A dimensão de Gelfand-Kirillov de certas álgebras

Lucas Galvão

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

A dimensão de Gelfand-Kirillov de certas álgebras

Lucas Galvão

***Orientador:* Prof. Dr. Daniel Levcovitz**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática. *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Outubro de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Galvão, Lucas
G182d A dimensão de Gelfand-Kirillov de certas
álgebras / Lucas Galvão; orientador Daniel
Levcovitz. -- São Carlos, 2014.
50 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Álgebra não comutativa. 2. Crescimento de
álgebras. 3. Dimensão de Gelfand-Kirillov. I.
Levcovitz, Daniel, orient. II. Título.

Agradecimentos

Primeiramente aos meus pais, por todo o apoio e incentivo, principalmente nos momentos de maior dificuldade. Não fosse por eles, certamente eu não teria chegado até aqui.

Ao meu orientador, Prof. Daniel Levcovitz, pela sua paciência, amizade, seus ensinamentos e principalmente pela confiança depositada.

Agradeço também a todos aqueles que me apoiaram durante meu período de mestrado. Porém, faço um agradecimento especial a Renan Mezabarba, pelas discussões matemáticas (ou não) na biblioteca do ICMC, onde frequentemente incomodávamos os funcionários pela altura dos risos. Também faço agradecimentos especiais a Renan Metzker e Ivan Bolorino, amigos dos tempos de graduação na UNESP, não só pelo apoio, mas também pelas horas de descontração (compartilhadas por meio virtual).

Por fim, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro durante um ano.

Resumo

A dimensão de Gelfand-Kirillov mede a taxa de crescimento assintótico de álgebras. Como fornece informações importantes sobre a sua estrutura, este invariante se tornou uma das ferramentas padrão no estudo de álgebras de dimensão infinita. Neste trabalho apresentamos as propriedades básicas da dimensão de Gelfand-Kirillov de álgebras e de módulos, e também mostramos o cálculo da dimensão de Gelfand-Kirillov de algumas álgebras e módulos, sendo o exemplo mais importante o cálculo da dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra de Weyl A_n .

Palavras-chave: Álgebra não comutativa. Crescimento de álgebras. Dimensão de Gelfand-Kirillov.

Abstract

The Gelfand-Kirillov dimension measures the asymptotic rate of growth of algebras. Since it provides important structural information, this invariant has become one of the standard tools in the study of infinite dimensional algebras. In this work we present the basic properties of the Gelfand-Kirillov dimension of algebras and modules, and we also show the calculation of the Gelfand-Kirillov dimension of some algebras and modules, being the most important example the calculation of the Gelfand-Kirillov dimension of the Weyl algebra A_n .

Keywords: Noncommutative algebra. Growth of algebras. Gelfand-Kirillov dimension.

CONTEÚDO

Introdução	3
1 Preliminares	5
1.1 Crescimento de Álgebras	5
1.2 A Dimensão de Gelfand-Kirillov	9
2 A álgebra de Weyl e sua dimensão de Gelfand-Kirillov (via extensões ite- radas de Ore)	11
2.1 A dimensão de Gelfand-Kirillov de algumas álgebras	11
2.2 A álgebra de Weyl e sua dimensão de Gelfand-Kirillov	16
2.3 A álgebra de Weyl como o anel de operadores diferenciais do anel de po- linômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$	17
3 Módulos e Álgebras Filtrados e Graduados	20
3.1 A dimensão de Gelfand-Kirillov de um módulo	20
3.2 Álgebras filtradas e graduadas	25
4 Álgebras quase-comutativas	36
4.1 Álgebras quase-comutativas	36
4.2 A dimensão de Gelfand-Kirillov de A_n -módulos	47

