^2z \pm u^2z, u)$. Logo, obtemos os germes de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$

$$A_1^{\pm\pm} : (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 + y^2))$$

de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Se considerarmos a aumentação negativa de f^- obtemos o germe A_1^{--} , também de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1.

Há duas operações de concatenação: mônica e binária. A operação de *concatenação mônica* consiste em produzir a partir de um multigerme com r -ramos um novo multigerme com $r + 1$ -ramos, onde o ramo extra é uma dobra (no caso $n \geq p$) ou uma imersão (no caso $n < p$). Já a *concatenação binária* consiste em combinar dois multigerms de codimensão 1 para obter um novo multigerme.

Daremos ênfase à operação de concatenação mônica para a obtenção de multigerms de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ e de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1.

Seja $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e $F(x, u) = (f_u(x), u)$ um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de f . Definimos a concatenação mônica de f como sendo o multigerme

$C_f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}, 0)$ dado por

$$C_f : \begin{cases} (x, u) \mapsto (f_u(x), u) \\ (x, u) \mapsto (x, 0) \end{cases}.$$

A $\mathcal{A}$ -classe de equivalência de C_f independe da escolha do desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal F de f . O germe C_f tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1.

Vejamos um exemplo desta operação.

Exemplo 1.9 *Seja $f : \begin{cases} (y, z^2, yz) \\ (y, y, z) \end{cases}$ o bigerme de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Consideremos o seguinte desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de f , $F : \begin{cases} (y, z^2, yz, u) \\ (y + u, y, z, u) \end{cases}$. A concatenação mônica de f é dada por*

$$C_f : \begin{cases} (y, z^2, yz, u) \\ (y + u, y, z, u) \\ (y, z, u, 0) \end{cases}.$$

Realizando mudanças de coordenadas na fonte e na meta obtemos o trigerme de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1

$$\mathcal{T}_c : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x, x + y, y, z) \end{cases}.$$

Seja $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e f_u sua deformação versal. A menos de homeomorfismo, existem duas (possivelmente equivalentes) escolhas para a imagem de f_u : uma para u positivo e outra para u negativo. Denotamos tais imagens por $D^+(f)$ e $D^-(f)$, respectivamente. Da mesma maneira denotamos por $D^+(A_f^\pm)$ e $D^-(A_f^\pm)$ as imagens de $f_{\pm u^2 + \lambda}$ para λ positivo e negativo, respectivamente.

Os próximos resultados foram obtidos por T. Cooper, D. Mond e R. G. Wik-Atique em [9].

Proposição 1.10 *Com a notação acima*

- (i) $D^+(A_f^+)$ é homotopicamente equivalente a $D^+(f)$;
- (ii) $D^-(A_f^+)$ é homotopicamente equivalente a $S(D^-(f))$;
- (iii) $D^+(A_f^-)$ é homotopicamente equivalente a $S(D^+(f))$;
- (iv) $D^-(A_f^-)$ é homotopicamente equivalente a $D^-(f)$;

onde $S(D^\pm(f))$ denota a suspensão de $D^\pm(f)$.

Com respeito a operação de concatenação mônica temos o seguinte.

Proposição 1.11 *Seja f um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. A imagem de uma deformação versal do multigerme C_f é homotopicamente equivalente à suspensão da imagem de uma deformação versal de f .*

1.1.5 Suspensão do crosscap

A superfície em $\mathbb{R}^3$ dada pela equação $W^2 - Y^2Z = 0$, onde (Y, Z, W) representam as coordenadas em $\mathbb{R}^3$, é chamada de *guarda-chuva de Whitney*. Notemos que a única parte do guarda-chuva de Whitney que pertence a região $Z < 0$ é o eixo Z .

Seja $\tilde{f} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ o germe definido por $\tilde{f}(y, z) = (y, z^2, yz)$. A imagem de $\tilde{f}$ é o guarda-chuva de Whitney sem seu “cabo”, isto é, sem a semirreta $Y = W = 0$ e $Z < 0$. Definimos um *crosscap* como a imagem de qualquer germe g que é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\tilde{f}$. O *ponto de crosscap* é a imagem da origem de $\mathbb{R}^2$ pelo germe g . Chamamos o crosscap parametrizado por $\tilde{f}$ de *crosscap padrão*. Whitney provou em [39] que tal singularidade é estável e que é a única singularidade local que aparece numa aplicação estável de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$.

Consideramos agora a variedade $\mathcal{V}$ definida pela mesma equação que o guarda-chuva de Whitney em $\mathbb{R}^3$, $W^2 - Y^2Z = 0$, mas agora em $\mathbb{R}^4$ e com coordenadas (X, Y, Z, W) . O desenho acima representa $\mathcal{V}$ em cada seção 3-dimensional (t, Y, Z, W) , com $t \in \mathbb{R}$ fixo. Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ o germe de aplicação definido por $f(x, y, z) = (x, \tilde{f}(y, z)) = (x, y, z^2, yz)$. Temos que a imagem de f é dada por $\mathcal{V}$ menos $Y = W = 0$ $X \in \mathbb{R}$ e $Y < 0$. Definimos uma *suspensão do crosscap* como sendo a imagem de qualquer germe h que é $\mathcal{A}$ -equivalente a f . A imagem de h contém uma curva de pontos de crosscap. A suspensão do crosscap parametrizado por f será chamada de *suspensão do crosscap padrão* (ou simplesmente suspensão do crosscap).

1.2 Classificação de bigermes

A partir deste momento denotaremos por (x, y, z) e (X, Y, Z, W) as coordenadas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

Os resultados seguintes são análogos ao que D. Mond obtém em [23].

Lema 1.12 *Seja f um bigerme de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$, onde cada ramo é uma imersão. Então f é $\mathcal{A}$ -equivalente a*

$$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z, \varphi(x, y, z)) \end{cases},$$

onde $\varphi(x, y, z)$ é chamada função de contato.

Proposição 1.13 *Sejam*

$$f : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z) \xrightarrow{f_2} (x, y, z, \varphi(x, y, z)) \end{cases} \quad e \quad \tilde{f} : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{\tilde{f}_1} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z) \xrightarrow{\tilde{f}_2} (x, y, z, \tilde{\varphi}(x, y, z)) \end{cases}$$

então,

(i) f é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\tilde{f}$ se, e somente se, φ é $\mathcal{K}$ -equivalente a $\tilde{\varphi}$.

(ii) Se f é finitamente $\mathcal{A}$ -determinado, então

$$T\mathcal{A}_e \cdot f = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ TK_e \cdot \varphi & TK_e \cdot \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Delta(\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3) \end{bmatrix},$$

onde $\Delta(\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3)$ é a diagonal em $\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$.

Demonstração: (i) Suponhamos φ $\mathcal{K}$ -equivalente a $\tilde{\varphi}$. Então, existe um germe de difeomorfismo

$$H : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0))$$

dado por $H(x, y, z, t) = (h(x, y, z), \tilde{H}(x, y, z, t))$ e satisfazendo

(a) $h : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ é um germe de difeomorfismo;

(b) $\tilde{H}(x, y, z, 0) = 0$;

(c) $H(x, y, z, \varphi(x, y, z)) = (h(x, y, z), \tilde{\varphi}(h(x, y, z)))$.

É fácil ver que $H \circ f_i = \tilde{f}_i \circ h$, $i = 1, 2$. Portanto, f é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\tilde{f}$.

Reciprocamente, suponhamos f $\mathcal{A}$ -equivalente a $\tilde{f}$. Então, existem germes de difeomorfismos $\phi_i : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, $i = 1, 2$, e $\psi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$ tais que

(1) $\psi \circ f_1 = \tilde{f}_1 \circ \phi_1$;

(2) $\psi \circ f_2 = \tilde{f}_2 \circ \phi_2$.

Definimos

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \\ (x, y, z, t) &\mapsto (\phi_2(x, y, z), \psi_4(x, y, z, t)) \end{aligned}$$

Segue de (1) que $\psi_4(x, y, z, 0) = 0$ e como ψ é um difeomorfismo, $\frac{\partial \psi_4}{\partial t}(0) \neq 0$. Logo, $H \in \mathcal{K}$. De (2) temos que $H(x, y, z, \varphi(x, y, z)) = (\phi_2(x, y, z), \tilde{\varphi}(\phi_2(x, y, z)))$ e portanto φ é $\mathcal{K}$ -equivalente a $\tilde{\varphi}$.

$$(ii) \text{ Primeiramente mostremos que } \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ TK_e \cdot \varphi & TK_e \cdot \tilde{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Delta(\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3) \end{bmatrix} \subseteq T\mathcal{A}_e \cdot f.$$

Seja $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a projeção dada por $\pi(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z)$, consideremos o homomorfismo induzido

$$\begin{aligned} \pi^* : \mathcal{E}_3 &\rightarrow \mathcal{E}_4 \\ g &\mapsto g \circ \pi \end{aligned}$$

$$\text{e } \begin{bmatrix} g_1 & \tilde{g}_1 \\ g_2 & \tilde{g}_2 \\ g_3 & \tilde{g}_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Então}$$

$$\begin{bmatrix} g_1 & \tilde{g}_1 \\ g_2 & \tilde{g}_2 \\ g_3 & \tilde{g}_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = tf \begin{bmatrix} g_1 - \tilde{g}_1 & 0 \\ g_2 - \tilde{g}_2 & 0 \\ g_3 - \tilde{g}_3 & 0 \end{bmatrix} + \omega f \begin{bmatrix} \pi^*(\tilde{g}_1) \\ \pi^*(\tilde{g}_2) \\ \pi^*(\tilde{g}_3) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo, } \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \subseteq T\mathcal{A}_e \cdot f.$$

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix} \text{ com } g \in TK_e \cdot \varphi. \text{ Notemos que } A \in T\mathcal{A}_e \cdot f. \text{ De fato, como } g \in TK_e \cdot \varphi,$$

existem $p, h_i \in \mathcal{E}_3, i = 1, 2, 3$, tais que $g = h_1 \cdot \varphi_x + h_2 \cdot \varphi_y + h_3 \cdot \varphi_z + p \cdot \varphi$. Assim,

$$\begin{bmatrix} 0 & -h_1 \\ 0 & -h_2 \\ 0 & -h_3 \\ g & 0 \end{bmatrix} = tf \begin{bmatrix} 0 & -h_1 \\ 0 & -h_2 \\ 0 & -h_3 \end{bmatrix} + \omega f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi^*(g) - W \cdot \pi^*(p) \end{bmatrix} \in T\mathcal{A}_e \cdot f.$$

Agora, se considerarmos

$$\begin{bmatrix} 0 & h_1 \\ 0 & h_2 \\ 0 & h_3 \\ 0 & g \end{bmatrix} = tf \begin{bmatrix} 0 & h_1 \\ 0 & h_2 \\ 0 & h_3 \end{bmatrix} + \omega f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W \cdot \pi^*(p) \end{bmatrix} \in T\mathcal{A}_e \cdot f,$$

temos que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \in T\mathcal{A}_e \cdot f.$

Por fim, se $g \in \mathcal{E}_3$, então

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g & g \end{bmatrix} = \omega f \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \pi^*(g) & \pi^*(g) \end{bmatrix} \in T\mathcal{A}_e \cdot f,$$

isto é, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Delta(\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3) \end{bmatrix} \subseteq T\mathcal{A}_e \cdot f.$

Resta mostrarmos que $T\mathcal{A}_e \cdot f \subseteq \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ TK_e\varphi & TK_e\tilde{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Delta(\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3) \end{bmatrix}.$

Seja $\begin{bmatrix} h_1 & \tilde{h}_1 \\ h_2 & \tilde{h}_2 \\ h_3 & \tilde{h}_3 \\ g & \tilde{g} \end{bmatrix} \in T\mathcal{A}_e f$, com $g, \tilde{g}, h_i, \tilde{h}_i \in \mathcal{E}_3, i = 1, 2, 3$. Então, existem $a, b, c, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in \mathcal{E}_3$ e $m, n, p, q \in \mathcal{E}_4$ tais que

$$\begin{bmatrix} h_1 & \tilde{h}_1 \\ h_2 & \tilde{h}_2 \\ h_3 & \tilde{h}_3 \\ g & \tilde{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \tilde{a} \\ b & \tilde{b} \\ c & \tilde{c} \\ 0 & a \cdot \varphi_x + b \cdot \varphi_y + c \cdot \varphi_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \circ f_1 & m \circ f_2 \\ n \circ f_1 & n \circ f_2 \\ p \circ f_1 & p \circ f_2 \\ q \circ f_1 & q \circ f_2 \end{bmatrix}.$$

Logo, $g = q(x, y, z, 0), \tilde{g} = a \cdot \varphi_x + b \cdot \varphi_y + c \cdot \varphi_z + q(x, y, z, \varphi(x, y, z))$ e

$$\tilde{g} - g = a \cdot \varphi_x + b \cdot \varphi_y + c \cdot \varphi_z + d \cdot \varphi(x, y, z) \in TK_e \cdot \varphi,$$

com $d \in \mathcal{E}_3$.

Portanto

$$\begin{bmatrix} h_1 & \tilde{h}_1 \\ h_2 & \tilde{h}_2 \\ h_3 & \tilde{h}_3 \\ g & \tilde{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & \tilde{h}_1 \\ h_2 & \tilde{h}_2 \\ h_3 & \tilde{h}_3 \\ 0 & \tilde{g} - g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ g & g \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ TK_e \cdot \varphi & TK_e \cdot \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Delta(\mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3) \end{bmatrix}.$$

□

Corolário 1.14 *Com as mesmas hipóteses de (ii) da Proposição 1.13, $\mathcal{NA}_e \cdot f$ é isomorfo a $\mathcal{NK}_e \cdot \varphi$.*

Corolário 1.15 *Sejam φ e f como na Proposição 1.13. Então, f é $k - \mathcal{A}$ -determinada se, e somente se, φ é $k - \mathcal{K}$ -determinado.*

Para o próximo resultado, veja a $\mathcal{K}$ -classificação de germes em $\mathcal{E}_3$ em [2].

Corolário 1.16 *Um bigerme de imersões de $(\mathbb{R}^3, S)$ em $(\mathbb{R}^4, 0)$ e de $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 2 tem uma das seguintes formas normais:*

	$\mathcal{A}_e$ -codimensão	Nome
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \end{cases}$	0	
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z, x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$	1	$\mathcal{E}$
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z, x^2 + y^2 - z^2) \end{cases}$	1	$\mathcal{H}$
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z, x^2 \pm y^2 + z^3) \end{cases}$	2	$B_2^\pm$

Observação 1.17 *Os germes $\mathcal{E}$ e $\mathcal{H}$ obtimos acima são aumentações de $f : \begin{cases} (y, z, 0) \\ (y, z, y^2 + z^2) \end{cases}$.*

De fato, consideremos o seguinte desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de f ,

$$F : \begin{cases} (\mu, y, z, 0) \\ (\mu, y, z, \mu + y^2 + z^2) \end{cases}.$$

Então $\mathcal{E} = A_f^+$ e $\mathcal{H} = A_f^-$.

Classificaremos agora os bigermes onde um dos ramos é a suspensão do crosscap. Neste caso em particular, estamos interessados nos bigermes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão até 3 (e não até 2), pois esta classificação é necessária aos estudos que desenvolvemos no Capítulo 4.

Proposição 1.18 *Seja $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um bigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 3 e onde um dos seus ramos é a suspensão do crosscap. Então f tem uma das seguintes formas normais:*

	$\mathcal{A}_e - \text{codimensão}$	Nome
(1) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \end{cases}$	0	
(2) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y \pm x^k, y, z) \end{cases}$	$k - 1$	$k \geq 2$ $C^\pm (k = 2)$
(3) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x^2 \pm y^k, y, z) \end{cases}$	k	$k \geq 2$
(4) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y^2 \pm x^k, y, z) \end{cases}$	k	$k \geq 3$
(5) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, xy + x^k, y, z) \end{cases}$	k	$k \geq 3$
(6) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, \pm x^2 \pm y^k, z) \end{cases}$	k	$k \geq 2$
(7) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, \pm y^2 \pm x^k, z) \end{cases}$	k	$k \geq 3$
(8) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, xy \pm x^k, y, z) \end{cases}$	k	$k \geq 3$
(9) $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, z, x^2 \pm z^2) \end{cases}$	3	

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ a imagem da suspensão do crosscap que é definida por $W^2 - Y^2Z = 0$. Então

$$\text{Derlog}(\mathcal{V}) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, Y, -2Z, 0), (0, 0, 2W, Y^2), (0, Y, 0, W), (0, W, 0, YZ) \rangle.$$

Segue do Teorema 1.2 que as $\mathcal{A}$ -classes de tais germes são dadas pelas $\nu\mathcal{K}$ -classes em $\mathcal{E}_4$.

Consideremos a ação de $\nu\mathcal{K}^1$ em $J^1(4, 1)$.

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ e $j^1h = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1)$. Segue do Lema 1.1 que

$$T\nu\mathcal{K}^1 \cdot j^1h = \mathcal{M}_4 \langle a \rangle + \mathcal{E}_4 \langle bY - 2cZ, 2cW, bY + dW, bW \rangle + \mathcal{E}_4 \langle j^1h \rangle + \mathcal{M}_4^2. \quad (1.1)$$

Determinemos as órbitas em $J^1(4, 1)$ sob a ação de $\nu\mathcal{K}^1$.

Suponhamos $a \neq 0$ e consideremos $S = \{\sigma = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1); a > 0\}$. S é um aberto de $J^1(4, 1)$ e portanto é uma subvariedade. Além disso, S é claramente conexa e $T_\sigma S = J^1(4, 1) = T\nu\mathcal{K}^1 \cdot \sigma, \forall \sigma \in S$. Logo, segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é X . O caso $a < 0$ é análogo, com representante $-X$ que é $\nu\mathcal{K}^1$ -equivalente a X .

Suponhamos agora $a = 0$. Temos que $j^1h = bY + cZ + dW$ e por (1.1) que

$$T\nu\mathcal{K}^1 \cdot j^1h = \mathcal{E}_4 \langle bY - 2cZ, 2cW, bY + dW, bW \rangle + \mathcal{E}_4 \langle j^1h \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Consideremos $b \cdot c \neq 0$ e $S = \{\sigma = bY + cZ + dW \in M; b > 0, c > 0\}$. Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $Y + Z$. Considerando os outros casos obtemos órbitas com representantes $\pm Y \pm Z$ que são $\nu\mathcal{K}^1$ -equivalentes a $Y + Z$.

Prosseguindo desta maneira obtemos as seguinte órbitas em $J^1(4, 1)$: $X, Y + Z, Y, Z, W, 0$.

Para uma melhor compreensão dos próximos passos desta demonstração sugerimos que acompanhe o esquema da Figura 1.1.

(i) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é X . Então

$$T\nu\mathcal{K}^1 \cdot j^1h = \mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_4^2 \text{ e } \mathcal{M}_4^2 \subseteq \mathcal{M}_4 \cdot T\nu\mathcal{K} \cdot j^1h + \mathcal{M}_4^3.$$

Segue da Proposição 1.6 que j^1h é 1- $\nu\mathcal{K}$ -determinado. Logo, h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a X e tem $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão igual a 0. Pelo Teorema 1.2 obtemos o seguinte germe estável $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \end{cases}$.

(ii) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo $(k-1)$ -jato é $Y + Z$, $k \geq 2$. A k -transversal é calculada como segue.

$$\begin{aligned} T\nu\mathcal{K}_1 \cdot j^{k-1}h &= \{\xi \cdot j^{k-1}h; \xi \in \mathcal{M}_4^2 \theta(4) \cap \text{Derlog}(\mathcal{V})\} + \mathcal{E}_4 \langle j^{k-1}h \rangle \\ &= \mathcal{M}_4 \langle Y - 2Z, W, Y \rangle + \mathcal{E}_4 \langle j^{k+1}h \rangle \\ &= \mathcal{M}_4^2 \setminus \mathcal{E}_4 \langle X^2, X^3, \dots \rangle. \end{aligned}$$

Então $\langle X^k \rangle$ é a k -transversal.

Segue do Teorema da Transversal Completa que os k -jatos cujo $(k-1)$ -jato é igual a $Y + Z$ são $\nu\mathcal{K}^k$ -equivalentes a $Y + Z + \lambda X^k$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Em particular, $j^k h \sim_{\nu\mathcal{K}^k} Y + Z + \lambda X^k$.

Suponhamos $\lambda \neq 0$. Então $Y + Z + \lambda X^k$ é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $Y + Z \pm X^k$ através da seguinte

(*) Os germes cujo 2-jato é este, tem $\nu \mathcal{K}_e$ -codimensão maior que 3.

(**) Os germes cujo 1-jato é este, tem $\gamma\mathcal{K}_e$ -codimensão maior que 3.

(***) Das demais órbitas obtém-se germes de $\gamma\mathcal{K}_\varepsilon$ -codimensão maior que 3.

Figura 1.1: As órbita em cada $J^k(4, 1), k = 1, 2, 3, 4$.

mudança de coordenada na fonte:

$$\begin{aligned} H : \quad (\mathbb{R}^4, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (X, Y, Z, W) &\mapsto \left(\frac{1}{\sqrt[k]{\varepsilon \cdot \lambda}} X, Y, Z, W \right). \end{aligned}$$

onde $\varepsilon = 1$ se $\lambda > 0$ e $\varepsilon = -1$ se $\lambda < 0$. Como

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^k \cdot j^k h = \mathcal{M}_4 \langle X^{k-1} \rangle + \mathcal{E}_4 \langle Y, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^{k+1},$$

segue que $j^k h$ é k - $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -determinado. Então h é $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -equivalente a $Y + Z \pm X^k$ e tem $\mathcal{V}\mathcal{K}_e$ -codimensão igual a $k-1$, $k \geq 2$. Pelo Teorema 1.2 obtemos o seguinte germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão $k-1$, $k \geq 2$:

$$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y \pm x^k, y, z) \end{cases}.$$

(iii) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é Y . Determinemos as $\mathcal{V}\mathcal{K}^2$ -órbitas em $J^2(4, 1)$.

Temos que $T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1 h = \mathcal{E}_4 \langle Y, W \rangle + \mathcal{M}_4^2$. Segue do Teorema da Transversal Completa que o 2-jato de h é $\mathcal{V}\mathcal{K}^2$ -equivalente a $Y + aX^2 + bZ^2 + cXZ$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Então,

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^2 \cdot j^2 h = \mathcal{M}_4 \langle 2aX + cZ \rangle + \mathcal{E}_4 \langle 2bZ^2 + cXZ, Y, W \rangle + \mathcal{E}_4 \langle j^2 h \rangle + \mathcal{M}_4^3.$$

Suponhamos $a(4ab - c^2) \neq 0$ e consideremos

$$S = \{\sigma = Y + aX^2 + bZ^2 + cXZ \in J^2(4, 1); \ a > 0, 4ab - c^2 > 0\}.$$

É fácil ver que S é uma subvariedade conexa de $J^2(4, 1)$. Notemos que $T_{\sigma}S \subseteq T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^2 \cdot j^2 h$, para todo $\sigma \in S$. De fato, como

$$2aX^2 + cXZ, \ 2aXZ + cZ^2, \ 2bZ^2 + cXZ \in T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^2 \cdot j^2 h,$$

$T_{\sigma}S = \langle X^2, XZ, Z^2 \rangle \in T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^2 \cdot j^2 h$. Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $Y + X^2 + Z^2$. Os casos $a(4ab - c^2) < 0$ e $a < 0, 4ab - c^2 < 0$ são análogos, com representante $Y + X^2 + Z^2$.

Suponhamos agora $a \neq 0, (4ab - c^2) = 0$. Realizando mudanças de coordenadas que preservam $\mathcal{V}$ na fonte obtemos uma órbita cujo representante é $Y + X^2$. Analogamente, para $a = 0$ obtemos as seguintes órbitas: $Y + XZ, Y + Z^2, Y$. Portanto, temos 5 órbitas em $J^2(4, 1)$ cujos representantes possuem 1-jato igual a $-Y$: $Y + X^2 \pm Z^2, Y + X^2, Y + Z^2, Y + XZ, Y$.

(iii.1) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 2-jato é $Y + X^2 \pm Z^2$. Temos que

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^2 \cdot j^2 h = \mathcal{M}_4 \langle X \rangle + \mathcal{E}_4 \langle Z^2, Y, W \rangle + \mathcal{E}_4 \langle j^2 h \rangle + \mathcal{M}_4^3.$$

Logo, $j^2 h$ é 2 - $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -determinado e portanto h é $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -equivalente a $Y + X^2 \pm Z^2$. Obtemos assim

o seguinte germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2

$$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x^2 \pm y^2, y, z). \end{cases}$$

(iii.2) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo $k-1$ -jato é $Y + X^2$, $k \geq 3$. A k -transversal é dada por $\langle Z^k \rangle$. Logo, o k -jato de h é $\mathcal{VK}^k$ -equivalente a $Y + X^2 + \lambda Z^k$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Suponhamos $\lambda \neq 0$. Realizando mudanças de coordenadas que preservam $\mathcal{V}$ na fonte obtemos que $j^k h$ é $\mathcal{VK}$ -equivalente a $Y + X^2 \pm Z^k$. Temos que

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^k \cdot j^k h = \mathcal{M}_4 \langle X \rangle + \mathcal{E}_4 \langle Z^{k-1}, Y, W \rangle + \mathcal{M}_4^{k+1}.$$

Logo, $j^k h$ é $k-\mathcal{VK}$ -determinado e portanto h é $\mathcal{VK}$ -equivalente a $Y + X^2 \pm Z^k$. Obtemos assim o germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão k , $k \geq 3$:

$$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x^2 \pm y^k, y, z). \end{cases}$$

Para os casos em que o 2-jato é $Y + Z^2$ ou $Y + XZ$ procedemos de maneira análoga a (iii.2) e obtemos os seguintes germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão k , com $k \geq 3$, respectivamente:

$$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y^2 + x^k, y, z) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, xy \pm x^k, y, z). \end{cases}$$

Os germes cujo 2-jato é Y são de $\mathcal{VK}_e$ -codimensão maior que 4.

(iv) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é Z . Procedendo como em (iii) obtemos 5 órbitas em $J^2(4, 1)$: $Z \pm X^2 \pm Y^2$, $Z \pm X^2$, $Z \pm Y^2$, $Z + XY$, Z . Com argumentos análogos aos anteriores concluímos que se o 2-jato é

- (a) $Z \pm X^2 \pm Y^2$, o germe obtido é o (6), para $k = 1$;
- (b) $Z \pm X^2$, o germe obtido é o (6), para $k > 1$;
- (c) $Z \pm Y^2$, o germe obtido é o (7);
- (d) $Z + XY$, o germe obtido é o (8);
- (e) Z , os germes obtidos são de $\mathcal{VK}_e$ -codimensão maior que 4.

(v) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é W . Segue que $T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1 h = \mathcal{E}_4 \langle W \rangle + \mathcal{M}_4^2$. Pelo Teorema da Transversal Completa temos que $j^2 h$ é $\mathcal{VK}^2$ -equivalente a $W + aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ$. Suponhamos $a(4ab - e^2) \neq 0$ e consideremos

$$S = \{\sigma = W + aX^2 + bY^2 + cZ^2 + dXY + eXZ + fYZ \in J^2(4, 1); a > 0, 4ab - e^2 > 0\}.$$

Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $W + X^2 \pm Z^2$. Os demais casos são análogos, com representantes $W + X^2 \pm Z^2$.

Se $a(4ab - e^2) = 0$ obtemos germes de $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão maior que 3.

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 2-jato é $-W + X^2 \pm Z^2$. Temos que

$$T\nu\mathcal{K}^2 \cdot j^2 h = \mathcal{M}_4 \langle X \rangle + \mathcal{E}_4 \langle W, Y^2, Z^2, YZ \rangle + \mathcal{M}_4^3.$$

Logo, $j^2 h$ é $2 - \nu\mathcal{K}$ -determinado. Portanto, h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $W + X^2 \pm Z^2$ e tem $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão igual a 3. Desta maneira obtemos o germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 3:

$$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, z, x^2 \pm z^2). \end{cases}$$

□

Observação 1.19 Os germes $\mathcal{C}^\pm$ obtimos acima são aumentações de $f : \begin{cases} (y, z^2, yz) \\ (y, y, z) \end{cases}$. De fato, consideremos o seguinte desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de f ,

$$F : \begin{cases} (\mu, y, z^2, yz) \\ (\mu, y + \mu, y, z) \end{cases}.$$

Então $\mathcal{C}^+ = A_f^+$ e $\mathcal{C}^- = A_f^-$.

Consideremos agora os bigermes onde um dos ramos é o germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1

$$A_3^{\pm\pm} : (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)).$$

Na prova do resultado seguinte obtemos o $Derlog(\mathcal{V})$ para $\mathcal{V}$ a imagem de A_3^{++} . Para os demais, $\mathcal{V}$ e $Derlog(\mathcal{V})$ são os mesmos a menos de alguns sinais. Como as mudanças de coordenadas na fonte e os espaços tangentes envolvidos na demonstração do resultado independem destes sinais, a prova é válida para $A_3^{\pm\pm}$.

