Equações diferenciais funcionais do
ponto de vista das equações de
renovação

Vinícius de Castro Nunes de Siqueira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 18 de Março de 2009

Assinatura: _____

Equações diferenciais funcionais do ponto de vista das equações de renovação

Vinícius de Castro Nunes de Siqueira

Orientador: *Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP – São Carlos
Março/2009

*Aos meus pais,
com amor . . .*

Agradecimentos

Ao professor Miguel, por todo o conhecimento transmitido, dedicação, paciência, seriedade na orientação e, principalmente pelo apoio. Graças a você, tive forças para conseguir concluir este trabalho.

Aos meus pais, Cláudio e Aurora, pela oportunidade do estudo e pelo apoio e incentivo durante todas as etapas dos meus estudos, preocupando-se para que a minha permanência em São Carlos fosse a melhor possível. E a toda minha família, pela preocupação e incentivo.

A Isabela, pelo amor, apoio e compreensão no decorrer deste período.

A todos os meus amigos, pela amizade, auxílio, discussões e por todos os momentos de lazer e divertimento que passamos juntos.

A todos os professores do ICMC, pelo conhecimento, amizade e auxílio indispensáveis à minha formação. Em especial à professora Sandra pela orientação durante as minhas iniciações científicas, despertando em mim, o prazer pela pesquisa matemática.

A todos os funcionários do ICMC, pela atenção e por me proporcionarem um ambiente seguro e adequado ao estudo.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que colaboraram de forma direta ou indireta com este trabalho.

Resumo

Estudamos a representação das equações diferenciais funcionais (EDF) lineares autônomas do tipo neutro como uma classe de equações de renovação, isto é, equações do tipo convolução. Utilizando ferramentas como a transformada de Laplace-Stieltjes, estudamos o comportamento assintótico das soluções destas equações quando $t \rightarrow \infty$.

Abstract

We studied the representation of linear autonomous functional differential equations (FDE) as a class of renewal equations, that is, convolution-type equations. Using tools like the Laplace-Stieltjes transform, we obtained the asymptotic behaviour of those solutions as $t \rightarrow \infty$.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos básicos	3
1.1 Notação e definições	3
1.2 Convolução de funções e medidas de Borel	4
1.3 A transformada de Laplace-Stieltjes	7
2 Equações diferenciais funcionais e equações de renovação	13
2.1 Problema de valor inicial para EDF	13
2.2 Equações de renovação	14
2.2.1 A solução fundamental	18
2.2.2 Núcleo resolvente	19
2.3 Representação de uma EDF como uma equação de renovação	22
2.4 O espaço das funções forçantes	28
2.5 Resolução de EDF por transformadas de Laplace	29
3 Comportamento assintótico	33
3.1 Estimativas para $\Delta(z)$ e quantidades relacionadas	33
3.2 Comportamento assintótico para $t \rightarrow \infty$	45
Bibliografia	53

Introdução

Nesta dissertação, estabelecemos uma conexão entre equações diferenciais funcionais e uma classe de equações de renovação. As principais referências utilizadas neste trabalho são a tese de Frasson [4] e o livro de Hale & Verduyn Lunel [5].

A idéia básica é representar um problema de valor inicial (PVI) de uma equação diferencial funcional como uma equação de renovação, estudar o espaço das funções forçantes, encontrar a solução da equação de renovação utilizando as transformadas de Laplace-Stieltjes e então, estudar o comportamento assintótico de tais soluções. O foco principal do trabalho está em equações do tipo neutro, uma vez que encontramos trabalhos similares para equações retardadas em Diekmann *et al.* [3].

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 elaboramos os conceitos básicos, notações e definições da teoria, os quais serão utilizados no restante do texto.

No Capítulo 2 estudamos o problema de representação de uma EDF como equação de renovação, analisamos o espaço das funções forçantes e um método de resolução da equação de renovação utilizando transformadas de Laplace-Stieltjes.

Finalmente, no Capítulo 3 estudamos algumas estimativas relacionadas com as soluções da equação de renovação e o seu comportamento assintótico.

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1 Notação e definições

Neste trabalho, denotaremos por $\mathbb{C}^n$ o conjunto dos vetores coluna com n entradas complexas. Assim, todo vetor linha γ com n entradas em $\mathbb{C}$ pode ser identificado com um funcional em $\mathbb{C}^n$ dado por $v \mapsto \gamma v$. Assim, o conjunto dos vetores linha será denotado por $\mathbb{C}^{n*}$. O espaço das matrizes $n \times n$ será denotado por $\mathbb{C}^{n \times n}$. Em qualquer espaço métrico M com métrica d , denotamos a bola aberta com centro x e raio r , $\{y \in M \text{ tais que } d(x, y) < r\}$ por $B(x, r)$ e a bola fechada com centro x e raio r , $\{y \in M \text{ tais que } d(x, y) \leq r\}$ por $\bar{B}(x, r)$.

Considere $\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{C}^n)$ o espaço de Banach das funções contínuas de $[-r, 0]$ ($r > 0$) com valores em $\mathbb{C}^n$ com a norma uniforme, ou seja, se $x \in \mathcal{C}([-r, 0], \mathbb{C}^n)$ então $\|x\| = \sup_{-r \leq t \leq 0} |x(t)|$. De uma aplicação do teorema de representação de Riesz (veja, por exemplo Rudin [8] ou Royden [7]), podemos representar toda aplicação linear limitada $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ por

$$L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta) \quad (1.1)$$

onde η é uma função de variação limitada em $[0, r]$ normalizada tal que $\eta(0) = 0$ e η é contínua pela direita em $(0, r)$ com valores no espaço de matrizes $\mathbb{C}^{n \times n}$. Denotamos este conjunto de funções por $NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$. Assim definida, η pode ser estendida em $\mathbb{R}$ por $\eta(\theta) = 0$ se $\theta < 0$ e $\eta(\theta) = \eta(r)$ se $\theta > r$. Funções $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ tais que a restrição de α a $[0, R]$ pertence

a $NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$, para todo $R > 0$, são chamadas funções localmente NBV e o conjunto delas é denotado $NBV_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n \times n})$.

O teorema de representação de Riesz estabelece que todo funcional linear limitado $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser escrito na forma

$$f(\varphi) = \int_0^r d\psi(\theta)\varphi(-\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \psi, \varphi \rangle$$

onde $\psi \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n*})$. Portanto, podemos representar o espaço dual de $\mathcal{C}$ por $\mathcal{C}^* = NBV([0, r], \mathbb{C}^{n*})$.

Usaremos a notação comum na teoria de equações retardadas, ou seja, para uma função x de $[-r, \infty)$ para algum espaço de Banach X , definimos $x_t : [-r, 0] \rightarrow X$ por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, com $-r \leq \theta \leq 0$ e $t \geq 0$.

A notação utilizada para a derivada de uma função f será $\dot{f}$. A matriz adjunta de A será denotada por $\text{adj } A$. Além disso, a linha $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = \gamma\}$, será denotada por (γ) e definiremos $\int_{(\gamma)} \dots dz$ como o valor principal da integral $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \dots dz$. A função de Heaviside h_y é definida por $h_y(\theta) = 0$ se $\theta < y$ e $h_y(\theta) = 1$ se $\theta \geq y$.

No restante deste capítulo, veremos alguns resultados necessários para desenvolver a teoria das equações de renovação. Esses resultados foram retirados do livro de Salamon [9] e Widder [11] com pequenas modificações.

1.2 Convolução de funções e medidas de Borel

O primeiro resultado é uma coletânea de resultados menores sobre convoluções entre funções e medidas de Borel. Estes resultados encontram-se em [9].

Observação 1.1.

1. Os elementos de $L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ podem ser representados por classes de equivalência de funções x em $[0, R]$ tais que a integral de Lebesgue de $|x|^p$ sobre $[0, R]$ existe e é finita, onde x é equivalente a y se a integral de Lebesgue de $|x - y|^p$ sobre $[0, R]$ é nula. Para $R > r$, podemos mergulhar $NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$ em $NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ estendendo $\psi \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$ a $[0, R]$, definindo $\psi(t) = \psi(r)$ para $t \geq r$. Os

espaços de funções $NBV([0, R], \mathbb{C}^n)$ e $\mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$ “são” subespaços vetoriais de $L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

2. Tome $1 \leq p \leq \infty$ e q tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (se $p = \infty$, então $q = 1$), $f \in L^p([0, R], \mathbb{C})$ e $g \in L^q([0, R], \mathbb{C})$. Deste modo, a *convolução entre f e g* , definida por

$$g * f(t) = \int_0^t g(s)f(t-s)ds = \int_0^t g(t-s)f(s) \quad 0 \leq t \leq R$$

é contínua. Além disso, temos que $g * f(t) = f * g(t)$.

3. Todo $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ representa uma medida de Borel em $\mathbb{C}^n$ sem massa fora de $[0, R]$. Esta medida será denotada por $d\alpha$. Para qualquer função $f : [0, R] \rightarrow \mathbb{C}^n$, $d\alpha$ -integrável, denotamos a integral de f com respeito à medida $d\alpha$ por

$$d\alpha(f) = \int_0^R d\alpha(t)f(t). \quad (1.2)$$

4. Seja $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ e $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$. Então, definimos a *convolução entre a medida $d\alpha$ e a função f* ,

$$d\alpha * f(t) = \int_0^t d\alpha(s)f(t-s)ds$$

para quase todo $t \in [0, R]$. Temos que $d\alpha * f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$. Se $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^{n*})$, definimos $f * d\alpha$ por

$$\int_0^t f(t-s)d\alpha(s)$$

uma vez que f é um vetor linha. Com isto, temos a seguinte propriedade:

$$(d\alpha * f)^T = f^T * d\alpha^T.$$

5. A aplicação $f \mapsto d\alpha * f$ mapeia $\mathcal{C}_R \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in \mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n) : g(0) = 0\}$ em si mesmo e mapeia $NBV([0, R], \mathbb{C}^n)$ em si mesmo. No entanto, $\mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$ é aplicado em si mesmo por $f \mapsto d\alpha * f$ se e somente se α é contínua.

Mostremos que $f \mapsto d\alpha * f$ aplica $\mathcal{C}_R$ em $\mathcal{C}_R$. Se f é contínua em um intervalo $[a, b]$ e f é estendida para $t \in \mathbb{R}$ por $f(t) = f(a)$, $t < a$ e $f(t) = f(b)$, $t > b$, então $|f(t) - f(t + \delta)| \rightarrow 0$ uniformemente, quando $\delta \rightarrow 0$. Seja f contínua em $[0, R]$ com $f(0) = 0$ e defina $h(t) = d\alpha * f(t)$. Para $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} h(t + \delta) - h(t) &= \int_0^{t+\delta} d\alpha(s) f(t + \delta - s) - \int_0^t d\alpha(s) f(t - s) \\ &= \underbrace{\int_0^t d\alpha(s) (f(t + \delta - s) - f(t - s))}_{I_1(\delta)} \\ &\quad + \underbrace{\int_t^{t+\delta} d\alpha(s) f(t + \delta - s)}_{I_2(\delta)}. \end{aligned}$$

Portanto, $h(t + \delta) - h(t) = I_1(\delta) + I_2(\delta)$. Quando $\delta \rightarrow 0^+$, temos que $f(t + \delta - s) - f(t - s) \rightarrow 0$ e então $I_1(\delta) \rightarrow 0$. Também podemos ver que, em $I_2(\delta)$, f é integrada sobre $(0, \delta]$. Portanto, uma vez que $f(0) = 0$, temos que $I_2(\delta) \rightarrow 0$. Então, $h(t + \delta) - h(t) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0^+$, de onde segue que h é contínua. Também $h(0) = 0$. Logo $f \mapsto d\alpha * f$ aplica $\mathcal{C}_R$ em $\mathcal{C}_R$.

Para $f \in \mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$ tal que $f(0) \neq 0$, definimos $f_0 \in \mathcal{C}_R$ por $f_0(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} f(\cdot) - f(0)$. Da primeira parte temos que $d\alpha * f_0 \in \mathcal{C}_R$. Mas

$$d\alpha * f = d\alpha * [f_0 + f(0)] = d\alpha * f_0 + d\alpha * f(0) = d\alpha * f_0 + \alpha \cdot f(0). \quad (1.3)$$

Segue que $d\alpha * f \in \mathcal{C}$ se e somente se último membro de (1.3) for contínuo, que ocorre se e somente se α for uma função contínua.

6. Se f é contínua, então (1.2) pode ser vista como uma integral de Stieltjes. Pelo Teorema de Representação de Riesz e usando o item 5, $NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ é (isometricamente isomorfo a) o espaço dual de $\mathcal{C}_R$.
7. Para $\alpha, \beta \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$, a convolução $d\alpha * d\beta$ das medidas de Borel $d\alpha$ e $d\beta$ restritas ao intervalo $[0, R)$ é dada pela relação

$$[d\alpha * d\beta](g) = \int_0^R \int_0^{R-s} d\beta(t) d\alpha(s) g(t + s)$$

$$= \int_0^R \int_0^{R-t} d\alpha(s) d\beta(t) g(t+s) \quad (1.4)$$

para $g \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$. Além disso, se $\alpha, \beta \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$, então $d\alpha * \beta \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$, $d\alpha * \beta = \alpha * d\beta$ e

$$d[\alpha * d\beta] = d\alpha * d\beta \quad (1.5)$$

8. Se $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$, vale a seguinte desigualdade

$$\|d\alpha * f\|_p \leq \text{Var}_{[0, R]} \alpha \cdot \|f\|_p \quad (1.6)$$

1.3 A transformada de Laplace-Stieltjes

Utilizando as técnicas das transformadas de Laplace, o estudo das equações de renovação fica mais fácil, uma vez que transformamos convoluções de funções e medidas em produtos de funções complexas.

Definição 1.2 (Funções e medidas γ -exponencialmente limitadas). Uma função g localmente integrável com domínio de definição $\mathbb{R}_+$ é dita ser γ -exponencialmente limitada se existe $C > 0$ tal que

$$|g(t)| \leq Ce^{\gamma t}.$$

Uma medida $d\alpha$ em $\mathbb{R}_+$, representada por uma função $\alpha \in NBV_{\text{loc}}$ é dita ser γ -exponencialmente limitada se sua função variação total é γ -exponencialmente limitada.

Definição 1.3 (Transformada de Laplace). Considere g uma função localmente integrável com domínio de definição $\mathbb{R}_+$ e γ -exponencialmente limitada. A *transformada de Laplace* de g , denotada $\mathcal{L}(g)(z)$, é definida por

$$\mathcal{L}(g)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-zt} g(t) dt \quad (1.7)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } z > \gamma$.