Bibliografia

50

INTRODUÇÃO

Seja $\mathbb{K}$ um corpo, e seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada. Escolha um $\mathbb{K}$ -subespaço de dimensão finita V (com unidade) de A , tal que A é gerado por V como álgebra sobre $\mathbb{K}$. Há uma cadeia de subespaços

$$\mathbb{K} \subseteq V \subseteq V^2 \subseteq \dots \subseteq V^n \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V^n = A$$

com $\dim_{\mathbb{K}}(V^n) < \infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. O comportamento assintótico da sequência $(\dim_{\mathbb{K}}(V^n))_{n \in \mathbb{N}}$ nos dá um invariante útil da álgebra A , chamado dimensão de Gelfand-Kirillov de A , e definido por

$$GKdim(A) = \overline{\lim} \frac{\log \dim_{\mathbb{K}}(V^n)}{\log n}.$$

No Capítulo 1, primeiramente definimos o crescimento de uma função, a fim de estudar a sequência $(\dim_{\mathbb{K}}(V^n))_{n \in \mathbb{N}}$. Então, através da introdução de uma relação de equivalência adequada, eliminamos a dependência da escolha de um subespaço gerador V de A , tornando possível definir o crescimento de uma álgebra. Em seguida definimos a dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra.

No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados básicos referentes à dimensão de Gelfand-Kirillov, assim como alguns exemplos, sendo que o mais importante é o cálculo da dimensão de Gelfand-Kirillov das álgebras de Weyl, também definida neste capítulo.

Então, no Capítulo 3, estendemos a dimensão de Gelfand-Kirillov para módulos. Além disso, se V é um subespaço de dimensão finita de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A , então o conjunto formado pelos subespaços $\{V^n\}_{n=0}^\infty$ fornece uma filtração natural de A , e o anel graduado associado

$$gr(A) \equiv \bigoplus_{n=0}^\infty V^n / V^{n-1}$$

pode ser formado. Para qualquer módulo M_A é possível construir o módulo graduado associado $gr(M)_{gr(A)}$. As relações entre M_A e $gr(M)_{gr(A)}$ também são estudadas no Capítulo 3.

Por fim, no Capítulo 4 nos dedicamos ao estudo de álgebras quase comutativas, ou seja, álgebras A tais que $gr(A)$ é comutativo. Também damos uma segunda demonstração do fato de que a dimensão de Gelfand-Kirillov da n -ésima álgebra de Weyl é $2n$. Por fim, provamos a desigualdade de Bernstein, a qual fornece um limitante inferior para a dimensão de Gelfand-Kirillov de um módulo sobre A .

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 Crescimento de Álgebras

Neste primeiro capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos que serão utilizados no decorrer do presente texto. Entretanto, omitiremos as demonstrações. Ao leitor interessado, seguem as referências.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada A (a qual vamos assumir que é associativa e tem elemento unitário 1) com conjunto gerador $\{a_1, \dots, a_m\}$ possui um **subespaço gerador** V de dimensão finita (por exemplo, o $\mathbb{K}$ -espaço vetorial gerado por $a_1, \dots, a_m$) no sentido de que todo elemento de A é uma combinação $\mathbb{K}$ -linear de monômios formados pelos elementos $a_1, \dots, a_m$. Portanto, se $V^0 = \mathbb{K}$, e para $n \geq 1$, V^n denotar o subespaço gerado por todos os monômios em $a_1, \dots, a_m$ de comprimento n , então

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \text{ onde } A_n = \mathbb{K} + V + V^2 \dots + V^n.$$

Se A possui dimensão finita, então $A = A_n$ para algum n , e a função $d_V = \dim_{\mathbb{K}}(A_n)$ se torna estacionária. Em geral, esta função é monótona crescente, e suas propriedades podem ser usadas para distinguir entre as várias $\mathbb{K}$ -álgebras. Entretanto, a função d_V é muito específica, pois depende da escolha do subespaço gerador V . A dependência pode ser

removida ao introduzirmos uma relação de equivalência adequada.