Proposição 1.20 Seja $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um bigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2 onde um dos ramos é $A_3^{\pm\pm} : (x, y, z^2, z(z^2 \pm (x^2 \pm y^2)))$. Então f tem a seguinte forma normal

$$\begin{cases} (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)) \\ (x, 0, y, z) \end{cases}.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ a imagem de A_3^{++} que é definida por

$$W^2 - Z^3 - 2Y^2Z^2 - Y^4Z - 2X^2Z^2 - 2X^2Y^2Z - X^4Z = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Derlog}(\mathcal{V}) = & \langle (Y, -X, 0, 0), (0, W, 0, 2X^2YZ + 2Y^3Z + 2YZ^2), (XY, 3Z + Y^2, -4YZ, 0), \\ & (0, 0, 2W, X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 + 4X^2Z + 4Y^2Z + 3Z^2), (3Z + X^2, XY, -4XZ, 0), \\ & (W, 0, 0, 2X^3Z + 2XY^2Z + 2XZ^2), (XW, YW, -4ZW, 6Z^3 + 6Y^2Z^2 + 6X^2Z^2), \\ & (X, Y, 2Z, 3W) \rangle. \end{aligned}$$

Consideremos a ação de $\nu\mathcal{K}^1$ em $J^1(4, 1)$.

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ e $j^1h = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1)$. Segue que

$$T_{\nu\mathcal{K}^1} \cdot j^1h = \mathcal{E}_4 \langle aY - bX, bW, bZ, cW, aZ, aW, aX + bY + 2cZ + 3dW \rangle + \mathcal{E}_4 \langle j^1h \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Determinemos quais são as $\nu\mathcal{K}^1$ -órbitas em $J^1(4, 1)$.

Seja $S = \{\sigma = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1); a > 0, a^2 + b^2 \neq 0\}$. Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é X . Os demais casos são análogos, com representante X . Procedendo desta maneira obtemos as seguintes órbitas em $J^1(4, 1)$: $X, Z, W, 0$.

(1) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é X . Segue que

$$T_{\nu\mathcal{K}^1} j^1h = \mathcal{E}_4 \langle X, Y, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Claramente X é $1 - \nu\mathcal{K}$ -determinado. Logo h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a X e tem $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão 1. Pelos Teorema 1.2 e 1.3 obtemos o seguinte germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)) \\ (0, x, y, z) \end{array} \right\} \sim_{\mathcal{A}} \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)) \\ (x, 0, y, z) \end{array} \right\}.$$

Os germes cujo 1-jato é Z, W ou 0 são de $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão maior que 2.

□

Para finalizar a classificação dos bigermes consideremos o caso em que um dos ramos é o germe $R_1 : (x, y, z^3 + xz, z^4 + yz)$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1.

Proposição 1.21 *Seja $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um bigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2 onde um dos ramos é $R_1 : (x, y, z^3 + xz, z^4 + yz)$. Então f tem a seguinte forma normal*

$$\left\{ \begin{array}{l} (x, y, z^3 + xz, z^4 + yz) \\ (x, x, y, z) \end{array} \right\}.$$

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ a imagem de R_1 que é definida por

$$W^3 - Z^4 - 3YZ^3 - 3Y^2Z^2 - Y^3Z + 4XZ^2W + 5XYZW + XY^2W - 2X^2W^2 - X^3YZ + X^4W = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} \text{Derlog}(\mathcal{V}) = \langle & (2X, 3Y, 3Z, 4W), (0, 9YZ - 8XW, 6YZ + 3Z^2 + 4XW, -2YW + 4ZW), \\ & (-3YZ - 3Z^2, -4YW - 4ZW, X^2Z - 3ZW, -3XYZ + 4X^2W - 4W^2), \\ & (3ZW, 4W^2, 2XYZ - XZ^2 - 2X^2W, 3Y^2Z + 3YZ^2 - 3XYZ - 4XZW), \\ & (0, 9Y^2 - 72Z^2 + 16XW, 18X^3 + 39YZ + 102Z^2 - 26XW, 22YW + 64ZW \\ & + 18X^2Y), (6W, XY - 8XZ, -2XY + XZ, -2Y^2 - 10YZ - 8Z^2 + 12XW), \\ & (-3Y - 3Z, 4X^2, 3W + X^2, XY + 4XZ) \rangle. \end{aligned}$$

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ e $j^1h = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1)$. Segue que

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1h = \mathcal{E}_4 \langle 2aX + 3bY + 3cZ + 4dW, aW, aY + aZ - cW \rangle + \mathcal{E}_4 \langle aX + bY + cZ + dW \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Suponhamos $a(b-c) \neq 0$ e consideremos $S = \{\sigma = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1); a > 0, b-c > 0\}$. Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $X + Y$. Os demais casos são análogos, com representante $X + Y$.

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é $X + Y$. Segue que

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1h = \mathcal{E}_4 \langle 2X + 3Y, W, Y + Z \rangle + \mathcal{E}_4 \langle X + Y \rangle.$$

Logo, $X + Y$ é 1- $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -determinado. Portanto, h é $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -equivalente a $X + Y$ e tem $\mathcal{V}\mathcal{K}_e$ -codimensão igual a 1. Dos Teoremas 1.2 e 1.3 obtemos o seguinte germe de $\mathcal{V}\mathcal{K}_e$ -codimensão 2

$$\begin{cases} (x, y, z^3 + xz, z^4 + yz) \\ (x, x, y, z) \end{cases}.$$

Os germes cujo 1-jato é diferente de $X + Y$ são de $\mathcal{V}\mathcal{K}_e$ -codimensão maior que 2.

□

1.3 Classificação de trigerms

Os resultados desta seção são análogos aos obtidos por R.G. Wik Atique em [36].

Lema 1.22 *Um trigerme de imersões de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ com dois ramos transversais é $\mathcal{A}$ -equivalente a*

$$f : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, f_{34}(x, y, z)). \end{cases}$$

Demonstração: Segue como no Lema 3.6 de [36]. $\square$

Seja $\mathcal{K}^\delta$ o subgrupo de $\mathcal{K}$ consistindo dos germes de difeomorfismos $H : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0))$, $H = (\varphi, \tilde{H})$, tais que $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ fixa o plano $z = 0$, ou seja, $\varphi_3(x, y, 0) = 0$. Então, se $h \in \mathcal{E}_3$

$$TK_e^\delta \cdot h = \mathcal{E}_3 \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, z \frac{\partial h}{\partial z}, h \right\rangle.$$

O resultado seguinte mostra que a $\mathcal{A}$ -classificação de tais trigerms é equivalente à classificação de germes de funções numa variedade com bordo com respeito a $\mathcal{K}^\delta$ (veja [1, 23]).

Proposição 1.23 *Sejam*

$$f : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z) \xrightarrow{f_2} (x, y, 0, z) \\ (x, y, z) \xrightarrow{f_3} (x, y, z, f_{34}(x, y, z)) \end{cases} \quad e \quad \tilde{f} : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{\tilde{f}_1} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z) \xrightarrow{\tilde{f}_2} (x, y, 0, z) \\ (x, y, z) \xrightarrow{\tilde{f}_3} (x, y, z, \tilde{f}_{34}(x, y, z)) \end{cases}$$

então

(i) *f é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\tilde{f}$ se, e somente se, f_{34} é $\mathcal{K}^\delta$ -equivalente a $\tilde{f}_{34}$;*

(ii) *Se f é finitamente $\mathcal{A}$ -determinado, então*

$$TA_e \cdot f = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 \\ \mathcal{E}_3 & \mathcal{E}_3 - \{1, \dots, x^n y^m\} & \mathcal{E}_3 - \{1, \dots, x^n y^m\} \\ TK_e^\delta \cdot f_{34} & \mathcal{E}_3 & TK_e^\delta \cdot f_{34} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta(\mathcal{E}_3 \times 0 \times \mathcal{E}_3) \end{pmatrix} + \mathbb{R} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^n y^m \\ 0 & 0 & x^n y^m \frac{\partial f_{34}}{\partial z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^n y^m & x^n y^m \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ são tais que $x^{n+1}y^m \frac{\partial f_{34}}{\partial z}$ ou $x^n y^{m+1} \frac{\partial f_{34}}{\partial z} \in TK_e^\delta \cdot f_{34}$ e $x^n y^m \frac{\partial f_{34}}{\partial z} \notin TK_e^\delta \cdot f_{34}$.

Demonstração: (i) Suponhamos f $\mathcal{A}$ -equivalente a $\tilde{f}$. Então, existem germes de difeomorfismos $\phi_i : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, $\phi_i = (\phi_{i1}, \phi_{i2}, \phi_{i3})$, $i = 1, 2, 3$, e $\varphi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, tais que

- (1) $\varphi \circ f_1 = \tilde{f}_1 \circ \phi_1$;
- (2) $\varphi \circ f_2 = \tilde{f}_2 \circ \phi_2$;
- (3) $\varphi \circ f_3 = \tilde{f}_3 \circ \phi_3$.

Definimos

$$\begin{aligned} H : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \\ (x, y, z, t) &\mapsto (\phi_3(x, y, z), \varphi_4(x, y, z, t)) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $H \in \mathcal{K}^\delta$ e que f_{34} é $\mathcal{K}^\delta$ -equivalente a $\tilde{f}_{34}$ via H .

Segue de (1) que $\varphi_4(x, y, z, 0) = 0$ e, como φ é um difeomorfismo, $\frac{\partial \varphi_4}{\partial t}(0) \neq 0$. E mais, de (2) e (3) segue que $\phi_{33}(x, y, 0) = 0$. Logo, $H \in \mathcal{K}^\delta$. Por fim, de (3) temos que $H(x, y, z, f_{34}) = (\phi_3(x, y, z), \tilde{f}_{34}(\phi_3(x, y, z)))$ e portanto f_{34} é $\mathcal{K}^\delta$ -equivalente a $\tilde{f}_{34}$.

Reciprocamente, suponhamos f_{34} $\mathcal{K}^\delta$ -equivalente a $\tilde{f}_{34}$. Então, existe um germe de difeomorfismo $H : (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, (0, 0))$ dado por $H(x, y, z, t) = (h(x, y, z), \tilde{H}(x, y, z, t))$, satisfazendo

- (a) $h : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$, $h = (h_1, h_2, h_3)$, é um germe de difeomorfismo tal que $h_3(x, y, 0) = 0$;
- (b) $\tilde{H}(x, y, z, 0) = 0$;
- (c) $H(x, y, z, f_{34}(x, y, z)) = (h(x, y, z), \tilde{f}_{34}(h(x, y, z)))$.

É fácil ver que

- $H \circ f_1 = \tilde{f}_1 \circ h$;
- $H \circ f_2 = \tilde{f}_2 \circ \tilde{h}$;
- $H \circ f_3 = \tilde{f}_3 \circ h$,

onde $\tilde{h}$ é o germe de difeomorfismo dado por $\tilde{h}(x, y, z) = (h_1(x, y, 0), h_2(x, y, 0), \tilde{H}(x, y, 0, z))$.

Portanto, f é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\tilde{f}$.

(ii) Segue de cálculos elementares.

□

Corolário 1.24 *Com as mesmas hipóteses da Proposição 1.23, $N\mathcal{A}_e f$ é isomorfo a $N\mathcal{V}\mathcal{K}_e f_{34}$.*

Para o próximo resultado, veja a classificação dos germes em $\mathcal{E}_3$ segundo a $\mathcal{K}^\delta$ -equivalência em [1, 23].

Corolário 1.25 *Um trigerme de imersões com dois ramos transversais e de $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 2 é $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos seguintes:*

	$\mathcal{A}_e$ -codimensão	Nome
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \end{cases}$	0	
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, z + x^2 + y^2) \end{cases}$	1	$\mathcal{T}_e$
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, z + x^2 - y^2) \end{cases}$	1	$\mathcal{T}_h$
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, z + x^2 + y^3) \end{cases}$	2	$\mathcal{T}^d$
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, \pm x^2 + y^2 \pm z^2) \end{cases}$	2	$\mathcal{T}_2^{\pm\pm}$

Observação 1.26 *Os germes $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{T}_h$ obtidos acima são aumentações de $f : \begin{cases} (y, z, 0) \\ (y, 0, z) \\ (y, z, z + y^2) \end{cases}$.*

De fato, consideremos o seguinte desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de f ,

$$F : \begin{cases} (\mu, y, z, 0) \\ (\mu, y, 0, z) \\ (\mu, y, z, z + y^2 + \mu) \end{cases}.$$

Então, $\mathcal{T}_e = A_f^+$ e $\mathcal{T}_h = A_f^-$.

Podemos também obter $\mathcal{T}_h$ como uma concatenação do germe $g : \begin{cases} (x, y, 0) \\ (x, y, x^2 - y^2) \end{cases}$, basta considerarmos o desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de g como $G : \begin{cases} (x, y, 0, \mu) \\ (x, y, \mu + x^2 - y^2, \mu) \end{cases}$.

Quando conveniente, um r -germe f será denotado por $f = \{f^{(1)}; \dots; f^{(r)}\}$.

Os bigermes estáveis de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ são dois, a saber,

$$f' : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{f} : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \end{cases}.$$

Os trigerms da forma $\{f'; g\}$ foram obtidos no Corolário 1.25. O próximo passo da classificação de trigerms é determinar aqueles da forma $\{\tilde{f}; g\}$.

Proposição 1.27 *Seja $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4)$ um trigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 2 da forma $\{\tilde{f}; g\}$. Então f tem uma das seguintes formas normais:*

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}_e\text{-codimensão} \\ (1) \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x, y \pm x^k, y, z) \end{cases} \quad k \quad k \geq 1 \\ (2) \begin{cases} (x, y, z^2, y) \\ (0, x, y, z) \\ (x, y, x \pm y^k, z) \end{cases} \quad k \quad k \geq 2 \\ (3) \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x, x + y^k, y, z) \end{cases} \quad k \quad k \geq 2 \end{array}$$

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ a imagem de $\tilde{f}$ que é definida por $(W^2 - Y^2Z)X = 0$. Então

$$\text{Derlog}(\mathcal{V}) = \langle (0, 0, 2Z, W), (0, Y, 0, W), (X, 0, 0, 0), (0, W, 0, YZ), (0, 0, 2W, Y^2) \rangle.$$

Consideremos a ação de $\nu\mathcal{K}^1$ em $J^1(4, 1)$.

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ e $j^1h = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1)$. Segue que

$$T_{\nu\mathcal{K}^1} \cdot j^1h = \mathcal{E}_4 \langle 2cZ + dW, bY + dW, aX, bW, 2cW \rangle + \mathcal{E}_4 \langle aX + bY + cZ + dW \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Determinemos quais são as $\nu\mathcal{K}^1$ -órbitas em $J^1(4, 1)$.

Suponhamos $a \cdot b \cdot c \neq 0$ e consideremos

$$S = \{\sigma = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1); \ a > 0, \ b < 0, \ c > 0\}.$$

Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $X - Y + Z$. Os demais casos são análogos, com representantes $\pm X \pm Y \pm Z$ que são $\nu\mathcal{K}^1$ -equivalentes a $X - Y + Z$.

Suponhamos agora $a = 0$ e $b \cdot c \neq 0$. Seja $S = \{\sigma = bY + cZ + dW \in J^1(4, 1); b < 0, c > 0\}$. Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $-Y + Z$.

Prosseguindo desta maneira obtemos as seguintes órbitas em $J^1(4, 1)$: $X - Y + Z$, $-Y + Z$, $X - Z$, $X - Y$, $X + W$, X , Y , Z , W e 0 .

(i) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é $X - Y + Z$. Então,

$$T\nu\mathcal{K}^1 \cdot j^1 h = \mathcal{E}_4 \langle X, Y, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Segue da Proposição 1.6 que $X - Y + Z$ é $1 - \nu\mathcal{K}$ -determinado e portanto h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $X - Y + Z$. Pelo Teorema 1.2 obtemos o seguinte germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1,

$$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x, x + y, y, z) \end{cases}.$$

(ii) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo $(k - 1)$ -jato é $-Y + Z$, $k \geq 2$. Então

$$T\nu\mathcal{K}^{k-1} \cdot j^{k-1} h = \mathcal{E}_4 \langle Y, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^k.$$

Logo, $\langle X^k \rangle$ é a k -transversal, $k \geq 2$. Segue do Teorema da Transversal Completa que o k -jato de h é $\nu\mathcal{K}^k$ -equivalente a $-Y + Z + \lambda X^k$, $k \geq 2$.

Suponhamos $\lambda \neq 0$. Então $-Y + Z + \lambda X^k$ é $\nu\mathcal{K}^k$ -equivalente a $-Y + Z \pm X^k$. Como

$$T\nu\mathcal{K}^k \cdot j^k h = \mathcal{E}_4 \langle Z, Y, X^k, W \rangle + \mathcal{M}_4^{k+1},$$

$j^k h$ é $k - \nu\mathcal{K}$ -determinado. Logo, h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + Z \pm X^k$ e tem $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão k , $k \geq 2$. Obtemos assim o germe (1) para $k \geq 2$.

(iii) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo $(k - 1)$ -jato é $X - Z$, $k \geq 2$. Temos que

$$T\nu\mathcal{K}^{k-1} \cdot j^{k-1} h = \mathcal{E}_4 \langle Z, X, W \rangle + \mathcal{M}_4^k.$$

Prosseguindo de maneira análoga ao item (ii) encontramos que h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $X - Z \pm Y^k$, $k \geq 2$. Do Teorema 1.2 obtemos o germe (2).

(iv) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo $(k - 1)$ -jato é $X - Y$. Então

$$T\nu\mathcal{K}^{k-1} \cdot j^{k-1} h = \mathcal{E}_4 \langle X, Y, W \rangle + \mathcal{M}_4^k.$$

Prosseguindo de maneira análoga aos itens anteriores obtemos o germe (3).

Os germes cujo 1-jato é $X + W, X, Y, Z, W$ ou 0 são de $\nu\mathcal{K}_e$ -codimensão maior que 2.

□

1.4 Classificação de quadrigermes, pentagermes e hexagermes

Consideremos os quadrigermes da forma $\{\tilde{f}, g\}$ onde $\tilde{f}$ é o germe estável $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \end{cases}$.

Proposição 1.28 *Seja $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ um quadrigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 2 da forma $\{\tilde{f}, g\}$. Então f tem uma das seguintes formas normais:*

	$\mathcal{A}_e$ -codimensão	Nome
(1) $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (x, y, z, y + z + x^k) \end{cases}$	$k - 1 \quad k \geq 1$	$\mathcal{Q} \ (k = 2) \quad e \quad \mathcal{Q}_d \ (k = 3)$
(2) $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (x, y, z, z \pm x^2 + y^2) \end{cases}$	2	$\mathcal{Q}_2^\pm$

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ a imagem de $\tilde{f}$ que é definida por $YZW = 0$. Então

$$\text{Derlog}(\mathcal{V}) = \langle (1, 0, 0, 0), (0, Y, 0, 0), (0, 0, Z, 0), (0, 0, 0, W) \rangle.$$

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ e $j^1 h = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1)$. Então

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1 h = \mathcal{M}_4 \langle a \rangle + \mathcal{E}_4 \langle bY, cZ, dW \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Determinemos as $\nu\mathcal{K}^1$ -órbitas em $J^1(4, 1)$.

Suponhamos $a \neq 0$ e consideremos $S = \{\sigma = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1); a > 0\}$. Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é X . O caso $a < 0$ é análogo, com representante $-X$ que é $\nu\mathcal{K}^1$ -equivalente a X .

Agora, suponhamos $a = 0$, ou seja, $j^1 h = bY + cZ + dW$. Então

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1 h = \mathcal{E}_4 \langle bY, cZ, dW \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Consideremos $b \cdot c \cdot d \neq 0$ e $S = \{\sigma = bY + cZ + dW \in J^1(4, 1); b > 0, c > 0, d < 0\}$. Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $Y + Z - W$. Os demais casos são análogos, com representantes $\pm Y \pm Z \pm W$ que são ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1$ -equivalentes a $Y + Z - W$.

Prosseguindo desta maneira obtemos as seguintes órbitas em $J^1(4, 1)$: $X, Y + Z - W, Z - W, Y, 0$.

(i) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é X . Então $T_{\mathcal{V}}\mathcal{K} \cdot j^1h = \mathcal{M}_4 + \mathcal{M}_4^2$. Claramente j^1h é 1- ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -determinado. Logo, h é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -equivalente a X e obtemos o germe estável

$$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (0, x, y, z) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (x, y, z, x + y + z) \end{cases}.$$

(ii) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo $(k-1)$ -jato é $Y + Z - W$, $k \geq 2$. Então

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^{k-1} \cdot j^{k-1}h = \mathcal{E}_4 \langle Y, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^k.$$

Logo, $\langle X^k \rangle$ é a k -transversal. Segue do Teorema da Transversal Completa que $j^k h$ é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^k$ -equivalente a $Y + Z - W + \lambda X^k$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

Suponhamos $\lambda \neq 0$. Então $Y + Z - W + \lambda X^k$ é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^k$ -equivalente a $Y + Z - W + X^k$. Como

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^k \cdot j^k h = \mathcal{M}_4 \langle X^{k-1} \rangle + \mathcal{E}_4 \langle Y, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^{k+1},$$

$j^k h$ é k - ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -determinado. Logo, h é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -equivalente a $Y + Z - W + X^k$, $k \geq 2$ e tem ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}_e$ -codimensão k . Pelo Teorema 1.2 obtemos o germe (1), para $k \geq 2$.

(iii) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é $Z - W$. Então

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1 h = \mathcal{E}_4 \langle Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Logo, $\langle X^2, Y^2, XY \rangle$ é a 2-transversal. Segue do Teorema da Transversal Completa que o 2-jato de h é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^2$ -equivalente a $Z - W + aX^2 + bY^2 + cXY$. Temos que

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^2 \cdot j^2 h = \mathcal{M}_4 \langle 2aX + cY \rangle + \mathcal{E}_4 \langle 2bY^2 + cXY, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^3.$$

Suponhamos $a(c^2 - 4ab) \neq 0$ e consideremos

$$S = \{\sigma = Z - W + aX^2 + bY^2 + cXY \in J^2(4, 1); a > 0, c^2 - 4ab > 0\}.$$

Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $Z - W + X^2 - Y^2$. Os demais casos são análogo, com representante $Z - W \pm X^2 + Y^2$.

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 2-jato é $Z - W \pm X^2 + Y^2$. Então

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^2 \cdot j^2 h = \mathcal{M}_4 \langle X \rangle + \mathcal{E}_4 \langle Y^2, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^3.$$

Logo, $j^2 h$ é 2- $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -determinado e portanto h é $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -equivalente a $Z - W \pm X^2 + Y^2$. Pelo Teorema 1.2 obtemos o germe (2).

Os germes obtidos supondo $a(c^2 - 4ab) = 0$ são de $\mathcal{V}\mathcal{K}_e$ -codimensão maior que 2. O mesmo ocorre com os germes cujo 1-jato é Y ou 0.

□

Observação 1.29 O germe $\mathcal{Q}$ obtido acima é uma *aumentação* de $f : \begin{cases} (y, z, 0) \\ (y, 0, z) \\ (0, y, z) \\ (y, z, y + z) \end{cases}$. De

fato, consideremos o seguinte desdobramento de f ,

$$F : \begin{cases} (\mu, y, z, 0) \\ (\mu, y, 0, z) \\ (\mu, 0, y, z) \\ (\mu, y, z, y + z + \mu) \end{cases}.$$

Então $\mathcal{Q} = A_f^+$.

Consideremos agora os pentagermes da forma $\{\tilde{f}, g\}$ onde $\tilde{f}$ é o germe estável $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (0, x, y, z) \end{cases}$.

Proposição 1.30 Seja $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4)$ um pentagerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 2 da forma $\{\tilde{f}, g\}$. Então f tem a seguinte forma normal:

$\mathcal{A}_e$ -codimensão	Nome
$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (0, x, y, z) \\ (x, y, z, x + y + z^k) \end{cases}$	$k \qquad k \geq 1 \qquad \mathcal{P} \ (k = 1) \text{ e } \mathcal{P}_2 \ (k = 2).$

Demonstração:

Seja $\mathcal{V}$ a imagem de $\tilde{f}$ que é definida por $XYZW = 0$. Então,

$$\text{Derlog}(\mathcal{V}) = \langle (X, 0, 0, 0), (0, Y, 0, 0), (0, 0, Z, 0), (0, 0, 0, W) \rangle.$$

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ e $j^1 h = aX + bY + cZ + dW$. Segue que

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1 h = \mathcal{E}_4 \langle aX, bY, cZ, dW \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Determinemos as órbitas em $J^1(4, 1)$ sob a ação de ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1$.

Suponhamos $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ e consideremos $S = \{\sigma = aX + bY + cZ + dW \in J^1(4, 1); a > 0, b > 0, c > 0 \text{ e } d < 0\}$. Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $X + Y + Z - W$. Os demais casos são análogos, com representante $X + Y + Z - W$.

Suponhamos $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0$ e consideremos

$$S = \{\sigma = aX + bY + dW \in J^1(4, 1); a > 0, b > 0, \text{ e } d < 0\}.$$

Segue do Lema de Mather que S está contida numa única órbita, cujo representante é $X + Y - W$.

Prosseguindo desta maneira obtemos as seguinte órbitas em $J^1(4, 1)$: $X + Y + Z - W$, $X + Y - W$, $X + Y$, X , 0 .

(i) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo 1-jato é $X + Y + Z - W$. Então $T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1 \cdot j^1 h = \mathcal{E}_4 \langle X, Y, Z, W \rangle + \mathcal{M}_4^2$. Segue da Proposição 1.6 que $j^1 h$ é 1- ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -determinado. Logo h é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -equivalente a $X + Y + Z - W$ e tem ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}_e$ -codimensão 1. Desta maneira obtemos o germe (1) para $k = 1$.

(ii) Seja $h \in \mathcal{E}_4$ cujo k -1-jato é $X + Y - W$, $k \geq 2$. Então

$$T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^{k-1} \cdot j^{k-1} h = \mathcal{E}_4 \langle X, Y, W \rangle + \mathcal{M}_4^2.$$

Logo, $\langle Z^k \rangle$ é a k -transversal. Segue do Teorema da Transversal Completa que $j^k h$ é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^k$ -equivalente a $X + Y - W + \lambda Z^k$, $k \geq 2$.

Suponhamos $\lambda \neq 0$. Então $X + Y - W + \lambda Z^k$ é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -equivalente a $X + Y - W + Z^k$, $k \geq 2$. Como $T_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^k \cdot j^k h = \mathcal{E}_4 \langle X, Y, W, Z^k \rangle + \mathcal{M}_4^2$, $j^k h$ é k - ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -determinado. Logo, h é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -equivalente a $X + Y - W + Z^k$, $k \geq 2$, e tem ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}_e$ -codimensão k . Portanto, obtemos o pentagerme (1) para $k \geq 2$.

Os germes cujo 1-jato é $X + Y, Y$ ou 0 são de ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}_e$ -codimensão maior que 2.

□

Observação 1.31 O germe $\mathcal{P}$ obtido acima é uma concatenação de $f : \begin{cases} (y, z, 0) \\ (y, 0, z) \\ (0, y, z) \\ (y, z, y + z) \end{cases} . \text{ De}$

fato, consideremos o seguinte desdobramento de f ,

$$F : \begin{cases} (\mu, y, z, 0) \\ (\mu, y, 0, z) \\ (\mu, 0, y, z) \\ (\mu, y, z, y + z + \mu) \end{cases}.$$

Então $\mathcal{P} = C_f$.

Determinemos agora o hexagérme da forma $\{\mathcal{P}; g\}$. Veremos que tal germe é não simples e de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 5. Entenderemos mais adiante, no Capítulo 2, o porquê de considerá-lo.

Proposição 1.32 *Seja $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4)$ um hexagérme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 5 da forma $\{\mathcal{P}; g\}$. Então f tem a seguinte forma normal:*

$$\begin{array}{cc} & \text{Nome} \\ \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (0, x, y, z) \\ (x, y, z, x + y + z) \\ (x, y, z, ax + by + cz) \end{array} \right. & S \end{array}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a, b, c, a - 1, b - 1, c - 1, a - b, a - c, b - c \neq 0$ e é de $\mathcal{A}_e$ -codimensão igual a 5.

Demonstração: Seja $\mathcal{V}$ a imagem de $\mathcal{P}$ que é definida por $XYZW(X + Y + Z - W) = 0$. Então

$$\begin{aligned} \text{Derlog}(\mathcal{V}) = \langle & (X, Y, Z, W), (0, 0, ZW, ZW), (0, YW, 0, YW), (0, YZ, -YZ, 0), (0, XY + Y^2, \\ & YZ, YW), (0, 0, 0, XW + YW + ZW - W^2), (0, 0, XZ + YZ + Z^2) \rangle. \end{aligned}$$

Seja $h \in \mathcal{E}_4$ e $j^1 h = \tilde{a}X + \tilde{b}Y + \tilde{c}Z + \tilde{d}W \in J^1(4, 1)$. Se $\tilde{d} \neq 0$, então o 1-jato de h é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}^1$ -equivalente a $aX + bY + cZ - W$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

A prova segue do fato de que o 1-jato de h é $2 - {}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -determinado e sua transversal é vazia se $a, b, c, a - 1, b - 1, c - 1, a - b, a - c, b - c \neq 0$.