Definição 1.4 (Transformada de Laplace-Stieltjes). Seja $d\alpha$ uma medida γ -exponencialmente limitada. Definimos a *transformada de Laplace-Stieltjes* de $d\alpha$ por

$$\mathcal{L}(d\alpha)(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-zt} d\alpha(t). \quad (1.8)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } z > \gamma$.

Em particular, se α é de variação limitada em $[0, r]$, segue que $d\alpha$ é γ -exponencialmente limitada para todo $\gamma \in \mathbb{R}$. Desta forma $\mathcal{L}(d\alpha)(z)$ é uma função inteira, uma vez que o intervalo de integração se reduz a $[0, r]$.

Mostremos que se α e β são funções NBV e $\mathcal{L}(d\alpha)(z) = \mathcal{L}(d\beta)(z)$, então $\alpha = \beta$ e se f e g são funções γ -exponencialmente limitadas, com domínio $\mathbb{R}_+$, com $\mathcal{L}(f)(z) = \mathcal{L}(g)(z)$, para z em um semiplano ($\operatorname{Re} z > \gamma$), então $f(t) = g(t)$ para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$.

De fato, se α e β são funções NBV tais que

$$\mathcal{L}(d\alpha)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} d\alpha(t) = \int_0^\infty e^{-zt} d\beta(t) = \mathcal{L}(d\beta)(z), \quad (1.9)$$

então, para z , tal que $\operatorname{Re} z > \gamma$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty e^{-zt} d\alpha(t) - \int_0^\infty e^{-zt} d\beta(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} (d\alpha(t) - d\beta(t)) \\ &= \int_0^\infty e^{-zt} d(\alpha(t) - \beta(t)). \end{aligned}$$

Portanto, $\int_0^\infty e^{-zt} d(\alpha(t) - \beta(t)) = 0$, de onde segue (veja, por exemplo o Teorema II.6.3 de Widder [11]) que $\alpha(t) = \beta(t)$. Agora, se

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-zt} g(t) dt = \mathcal{L}(g)(z) \quad (1.10)$$

então, tomando $\alpha(t) = \int_0^t f(u) du$ e $\beta(t) = \int_0^t g(u) du$ temos que vale (1.9). Logo $\alpha(t) = \beta(t)$ o que implica que $f(t) = g(t)$ para quase todo $t \in \mathbb{R}_+$, obtendo assim o resultado.

Lema 1.5. *Sejam f e g funções γ -exponencialmente limitadas a valores em $\mathbb{C}$. Para z tal que $\operatorname{Re} z \geq \gamma$ temos que*

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z) \mathcal{L}(g)(z).$$

Se f assume valores em $\mathbb{C}^n$ e $\alpha \in \text{NBV}([0, \infty), \mathbb{C}^{n \times n})$ é γ -exponencialmente limitada, temos que

$$\mathcal{L}(d\alpha * f)(z) = \mathcal{L}(d\alpha)(z) \mathcal{L}(f)(z)$$

Demonstração. De fato,

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \int_0^\infty f(s)g(t-s)dsdt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zt} f(s)g(t-s)dsdt$$

e, considerando a mudança de variáveis $(t, s) \mapsto (u, v)$, tal que $s = v$, $t = u + v$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(z) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z(u+v)} f(v)g(u)dvdu \\ &= \int_0^\infty e^{-zv} f(v)dv \int_0^\infty e^{-zu} g(u)du = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z) \end{aligned}$$

Analogamente, mostramos que $\mathcal{L}(d\alpha * f)(z) = \mathcal{L}(d\alpha)(z)\mathcal{L}(f)(z)$, obtendo assim o resultado. $\square$

Além disso, para uma função f com valores em $\mathbb{C}^n$, definida e de variação limitada em $[0, r]$ e constante em $[r, \infty)$, temos a seguinte identidade

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z} (f(0) + \mathcal{L}(df)(z)). \quad (1.11)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{z} e^{-zt} f(t) \Big|_0^A + \int_0^A \frac{1}{z} e^{-zt} df(t) \right] \\ &= \frac{1}{z} \left(f(0) + \int_0^r e^{-zt} df(t) \right) = \frac{1}{z} (f(0) + \mathcal{L}(df)(z)). \end{aligned}$$

Lema 1.6. *Seja g uma função γ -exponencialmente limitada e localmente integrável. Então, para $\nu > \gamma$ e para $t > 0$ temos a fórmula de inversão*

$$\frac{1}{2}(g(t+) + g(t-)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} e^{zt} \mathcal{L}(g)(z)dz \quad (1.12)$$

que, para $t = 0$, torna-se

$$\frac{1}{2}g(0+) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} \mathcal{L}(g)(z)dz.$$

Demonstração. De fato, para qualquer valor de t , temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} e^{zt} \mathcal{L}(g)(z)dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} e^{zt} dz \int_0^\infty e^{-zu} g(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} \int_0^\infty e^{z(t-u)} g(u)dudz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{z(t-u)}}{t-u} g(u) \Big|_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\nu(t-u)} \operatorname{sen}(\omega(t-u))}{t-u} g(u) du
\end{aligned}$$

Agora, se $\varphi(u)$ é Lebesgue integrável em $(-\infty, \infty)$ e de variação limitada em alguma vizinhança de um ponto t , pelo Teorema II.7.2 de Widder [11], temos

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(u) \operatorname{sen}(T(t-u))}{t-u} du = \frac{\varphi(t+) + \varphi(t-)}{2}.$$

Assim, tomando $g(u) = 0$ em $(-\infty, 0)$, a função $g(u)e^{\nu(t-u)}$ é Lebesgue integrável em $(-\infty, \infty)$, logo

$$\begin{aligned}
&\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} e^{zt} \mathcal{L}(g)(z) dz \\
&= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{\nu(t-u)} \operatorname{sen}(\omega(t-u))}{t-u} g(u) du = \frac{g(t+) + g(t-)}{2}. \quad (1.13)
\end{aligned}$$

Em $t = 0$, $g(0-) = 0$, logo

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\omega}^{\nu+i\omega} \mathcal{L}(g)(z) dz = \frac{1}{2} g(0+).$$

□

A seguir, damos alguns resultados que garantem que a convolução entre funções e medidas exponencialmente limitadas é do mesmo tipo.

Lema 1.7. *Sejam $d\alpha$ uma medida γ -exponencialmente limitada, isto é, para algum $C_1 > 0$,*

$$|v_\alpha(t)| \leq C_1 e^{\gamma t}$$

onde v_α é a função variação total de α . Seja f uma função que satisfaz

$$|f(t)| \leq C_2 t^k e^{\gamma t},$$

para algum $C_2 > 0$, e $k \geq 0$. Então a função $d\alpha * f(t)$ satisfaz

$$|d\alpha * f(t)| \leq C_1 C_2 \frac{t^{k+1}}{k+1} e^{\gamma t}.$$

Demonstração. Estimamos

$$\begin{aligned}
|d\alpha * f(t)| &= \left| \int_0^t d\alpha(s) f(t-s) \right| \leq \int_0^t dv_\alpha(s) |f(t-s)| \\
&\leq \int_0^t C_1 e^{\gamma s} C_2 (t-s)^k e^{\gamma(t-s)} ds \leq C_1 C_2 e^{\gamma t} \int_0^t (t-s)^k ds \\
&= C_1 C_2 \frac{t^{k+1}}{k+1} e^{\gamma t}.
\end{aligned}$$

o que mostra o resultado. $\square$

Corolário 1.8. *Sejam $d\alpha$ uma medida γ -exponencialmente limitada e f uma função β -exponencialmente limitada. Então $d\alpha * f$ é k -exponencialmente limitada para todo $k > \max\{\gamma, \beta\}$.*

Capítulo 2

Equações diferenciais funcionais e equações de renovação

2.1 Problema de valor inicial para EDF

Uma Equação Diferencial Funcional (EDF) linear autônoma é definida pela relação

$$\frac{d}{dt}Mx_t = Lx_t, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

onde $L, M : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ são operadores lineares contínuos, dados por

$$L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta), \quad M\varphi = \varphi(0) - \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta), \quad (2.2)$$

onde $\eta, \mu \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$ e tomamos μ contínua em zero para que possamos garantir a existência e unicidade de solução para nossa equação.

Para exemplificar, considere a equação diferencial funcional

$$\frac{d}{dt}[x(t) + Cx(t-1)] = Ax(t) + Bx(t-1), \quad t \geq 0 \quad (2.3)$$

onde A, B e C são matrizes $n \times n$. Tal equação pode ser escrita na forma (2.1) tomando $r = 1$, $\mu(\theta) = 0$ se $\theta < 1$, $\mu(\theta) = -C$ para $\theta \geq 1$ e $\eta(\theta) = A$ para $0 < \theta < 1$ e $\eta(\theta) = A + B$ para $\theta \geq 1$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Mx_t &= \frac{d}{dt} \left[x_t(0) - \int_0^1 d\mu(\theta)x_t(-\theta) \right] = \frac{d}{dt} [x_t(0) - Cx_t(-1)] \\ &= \frac{d}{dt} [x(t) + Cx(t-1)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

e

$$\begin{aligned} Lx_t &= \int_0^r d\eta(\theta)x_t(-\theta) = \int_0^r d\eta(\theta)x(t-\theta) \\ &= Ax(t) + Bx(t-1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

portanto, de (2.4) e (2.5) temos (2.3).

Um problema de valor inicial para uma Equação Diferencial Funcional linear autônoma é dado por uma EDF da forma (2.1), sujeita à condição inicial

$$x_0 = \varphi,$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Mx_t = Lx_t & t \geq 0 \\ x_0 = \varphi & \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Equações diferenciais da forma (2.1) com $\mu = 0$, ou seja,

$$\dot{x}(t) = Lx_t,$$

são conhecidas como *equações diferenciais funcionais retardadas*, (EDFR).

2.2 Equações de renovação

No livro de Diekmann *et al.* [3] foi mostrado que equações diferenciais funcionais retardadas podem ser escritas na forma

$$x = k * x + f, \quad (2.7)$$

onde k é uma função de variação limitada e f , a função forçante, é contínua. Na tentativa de obter resultados similares para EDF's, estudaremos as *equações de renovação* e convoluções entre medidas e funções, que serão definidas adiante. Seguem alguns resultados sobre existência, unicidade, dependência contínua e representação de L^p -soluções da equação integral de Volterra-Stieltjes

$$z(t) = \int_0^t d\alpha(s)z(t-s) + f(s), \quad (2.8)$$

ou alternativamente,

$$z = d\alpha * z + f, \quad (2.9)$$

onde $\alpha \in NBV_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n \times n})$ determina a medida de Borel $d\alpha$, chamada *núcleo* da equação de renovação (2.8) e $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ é chamada de *função forçante*.

Observação 2.1. Para α arbitrário, nem sempre podemos esperar a existência e a unicidade para soluções de (2.9). Por exemplo, se $\alpha = \rho \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ dada por $\rho(0) = 0$ e $\rho(t) = I$ para $t > 0$, onde I é a identidade em $\mathbb{C}^{n \times n}$, temos que

$$d\rho * z(t) = \int_0^t d\rho(s)z(t-s) = Iz(t) = z(t). \quad (2.10)$$

Portanto, a equação de renovação $z = d\rho * z + f$ é equivalente a $f(t) \equiv 0$. Para excluir tais situações, assumimos que

$$\det(\alpha_0 - I) \neq 0, \quad \alpha_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha(t). \quad (2.11)$$

Temos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \text{Var}_{[0, t]}(\alpha - \alpha_0 \rho) = 0$.

Teorema 2.2. *Seja $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ tal que a condição (2.11) é satisfeita. Então valem:*

1. *Para todo $f \in \mathcal{C}_R \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n) : f(0) = 0\}$ existe uma única solução $z \in \mathcal{C}_R$,*

$$z = d\alpha * z + f \quad (2.12)$$

em que z depende de f continuamente com respeito à norma do supremo.

2. *Para todo $f \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$, existe uma única solução z de (2.9) em $NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ que depende continuamente de f com respeito a norma NBV .*

Demonstração. 1. Seja $A : \mathcal{C}_R \mapsto \mathcal{C}_R$ dada por

$$(Ax)(t) = d\alpha * x(t) = \int_0^t d\alpha(s)x(t-s), \quad 0 \leq t \leq R.$$

Segue do item 5 da Observação 1.1 que A está bem definido. Afirmamos que o operador $A : \mathcal{C}_R \rightarrow \mathcal{C}_R$ é linear e limitado. De fato, a linearidade

de A segue da linearidade da convolução e A é limitado pois $\|Ax(t)\| = \|d\alpha * x(t)\| \leq \text{Var}_{[0,R]} \alpha \cdot \|x\| \leq M \cdot \|x\|$ onde as desigualdades seguem do item 8 da Observação 1.1. Seja $\alpha_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha(t)$. Tome $\epsilon > 0$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\text{Var}_{[0,\epsilon]}[\alpha - \alpha_0\rho] + e^{-\gamma\epsilon} \text{Var}_{[0,R]}[\alpha - \alpha_0\rho] \leq \frac{1}{2} \|(I - \alpha_0)^{-1}\|^{-1}$$

onde $\|(I - \alpha_0)^{-1}\|$ é a norma usual da matriz $(I - \alpha_0)^{-1}$, isto é,

$$\|(I - \alpha_0)^{-1}\| = \sup_{|v|=1} |(I - \alpha_0)^{-1}v|$$

onde temos que $|\cdot|$ denota a norma em $\mathbb{C}^n$.