Definição 1.1.1. *Seja Φ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ que são monótonas crescentes a partir de um determinado ponto e a valores positivos, ou seja, para as quais existe $n_0 = n_0(f) \in \mathbb{N}$, tal que*

$$f(n) \in \mathbb{R}^+ \quad e \quad f(n+1) \geq f(n) \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Para $f, g \in \Phi$ dizemos que $f \leq^ g$ se, e somente se, existem $c, m \in \mathbb{N}$ tais que*

$$f(n) \leq cg(mn) \quad \text{para quase todo } n \in \mathbb{N},$$

e $f \sim g$ se, e somente se, $f \leq^ g$ e $g \leq^* f$. Para $f \in \Phi$ a classe de equivalência $\mathcal{G}(f) \in \Phi / \sim$ é chamada **crescimento** de f . A ordem parcial no conjunto $\Phi / \sim$ induzida por $\leq^*$ é denotada por $\leq$.*

Observações:

- (a) Se f e g são funções polinomiais, pode ser mostrado que f e g possuem o mesmo crescimento se, e somente se, $\deg(f) = \deg(g)$. Para um número $\gamma \geq 0$ o crescimento da função $p_\gamma : n \rightarrow n^\gamma$ é denotado por $\mathcal{P}_\gamma$.
- (b) Para um número real positivo ϵ , o crescimento de $q_\epsilon : n \rightarrow e^{n^\epsilon}$ é denotado por $\mathcal{E}_\epsilon$. Claramente, $\epsilon < \eta$ se, e somente se, $\mathcal{E}_\epsilon < \mathcal{E}_\eta$.
- (c) Seja $f(n) = \log(n)$. Então $f \in \Phi$ e $\mathcal{G}(f) > \mathcal{P}_0$. É fácil ver que $\mathcal{G}(f) < \mathcal{P}_\epsilon$ para qualquer $\epsilon > 0$.
- (d) Notemos que $\mathcal{G}(f)$ e $\mathcal{G}(g)$ não precisam ser comparáveis para duas funções f e g em Φ .

Lema 1.1.2. ([4], página 6) *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada com subespaços geradores V e W . Se $d_V(n)$ e $d_W(n)$ denotam as dimensões de $\sum_{i=0}^n V^i$ e $\sum_{i=0}^n W^i$, respectivamente, então $\mathcal{G}(d_V) = \mathcal{G}(d_W)$.*

O fato de que o crescimento da função dimensão de uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada independe do subespaço gerador de dimensão finita V considerado motiva a próxima definição.

Definição 1.1.3. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada, e seja V um subespaço gerador de dimensão finita de A . Então $\mathcal{G}(A) := \mathcal{G}(d_V)$ é chamado de **crescimento** de A . Além disso dizemos que A possui*

- **crescimento polinomial** se $\mathcal{G}(A) = \mathcal{P}_m$, para algum $m \in \mathbb{N}$,
- **crescimento exponencial** se $\mathcal{G}(A) = \mathcal{E}_1$,

Exemplo 1.1.4. *Seja $A = \mathbb{K}\langle x, y \rangle$ a álgebra livre em dois geradores. Então $\mathbb{K}x + \mathbb{K}y$ é um subespaço gerador de A , e*

$$d_V(n) = \dim_{\mathbb{K}}\left(\sum_{i=0}^n V^i\right) = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Logo $\mathcal{G}(A) = \mathcal{E}_1$.

O resultado seguinte, devido a Borho e Kraft, mostra que o crescimento exponencial é o maior crescimento possível para uma álgebra finitamente gerada.

Proposição 1.1.5. *Se A é finitamente gerada mas não possui dimensão finita, então $\mathcal{P}_1 \leq \mathcal{G}(A) \leq \mathcal{E}_1$.*

Demonstração: Seja V um subespaço gerador de dimensão finita para A , e assuma que $1 \in V$. Então

$$d_V(n) = \dim(V^n) \leq \dim(V \otimes \cdots \otimes V) = (\dim V)^n,$$

portanto $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(d_V) \leq \mathcal{E}_1$.

Por outro lado, as inclusões na sequência $V^0 \subseteq V^1 \subseteq V^2 \cdots$ são todas próprias, pois se $V^n = V^{n+1}$ para algum n , então $V^n = A$, e A possui dimensão finita. Logo $d_V(n) \geq n$, para todo n , e consequentemente $\mathcal{G}(A) = \mathcal{G}(d_V) \geq \mathcal{P}_1$. $\square$

Muitas das álgebras que estudaremos terão crescimento polinomial. De modo a determinar os respectivos polinômios, o seguinte lema será útil.