□

Portanto temos o seguinte.

Teorema 1.33 *Todo multigermo $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ de coposto 1 e $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 2 tem uma das seguintes formas normais:*

Estáveis:

1. $(x, y, z, 0)$
2. (x, y, z^2, yz)
3. $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \end{cases}$
4. $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \end{cases}$
5. $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \end{cases}$
6. $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (0, x, y, z) \end{cases}$

$\mathcal{A}_e$ – codimensão 1 :

Nome

1. $(x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2))$	$A_1^{\pm\pm}$
2. $(x, y, z^3 + xz, z^4 + yz)$	R_1
3. $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z, x^2 + y^2 \pm z^2) \end{cases}$	$\mathcal{E}$ (caso +) $\mathcal{H}$ (caso -)
4. $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y \pm x^2, y, z) \end{cases}$	$\mathcal{C}^\pm$
5. $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, z + x^2 \pm y^2) \end{cases}$	$\mathcal{T}_e$ (caso +) $\mathcal{T}_h$ (caso -)
6. $\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x, x + y, y, z) \end{cases}$	$\mathcal{T}_c$

$$7. \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (x, y, z, y + z + x^2) \end{cases} \quad \mathcal{Q}$$

$$8. \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (0, x, y, z) \\ (x, y, z, x + y + z) \end{cases} \quad \mathcal{P}$$

$\mathcal{A}_e$ – *codimensão 2* :

Nome

$$1. (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 + y^3))$$

$$A_2^\pm$$

$$2. (x, y, z^2, z(z^4 \pm x^2 \pm y^2))$$

$$A_3^{\pm\pm}$$

$$3. (x, y, z^3 + xz, z^5 + yz)$$

$$R_2$$

$$4. (x, y, z^3 \pm y^2z, xz + yz^2)$$

$$\mathcal{S}^\pm$$

$$5. \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z, x^2 \pm y^2 + z^3) \end{cases}$$

$$B_2^\pm$$

$$6. \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y + x^3, y, z) \end{cases}$$

$$I$$

$$7. \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x^2 \pm y^2, y, z) \end{cases}$$

$$II^\pm$$

$$8. \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, \pm x^2 \pm y^2, z) \end{cases}$$

$$III^{\pm\pm}$$

$$9. \begin{cases} (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)) \\ (x, 0, y, z) \end{cases}$$

$$IV^{\pm\pm}$$

$$10. \begin{cases} (x, y, z^3 + xz, z^4 + yz) \\ (x, x, y, z) \end{cases}$$

$$V$$

11.	$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, z + x^2 + y^3) \end{cases}$	T^d
12.	$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, \pm x^2 + y^2 \pm z^2) \end{cases}$	$\mathcal{T}_2^{\pm\pm}$
13.	$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x, y \pm x^2, y, z) \end{cases}$	$VI^\pm$
14.	$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x, x + y^2, y, z) \end{cases}$	VII
15.	$\begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x, y, x \pm y^2, z) \end{cases}$	$VIII^\pm$
16.	$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (x, y, z, y + z + x^3) \end{cases}$	$\mathcal{Q}_d$
17.	$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (x, y, z, z \pm x^2 + y^2) \end{cases}$	$\mathcal{Q}_2^\pm$
18.	$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (0, x, y, z) \\ (x, y, z, x + y + z^2) \end{cases}$	$\mathcal{P}_2$

Conjuntos de bifurcação dos germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2

Neste capítulo determinamos os conjuntos de bifurcação dos germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2, bem como seus diagramas de adjacências (isto é, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão menor ou igual a 1 que aparecem numa deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de tais germes). Os resultados aqui obtidos são de suma importância no estudo dos invariantes do tipo Vassiliev desenvolvido no Capítulo 3.

Iniciemos com algumas definições básicas.

Sejam L e K $\mathcal{A}$ -classes de germes em $\oplus_1^r \mathcal{E}_{n,p}$. Dizemos que L é *adjacente a* K se para todo $f \in L$ existe uma deformação f_u de f tal que $f_u \in K$ para u próximo de zero. Diremos neste caso que f_u incide em f .

Apresentamos as próximas definições para $p = n+1$ que é o caso que engloba nossos estudos.

Sejam $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ um r -germe e

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, S \times \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^m, \{0\}) \\ (x, u) &\mapsto (f_u(x), u) \end{aligned}$$

um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de f . Definimos o *conjunto de bifurcação de* f como sendo o conjunto dos parâmetros $u \in (\mathbb{R}^m, 0)$, tais que f_u é não estável. O denotamos por:

$$\mathcal{B}(f) = \{u \in (\mathbb{R}^m, 0); f_u \text{ é não estável}\}.$$

Este conjunto independe da escolha da deformação $\mathcal{A}_e$ -versal f_u , pois se g_v é outra deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de f , então os conjuntos de bifurcação de f determinados por f_u e g_v são difeomorfos.

Seja $f^{(i)} : U_i \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um representante do i -ésimo ramo de f , com $i = 1, \dots, r$. O espaço dos *pontos k -múltiplos de* f ($1 \leq k < \infty$) é definido como

$$D^k(f) \cap (U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}) = \overline{\{(x_1, \dots, x_k); x_j \in U_{i_j}, f^{(i_1)}(x_1) = \dots = f^{(i_k)}(x_k), x_j \neq x_l \text{ se } j \neq l\}},$$

onde a barra denota o fecho. Observemos que i_j pode ser igual a i_l com $j \neq l$.

No que segue veremos como calcular o conjunto de bifurcação de f . Para mais detalhes veja [29, 30, 32].

As $\mathcal{K}$ -classes de germes $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ de coposto 1 são as do tipo A_k com representantes $(x, z^{k+1}, 0)$, onde $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Denotamos por $A_{(k_1, \dots, k_r)}$, $k_i \geq 0$, a $\mathcal{K}$ -classe do germe $f : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ de coposto 1, onde cada ramo $f^{(i)}$ tem uma singularidade do tipo A_{k_i} . Observemos que a multiplicidade local do i -ésimo ramo é $k_i + 1$. Os multigerms de coposto 1 estáveis são aqueles transversais a sua $\mathcal{K}$ -classe $A_{(k_1, \dots, k_r)}$. Desta maneira, se $G_{(k_1, \dots, k_r)}$ é um germe cujas funções coordenadas definem o fecho de $A_{(k_1, \dots, k_r)}$, então os multigerms estáveis são aqueles onde o zero é um valor regular de $G_{(k_1, \dots, k_r)}$, isto é, uma submersão nos pontos $G_{(k_1, \dots, k_r)}^{-1}(0)$.

Seja $k(s, m) := (k_1, \dots, k_s)$, com $k_i \geq k_{i+1}$, uma partição de m com s somandos, isto é, $m = \sum_i k_i$. Denotemos por $\mathcal{B}_{k(s, m)}$ o conjunto dos parâmetros de uma deformação f_u de f para os quais o zero é um valor crítico da deformação induzida de $G_{k(s, m)}$. Assim, o conjunto de bifurcação de f é a união dos conjuntos $\mathcal{B}_{k(s, m)}$.

O espaço dos pontos s -múltiplos de f é o fecho de $A_{k(s, 0)}$. Em [20], W. L. Marar e D. Mond obtém, para o caso de monogermes de coposto 1, as funções coordenadas de $G_{k(s, 0)}$.

No que segue usaremos as notações introduzidas por J. Rieger em [29] para calcular os germes $G_{k(s, m)}$. Observemos que $G_{k(s, 0)}$ provém de [20].

Sabemos que um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ de coposto 1 é dado pela pré forma normal

$$f(x, z) = (x, g_n(x, z), g_{n+1}(x, z)),$$

onde $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Associamos a f germes de aplicações $G_{k(s, m)} : (\mathbb{R}^{n+s-1}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+s-1)}$ cujas funções coordenadas definem o fecho de $A_{k(s, m)} \subset \mathbb{R}^{n+s+1}$ e são dadas como segue. Podemos identificar o espaço $\mathbb{R}^{n+s-1} = \{(x, z, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s)\}$ com $(\mathbb{R}^n)^s$ de coordenadas $(x, z_1), \dots, (x, z_s)$, cujas imagens pela f coincidem, onde

$$z_1 = z, \quad z_2 = z + \epsilon_2, \dots, \quad z_s = z + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots + \epsilon_s.$$

Para $r = n, n+1$ definimos

$$g_{r,1}^{(i)} := \partial^i g_r / \partial z^i, \quad i \geq 1,$$

e para $j = 1, \dots, s-1$

$$g_{r,j+1}^{(0)} := \sum_{\alpha \geq k_j+1} g_{r,j}^{(\alpha)} \epsilon_{j+1}^{\alpha-k_j-1} / \alpha!, \quad g_{r,j+1}^{(i)} := \partial^i g_{r,j+1}^{(0)} / \epsilon_{j+1}^i, \quad i \geq 1.$$

Então as funções coordenadas $G_1, \dots, G_{2(m+s-1)}$ de $G_{k(s, m)}$ são dadas por

$$\begin{aligned} & g_{n,1}^{(1)}, \dots, g_{n,1}^{(k_1)}; \quad g_{n,j}^{(0)}, \dots, g_{n,j}^{(k_j)} \quad (j = 2, \dots, s) \\ & g_{n+1,1}^{(1)}, \dots, g_{n+1,1}^{(k_1)}; \quad g_{n+1,j}^{(0)}, \dots, g_{n+1,j}^{(k_j)} \quad (j = 2, \dots, s), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\{g_{r,1}^{(1)}, \dots, g_{r,1}^{(0)}\}$ denota o conjunto vazio.

Segue de [30] que podemos considerar somente as partições $k(s, m)$ tais que

$$m + s \leq m_f(0) \text{ e } k(s, m) \neq (0).$$

Como estamos interessados em calcular os conjuntos de bifurcação de germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2, podemos descartar as $\mathcal{K}$ -classes $A_{k(s,m)}$ que não contém s -germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão menor que 2. E mais, como veremos a seguir, desde que o fecho de $A_{(k_1, \dots, k_l)}$ com $k_i \geq k_{i+1}$ e $k_1 \geq 1$ está contido no fecho de $A_{k(s,0)}$ para algum $s > l$, basta considerarmos as partições $k(s, 0)$.

Vejamos quais são estas inclusões para o caso em que $m_f(0) = 3$ (segue de maneira análoga para os demais casos). Se $m_f(0) = 3$, então basta considerarmos as partições tais que $m + s \leq 3$, ou seja, os fechos dos conjuntos $A_{(1)}$, $A_{(2)}$, $A_{(0,0)}$, $A_{(1,0)}$ e $A_{(0,0,0)}$. Segue de (2.1) que

$$G_{(1)} = G_{(0,0)}|_{\epsilon_2=0}, G_{(2)} = G_{(1,0)}|_{\epsilon_2=0}, G_{(2)} = G_{(0,0,0)}|_{\epsilon_2=\epsilon_3=0} \text{ e } G_{(1,0)} = G_{(0,0,0)}|_{\epsilon_2=0} \quad (2.2)$$

e portanto

$$\overline{A}_{(1)} \subset \overline{A}_{(0,0)} \text{ e } \overline{A}_{(2)} \subset \overline{A}_{(1,0)} \subset \overline{A}_{(0,0,0)}.$$

Observemos, por exemplo, que se $G_{(1,0)}$ é não submersiva, então também o é $G_{(0,0,0)}$. Logo, das inclusões acima segue as seguintes:

$$\mathcal{B}_{(1)} \subset \mathcal{B}_{(0,0)} \text{ e } \mathcal{B}_{(2)} \subset \mathcal{B}_{(1,0)} \subset \mathcal{B}_{(0,0,0)}.$$

Portanto, o conjunto de bifurcação de f é dado por

$$\mathcal{B}(f) = \mathcal{B}_{(0,0)} \cup \mathcal{B}_{(0,0,0)}.$$

2.1 Conjuntos de bifurcação dos monogermes

Proposição 2.1 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\begin{aligned} A_2^\pm : (\mathbb{R}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 + y^3)) \end{aligned}$$

é

$$\mathcal{B}(A_2^\pm) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 27u^2 + 4v^3 = 0\}.$$

E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em

(a) A_2^+ são:

(a.1) A_1^{++} , se $27u^2 + 4v^3 = 0$ e $u > 0$;

(a.2) A_1^{-+} , se $27u^2 + 4v^3 = 0$ e $u < 0$.

(b) A_2^- são:

(b.1) A_1^{-+} , se $27u^2 + 4v^3 = 0$ e $u > 0$;

(b.2) A_1^{--} , se $27u^2 + 4v^3 = 0$ e $u < 0$.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $A_2^\pm$

$$A_{2,u,v}^\pm = (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 + y^3 + u + vy)) = (x, y, g_3(x, y, z), g_4(x, y, z)).$$

A multiplicidade local de $A_2^\pm$ é

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_3}{\langle x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 + y^3) \rangle} = 2.$$

Desde que $\mathcal{B}_{(1)} \subset \mathcal{B}_{(0,0)}$, é suficiente determinar o conjunto $\mathcal{B}_{(0,0)}$.

De acordo com as notações estabelecidas anteriormente, $k_1 = k_2 = 0$, $m = 0$ e $s = 2$. Segue de (2.1) que as funções coordenadas de $G_{(0,0)}$ são dadas por $g_{3,2}^{(0)}$ e $g_{4,2}^{(0)}$, ou seja,

$$\begin{aligned} G_{(0,0)} : \quad (\mathbb{R}^4, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, y, z, \epsilon_2) &\mapsto (2z + \epsilon_2, 3z^2 \pm x^2 + y^3 + u + vy + 3z\epsilon_2 + \epsilon_2^2). \end{aligned}$$

Logo, $G_{(0,0)}$ é não submersiva quando $x = 0, \epsilon_2 = 0$ e $3y^2 + v = 0$. Portanto, $G_{(0,0)}(x, y, z, \epsilon_1) = (0, 0)$ e $G_{(0,0)}$ é não submersiva se

$$\begin{cases} 2z + \epsilon_2 = 0 \\ 3z^2 \pm x^2 + y^3 + u + vy + 3z\epsilon_2 + \epsilon_2^2 = 0 \\ x = 0 \\ \epsilon_2 = 0 \\ 3y^2 + v = 0 \end{cases}.$$

Portanto, o conjunto de bifurcação de $A_2^\pm$ é

$$\mathcal{B}(A_2^\pm) = \mathcal{B}_{(0,0)} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 27u^2 + 4v^3 = 0\}.$$

Mais precisamente, $\mathcal{B}(A_2^\pm)$ é o conjunto $\mathcal{B}_{(1)} \subset \mathcal{B}_{(0,0)}$, pois $\epsilon_2 = 0$ (veja (2.2)).

Vejamos agora quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $A_2^\pm$. Podemos parametrizar $\mathcal{B}(A_2^\pm)$ por $u = 2a^3$ e $v = -3a^2$. Então

$$y^3 + vy + u = y^3 - 3a^2y + 2a^3 = (y - a)^3 + 3a(y - a)^2.$$

Assim,

$$A_{2,u,v}^\pm = (x, y, z^2, z^3 \pm x^2z + (y^3 + vy + u)z) \sim_{\mathcal{A}_e} (x, y, z^2, z^3 \pm x^2z + (y^3 + 3ay^2)z),$$

cujos 3-jatos são $\mathcal{A}^3$ -equivalentes a $A_1^{\pm\pm} = (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2))$ ($A_1^{\pm+}$ se $a > 0$, ou seja, $u > 0$ e $A_1^{\pm-}$ caso contrário). Desde que $A_1^{\pm\pm}$ é 3-determinado (veja [19]), $A_{2,u,v}^\pm$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $A_1^{\pm\pm}$.

□

Proposição 2.2 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\begin{aligned} A_3^{\pm\pm} : (\mathbb{R}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, z^2, z(z^4 \pm x^2 \pm y^2)). \end{aligned}$$

é

$$\mathcal{B}(A_3^{\pm\pm}) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u - v^2 = 0 \text{ e } v < 0\}.$$

E mais, os germes de codimensão 1 que incidem em

(a) A_3^{++} são:

- (a.1) A_1^{++} , se $u = 0$ e $v > 0$;
- (a.2) A_1^{--} , se $u = 0$ e $v < 0$;
- (a.3) $\mathcal{E}$, se $4u - v^2 = 0$ e $v < 0$.

(b) A_3^{+-} são:

- (b.1) A_1^{-+} , se $u = 0$ e $v \neq 0$;
- (b.2) $\mathcal{H}$, se $4u - v^2 = 0$ e $v < 0$.

(c) A_3^{--} são:

- (c.1) A_1^{--} , se $u = 0$ e $v > 0$;
- (c.2) A_1^{++} , se $u = 0$ e $v < 0$;
- (c.3) $\mathcal{H}$, se $4u - v^2 = 0$ e $v < 0$.

Observemos que A_3^{+-} é $\mathcal{A}$ -equivalente a A_3^{-+} .

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $A_3^{\pm\pm}$

$$A_3^{\pm\pm}_{u,v} = (x, y, z^2, z(z^4 \pm x^2 \pm y^2 + u + vz^2)).$$

Desde que a multiplicidade local de $A_3^{\pm\pm}$ é 2, é suficiente determinar o conjunto $\mathcal{B}_{(0,0)}$. Como $k_1 = k_2 = 0$, $m = 0$ e $s = 2$, segue de (2.1) que

$$G_{(0,0)}(x, y, z, \epsilon_2) = (2z + \epsilon_2, 5z^4 \pm x^2 \pm y^2 + u + 3vz^2 + (3vz + 10z^3)\epsilon_2 + (v + 10z^2)\epsilon_2^2 + 5z\epsilon_2^3 + \epsilon_2^4).$$

Logo, $G_{(0,0)}$ é não submersiva quando $x = 0, y = 0$ e $v\epsilon_2 + 3\epsilon_2^3 + 10z\epsilon_2^2 + 10z^2\epsilon_2 = 0$ e portanto, as condições são

$$x = y = v\epsilon_2 + 3\epsilon_2^3 + 10z\epsilon_2^2 + 10z^2\epsilon_2 = 2z + \epsilon_2 = 0,$$

$$5z^4 \pm x^2 \pm y^2 + u + 3vz^2 + (3vz + 10z^3)\epsilon_2 + (v + 10z^2)\epsilon_2^2 + 5z\epsilon_2^3 + \epsilon_2^4 = 0.$$

Resolvendo estas equações obtemos que $u = 0$ se $z = 0$ (o que implica em $\epsilon_2 = 0$) e $4u - v^2 = 0$ caso contrário. Portanto,

$$\mathcal{B}(A_3^{\pm\pm}) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u - v^2 = 0 \text{ e } v < 0\}.$$

Mais precisamente, $\{(0, v) \in \mathbb{R}^2\}$ é o conjunto $\mathcal{B}_{(1)} \subset \mathcal{B}_{(0,0)}$.

Vejamos quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $A_3^{\pm\pm}$.

Suponhamos $u = 0$. Então

$$A_3^{\pm\pm}_{0,v} = (x, y, z^2, z(z^4 \pm x^2 \pm y^2 + vz^2)),$$

cujo 3-jato é $\mathcal{A}^3$ -equivalente a $A_1^{\pm\pm} = (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2))$. Desde que $A_1^{\pm\pm}$ é 3-determinado, $A_3^{\pm\pm}_{0,v}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $A_1^{\pm\pm}$. Analisando os possíveis sinais de v obtemos os itens (a.1), (a.2), (b.1), (c.1) e (c.2).

Suponhamos $4u - v^2 = 0$ com $v < 0$. Então

$$A_3^{\pm\pm}_{\frac{v^2}{4},v} = (x, y, z^2, z(z^4 \pm x^2 \pm y^2 + vz^2 + \frac{v^2}{4})) = (x, y, z^2, z(\pm x^2 \pm y^2 + (z^2 + \frac{v}{2})^2)).$$

Procederemos de maneira análoga ao David Mond em [23]. Consideremos $w = z^2$ e, para $w > 0$, temos que $A_3^{\pm\pm}_{\frac{v^2}{4},v}$ tem um bigerme em $(x, y, \pm\sqrt{w})$, consistindo de dois hiperplanos imersivos. De fato, notemos que $(0, 0, \sqrt{w}, 0, 0, -\sqrt{w}) \in D^2 \left(A_3^{\pm\pm}_{\frac{v^2}{4},v} \right)$. Sejam $U^\pm$ vizinhanças de $(0, 0, \pm\sqrt{w})$. Então $A_3^{\pm\pm}$ restrita a $U^\pm$ é:

$$\begin{cases} (x, y, w, -\sqrt{w}(\pm x^2 \pm y^2 + (w^2 + \frac{v}{2})^2)) \\ (x, y, w, \sqrt{w}(\pm x^2 \pm y^2 + (w^2 + \frac{v}{2})^2)) \end{cases}.$$

Realizando sucessivamente as mudanças de coordenadas na meta $(X, Y, Z, W) \mapsto (X, Y, Z, W + \sqrt{Z}(\pm X^2 \pm Y^2 + (Z + \frac{v}{2})^2))$ e $(X, Y, Z, W) \mapsto (X, Y, Z, \frac{W}{2\sqrt{Z}})$, obtemos

$$\begin{cases} (x, y, w, 0) \\ (x, y, w, (w^2 + \frac{v}{2})^2 \pm x^2 \pm y^2) \end{cases},$$

que é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a

$$\begin{cases} (x, y, w, 0) \\ (x, y, w, w^2 \pm x^2 \pm y^2) \end{cases}.$$

□

Proposição 2.3 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\begin{aligned} R_2 : (\mathbb{R}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, z^3 + xz, z^5 + yz). \end{aligned}$$

é

$$\mathcal{B}(R_2) = \{(u, 0) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v - u^3 = 0\}.$$

Os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em R_2 são R_1 , se $u = 0$, e C^- , se $v - u^3 = 0$.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de R_2

$$R_{2u,v} = (x, y, z^3 + xz, z^5 + yz + uxz^2 + vz^2).$$

Desde que a multiplicidade local de R_2 é 3, é suficiente determinar os conjuntos $\mathcal{B}_{(0,0)}$ e $\mathcal{B}_{(1,0)} \subset \mathcal{B}_{(0,0,0)}$.

É fácil verificar que $G_{(0,0)}$ é submersão e portanto $\mathcal{B}_{(0,0)} = \emptyset$. Como, neste caso, $\mathcal{B}_{(1,0)} = \mathcal{B}_{(0,0,0)}$, apresentemos os cálculos de $\mathcal{B}_{(1,0)}$ pela sua simplicidade. Assim, $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $m = 1$, $s = 2$ e

$$G_{(1,0)}(x, y, z, \epsilon_2) = (3z^2 + x, 3z + \epsilon_2, 5z^4 + y + 2uxz + 2vz, 10z^3 + ux + v + 10z^2\epsilon_2 + 5z\epsilon_2^2 + \epsilon_2^3).$$

Logo, $G_{(1,0)}$ é não submersiva quando $5z\epsilon_2 + 2\epsilon_2^2 + 3uz = 0$ e as condições são

$$5z\epsilon_2 + 2\epsilon_2^2 + 3uz = 3z^2 + x = 3z + \epsilon_2 = 5z^4 + y + 2uxz + 2vz = 10z^3 + ux + v + 10z^2\epsilon_2 + 5z\epsilon_2^2 + \epsilon_2^3 = 0,$$

ou seja,

$$z^2 + uz = v - 3uz^2 - 2z^3 = 0.$$

Desta maneira, se $z \neq 0$ (o que implica em $\epsilon_2 = 0$), então $v = 0$ e caso contrário, $v - u^3 = 0$. Mais precisamente, $\{(u, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ é o conjunto $\mathcal{B}_{(2)} \subset G_{(1,0)}$.

Vejamos quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em R_2 . Suponhamos $v = 0$. Então

$$R_{2u,0} = (x, y, z^3 + xz, z^5 + yz + uxz^2),$$

cujos 4-jatos são $\mathcal{A}^4$ -equivalentes a $(x, y, z^3 + xz, z^5 + yz)$, que por sua vez é $\mathcal{A}^4$ -equivalente a $R_1 : (x, y, z^3 + xz, z^4 + yz)$. Como R_1 é 4-determinado (veja [19]), $R_{2u,0}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a R_1 .

Suponhamos $v - u^3 = 0$. Então,

$$R_{2u,v^3} = (x, y, z^3 + xz, z^5 + yz + uxz^2 + u^3z^2).$$

Com argumentos geométricos que veremos no Capítulo 2, concluiremos que R_{2u,u^3} é $\mathcal{A}$ -equivalente a $C^- : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x^2 - y, y, z) \end{cases}$ (veja Observação 3.6).

□

Proposição 2.4 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\begin{aligned} S^\pm : (\mathbb{R}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (x, y, z) &\mapsto (x, y, z^3 \pm y^2z, xz + yz^2). \end{aligned}$$

é

$$\mathcal{B}(S^\pm) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u \mp v^2 = 0\}.$$

E mais, quando $u = 0$ o germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incide em $S^\pm$ é o R_1 . Se $4u \mp v^2 = 0$, então A_1^{++} incide em S^+ e A_1^{-+} em S^- .

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $S^\pm$

$$S_{u,v}^\pm = (x, y, z^3 \pm y^2z + uz + vyz, xz + yz^2).$$

Determinemos os conjuntos $\mathcal{B}_{(0,0)}$ e $\mathcal{B}_{(0,0,0)}$. Suponhamos primeiramente que $k_1 = k_2 = 0$, $m = 0$ e $s = 2$. Segue de (2.1) que

$$G_{(0,0)}(x, y, z, \epsilon_2) = (3z^2 \pm y^2 + u + vy + 3z\epsilon_2 + \epsilon_2^2, x + 2yz + y\epsilon_2).$$

Logo, $G_{(0,0)}$ é não submersiva quando $z = \epsilon_2 = v \pm 2y = 0$ e portanto as condições são

$$z = \epsilon_2 = v \pm 2y = \pm y^2 + u + vy = x = 0$$

Portanto, $\mathcal{B}_{(0,0)} = \mathcal{B}_{(1)} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u \mp v^2 = 0\}$.

Suponhamos $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $m = 0$ e $s = 3$. Segue de (2.1) que

$$G_{(0,0,0)}(x, y, z, \epsilon_2, \epsilon_3) = (3z^2 \pm y^2 + u + vy + 3z\epsilon_2 + \epsilon_2^2, 3z + 2\epsilon_2 + \epsilon_3, x + 2yz + y + y\epsilon_2, y)$$

Logo, $G_{(0,0,0)}$ é não submersiva quando $z = \epsilon_2 = 0$ e portanto as condições são

$$z = \epsilon_2 = \pm y^2 + u + vy = \epsilon_3 = x + y = y = 0.$$

Portanto, $\mathcal{B}(0, 0, 0) = \mathcal{B}_{(2)} = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Vejamos quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $S^\pm$.

Suponhamos $u = 0$. Então

$$S_{0,v}^\pm = (x, y, z^3 \pm zy^2 + vyz, xz + yz^2)$$

e seu 2-jato é $\mathcal{A}^2$ -equivalente a (x, y, xz, yz) . Desde que o único monogermes de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e com este 2-jato é o R_1 , segue que $S_{0,v}^\pm$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a ele.

Suponhamos $4u \mp v^2 = 0$. Então

$$S_{\pm v^2/4, v}^{\pm} = (x, y, z^3 + z(\pm y^2 \pm v^2/4 + vy), xz + yz^2) \sim_{\mathcal{A}_e} (x, y, z^3 \pm zy^2, xz + yz^2 \mp \frac{v}{2}z^2),$$

cujo 2-jato é $\mathcal{A}^2$ -equivalente a $(x, y, z^2, 0)$. Pelos mesmos argumentos acima, $S_{\pm v^2/4, v}^{\pm}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $A_1^{\pm\pm} = (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)z)$. Com informações geométricas que veremos no Capítulo 2, concluiremos que $S_{\pm v^2/4, v}^{\pm}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $A_1^{\pm\pm}$ (veja Observação 3.6).

□

2.2 Conjuntos de bifurcação dos bigermes

No caso de conjunto de bifurcação de um multigerme f é necessário introduzir a seguinte notação. Seja $D^s(f) \cap (U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_s})$ o espaço dos pontos s -múltiplos de f . Denotamos o germe $G_{k(s,0)}$ por $G_{k(s,0)}^{i_1, \dots, i_s}$ e o conjunto $B_{k(s,0)}$ por $B_{k(s,0)}^{i_1, \dots, i_s}$.

O conjunto de bifurcação dos multigerms cujos ramos são imersivos é de fácil verificação. Portanto, com excessão da proposição seguinte, não incluiremos tais cálculos.