Defina em $\mathcal{C}_R$ a norma equivalente

$$\|x\|_\gamma = \sup_{0 \leq t \leq R} |x(t)|e^{-\gamma t}, \quad x \in \mathcal{C}_R.$$

Então, usando (2.10), temos a seguinte estimativa para todo $x \in \mathcal{C}_R$ e $t \in [0, R]$

$$\begin{aligned} |(A - \alpha_0)x(t)|e^{-\gamma t} &= |(d\alpha - \alpha_0 d\rho) * x(t)|e^{-\gamma t} \\ &= \left| \int_0^t d(\alpha - \alpha_0\rho)(s)x(t-s) \right| e^{-\gamma t} \\ &\leq \left| \int_0^\epsilon d(\alpha - \alpha_0\rho)(s)x(t-s) \right| e^{-\gamma t} \\ &\quad + \left| \int_\epsilon^t d(\alpha - \alpha_0\rho)(s)x(t-s) \right| e^{-\gamma t} \\ &\leq \text{Var}_{[0,\epsilon]}[\alpha - \alpha_0\rho] \sup_{t-\epsilon \leq \tau \leq t} |x(\tau)|e^{-\gamma \tau} \\ &\quad + \text{Var}_{[\epsilon,t]}[\alpha - \alpha_0\rho] \sup_{0 \leq \tau \leq t-\epsilon} |x(\tau)|e^{-\gamma \tau} \\ &\leq (\text{Var}_{[0,\epsilon]}[\alpha - \alpha_0\rho] + e^{-\gamma\epsilon} \text{Var}_{[0,R]}[\alpha - \alpha_0\rho]) \|x\|_\gamma \\ &\leq \frac{1}{2} \|(I - \alpha_0)^{-1}\|^{-1} \|x\|_\gamma \end{aligned}$$

pois, se $t-\epsilon \leq \tau \leq t$, então $|x(\tau)|e^{-\gamma t} < |x(\tau)|e^{-\gamma \tau}$, logo $\sup_{t-\epsilon \leq \tau \leq t} |x(\tau)|e^{-\gamma t} \leq \sup |x(\tau)|e^{-\gamma \tau} = \|x\|_\gamma$ e, se $0 \leq \tau \leq t-\epsilon$, então $e^{-\gamma t} = e^{-\gamma(t-\epsilon)-\gamma\epsilon} \leq e^{-\gamma\tau} e^{-\gamma\epsilon}$.

Portanto, $\sup_{0 \leq \tau \leq t-\epsilon} |x(\tau)|e^{-\gamma t} \leq e^{-\gamma\epsilon} \sup |x(\tau)|e^{-\gamma \tau} = e^{-\gamma\epsilon} \|x\|_\gamma$.

Considere agora a aplicação

$$x \xrightarrow{T} T(x) = (I - \alpha_0)^{-1}[Ax - \alpha_0 x + f], \quad x \in \mathcal{C}_R.$$

Temos que $T(x) \in \mathcal{C}_R$ visto que $Ax - \alpha_0 x + f = d(\alpha - \alpha_0 \rho) * x + f$, e ambas parcelas estão em $\mathcal{C}_R$. Além disso, T é uma contração em $\mathcal{C}_R$ com respeito a norma $\|\cdot\|_\gamma$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|T(x) - T(y)\|_\gamma &= \sup_{0 \leq t \leq R} |[T(x) - T(y)](t)| e^{-\gamma t} \\
&= \sup_{0 \leq t \leq R} |\{(I - \alpha_0)^{-1}[Ax - \alpha_0 x + f] \\
&\quad + (I - \alpha_0)^{-1}[-Ay + \alpha_0 y - f]\}(t)| e^{-\gamma t} \\
&= \sup_{0 \leq t \leq R} |(I - \alpha_0)^{-1}\{[A - \alpha_0](x - y)\}(t)| e^{-\gamma t} \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq R} |(I - \alpha_0)^{-1}| |\{[A - \alpha_0](x - y)\}(t)| e^{-\gamma t} \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq R} |(I - \alpha_0)^{-1}| \frac{1}{2} |(I - \alpha_0)^{-1}|^{-1} \|x - y\|_\gamma \\
&= \frac{1}{2} \|x - y\|_\gamma.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, T tem um único ponto fixo $z \in \mathcal{C}_R$. Temos que

$$\begin{aligned}
z &= z - \alpha_0 z + \alpha_0 z = (I - \alpha_0)z + \alpha_0 z \\
&= (I - \alpha_0)T(z) + \alpha_0 z = Az - \alpha_0 z + f + \alpha_0 z = Az + f \\
&= d\alpha * z + f.
\end{aligned}$$

Segue o item 1 do teorema.

2. Seja $Ax = d\alpha^T * x$. Então, da parte 1 aplicada a α^T , temos que $z = d\alpha^T * z + f$ se, e somente se, $z = (I - A)^{-1}f$ e $(I - A)^{-1}$ é linear e contínuo, e portanto $1 \notin \sigma(A)$.

Considere a dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{C}_R \times NBV \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\langle g, \beta \rangle = g^T * d\beta(R).$$

Afirmamos que $A^* : NBV \rightarrow NBV$ é dada por $A^*\beta = d\alpha * \beta$. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle Ag, \beta \rangle &= \langle d\alpha^T * g, \beta \rangle = (d\alpha^T * g)^T * d\beta(R) \\
&= (g^T * d\alpha) * d\beta(R) = g^T * (d\alpha * d\beta)(R) \\
&= g^T * d(d\alpha * \beta)(R) = \langle g, d\alpha * \beta \rangle.
\end{aligned}$$

Do fato de $\sigma(A) = \sigma(A^*)$, segue que $1 \notin \sigma(A^*)$, seguindo o resultado. $\square$

Dados $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ e $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$, existem duas maneiras equivalentes de resolver a equação (2.9); ou usando a solução fundamental, ou usando o núcleo resolvente. Apresentaremos as duas a seguir.

2.2.1 A solução fundamental

Definição 2.3. Tome $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ satisfazendo a condição (2.11) na página 15. A única solução ξ de

$$\xi = d\alpha * \xi + \rho \quad (2.13)$$

com $\rho(0) = 0$ e $\rho(t) = I$ para $t > 0$ é chamada *solução fundamental* de (2.9).

O Teorema 2.2 nos garante a existência e a unicidade da solução fundamental. Na verdade, a solução fundamental também resolve a equação

$$\xi = \xi * d\alpha + \rho. \quad (2.14)$$

De fato, suponha que ζ é uma solução de (2.14). Então

$$\zeta = \zeta * d\rho = \zeta * d[\xi - d\alpha * \xi] = d[\zeta - \zeta * d\alpha] * \xi = d\rho * \xi = \xi.$$

onde a terceira igualdade é verdadeira pois

$$\begin{aligned} \zeta * d[\xi - d\alpha * \xi] &= d[\zeta * [\xi - d\alpha * \xi]] = d[(\zeta - \zeta * d\alpha) * \xi] \\ &= d[\zeta - \zeta * d\alpha] * \xi. \end{aligned}$$

Deste modo, vemos que ξ^T é a solução fundamental da equação de renovação transposta

$$z = d\alpha^T * z + f$$

Lema 2.4. *Seja $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ satisfazendo a condição (2.11) na página 15 e seja ξ a solução fundamental de (2.9). Então, para $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$, existe uma única solução $z \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ de (2.9), isto é, $z = d\alpha * z + f$. Esta solução é dada por*

$$z = d\xi * f \quad (2.15)$$

e depende continuamente de f com respeito à norma L^p .

Demonstração. Seja $x \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ dada por (2.15). Então, por (2.13), temos que

$$\begin{aligned} x &= d\xi * f = d(d\alpha * \xi + \rho) * f = (d\alpha * d\xi + d\rho) * f = d\alpha * (d\xi * f) + d\rho * f \\ &= d\alpha * x + f. \end{aligned}$$

Reciprocamente, seja x uma solução de (2.9). Então, por (2.14),

$$x = d\rho * x = d(\xi - \xi * d\alpha) * x = \xi * d[x - d\alpha * x] = d\xi * f$$

o que prova a existência e unicidade e que $x = d\xi * f$. A dependência contínua segue de (2.15) e de (1.6). $\square$

2.2.2 Núcleo resolvente

Definição 2.5. Tome $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ satisfazendo a condição (2.11) na página 15. A única solução ζ de

$$\zeta = \zeta * d\alpha + \alpha \tag{2.16}$$

é chamada de *núcleo resolvente* de (2.9).

Analogamente ao caso da solução fundamental, temos que o núcleo resolvente também resolve

$$\zeta = d\alpha * \zeta + \alpha \tag{2.17}$$

De fato, se δ é solução de (2.17), então

$$\begin{aligned} \delta &= d\alpha * \delta + \alpha = d[\zeta - \zeta * d\alpha] * \delta + \alpha = d\zeta * \delta - d\zeta * d\alpha * \delta + \alpha \\ &= \zeta * d\delta - d\zeta * \alpha * d\delta + \alpha = \zeta * d\delta - \zeta * d\alpha * d\delta + \alpha \\ &= \zeta * [d\delta - d\alpha * d\delta] + \alpha = \zeta * d[\delta - d\alpha * \delta] + \alpha \\ &= \zeta * d\alpha + \alpha = \zeta \end{aligned}$$

e, portanto, ζ^T é o núcleo resolvente da equação de renovação transposta

$$z = d\alpha^T * z + f.$$

Lema 2.6. *Seja $\alpha \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ satisfazendo a condição (2.11) na página 15 e seja ζ o núcleo resolvente de (2.8). Então, para $f \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$, existe uma única solução $z \in L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$ de (2.9), isto é, $z = d\alpha * z + f$. Esta solução é dada por*

$$z = d\zeta * f + f \quad (2.18)$$

e depende continuamente de f com respeito a norma L^p . Além disso, se $f \in \mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$ e $f(0) = 0$, então a solução z satisfaz $z \in \mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$ e $z(0) = 0$. Se $f \in NBV([0, R], \mathbb{C}^n)$, então a solução z também satisfaz $z \in NBV([0, R], \mathbb{C}^n)$.

Demonstração. De (2.9) temos que

$$z = d\alpha * z + f.$$

Se aplicarmos a convolução por $d\zeta$ a ambos os lados desta equação, obtemos

$$\begin{aligned} d\zeta * z &= d\zeta * (d\alpha * z) + d\zeta * f \\ &= (d\zeta * d\alpha) * z + d\zeta * f \\ &= d(\zeta * d\alpha) * z + d\zeta * f \\ &= d(\zeta - \alpha) * z + d\zeta * f \\ &= d\zeta * z - d\alpha * z + d\zeta * f. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$d\zeta * f = d\alpha * z. \quad (2.19)$$

Agora, substituindo (2.19) em (2.9), temos (2.18). A dependência contínua de z com respeito a f segue da solução explícita (2.18) e da desigualdade (1.6). Do item 5 da Observação 1.1, segue que, se $f \in \mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$ e $f(0) = 0$, então a solução $z \in \mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$ e $z(0) = 0$ e, se $f \in NBV([0, R], \mathbb{C}^n)$, então a solução $z \in NBV([0, R], \mathbb{C}^n)$. $\square$

Teorema 2.7. *Seja $\alpha \in NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n \times n})$ satisfazendo a condição (2.11). Então existe um único $\zeta \in NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n \times n})$ tal que*

$$\zeta(t) = [\zeta * d\alpha](t) + \alpha(t), \quad t \geq 0 \quad (2.20)$$

Demonstração. Se $\beta \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$, temos que $\beta(t) = \beta(R-)$ para $t \geq R$. Tomando $R > 0$, definimos $\alpha_R \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ por $\alpha_R(t) = \alpha(t)$ para $0 \leq t < R$ e $\alpha_R(t) = \alpha(R-)$ para $t \geq R$. Denotamos por $\zeta_R \in NBV([0, R], \mathbb{C}^{n \times n})$ o núcleo resolvente da equação de renovação (2.8), onde α é substituído por α_R . Assim

$$\zeta_R(t) = d\alpha_R * \zeta_R(t) + \alpha_R(t), \quad 0 \leq t \leq R, \quad (2.21)$$

o que prova o resultado. □

Corolário 2.8. *Seja $\alpha \in NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n \times n})$ satisfazendo a condição (2.11). Para todas as funções $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}^n$ que satisfaçam uma das seguintes propriedades*

1. *A restrição de f a intervalos $[0, R]$ pertence a $L^p([0, R], \mathbb{C}^n)$, para $R > 0$ e $1 \leq p \leq \infty$;*
2. *f pertence a $NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^n)$;*
3. *A restrição de f a intervalos $[0, R]$ pertence a $\mathcal{C}([0, R], \mathbb{C}^n)$, para $R > 0$ e $f(0) = 0$.*

existe uma única solução z de (2.9), isto é

$$z(t) = [d\alpha * z](t) + f(t),$$

tal que z tem as mesmas propriedades de f . Além disso, z é dada explicitamente pela fórmula

$$z(t) = [d\zeta * f](t) + f(t), \quad t \geq 0. \quad (2.22)$$

Demonstração. Segue do Lema 2.6 estendendo as conclusões para funções definidas em $[0, \infty)$. O núcleo resolvente é encontrado a partir do Teorema 2.7. □

2.3 Representação de uma EDF como uma equação de renovação

Estabeleceremos aqui uma equivalência entre equações diferenciais funcionais e uma classe de equações de renovação. Consideramos, como na seção anterior, o problema de valor inicial em EDF

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}Mx_t = Lx_t & t \geq 0 \\ x_0 = \varphi & \varphi \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (2.23)$$

onde $M, L : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ são dados por

$$L\varphi = \int_0^r d\eta(\theta)\varphi(-\theta), \quad M\varphi = \varphi(0) - \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta). \quad (2.24)$$

e $\mu, \eta \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$ com μ contínua em 0. Iniciamos nosso estudo com o seguinte resultado.

Lema 2.9. *O problema de valor inicial (2.23) é equivalente à seguinte equação de renovação*

$$x(t) = dk * x(t) + F\varphi(t) \quad t \geq 0, \quad (2.25)$$

escrita na forma integral como

$$x(t) = \int_0^t [dk(\theta)x(t-\theta) + F\varphi(t)], \quad t \geq 0 \quad (2.26)$$

onde k é dado por

$$k(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \eta(s)ds \quad (2.27)$$

e $F : \mathcal{C} \rightarrow L^\infty$, definida por

$$F\varphi(t) = M\varphi + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) + \int_0^t \left[\int_s^r d\eta(\theta)\varphi(s-\theta) \right] ds, \quad t \geq 0, \quad (2.28)$$

aplica a condição inicial $\varphi \in \mathcal{C}$ na função forçante correspondente da equação de renovação (2.25). Para $\varphi \in \mathcal{C}$, temos que $F\varphi(\cdot)$ é constante em $[r, \infty)$, $F\varphi(0) = \varphi(0)$ e $F\varphi + \mu \cdot \varphi(0)$ é contínua.