Lema 1.1.6. *([4], página 7) Seja $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais.*

(a) Se $0 \neq f \in \mathbb{Q}[x]$ é um polinômio de grau d , então existem números racionais $a_0, a_1, \dots, a_d$ tais que

$$f(n) = a_d \binom{n}{d} + a_{d-1} \binom{n}{d-1} + \dots + a_1 \binom{n}{1} + a_0$$

para todo número natural n .

(b) As seguintes propriedades de uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ são equivalentes.

i. Existem $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Q}$ e um inteiro $m \geq 0$ tal que para todo $n \geq m$

$$f(n) = a_d \binom{n}{d} + a_{d-1} \binom{n}{d-1} + \dots + a_1 \binom{n}{1} + a_0.$$

ii. Existem $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Q}$ e um inteiro $m \geq 0$ tal que para todo $n \geq m$

$$f(n+1) - f(n) = a_d \binom{n}{d-1} + \dots + a_2 \binom{n}{1} + a_1.$$

(c) Se $f(n)$ está no formato descrito em (a) e se $f(n) \in \mathbb{Z}$ para todo n suficientemente grande, então $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, \dots, d$.

(d) Se $f(n)$ está no formato descrito em (a) e se $f(n) \in \mathbb{N}$ e $f(n+1) - f(n) \geq 0$ para todo n suficientemente grande, então a_d é um inteiro positivo.

Exemplo 1.1.7. Considere $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]$, a álgebra polinomial comutativa. O espaço vetorial $V = \mathbb{K}x_1 + \dots + \mathbb{K}x_d$ é um subespaço gerador de A , e é fácil ver que

$$\dim(V^{n+1}) = \binom{n+1+d-1}{d-1} = \binom{n+d}{d-1},$$

que é um polinômio em n de grau $d-1$. Como $\dim(V^{n+1}) = d_V(n+1) - d_V(n)$, segue da parte (b) do lema anterior que $d_V(n)$ é um polinômio em n de grau d ; logo $\mathcal{G}(A) = \mathcal{P}_d$. De fato, as partes (c) e (d) do lema anterior mostram que os coeficientes de d_V são inteiros, e que seu coeficiente dominante é um inteiro positivo.

1.2 A Dimensão de Gelfand-Kirillov

O crescimento de uma álgebra frequentemente é difícil de determinar e se mostra uma ferramenta de difícil aplicação quando são consideradas álgebras relacionadas, como subálgebras, quocientes, extensões de Ore, etc. Então é apropriado utilizar o comportamento assintótico das funções monótonas crescentes a fim de fazermos identificações que vão além do crescimento. Teoricamente há várias possibilidades para prosseguir, mas na prática o seguinte limite superior

$$\overline{\lim} \frac{\log f(n)}{\log n}$$

se mostra um dos mais úteis. No que se segue, utilizaremos a notação $\log_n f(n)$ para denotar $\log f(n)/\log n$.

Lema 1.2.1. ([4], página 13) *Sejam $f, g \in \Phi$. Então*

- $\overline{\lim} \log_n f(n) = \{\inf \rho \in \mathbb{R}, f(n) \leq n^\rho \text{ para quase todo } n\} = \{\inf \rho \in \mathbb{R}, \mathcal{G} \leq \mathcal{P}_\rho\}$
- *Se $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$, então $\overline{\lim} \log_n f(n) = \overline{\lim} \log_n g(n)$*

Podemos agora dar a próxima definição. Note que nela não supomos que A é uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada.

Definição 1.2.2. *A **dimensão de Gelfand-Kirillov** de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A é*

$$GKdim(A) = \sup_V \overline{\lim} \log_n d_V(n),$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços finitamente dimensionais V de A .