Proposição 2.5 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$B_2^{\pm} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 + \bar{z}^3) \end{cases}.$$

é $\mathcal{B}(B_2^{\pm}) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0\}$. E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em B_2^+ são $\mathcal{E}$, se $v > 0$, e $\mathcal{H}$, se $v < 0$. O único germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão que incide em B_2^- é $\mathcal{H}$.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $B_2^{\pm}$

$$B_{2, u, v}^{\pm} = \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 + \bar{z}^3 + u\bar{z} + v) \end{cases}.$$

O conjunto $D^2(B_{2, u, v}^{\pm}) \cap (U_1 \times U_2)$ dos pontos duplos de $B_{2, u, v}^{\pm}$ é o único não vazio e é dado por

$$\begin{aligned} & \{(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in U_1 \times U_2; f_1(x, y, z) = f_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\} \\ & = \{(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in U_1 \times U_2; x = \bar{x}, y = \bar{y}, z = \bar{z}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 + \bar{z}^3 + u\bar{z} + v = 0\}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} G_{(0,0)} : \quad (\mathbb{R}^3, 0) & \rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, y, z) & \mapsto x^2 \pm y^2 + z^3 + uz + v \end{aligned}.$$

Logo, $G_{(0,0)}$ é não submersiva quando $x = y = 3z^2 + u = 0$. Portanto, as condições são

$$x = y = 3z^2 + u = x^2 \pm y^2 + z^3 + uz + v = 0,$$

e então o conjunto de bifurcação é

$$\mathcal{B}(B_2^\pm) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0\}.$$

Vejamos agora quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $B_2^\pm$. Podemos parametrizar $\mathcal{B}(B_2^\pm)$ por $u = -3a^2$ e $v = 2a^2$. Assim,

$$z^3 + uz + v = (z - a)^3 + 3a(z - a)^2.$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 + (\bar{z} - a)^3 + 3a(\bar{z} - a)^2) \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{pmatrix} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 + \bar{z}^3 + 3a\bar{z}^2) \end{pmatrix},$$

cujo 2-jato é $\mathcal{A}^2$ -equivalente a

$$\mathcal{E}, \mathcal{H} = \begin{pmatrix} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 \pm \bar{z}^2) \end{pmatrix}.$$

Desde que $\mathcal{E}$ e $\mathcal{H}$ são 2-determinados (veja Corolário 1.15), $B_{2,u,v}^\pm$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{E}, \mathcal{H}$. Analisando o sinal de a nas mudanças de coordenadas realizadas para obter a $\mathcal{A}_e$ -equivalência acima, obtemos as incidências desejadas.

□

A próxima observação será importante no cálculo do conjunto de bifurcação dos multigerms cujo um dos ramos é a suspensão do crosscap.

Observação 2.6 *Sejam $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, $f(x, y, z) = (x, y, z^2, yz)$, e $\tilde{f} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um representante de f . O conjunto dos pontos duplos de $\tilde{f}$ é o fecho de*

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in U \times U; (x, y, z) \neq (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \text{ e } x = \bar{x}, y = \bar{y}, z^2 = \bar{z}^2, yz = \bar{y}\bar{z}\} \\ &= \{(x, 0, z, x, 0, -z) \in U \times U; z \neq 0\}. \end{aligned}$$

Desde que $\bar{A} \setminus A$ é a curva de crosscap,

$$D^2(f) \cap (U \times U) = \{(x, 0, z, x, 0, -z) \in U \times U\}.$$

Proposição 2.7 *O conjuntos de bifurcação do germe*

$$f : \begin{pmatrix} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}^3, \bar{y}, \bar{z}) \end{pmatrix}$$

é $\mathcal{B}(f) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0\}$. Os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em f são $\mathcal{C}^-$, se $v > 0$, e $\mathcal{C}^+$, se $v < 0$.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de f

$$f_{u,v} : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}^3 + u\bar{x}, \bar{y} + v, \bar{z}) \end{cases}.$$

Os conjuntos dos pontos duplos e triplos de $f_{u,v}$ são os únicos não vazios. Assim, devemos determinar $G_{(0,0)}^{1,2}$ e $G_{(0,0,0)}^{1,1,2}$. Seja $D^2(f_{u,v}) \cap (U_1 \times U_2)$ o fecho do conjunto

$$\{(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in U_1 \times U_2; x = \bar{x}, y = \bar{y} + \bar{x}^3 + u\bar{x}, z^2 = \bar{y} + v, yz = \bar{z}\}.$$

Então

$$G_{(0,0)}^{1,2} : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^4, 0) & \rightarrow & (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, y, z, \bar{z}) & \mapsto & (z^2 - v + x^3 + ux - y, yz - \bar{z}) \end{array}.$$

Claramente $G_{(0,0)}^{1,2}$ é submersão em todos os pontos $(x, y, z, \bar{z})$ e portanto $\mathcal{B}_{(0,0)}^{1,2} = \emptyset$.

Segue da definição de pontos triplos e da Observação 2.6 que $D^3(f_{u,v}^\pm) \cap (U_1 \times U_1 \times U_2)$ é dado por

$$\{(x, 0, z, x, 0, -z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in U_1 \times U_1 \times U_2; x = \bar{x}, 0 = \bar{y} + \bar{x}^3 + u\bar{x}, z^2 = \bar{y} + v, 0 = \bar{z}\}$$

e então

$$G_{(0,0,0)}^{1,1,2} : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, 0) & \rightarrow & (\mathbb{R}, 0) \\ (x, z) & \mapsto & z^2 - v + x^3 + ux \end{array}.$$

Logo, $G_{(0,0,0)}^{1,1,2}$ é não submersiva quando $z = 0, 3x^2 + u = 0$. Portanto, as condições são

$$z^2 - v + x^3 + ux = z = 3x^2 + u = 0$$

e então $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,1,2} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0\}$.

Portanto,

$$\mathcal{B}(f) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0\}.$$

Vejam agora quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em f . Observemos que

$$f_{u,v} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}^3 + u\bar{x}, \bar{y} + v, \bar{z}) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}^3 + u\bar{x} - v, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}.$$

Podemos parametrizar $\mathcal{B}(f)$ por $u = -3a^2$ e $v = -2a^3$. Assim,

$$\bar{x}^3 + u\bar{x} - v = (\bar{x} - a)^3 + 3a(\bar{x} - a)^2.$$

Então

$$f_{u,v} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}^3 + u\bar{x} - v, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}^3 + 3a\bar{x}^2, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}.$$

A equação que define a imagem do ramo $(\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}^3 + 3a\bar{x}^2, \bar{y}, \bar{z})$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -Y + Z + X^3 + 3aX^2 \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem da suspensão do crosscap, que é definida por $W^2 - Y^2Z = 0$, então h é $\mathcal{VK}$ -equivalente a $-Y + Z + \varepsilon X^2 + \frac{1}{(\varepsilon 3a)^{\frac{2}{3}}} X^3$, onde ε é o sinal de a , cujo 2-jato é $-Y + Z + \varepsilon X^2$. Segue da Proposição 1.18 que $-Y + Z + \varepsilon X^2$ é 2- $\mathcal{VK}$ -determinado e então $h \sim_{\mathcal{VK}} -Y + Z + \varepsilon X^2$. Como $-Y + Z + \varepsilon X^2$ define a imagem do germe $(x, y + \varepsilon x^2, y, z)$, $f_{u,v}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$C^\varepsilon : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y + \varepsilon x^2, u, z) \end{cases}.$$

□

Proposição 2.8 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$f^\pm : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(f^\pm) = \{(u, 0) \in \mathbb{R}^2; u > 0\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v \pm u^2 = 0\}$. E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em

(a) f^+ são:

(a.1) C^+ , se $v + u^2 = 0$ e $u < 0$;

(a.2) C^- , se $v + u^2 = 0$ e $u > 0$;

(a.3) $\mathcal{T}_e$, se $v = 0$ e $u > 0$.

(b) f^- são:

(b.1) C^- , se $v - u^2 = 0$ e $u < 0$;

(b.2) C^+ , se $v - u^2 = 0$ e $u > 0$;

(b.3) $\mathcal{T}_h$, se $v = 0$ e $u > 0$.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $f^\pm$

$$f_{u,v}^\pm : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 + v, \bar{y} + u, \bar{z}) \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação de $f^\pm$ é dado por $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,1,2}$ e segue de maneira análoga à proposição anterior.

Vejamos agora quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $f^\pm$.

Suponhamos $v \pm u^2 = 0$. Então, $f_{u, \mp u^2}^\pm$ é dada por

$$\begin{pmatrix} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 \mp u^2, \bar{y} + u, \bar{z}) \end{pmatrix} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{pmatrix} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{x}^2 \pm (\bar{y} - u)^2 \mp u^2, \bar{y}, \bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 \mp 2u\bar{y}, \bar{y}, \bar{z}) \end{pmatrix}.$$

A equação que define a imagem do segundo ramo de $f_{u, \mp u^2}^\pm$ é

$$h = -Y + X^2 \pm Z^2 \mp 2uZ \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem da suspensão do crosscap, que é definida por $W^2 - Y^2Z = 0$, então h é $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y \pm Z + X^2 \pm \frac{1}{4u^2}Z^2$. Segue da Proposição 1.18 que h pertence a mesma

$\mathcal{V}\mathcal{K}$ -órbita de $-Y + Z \pm X^2$. Portanto, $f_{u, \mp u^2}^\pm$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{C}^\pm : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y \pm x^2, y, z) \end{cases}$ se $u < 0$

e a $\mathcal{C}^\mp : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y \mp x^2, y, z) \end{cases}$ caso contrário.

Suponhamos $v = 0$ e $u > 0$. Então

$$f_{u, 0}^\pm = \begin{pmatrix} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2, \bar{y} + u, \bar{z}) \end{pmatrix}.$$

Procederemos de maneira análogo a David Mond em [23].

Observemos que $f_{u, 0}^\pm$ possui um ponto triplo, a saber, $(0, 0, \sqrt{u}, 0, 0, -\sqrt{u}, 0, 0, 0)$. Sejam $U_1^\pm$ e U_2 vizinhanças de $(0, 0, \pm\sqrt{u})$ e $(0, 0, 0)$, respectivamente. Consideremos $w = z^2 - u$, ou seja, $z = \pm\sqrt{w + u}$. Assim, $f_{u, 0}^\pm$ restrita a $U_1^\pm$ e U_2 é

$$\begin{pmatrix} (x, y, w + u, y\sqrt{w + u}) \\ (x, y, w + u, -y\sqrt{w + u}) \\ (x, x^2 \pm y^2, y + u, z) \end{pmatrix},$$

o qual é $\mathcal{A}_e$ -equivalente a

$$\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_h : \begin{pmatrix} (x, y, w, 0) \\ (x, y, 0, w) \\ (x, y, z, z \pm x^2 + y^2). \end{pmatrix}$$

□

Proposição 2.9 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$f^{\pm\pm} : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{y}, \pm\bar{x}^2 \pm \bar{y}^2, \bar{z}) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(f^{++}) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + v^2 = 0\}$ e $\mathcal{B}(f^{\pm-}) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u - v^2 = 0\}$. E mais, os germes de codimensão 1 que incidem em

(a) f^{++} são:

(a.1) $\mathcal{C}^-$, se $u + v^2 = 0$;

(a.2) $\mathcal{H}$, se $u = 0$.

(b) f^{-+} são:

(b.1) $\mathcal{C}^+$, se $u + v^2 = 0$;

(b.2) $\mathcal{H}$, se $u = 0$;

(c) f^{+-} são:

(c.1) $\mathcal{C}^-$, se $u - v^2 = 0$;

(c.2) $\mathcal{H}$, se $u = 0$;

(d) f^{--} são:

(d.1) $\mathcal{C}^+$, se $u - v^2 = 0$;

(d.2) $\mathcal{E}$, se $u = 0$;

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $f^{\pm\pm}$

$$f_{u,v}^{\pm\pm} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y} + v, \pm\bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 + u, \bar{z}) \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação de $f^{\pm\pm}$ é determinado por $\mathcal{B}_{(0,0)}^{1,2}$ e $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,1,2}$ e segue de maneira análoga à Proposição 2.7.

Vejam os quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $f^{\pm\pm}$.

Suponhamos $u = 0$ e $v \neq 0$. Então

$$f_{0,v}^{\pm\pm} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y} + v, \pm\bar{x}^2 \pm \bar{y}^2, \bar{z}) \end{cases}.$$

Agora, realizando sucessivamente as seguintes mudanças de coordenadas:

1. $H_1(X, Y, Z, W) = (X, Y - v, Z, W);$
2. $\psi(x, y, z) = (x, y + v, z);$
3. $H_2(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z, \frac{W}{Y+v});$
4. $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}, (\bar{y} + v)\bar{z});$
5. $H_3(X, Y, Z, W) = (X, Y, W, Z - W^2),$

onde $H_i, \psi, \phi, i = 1, 2, 3$, são germes de difeomorfismos na meta, na fonte do primeiro e segundo ramo, respectivamente, obtemos que $f_{0,v}^{\pm\pm}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\mathcal{E}, \mathcal{H} : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \pm \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 - \bar{z}^2) \end{cases}.$$

Suponhamos $u \pm v^2 = 0$. Então

$$f_{\mp v^2, v}^{\pm\pm} : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y} + v, \pm \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 \mp v^2, \bar{z}) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \pm \bar{x}^2 \pm (\bar{y} - v)^2 \mp v^2, \bar{z}) \end{cases}$$

A equação que define a imagem do segundo ramo de $f_{\mp v^2, v}^{\pm\pm}$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -Z \pm X^2 \pm (Y - v)^2 \mp v^2 = \mp 2vY - Z \pm X^2 \pm Y^2 \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem da suspensão do crosscap, que é definida por $W^2 - Y^2Z = 0$, então h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + Z \mp X^2 \mp \frac{1}{4v^2}Y^2$. Segue da Proposição 1.18 que h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + Z \mp X^2$. Logo, $f_{\mp v^2, v}^{+\pm}$ e $f_{\mp v^2, v}^{-\pm}$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes a

$$\mathcal{C}^-; \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y - x^2, y, z) \end{cases} \quad e \quad \mathcal{C}^+; \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y + x^2, y, z) \end{cases},$$

respectivamente.

□

Proposição 2.10 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$f^{\pm\pm} : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, 0, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(f^{\pm+}) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + v^2 = 0\}$ e $\mathcal{B}(f^{\pm-}) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u - v^2 = 0\}$. E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em

(a) f^{++} são:

- (a.1) A_1^{++} , se $u = 0$;
 (a.2) C^+ , se $u + v^2 = 0$.

(b) f^{+-} são:

- (b.1) A_1^{-+} , se $u = 0$;
 (b.2) C^+ , se $u - v^2 = 0$.

(c) f^{--} são:

- (c.1) A_1^{--} , se $u = 0$;
 (c.2) C^- , se $u - v^2 = 0$.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $f^{\pm\pm}$:

$$f^{\pm\pm} : \begin{cases} (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2 + u)) \\ (\bar{x}, v, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}.$$

Temos que $\mathcal{B}(f^{\pm\pm}) = \mathcal{B}_{(0,0)}^{1,1} \cup \mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,1,2}$.

Segue de (2.1), que

$$\begin{aligned} G_{(0,0)}^{1,1} : \quad (\mathbb{R}^4, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, y, z, \epsilon_2) &\mapsto (2z + \epsilon_2, 3z^2 \pm x^2 \pm y^2 + u + 3z\epsilon_2 + \epsilon_2^2). \end{aligned}$$

Logo, $G_{(0,0)}^{1,1}$ é não submersiva quando $x = 0, y = 0$ e $\epsilon_2 = 0$. Portanto, as condições são

$$2z + \epsilon_2 = 3z^2 \pm x^2 \pm y^2 + u + 3z\epsilon_2 + \epsilon_2^2 = x = y = \epsilon_2 = 0$$

e então $\mathcal{B}_{(0,0)}^{1,1} = \mathcal{B}_{(1)}^1 = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Seja $D^3(f_{u,v}^{\pm\pm}) \cap (U_1 \times U_1 \times U_2)$ o fecho do conjunto

$$\{(x, y, z, \epsilon_2, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^7; \quad 2z + \epsilon_2 = 0, 3z^2 \pm x^2 \pm y^2 + u + 3z\epsilon_2 + \epsilon_2^2 = 0, x = \bar{x}, y = v, z^2 = \bar{y}, \\ z(u + z^2 \pm x^2 \pm y^2) = \bar{z}\}$$

Então

$$\begin{aligned} G_{(0,0,0)}^{1,1,2} : \quad (\mathbb{R}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (x, z, \bar{y}) &\mapsto (z^2 \pm x^2 \pm v^2 + u, z^2 - \bar{y}) \end{aligned}$$

Logo, $G_{(0,0,0)}^{1,1,2}$ é não submersiva quando $x = z = 0$. Portanto, as condições são

$$z^2 - \bar{y} = z^2 \pm x^2 \pm v^2 + u = x = z = 0$$

e então $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,1,2} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; \quad u \pm v^2 = 0\}$.

Portanto, $\mathcal{B}(f^{\pm\pm}) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u \pm v^2 = 0\}$.

Vejamos agora quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $f^{\pm\pm}$.

Suponhamos $u = 0$ e $v \neq 0$. Então

$$f_{0,v}^{\pm\pm} : \begin{cases} (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)) \\ (\bar{x}, v, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}.$$

Desde que o segundo ramo de $f_{0,v}^{\pm\pm}$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$, $f_{0,v}^{\pm\pm}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente ao germe $A_1^{\pm\pm} : (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2)z)$.

Suponhamos $u - v^2 = 0$. Então

$$f_{v^2,v}^{+-} = \begin{cases} (x, y, z^2, z(z^2 + x^2 - y^2 + v^2)) \\ (\bar{x}, v, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}.$$

Agora, realizando sucessivamente as seguintes mudanças de coordenadas:

1. $H_1(X, Y, Z, W) = (X, Y - v, Z, W)$;
2. $\psi_1(x, y, z) = (x + y, y + v, z)$;
3. $H_2(X, Y, Z, W) = (X - Y, Y, Z, W)$;
4. $\psi_2(x, y, z) = (x, \frac{y - z^2 - x^2}{2(x - v)}, z)$;
5. $H_3(X, Y, Z, W) = (X, Y + Z + X^2, Z, (2X - v)W)$;
6. $\psi_3(x, y, z) = (x, 2(x - v)y, z)$;
7. $\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}, 2(\bar{x} - v)\bar{z})$,

onde H_i , ψ_i e ϕ , $i = 1, 2, 3$, são germes de difeomorfismos na meta, na fonte do primeiro e do segundo ramo de $f_{v^2,v}^{+-}$, respectivamente, obtemos que $f_{v^2,v}^{+-}$ é $\mathcal{A}_e$ -equivalente ao germe

$$C^+ : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y + x^2, y, z) \end{cases}.$$

Consideremos agora o germe

$$f_{v^2,v}^{--} : \begin{cases} (x, y, z^2, z(z^2 - x^2 - y^2 + v^2)) \\ (\bar{x}, v, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}.$$

Realizemos sucessivamente as seguintes mudanças de coordenadas em $f_{v^2,v}^{--}$, onde $H_i^{\pm}$, $\psi_i^{\pm}$ e $\phi^{\pm}$, $i = 1, 2, 3$, são germes de difeomorfismos na meta, na fonte do primeiro ramo e na fonte do segundo ramo de $f_{v^2,v}^{+-}$, respectivamente, e o $\pm$ corresponde ao sinal de v :

1. $H_1(X, Y, Z, W) = (X, Y - v, Z, W);$
2. $\psi_1(x, y, z) = (x, y + v, z);$
3. $\psi_2^\pm(x, y, z) = (\sqrt{\pm(y + 2v)} \ x, y, \sqrt{\pm(y + 2v)} \ z);$
4. $H_2^\pm(X, Y, Z, W) = \left(\frac{X}{\sqrt{\pm(Y + 2v)}}, Y, \frac{Z}{\pm(Y + 2v)}, \frac{W}{\sqrt{(\pm(Y + 2v))^3}} \right);$
5. $\phi^\pm(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\sqrt{\pm 2v} \ \bar{x}, \pm 2v \bar{y}, \sqrt{(\pm 2v)^3} \ \bar{z});$
6. $\psi_3^\pm(x, y, z) = (x, -y \pm (x^2 - z^2), z);$
7. $H_3(X, Y, Z, W) = (X, -Y \pm (X^2 - Z), Y, W)$

e obtemos que $f_{v^2, v}^{--}$ é $\mathcal{A}_e$ -equivalente ao germe $C^- : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y - x^2, y, z) \end{cases}$. É válido comentar que, se tomarmos (x, y, z) , $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e (X, Y, Z, W) suficientemente próximos da origem de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente, e considerarmos o sinal de v , então os germes de difeomorfismos $\psi_2^\pm$, $H_2^\pm$ e $\phi^\pm$ estão bem definidos.

As incidências do germe $f_{v^2, v}^{++}$ são obtidas de maneira análoga as de $f_{v^2, v}^{--}$.

□

Proposição 2.11 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$f : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z^3 + xz, z^4 + yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(f) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0\}$. E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em f são $\mathcal{T}_c$ e R_1 se $4u^3 + 27v^2 = 0$ e $u = 0$, respectivamente.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de f :

$$f_{u, v} : \begin{cases} (x, y, z^3 + xz, z^4 + yz + uz^2) \\ (\bar{x}, \bar{x} + v - u, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}.$$

Temos que $\mathcal{B}(f) = \mathcal{B}_{(1,0)}^{1,1} \cup \mathcal{B}_{(1,0,0)}^{1,1,2}$.

Segue de (2.1), que

$$G_{(1,0)}^{1,1}(x, y, z, \epsilon_2) = (3z^2 + x, 3z + \epsilon_2, 4z^3 + y + 2uz, 6z^2 + u + 4z\epsilon_2 + 2\epsilon_2^2).$$

Logo, $G_{(1,0)}^{1,1}$ é não submersiva quando $\epsilon_2 = 0$. Portanto, as condições são

$$\epsilon_2 = z = x = y = u = 0$$

e então $\mathcal{B}_{(1,0)}^{1,1} = \mathcal{B}_{(2)}^1 = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Determinemos agora $G_{(1,0,0)}^{1,1,2}$. Das equações acima que determinam $G_{(1,0)}^{1,1}$ e das que definem a interseção dos dois ramos, $x = \bar{x}$, $y = \bar{x} + v - u$, $z^3 + xy = \bar{y}$ e $z^4 + yz + uz^2 = \bar{z}$, segue que

$$\begin{aligned} G_{(1,0,0)}^{1,1,2} : \quad (\mathbb{R}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}^4, 0) \\ (z, \bar{y}, \bar{z}) &\mapsto (2z^3 - v, 3z^2 + u, z^3 - 3z^2v + 3z^2u - \bar{y}, -3z^3 + vz - uz + uz^2 - \bar{z}). \end{aligned}$$

Logo, $G_{(1,0,0)}^{1,1,2}$ é não submersiva para todo $(z, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$. Portanto, as condições são

$$2z^3 - v = 3z^2 + u = z^3 - 3z^2v + 3z^2u - \bar{y} = -3z^3 + vz - uz + uz^2 - \bar{z} = 0$$

e então $\mathcal{B}_{(1,0,0)}^{1,1,2} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u^3 + 27v^2 = 0\}$.

Quanto as incidências em f , claramente temos que se $u = 0$, então $f_{0,v}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a R_1 . Já o caso $4u^3 + 27v^2 = 0$ deixemos para o Capítulo 3, quando teremos informações geométricas sobre o germe $\mathcal{T}_c$ (veja Observação 3.6). $\square$

2.3 Conjuntos de bifurcação de trigramas

Proposição 2.12 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$T^d : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z') \xrightarrow{f_3} (x', y', z', z' + x'^2 + y'^3) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(T^d) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 27v^2 + 4u^3 = 0\}$. E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em T^d são $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{T}_h$ se $v > 0$ e $v < 0$, respectivamente.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de T^d :

$$T_{u,v}^d = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z', z' + x'^2 + y'^3 + uy' + v) \end{cases}.$$

É fácil ver que o conjunto de bifurcação de T^d é determinado por $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,2,3}$.

Provemos as incidências em T^d .

Podemos parametrizar $\mathcal{B}(T^d)$ por $u = -3a^2$ e $v = 2a^3$. Assim,

$$y'^3 + uy' + v = (y' - a)^3 + 3a(y' - a)^2.$$

$$T_{u,v}^d = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z', z' + x'^2 + (y' - a)^3 + 3a(y' - a)^2) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z', z' + x'^2 + 3ay'^2 + y'^3) \end{cases}.$$

A equação que define a imagem do terceiro ramo de $T_{u,v}^d$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -W + Z + X^2 - 3aY^2 + Y^3 \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem do germe $\tilde{f} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \end{cases}$, que é definida por $ZW = 0$, então h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-W + Z + X^2 - \varepsilon Y^2 + \frac{1}{\sqrt{-\varepsilon 27a^3}} Y^3$, onde ε é o sinal de a . Aplicando o Teorema 1.2 temos que h pertence a mesma $\nu\mathcal{K}$ -órbita de $-W + Z + X^2 - \varepsilon Y^2$. Logo, $T_{u,v}^d$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{T}_e$ se $a > 0$ (ou seja, $v > 0$) e a $\mathcal{T}_h$ caso contrário.

□

Proposição 2.13 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\mathcal{T}_2^{\pm\pm} : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z') \xrightarrow{f_3} (x', y', z', \pm x'^2 + y'^2 \pm z'^2) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(\mathcal{T}_2^{\pm\pm}) = \{(u, 0) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v + u^2 = 0\}$ e $\mathcal{B}(\mathcal{T}_2^{\pm-}) = \{(u, 0) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v - u^2 = 0\}$. E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em

(a) $\mathcal{T}_2^{++}$ são:

(a.1) $\mathcal{E}$, se $v = 0$;

(a.2) $\mathcal{T}_e$, se $v + u^2 = 0$;

(b) $\mathcal{T}_2^{-+}$ são:

(b.1) $\mathcal{H}$, se $v = 0$;

(b.2) $\mathcal{T}_h$, se $v + u^2 = 0$;

(c) $\mathcal{T}_2^{+-}$ são:

(c.1) $\mathcal{H}$, se $v = 0$;

(c.2) $\mathcal{T}_e$, se $v + u^2 = 0$.

Observemos que $\mathcal{T}_2^{--}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{T}_2^{-+}$.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{T}_2^{\pm\pm}$:

$$\mathcal{T}_2^{\pm\pm}_{u,v} = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z' + u, \pm x'^2 + y'^2 \pm z'^2 + v) \end{cases}.$$

É imediata a verificação do conjunto de bifurcação de $\mathcal{T}_2^{\pm\pm}$, basta determinar $\mathcal{B}_{(0,0)}^{1,3}$ e $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,2,3}$.

Vejamos agora quais os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $\mathcal{T}_2^{\pm\pm}$.

Suponhamos $v = 0$ e $u \neq 0$. Então

$$\mathcal{T}_2^{\pm\pm}_{u,0} = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z' + u, \pm x'^2 + y'^2 \pm z'^2) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, u, \bar{z}) \\ (x', y', z', \pm x'^2 + y'^2 \pm z'^2) \end{cases}.$$

Como o segundo ramo de $\mathcal{T}_2^{\pm\pm}_{u,0}$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{T}_2^{\pm\pm}_{u,0}$ é $\mathcal{A}_e$ -equivalente

$$\text{a } \mathcal{E}, \mathcal{H} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x', y', z', \pm x'^2 + y'^2 \pm z'^2) \end{cases}.$$

Suponhamos $v \pm u^2 = 0$. Então

$$\mathcal{T}_2^{\pm\pm}_{u,\mp u^2} = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z' + u, \pm x'^2 + y'^2 \pm z'^2 \mp u^2) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z', \pm x'^2 + y'^2 \pm z'^2 \mp 2uz') \end{cases}.$$

A equação que define a imagem do terceiro ramo de $\mathcal{T}_2^{\pm\pm}_{u,\mp u^2}$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -W \pm X^2 + Y^2 \pm Z^2 \mp 2uZ \in \mathcal{E}_4.$$

Com os mesmos argumentos da prova anterior obtemos os itens (a.2), (b.2) e (c.2).

□

Proposição 2.14 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$f^\pm : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y', z') \xrightarrow{f_3} (x', y' \pm x'^2, y', z') \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(f^\pm) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u \mp v^2 = 0\} \cup \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\}$. E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em $f^\pm$ são $\mathcal{T}_c$ e $\mathcal{C}^\pm$ se $u = 0$ e $4u \mp v^2 = 0$, respectivamente.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $f^\pm$

$$f_{u,v}^\pm = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y' \pm x'^2 + u + vx', y', z') \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação de f é dado por $\mathcal{B}_{0,0,0}^{1,1,3} \cup \mathcal{B}_{(0,0,0,0)}^{1,1,2,3}$.

Seja $D^3(f_{u,v}) \cap (U_1 \times U_1 \times U_3)$ o conjunto

$$\{(x, 0, z, x, 0, -z, x', y', z') \in U_1 \times U_1 \times U_3; x = x', 0 = y' \pm x'^2 + u + vx', z^2 = y', 0 = z'\}.$$

Então

$$G_{(0,0,0)}^{1,1,3} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, z) \mapsto z^2 \pm x^2 + u + vx.$$

Logo, $G_{(0,0,0)}^{1,1,3}$ é não submersiva quando $z = 0, \pm 2x + v = 0$. Portanto, as condições são

$$z^2 \pm x^2 + u + vx = z = \pm 2x + v = 0$$

e $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,1,3} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u \mp v^2 = 0\}$.