Demonstração. Integrando o sistema (2.23), obtemos

$$Mx_t - M\varphi = \int_0^t \left[\int_0^r d\eta(\theta)x(s - \theta) \right] ds. \quad (2.29)$$

Agora, para qualquer $\xi \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$ e para $0 < t \leq r$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^r d\xi(\theta)x(t - \theta) &= \int_0^t d\xi(\theta)x(t - \theta) + \int_t^r d\xi(\theta)x(t - \theta) \\ &= \int_0^t d\xi(\theta)x(t - \theta) + \int_t^r d\xi(\theta)\varphi(t - \theta) \end{aligned} \quad (2.30)$$

pois para $t \leq \theta \leq r$, $t - \theta \leq 0$ e $x(t - \theta) = \varphi(t - \theta)$. Para $t > r$, usando o fato de que para $\theta \notin [0, r]$, a variação de ξ se anula em $(r, t]$, vemos que

$$\begin{aligned} \int_t^r d\xi(\theta)\varphi(t - \theta) &= 0, \\ \int_0^t d\xi(\theta)x(t - \theta) &= \int_0^r d\xi(\theta)x(t - \theta). \end{aligned}$$

Portanto, para $t > 0$ e para todo $\xi \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$, escrevemos

$$\int_0^r d\xi(\theta)x(t - \theta) = \int_0^t d\xi(\theta)x(t - \theta) + \int_t^r d\xi(\theta)\varphi(t - \theta). \quad (2.31)$$

Aplicando (2.31) em (2.29), para $t > 0$, temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^r d\mu(\theta)x(t - \theta) + M\varphi + \int_0^t \left[\int_0^r d\eta(\theta)x(s - \theta) \right] ds \\ &= \int_0^t d\mu(\theta)x(t - \theta) + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t - \theta) + M\varphi \\ &\quad + \int_0^t \left[\int_0^s d\eta(\theta)x(s - \theta) + \int_s^r d\eta(\theta)\varphi(s - \theta) \right] ds \\ &= \int_0^t d\mu(\theta)x(t - \theta) + \int_0^t \left[\int_0^s d\eta(\theta)x(s - \theta) \right] ds \\ &\quad + M\varphi + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t - \theta) + \int_0^t \left[\int_s^r d\eta(\theta)\varphi(s - \theta) \right] ds. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini na segunda integral e definindo $F\varphi(t)$ como em (2.28), que contém explicitamente o dado inicial φ , temos

$$x(t) = \int_0^t d\mu(\theta)x(t - \theta) + \int_0^t \left[\int_0^s d\eta(\theta)x(s - \theta) \right] ds + F\varphi(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_0^t d\eta(\theta) \left[\int_\theta^t x(s-\theta)ds \right] + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_0^t d\eta(\theta) \left[\int_0^{t-\theta} x(s)ds \right] + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \eta(\theta) \left[\int_0^{t-\theta} x(s)ds \right] \Big|_{\theta=0}^t + \int_0^t \eta(\theta)x(t-\theta)d\theta + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)x(t-\theta) + \int_0^t \eta(\theta)x(t-\theta)d\theta + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t [d\mu(\theta) + \eta(\theta)d\theta]x(t-\theta) + F\varphi(t) \\
&= \int_0^t dk(\theta)x(t-\theta) + F\varphi(t) = dk * x(t) + F\varphi(t).
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
F\varphi(0) &= M\varphi + \int_0^r d\mu(\theta)\varphi(-\theta) \\
&= \varphi(0).
\end{aligned}$$

Como μ é contínua em $\theta = 0$, segue que k também o é. Logo (2.25) também é verdadeira para $t = 0$. Também podemos mostrar que $F\varphi(t)$ é constante para $t \geq r$, uma vez que as variações de μ e η são nulas para $\theta \geq r$.

Mostremos agora a continuidade de $F\varphi + \mu \cdot \varphi(0)$. O único termo não contínuo em (2.28) é o segundo. Então, a extensão de φ de $[-r, 0]$ a $[-r, \infty)$ definida por $\varphi(\theta) = \varphi(0)$, se $\theta \geq 0$, é contínua. Além disso, a aplicação $t \xrightarrow{T} \varphi_t$ é contínua. Como $\psi \xrightarrow{S} \int_0^r d\mu(\theta)\psi(-\theta)$ também é uma aplicação contínua, segue que a composição

$$\begin{aligned}
t \xrightarrow{S \circ T} \int_0^r d\mu(\theta)\varphi_t(-\theta) &= \int_0^t d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) \\
&= \int_0^t d\mu(\theta)\varphi(0) + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) \\
&= \mu(t)\varphi(0) + \int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta)
\end{aligned}$$

é contínua. Portanto,

$$\int_t^r d\mu(\theta)\varphi(t-\theta) = \int_0^r d\mu(\theta)\varphi_t(-\theta) - \mu(t) \cdot \varphi(0),$$

de onde segue que $F\varphi + \mu \cdot \varphi(0)$ é contínua. $\square$

Teorema 2.10. *A solução $x(t)$ do PVI (2.23) é contínua. Além disso $x(t)$ é dada por*

$$x = d\zeta * F\varphi + F\varphi \quad (2.32)$$

onde ζ é o núcleo resolvente de k (cf. Def. 2.5 e Teo. 2.7), e k é dado por (2.27).

Demonstração. Podemos reescrever a equação de renovação (2.25) na forma

$$y = dk * y + F_0(\varphi) \quad (2.33)$$

onde $y = x - \varphi(0)$ e com

$$F_0(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} F\varphi - \varphi(0) + k \cdot \varphi(0). \quad (2.34)$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x &= dk * x + F\varphi \\ x - \varphi(0) &= dk * x + F\varphi - \varphi(0) \\ x - \varphi(0) &= dk * [x - \varphi(0)] + F\varphi - \varphi(0) + dk * \varphi(0) \\ y &= dk * y + \underbrace{F\varphi - \varphi(0) + k \cdot \varphi(0)}_{\stackrel{\text{def}}{=} F_0(\varphi)}. \end{aligned}$$

Das propriedades de $F\varphi$ do Lema 2.9, segue que $F_0(\varphi)(\cdot)$ é contínua em $[0, \infty)$ e $F_0(\varphi)(0) = 0$. Do Teorema 2.7, na página 20, com $\alpha = k$, onde k é dado por (2.27), encontramos o único núcleo resolvente ζ . Usando a forma explícita da solução, dada pelo Corolário 2.8, na página 21, temos

$$y = d\zeta * F_0(\varphi) + F_0(\varphi) \quad (2.35)$$

como uma representação alternativa da solução do PVI (2.23) por meio da solução de uma equação de renovação em termos do espaço $\{f \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C}^n); f(0) = 0\}$. Destas considerações, segue que $y = x - \varphi(0)$ é contínua e $y(0) = 0$. Isto nos dá que as soluções $x(t)$ de (2.23) são contínuas e $x(0) = \varphi(0)$.

Além disso, de (2.35) e (2.34), e usando $d\zeta * k = \zeta - k$, temos

$$y = d\zeta * F_0(\varphi) + F_0(\varphi)$$

$$\begin{aligned}
x - \varphi(0) &= d\zeta * (F\varphi - \varphi(0) + k \cdot \varphi(0)) + F\varphi - \varphi(0) + k \cdot \varphi(0) \\
x &= d\zeta * F\varphi - d\zeta * \varphi(0) + d\zeta * k \cdot \varphi(0) + F\varphi + k \cdot \varphi(0) \\
x &= d\zeta * F\varphi - \zeta \cdot \varphi(0) + (\zeta - k) \cdot \varphi(0) + F\varphi + k \cdot \varphi(0) \\
x &= d\zeta * F\varphi + F\varphi.
\end{aligned}$$

donde obtemos (2.32). $\square$

Finalizamos esta seção dando estimativas da limitação exponencial tanto do núcleo resolvente quanto da solução. Estas estimativas garantem que podemos aplicar resultados das transformadas de Laplace-Stieltjes no estudo das soluções das EDF.

Limitação exponencial das soluções de equações de renovação

Lema 2.11. *O núcleo k dado por (2.27), isto é,*

$$k(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \eta(s)ds,$$

é ϵ -exponencialmente limitado para todo $\epsilon > 0$. Além disso, temos

$$|v_k| < Ct \tag{2.36}$$

para $C > 0$ suficientemente grande, onde v_k é a função variação total de k .

Demonstração. Como μ e η pertencem a $NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$, temos que η é constante a partir de $\theta \geq r$ e

$$k(\theta) = k(r) + (\theta - r)\eta(r).$$

Disto seguem todas as afirmações a respeito de k . $\square$

Teorema 2.12. *O núcleo resolvente ζ de k , onde k é dado por (2.27), pertence a $NBV_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{n \times n})$ e é γ -exponencialmente limitado, para algum γ suficientemente grande. Além disso, ζ é dado pela série*

$$\zeta = k + dk * k + dk * dk * k + \dots \tag{2.37}$$

Demonstração. Dos Lemas 1.7 e 2.11, temos que

$$\begin{aligned} |k(t)| &\leq Ct \\ |dk * k(t)| &\leq C^2 \frac{t^2}{2!} \\ |dk * dk * k(t)| &\leq C^3 \frac{t^3}{3!} \end{aligned}$$

e de forma geral,

$$\left| \underbrace{dk * dk * \cdots * dk * k(t)}_{n-1 \text{ convoluções}} \right| \leq C^n \frac{t^n}{n!}. \quad (2.38)$$

Desta forma, podemos estimar a série

$$|k + dk * k + dk * dk * k + \cdots| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Ct)^n}{n!} = e^{Ct}. \quad (2.39)$$

Como as mesmas estimativas (2.38) e (2.39) valem para a variação total de k , como cada parcela é NBV_{loc} (cf. Corolário 2.8) e como NBV_{loc} é completo, segue que o limite da série é uma função localmente de variação limitada. Defina ζ como o valor da série. Destas discussões, vem que

$$v_{\zeta}(t) \leq e^{Ct},$$

isto é, ζ é C -exponencialmente limitada. Por simples substituição, é fácil ver que ζ definida como acima é o núcleo resolvente de k , isto é,

$$\zeta = dk * \zeta + k.$$

Isto nos prova o resultado. □

Da representação (2.32) para a solução do PVI (2.23), segue imediatamente o seguinte fato.

Corolário 2.13. *A solução x de (2.23), dada por (2.32), é γ -exponencialmente limitada para γ suficientemente grande.*

2.4 O espaço das funções forçantes

Nesta seção, descreveremos o espaço das funções forçantes através da representação de EDF's como equações de renovação (2.25).

A partir do item 5 da Observação 1.1, para $\alpha \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$, temos que a aplicação $f \mapsto d\alpha * f$ leva o espaço $\{f \in \mathcal{C}([0, r], \mathbb{C}^n) : f(0) = 0\}$ em si mesmo, mas o espaço $\mathcal{C}$ não é necessariamente aplicado em si mesmo por este operador. Portanto, a correspondência biunívoca entre a função forçante e a solução da equação de renovação é fechada no espaço $\{f \in \mathcal{C}([0, r], \mathbb{C}^n) : f(0) = 0\}$, mas não o é em $\mathcal{C}([0, r], \mathbb{C}^n)$. As mesmas afirmações são válidas para os espaços $\{f \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C}^n) : f(0) = 0\}$ e $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C}^n)$. Para EDF's retardadas, isto é, quando $\mu \equiv 0$, encontramos em Hale & Verduyn Lunel [5] que $\{f \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C}^n) : f(t) = f(r), \text{ para } t \geq r\}$ é uma escolha comum para o espaço das funções forçantes da representação desta classe de EDF's como equações de renovação. Observamos que para EDFR, a restrição $f(0) = 0$ não é necessária, pois $k(\theta) = \int_0^\theta \eta(\tau) d\tau$, que é contínua. Do item 5 da Observação 1.1, vem que os espaços $\mathcal{C}([0, r], \mathbb{C}^n)$ e $\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C}^n)$ são fechados com respeito à aplicação $f \mapsto dk * f$.

Definição 2.14. O espaço $\mathcal{F}$ das funções forçantes f da equação de renovação

$$x = dk * x + f \quad (2.40)$$

onde k é como em (2.27) é definido como o conjunto das funções $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{C}^n$ tais que $f + \mu \cdot f(0)$ é contínua e $f(t) = f(r)$ para $t \geq r$. Pelo Lema 2.9, para cada $\varphi \in \mathcal{C}$, temos que $F\varphi \in \mathcal{F}$.

Com esta definição, podemos ver com clareza as afirmações acima acerca de EDFR's, ou seja, segue desta definição que, como $\mu \equiv 0$, então o espaço das funções forçantes para EDFR será dado por $\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C}^n) : f(t) = f(r) \text{ para } t \geq r\}$.

Temos que $\mathcal{F}$ é um espaço linear e podemos definir uma norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ em $\mathcal{F}$ por

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \|f + \mu \cdot f(0)\|_{\mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{C}^n)}$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma do supremo, de modo que o espaço é completo.

Lema 2.15. *Para cada $f \in \mathcal{F}$, existe uma única solução x definida em $[0, \infty)$ de (2.40) tal que x é contínua em $[0, \infty)$ e $x(0) = f(0)$.*

Demonstração. Temos as seguintes equações equivalentes

$$\begin{aligned} x &= dk * x + f \\ x - f(0) &= dk * x + f - f(0) \\ x - f(0) &= dk * [x - f(0)] + f - f(0) + dk * f(0) \\ x - f(0) &= dk * [x - f(0)] + f - f(0) + k \cdot f(0) \\ x - f(0) &= dk * [x - f(0)] + f - f(0) + [\mu + \int \eta] \cdot f(0). \end{aligned}$$

Como $f + k \cdot f(0) - f(0)$ é contínua e se anula em 0, pelo Corolário 2.8, $x - f(0)$ é contínua e $x(0) - f(0) = 0$, logo $x(t)$ é contínua e $x(0) = f(0)$. $\square$

2.5 Resolução de EDF por transformadas de Laplace

Nas seções anteriores, vimos que a equação de renovação

$$x = dk * x + f \tag{2.41}$$

onde $f \in \mathcal{F}$, está relacionada com o problema de valor inicial (2.23) pelos Lema 2.9 e Teorema 2.10. Sua solução é dada por

$$x = d\zeta * f + f \tag{2.42}$$

onde ζ é o núcleo resolvente de (2.41) (ζ é uma função NBV). Do Teorema 2.12 segue que $\zeta \in NBV_{\text{loc}}$ e é exponencialmente limitada. Do Corolário 2.13, segue que x é γ -exponencialmente limitada. Portanto, podemos aplicar a transformada de Laplace em (2.41) para obter, para $\text{Re } z$ suficientemente grande, a equação

$$\mathcal{L}(x)(z) = \mathcal{L}(dk)(z)\mathcal{L}(x)(z) + \mathcal{L}(f)(z) \tag{2.43}$$

que torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x)(z) &= (I - \mathcal{L}(dk)(z))^{-1} \mathcal{L}(f)(z) \\ &= (zI - z\mathcal{L}(dk)(z))^{-1} z\mathcal{L}(f)(z) \end{aligned}$$

$$= \Delta(z)^{-1}(f(0) + \mathcal{L}(df)(z)). \quad (2.44)$$

Note que $\mathcal{L}(df)(z)$ está bem definida pois f é soma de uma função contínua com uma função localmente de variação limitada e $\Delta(z)$ é definido por

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= z(I - \mathcal{L}(dk)(z)) \\ &= (zI - z\mathcal{L}(d\mu)(z) - z\mathcal{L}(\eta)(z)) = (zI - z\mathcal{L}(d\mu)(z) - \mathcal{L}(d\eta)(z)) \\ &= z \left[I - \int_0^r e^{-zt} d\mu(t) \right] - \int_0^r e^{-zt} d\eta(t). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Como $z \mapsto \Delta(z)$ e $z \mapsto \int_0^r e^{-zt} df(t)$ são funções inteiras, então o lado direito de (2.44) é uma função meromorfa com, possivelmente, pólos nas raízes da *equação característica*

$$\det \Delta(z) = 0. \quad (2.46)$$

Mostremos que existe um semi-plano que não possui raízes de $\det \Delta(z)$.