Observação 1.2.3. *O Lema 1.1.2 diz que para uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada B com subespaço gerador de dimensão finita V , o crescimento de B independe da escolha particular de V . Logo*

$$GKdim(B) = \overline{\lim} \log_n d_V(n)$$

neste caso. Como todo subespaço de dimensão finita de uma $\mathbb{K}$ -álgebra geral A , não necessariamente finitamente gerada, pode ser visto como o subespaço gerador para uma álgebra finitamente gerada B de A , a definição da dimensão de Gelfand-Kirillov de A pode ser reescrita como

$$GKdim(A) = \sup_B \{GKdim(B), B \subset A, B \text{ subálgebra finitamente gerada.}\}$$

A dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra também pode ser infinita, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.2.4. *Seja A a álgebra do Exemplo 1.1.4, a qual é finitamente gerada. Como $d_V(n) = 2^{n+1} - 1$, temos que*

$$\overline{\lim} \log_n d_V(n) = \overline{\lim} \log_n 2^{n+1} - 1 = \overline{\lim} ((n+1) \log_n 2 - \log_n 1) = \infty.$$

Logo a dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra acima é infinita.

No entanto, enfatizamos que nesta dissertação estamos interessados somente em $\mathbb{K}$ -álgebras A que são finitamente geradas.

A seguinte questão segue naturalmente: quais números reais podem ser assumidos pela dimensão de Gelfand-Kirillov de uma $\mathbb{K}$ -álgebra? É fácil ver que $GKdim(A) = 0$ se, e somente se, A é **localmente de dimensão finita**, ou seja, se toda subálgebra finitamente gerada possui dimensão finita. Segue da Proposição 1.1.5 que $GKdim(A) \geq 1$ para qualquer álgebra A que não é localmente de dimensão finita. Além disso, temos do Exemplo 1.1.7 que todo número natural ocorre como dimensão de Gelfand-Kirillov de uma álgebra polinomial comutativa. Há dois resultados que respondem a essa pergunta para os outros números positivos.

Teorema 1.2.5. *([4], página 18) Nenhuma álgebra possui dimensão de Gelfand-Kirillov estritamente entre 1 e 2.*

Teorema 1.2.6. *([4], página 21) Para qualquer número real $r \geq 2$ existe uma álgebra $A = \mathbb{K}\langle x, y \rangle / \{Z\}$ com dois geradores tal que $GKdim(A) = r$.*

CAPÍTULO 2

A ÁLGEBRA DE WEYL E SUA DIMENSÃO DE GELFAND-KIRILLOV (VIA EXTENSÕES ITERADAS DE ORE)

2.1 A dimensão de Gelfand-Kirillov de algumas álgebras

Para que a dimensão de Gelfand-Kirillov seja um método útil para o estudo de álgebras, é necessário conhecer seu comportamento quando passamos de uma álgebra A para anéis relacionados como subálgebras, álgebras quocientes, somas diretas e extensões de Ore. Neste capítulo estas álgebras serão estudadas. Como uma aplicação obteremos o resultado fundamental deste capítulo, que é a dimensão de Gelfand-Kirillov das álgebras de Weyl.

Lema 2.1.1. *Se B é uma subálgebra ou uma imagem homomorfa de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A , então $GKdim(B) \leq GKdim(A)$.*

Demonstração: Para subálgebras a afirmação decorre como consequência imediata da definição da dimensão de Gelfand-Kirillov. Para uma álgebra quociente $\overline{A}$ de A , observe que qualquer conjunto de representantes das classes laterais para os elementos da base de um subespaço $\overline{V}$ de $\overline{A}$ com dimensão finita forma uma base de um subespaço de dimensão finita V de A que satisfaz $\dim(\overline{V}^n) \leq \dim(V^n)$, para todo n natural. Então

$$\overline{\lim} \log_n \dim(\overline{V}^n) \leq \overline{\lim} \log_n \dim(V^n)$$

e portanto,

$$\sup_{\overline{V}} \overline{\lim} \log_n \dim(\overline{V}^n) \leq \sup_V \overline{\lim} \log_n \dim(V^n).$$