Agora, seja $D^4(f_{u,v}) \cap (U_1 \times U_1 \times U_2 \times U_3)$ o conjunto

$$\{(x, 0, z, x, 0, -z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, x', y', z') \in U_1 \times U_1 \times U_2 \times U_3; x = 0 = x', 0 = \bar{x} = y' \pm x'^2 + u + vx',$$

$$z^2 = \bar{y} = y', 0 = \bar{z} = z'\}.$$

Então

$$G_{(0,0,0,0)}^{1,1,2,3} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ (z, \bar{y}) \mapsto (z^2 + u, z^2 - \bar{y}).$$

Logo, $G_{(0,0,0,0)}^{1,1,2,3}$ é não submersiva quando $z = 0$. Portanto, as condições são

$$z^2 + u = z^2 - \bar{y} = z = 0$$

e então $\mathcal{B}_{(0,0,0,0)}^{1,1,2,3} = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\}$.

Vejamos agora quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $f^\pm$.

Suponhamos $4u \mp v^2 = 0$. Então,

$$f_{\pm v^2/4, v}^\pm = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y' \pm (x' \pm v^2/2)^2, y', z') \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\pm v/2, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y' \pm x'^2, y', z') \end{cases}.$$

Como o segundo ramo de $f_{\pm v^2/4, v}^\pm$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$, $f_{\pm v^2/4, v}^\pm$ é $\mathcal{A}$ -equivalente

$$\text{a } \mathcal{C}^\pm : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y' \pm x'^2, y', z') \end{cases}.$$

Suponhamos $u = 0$. Então,

$$f_{0,v}^\pm : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y' \pm x'^2 + vx', y', z') \end{cases}.$$

A equação que define o terceiro ramo de $f_{0,v}^\pm$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -Y + Z \pm X^2 + vX \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem de $\tilde{f} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}$, que é definida por $(W^2 - Y^2Z)X = 0$, então h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + X + Z + \frac{1}{v^2}X^2$. Segue da Proposição 1.27 que o 1-jato de h é $1 - \nu\mathcal{K}$ -determinado. Logo, h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + X + Z$ e define a imagem do germe $(x, x+y, y, z)$.

Portanto, o germe $f_{0,u}^\pm$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{T}_c : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, x, y, z) \\ (x', x' + y', y', z) \end{cases}$.

□

Proposição 2.15 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$f : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y', z') \xrightarrow{f_3} (x', x' + y'^2, y', z') \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(f) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2; v > 0\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u + v^2 = 0\}$. E mais, os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em f são $\mathcal{T}_c$ e $\mathcal{Q}$ se $u + v^2 = 0$ e $u = 0, v > 0$, respectivamente.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de f

$$f_{u,v} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', x' + y'^2 + u, y' + v, z') \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação de f é determinado por $\mathcal{B}_{(0,0,0,0)}^{1,1,2,3}$ e segue de maneira análoga à proposição anterior.

Vejamos agora quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em f .

Suponhamos $u + v^2 = 0$. Então,

$$f_{-v^2, v} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', x' + y'^2 - v^2, y' + v, z') \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', x' + (y' - v)^2 - v^2, y', z') \end{cases}.$$

A equação que define a imagem do terceiro ramo de $f_{-v^2, v}$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -Y + X + Z^2 - 2vZ \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem de $\tilde{f} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}$, que é definida por $(W^2 - Y^2Z)X = 0$, então h é $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + X + Z \pm \frac{1}{4v^2}Z^2$. Segue da Proposição 1.27 que o 1-jato de h é $1 - \mathcal{V}\mathcal{K}$ -determinado. Logo, h é $\mathcal{V}\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + X + Z$. Portanto, o germe $f_{-v^2, v}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{T}_c : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', x' + y', y', z') \end{cases}$.

Suponhamos $u = 0$ e $v \geq 0$. Então,

$$f_{0, v} : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', x' + y'^2, y' + v, z') \end{cases}.$$

O germe que incide em f quando $u = 0$ e $v > 0$ é obtido de maneira análoga a David Mond em [23]. Basta observar que $f_{0, v}$ possui um ponto quádruplo, a saber,

$$(0, 0, \sqrt{v}, 0, 0, -\sqrt{v}, 0, v, 0, 0, 0, 0),$$

considerar $w = z^2 - v$ e $\bar{w} = \bar{y} - v$ e proceder como em demonstrações anteriores para obter que

$$f_{0, v} \text{ é } \mathcal{A}\text{-equivalente a } \mathcal{Q} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (x, y, z, x^2 + y + z) \end{cases}.$$

□

Proposição 2.16 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$f^\pm : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y', z') \xrightarrow{f_3} (x', y', x' \pm y'^2, z') \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(f^\pm) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4u \mp v^2 = 0\}$. E mais, o germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incide em $f^\pm$ se $u = 0$ é $\mathcal{T}_c$. Se $4u - v^2 = 0$, então $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{T}_e$ incidem em f^+ e f^- , respectivamente.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $f^\pm$

$$f_{u,v}^\pm = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y', x' \pm y'^2 + u + vy', z') \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação de $f^{\pm\pm}$ é dado pela união dos conjuntos $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,2,3}$ e $\mathcal{B}_{0,0,0,0}^{1,1,2,3}$ e segue de maneira análoga às proposições anteriores.

Vejamos agora quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão incidem em $f^\pm$.

Suponhamos $4u \mp v^2 = 0$. Então,

$$f_{\pm v^2/4, v}^\pm = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y', x' \pm (y' \pm \frac{v^2}{2})^2, z') \end{cases}$$

Realizando sucessivamente as seguintes mudanças de coordenadas, onde H_j, ψ, φ_j e ϕ_i , $i = 1, 2$ e $j = 1, \dots, 4$, são germes de difeomorfismos na meta, na fonte do primeiro, segundo e terceiro ramo de $f_{u, \pm \frac{v^2}{4}}^\pm$, respectivamente,

1. $\phi_1(x', y', z') = (x', y' \mp \frac{v}{2}, z')$;
2. $H_1(X, Y, Z, W) = (X, Y \pm \frac{v}{2}, Z, W)$;
3. $\varphi_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x} \mp \frac{v}{2}, \bar{y}, \bar{z})$;
4. $\psi(x, y, z) = (x, y \mp \frac{v}{2}, z)$;
5. $H_2(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z, \frac{W}{Y \mp \frac{v}{2}})$;
6. $\varphi_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{y}, (\bar{x} \mp \frac{v}{2})\bar{z})$;
7. $\phi_2(x', y', z') = (x', y', (y' \mp \frac{v}{2})z')$;
8. $H_3(X, Y, Z, W) = (X, Y, Z - W^2, W)$;
9. $\varphi_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{z}, \bar{y} + \bar{z}^2, \bar{x})$;
10. $H_4(X, Y, Z, W) = (W, Y, Z, X)$;
11. $\varphi_4(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{z}, \bar{y}, \bar{x})$.

obtemos que $f_{v^2/4,v}^+$ e $f_{-v^2/4,v}^-$ são $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{T}_e$, respectivamente.

Suponhamos $u = 0$. Então

$$f_{0,v}^\pm = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', y', x' \pm y'^2 + vy', z') \end{cases}.$$

A equação de define a imagem do terceiro ramo de $f_{0,v}^\pm$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -Z + X \pm Y^2 + vY \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem de $\tilde{f} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{cases}$, que é definida por $(W^2 - Y^2Z)X = 0$, então h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + X + Z \mp \frac{1}{v^2}Y^2$. Segue da Proposição 1.27 que o 1-jato de h é $1 - \nu$ $\mathcal{K}$ -determinado. Logo, h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-Y + X + Z$. Portanto, o germe $f_{0,v}^\pm$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\mathcal{T}_e : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ (x', x' + y', y', z') \end{cases}.$$

□

2.4 Conjuntos de bifurcação dos quadrigermes, pentagermes e hexagermes

Proposição 2.17 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\mathcal{Q}^d : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z') \xrightarrow{f_3} (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \xrightarrow{f_4} (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{y} + \tilde{z} + \tilde{x}^3) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(\mathcal{Q}^d) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 27v^2 + 4u^3 = 0\}$. E mais, o único germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incide em $\mathcal{Q}^d$ é $\mathcal{Q}$.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{Q}^d$

$$\mathcal{Q}_{u,v}^d = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{y} + \tilde{z} + \tilde{x}^3 + u\tilde{x} + v) \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação de $\mathcal{Q}^d$ é de fácil verificação, basta determinar $\mathcal{B}_{0,0,0,0}^{1,2,3,4}$.

Vejamos quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $\mathcal{Q}^d$.

Podemos parametrizar $\mathcal{B}(\mathcal{Q}^d)$ por $u = -3a^2$ e $v = 2a^2$. Assim,

$$\tilde{x}^3 + u\tilde{x} + v = (\tilde{x} - a)^3 + 3a(\tilde{x} - a)^2.$$

Então,

$$\mathcal{Q}_{u,v}^d = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{y} + \tilde{z} + (\tilde{x} - a)^3 + 3a(\tilde{x} - a)^2) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{y} + \tilde{z} + \tilde{x}^3 + 3a\tilde{x}^2) \end{cases}.$$

A equação que define do quarto ramo da $\mathcal{Q}_{u,v}^d$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -W + Y + Z + X^3 + 3aX^2 \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem de $\tilde{f} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \end{cases}$, que é definida por $YZW = 0$, então h é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -equivalente

a $-W + Y + Z + X^2 + \frac{1}{(\pm 3a)^{\frac{3}{2}}} X^3$. Segue da Proposição 1.28 que o 2-jato de h é $2-{}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -determinado.

Logo, h é ${}_{\mathcal{V}}\mathcal{K}$ -equivalente a $-W + Y + Z + X^2$. Portanto, $\mathcal{Q}_{u,v}^d$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{y} + \tilde{z} + \tilde{x}^2) \end{cases}.$$

□

Proposição 2.18 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\mathcal{Q}_2^\pm : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z') \xrightarrow{f_3} (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \xrightarrow{f_4} (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{z} \pm \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(\mathcal{Q}_2^\pm) = \{(u, 0); \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v + u^2 = 0\}$. E mais, o germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incide em $\mathcal{Q}_2^\pm$ se $v + u^2 = 0$ é $\mathcal{Q}$. Agora, se $v = 0$, então $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{T}_h$ incidem em $\mathcal{Q}_2^+$ e em $\mathcal{Q}_2^-$, respectivamente.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{Q}_2^\pm$

$$\mathcal{Q}_{2,u,v}^\pm = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y} + u, \tilde{z}, \tilde{z} \pm \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + v) \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação de $\mathcal{Q}_2^+$ é facilmente verificado ao determinar os conjuntos $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,2,4}$ e $\mathcal{B}_{(0,0,0)}^{1,2,3,4}$.

Vejam os quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $\mathcal{Q}_2^\pm$.

Suponhamos $v = 0$ e $u \neq 0$. Então

$$\mathcal{Q}_{2,u,0}^\pm : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y} + u, \tilde{z}, \tilde{z} \pm \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', u, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{z} \pm \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \end{cases}$$

O terceiro ramo de $\mathcal{Q}_{2,u,0}^\pm$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$ e portanto $\mathcal{Q}_{2,u,0}^\pm$ é $\mathcal{A}$ -equivalente

$$\text{a } \mathcal{T}_e, \mathcal{T}_h : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{z} \pm \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \end{cases}.$$

Suponhamos $v + u^2 = 0$. Então

$$\mathcal{Q}_{2,u,-u^2}^\pm : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y} + u, \tilde{z}, \tilde{z} - u^2 \pm \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{z} \pm \tilde{x}^2 + (\tilde{y} - u)^2 - u^2) \end{cases}.$$

A equação que define a imagem do quarto ramo de $\mathcal{Q}_2^\pm_{u,-u^2}$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -W + Z \pm X^2 + Y^2 - 2uY \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem de $\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \end{cases}$, que é definida por $YZW = 0$, pelos mesmos argumentos

já utilizados anteriormente, h é $\mathcal{VK}$ -equivalente a $-W + Z + Y + X^2$. Portanto, o germe $\mathcal{Q}_2^\pm_{u,-u^2}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{y} + \tilde{z} + \tilde{x}^2) \end{cases}.$$

□

Proposição 2.19 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\mathcal{P}_2 : \begin{cases} (x, y, z) \xrightarrow{f_1} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \xrightarrow{f_2} (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', y', z') \xrightarrow{f_3} (x', 0, y', z') \\ (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \xrightarrow{f_4} (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5) \xrightarrow{f_5} (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5^2) \end{cases}$$

é $\mathcal{B}(\mathcal{P}_2) = \{(u, 0); \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 4v - u^2 = 0\}$. Os germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incidem em $\mathcal{P}_2$ são $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ se $v = 0$ e $4v - u^2 = 0$, respectivamente.

Demonstração: Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{P}_{2u,v} = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + uz_5 + z_5^2 + uz_5 + v) \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação de $\mathcal{P}_2$ é de fácil verificação, basta determinar $\mathcal{B}_{(0,0,0,0)}^{1,3,4,5}$ e $\mathcal{B}_{(0,0,0,0,0)}^{1,2,3,4,5}$

Vejamos quais germes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 incidem em $\mathcal{P}_2$.

Suponhamos $v = 0$ e $u \neq 0$. Então

$$\mathcal{P}_{2u,0} = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + uz_5 + z_5^2 + uz_5) \end{cases}.$$

A equação que define a imagem do quinto ramo de $\mathcal{P}_{2u,0}$ é

$$h(X, Y, Z, W) = -W + X + Y + Z^2 + uZ \in \mathcal{E}_4.$$

Se $\mathcal{V}$ é a imagem de $\tilde{f} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \end{cases}$, que é definida por $XYZW = 0$, então h é $\nu\mathcal{K}$ -

equivalente a $-W + X + Y + Z + \frac{1}{u^2}Z^2$. Segue da Proposição 1.30 que h é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $-W + X + Y + Z$. Portanto, o germe $\mathcal{P}_{2u,0}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\mathcal{P} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5) \end{cases}.$$

Suponhamos $4v - u^2 = 0$. Então

$$\mathcal{P}_{2u,u^2/4} = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5 + \frac{u^2}{4}, x_5 + y_5 + z_5^2 + uz_5) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}_e} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, \frac{u}{2}, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5^2) \end{cases}.$$

Desde que o segundo ramo de $\mathcal{P}_{2u,u^2/4}$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{P}_{2u,u^2/4}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\mathcal{Q} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x', y', 0, z') \\ (\tilde{x}, 0, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5^2) \end{cases}.$$

□

Proposição 2.20 *O conjunto de bifurcação do germe*

$$\mathcal{S} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5) \\ (x_6, y_6, z_6, ax_6 + by_6 + cz_6) \end{cases}.$$

é $\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\} \cup \{(u, \alpha u) \in \mathbb{R}^2\}_{\alpha=0,1,a,b,c}$, onde $a, b, c, a-1, b-1, c-1, a-b, a-c, b-c \neq 0$. O único germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 que incide em $\mathcal{S}$ é o $\mathcal{P}$.

Demonstração:

Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}_{u,v} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5 + u) \\ (x_6, y_6, z_6, ax_6 + by_6 + cz_6 + v) \end{cases}.$$

O conjunto de bifurcação é obtido através do cálculo dos conjuntos $\mathcal{B}_{(0,0,0,0,0)}^{i_1, i_2, \dots, i_5}$, onde $i_j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $i_j \neq i_l$ se $j \neq l$.

Suponhamos $u = 0$ e $v \neq 0$. Então, o sexto ramo de $\mathcal{S}_{0,v}$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$. Portanto, $\mathcal{S}_{0,v}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{P}$.

Se $u \neq 0$ e $v = 0$, então $\mathcal{S}_{u,0}$ é dado por

$$\begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5 + u) \\ (x_6, y_6, z_6, ax_6 + by_6 + cz_6) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5 + u) \\ (\frac{1}{a}x_6, \frac{1}{b}y_6, \frac{1}{c}z_6, x_6 + y_6 + z_6) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, \frac{1}{a}x_5 + \frac{1}{b}y_5 + \frac{1}{c}z_5 + u) \\ (x_6, y_6, z_6, x_6 + y_6 + z_6) \end{cases}.$$

Desde que o quinto ramo de $\mathcal{S}_{u,0}$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{S}_{u,0}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{P}$.

Se $u = v$, então

$$\mathcal{S}_{u,u} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5 + u) \\ (x_6, y_6, z_6, ax_6 + by_6 + cz_6 + u) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, -u) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5) \\ (x_6, y_6, z_6, ax_6 + by_6 + cz_6) \end{cases}$$

$$\sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, -ax - by - cz - u) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, (1-a)x_5 + (1-b)y_5 + (1-c)z_5) \\ (x_6, y_6, z_6, 0) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, -ax - by - cz - u) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5) \\ (x_6, y_6, z_6, 0) \end{cases}.$$

Desde que o primeiro ramo de $\mathcal{S}_{u,u}$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{S}_{u,u}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{P}$.

Se $u = av$, então

$$\mathcal{S}_{u,au} : \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (0, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5 + u) \\ (x_6, y_6, z_6, a(x_6 + u) + by_6 + cz_6) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (u, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5, y_5, z_5, x_5 + y_5 + z_5) \\ (x_6, y_6, z_6, ax_6 + by_6 + cz_6) \end{cases}$$

$$\sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (u, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (x_5 - y_5 - z_5, y_5, z_5, x_5) \\ (x_6, y_6, z_6, ax_6 + by_6 + cz_6) \end{cases} \sim_{\mathcal{A}} \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (u - \tilde{z} + \tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (0, x_5, y_5, z_5) \\ ((1-a)x_6 + (1-b)y_6 + (1-c)z_6, y_6, z_6, ax_6 + by_6 + cz_6) \end{cases}$$

$$\sim_{\mathcal{A}} \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (u - \tilde{z} + \tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (0, x_5, y_5, z_5) \\ (x_6, y_6, z_6, \frac{a}{1-a}x_6 - \frac{a(1-b)}{1-a}y_6 - \frac{a(1-c)}{1-a}z_6 + by_6 + cz_6) \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (u - \tilde{z} + \tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (0, x_5, y_5, z_5) \\ (x_6, y_6, z_6, \frac{a}{1-a}x_6 + \frac{b-a}{1-a}y_6 + \frac{c-a}{1-a}z_6) \end{array} \right.$$

$$\sim_{\mathcal{A}} \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (u - \tilde{z} + \tilde{x} + \tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ (0, x_5, y_5, z_5) \\ (\frac{1-a}{a}x_6, \frac{1-a}{b-a}y_6, \frac{1-a}{c-a}z_6, x_6 + y_6 + z_6) \end{array} \right. \sim_{\mathcal{A}} \left\{ \begin{array}{l} (x, y, z, 0) \\ (\bar{x}, \bar{y}, 0, \bar{z}) \\ (x', 0, y', z') \\ (\frac{a}{1-a}(u - \tilde{z} + \tilde{x} + \tilde{y}), \frac{b-a}{1-a}\tilde{x}, \frac{c-a}{1-a}\tilde{y}, \tilde{z}) \\ (0, x_5, y_5, z_5) \\ (x_6, y_6, z_6, x_6 + y_6 + z_6) \end{array} \right.$$

Desde que o quarto ramo de $\mathcal{S}_{u,au}$ é um hiperplano fora da origem de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{S}_{u,au}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\mathcal{P}$.

Os casos $v = bu$ e $v = cu$ seguem de maneira análoga ao $v = au$.

□

Invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem

Neste capítulo discutiremos o método de Vassiliev para a obtenção de invariantes de isotopia de aplicações estáveis de uma 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$. V. Vassiliev [34] introduziu um método para definir invariantes numéricos de nós que atualmente são chamados de *invariantes do tipo Vassiliev de ordem finita*. Ele obteve tais invariantes realizando um estudo cuidadoso numa certa partição do espaço de aplicações $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^3)$. Desde então este método tem sido aplicado em diferentes espaços de aplicações. Os casos que mais se assemelham ao nosso foram obtidos por Arnold em [3], que introduziu “invariantes básicos” (conhecidos como *invariantes de Arnold*) de imersões de S^1 em $\mathbb{R}^2$ e por Goryunov em [15], que obteve invariantes locais de primeira ordem de aplicações estáveis de uma superfície fechada orientada em $\mathbb{R}^3$.

3.1 Método de Vassiliev

Na descrição do método de Vassiliev consideramos como principal referência a [25] de Toru Ohmoto.

Sejam M uma m -variedade de classe C^∞ fechada (compacta e sem bordo) e N uma n -variedade de classe C^∞ . Consideremos o espaço das aplicações de classe C^∞ de M em N , $C^\infty(M, N)$, munido da topologia C^∞ de Whitney e (m, n) nas boas dimensões segundo Mather (veja [14]).

Uma propriedade P de elementos de $C^\infty(M, N)$ é *genérica* se é satisfeita por um conjunto aberto e denso de $C^\infty(M, N)$.

Uma aplicação $f \in C^\infty(M, N)$ é dita *estável* se existe uma vizinhança aberta U de f em $C^\infty(M, N)$ tal que para qualquer $g \in U$ existem difeomorfismos $\psi : M \rightarrow M$ e $\phi : N \rightarrow N$ tais que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

isto é, $\phi \circ f = g \circ \psi$.

O conjunto das aplicações estáveis é aberto e denso em $C^\infty(M, N)$ (veja [14]). Logo, a propriedade de uma aplicação f ser estável em $C^\infty(M, N)$ é genérica. Seu complementar, ou seja, o conjunto das aplicações não estáveis em $C^\infty(M, N)$ é chamado de *hipersuperfície discriminante* e denotado por Σ , que subdivide $C^\infty(M, N)$ em componentes conexas por caminhos (veja [3]).

Definição 3.1 *Duas aplicações f, g pertencem a mesma componente conexa por caminhos de $C^\infty(M, N) - \Sigma$ se existir uma aplicação $F : M \times I \rightarrow N$ de classe C^∞ , onde I é um intervalo fechado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, tal que*

- F_t é estável para todo $t \in I$, onde $F_t : M \rightarrow N$ é dada por $F_t(x) = F(x, t)$;
- $F_a = f$;
- $F_b = g$.

Chamamos F de uma isotopia estável entre f e g e, neste caso, f e g são ditas estavelmente isotópicas.

A relação de estavelmente isotópicas é uma relação de equivalência entre as aplicações de $C^\infty(M, N)$. A classe de isotopia de uma aplicação estável f será denotada, quando necessário, por $[f]$.

Definição 3.2 *Um invariante de isotopia estável é uma função*

$$I : C^\infty(M, N) - \Sigma \rightarrow R,$$

onde R é um anel comutativo com unidade, tal que se f e g são estavelmente isotópicas, então $I(f) = I(g)$. Em outras palavras, um invariante de isotopia estável é uma função localmente constante em cada componente conexa por caminhos das aplicações estáveis.

O método desenvolvido por Vassiliev em [34] obtém alguns destes invariantes de isotopia. Tal método se baseia na análise de uma partição apropriada do discriminante Σ . Se $n \leq 2m+1$, então a parte regular Σ_{reg} de Σ consiste das aplicações $f : M \rightarrow N$ que tem uma única singularidade de codimensão 1, isto é, existe um subconjunto $S \subset M$ finito tal que o multigerme de f em S , $f : (M, S) \rightarrow (N, f(S))$, tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e $f|_{M-S}$ é estável (veja [25]). Desde que multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 são simples (veja [9]), as $\mathcal{A}$ -órbitas de tais aplicações consistem numa partição localmente finita de Σ_{reg} e são chamadas de *estratos de codimensão 1*.

A $\mathcal{A}$ -órbita de um germe simples de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2 é um *estrato de codimensão 2*. Se um germe é não simples, então ele pertence a uma família de germes não simples cujos parâmetros são os parâmetros modais. Neste caso, um estrato de codimensão 2 é dado pela união das órbitas dos germes da família quando a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de um germe (e portanto de todos, a menos de valores excepcionais) menos o número de parâmetros modais é 2.

A partir deste momento assumiremos $N = \mathbb{R}^n$. Como o espaço $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ é contrátil, se f_0 é uma aplicação em $C^\infty(M, \mathbb{R}^n) - \Sigma$, então qualquer outra aplicação estável f pode ser unida a f_0 por uma homotopia de classe C^∞ $\tau : M \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\tau(x, 0) = f_0(x)$ e $\tau(x, 1) = f(x)$. Para cada $t \in I$, seja $\tau_t : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\tau_t(x) = \tau(x, t)$. Consideremos o caminho contínuo em $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ $\gamma : I \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ dado por $\gamma(t) = \tau_t$.

Definição 3.3 Dizemos que γ é transversal ao discriminante Σ se existir um conjunto finito A de I satisfazendo

- (1) para todo $t \in I - A$ a aplicação τ_t é estável;
- (2) para todo $t \in A$, τ_t pertence a um estrato S de codimensão 1 e γ é transversal a S em τ_t .

Para cada estrato de codimensão 1 devemos associar uma *coorientação* que consiste em estabelecer um critério que distinga quando um caminho transversal ao discriminante Σ cruza-o de maneira positiva ou negativa. Eventualmente tal critério pode não existir e então dizemos que o estrato é não coorientável.

Definição 3.4 Um invariante de isotopia $I : C^\infty(M, \mathbb{R}^n) - \Sigma \rightarrow R$, onde R é um anel que não contém elementos de ordem 2, é chamado invariante do tipo Vassiliev de primeira ordem se I pode ser extendido a $\bar{I} : C^\infty(M, \mathbb{R}^n) \rightarrow R$ satisfazendo a seguinte condição.

Existe uma partição localmente finita $\mathcal{G}$ de Σ_{reg} consistindo de estratos coorientáveis e não coorientáveis tais que

- (i) $\bar{I}$ é constante em cada estrato de $\mathcal{G}$ e constantemente zero em estratos não coorientáveis;
- (ii) $\bar{I}$ é constantemente zero em $\Sigma - \Sigma_{reg}$;
- (iii) para cada estrato $S \in \mathcal{G}$ coorientável e qualquer caminho $\gamma : (-a, a) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$, com $\gamma(0) \in S$, transversal a S e com direção positiva compatível com a coorientação, tem-se

$$\bar{I}(S) = \bar{I}([\gamma(+\epsilon)]) - \bar{I}([\gamma(-\epsilon)]), \quad (\epsilon > 0).$$

O valor $\bar{I}(S) \in R$, que é a variação de I quando cruza o estrato S , é chamado salto de I ao longo de S e o denotaremos por η_S .

Definição 3.5 Um invariante do tipo Vassiliev de primeira ordem é local se cada estrato da partição Σ_{reg} na Definição 3.4 é um estrato de codimensão 1 e a coorientação deste estrato é determinada por uma regra local considerando uma deformação versal de um representante desta $\mathcal{A}$ -órbita.

Estabelecida a partição apropriada para o estudo dos invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem, para cada estrato S de codimensão 1 associamos um *índice de transição*:

para cada caminho γ transversal a Σ definimos um inteiro $\Delta S(\gamma)$ (ou simplesmente ΔS) que é o número de vezes (considerando o sinal) que γ cruza o estrato S , ou seja, se γ cruza S na direção compatível com a coorientação de S contamos $+1$ e -1 caso contrário.

Um invariante local I em $C^\infty(M, \mathbb{R}^p) - \Sigma$ é definido, a menos de constante, pelos saltos ao longo de todos os estratos do discriminante. Para calcularmos o valor de um invariante I numa aplicação estável f , procedemos da seguinte maneira:

- (a) escolhemos o valor de I numa aplicação estável particular f_0 como sendo $I(f_0) = 0$;
- (b) consideramos um caminho γ transversal a Σ unindo f e f_0 ;
- (c) o valor do invariante em f é dado por:

$$I(f) = \sum \eta_{S_i} \Delta S_i(\gamma) + I(f_0),$$

onde η_{S_i} é o salto do invariante I ao longo do estrato S_i .

Para que o valor $I(f)$ acima esteja bem definido, ele deve independer do caminho escolhido. Para isto exigimos uma *condição de compatibilidade*: dado α um caminho fechado transversal a Σ ao redor de cada estrato $\mathcal{D}$ de codimensão 2, a soma $\sum \eta_{S_i} \Delta S_i(\alpha)$ deve ser zero. O caminho α pode ser realizado como um caminho fechado em torno da origem no espaço dos parâmetros de uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal do estrato de codimensão 2. As condições de compatibilidade obtidas considerando todos os estratos de codimensão 2 produzem um sistema linear de equações nas variáveis η_{S_i} chamado de *sistema coerente*.

Figura 3.1

3.2 Invariantes de aplicações estáveis de 3-variedades em $\mathbb{R}^4$

Nesta seção aplicaremos o método de Vassiliev para o caso particular de aplicações estáveis de uma 3-variedade fechada em $\mathbb{R}^4$. Como já obtivemos uma classificação completa dos germes

de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e 2 e os conjuntos de bifurcação dos germes de codimensão 2, os próximos passos a serem seguidos são:

- (i) Coorientar e particionar os estratos de codimensão 1;
- (ii) Obter as condições de compatibilidade (ou sistema coerente) a partir dos conjuntos de bifurcação dos estratos de codimensão 2;
- (iii) Resolver o sistema coerente a fim de obter os geradores do espaço dos invariantes locais de Vassiliev de primeira ordem;
- (iv) Dar uma interpretação geométrica para tais invariantes.