Lema 2.16. *As raízes de (2.46) estão localizadas em um semi-plano esquerdo $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < \gamma_0\}$ para algum $\gamma_0 \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Mostremos que, quando $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$, então

$$\int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) \rightarrow \eta(0-). \quad (2.47)$$

Para isto, seja $\epsilon > 0$ dado. Como μ é contínua em 0, existe $\delta > 0$ tal que a variação de μ em $[0, \delta]$ é menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Tome $N > 0$ tal que $e^{-\delta N} \operatorname{Var}_{[\delta, r]} \mu < \frac{\epsilon}{2}$. Então, para z tal que $\operatorname{Re} z > N$, estimamos

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right\| &= \left\| \int_0^\delta e^{-z\theta} d\mu(\theta) + \int_\delta^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right\| \\ &\leq \left\| \int_0^\delta e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right\| + \left\| \int_\delta^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right\| \\ &\leq \max_{\theta \in [0, \delta]} |e^{-z\theta}| \operatorname{Var}_{[0, \delta]} \mu + \max_{\theta \in [\delta, r]} |e^{-z\theta}| \operatorname{Var}_{[\delta, r]} \mu \\ &\leq \operatorname{Var}_{[0, \delta]} \mu + e^{-\delta N} \operatorname{Var}_{[\delta, r]} \mu < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Concluimos a demonstração argumentando da mesma forma para $\bar{\eta} = \eta - \eta(0-)$, que é contínua em zero. Então temos que, quando $\operatorname{Re} z$ é suficientemente grande, $\Delta(z) = z(I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta)) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta)$ se aproxima de $zI - \eta(0-)$ e, conseqüentemente, é não-singular. $\square$

Podemos inverter a representação da transformada de Laplace da solução para obter uma caracterização para a solução.

Teorema 2.17. *Seja k dado por $k(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \eta(s)ds$, onde μ e η são funções NBV e μ é contínua em $\theta = 0$. Para $f \in \mathcal{F}$, a solução x da equação de renovação*

$$x = dk * x + f \quad (2.48)$$

admite, para $t > 0$, a representação

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) dz \quad (2.49)$$

para γ suficientemente grande.

Demonstração. Pelo Lema 2.16, temos que $\Delta(z)$ é não-singular para $\text{Re } z$ suficientemente grande. Como x é contínua e exponencialmente limitada, temos então, pela fórmula de inversão (1.12), que

$$x(t) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{zt} \mathcal{L}(x)(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} \mathcal{L}(x)(z) dz.$$

Mas por (2.44) temos que

$$\mathcal{L}(x)(z) = \Delta(z)^{-1} (f(0) + \mathcal{L}(df)(z)),$$

de onde segue que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^\infty e^{-z\theta} df(\theta) \right) dz.$$

□

O seguinte exemplo nos mostra, utilizando as técnicas estudadas, um método para calcular o núcleo resolvente.

Exemplo 2.18. Considere a seguinte EDF

$$\dot{x}(t) = Ax(t-1)$$

que pode ser escrita na forma $\frac{d}{dt} Mx_t = Lx_t$ se tomarmos $r = 1$, $\mu \equiv 0$ e $\eta(\theta) = Ah_1(\theta)$.

Deste modo, utilizando o Lema (2.9), temos que o núcleo da equação de renovação correspondente a essa EDF é dado por

$$k(\theta) = h_1(\theta)A(\theta - 1)$$

e então, aplicando a transformada de Laplace-Stieltjes, obtemos que

$$\mathcal{L}(k)(z) = \frac{Ae^{-z}}{z^2}.$$

Como o núcleo resolvente ζ é dado pela equação $\zeta = d\zeta * k + k$, concluimos que

$$\mathcal{L}(\zeta)(z) = \frac{Ae^{-z}}{z(z - Ae^{-z})}$$

e, portanto, podemos obter o núcleo resolvente, aplicando a transformada de Laplace-Stieltjes inversa, ou seja,

$$\zeta(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Ae^{-s}}{s(s - Ae^{-s})} \right].$$

Da representação (2.49) da solução de (2.48), conseguimos estudar o comportamento assintótico das soluções, porém, antes, é necessário estudar algumas estimativas relacionadas a $\Delta(z)$.

Capítulo 3

Comportamento assintótico

3.1 Estimativas para $\Delta(z)$ e quantidades relacionadas

Nesta seção estudaremos alguns resultados relacionados com a localização das raízes e algumas estimativas da matriz característica $\Delta(z)$, dada em (2.45), além de seu determinante e sua inversa. A partir desses resultados, estudaremos o comportamento assintótico das soluções. Podemos escrever $\Delta(z)$ como

$$\Delta(z) = z\Delta_0(z) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) \quad (3.1)$$

onde

$$\Delta_0(z) = I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta). \quad (3.2)$$

É possível que existam infinitas raízes da equação característica (2.46) em uma faixa vertical do plano complexo $\{z \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re} z < b\}$. Um exemplo é considerar a equação característica da seguinte EDF escalar

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) = 0$$

dada por

$$\Psi(z) = z(1 - e^{-z})$$

e tem todas as suas raízes da forma $2k\pi i$ com $k \in \mathbb{Z}$ e, portanto, estão sobre a reta $\operatorname{Re} z = 0$. Isto é uma complicação extra para equações neutras que não é observado em equações diferenciais retardadas. Veja, por exemplo, Teorema I.4.4 de Diekmann *et al.* [3].

Para que possamos controlar o comportamento de $|\Delta(z)|$ quando $|z| \rightarrow \infty$, impomos a seguinte hipótese sobre o núcleo μ :

- (J) As entradas μ_{ij} de μ têm um salto antes de se tornarem constantes, isto é, existe t_{ij} com $\mu_{ij}(t_{ij}-) \neq \mu_{ij}(t_{ij}+)$ e $\mu_{ij}(t_{ij}+) = \mu_{ij}(t)$ para $t > t_{ij}$.

Por exemplo, μ pode ser uma função escada. Neste caso

$$\Delta_0(z) = I - \sum_{j=1}^{\infty} e^{-zr_j} A_j.$$

O próximo lema é uma adaptação do Teorema 4.6 de Verduyn Lunel [10]. Recordamos que $\mathbb{C}_{\gamma_1, \gamma_2} = \{z \in \mathbb{C} : \gamma_1 < \operatorname{Re} z < \gamma_2\}$.

Lema 3.1. *Se μ satisfaz (J), então os zeros de $\det \Delta_0(z)$ estão localizados em uma faixa finita $\mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$. Para z na faixa $\mathbb{C}_{\omega_0, \infty}$, existem constantes positivas m , M e τ tais que*

$$m \leq |\det \Delta_0(z)| \leq M. \quad (3.3)$$

Além disso, para qualquer $\epsilon > 0$, para uma escolha adequada de m e M , a estimativa (3.3) vale para $z \in \mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$ fora de círculos de raio ϵ centrados nos zeros de $\det \Delta_0(\cdot)$.

Demonstração. Dividiremos a prova em quatro partes. Na parte 1, escrevemos $\det \Delta_0(z)$ como a transformada de Laplace-Stieltjes de uma medida $d\tilde{\mu}$. Na parte 2, mostraremos que existe α_0 tal que não há raízes de $\det \Delta_0(z)$ no semiplano $\mathbb{C}_{-\infty, \alpha_0}$. Na parte 3, mostraremos o mesmo para $\mathbb{C}_{\omega_0, \infty}$ e a estimativa (3.3) nesta região. Finalmente, na parte 4, mostraremos a estimativa (3.3) na faixa $\mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$.

Parte 1: Para qualquer função $\alpha \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$, temos que

$$\int_0^r e^{-z\theta} d\alpha(\theta) = \int_0^\infty e^{-z\theta} d\alpha(\theta) = \mathcal{L}(d\alpha)(z).$$

Temos que $\mathcal{L}(dh_y)(z) = e^{-zy}$, onde h_y é a função de Heaviside. Podemos reescrever $\Delta_0(z)$, dado por (3.2), como

$$\Delta_0(z) = I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) = e^{-0z} I - \int_0^\infty e^{-z\theta} d\mu(\theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}(dh_0 I)(z) - \mathcal{L}(d\mu)(z) = \mathcal{L}(dh_0 I - d\mu)(z) \\
&= \mathcal{L}(d\xi)(z)
\end{aligned}$$

onde $\xi_{ij} = \delta_{ij}h_0 - \mu_{ij}$. Como $\det \Delta_0(z)$ é uma soma de produtos de $\mathcal{L}(d\mu_{ij})(z)$, que é igual à transformada de Laplace-Stieltjes da soma de certas convoluções de $d\mu_{ij}$, existe uma função $\tilde{\mu}$ de variação limitada tal que

$$\det \Delta_0(z) = \int_0^\tau e^{-zs} d\tilde{\mu}(s) \quad (3.4)$$

onde $\tilde{\mu}$ satisfaz (J), tem necessariamente um salto em 0 e num último ponto $\tau \leq nr$.

Parte 2: Seja agora $l = |\tilde{\mu}(\tau) - \tilde{\mu}(\tau-)|/2$ e escolha $\epsilon > 0$ tal que $\text{Var}_{[\tau-\epsilon, \tau]} \tilde{\mu} < \frac{l}{2}$. Sejam $\gamma = \min\{l/(2 \text{Var}_{[0, \tau-\epsilon]} \tilde{\mu}), 1\}$ e $\alpha_0 = \frac{1}{\epsilon} \ln \gamma \leq 0$. Então, para $z \in \mathbb{C}_{-\infty, \alpha_0}$, temos que

$$|e^{z\epsilon}| = e^{\text{Re } z\epsilon} \leq e^{\alpha_0 \epsilon} = \gamma \leq \frac{l}{2 \text{Var}_{[0, \tau-\epsilon]} \tilde{\mu}}.$$

Portanto, para $z \in \mathbb{C}_{-\infty, \alpha_0}$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) \right| &= \left| e^{-z\tau} (\tilde{\mu}(\tau) - \tilde{\mu}(\tau-)) + \int_0^{\tau-\epsilon} e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) + \int_{\tau-\epsilon}^{\tau-} e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) \right| \\
&\geq |e^{-z\tau}| [|\tilde{\mu}(\tau) - \tilde{\mu}(\tau-)| - |e^{z\epsilon}| \text{Var}_{[0, \tau-\epsilon]} \tilde{\mu} - \text{Var}_{[\tau-\epsilon, \tau]} \tilde{\mu}] \\
&\geq |e^{-z\tau}| \left[2l - \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \right] = l |e^{-z\tau}|.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Portanto, para $\alpha_0 = \frac{1}{\epsilon} \ln \gamma \leq 0$, segue que não há zeros de $\det \Delta_0(z) = \int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t)$ em $\mathbb{C}_{-\infty, \alpha_0}$.

Parte 3: Mostramos agora que existe ω_0 tal que não há raízes de $\det \Delta_0(z)$ no semiplano $\mathbb{C}_{\omega_0, \infty}$. Seja m dado por $m \stackrel{\text{def}}{=} |\tilde{\mu}(0) - \tilde{\mu}(0-)|/2$. Escolha $\delta > 0$ tal que $\text{Var}_{(0, \delta]} \tilde{\mu} < \frac{m}{2}$. Sejam $\nu = \max\{(2 \text{Var}_{[\delta, \tau]} \tilde{\mu})/m, 1\}$ e $\omega_0 = \frac{1}{\delta} \ln \nu \geq 0$. Então, para $z \in \mathbb{C}_{\omega_0, \infty}$,

$$|e^{-z\delta}| = e^{-\text{Re } z\delta} \leq e^{-\omega_0 \delta} = e^{-\ln \nu} = \frac{1}{\nu} \leq \frac{m}{2 \text{Var}_{[\delta, \tau]} \tilde{\mu}}.$$

Portanto, para $z \in \mathbb{C}_{\omega_0, \infty}$, temos que

$$\left| \int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) \right| = \left| (\tilde{\mu}(0) - \tilde{\mu}(0-)) + \int_{0+}^\delta e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) + \int_\delta^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\geq |\tilde{\mu}(0) - \tilde{\mu}(0-)| - \text{Var}_{(0,\delta]} \tilde{\mu} - |e^{-z\delta}| \text{Var}_{[\delta,\tau]} \tilde{\mu} \\
&\geq 2m - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} = m.
\end{aligned}$$

Concluimos que, para $\omega_0 = \frac{1}{\delta} \ln \nu \geq 0$, não há zeros de $\det \Delta_0(z)$ em $\mathbb{C}_{\omega_0, \infty}$. Assim, fica mostrado que os zeros de $\det \Delta_0(\cdot)$ estão localizados em uma faixa finita $\mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$. Além disso, sendo $M \stackrel{\text{def}}{=} \text{Var}_{[0, \tau]} \tilde{\mu}$, temos que $|\int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t)| \leq M$ e, como $\text{Re } z > \omega_0 \geq 0$, segue a estimativa (3.3) para $z \in \mathbb{C}_{\omega_0, \infty}$.

Parte 4: Provemos agora que, para cada $\epsilon > 0$, existem m e M tais que vale (3.3),

$$m \leq |\det \Delta_0(z)| \leq M,$$

para $z \in \mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$, fora de círculos de raio ϵ centrados nos zeros de $\det \Delta_0$. Iniciamos com o limitante inferior para $|\det \Delta_0(z)|$.