□

Proposição 2.1.2. *Se A_1 e A_2 são $\mathbb{K}$ -álgebras, então*

$$GKdim(A_1 \oplus A_2) = \max\{GKdim(A_1), GKdim(A_2)\}.$$

Demonstração: Pelo Lema 2.1.1, temos

$$\gamma := \max\{GKdim(A_1), GKdim(A_2)\} \leq GKdim(A_1 \oplus A_2),$$

e a igualdade vale se $\gamma = \infty$. Vamos assumir que γ é finito, e seja W um subespaço de dimensão finita de $A_1 \oplus A_2$. Sejam U e V as projeções canônicas de W sobre A_1 e A_2 respectivamente. Então

$$W \subseteq U \oplus V \text{ e } W^n \subseteq (U \oplus V)^n = U^n \oplus V^n.$$

Dado $\epsilon > 0$, segue do Lema 1.2.1 que

$$d_U(n) < n^{\gamma+\frac{\epsilon}{2}} \quad \text{e} \quad d_V(n) < n^{\gamma+\frac{\epsilon}{2}}.$$

para quase todo n , pois $\overline{\lim} \log_n d_U(n) \leq GKdim(A_1) \leq \gamma$ e o mesmo vale para $d_V(n)$. Como $n^{\frac{\epsilon}{2}} > 2$ para n suficientemente grande,

$$d_W(n) \leq d_U(n) + d_V(n) \leq 2n^{\gamma+\frac{\epsilon}{2}} < n^{\frac{\epsilon}{2}} n^{\gamma+\frac{\epsilon}{2}} = n^{\gamma+\epsilon}$$

para quase todo n . Logo $\overline{\lim} \log_n d_W(n) \leq \gamma$, pelo Lema 1.2.1. Portanto,

$$GKdim(A_1 \oplus A_2) = \sup_W \overline{\lim} \log_n d_W(n) \leq \gamma.$$

□

Muitas álgebras são extensões de Ore de outras álgebras, sendo as álgebras de Weyl talvez o exemplo mais conhecido.

Definição 2.1.3. Uma $\mathbb{K}$ -derivação δ de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A é um $\mathbb{K}$ -endomorfismo de A que satisfaz

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b) \text{ para todo } a, b \in A.$$

Definição 2.1.4. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com uma $\mathbb{K}$ -derivação δ . A $\mathbb{K}$ -álgebra $B = A[x; \delta]$ dos polinômios $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_i \in A$, sujeita à relação $xa - ax = \delta(a)$ é chamada **extensão de Ore** de A com respeito à δ .

Lema 2.1.5. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com $\mathbb{K}$ -derivação δ , e seja $B = A[x; \delta]$. Então $GKdim(B) \geq GKdim(A) + 1$.

Demonstração: Seja A_f uma subálgebra finitamente gerada de A e seja V um subespaço gerador de dimensão finita para A_f , com unidade. O subespaço de dimensão finita $W = V + \mathbb{K}x$ de B satisfaz

$$V^n \oplus V^n x \oplus \dots \oplus V^n x^n \subseteq (V + \mathbb{K}x)^{2n} = W^{2n};$$

logo $(n+1)d_V(n) \leq d_W(2n)$. Então

$$\begin{aligned} GKdim(B) &\geq \overline{\lim} \log_n d_W(n) \geq \overline{\lim} \log_n (n+1)d_V(n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n (n+1) + \overline{\lim} \log_n d_V(n) = 1 + GKdim(A_f), \end{aligned}$$

e portanto,

$$GKdim(B) \geq \sup_{A_f} \{1 + GKdim(A_f)\} = 1 + \sup_{A_f} \{GKdim(A_f)\} = 1 + GKdim(A). \quad \square$$

É natural querer saber quando a desigualdade no lema anterior se torna uma igualdade. O resultado seguinte mostra que a igualdade vale para uma grande classe de álgebras consideradas nas aplicações, em particular, para o caso $\delta = 0$, isto é, para a álgebra polinomial $B = A[x]$, e para o caso quando A é uma álgebra finitamente gerada.