Localmente, a imagem de uma aplicação estável de uma 3-variedade fechada M em $\mathbb{R}^4$ é

1. Um hiperplano;
2. Interseção transversal de 2 hiperplanos (superfície de pontos duplos);
3. Interseção transversal de 3 hiperplanos (curva de pontos triplos);
4. Interseção transversal de 4 hiperplanos (ponto quádruplo);
5. Suspensão do crosscap (curva de pontos de crosscap);
6. Interseção transversal da suspensão do crosscap com um hiperplano (ponto do tipo crosscap/plano).

3.2.1 Coorientação dos estratos de codimensão 1

O Σ_{reg} consiste de 13 estratos: A_1^{++} , A_1^{-+} , A_1^{--} , R_1 , $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}^+$, $\mathcal{C}^-$, $\mathcal{T}_e$, $\mathcal{T}_h$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$.

Com o intuito de determinar critérios que coorientem cada estrato acima faremos algumas análises na topologia local da imagem de uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de um representante de cada $\mathcal{A}$ -órbita. Em outras palavras, se f é um representante de um estrato de codimensão 1 e f_u é uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de f , então analisamos as transições da imagem de f_u , isto é, as mudanças na topologia destas imagens. A fim de visualizar as transições dos estratos de codimensão 1, com exceção de $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{P}$, tomamos seções da imagem de f_u por uma família de hiperplanos parametrizada por t . Nas Figuras 3.2 a 3.5 o desenho superior corresponde às seções 3-dimensionais da imagem como descrito anteriormente, enquanto que o inferior representa a transição da topologia local da curva de pontos de crosscap (Figura 3.2), da superfície de pontos duplos (Figura 3.3), dos pontos do tipo crosscap/plano (Figura 3.4) e da curva de pontos triplos e de pontos quádruplos (Figura 3.5). Devido a complexidade dos desenhos referentes aos estratos R_1 e $\mathcal{T}_c$, não os incluiremos. Veja no Apêndice A os comandos dos programas Superfície [24] e Mathematica [37] usados na obtenção destas figuras.

Figura 3.2: Transição dos estratos $A_1^{\pm\pm}$ e da topologia local da curva de pontos de crosscap.

Figura 3.3: Transição dos estratos $\mathcal{E}$ e $\mathcal{H}$ e da topologia local da superfície de pontos duplos.

Para visualizar os estratos $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{P}$ procedemos de maneira diferente dos demais. Como veremos a seguir, as imagens das aplicações estáveis que aparecem numa deformação $\mathcal{T}_{hu}$ de $\mathcal{T}_h$ são difeomorfas. Para visualizar tal fenômeno tomamos seções 3-dimensionais (dependendo de um

Figura 3.4: Transição dos estratos $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$ e da topologia local dos pontos do tipo crosscap/plano. Figura 3.5: Transição dos estratos $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{Q}$ e da topologia local da curva de pontos triplos e dos pontos quádruplos, respectivamente.

parâmetro t) da imagem de $\mathcal{T}_{hu}$ com $u < 0$ e com relação à $u > 0$ tomamos seções (dependendo de um parâmetro r) ortogonais às seções em t (veja Figura 3.6). Já com respeito ao estrato $\mathcal{P}$ tomamos como seção 3-dimensional a imagem de um dos ramos do 5-germe (por exemplo, $(x, y, z, 0)$). Desta maneira obtemos um desenho com quatro hipersuperfícies em $\mathbb{R}^3$, na qual os pontos duplos e triplos representam, respectivamente, pontos triplos e quádruplos do estrato original. Com estas observações podemos representar a transição do estrato $\mathcal{P}$ como na Figura 3.7, que corresponde à transição do estrato $\mathcal{Q}$ em [15]. Observamos ainda que a 2-esfera que aparece na figura em $\mathbb{R}^3$ representa uma 3-esfera na figura em $\mathbb{R}^4$.

Algebricamente as transições dadas anteriormente são caracterizadas da seguinte maneira.

Figura 3.6: Transição do estrato $\mathcal{T}_h$ e da topologia local da curva de pontos triplos. Figura 3.7: Transição do estrato $\mathcal{P}$ representada em $\mathbb{R}^3$.

- Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $A_1^{\pm\pm}$:

$$A_1^{\pm\pm}_u = (x, y, z^2, z(z^2 \pm x^2 \pm y^2 + u)).$$

As equações que definem a curva de pontos de crosscap de $A_1^{\pm\pm}_u$ na fonte são dadas pelos zeros das funções coordenadas de $G_{(1)}$ (segundo a notação estabelecida no Capítulo 2), ou seja, $2z = 0$ e $3z^2 \pm x^2 \pm y^2 + u = 0$. Logo, a imagem de $A_1^{\pm\pm}_u$ contém uma curva de pontos de crosscap, a saber, $\{(X, Y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4; \pm X^2 \pm Y^2 + u = 0\}$. Portanto, para $u < 0$, $A_1^{++}_u$ contém uma curva fechada de pontos de crosscap. O mesmo ocorre com $A_1^{--}_u$, para $u > 0$.

Já no caso de $A_1^{-+}_u$, com $u \neq 0$, não há mudança na topologia local da curva de pontos duplos. Assim, busquemos informações sobre a característica de Euler da imagem destas aplicações estáveis. Segue do Exemplo 1.8 que A_1^{-+} é uma aumentação negativa de B (notação usada por Goryunov em [15]). Então, pela Proposição 1.10, $D^-(A_1^{-+}) \simeq D^-(B) \simeq S^2$ e $D^+(A_1^{-+}) \simeq S(D^+(B)) \simeq S^1$. Portanto, a característica de Euler da imagem de $A_1^{-+}_u$ para $u < 0$ é igual a 1, enquanto que para $u > 0$ é igual a 0.

- Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{E}$ e $\mathcal{H}$

$$\mathcal{E}_u, \mathcal{H}_u = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, z, x^2 + y^2 \pm z^2 + u) \end{cases}.$$

A imagem de $\mathcal{E}_u, \mathcal{H}_u$ contém uma curva de pontos duplos, a saber, $\{(X, Y, Z, 0) \in \mathbb{R}^4; X^2 + Y^2 \pm Z^2 + u = 0\}$. Logo, a imagem de $\mathcal{E}_u$, para $u < 0$, contém uma superfície de pontos duplos. Já em relação a imagem de $\mathcal{H}_u$, para $u > 0$ temos duas componentes conexas no conjunto dos pontos duplos, enquanto que para $u < 0$ temos apenas uma.

- Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de R_1

$$R_{1u} = (x, y, z^3 + xz, z^4 + uz^2 + yz).$$

As equações que definem os pontos do tipo crosscap/plano na fonte de R_{1u} são os zeros das funções coordenadas de $G_{(1,0)}$, ou seja, $3z^2 + x = 3z + 2\epsilon_2 = 4z^3 + y + 2uz = 6z^2 + u + 4z\epsilon_2 + \epsilon_2^2 = 0$. Resolvendo estas equações obtemos que a imagem de R_{1u} , para $u < 0$, contém um par de pontos do tipo crosscap/plano.

- Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{C}^\pm$

$$\mathcal{C}_u^\pm = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x^2 \pm y + u, y, z) \end{cases}.$$

A interseção da imagem da curva de crosscap do primeiro ramo de $\mathcal{C}_u^\pm$, dada por $(x, 0, 0, 0)$, com a imagem do segundo ramo, determina os pontos do tipo crosscap/plano na fonte: $x^2 + u = 0$. Portanto, a imagem de $\mathcal{C}_u^\pm$, para $u < 0$, contém dois pontos do tipo crosscap/plano, a saber, $(\pm\sqrt{u}, 0, 0, 0)$.

- Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{T}_e$

$$\mathcal{T}_{eu} = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, y, z, u + z + x^2 + y^2) \end{cases}.$$

Claramente a equação que define o conjunto de pontos triplos na fonte de $\mathcal{T}_{eu}$ é dada por $x^2 + y^2 + u = 0$. Logo, a imagem de $\mathcal{T}_{eu}$, para $u < 0$ contém uma curva de pontos triplos, a saber, $\{(X, Y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4; X^2 + Y^2 + u = 0\}$.

- Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{T}_c$

$$\mathcal{T}_{cu} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x, y, z) \\ (x, x + y, x - u, z) \end{cases}.$$

A interseção da imagem do conjunto de pontos duplos do primeiro ramo de $\mathcal{T}_{cu}$, dada por $(x, 0, z^2, 0)$, com a imagem do segundo e do terceiro ramo determina os pontos quádruplos na fonte de $\mathcal{T}_{cu}$: $x = 0$ e $z^2 = -u$. Portanto, a imagem de $\mathcal{T}_{cu}$, para $u < 0$, contém um ponto quádruplo, a saber, $(0, 0, -u, 0)$.

- Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q}_u = \begin{cases} (x, y, z, 0) \\ (x, y, 0, z) \\ (x, 0, y, z) \\ (x, y, z, u + y + z + x^2) \end{cases}.$$

É fácil ver que a imagem de $\mathcal{Q}_u$, para $u < 0$, contém dois pontos quádruplos, a saber, $(\pm\sqrt{-u}, 0, 0, 0)$.

- As imagens das aplicações estáveis que aparecem numa deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{P}$ são localmente difeomorfas. Com efeito, segue das Observações 1.26 e 1.31 que $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{P}$ são concatenações dos germes H e Q de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ (notação usada por Goryunov em [15]). Desde que as imagens das aplicações estáveis que aparecem numa deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de H e Q são difeomorfas (veja [15]), a afirmação segue da Proposição 1.11.

Portanto, fixemos a seguinte coorientação para cada estrato de codimensão 1:

- (1) A_1^{++}, A_1^{--} : a coorientação positiva é na direção onde surge uma curva de pontos de cross-cap;
- (2) A_1^{-+} : a coorientação positiva é na direção onde a característica de Euler da imagem aumenta;
- (3) $\mathcal{E}$: a coorientação positiva é na direção onde surge uma superfície de pontos duplos.
- (4) $\mathcal{H}$: a coorientação positiva é na direção onde o número de componentes conexas do conjunto de pontos duplos aumenta.
- (5) $\mathcal{R}_1, \mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$: a coorientação positiva é na direção onde surgem dois pontos do tipo cross-cap/plano;
- (6) $\mathcal{T}_e$: a coorientação positiva é na direção onde surge uma curva de pontos triplos.
- (7) $\mathcal{T}_c$: a coorientação positiva é na direção onde surge um ponto quádruplo.
- (8) $\mathcal{Q}$: a coorientação positiva é na direção onde surgem dois pontos quádruplos.

Uma vez que as imagens das aplicações estáveis que aparecem numa deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{P}$ são localmente difeomorfas, a priori, $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{P}$ são não coorientáveis.

Com exceção de $\mathcal{A}_1^{++}, \mathcal{A}_1^{--}, \mathcal{H}$ e $\mathcal{C}^-$, a coorientação positiva adotada para cada estrato coincide com o surgimento de uma 3-esfera na imagem da aplicação estável. De fato, se considerarmos B, E, C, T e Q (como em [15]) temos que suas aumentações positivas são $A_B^+ = A_1^{++}, A_E^+ = \mathcal{E}, A_C^+ = \mathcal{C}^+, A_T^+ = \mathcal{T}_e$ e $A_Q^+ = \mathcal{Q}$ (veja Exemplo 1.8 e Observações 1.17, 1.19, 1.26, 1.29). Como $D^-(B) \simeq D^-(E) \simeq D^-(C) \simeq D^-(T) \simeq D^-(Q) \simeq S^2$, segue da Proposição 1.10 que $D^-(A_1^{++}) \simeq D^-(\mathcal{E}) \simeq D^-(\mathcal{C}^+) \simeq D^-(\mathcal{T}_e) \simeq D^-(\mathcal{Q}) \simeq S^3$, onde S^i é a i -esfera. Da

mesma maneira, como $\mathcal{T}_c$ é concatenação de C (veja Exemplo 1.9) segue da Proposição 1.11 que $D^-(\mathcal{T}_c) \simeq S^3$.

Observação 3.6 *Com as observações feitas acima a respeito da topologia local de cada estrato de codimensão 1 podemos concluir a prova sobre as incidências nas Proposições 2.3, 2.4 e 2.11.*

Na Proposição 2.4 já provamos que os germes que incidem em $S^\pm$ quando $4u \mp v^2 = 0$ são $A_1^{\pm\pm}$. Temos que

$$S_{\pm v^2/4, v}^\pm = (x, y, z^3 + z(\pm y^2 + vy \pm v^2/4), xz + yz^2) \sim_{\mathcal{A}_e} (x, y, z^3 \pm zy^2, xz + yz^2 \mp \frac{v}{2}z^2)$$

é um germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 cuja deformação versal é dada por

$$(S_{\pm v^2/4, v}^\pm)_\mu = (x, y, z^3 \pm zy^2 + \mu z, xz + yz^2 \mp \frac{v}{2}z^2).$$

As equações que definem os pontos de crosscap na fonte de $(S_{\pm v^2/4, v}^\pm)_\mu$ são $3z^2 \pm y^2 + \mu = 0$ e $x + 2yz + vz^2 = 0$, ou seja, $y^2 \pm 3z^2 = -\mu$. Logo, a imagem das aplicações estáveis $(S_{-v^2/4, v}^-)_\mu$ contém uma curva de pontos de crosscap e portanto $S_{-v^2/4, v}^-$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a A_1^{-+} (pois é o único entre os estratos $A_1^{\pm\pm}$ com esta característica). No caso $S_{v^2/4, v}^+$, a imagem das aplicações estáveis $(S_{v^2/4, v}^+)_\mu$, com $\mu < 0$, contém uma curva de pontos de crosscap. Com isso sabemos que $S_{v^2/4, v}^+$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a A_1^{++} ou a A_1^{--} . Agora, averiguemos o conjunto de pontos duplos. As equações que definem o conjunto de pontos duplos na fonte de $(S_{\pm v^2/4, v}^\pm)_\mu$ são $\mu + 3z^2 + y^2 + 3z\epsilon_2 + \epsilon_2 = 0$ e $x + 2yz - vz + y\epsilon_2 - v/2\epsilon_2 = 0$, ou seja, $\mu = -(y^2 + 3(z + \epsilon_2/2)^2 + 1/4\epsilon_2)$. Logo, as aplicações estáveis cuja imagem contém pontos duplos são $(S_{v^2/4, v}^+)_\mu$ com $\mu < 0$. Portanto, $S_{v^2/4, v}^+$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a A_1^{++} .

A conclusão da prova da Proposição 2.3 e 2.11 segue de maneira análoga, analisando a curva de pontos triplos e os pontos quádruplos, respectivamente.

3.2.2 Partição dos estratos de codimensão 1

Assumiremos a partir de agora que a 3-variedade M é orientada. Isto nos permite refinar a partição do discriminante. Fixemos uma orientação para a 3-variedade M e para $\mathbb{R}^4$. Os critérios utilizados aqui são análogos ao de Goryunov em [15] para o caso de superfície em $\mathbb{R}^3$.

Dado um multigerme $f : (\mathbb{R}^3, S) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$, para cada ramo $f^{(i)}$ de f e cada ponto imersivo da imagem de $f^{(i)}$ consideremos o vetor normal η à imagem de $f^{(i)}$ neste ponto de maneira que a base em $\mathbb{R}^4$ constituída por η e pela imagem de uma base positiva do espaço tangente à M na pré-imagem deste ponto, seja positiva em $\mathbb{R}^4$. O vetor normal η nos fornece uma *coorientação canônica da imagem* em pontos imersivos. Como observamos acima, para cada estrato $\mathcal{A}_1^{++}$, R_1 $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}^+$, $\mathcal{T}_e$, $\mathcal{T}_c$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{P}$ aparece uma 3-esfera na transição da imagem de uma deformação, a qual é formada por várias hipersuperfícies que chamaremos de *peças* (cada uma com sua coorientação canônica induzida pela orientação de M). Para obtermos uma partição destes estratos distinguimos entre as possibilidades que surgem ao combinarmos diferentes coorientações das peças que constituem a 3-esfera. Para visualizar tais possibilidades interceptamos a 3-esfera

com um hiperplano transversal a todas as peças e assim obtemos uma 2-esfera constituída pelas seções das peças da 3-esfera original. É claro que esta 2-esfera contém a informação da coorientação de cada peça. Portanto é suficiente analisar as possibilidades de coorientação de cada peça nesta seção. De acordo com Goryunov em [15], uma peça é chamada de *peça positiva* se sua coorientação é exterior à 2-esfera, isto é, aponta para o lado de fora da 2-esfera. Caso contrário chamamos de *peça negativa*. Obtemos os seguintes substratos (veja Figura 3.9):

- $(\mathcal{A}_1^{++})^i$, R_1^i , $\mathcal{E}^j$, $\mathcal{T}_e^k$, $\mathcal{Q}^l$, $\mathcal{P}^m$, com $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2$, $k = 0, 1, 2, 3$, $l = 0, 1, 2, 3, 4$, $m = 3, 4, 5$, onde i, j, k, l, m são os números de peças positivas da 3-esfera;
- $(\mathcal{C}^+)^{\alpha, \beta}$, com $\alpha, \beta = +, -$, onde α, β são, respectivamente, os sinais das peças que são imagens do ramo que contém o ponto de crosscap e do ramo imersivo;
- $\mathcal{T}_c^{\alpha, \beta}$, com $\alpha, \beta = +, -$, onde α é o sinal da peça que é imagem do ramo que contém o ponto de crosscap e β corresponde ao produto dos sinais das peças que são imagens dos ramos imersivos (por exemplo, se as peças que são imagens dos ramos imersivos são negativas, então β é +).

Para os estratos $A_1^{-\pm}$, $\mathcal{C}^-$ e $\mathcal{H}$ (os quais não aparece uma 3-esfera em sua transição), consideremos a seção dada pelo hiperplano $t = 0$. Com isso, as transições de tais estratos coincidem com as de K , C e H , respectivamente, no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$ (veja [15]). Então, particionamos estes estratos segundo os critérios adotados por Goryunov, obtendo os seguintes substratos: $(A_1^{-\pm})^i$, com $i = 0, 1$, $(\mathcal{C}^-)^{\alpha, \beta}$, com α, β como no estrato $\mathcal{C}^+$, e $\mathcal{H}^{\pm}$ (veja Figura 3.9).

Temos agora um critério para coorientar cada substrato $\mathcal{P}^3$, $\mathcal{P}^4$ e $\mathcal{P}^5$: a coorientação positiva de $\mathcal{P}^i$, $i = 3, 4, 5$ se dá na direção em que o número de peças positivas da 3-esfera aumenta (veja Figura 3.8).

Figura 3.8: Coorientação dos substratos $\mathcal{P}^3$, $\mathcal{P}^4$ e $\mathcal{P}^5$.

No caso do estrato $\mathcal{T}_h$ conseguimos uma partição semelhante ao H em [15]. No entanto, esta informação juntamente com os conjuntos de bifurcação dos estratos de codimensão 2 nos

Figura 3.9: Imagem da 3-variedade na seção correspondendo a $t = 0$ e em parâmetros $u \neq 0$.

levaram a certas condições de compatibilidade que implicaram no salto de um invariante ao longo deste estrato ser zero. Então, por questão de simplicidade, já assumiremos que $\eta_{\mathcal{T}_h} = 0$.

3.2.3 Condições de compatibilidade e geradores

Nesta seção obtemos as condições de compatibilidades e resolvemos o sistema coerente a fim de determinar o número de geradores do espaço dos invariantes locais do tipo Vassiliev

de primeira ordem de uma 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$. É também nesta seção que obtemos uma interpretação geométrica para dois dos geradores deste espaço.

Primeiramente verificamos quais substratos aparecem nos conjuntos de bifurcação obtidos no Capítulo 2. Em seguida determinamos qual é a direção da coorientação positiva dos substratos nos conjuntos de bifurcação.

Para identificar cada substrato que aparece no conjunto de bifurcação de um estrato S de codimensão 2, tomamos seções da imagem de germes que aparecem numa deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de S , da forma (t, y, z, w) , com t variando numa vizinhança da origem de $\mathbb{R}$. Para esta escolha ser adequada (isto é, transversal à imagem dos ramos de S), é necessário considerar, em alguns casos, formas normais $\mathcal{A}$ -equivalentes às obtidas no Capítulo 1. Veja quais são estes casos no Apêndice B.

A análise dos substratos nas seções 3-dimensionais é feita com o auxílio dos programas Superfície I [24] e Mathematica [37]. Ilustremos este procedimento num exemplo.

(1) Consideremos a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal

$$f_{u,v}^{\pm} = \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (\bar{x}, \bar{x}^2 \pm \bar{y}^2 + v, \bar{y} + u, \bar{z}) \end{cases}.$$

Segue da Proposição 2.8 que o conjunto de bifurcação deste germe é dado por

$$\mathcal{B}(f^{\pm}) = \{(u, 0) \in \mathbb{R}^2; u > 0\} \cup \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; v \pm u^2 = 0\}$$

e as incidências em:

(a) f^+ são:

(a.1) $\mathcal{C}^+$, se $v + u^2 = 0$ e $u < 0$;

(a.2) $\mathcal{C}^-$, se $v + u^2 = 0$ e $u > 0$;

(a.3) $\mathcal{T}_e$, se $v = 0$ e $u > 0$.

(b) f^- são:

(b.1) $\mathcal{C}^-$, se $v - u^2 = 0$ e $u < 0$;

(b.2) $\mathcal{C}^+$, se $v - u^2 = 0$ e $u > 0$;

(b.3) $\mathcal{T}_h$, se $v = 0$ e $u > 0$.

(1.1) Determinando a direção da coorientação positiva no conjunto de bifurcação:

Vimos que a coorientação positiva de todos os substratos de $\mathcal{T}_e$ é na direção onde surge uma curva de pontos triplos. Sendo assim, consideremos a interseção da imagem do conjunto de pontos duplos do primeiro ramo de $f_{u,v}^+$, que é dada por $(x, 0, z^2, 0)$, com a imagem do segundo ramo dada por $(\bar{x}, \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + v, \bar{y} + u, \bar{z})$. A equação que define a curva de pontos triplos na fonte de $f_{u,v}^+$ é dada por $x^2 + (z^2 - u)^2 + v = 0$. Portanto,

as imagens das aplicações estáveis $f_{u,v}^+$ com $u > 0, v < 0$ e $v + u^2 > 0$ contém pontos triplos.

A coorientação positiva de todos os substratos de $\mathcal{C}^\pm$ é na direção onde surgem dois pontos do tipo crosscap/plano. De um cálculo imediato segue que estes pontos na imagem de $f_{u,v}^\pm$ são $(x, 0, 0, 0)$ tais que $x^2 + v \pm u^2 = 0$. Portanto, as imagens das aplicações estáveis $f_{u,v}^\pm$ com u e v satisfazendo $v \pm u^2 < 0$ contém pontos do tipo crosscap/plano.

O estrato $\mathcal{T}_h$ é não coorientável.

As coorientações dos estratos são representadas nos gráficos dos conjuntos de bifurcação por uma pequena linha que indica a direção positiva (veja Figura 3.11).

(1.2) Determinando os substratos envolvidos no conjunto de bifurcação:

O gráfico do conjunto de bifurcação de f^+ é dado como na Figura 3.11.

Fixemos, primeiramente, a seguinte coorientação da imagem de cada ramo de f^+ em pontos imersivos:

Figura 3.10: Coorientação da imagem de cada ramo de f^+ numa seção 3-dimensional.

Os substratos de $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{C}^+$ (respectivamente $\mathcal{C}^-$) são identificados pelo número de peças positivas da 3-esfera que aparece no lado da direção positiva (respectivamente negativa) da coorientação destes estratos. Analisando estes números obtemos os substratos indicados na Figura 3.12.

Considerando as demais possibilidades de coorientações da imagem de cada ramo de f^+ obtemos os substratos indicados na Figura 3.13.

Procedendo de maneira análoga com os demais estratos de codimensão 2 obtemos os conjuntos de bifurcação dados nas Figuras 3.14, 3.15, 3.16 e 3.17. Nos conjuntos de bifurcação da Figura 3.14 não especificamos quais são os substratos de $\mathcal{T}_e, \mathcal{T}_c$ e R_1 . Estas informações não são necessárias devido a direção da coorientação positiva de cada estrato nestes conjuntos de bifurcação e dos resultados que obteremos mais adiante (veja Lemas 3.9, 3.12 e 3.13).

Não vamos entrar em detalhes sobre o conjunto de bifurcação do estrato $\mathcal{S}$, pois as equações de compatibilidades que se obtém a partir dele são triviais. Apenas para constar, o único estrato de codimensão 1 que incide sobre $\mathcal{S}$ é $\mathcal{P}$.

Figura 3.11: Diferentes seções 3-dimensionais das imagens dos germes que aparecem numa deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de f^+ .

Figura 3.12: Seção 3-dimensional da imagem de germes estáveis, a qual contém as informações necessárias para identificar os substratos envolvidos no conjunto de bifurcação de f^+ .

Figura 3.13: Seção 3-dimensional da imagem de germes estáveis que aparecem numa deformação de $\mathcal{A}_e$ -versal de f^+ .

$$u = 0 \text{ e } 4u + v^2 = 0$$

$$u = 0 \text{ e } u - \frac{v^2}{4} = 0$$

$$u = 0 \text{ e } u + \frac{v^2}{4} = 0$$

$$u = 0 \text{ e } 4u^3 + 27v^2 = 0$$

Figura 3.14: Conjuntos de bifurcação de estratos de codimensão 2.

Figura 3.15: Conjuntos de bifurcação de estratos de codimensão 2.

$$v = 0 \text{ e } 4v - u^2 = 0$$

$$m = 0 \text{ e } s = 4 \quad m = 1 \text{ e } s = 3 \quad n = j = 4 \quad n = j = 3$$

$$v = 0 \text{ com } u > 0 \text{ e } v + u^2 = 0$$

$$v = 0 \text{ com } u > 0 \text{ e } v - u^2 = 0$$

$$v = 0 \text{ e } u + v^2 = 0$$

Figura 3.16: Conjuntos de bifurcação de estratos de codimensão 2.

$v = 0$ com $u > 0$ e $v - u^2 = 0$

$v = 0$ e $u - v^2 = 0$

$u = 0$ com $v > 0$ e $u + v^2 = 0$

Figura 3.17: Conjuntos de bifurcação de estratos de codimensão 2.

Vejamos agora as condições de compatibilidades.

A variação de qualquer invariante local I de primeira ordem é dada por:

$$\begin{aligned}
\Delta I = & \eta_{(A_1^{++})^0} \Delta(A_1^{++})^0 + \eta_{(A_1^{++})^1} \Delta(A_1^{++})^1 + \eta_{(A_1^{+-})^0} \Delta(A_1^{+-})^0 + \eta_{(A_1^{+-})^1} \Delta(A_1^{+-})^1 + \\
& \eta_{(A_1^{--})^0} \Delta(A_1^{--})^0 + \eta_{(A_1^{--})^1} \Delta(A_1^{--})^1 + \eta_{R_1^0} \Delta R_1^0 + \eta_{R_1^1} \Delta R_1^1 + \eta_{\mathcal{E}^0} \Delta \mathcal{E}^0 + \\
& \eta_{\mathcal{E}^1} \Delta \mathcal{E}^1 + \eta_{\mathcal{E}^2} \Delta \mathcal{E}^2 + \eta_{\mathcal{H}^+} \Delta \mathcal{H}^+ + \eta_{\mathcal{H}^-} \Delta \mathcal{H}^- + \eta_{\mathcal{T}_e^0} \Delta \mathcal{T}_e^0 + \eta_{\mathcal{T}_e^1} \Delta \mathcal{T}_e^1 + \eta_{\mathcal{T}_e^2} \Delta \mathcal{T}_e^2 + \\
& \eta_{\mathcal{T}_e^3} \Delta \mathcal{T}_e^3 + \eta_{\mathcal{T}_h} \Delta \mathcal{T}_h + \eta_{\mathcal{T}_c^{++}} \Delta \mathcal{T}_c^{++} + \eta_{\mathcal{T}_c^{+-}} \Delta \mathcal{T}_c^{+-} + \eta_{\mathcal{T}_c^{-+}} \Delta \mathcal{T}_c^{-+} + \eta_{\mathcal{T}_c^{--}} \Delta \mathcal{T}_c^{--} + \\
& \eta_{\mathcal{Q}^0} \Delta \mathcal{Q}^0 + \eta_{\mathcal{Q}^1} \Delta \mathcal{Q}^1 + \eta_{\mathcal{Q}^2} \Delta \mathcal{Q}^2 + \eta_{\mathcal{Q}^3} \Delta \mathcal{Q}^3 + \eta_{\mathcal{Q}^4} \Delta \mathcal{Q}^4 + \eta_{\mathcal{P}^3} \Delta \mathcal{P}^3 + \eta_{\mathcal{P}^4} \Delta \mathcal{P}^4 + \\
& \eta_{\mathcal{P}^5} \Delta \mathcal{P}^5,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde η_S é o salto do invariante I ao longo do estrato S , para cada estrato S .