Denote os zeros de $\det \Delta_0$ por $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ e suponha que tal constante m não exista. Então existem $\epsilon > 0$ e uma sequência $z_1, z_2, \dots$ de pontos em $\mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$, mas fora dos discos $|z - \lambda_j| \leq \epsilon$, tais que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \det \Delta_0(z_j) = 0. \quad (3.6)$$

Seja $z_j = x_j + iy_j$. Como $\sup_j |x_j| \leq \max\{|\alpha_0|, |\omega_0|\}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \bar{x}.$$

Defina agora uma sequência de funções inteiras dadas por

$$F_j(z) = \det \Delta_0(z + iy_j).$$

Daí, como $|e^{-zt}|$ é limitada em faixas verticais onde a parte real é limitada e $\tilde{\mu} \in NBV([0, \tau], \mathbb{C}^{n \times n})$, segue que $\det \Delta_0$ é limitada na vizinhança

$$U = \{z : \alpha_0 - 1 < \text{Re } z < \omega_0 + 1\} \quad (3.7)$$

da faixa fechada $\alpha_0 \leq \text{Re } z \leq \omega_0$. Segue que a sequência $\{F_j\}$ é uniformemente limitada em U e, portanto, localmente limitada. Pelo Teorema de Montel¹, $\{F_j\}$ forma uma família normal². Ver, por exemplo, Conway [2].

¹Seja $H(U) \subset \mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ o conjunto das funções analíticas num aberto U ; então uma família $\mathcal{H}$ em $H(U)$ é normal se, e somente se, $\mathcal{H}$ é localmente limitada.

²Seja $U \subset \mathbb{C}$ um aberto e $\{K_n\}$ uma sequência encaixante de compactos tais que

Deste modo, existe uma subsequência $\{F_{j_k}\}$ que converge uniformemente em subconjuntos compactos da faixa U para uma função limite $\bar{F}$. Além disso, $\bar{F} \not\equiv 0$. Pelo Teorema VII.2.1 de Conway [2], sendo $\bar{F}$ limite de funções analíticas, segue que $\bar{F}$ é analítica. Como $F_j(x_j) = \det \Delta_0(z_j) \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, segue que $\bar{F}(\bar{x}) = 0$.

Mostremos agora que existe $\epsilon > 0$ tal que $\bar{F}(z) \neq 0$ para $|z - \bar{x}| = \frac{\epsilon}{2}$. Para isto, seja δ tal que $\bar{B}(\bar{x}, \delta) \subset U$. Como os zeros de $\bar{F}$ são isolados, existe um número finito deles em $\bar{B}(\bar{x}, \delta)$ que denotaremos por $\bar{x}, \omega_1, \dots, \omega_n$. Seja $\epsilon = \min\{|\omega_j - \bar{x}|\} > 0$. Segue que $\bar{F}(z) \neq 0$ para z tal que $|z - \bar{x}| = \frac{\epsilon}{2}$.

Como $\bar{F} \not\equiv 0$, pelo Teorema de Hurwitz³, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $j \geq N$, $\bar{F}$ e F_j tem o mesmo número de zeros em $B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{2})$, ou seja, um único zero. Podemos tomar tal N suficientemente grande de modo que $|\bar{x} - x_N| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Logo, F_j tem um zero em $B(\bar{x}, \frac{\epsilon}{2})$ para $j \geq N$. Para $j = N$, seja a tal que $|a - \bar{x}| < \frac{\epsilon}{2}$ e $F_N(a) = 0$ e tome $\bar{z} = a + iy_N$. Então $\det \Delta_0(\bar{z}) = 0$. Assim,

$$|\bar{z} - z_N| = |a + iy_N - (x_N + iy_N)| = |a - x_N| \leq |a - \bar{x}| + |\bar{x} - x_N| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

o que contradiz a suposição de que z_j estavam fora de círculos de raio ϵ centrados nos zeros de $\det \Delta_0$. Portanto existe m tal que $|\det \Delta_0(z)| \geq m$. Além disso, como $|e^{-zt}|$ é uma função limitada para $z \in \mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$, $t \in [0, \tau]$ e $\tilde{\mu}$ é de variação limitada, existe M tal que

$$|\det \Delta_0(z)| = \left| \int_0^\tau e^{-zt} d\tilde{\mu}(t) \right| \leq \max_{0 \leq t \leq \tau} |e^{-zt}| \text{Var}_{[0, \tau]} \tilde{\mu} \leq M$$

de onde segue a última afirmação do lema. $\square$

O seguinte exemplo, ilustra que o determinante de Δ_0 é uma soma de produtos de $\mathcal{L}(d\mu_{ij})(z)$ e que existe uma função $\tilde{\mu}$ de variação limitada, tal

$U = \bigcup_{i=1}^\infty K_n$. Defina $\rho_n(f, g) = \sup\{d(f(z), g(z)) : z \in K_n, \forall f, g \in \mathcal{C}(U, \Omega)\}$, onde Ω é um espaço métrico completo, e considere a métrica ρ em $\mathcal{C}(U, \Omega)$ dada por $\rho(f, g) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}$. Uma família $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(U, \Omega)$ é normal se cada sequência em $\mathcal{H}$ tem uma subsequência que converge para uma função $f \in \mathcal{C}(U, \Omega)$. Para U dado em (3.7), temos $U = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$ onde $K_n = \{z \in \mathbb{C} : \alpha_0 - 1 + \frac{1}{n} \leq \text{Re } z \leq \omega_0 + 1 - \frac{1}{n} \text{ e } -n \leq \text{Im } z \leq n\}$.

³Seja $U \subset \mathbb{C}$ e suponha que a sequência $\{f_n\}$ em $H(U)$ converge para f . Se $f \neq 0$, existe $a \in U$ e $R > 0$ tal que $\bar{B}(a, R) \subset U$ e $f(z) \neq 0$ em $|z - a| = R$, então existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que, para $n \geq N$, f e f_n têm o mesmo número de zeros em $B(a, R)$.

que

$$\det \Delta_0(z) = \int_0^\tau e^{-zs} d\tilde{\mu}(s)$$

onde $\tilde{\mu}$ satisfaz (J) e τ é o ponto onde ocorre o último salto de $\tilde{\mu}$ que tem, necessariamente, um salto em 0.

Exemplo 3.2. Seja $\mu \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{2 \times 2})$ definida por

$$\mu(\theta) = \begin{pmatrix} ah_{t_0}(\theta) & bh_{t_1}(\theta) \\ ch_{t_2}(\theta) & dh_{t_3}(\theta) \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $t_j > 0$ para $j = 0, 1, 2, 3$ e h_t é a função de Heaviside.

Deste modo, recordando que $\mathcal{L}(dh_t)(z) = e^{-zt}$, $t > 0$,

$$\begin{aligned} \Delta_0(z) &= I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a\mathcal{L}(dh_{t_0})(z) & b\mathcal{L}(dh_{t_1})(z) \\ c\mathcal{L}(dh_{t_2})(z) & d\mathcal{L}(dh_{t_3})(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - ae^{-zt_0} & -be^{-zt_1} \\ -ce^{-zt_2} & 1 - de^{-zt_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Então, temos que

$$\det \Delta_0(z) = 1 - de^{-zt_3} - ae^{-zt_0} + ade^{-z(t_0+t_3)} - bce^{-z(t_1+t_2)}.$$

Suponha ainda, sem perda de generalidade, que $t_0 < t_3$ e $t_0 + t_3 < t_1 + t_2$.

Considere $\tilde{\mu}(\theta)$ a função de variação limitada definida em $\mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\mu}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0, \\ 1, & 0 \leq \theta < t_0, \\ 1 - a, & t_0 \leq \theta < t_3, \\ 1 - a - d, & t_3 \leq \theta < t_0 + t_3, \\ 1 - a - d + ad, & t_0 + t_3 \leq \theta < t_1 + t_2, \\ 1 - a - d + ad - bc, & \theta \geq t_1 + t_2. \end{cases}$$

Então, concluímos que $\det \Delta_0(z) = \int_0^\tau e^{-z\theta} d\tilde{\mu}(\theta)$ onde $\tau = t_1 + t_2$ é o ponto onde ocorre o último salto de $\tilde{\mu}$.

Teorema 3.3. *Suponha que μ satisfaz (J) e tome $\mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$ como no Lema 3.1. Para qualquer $\delta > 0$, existe k tal que para qualquer zero ζ_0 de $\det \Delta_0(\cdot)$ com*

$|\zeta_0| > k$ existe um zero ζ de $\det \Delta(\cdot)$ com $|\zeta_0 - \zeta| < \delta$. Além disso, existem constantes positivas m e M tais que

$$m \leq \left| \det \left(\frac{1}{z} \Delta(z) \right) \right| \leq M \quad (3.8)$$

para $z \in \mathbb{C}_{\alpha_0, \omega_0}$ com $|z| > k$ e fora de círculos de raio ϵ centrados nos zeros de $\det \Delta(\cdot)$.

Demonstração. Para $|z| > 1$, $\det \Delta(z) = 0$ se, e somente se, $\det(\frac{1}{z} \Delta(z)) = 0$ e

$$\frac{1}{z} \Delta(z) = \Delta_0(z) - \frac{1}{z} \int_0^\tau e^{-z\theta} d\eta(\theta).$$

Do Lema 3.1 e para δ suficientemente pequeno, existe m_1 tal que

$$|\det \Delta_0(z)| \geq m_1$$

para z fora de círculos de raio δ centrados nas raízes de $\det \Delta_0(\cdot)$. Podemos estimar

$$\frac{1}{z} \left\| \int_0^\tau e^{-z\theta} d\eta(\theta) \right\| < \frac{1}{z} \int_0^\tau d|\eta|(\theta) |e^{-z\theta}| \leq \frac{1}{z} \text{Var}_{[0, \tau]} \eta \max\{e^{-\alpha_0 \tau}, 1\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{C}{z}$$

onde $d|\eta|$ denota a variação total da medida de $d\eta$. Portanto, uma vez que o determinante é uma função contínua, para $|z|$ suficientemente grande, digamos $|z| > k$,

$$\left| \det \left(\frac{1}{z} \Delta(z) \right) - \det \Delta_0(z) \right| \leq \frac{m_1}{2}.$$

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ os zeros de $\det \Delta_0(\cdot)$. Como, para todo i , $\det \Delta_0(z)$ e $\det(\frac{1}{z} \Delta(z))$ são funções analíticas em uma vizinhança Ω de $\bar{B}(\lambda_i, \delta)$ sem zeros ou pólos em $\gamma_i = \{z : |z - \lambda_i| = \delta\}$ e

$$\left| \det \left(\frac{1}{z} \Delta(z) \right) - \det \Delta_0(z) \right| \leq \frac{m_1}{2} < m_1 < |\det \Delta_0(z)|$$

segue, pelo Teorema de Rouché⁴ que $\det(\frac{1}{z} \Delta(z))$ e $\det \Delta_0(z)$ tem o mesmo número de zeros dentro dos círculos de raio δ centrados nas raízes de $\det \Delta_0(z)$.

⁴Suponha que γ é um caminho fechado em uma região Ω , tal que $\text{Ind}_\gamma(\alpha) = 0$ ou 1 , para todo $\alpha \in \Omega - \{\gamma\}$ (onde $\{\gamma\}$ é o traço de γ), e tome Ω_1 como o conjunto de todos os α com $\text{Ind}_\gamma(\alpha) = 1$. Para toda $f \in H(\Omega)$, seja N_f o número de zeros de f em Ω_1 , contados de acordo com sua multiplicidade. Se $g \in H(\Omega)$ e $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, para todo $z \in \{\gamma\}$, então $N_f = N_g$.

Pelo Lema 3.1, existe M_1 tal que $|\det \Delta_0(z)| \leq M_1$, daí, tomando $M = \frac{m_1}{2} + M_1$, temos

$$\begin{aligned} \left| \det \left(\frac{1}{z} \Delta(z) \right) \right| &\leq \left| \det \left(\frac{1}{z} \Delta(z) \right) - \det \Delta_0(z) \right| + |\det \Delta_0(z)| \\ &\leq \frac{m_1}{2} + M_1 = M. \end{aligned}$$

Também, tomando $m = \frac{m_1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \det \left(\frac{1}{z} \Delta(z) \right) \right| &\geq |\det \Delta_0(z)| - \left| \det \left(\frac{1}{z} \Delta(z) \right) - \det \Delta_0(z) \right| \\ &\geq m_1 - \frac{m_1}{2} = \frac{m_1}{2} = m. \end{aligned}$$

Portanto $m \leq |\det(\frac{1}{z}\Delta(z))| \leq M$. □

Lema 3.4. *Seja $\xi \in NBV([0, r], \mathbb{C})$. Então*

1. *Para todo $C > 0$, vale*

$$|\mathcal{L}(d\xi)(z)| < \frac{|z|}{C} \text{Var}_{[0, r]} \xi \quad (3.9)$$

para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > C|e^{-zr}|$ e $|z| > C$.

2. *Para $\alpha \in \mathbb{R}$, vale*

$$|\mathcal{L}(d\xi)(z)| < e^{|\alpha|r} \text{Var}_{[0, r]} \xi \quad (3.10)$$

para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re } z > \alpha$.

Demonstração. Parte 1: Para $0 \leq \theta \leq r$ temos

$$|e^{-z\theta}| = e^{-\theta \text{Re } z} < \frac{|z|}{C}$$

pois se $\text{Re } z \geq 0$, então $e^{-\theta \text{Re } z} \leq 1 < |z|/C$ e se $\text{Re } z < 0$ então $e^{-\theta \text{Re } z} < e^{-r \text{Re } z} = |e^{-zr}| < |z|/C$. Portanto,

$$|\mathcal{L}(d\xi)(z)| = \left| \int_0^r e^{-z\theta} d\xi(\theta) \right| \leq \max_{\theta \in [0, r]} |e^{-z\theta}| \text{Var}_{[0, r]} \xi < \frac{|z|}{C} \text{Var}_{[0, r]} \xi$$

como queríamos.

Parte 2: Para $0 \leq \theta \leq r$ temos que

$$-\text{Re } z\theta \leq -\alpha\theta \leq |\alpha|\theta \leq |\alpha|r,$$

de onde concluímos que

$$|e^{-z\theta}| \leq e^{|\alpha|r}.$$

Portanto,

$$|\mathcal{L}(d\xi)(z)| = \left| \int_0^r e^{-z\theta} d\xi(\theta) \right| \leq \max_{\theta \in [0,r]} |e^{-z\theta}| \text{Var}_{[0,r]} \xi \leq e^{|\alpha|r} \text{Var}_{[0,r]} \xi,$$

concluindo a demonstração. $\square$

Lema 3.5. *Para $\det \Delta(z)$, temos a seguinte representação*

$$\det \Delta(z) = \det \Delta_0(z) z^n + \sum_{m=0}^{n-1} \mathcal{L}(d\xi_m)(z) z^m \quad (3.11)$$

onde $d\xi_m$ são certas convoluções entre μ_{ij} e η_{ij} para alguns índices i e j .