Proposição 2.1.6. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com $\mathbb{K}$ -derivação δ tal que todo subespaço de dimensão finita está contido em uma subálgebra δ -estável de A . Então $GKdim(A[x; \delta]) = GKdim(A) + 1$.*

Demonstração: Seja B' uma subálgebra finitamente gerada de $B = A[x; \delta]$. O espaço vetorial gerado pelos coeficientes dos finitos polinômios que geram B' é de dimensão finita e portanto está contido em uma subálgebra A' δ -estável finitamente gerada de A . Como $B' \subseteq A'[x; \delta]$, o resultado segue se mostrarmos que $GKdim(B') \leq GKdim(A') + 1$. Desta forma podemos assumir que A é finitamente gerada.

Se V é um subespaço gerador de dimensão finita de A que contém 1, então $W := V + \mathbb{K}x$ é um subespaço gerador de dimensão finita para $B = A[x; \delta]$. Os espaços V^n formam uma filtração exaustiva de A ; logo $\delta(V) \subseteq V^m$ para algum inteiro $m > 0$, e conseqüentemente $\delta(V^q) \subseteq V^{m+q}$ para todo $q = 1, 2, \dots$. Afirmamos que

$$W^n = (V + \mathbb{K}x)^n \subseteq V^{mn} + V^{mn}x + V^{mn}x^2 + \dots + V^{mn}x^n,$$

e portanto que $d_W(n) \leq (n+1)d_V(mn)$, para todo número natural n . Isto é trivial para $n = 0$; então vamos assumir que vale para $n \geq 0$. Logo,

$$VW^n \subseteq \sum_{i=0}^n V^{mn+1}x^i \subseteq \sum_{i=0}^n V^{m(n+1)}x^i \quad (2.1)$$

e

$$xW^n \subseteq \sum_{i=0}^n xV^{mn}x^i \subseteq \sum_{i=0}^n V^{mn}x^{i+1} + \sum_{i=0}^n \delta(V^{mn})x^i. \quad (2.2)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \delta(V^{mn}) &\subseteq \sum_{j=0}^n V^j \delta(V) V^{mn-j-1} \subseteq \sum_{j=0}^{mn-1} V^j V^m V^{mn-j-1} \\ &= V^{m(n+1)-1} \subseteq V^{m(n+1)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

temos, por 2.2 e 2.3, que

$$xW^n \subseteq \sum_{i=0}^{n+1} V^{m(n+1)} x^i. \quad (2.4)$$

Por 2.1 e 2.4, segue que

$$W^{n+1} = (V + \mathbb{K}x)W^n = VW^n + xW^n \subseteq \sum_{i=0}^{n+1} V^{m(n+1)} x^i,$$

completando o passo indutivo. Portanto,

$$\begin{aligned} GKdim(B) &= \overline{\lim} \log_n d_W(n) \leq \overline{\lim} \log_n ((n+1)d_V(mn)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_n(n+1) + \overline{\lim} \log_n d_V(n) = 1 + GKdim(A). \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.1.7. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra e seja $B = A[x_1, \dots, x_n]$. Então*

$GKdim(B) = GKdim(A) + n$, aplicando repetidamente a Proposição 2.1.6 no caso em que a derivação é nula.

Exemplo 2.1.8. *Seja $A = \mathbb{R}[[x]]$ a $\mathbb{R}$ -álgebra formada por todas as séries de potências com coeficientes reais. Seja $\{r_i, i = 1, 2, \dots\}$ um conjunto infinito enumerável de números reais linearmente independentes sobre o corpo $\mathbb{Q}$. Então o conjunto das funções*

$\{f_i(x) = e^{r_i x}, i = 1, 2, \dots\}$ é algebricamente independente sobre $\mathbb{R}$. Cada uma das funções f_i pode ser vista como um elemento de A através de sua série de McLaurin. Logo A possui uma subálgebra isomorfa à álgebra polinomial $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Segue do Lema 2.1.1 e do Exemplo 2.1.7 que $GKdim(A) = \infty$.