As condições de compatibilidade ($\Delta I = 0$ ao longo de qualquer caminho fechado ao redor de cada estrato de codimensão 2) e a definição de estrato não coorientável produzem um sistema linear de (mais de) 59 equações nas variáveis η_S .

- (1) $\eta_{(A_1^{++})^0} - \eta_{(A_1^{-+})^0} = 0;$
- (2) $\eta_{(A_1^{++})^1} - \eta_{(A_1^{-+})^1} = 0;$
- (3) $\eta_{(A_1^{--})^1} + \eta_{(A_1^{-+})^0} = 0;$
- (4) $\eta_{(A_1^{--})^0} + \eta_{(A_1^{-+})^1} = 0;$
- (5) $\eta_{(A_1^{++})^1} - \eta_{(A_1^{--})^0} - \eta_{\mathcal{E}^2} = 0;$
- (6) $\eta_{(A_1^{++})^0} - \eta_{(A_1^{--})^1} - \eta_{\mathcal{E}^0} = 0;$
- (7) $\eta_{(A_1^{-+})^1} + \eta_{(A_1^{-+})^1} - \eta_{\mathcal{H}^-} = 0;$
- (8) $\eta_{(A_1^{-+})^0} + \eta_{(A_1^{-+})^0} - \eta_{\mathcal{H}^-} = 0;$
- (9) $\eta_{(A_1^{--})^1} + \eta_{\mathcal{H}^-} - \eta_{(A_1^{++})^0} = 0;$
- (10) $\eta_{(A_1^{--})^0} + \eta_{\mathcal{H}^-} - \eta_{(A_1^{++})^1} = 0;$
- (11) $\eta_{(\mathcal{C}^-)^{++}} - \eta_{R_1^1} + \eta_{(\mathcal{C}^-)^{--}} - \eta_{R_1^0} = 0;$
- (12) $\eta_{(A_1^{++})^1} + \eta_{R_1^0} - \eta_{R_1^1} - \eta_{(A_1^{++})^0} = 0;$
- (13) $\eta_{R_1^1} + \eta_{(A_1^{-+})^0} - \eta_{(A_1^{-+})^1} - \eta_{R_1^0} = 0;$
- (14) $\eta_{\mathcal{E}^0} - \eta_{\mathcal{H}^-} = 0;$
- (15) $\eta_{\mathcal{E}^1} - \eta_{\mathcal{H}^+} = 0;$

- (16) $\eta_{\mathcal{E}^2} - \eta_{\mathcal{H}^-} = 0;$
- (17) $\eta_{\mathcal{T}_e^0} + \eta_{(\mathcal{C}^-)++} - \eta_{(\mathcal{C}^+)--} = 0;$
- (18) $\eta_{\mathcal{T}_e^1} + \eta_{(\mathcal{C}^-)+-} - \eta_{(\mathcal{C}^+)-+} = 0;$
- (19) $\eta_{\mathcal{T}_e^2} + \eta_{(\mathcal{C}^-)-+} - \eta_{(\mathcal{C}^+)++} = 0;$
- (20) $\eta_{\mathcal{T}_e^3} + \eta_{(\mathcal{C}^-)--} - \eta_{(\mathcal{C}^+)++} = 0;$
- (21) $\eta_{(\mathcal{C}^-)++} - \eta_{(\mathcal{C}^+)--} + \eta_{\mathcal{T}_h} = 0;$
- (22) $\eta_{(\mathcal{C}^-)+-} - \eta_{(\mathcal{C}^+)-+} + \eta_{\mathcal{T}_h} = 0;$
- (23) $\eta_{(\mathcal{C}^-)-+} - \eta_{(\mathcal{C}^+)++} + \eta_{\mathcal{T}_h} = 0;$
- (24) $\eta_{(\mathcal{C}^-)--} - \eta_{(\mathcal{C}^+)++} + \eta_{\mathcal{T}_h} = 0;$
- (25) $\eta_{\mathcal{H}^-} - \eta_{\mathcal{H}^+} + \eta_{(\mathcal{C}^-)-+} - \eta_{(\mathcal{C}^-)++} = 0;$
- (26) $\eta_{\mathcal{H}^+} - \eta_{\mathcal{H}^-} + \eta_{(\mathcal{C}^-)--} - \eta_{(\mathcal{C}^-)+-} = 0;$
- (27) $\eta_{\mathcal{H}^+} - \eta_{(\mathcal{C}^+)++} + \eta_{(\mathcal{C}^+)--} - \eta_{\mathcal{H}^-} = 0;$
- (28) $\eta_{\mathcal{H}^-} - \eta_{(\mathcal{C}^+)++} + \eta_{(\mathcal{C}^+)-+} - \eta_{\mathcal{H}^+} = 0;$
- (29) $\eta_{(\mathcal{C}^-)++} + \eta_{\mathcal{H}^+} - \eta_{\mathcal{H}^-} - \eta_{(\mathcal{C}^-)-+} = 0;$
- (30) $\eta_{(\mathcal{C}^-)+-} + \eta_{\mathcal{H}^-} - \eta_{\mathcal{H}^+} - \eta_{(\mathcal{C}^-)--} = 0;$
- (31) $\eta_{(\mathcal{C}^+)++} - \eta_{(\mathcal{C}^+)-+} - \eta_{\mathcal{E}^2} + \eta_{\mathcal{E}^1} = 0;$
- (32) $\eta_{(\mathcal{C}^+)++} - \eta_{(\mathcal{C}^+)--} - \eta_{\mathcal{E}^1} + \eta_{\mathcal{E}^0} = 0;$
- (33) $\eta_{(\mathcal{C}^+)++} - \eta_{(\mathcal{C}^+)++} - \eta_{(A_1^{++})^1} + \eta_{(A_1^{++})^1} = 0;$
- (34) $\eta_{(\mathcal{C}^+)-+} - \eta_{(\mathcal{C}^+)--} - \eta_{(A_1^{++})^0} + \eta_{(A_1^{++})^0} = 0;$
- (35) $\eta_{(\mathcal{C}^-)+-} - \eta_{(\mathcal{C}^-)++} + \eta_{(A_1^{--})^1} - \eta_{(A_1^{--})^1} = 0;$
- (36) $\eta_{(\mathcal{C}^-)-+} - \eta_{(\mathcal{C}^-)--} + \eta_{(A_1^{--})^0} - \eta_{(A_1^{--})^0} = 0;$
- (37) $\eta_{\mathcal{T}_e^0} + \eta_{\mathcal{T}_h} = 0;$
- (38) $\eta_{\mathcal{T}_e^1} + \eta_{\mathcal{T}_h} = 0;$
- (39) $\eta_{\mathcal{T}_e^2} + \eta_{\mathcal{T}_h} = 0;$
- (40) $\eta_{\mathcal{T}_e^3} + \eta_{\mathcal{T}_h} = 0;$
- (41) $\eta_{\mathcal{E}^0} + \eta_{\mathcal{T}_e^0} - \eta_{\mathcal{T}_e^1} - \eta_{\mathcal{E}^0} = 0;$
- (42) $\eta_{\mathcal{E}^1} + \eta_{\mathcal{T}_e^1} - \eta_{\mathcal{T}_e^2} - \eta_{\mathcal{E}^1} = 0;$
- (43) $\eta_{\mathcal{E}^2} + \eta_{\mathcal{T}_e^2} - \eta_{\mathcal{T}_e^3} - \eta_{\mathcal{E}^2} = 0;$

- (44) $\eta_{\mathcal{I}_c^{++}} - \eta_{\mathcal{Q}^0} + \eta_{\mathcal{I}_c^{-+}} = 0;$
- (45) $\eta_{\mathcal{I}_c^{-+}} - \eta_{\mathcal{Q}^1} + \eta_{\mathcal{I}_c^{++}} = 0;$
- (46) $\eta_{\mathcal{I}_c^{--}} - \eta_{\mathcal{Q}^2} + \eta_{\mathcal{I}_c^{+-}} = 0;$
- (47) $\eta_{\mathcal{I}_c^{-+}} - \eta_{\mathcal{Q}^3} + \eta_{\mathcal{I}_c^{++}} = 0;$
- (48) $\eta_{\mathcal{I}_c^{+-}} - \eta_{\mathcal{I}_c^{--}} + \eta_{\mathcal{I}_h} + \eta_{\mathcal{I}_h} = 0;$
- (49) $\eta_{\mathcal{I}_c^{++}} - \eta_{\mathcal{I}_c^{-+}} + \eta_{\mathcal{I}_h} + \eta_{\mathcal{I}_h} = 0;$
- (50) $\eta_{\mathcal{I}_e} + \eta_{\mathcal{I}_c^{--}} - \eta_{\mathcal{I}_c^{++}} - \eta_{\mathcal{I}_e} = 0;$
- (51) $\eta_{\mathcal{I}_e} + \eta_{\mathcal{I}_c^{+-}} - \eta_{\mathcal{I}_c^{-+}} - \eta_{\mathcal{I}_e} = 0;$
- (52) $\eta_{\mathcal{I}_e^0} + \eta_{\mathcal{Q}^0} - \eta_{\mathcal{Q}^1} - \eta_{\mathcal{I}_e^0} = 0;$
- (53) $\eta_{\mathcal{I}_e^1} + \eta_{\mathcal{Q}^1} - \eta_{\mathcal{Q}^2} - \eta_{\mathcal{I}_e^1} = 0;$
- (54) $\eta_{\mathcal{I}_e^2} + \eta_{\mathcal{Q}^2} - \eta_{\mathcal{Q}^3} - \eta_{\mathcal{I}_e^2} = 0;$
- (55) $\eta_{\mathcal{I}_e^3} + \eta_{\mathcal{Q}^3} - \eta_{\mathcal{Q}^4} - \eta_{\mathcal{I}_e^3} = 0;$
- (56) $\eta_{\mathcal{Q}^0} - \eta_{\mathcal{P}^4} + \eta_{\mathcal{P}^5} - \eta_{\mathcal{Q}^0} = 0;$
- (57) $\eta_{\mathcal{Q}^1} - \eta_{\mathcal{P}^3} + \eta_{\mathcal{P}^4} - \eta_{\mathcal{Q}^1} = 0;$
- (58) $\eta_{\mathcal{Q}^2} + \eta_{\mathcal{P}^3} + \eta_{\mathcal{P}^3} - \eta_{\mathcal{Q}^2} = 0;$
- (59) $\eta_{\mathcal{I}_h} = 0.$

Vejamos as relações entre os diferentes η_S obtidas destas equações.

Lema 3.7 *Temos $\eta_{\mathcal{E}^0} = \eta_{\mathcal{E}^2} = \eta_{\mathcal{H}^-}$ e $\eta_{\mathcal{E}^1} = \eta_{\mathcal{H}^+}$.*

Demonstração: Segue imediatamente das equações (14), (15) e (16).

□

Lema 3.8 $2\eta_{(A_1^{++})^0} = 2\eta_{(A_1^{++})^1} = 2\eta_{(A_1^{-+})^0} = 2\eta_{(A_1^{-+})^1} = -2\eta_{(A_1^{--})^0} = -2\eta_{(A_1^{--})^1} = \eta_{\mathcal{H}^-}.$

Demonstração: Segue das equações (1) e (3) que $\eta_{(A_1^{-+})^0} = \eta_{(A_1^{++})^0} = -\eta_{(A_1^{--})^1}$ e de (2) e (4) que $\eta_{(A_1^{-+})^1} = \eta_{(A_1^{++})^1} = -\eta_{(A_1^{--})^0}$. Da equação (7) e (8) temos que $2\eta_{(A_1^{-+})^1} = \eta_{\mathcal{H}^-} = 2\eta_{(A_1^{-+})^0}$ e o resultado segue.

□

Lema 3.9 Temos $\eta_{T^0} = \eta_{T^1} = \eta_{T^2} = \eta_{T^3} = \eta_{T_h} = 0$.

Demonstração: Segue das equações (37) a (40) e (60).

□

Lema 3.10 $\eta_{(C^-) --} = \eta_{(C^-) -+} = \eta_{(C^+) ++} = \eta_{(C^+) +-}$ e $\eta_{(C^-) ++} = \eta_{(C^-) +-} = \eta_{(C^+) --} = \eta_{(C^+) -+}$.

Demonstração: Do Lema 3.9 e das equações (17) a (20) temos, respectivamente, que

$$\eta_{(C^-) ++} = \eta_{(C^+) --}, \quad \eta_{(C^-) +-} = \eta_{(C^+) -+}, \quad \eta_{(C^-) -+} = \eta_{(C^+) +-} \quad \text{e} \quad \eta_{(C^-) --} = \eta_{(C^+) ++}.$$

Segue das equações (33) e (34) que $\eta_{(C^+) ++} = \eta_{(C^+) +-}$, $\eta_{(C^+) -+} = \eta_{(C^+) --}$, respectivamente, o que nos dá as igualdades desejadas.

□

Lema 3.11 Temos $\eta_{(C^-) ++} = \eta_{(C^-) --} + \eta_{\mathcal{H}^-} - \eta_{\mathcal{H}^+}$.

Demonstração: Segue da equação (29) e do Lema 3.10.

□

Lema 3.12 Temos $2\eta_{R_1^0} = 2\eta_{R_1^1} = 2\eta_{(C^-) --} + \eta_{\mathcal{H}^-} - \eta_{\mathcal{H}^+}$.

Demonstração: Da equação (13) e do Lema 3.8 temos que $\eta_{R_1^0} = \eta_{R_1^1}$. Logo, da equação (11), $2\eta_{R_1^1} = \eta_{(C^-) --} + \eta_{(C^-) ++}$. O resultado segue do Lema 3.11.

□

Lema 3.13 Temos $\eta_{Q^0} = \eta_{Q^1} = \eta_{Q^2} = \eta_{Q^3} = \eta_{Q^4} = 2\eta_{T_c^{++}} = 2\eta_{T_c^{+-}} = 2\eta_{T_c^{-+}} = 2\eta_{T_c^{--}}$.

Demonstração: Das equações (52) a (55) temos que $\eta_{Q^i} = \eta_{Q^j}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Das equações (48) a (51) e do Lema 3.9 temos que $\eta_{T_c^{++}} = \eta_{T_c^{-+}} = \eta_{T_c^{+-}} = \eta_{T_c^{--}}$. O resultado segue de (44) e das igualdades anteriores.

□

Lema 3.14 Temos $\eta_{P_3} = \eta_{P_4} = \eta_{P_5} = 0$.

Demonstração: Segue diretamente das equações (57) a (59).

□

Substituindo todas as relações obtidas nos lemas anteriores na equação (3.1) obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.15 *Qualquer função I com valores inteiros satisfazendo $\Delta I = 0$ em todo caminho fechado contrátil transversal em $C^\infty(M, \mathbb{R}^4)$ é definido, a menos de constante, por uma combinação linear dos seguintes geradores:*

1. $\Delta I_1 = 2\Delta\mathcal{E}^0 + 2\Delta\mathcal{E}^2 + 2\Delta\mathcal{H}^- + \Delta A_1^{++} + \Delta A_1^{-+} - \Delta A_1^{--} + \Delta R_1$
 $+ 2\Delta(\mathcal{C}^+)^{-+} + 2\Delta(\mathcal{C}^+)^{--} + 2\Delta(\mathcal{C}^-)^{++} + 2\Delta(\mathcal{C}^-)^{+-};$
2. $\Delta I_2 = 2\Delta\mathcal{E}^1 + 2\Delta\mathcal{H}^+ - \Delta R_1 - 2\Delta(\mathcal{C}^+)^{-+} - 2\Delta(\mathcal{C}^+)^{--} - 2\Delta(\mathcal{C}^-)^{++} - 2\Delta(\mathcal{C}^-)^{+-};$
3. $\Delta I_3 = \Delta R_1 + \Delta\mathcal{C}^+ + \Delta\mathcal{C}^-;$
4. $\Delta I_4 = \Delta\mathcal{T}_c + 2\Delta\mathcal{Q},$

onde ΔA_1^{++} , ΔA_1^{-+} , ΔA_1^{--} , ΔR_1 , $\Delta\mathcal{C}^+$, $\Delta\mathcal{C}^-$, $\Delta\mathcal{T}_c$ e $\Delta\mathcal{Q}$ representam a soma dos seus correspondentes subestratos (por exemplo, $\Delta R_1 = \Delta R_1^0 + \Delta R_1^1$).

A interpretação geométrica para ΔI_3 e ΔI_4 é a seguinte.

Teorema 3.16 *O número de pares de pontos do tipo crosscap/plano $I_{C/P}$ e o número de pontos quádruplos I_Q , da imagem de uma aplicação estável de uma 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$ são invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem, cuja variação em termos dos geradores é*

1. $\Delta I_{C/P} = \Delta I_3 = \Delta R_1 + \Delta\mathcal{C}^+ + \Delta\mathcal{C}^-;$
2. $\Delta I_Q = \Delta I_4 = \Delta\mathcal{T}_c + 2\Delta\mathcal{Q}.$

Demonstração: Basta observar que a variação do número de pares de pontos do tipo crosscap/plano e do número de pontos quádruplos na transição da imagem de cada estrato de codimensão 1, coincide com o salto de $I_{C/P}$ e I_Q ao longo de cada um deles.

□

3.2.4 Invariante não local de aplicação estável

Nesta seção veremos que o número de componentes conexas da imagem da curva de pontos triplos é um invariante topológico de aplicações estáveis de uma 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$. Tal invariante não é do tipo local, pois seu salto ao longo do estrato $\mathcal{T}_h$ provém de informações globais. Porém, podemos estratificar $\mathcal{T}_h$ de maneira a obter este invariante como um do tipo Vassiliev de primeira ordem.

Procedemos de maneira análoga a K. Houston em [17] onde obtém como invariante não local do tipo Vassiliev de aplicações estáveis de superfícies fechadas orientadas em $\mathbb{R}^3$, o número de componentes conexas da curva de pontos duplos. Considerando que as curvas de pontos triplos podem formar laços (curvas fechadas) ou terminarem em pontos quádruplos podemos particionar $\mathcal{T}_h$ em 7 substratos: na Figura 3.18 as linhas contínuas representam o comportamento local das curvas de pontos triplos e as linhas descontínuas descrevem o possível comportamento global.

Figura 3.18: Partição de $\mathcal{T}_h$ considerando o comportamento global das curvas de pontos triplos.

No entanto, somente 4 são coorientáveis, a saber, $\mathcal{T}_h^a$, $\mathcal{T}_h^b$, $\mathcal{T}_h^d$ e $\mathcal{T}_h^f$: a coorientação positiva é na direção onde o número de componentes conexas da curva de pontos triplos aumenta. Observemos ainda que a transição de $\mathcal{T}_h^a$ (respectivamente $\mathcal{T}_h^d$) é exatamente o oposto de $\mathcal{T}_h^b$ (respectivamente $\mathcal{T}_h^f$).

As novas equações do sistema coerente provém de caminhos fechados ao redor dos estratos $\mathcal{T}^d$ e $\mathcal{T}_2^+$ de codimensão 2 e são:

$$(1) \quad \eta_{\mathcal{T}_e^i} + \eta_{\mathcal{T}_h^b} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3;$$

$$(2) \quad \eta_{\mathcal{T}_e^i} + \eta_{\mathcal{T}_h^f} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3;$$

$$(3) \quad \eta_{\mathcal{T}_h^a} + \eta_{\mathcal{T}_h^b} + \eta_{\mathcal{H}^k} - \eta_{\mathcal{H}^k} = 0, \quad k = +, -;$$

$$(4) \quad \eta_{\mathcal{T}_h^d} + \eta_{\mathcal{T}_h^f} + \eta_{\mathcal{H}^k} - \eta_{\mathcal{H}^k} = 0, \quad k = +, -.$$

Destas relações, juntamente com

$$(5) \quad \eta_{\mathcal{T}_e^0} = \eta_{\mathcal{T}_e^1} = \eta_{\mathcal{T}_e^2} = \eta_{\mathcal{T}_e^3},$$

obtemos o seguinte gerador

$$\Delta I_t = \Delta \mathcal{T}_e + \Delta \mathcal{T}_h^b + \Delta \mathcal{T}_h^f - \Delta \mathcal{T}_h^a - \Delta \mathcal{T}_h^d,$$

que é fácil ver que coincide com a variação no número de componentes conexas da curva de pontos triplos.

3.3 Invariantes de imersões estáveis de 3-variedades em $\mathbb{R}^4$

Neste seção consideramos o caso particular de imersões de uma 3-variedade fechada e orientada em $\mathbb{R}^4$, $\mathfrak{Imm}(M, \mathbb{R}^4)$.

Localmente, a imagem de uma imersão estável de uma 3-variedade M em $\mathbb{R}^4$ é a interseção transversal de 2, 3 ou 4 hiperplanos. São 18 os substratos de codimensão 1: $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1, \mathcal{E}^2, \mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-, \mathcal{T}_e^0, \mathcal{T}_e^1, \mathcal{T}_e^2, \mathcal{T}_e^3, \mathcal{T}_h, \mathcal{Q}^0, \mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^2, \mathcal{Q}^3, \mathcal{Q}^4, \mathcal{P}^3, \mathcal{P}^4$ e $\mathcal{P}^5$.

A variação ΔI de um invariante I é dado por

$$\begin{aligned} \Delta I = & \eta_{\mathcal{E}^0} \Delta \mathcal{E}^0 + \eta_{\mathcal{E}^1} \Delta \mathcal{E}^1 + \eta_{\mathcal{E}^2} \Delta \mathcal{E}^2 + \eta_{\mathcal{H}^+} \Delta \mathcal{H}^+ + \eta_{\mathcal{H}^-} \Delta \mathcal{H}^- + \eta_{\mathcal{T}_e^0} \Delta \mathcal{T}_e^0 \\ & + \eta_{\mathcal{T}_e^1} \Delta \mathcal{T}_e^1 + \eta_{\mathcal{T}_e^2} \Delta \mathcal{T}_e^2 + \eta_{\mathcal{T}_e^3} \Delta \mathcal{T}_e^3 + \eta_{\mathcal{T}_h} \Delta \mathcal{T}_h + \eta_{\mathcal{Q}^0} \Delta \mathcal{Q}^0 + \eta_{\mathcal{Q}^1} \Delta \mathcal{Q}^1 \\ & + \eta_{\mathcal{Q}^2} \Delta \mathcal{Q}^2 + \eta_{\mathcal{Q}^3} \Delta \mathcal{Q}^3 + \eta_{\mathcal{Q}^4} \Delta \mathcal{Q}^4 + \eta_{\mathcal{P}^3} \Delta \mathcal{P}^3 + \eta_{\mathcal{P}^4} \Delta \mathcal{P}^4 + \eta_{\mathcal{P}^5} \Delta \mathcal{P}^5. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Segue dos Lemas 3.7, 3.9, 3.13 e 3.14 as seguintes relações entre os diferentes η_{S_i} :

1. $\eta_{\mathcal{E}^0} = \eta_{\mathcal{E}^2} = \eta_{\mathcal{H}^-}$;
2. $\eta_{\mathcal{E}^1} = \eta_{\mathcal{H}^+}$;
3. $\eta_{\mathcal{T}_e^0} = \eta_{\mathcal{T}_e^1} = \eta_{\mathcal{T}_e^2} = \eta_{\mathcal{T}_e^3} = \eta_{\mathcal{T}_h}$;
4. $\eta_{\mathcal{Q}^0} = \eta_{\mathcal{Q}^1} = \eta_{\mathcal{Q}^2} = \eta_{\mathcal{Q}^3} = \eta_{\mathcal{Q}^4}$;
5. $\eta_{\mathcal{P}^3} = \eta_{\mathcal{P}^4} = \eta_{\mathcal{P}^5} = 0$;
6. $\eta_{\mathcal{T}_h} = 0$.

Substituindo estas relações na equação (3.2) obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.17 *Qualquer função I com valores inteiros satisfazendo $\Delta I = 0$ em todo caminho fechado contrátil transversal em $\mathfrak{Imm}(M, \mathbb{R}^4)$ é definido, a menos de constante, por uma combinação linear dos seguintes geradores:*

1. $\Delta I_1 = \Delta \mathcal{Q}$;
2. $\Delta I_2 = \Delta \mathcal{E}^0 + \Delta \mathcal{E}^2 + \Delta \mathcal{H}^-$;
3. $\Delta I_3 = \Delta \mathcal{E}^1 + \Delta \mathcal{H}^+$.

Observemos que ΔI_1 é a variação no número de pares de pontos quádruplos da imagem de uma imersão. Além disso, ΔI_2 e ΔI_3 coincidem com os invariantes ℓ^+ e ℓ^+ descritos por Goryunov em [15]. Segue o seguinte resultado.

Corolário 3.18 *Um conjunto completo de geradores para o espaço dos invariantes locais inteiros de primeira ordem de imersões estáveis de uma 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$ é o seguinte: $I_{\mathcal{Q}}$ (número de pares de pontos quádruplos), I_{ℓ^+} e I_{ℓ^-} .*

O próximo resultado nos dá como obter a característica de Euler da imagem de uma imersão estável em termos dos invariantes locais do tipo Vassiliev de primeira ordem.

Teorema 3.19 *A característica de Euler da imagem de uma imersão estável de uma 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$ é um invariante local do tipo Vassiliev de primeira ordem, cuja variação em termos dos geradores é*

$$\Delta I_{\chi} = -2(\Delta I_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3) = -2\Delta \mathcal{Q} - 2\Delta \mathcal{E} - 2\Delta \mathcal{H}.$$

Demonstração: Devemos verificar que a variação da característica de Euler na transição de cada estrato de codimensão 1 coincide com o salto de I_{χ} ao longo de cada um deles. Observemos que as únicas transições nas quais podem ocorrer variação na característica de Euler são as de $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{Q}$, pois as imagens dos germes estáveis numa deformação de $\mathcal{T}_h$ e $\mathcal{P}$ são difeomorfas. Já vimos que $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{T}_e$ e $\mathcal{Q}$ são aumentações dos germes E , H , T ou Q (como em [15]), respectivamente.

Como $D^-(E) \simeq D^-(T) \simeq D^-(Q) \simeq D^+(Q) \simeq S^2$, $D^-(H) \simeq D^+(H) \simeq D^+(T) \simeq S^1$ e $D^+(E) \simeq \{p_1\} \cup \{p_2\}$, onde S^i é a i -esfera topológica e p_i é um ponto, segue da Proposição 1.10 que

- $\Delta \mathcal{X}(\mathcal{E}) = \mathcal{X}(D^-(\mathcal{E})) - \mathcal{X}(D^+(\mathcal{E})) = \mathcal{X}(S(D^-(E))) - \mathcal{X}(D^+(E)) = \mathcal{X}(S^3) - \mathcal{X}(\{p_1\} \cup \{p_2\}) = -2$
- $\Delta \mathcal{X}(\mathcal{H}) = \mathcal{X}(D^+(H)) - \mathcal{X}(S(D^-(H))) = \mathcal{X}(S^1) - \mathcal{X}(S^2) = -2$
- $\Delta \mathcal{X}(\mathcal{T}_e) = \mathcal{X}(S(D^-(T))) - \mathcal{X}(D^+(T)) = \mathcal{X}(S^3) - \mathcal{X}(S^1) = 0$

$$\bullet \Delta\mathcal{X}(\mathcal{Q}) = \mathcal{X}(S(D^-(Q))) - \mathcal{X}(D^+(Q)) = \mathcal{X}(S^3) - \mathcal{X}(S^2) = -2.$$

Portanto, todas estas variações da característica de Euler da imagem coincidem com as de I_χ .

□

Como invariante não local de imersões estáveis temos o seguinte.

Proposição 3.20 *O número de componentes conexas da curva de pontos triplos na imagem de imersões estáveis de uma 3-variedade fechada orientada em $\mathbb{R}^4$ é um invariante não local do tipo Vassiliev de primeira ordem, cuja variação é dada por*

$$\Delta I_t = \Delta\mathcal{T}_e + \Delta\mathcal{T}_h^b + \Delta\mathcal{T}_h^f - \Delta\mathcal{T}_h^a - \Delta\mathcal{T}_h^d.$$

Demonstração: A prova segue diretamente da Seção 2.2.4, onde provamos que I_t é também um invariante não local para o caso geral de aplicações de 3-variedades em $\mathbb{R}^4$.

□

Funções na suspensão do crosscap

Neste capítulo aplicamos a $\mathcal{VK}$ -classificação de germes de funções obtida no Capítulo 1 para a obtenção de resultados sobre a geometria genérica da suspensão do crosscap. Lembramos que por suspensão do crosscap padrão nos referimos à imagem da aplicação $f(x, y, z) = (x, y, z^2, yz)$ e chamamos de suspensão do crosscap à imagem de todo germe na $\mathcal{A}$ -órbita de f .

Deixamos claro que este é apenas o início de um estudo que almejamos realizar sobre a geometria de uma hipersuperfície M de $\mathbb{R}^{n+1}$ quando esta não pode ser imergida em $\mathbb{R}^{n+1}$, isto é, com singularidades.