Demonstração. Primeiro, observamos que, se A e B são duas matrizes $n \times n$, então $\det(zA + wB)$ é um polinômio de ordem n em z e w . Tomando $w = 0$, vemos que o coeficiente do termo z^n é $\det A$. De (3.1) e (3.2), a matriz $\Delta(z)$, dada por

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= z \left(I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) \right) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) \\ &= zI - z \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) \end{aligned}$$

tem como entradas a soma de z ou 0 (dependendo se a entrada está na diagonal) com elementos da forma $z\mathcal{L}(d\mu_{ij})(z)$ e $\mathcal{L}(d\eta_{ij})(z)$, onde μ_{ij} e η_{ij} são as entradas das funções matriciais μ e η . Portanto, o determinante de $\Delta(z)$ consiste de somas de produtos de tais elementos. Agrupando elementos com a mesma potência de z , segue que os coeficientes são somas de convoluções entre μ_{ij} e η_{ij} para alguns índices i e j . Concluímos que o determinante de $\Delta(z)$ pode ser representado por (3.11), tomando ξ_k como as somas das convoluções entre μ_{ij} e η_{ij} , que é coeficiente da potência z^k . $\square$

Exemplo 3.6. Sejam $\mu, \eta \in NBV([0, 2], \mathbb{C}^{2 \times 2})$ dadas por

$$\mu(\theta) = \begin{pmatrix} h_1(\theta) & 2h_2(\theta) \\ 0 & h_2(\theta) \end{pmatrix} \quad \eta(\theta) = \begin{pmatrix} 2h_0(\theta) & h_2(\theta) \\ 2h_1(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\Delta_0(z) = I - \int_0^r e^{-z\theta} d\mu(\theta) = \begin{pmatrix} 1 - e^{-z} & -2e^{-2z} \\ 0 & 1 - e^{-2z} \end{pmatrix},$$

$$\Delta(z) = z\Delta_0(z) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta) = \begin{pmatrix} z - ze^{-z} - 2 & -2ze^{-2z} - e^{-2z} \\ -2e^{-z} & z - ze^{-2z} \end{pmatrix},$$

de onde segue que

$$\det \Delta_0(z) = 1 - e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z},$$

$$\det \Delta(z) = z^2(1 - e^{-z} - e^{-2z} + e^{-3z}) + z(-2 + 2e^{-2z} - 4e^{-3z}) - 2e^{-3z}. \quad (3.12)$$

Então, tomando ξ_0 e ξ_1 como

$$\xi_0(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 3, \\ -2, & \theta \geq 3, \end{cases} \quad \xi_1(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < 0 \text{ ou } 2 \leq \theta < 3, \\ -2, & 0 \leq \theta < 2, \\ -4, & \theta \geq 3, \end{cases}$$

temos que (3.12) é escrita na forma (3.11) com $n = 2$.

Definição 3.7. Seja a_M definido por

$$a_M = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \#\Delta_0(\lambda) < \infty\} \quad (3.13)$$

onde $\#\Delta_0(\lambda)$ é o número de zeros de $\det \Delta_0(z)$ em $\mathbb{C}_{\lambda, \infty}$, isto é, para cada $\epsilon > 0$, existe um número finito de zeros ζ de $\det \Delta_0(z)$ tais que $\operatorname{Re} \zeta > a_M + \epsilon$.

Observação 3.8. Aplicando o Teorema 3.3, podemos substituir $\#\Delta_0$ por $\#\Delta$ em (3.13), onde $\#\Delta(\lambda)$ é definido como o número de zeros do $\det \Delta(z)$ em $\mathbb{C}_{\lambda, \infty}$.

Teorema 3.9. Para qualquer $\epsilon > 0$, existem constantes positivas q , C_0 e C tais que

$$|\det \Delta(z)| \geq q|z|^n \quad (3.14)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > C_0|e^{-zr}|$, $|z| > C$ e $\operatorname{Re} z > a_M + \epsilon$.

Demonstração. Do Lema 3.1, existe q tal que

$$|\det \Delta_0(z)| \geq 2q \quad (3.15)$$

para z satisfazendo $\operatorname{Re} z > a_M + \epsilon$ e z fora de círculos de raio 1 centrados nos zeros de $\det \Delta_0(\cdot)$. Pela Definição 3.7 e Observação 3.8, temos que existe um número finito de zeros de $\det \Delta(z)$ e $\det \Delta_0(z)$ com $\operatorname{Re} z > a_M + \epsilon$. Seja

$$C_0 = \max\{|z| : \operatorname{Re} z > a_M + \epsilon \text{ e } \det \Delta(z) \det \Delta_0(z) = 0\} + 1,$$

Então para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z > a_M + \epsilon$ e $|z| > C_0$, vale (3.15). Do Lema 3.5, deduzimos que

$$|\det \Delta(z)| \geq \left| |\det \Delta_0(z)| |z|^n - \sum_{m=0}^{n-1} |\mathcal{L}(d\xi_m)(z)| |z|^m \right|. \quad (3.16)$$

Aplicando o Lema 3.4 para cada ξ_m , temos que para todo C e para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > C|e^{-zr}|$ e $|z| > C$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} |\mathcal{L}(d\xi_m)(z)| |z|^m &\leq \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Var} \xi_m}{C} |z|^{m+1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Var} \xi_m}{C} |z|^{m+1-n} |z|^n \\ &= |z|^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\operatorname{Var} \xi_m}{C} |z|^{m+1-n} < |z|^n \sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{Var} \xi_m C^{m-n} \end{aligned}$$

uma vez que $m - n + 1 \leq 0$ para $m \leq n - 1$. Então, tomando $\varrho(C) = \sum_{m=0}^{n-1} \operatorname{Var} \xi_m C^{m-n}$ temos que

$$|\det \Delta(z)| \geq |z|^n (|\det \Delta_0(z)| - \varrho(C)) > |z|^n (2q - \varrho(C))$$

e então, escolhendo $C > C_0$ suficientemente grande tal que $\varrho(C) < q$ temos

$$|\det \Delta(z)| > |z|^n (2q - \varrho(C_0, C)) > q|z|^n.$$

□

O próximo Lema e seu Corolário serão úteis no cálculo do contorno de integrais.

Lema 3.10. *Suponha que μ satisfaz (J). Para todo $f \in \mathcal{F}$,*

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty} e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) = 0 \quad (3.17)$$

uniformemente para $z \in \mathbb{C}_{\gamma_1, \gamma_2}$ com $a_M < \gamma_1 < \gamma_2$ e t em conjuntos compactos.

Demonstração. Tome $\epsilon = \frac{(\gamma_1 - a_M)}{2}$. Pelo Teorema 3.9, existe uma constante positiva q tal que, para $|z|$ suficientemente grande, temos

$$|\det \Delta(z)| \geq q|z|^n.$$

Seja $\text{adj } \Delta(z)$ a matriz adjunta de $\Delta(z)$. Recordamos que $\text{adj } \Delta(z)$ é a transposta da matriz dos cofatores $\text{cof } \Delta(z)$ de $\Delta(z)$, isto é, cada entrada de $\text{adj } \Delta(z)$ é o determinante de uma submatriz $(n-1) \times (n-1)$ de $\Delta(z)$. Podemos aplicar para cada entrada de $\text{adj } \Delta(z)$ os Lemas 3.1, 3.4 e 3.5, obtendo que cada entrada é da forma

$$(\text{adj } \Delta(z))_{ij} = \text{cof } \Delta_0(z)_{ji} z^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \mathcal{L}(d\xi_{k_{ij}})(z) z^k \quad (3.18)$$

onde para $z \in \mathbb{C}_{\gamma_1, \gamma_2}$ e $|z|$ suficientemente grande

$$m_{ij} \leq |\text{cof } \Delta_0(z)_{ji}| \leq M_{ij}. \quad (3.19)$$

e

$$|\mathcal{L}(d\xi_{k_{ij}})(z)| < \text{Var}_{[0,r]} \xi_{k_{ij}} e^{|\gamma_1|r}. \quad (3.20)$$

Das desigualdades (3.19) e (3.20) temos que $\det(\Delta_0(z))_{ij}$ é limitado inferiormente e $\mathcal{L}(d\xi_{k_{ij}})(z)$ é limitada superiormente. Portanto, para $z \in \mathbb{C}_{\gamma_1, \gamma_2}$ com $|z|$ suficientemente grande, temos que existe $K_0 > 0$ tal que

$$|(\text{adj } \Delta(z))_{ij}| \leq K_0 |z|^{n-1}.$$

Como

$$\Delta(z)^{-1} = \frac{1}{\det \Delta(z)} \text{adj } \Delta(z)$$

obtemos que

$$|(\Delta(z)^{-1})_{ij}| \leq \frac{K_0}{q|z|}.$$

Como e^{zt} e $\int_0^r e^{-z\theta} df(\theta)$ são uniformemente limitados para $z \in \mathbb{C}_{\gamma_1, \gamma_2}$ e t em intervalos compactos, existe uma constante K_1 tal que

$$\left| e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-zt} df(t) \right) \right| \leq \frac{K_1}{|z|}. \quad (3.21)$$

Quando $\text{Im } z \rightarrow \pm\infty$, temos que $|z| \rightarrow \infty$ e segue (3.17). $\square$

Corolário 3.11. *Seja $\sqsubset_{N(\gamma_1, \gamma_2)}$, $N \in \mathbb{R}$ e $a_M < \gamma_1 < \gamma_2$, o segmento de reta horizontal ligando $\gamma_1 + iN$ a $\gamma_2 + iN$. Então, para cada $t > 0$,*

$$\lim_{N \rightarrow \pm\infty} \int_{\sqsubset_{N(\gamma_1, \gamma_2)}} e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) dz = 0.$$

3.2 Comportamento assintótico para $t \rightarrow \infty$

Nesta seção, obtemos, a partir dos resultados da seção 3.1 e da solução da equação de renovação dada no Teorema 2.17, os ingredientes necessários para estudar o comportamento assintótico das soluções da equação de renovação

$$x = dk * x + f$$

onde $k(\theta) = \mu(\theta) + \int_0^\theta \eta(s)ds$ e μ satisfaz a condição (J) na página 34.

Mostremos que, pela fórmula de inversão (1.12), na página 9, segue que o valor da integral complexa em (2.49), na página 31, independe da escolha de $\gamma > \gamma_0$ para algum γ_0 suficientemente grande. Denotaremos

$$Q(z) = \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) \quad (3.22)$$

e definiremos Γ como o contorno fechado no plano complexo orientado positivamente que consiste de quatro segmentos de retas passando pelos vértices $\gamma_1 - iN, \gamma_1 + iN, \gamma + iN, \gamma - iN$. Tomando γ_0 como o ínfimo dos γ tais que o semi-plano $\operatorname{Re} z > \gamma$ é livre de raízes de $\det \Delta(z)$ e sabendo que Q é analítica no semi-plano $\operatorname{Re} z > \gamma_0$, o Teorema de Cauchy nos diz que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zt} Q(z) dz = 0 \quad (3.23)$$

para $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma$. Tomando o limite quando $N \rightarrow \infty$ e usando o limite no Corolário 3.11, temos

$$\lim_{N \rightarrow \pm\infty} \int_{\gamma_1 + iN}^{\gamma + iN} e^{zt} Q(z) dz = 0 \quad (3.24)$$

e então, concluimos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_1)} e^{zt} Q(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} Q(z) dz. \quad (3.25)$$

Entretanto, a estimativa (3.24) ainda é válida para $a_M < \gamma_1 < \gamma$ e, obviamente $\gamma_0 \geq a_M$. Assim, podemos mover a linha vertical $\operatorname{Re} z = \gamma_1$ da integração em (3.25) para $a_M < \gamma_1 < \gamma_0$ tal que não há zeros com parte real γ_1 . Neste caso, o resultado da integral de linha (3.23), de acordo com o Teorema de Cauchy, torna-se

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{zt} Q(z) dz = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{z=\lambda_j} e^{zt} Q(z)$$

onde $\lambda_j, 1 \leq j \leq m$ são todas as raízes de $\det \Delta(z)$ tais que $\operatorname{Re} z > \gamma_1$. Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} Q(z) dz = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{z=\lambda_j} e^{zt} Q(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_1)} e^{zt} Q(z) dz \quad (3.26)$$

para $\gamma > \gamma_0$. A partir destas considerações, conseguimos os próximos resultados. O principal deles, o Teorema 3.17, relaciona o comportamento das soluções da equação (2.48). Começamos com o Lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 3.12. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, então*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f(\omega) d\omega \right| = 0.$$

Demonstração. Primeiro mostremos que, se λ é a medida de Lebesgue usual e f é qualquer função em $L^1(\mathbb{R})$, então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|f_h - f\|_1 = 0.$$

onde $f_h(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} f(\omega + h)$. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário e considere

$$\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R}) = \{\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) : \text{tal que existe } F \text{ é compacto, } \varphi(x) = 0, \forall x \in F^c \cap \mathbb{R}\}.$$

De Hewitt & Stromberg [6], temos que $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ é denso em $L^1(\mathbb{R})$, logo podemos escolher $\varphi \in \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ tal que $\|\varphi - f\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$. Como $\mathbb{R}$ é um espaço métrico localmente compacto, segue que todas as funções em $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ são uniformemente contínuas. Portanto, φ é uniformemente contínua e existe $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ tal que $\varphi(t) = 0$ se $|t| \geq \alpha$. Escolha $0 < \delta < 1$ tal que

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < \frac{\epsilon}{3} \left(\frac{1}{2\alpha} \right) \quad \text{para } |h| < \delta.$$

Então, $|h| < \delta$ implica que $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi(t+h) - \varphi(t)| dt < \frac{\epsilon}{3}$, que é o mesmo que $\|\varphi_h - \varphi\|_1 < \frac{\epsilon}{3}$. Também temos que $\|\varphi_h - f_h\|_1 = \|\varphi - f\|_1$ para todo $h > 0$. Portanto, $\|f_h - f\|_1 \leq \|f_h - \varphi_h\|_1 + \|\varphi_h - \varphi\|_1 + \|\varphi - f\|_1 < \epsilon$, se $|h| < \delta$ e então, $\lim_{h \rightarrow 0} \|f_h - f\|_1 = 0$.

Considerando $\hat{f}$ definido por

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f(\omega) d\omega = (-1)e^{-\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f(\omega) d\omega \\ &= (-1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \frac{\pi}{t})t} f(\omega) d\omega = (-1) \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\omega + \frac{\pi}{t}\right) e^{it\omega} d\omega\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}2|\hat{f}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f(t) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} f\left(\omega + \frac{\pi}{t}\right) d\omega \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\omega + \frac{\pi}{t}\right) - f(\omega) \right| |e^{it\omega}| d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| f\left(\omega + \frac{\pi}{t}\right) - f(\omega) \right| d\omega = \|f_{\frac{\pi}{t}} - f\|_1\end{aligned}$$

de onde segue que $|\hat{f}(t)|$ é arbitrariamente pequeno se $|t|$ é suficientemente grande. $\square$

Observação 3.13. Uma aplicação do lema anterior nos dá o mesmo resultado para $f \in L^1(R_+)$, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left| \int_0^{\infty} e^{it\omega} f(\omega) d\omega \right| = 0.$$

Lema 3.14. Para $t > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega} d\omega = \begin{cases} 2\pi e^{-\gamma t}, & \gamma > 0, \\ \pi, & \gamma = 0, \\ 0, & \gamma < 0. \end{cases}$$

Demonstração. De fato, temos que

$$\frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega} = \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} + \frac{\omega \sin(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} + i \left[\frac{\gamma \sin(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} - \frac{\omega \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} \right]$$

e, para todo $N \in \mathbb{R}$ temos que

$$\int_{-N}^N \frac{\gamma \sin(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-N}^N \frac{\omega \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega = 0$$

uma vez que $\omega \mapsto \frac{\gamma \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2}$ e $\omega \mapsto \frac{\omega \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2}$ são funções ímpares. Além disso, também temos que

$$\begin{aligned}\int_{-N}^N \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega &= 2 \int_0^N \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega, \\ \int_{-N}^N \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega &= 2 \int_0^N \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega,\end{aligned}$$

já que $\omega \mapsto \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2}$ e $\omega \mapsto \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2}$ são funções pares. Logo, temos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega} d\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \left[\int_0^N \frac{\gamma \cos(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega + \int_0^N \frac{\omega \operatorname{sen}(\omega t)}{\gamma^2 + \omega^2} d\omega \right]. \quad (3.27)$$

Sabemos que (cf. Conway [2, p. 121]), se $a \geq 0$, então

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{\cos(at)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi(a+1)}{4} e^{-a}. \quad (3.28)$$

Para resolver as integrais em (3.27), consideraremos três casos distintos: quando $\gamma > 0$, $\gamma < 0$ e $\gamma = 0$.

Primeiramente, considere $\gamma > 0$. Escrevendo $\omega t = \gamma t \frac{\omega}{\gamma}$, $\gamma^2 + \omega^2 = \gamma^2 \left(1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}\right)$ e considerando a mudança de variável $x = \frac{\omega}{\gamma}$ e fazendo uma integração por partes, temos que o segundo membro de (3.27) torna-se

$$\begin{aligned}2 \left[\int_0^\infty \frac{\cos((\gamma t)x)}{1+x^2} dx + \frac{2}{\gamma t} \int_0^\infty \frac{\cos((\gamma t)x)}{(1+x^2)^2} dx - \frac{1}{\gamma t} \int_0^\infty \frac{\cos((\gamma t)x)}{1+x^2} dx \right] \\ = 2\pi e^{-\gamma t}.\end{aligned}$$

Para o caso, $\gamma < 0$, da mesma forma como antes, o segundo membro de (3.27) torna-se

$$\begin{aligned}2 \left[- \int_0^\infty \frac{\cos((- \gamma t)x)}{1+x^2} dx - \frac{2}{\gamma t} \int_0^\infty \frac{\cos((- \gamma t)x)}{(1+x^2)^2} dx + \frac{1}{\gamma t} \int_0^\infty \frac{\cos(- \gamma t)x}{1+x^2} dx \right] \\ = 0.\end{aligned}$$

Agora, se $\gamma = 0$, então de (3.27) temos

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega = \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \int_0^N \frac{\operatorname{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega = \pi$$

□

Lema 3.15. Para qualquer $\gamma > a_M$ tal que $\gamma \neq 0$ e não há zeros de $\det \Delta(z)$ e $\det \Delta_0(z)$ com $\operatorname{Re} z = \gamma$, temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} \Delta(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) dz = o(e^{\gamma t}) \text{ para } t \rightarrow \infty. \quad (3.29)$$

Demonstração. Seja $Q(z)$ como em (3.22), na página 45. Devemos mostrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{it\omega} Q(\gamma + i\omega) d\omega \right) = 0. \quad (3.30)$$

Na demonstração do Lema 3.10, vimos em (3.21) que, para $|\omega|$ suficientemente grande, existe K_1 tal que

$$|Q(\gamma + i\omega)| \leq \frac{K_1}{|\gamma + i\omega|},$$

mas isto não garante que $Q(\gamma + i\omega)$ é uma função L^1 em ω , ou seja, a integral acima não necessariamente converge absolutamente e, então, não podemos aplicar o Lema de Riemann-Lebesgue 3.12. Porém, para qualquer N fixo, o Lema de Riemann-Lebesgue nos diz que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-N}^N e^{it\omega} Q(\gamma + i\omega) d\omega = 0. \quad (3.31)$$

Então, se provarmos que os limites $t \rightarrow \infty$ e $N \rightarrow \infty$ podem ser trocados, pelo menos, para alguns termos da integral (3.31), obtemos a conclusão desejada para esses termos. Portanto, é suficiente mostrar que a convergência para $N \rightarrow \infty$ é uniforme para $t \geq t_0$ para algum t_0 fixo.

Para $\xi \in NBV([0, r], \mathbb{C})$, a integral $\int_0^r e^{-z\theta} d\xi(\theta)$ é uniformemente limitada para $z = \gamma + i\omega$ com $\omega \in \mathbb{R}$. Como, por (3.1),

$$\Delta(z) = z\Delta_0(z) - \int_0^r e^{-z\theta} d\eta(\theta)$$

segue que, para $z = \gamma + i\omega$,

$$\det \Delta(z) = z^n \det \Delta_0(z) + O(|\omega|^{n-1}), \quad |\omega| \rightarrow \infty,$$

$$\operatorname{adj} \Delta(z) = z^{n-1} \operatorname{adj} \Delta_0(z) + O(|\omega|^{n-2}), \quad |\omega| \rightarrow \infty.$$

Como $\Delta(z)^{-1} = \frac{1}{\det \Delta(z)} \operatorname{adj} \Delta(z)$, após alguns cálculos, concluímos que

$$\Delta(z)^{-1} = \frac{1}{z} \Delta_0(z)^{-1} + O(|\omega|^{-2}).$$

Então, de (3.22) temos que

$$Q(z) = \frac{1}{z} \Delta_0(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) + O(|\omega|^{-2}). \quad (3.32)$$

O termo $O(|\omega|^{-2})$ é integrável em $\mathbb{R}$ e do Lema de Riemann-Lebesgue 3.12 segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} O(|\omega|^{-2}) d\omega = 0. \quad (3.33)$$

Portanto, podemos nos concentrar no primeiro termo. Um aplicação do Lema 3.1 nos garante que, para $\gamma > a_M$ tal que não há zeros de $\det \Delta_0(z)$ com $\operatorname{Re} z = \gamma$, existe um $\epsilon_\gamma > 0$ tal que $|\det \Delta_0(z)| > \epsilon_\gamma$ para $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} z \geq \gamma$.

Afirmamos que $\Delta_0(z)^{-1}$ é a transformada de Laplace-Stieltjes de alguma função *NBV*, isto é, existe um $\zeta \in NBV([0, r], \mathbb{C}^{n \times n})$ tal que $\Delta_0(z)^{-1} = \mathcal{L}(d\zeta)(z)$. Para mostrar isto, observe que $\Delta_0 = I - \mathcal{L}(d\mu)$. Considere agora ρ solução de $\rho = d\mu * \rho - \mu$. Então

$$\begin{aligned} \rho - d\mu * \rho &= -\mu \\ d\rho - d\mu * d\rho &= -d\mu \\ \mathcal{L}(d\rho)(z) - \mathcal{L}(d\mu)(z)\mathcal{L}(d\rho)(z) &= -\mathcal{L}(d\mu)(z) \\ [I - \mathcal{L}(d\mu)(z)]\mathcal{L}(d\rho)(z) &= -\mathcal{L}(d\mu)(z) \\ I + \Delta_0(z)\mathcal{L}(d\rho)(z) &= \Delta_0(z). \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\Delta_0(z)^{-1} = I - \mathcal{L}(d\rho)(z) = \mathcal{L}(d(h_0 - \rho))(z) = \mathcal{L}(d\zeta)(z)$$

com $\zeta = h_0 - \rho$. Após estas considerações, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Delta_0(z)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) \right) &= \mathcal{L}(d\zeta)(z) z \mathcal{L}(f)(z) \\ &= z \mathcal{L}(d\zeta * f)(z) = \mathcal{L}(d\zeta * df)(z) = \mathcal{L}(d\xi)(z) \end{aligned}$$

onde $\xi = d\zeta * f$. Mostremos agora que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega} d\omega = 0.$$

Finalmente, usando o Lema 3.14, calculamos o limite da integral dada em (3.30)

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega} \Delta_0(\gamma + i\omega)^{-1} \left(f(0) + \int_0^r e^{-(\gamma+i\omega)\theta} df(\theta) \right) d\omega \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{i\omega t}}{\gamma + i\omega} \left(\int_0^r e^{-(\gamma+i\omega)\theta} d\xi(\theta) \right) d\omega \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-\gamma\theta} \left(\int_{-N}^N \frac{e^{i\omega(t-\theta)}}{\gamma + i\omega} d\omega \right) d\xi(\theta) \\
&= \int_0^r e^{-\gamma\theta} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \frac{e^{i\omega(t-\theta)}}{\gamma + i\omega} d\omega \right) d\xi(\theta) = 0. \tag{3.34}
\end{aligned}$$

De (3.31), (3.32), (3.33) e de (3.34), obtemos o resultado. $\square$

Lema 3.16. *Seja λ um zero de $\det \Delta(z)$ de ordem m . Então*

$$\operatorname{Res}_{z=\lambda} e^{zt} Q(z) = p(t) e^{\lambda t}, \tag{3.35}$$

onde p é um polinômio com valores em $\mathbb{C}^n$ em t de grau menor ou igual a $m - 1$.

Demonstração. Em uma vizinhança de $z = \lambda$, temos as seguintes expansões em séries de Laurent

$$\begin{aligned}
\Delta(z)^{-1} &= \frac{1}{\det \Delta(z)} \operatorname{adj} \Delta(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} (z - \lambda)^k A_k, \\
f(0) + \int_0^r e^{-z\theta} df(\theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - \lambda)^k v_k, \\
e^{zt} &= e^{\lambda t} e^{(z-\lambda)t} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (z - \lambda)^k.
\end{aligned}$$

Deste modo, podemos escrever $e^{zt} Q(z)$ como série de Laurent em torno de $z = \lambda$ da forma abaixo

$$e^{zt} Q(z) = e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (z - \lambda)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (z - \lambda)^k v_k \right) \left(\sum_{k=-m}^{\infty} (z - \lambda)^k A_k \right). \tag{3.36}$$

Como o resíduo em $z = \lambda$ é igual ao coeficiente do termo $(z - \lambda)^{-1}$ da série de Laurent de $e^{zt} Q(z)$, segue o resultado. $\square$

Agora estamos prontos para formular o nosso principal resultado.

Teorema 3.17. *Seja x uma solução da EDF dada por (2.1)–(2.2), sujeita à condição inicial $x_0 = \varphi$, onde μ satisfaz a condição (J). Seja $\gamma > a_M$ tal que $\gamma \neq 0$ e para z na reta $\operatorname{Re} z = \gamma$ $\det \Delta(z) \neq 0$ e $\det \Delta_0(z) \neq 0$. Então temos a expansão assintótica*

$$x(t) = \sum_{j=1}^l p_j(t) e^{\lambda_j t} + o(e^{\gamma t}), \quad t \rightarrow \infty \quad (3.37)$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ são os zeros de $\det \Delta(z)$ com parte real maior que γ e $p_j(t)$ são polinômios em t com valores em $\mathbb{C}^n$ com grau menor ou igual a $m_j - 1$, onde m_j é a multiplicidade de λ_j como zero de $\det \Delta_0(z)$.

Demonstração. A idéia da prova é dada na discussão anterior ao Lema de Riemann-Lebesgue. Para γ_1 suficientemente grande, obtemos, do Teorema 2.17 que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_1)} e^{zt} Q(z) dz.$$

Da equação (3.26), temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma_1)} e^{zt} Q(z) dz = \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}_{z=\lambda_j} e^{zt} Q(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} Q(z) dz.$$

Do Lema 3.15 temos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\gamma)} e^{zt} Q(z) dz = o(e^{\gamma t}) \quad \text{para } t \rightarrow \infty$$

e do Lema 3.16, temos a forma polinomial para o resíduo em $z = \lambda_j$

$$\operatorname{Res}_{z=\lambda_j} e^{zt} Q(z) = p_j(t) e^{\lambda_j t}.$$

Então, combinando estes resultados temos

$$x(t) = \sum_{j=1}^l p_j(t) e^{\lambda_j t} + o(e^{\gamma t}) \quad \text{para } t \rightarrow \infty$$

como queríamos demonstrar. □

Referências Bibliográficas

- [1] BELLMAN, R., AND COOKE, K. L. *Differential-difference equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [2] CONWAY, J. B. *Functions of one complex variable*, second ed., vol. 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [3] DIEKMANN, O., VAN GILS, S. A., VERDUYN LUNEL, S. M., AND WALTHER, H.-O. *Delay equations*, vol. 110 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1995. Functional, complex, and nonlinear analysis.
- [4] FRASSON, M. *Large time behaviour of neutral delay systems*. PhD thesis, Leiden University, 2005.
- [5] HALE, J. K., AND VERDUYN LUNEL, S. M. *Introduction to functional-differential equations*, vol. 99 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [6] HEWITT, E., AND STROMBERG, K. *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Springer-Verlag, New York, 1965.
- [7] ROYDEN, H. L. *Real analysis*, third ed. Macmillan Publishing Company, New York, 1988.
- [8] RUDIN, W. *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

- [9] SALAMON, D. *Control and observation of neutral systems*, vol. 91 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.
- [10] VERDUYN LUNEL, S. M. *Exponential type calculus for linear delay equations*, vol. 57 of *CWI Tract*. Stichting Mathematisch Centrum Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, 1989.
- [11] WIDDER, D. V. *The Laplace Transform*. Princeton Mathematical Series, v. 6. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.