Um ponto de vista interessante quando se deseja obter informações geométricas sobre uma hipersuperfície com singularidades M em $\mathbb{R}^{n+1}$, é o estudo de seu contato com hiperplanos. As caracterizações geométricas obtidas em termos destes contatos são conhecidas como *propriedades geométricas planas* de M . A maneira clássica de realizar este estudo é considerar funções altura definidas em M , ou seja, a composição de uma parametrização local φ de M com funções altura. Seja então

$$\begin{aligned} \lambda : (\mathbb{R}^n \times S^n, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, v) &\mapsto \langle \varphi(x), v \rangle, \end{aligned}$$

uma família de funções altura definidas em M , onde $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ é uma parametrização local de M . O objetivo consiste em estudar as singularidades de λ_v . Se λ_v for uma submersão, então o hiperplano é transversal à M . Agora, se λ_v é um germe singular dizemos que o contato do hiperplano na origem com M é do tipo da singularidade. Assim, um *contato é do tipo A_k* , $k > 1$, se o germe de função λ_v é $\mathcal{A}$ -equivalente à $\pm x_1^{k+1} \pm x_2^2 \pm \cdots \pm x_n^2$.

Neste contexto, em sua tese de doutorado [38], J. M. West estudou a geometria plana do crosscap em $\mathbb{R}^3$.

Já em [6], J. Bruce e J. M. West abordam o estudo da geometria plana do crosscap em $\mathbb{R}^3$ de outra maneira, através da classificação dos germes de submersões $(\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ sob a ${}_X\mathcal{R}$ -equivalência, onde X é o crosscap padrão, ou seja, a imagem de $(x, y) \mapsto (x, y^2, xy)$. Eles mostram que genericamente os germes de funções altura definidos no crosscap tem ${}_X\mathcal{R}$ -codimensão no máximo 2. Desta maneira, analisando a geometria destes germes de funções, obtem informações sobre a geometria da curva de pontos duplos do crosscap e sobre o contato da superfície com planos. Observamos que devido ao Teorema 1.2 as ${}_X\mathcal{K}$ -classes de germes de

submersões de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$ correspondem às $\mathcal{A}$ -classes de bigerme onde um dos ramos é o crosscap e o outro é uma imersão. Recentemente em [28], F. Tari e R. Oset Sinha classificam germes de submersões $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ definidos numa curva plana sob a ação do grupo ${}_X\mathcal{K}$, onde X é uma curva plana com singularidades de $\mathcal{A}_e$ -codimensão no máximo 2, e obtém informação sobre a geometria plana de projeções ortogonais de uma curva espacial genérica no plano.

Nos sentimos motivados em aplicar este método em nosso estudo, pois a classificação dos germes de submersões de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}$ sob a ${}_V\mathcal{K}$ -equivalência, onde V é a suspensão do crosscap padrão, já obtivemos na Proposição 1.18 quando classificamos os bigermes segundo a ação do grupo $\mathcal{A}$ onde um dos ramos é a suspensão do crosscap.

4.1 Transversalidade

Sejam M e N variedades de classe C^∞ e $S \subset N$ uma subvariedade de N . Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ de classe C^∞ é *transversal a S* quando

(i) $f(M) \cap S = \emptyset$, ou

(ii) para todo $p \in f^{-1}(S)$ temos que

$$Df_{(p)} \cdot T_p M + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N,$$

onde $Df_{(p)} : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é a derivada de f em p .

Como consequência imediata da definição, se $f : M \rightarrow N$ é uma submersão então f é transversal a qualquer subvariedade S de N .

A prova do próximo teorema pode ser encontrada em [13].

Teorema 4.1 *Sejam M, N, S variedades de classe C^∞ e $F : M \times S \rightarrow N$ uma família de aplicações de classe C^∞ transversais às subvariedades $Q_1, \dots, Q_t$ de N . Então o conjunto dos parâmetros s em S tal que F_s é transversal a $Q_1, \dots, Q_t$ é denso, onde $F_s(x) = F(x, s)$.*

4.2 Geometria da suspensão do crosscap

Seja V a imagem da suspensão do crosscap padrão.

O próximo resultado segue imediatamente da demonstração da Proposição 1.18.

Proposição 4.2 *Qualquer germe submersivo $h : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de ${}_V\mathcal{K}$ -codimensão no máximo 3 tem uma das seguintes formas normais:*

$\nu\mathcal{K}$ – codimensão

(1)	X		0
(2)	$Y + Z \pm X^k$	$k = 2, 3, 4$	$k - 1$
(3)	$Y + X^2 \pm Z^k$	$k = 2, 3$	k
(4)	$Y + Z^2 \pm X^3$		3
(5)	$Y + XZ + X^3$		3
(6)	$Z \pm X^2 \pm Y^k$	$k = 2, 3$	k
(7)	$Z \pm Y^2 \pm X^3$		3
(8)	$Z + XY \pm X^3$		3
(9)	$W + X^2 \pm Z^2$		3

Demonstração: Veja o esboço da demonstração da Proposição 1.18 na Figura 1.1.

□

Vejamos agora como esta classificação nos auxilia no estudo da geometria da suspensão do crosscap.

Sejam g um germe de aplicação $\mathcal{A}$ -equivalente a suspensão do crosscap padrão f e h_v um germe de função altura definido na imagem de g , ou seja,

$$\begin{aligned} h_v : (\mathbb{R}^4, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ g(x) &\rightarrow \langle g(x), v \rangle \end{aligned} .$$

Então, h_v pode ser visto como um germe de função definido na suspensão do crosscap padrão da seguinte maneira: como g é $\mathcal{A}$ -equivalente a f , existem germes de difeomorfismos $\varphi : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ e $\psi : (\mathbb{R}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ tais que o seguinte diagrama é comutativo,

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^3, 0) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^4, 0) & & \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi & & \\ (\mathbb{R}^3, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^4, 0) & \xrightarrow{h_v} & (\mathbb{R}^4, 0) \end{array}$$

isto é, $\psi \circ f = g \circ \varphi$. Para cada h_v associamos $h_v \circ \psi$. Assim, estudando os germes $h_v \circ \psi$ na suspensão do crosscap padrão podemos descrever o contato da imagem de g com as fibras de h_v . Esta abordagem está bem definida, pois se $\tilde{\psi}$ e $\tilde{\varphi}$ são difeomorfismo tais que $\tilde{\psi} \circ f = g \circ \tilde{\varphi}$, então $h_v \circ \psi$ e $h_v \circ \tilde{\psi}$ são $\nu\mathcal{K}$ -equivalentes. De fato, consideremos o germe de difeomorfismo:

$$\begin{aligned} P : (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}, (0, 0)) \\ (x, t) &\mapsto ((\psi^{-1} \circ \tilde{\psi})(x), t). \end{aligned}$$

É fácil ver que $P(x, (h_v \circ \tilde{\psi})(x)) = ((\psi^{-1} \circ \tilde{\psi})(x), ((h_v \circ \psi)((\psi^{-1} \circ \tilde{\psi})(x))))$. Logo, $h_v \circ \psi$ é $\nu\mathcal{K}$ -equivalente a $h_v \circ \tilde{\psi}$.

Portanto, a partir de agora podemos focar nossos estudos nas $\nu\mathcal{K}^k$ -órbitas em $J^k(4, 1)$ dos germes de função definidos na suspensão do crosscap padrão.

Neste contexto queremos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.3 *Seja $h : \mathbb{R}^4 \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ a família de funções altura e*

$$\begin{aligned} h_\psi : (\mathbb{R}^4 \times S^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{R}, 0) \\ (x, v) &\mapsto h_v(\psi(x)) = h_{v\psi}(x) \end{aligned} ,$$

onde ψ é como acima. Então genericamente $h_{v\psi}$ é $\mathcal{VK}$ -equivalente a um dos seguintes:

$\mathcal{VK}$ – codimensão

(1)	X		0
(2)	$Y + Z \pm X^k$	$k = 2, 3, 4$	$k - 1$
(3)	$Y + X^2 \pm Z^k$	$k = 2, 3$	k
(4)	$Y + Z^2 + X^3$		3
(5)	$Y + XZ + X^3$		3
(6)	$Z \pm X^2 \pm Y^k$	$k = 2, 3$	k
(7)	$Z \pm Y^2 + X^3$		3
(8)	$Z + XY + X^3$		3
(9)	$W + X^2 \pm Z^2$		3

A genericidade no teorema provém de transversalidade. Os conceitos e resultados apresentados a seguir vão nesta direção e são análogos aos obtidos por J. Bruce e J. M. West em [6].

Para simplificar a notação denotamos o espaço vetorial de dimensão finita $J^k(4, 4)$ por P_k . Da continuidade da função determinante e do Teorema da Aplicação Inversa, existe uma vizinhança da identidade em P_k que consiste de aplicações polinomiais que são difeomorfismos locais. Denotamos tal vizinhança por V_k . Para cada $q \in V_k$, seja $V(q)$ a vizinhança da origem de $\mathbb{R}^4$ que é levada pela q difeomorficamente sobre sua imagem. Seja $V = \bigcap_{q \in V_k} V(q)$. Podemos supor que a imagem de g está contida em V . Assim, com o conjunto $V_k \subset P_k$ deformamos g obtendo uma família de parametrizações $G : \mathbb{R}^4 \times V_k \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $G(x, q) = (q \circ g)(x)$.

Definimos agora a aplicação

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^4 \times S^3 \times V_k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, v, q) &\mapsto (h_v \circ q \circ \psi)(x) \end{aligned} .$$

Como usual, as propriedades de transversalidade são estabelecidas usando a aplicação jato correspondente. Consideremos

$$\begin{aligned} j_1^k H : S^3 \times V_k &\rightarrow J^k(4, 1) \\ (v, q) &\mapsto j^k(h_v \circ q \circ \psi)(0) \end{aligned} .$$

Se provarmos que $j_1^k H$ é transversal a determinadas subvariedades do espaço $J^k(4, 1)$, então,

pelo Teorema 4.1, concluímos que é denso o conjunto de aplicações polinomiais $q \in V_k$ tais que

$$j_1^k H_q : S^3 \rightarrow J^k(4, 1),$$

também é transversal a estas subvariedades.

Proposição 4.4 *Desde que h_v é submersão, a aplicação jato*

$$\begin{aligned} j_1^k H : S^3 \times V_k &\rightarrow J^k(4, 1) \\ (v, q) &\mapsto j^k(h_v \circ q \circ \psi)(0) \end{aligned}$$

também o é.

Demonstração: Dado $(v, q) \in S^3 \times V_k$ devemos mostrar que $Dj_1^k H_{(v, q)}$ é sobrejetiva. Para isso é suficiente calcular a imagem de $\{0\} \times T_q V_k$. De fato, como V_k é um aberto do espaço vetorial P_k , o espaço tangente a V_k em q é P_k . Os elementos de $T_q V_k$ são os vetores velocidades em q dos caminhos diferenciáveis em P_k . Assim, para $p = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in P_k$ consideremos o caminho dado por $\gamma(t) = (v, q + tp)$ em $S^3 \times V_k$. Notemos que $\gamma(0) = (v, q)$ e $\gamma'(0) = (0, p)$. Então,

$$\begin{aligned} Dj_1^k H_{(v, q)}(0, p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j_1^k H(v, q + tp) - j_1^k H(v, q)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{j^k(h_v \circ (q + tp) \circ \psi)(0) - j^k(h_v \circ q \circ \psi)(0)}{t} \\ &= j^k \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{j^k(h_v \circ (q + tp) \circ \psi) - h_v \circ q \circ \psi}{t} \right) (0) = j^k(((h_v \circ \tau)'(0)))(0), \end{aligned}$$

onde τ é o caminho dado por $\tau(t) = q \circ \psi + tp \circ \psi$ em $J^k(4, 4)$. Logo, a imagem em $J^k(4, 1)$ do vetor tangente $(0, p)$ a (v, q) em $S^3 \times V_k$ é

$$j^k \left(\frac{\partial h_v}{\partial x_1} p_1 + \frac{\partial h_v}{\partial x_2} p_2 + \frac{\partial h_v}{\partial x_3} p_3 + \frac{\partial h_v}{\partial x_4} p_4 \right) (0).$$

Como $h_v : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão, $\frac{\partial h_v}{\partial x_i} \neq 0$, para algum $i = 1, \dots, 4$. Logo, variando $p \in P_k$ obtemos todo elemento em $J^k(4, 1)$. Portanto, $Dj_1^k H_{(v, q)}$ é sobrejetiva.

□

Este resultado nos garante que para um conjunto denso de aplicações polinomiais $q \in V_k$, a aplicação $j_1^k H_q$ é transversal a todas as subvariedades de $J^k(4, 1)$. Observemos que se S é uma subvariedade de $J^k(4, 1)$ tal que $j_1^k H_q(S^3) \cap S \neq \emptyset$, então a codimensão de S em $J^k(4, 1)$ é menor ou igual a 3. De fato, se $j_1^k H_q$ é transversal a S em $w \in j_1^k H_q^{-1}(S)$, então

$$Dj_1^k H_{q(w)} \cdot T_w S^3 + T_{j_1^k H_q(w)} S = T_{j_1^k H_q(w)} J^k(4, 1).$$

Em termos de dimensão temos

$$\dim(J^k(4, 1)) - \dim(S) = \dim(\text{Im}(Dj_1^k H_{q(w)})) = \dim(S^3) - \dim(\text{Nuc}(Dj_1^k H_{q(w)})),$$

onde $Im(Dj_1^k H_{q(w)})$ e $Nuc(Dj_1^k H_q)$ denotam a imagem e o núcleo da aplicação linear $Dj_1^k H_q$, respectivamente. Desde que a dimensão de S^3 é 3, segue que $\dim(J^k(4, 1)) - \dim(S) \leq 3$.

Estamos prontos para provar o Teorema 4.3.

Demonstração do Teorema 4.3:

Segue da demonstração da Proposição 1.18 que os germes de submersão de $\nu\mathcal{K}$ -codimensão no máximo 3 estão contidas em $J^4(4, 1)$. Particionamos $J^4(4, 1)$ pelas órbitas dos jatos X e $Y + Z \pm X^2$ (estratos de codimensão zero e um, respectivamente), $Y + Z \pm X^3$, $Y + X^2 \pm Z^2$ e $Z \pm X^2 \pm Y^2$ (estratos de codimensão 2), $Y + X^2 \pm Z^3$, $Y + Z^2 + X^3$, $Y + XZ + X^3$, $Z \pm X^2 \pm Y^3$, $Z \pm Y^2 + X^3$, $Z + XY + X^3$ e $W + X^2 \pm Z^2$ (estratos de codimensão três) e seu complementar, o qual é estratificado pelas órbitas dos demais jatos em $J^4(4, 1)$ (veja Figura 1.1), os quais são todos de codimensão maior que três, e um estrato consistindo dos jatos singulares, cuja codimensão é quatro. Pelo provado anteriormente, para um conjunto denso de aplicações polinomiais em V_4 , ou seja, para um conjunto denso de parametrizações da suspensão do crosscap, a aplicação $j_1^4 H_q$ é transversal a todos estes estratos e intersepta somente os estratos de codimensão no máximo 3.

□

Seja $f : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^4, 0)$ dado por $f(x, y, z) = (x, y, z^2, yz)$ a suspensão do crosscap padrão. Vimos que se compusermos as funções alturas $h_{v,\psi}$ obtidas no Teorema 4.3 com a suspensão do crosscap padrão obtemos os tipos de contatos genéricos da suspensão do crosscap com hiperplanos de $\mathbb{R}^4$. Podemos também estudar o tipo de contato com hiperplanos da superfície de pontos duplos e da curva de pontos de crosscap da imagem da f . Uma parametrização da superfície de pontos duplos e da curva de pontos de crosscap da suspensão do crosscap padrão é dada por $\beta(u, v) = (u, 0, v, 0)$, com $v \geq 0$, e $\alpha(t) = (t, 0, 0, 0)$, respectivamente.

Teorema 4.5 *Os possíveis tipo de contatos genéricos da suspensão do crosscap com hiperplanos de $\mathbb{R}^4$ são:*

1. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = X$: o hiperplano correspondente é transversal a suspensão do crosscap, a superfície de pontos duplos e a curva de pontos de crosscap;
2. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = Y + Z \pm X^k$, $k = 2, 3, 4$: o hiperplano correspondente é transversal a suspensão do crosscap e a superfície de pontos duplos. Já o contato com a curva de pontos de crosscap é do tipo A_k ;
3. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = Y + X^2 \pm Z^k$, $k = 2, 3$: o hiperplano correspondente é transversal a suspensão do crosscap e seu contato com a superfície de pontos duplos e com a curva de pontos de crosscap é do tipo A_1 e A_{k-1} , respectivamente;
4. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = Y + Z^2 + X^3$: o hiperplano correspondente é transversal a suspensão do crosscap e seu contato com a superfície de pontos duplos e com a curva de pontos de crosscap é do tipo A_2 ;

5. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = Y + XY + X^3$: o hiperplano correspondente é transversal a suspensão do crosscap e seu contato com a superfície de pontos duplos e com a curva de pontos de crosscap é do tipo A_2 e A_1 , respectivamente;
6. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = Z \pm X^2 \pm Y^k$, $k = 2, 3$: o hiperplano correspondente é transversal a superfície de pontos duplos e seu contato com a suspensão do crosscap e com a curva de pontos de crosscap é do tipo A_{k-1} e A_1 , respectivamente;
7. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = Z \pm Y^2 + X^3$: o hiperplano correspondente é transversal a superfície de pontos duplos e seu contato com a suspensão do crosscap e com a curva de pontos de crosscap é do tipo A_2 ;
8. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = Z + XY + X^3$: o hiperplano correspondente é transversal a superfície de pontos duplos e seu contato com a suspensão do crosscap e com a curva de pontos de crosscap é do tipo A_1 e A_2 , respectivamente;
9. $h_{v,\psi}(X, Y, Z, W) = W + X^2 \pm Z^2$: o hiperplano tem contato do tipo A_1 com a suspensão do crosscap, a superfície de pontos duplos e a curva de pontos de crosscap.

Demonstração: A demonstração segue da análise do tipo de singularidade que as funções composições $h_{v,\psi} \circ f$, $h_{v,\psi} \circ \beta$ e $h_{v,\psi} \circ \gamma$ apresentam na origem, onde f , β e γ são as parametrizações da suspensão do crosscap padrão, da superfície de pontos duplos e da curva de pontos de crosscap da imagem da f , respectivamente. $\square$

O hiperplano correspondente a cada função $h_{v,\psi}$ do teorema anterior é dado da seguinte maneira. Tomamos como exemplo $h_{v,\psi} = Y + X \pm X^k$, $k = 2, 3$. O germe de função $h_{v,\psi}$ define o monogerme de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^4$ dado por $(x, -y \mp x^k, y, z)$. Consideremos o bigerme

$$\begin{cases} (x, y, z^2, xy) \\ (x, -y \mp x^k, y, z) \end{cases} \quad \text{que é } \mathcal{A}\text{-equivalente a} \quad \begin{cases} (x, y + z^2 \pm x^k, z^2, xy) \\ (x, 0, y, z) \end{cases}.$$

Assim, os contatos descritos no item 2. do teorema anterior referem-se aos do hiperplano $(x, 0, y, z)$ com a suspensão do crosscap genérico $(x, y + z^2 \pm x^k, z^2, xy)$. Tal contato é medido pela composição da equação que define o hiperplano $(x, 0, y, z)$, ou seja, $h(X, Y, Z, W) = Y$, com a parametrização $g(x, y, z) = (x, y + z^2 \pm x^k, z^2, xy)$ e analisando o tipo de singularidade que ela apresenta. Notemos que $h \circ g = h_{v,\psi} \circ f$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ARNOL'D, V. I., Critical points of functions on manifolds with boundary. *Russian Math. Surveys*, 33 (1978), 99-116.
- [2] ARNOL'D, V. I., Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities. *Functional Anal. Appl.*, 6 (1973), 254-272.
- [3] ARNOL'D, V. I., *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*. University lecture series, Vol. 5, AMS Providence (1994).
- [4] BAYER, D. e MACAULAY, M.S., *A computer algebra system for algebraic geometry*, available by anonymous ftp from zariski.harvard.edu (login: anonymous, password: any, cd Macaulay), 1982-1990.
- [5] BRUCE, J. W. e ROBERTS, M., Critical points of functions on analytic varieties. *Topology*, 27 (1988), 57-90.
- [6] BRUCE, J. W. e WEST, J. M., Functions on a crosscap. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 123 (1998), 19-39.
- [7] CASONATTO, C., ROMERO-FUSTER, M. C. e WIK-ATIQUE, R. G., Topological invariants of stable immersions of oriented 3-manifolds in $\mathbb{R}^4$. Aceito para publicação em *Proceedings of the International Workshop on Singularities in Generic Geometry and Applications*, Valencia 2009, Topology Appl.
- [8] COOPER, T., *Map germs of $\mathcal{A}_e$ -codimension one*. Ph.D. Thesis, University of Warwick, (1994).
- [9] COOPER, T., MOND, D. and ATIQUE, R. G. W., Vanishing topology of codimension 1 multi-germs over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$, *Compositio Mathematica*, 131 (2002), 121-160.
- [10] DAMON, J., The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$. *Singularities Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, 40-Part I (1983), 233-254.
- [11] EKHOLM, T., Differential 3-knots in 5-space with and without self-intersections. *Topology*, 40 (2001), 157-196.
- [12] EKHOLM, T., Invariants of generic immersions. *Pacific J. Maths.*, 199 (2001), no. 2, 321-346.

- [13] GIBSON, C. G. *Singular points of smooth mappings*, Research Notes in Mathematics, 25, Pitman, 1979.
- [14] GOLUBITSKY, M. and GUILLEMIN V., *Stables Mappings and Their Singularities*. GTM 14, Springer-Verlag, New York, (1973).
- [15] GORYUNOV, V., Local invariants of mappings of surfaces into three space. *J. Soviet Math*, 27 (1984), 2785-2811.
- [16] GUNNING, R. C., *Lectures on complex analytic varieties: finite analytic mappings*, University Press, Princeton, 1974.
- [17] HOUSTON, K., *Extended Goryunov Invariants*. Web page: <http://www.amsta.leeds.ac.uk/~khouston/>.
- [18] HOUSTON, K., Images of finite maps with one-dimensional double point set. *Topology Appl.*, 91 (1999), 197-219.
- [19] HOUSTON, K. and KIRK, N.P., On the Classification and Geometry of Corank 1 Map-Germs from Three-Space to Four-Space, *Singularity Theory*, ed. J.W. Bruce and D.M.Q. Mond, LMS Lecture note series, 263, CUP, (1999), 325-351.
- [20] MARAR, W.L. and MOND, D., Multiple point schemes for corank 1-maps. *J. London Math. Soc.*, v. 39, (1989), 553-567.
- [21] MARAR, W. L. E TARI, F., On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$. *Math. Proc. Phil. Soc.*, 119, (1996), 469-481.
- [22] MATHER, J. N., Stability of $\mathbb{C}^\infty$ mappings IV: Classification of stable germs by R -algebra. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 37 (1969), 223-248.
- [23] MOND, D., On the classification of germes of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$. *Proc. London Math. Soc.*, 50 (1985), 333-369.
- [24] MONTESINOS-AMILIBIA, A. M., *Superficies I*. Computer program available by anonymus ftp at <http://www.uv.es/~montesin/>.
- [25] OHMOTO T. *Vassiliev type invariants of order one of generic mappings from a surface to the plane*. Web page: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1006-4.pdf>
- [26] OHMOTO, T. e AICARDI, F. , First order local invariants of apparent contours. *Topology*, 45 (2006), no. 1, 27-45.
- [27] OSET-SINHA, R. e ROMERO-FUSTER, M. C., First order local invariants of stable maps from 3-manifolds to $\mathbb{R}^3$. Aceito para publicação em *Michigan Mathematical Journal*.
- [28] OSET-SINHA, R. e TARI, F., *Projections of space curves and duality*. Preprint.
- [29] RIEGER, J. H., Recognizing unstable equidimensional maps, and the number of stable projections of algebraic hypersurfaces. *Manuscripta Math.*, 99 (1999), 73-91.

- [30] RIEGER, J. H., Invariants of equidimensional corank 1-maps. *Banach Center Publ.*, 62 (2004), 239-248.
- [31] RIEGER, J. H. e RUAS, M. A. S., Classification of $\mathcal{A}$ -simple germs from K^n to K^2 . *Compositio Mathematica*, 79, no. 1 (1991), 99-108.
- [32] RIEGER, J. H., RUAS, M. A. A. e WIK-ATIQUE, R. G., M-deformations of $\mathcal{A}$ -simple germs from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^{n+1}$. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 144, (2008), 181-195.
- [33] RUAS, M.A.S., *C^l -Determinação finita e aplicações*. Tese de Doutorado, ICMSC-USP, São Carlos, 1983.
- [34] VASSILIEV V., Cohomology of knot spaces. *Advances in Soviet Math.*, 1 (1990) 23-69.
- [35] WALL, C. T. C., Finite determinacy of smooth map-germs. *Bull. London Math. Soc.*, 13 (1981), 481-539.
- [36] WIK-ATIQUE, R. G. On the classification of multi-germs of maps from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$ under $\mathcal{A}$ -equivalence, in J. W. Bruce and F. Tari (eds). *Real and Complex Singularities*, Research Notes in Maths Series, Chapman & Hall / CRC, 119-133.
- [37] WOLFRAN, S., *Mathematica: Programa de computador*. Página web: <http://www.wolfram.com/mathematica>.
- [38] WEST, J. M., *The differential geometry of the crosscap*. Tese de doutorado, University of Liverpool, (1995).
- [39] WHITNEY, H., The singularities os smooth n -manifolds into $(2n - 1)$ -space. *Annals of Math.*, 45(1994), 247 - 293.
- [40] YAMAMOTO, M., First order semi-local invariants of stable maps of 3-manifolds into the plane. *Proc. London Math. Soc.*, (3) 92 (2006), no. 2, 471-504.

APÊNDICE

Apêndice A: comandos dos programas Superfície I e Mathematica utilizados na visualização dos estratos de codimensão 1

Consideremos, como exemplo, os estratos R_1 e $\mathcal{T}_c$. Uma deformação $\mathcal{A}_e$ -versal da singularidade R_1 é dado por $R_{1\mu} = (x, y, z^3 + xz, z^4 + \mu z^2 + yz)$. Utilizamos o programa Superfície I para visualizar a imagem das aplicações $R_{1\mu}$ em diferentes seções 3-dimensionais (t, y, z, w) , com $t \in [-1, 1]$. Adaptemos as informações anteriores para a linguagem de Superfície I (veja figura abaixo): p e q são, respectivamente, os parâmetros da deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de R_1 e das seções 3-dimensionais; u corresponde a variável y e v a z . Então, com exceção da primeira, $x(u, v) = u$, $y(u, v) = v^3 + qv$ e $z(u, v) = v^4 + pv^2 + uv$ são as funções coordenadas de $R_{1\mu}$. A figura abaixo representa uma seção da imagem de uma aplicação estável $R_{1\mu}$ que contém dois pontos do tipo crosscap/plano.

Consideremos agora a seguinte deformação $\mathcal{A}_e$ -versal de $\mathcal{T}_c$:

$$\mathcal{T}_{cu} : \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, x, y, z) \\ (x, x + y, x - u, z) \end{cases}.$$

O parâmetro $t \in [-1, 1]$ na figura abaixo corresponde ao parâmetro da família de hiperplanos da forma (t, y, z, w) dando as seções da imagem de $\mathcal{T}_{cu}$. Utilizando o comando *Manipulate* do programa Mathematica podemos manipular os valores t e u para obter diferentes seções 3-dimensionais das aplicações estáveis $\mathcal{T}_{cu}$.

A figura abaixo representa uma seção da imagem de uma aplicação estável $\mathcal{T}_{cu}$ que contém um ponto quádruplo.

Apêndice B: formas normais $\mathcal{A}_e$ -equivalentes às obtidas no Capítulo 1

Com o intuito de obter as equações do sistema coerente devemos determinar quais subestratos incidem em cada estrato de codimensão 2. Como vimos, cada substrato é identificado por características apresentadas numa seção 3-dimensional de sua imagem. A seção que desejamos considerar é (t, y, z, w) , para um valor apropriado de t . No entanto, para esta seção ser adequada à nossos estudos, ela deve ser transversal à imagem de cada ramo de um germe de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 2. Logo, cada ramo deve ser da forma $(x, f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$, com

$f^{(i)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

Portanto, consideremos as seguintes formas normais $\mathcal{A}$ -equivalentes às 13, 14 e 15 do Teorema 1.33, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, z + u + vy + y^2, z, x - y) \\ (x, y, z, x) \end{cases} ; \\
 & \bullet \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, z, x) \\ (x, x - z + u + y^2, y + v, z) \end{cases} ; \\
 & \bullet \begin{cases} (x, y, z^2, yz) \\ (x, y, x - y + u + vy \pm y^2, z) \\ (x, x, y, z) \end{cases} .
 \end{aligned}$$

No caso do germe $\mathcal{P}_2$ utilizamos a mesma técnica aplicada na visualização de $\mathcal{P}$.