Observação 2.1.9. *A desigualdade no Lema 2.1.5 pode, de fato, ocorrer, como mostra o resultado abaixo.*

Proposição 2.1.10. *([4], página 27) Seja p um inteiro positivo.*

- *Existe uma $\mathbb{K}$ -álgebra localmente de dimensão finita A_p com $\mathbb{K}$ -derivação δ_p , tal que $GKdim(A_p[t; \delta_p]) = p$.*
- *Existe uma $\mathbb{K}$ -álgebra localmente de dimensão finita A com $\mathbb{K}$ -derivação δ , tal que $GKdim(A[t; \delta]) = \infty$.*

2.2 A álgebra de Weyl e sua dimensão de Gelfand-Kirillov

O objetivo desta seção é calcular a dimensão de Gelfand-Kirillov da álgebra de Weyl A_n . No que se segue, vamos definir tal álgebra.

Definição 2.2.1. *A álgebra de Weyl $A_n = A_n(\mathbb{K})$ é o anel de polinômios em $2n$ variáveis $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ com coeficientes em $\mathbb{K}$, sujeitas às relações*

$$x_i x_j = x_j x_i, \quad y_i y_j = y_j y_i, \quad e \quad x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker.

Proposição 2.2.2. *Vale o isomorfismo abaixo:*

$$A_{n+1} \cong A_n[y_{n+1}][x_{n+1}; \delta], \quad \text{onde} \quad \delta = \frac{\partial}{\partial y_{n+1}}.$$

Demonstração: Primeiramente, como y_{n+1} comuta com os elementos de A_n , resta mostrar que x_{n+1} satisfaz as relações que definem a álgebra de Weyl. De fato, para $i = 1, \dots, n$, temos

$$x_i x_{n+1} - x_{n+1} x_i = \delta(x_i) = 0$$

e

$$y_i x_{n+1} - x_{n+1} y_i = \delta(y_i) = 0.$$

Para $i = n+1$, temos

$$y_{n+1} x_{n+1} - x_{n+1} y_{n+1} = \delta(y_{n+1}) = 1,$$

provando o resultado. □

Teorema 2.2.3. *A dimensão de Gelfand-Kirillov da n -ésima álgebra de Weyl A_n é $2n$.*

Demonstração: O resultado é provado por indução. Para $n = 0$, o resultado é válido pois $A_0(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Suponhamos que a dimensão de $A_k = 2k$. Pelo Exemplo 2.1.7

$$GKdim(A_n[y_{n+1}]) = GKdim(A_n) + 1 = 2n + 1$$

Da Proposição 2.1.6, decorre que $GKdim(A_{n+1}) = GKdim(A_n[y_{n+1}]) + 1 = 2(n + 1)$. $\square$

2.3 A álgebra de Weyl como o anel de operadores diferenciais do anel de polinômios $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

Uma outra definição da álgebra de Weyl é encontrada com frequência. Por conveniência, denotaremos por $\mathbb{K}[X]$ o anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Definição 2.3.1. *Sejam $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ os operadores de $\mathbb{K}[X]$ definidos sobre um polinômio $f \in \mathbb{K}[X]$ pelas fórmulas $\hat{x}_i(f) = x_i \cdot f$. Analogamente, $\partial_1, \dots, \partial_n$ são os operadores definidos por $\partial_i = \partial f / \partial x_i$. Estes são operadores lineares de $\mathbb{K}[X]$. A n -ésima álgebra de Weyl A_n é a $\mathbb{K}$ -subálgebra de $End_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[X])$ gerada pelos operadores $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ e $\partial_1, \dots, \partial_n$.*

De acordo com a definição acima, os elementos de A_n são combinações lineares sobre $\mathbb{K}$ de monômios em $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n, \partial_1, \dots, \partial_n$. Porém, vale ressaltar que esta álgebra não é comutativa. De fato, consideremos o operador $\partial_i \cdot \hat{x}_i$ e vamos aplicá-lo no polinômio $f \in \mathbb{K}[X]$. Usando a regra de derivação do produto, obtemos $\partial_i \cdot \hat{x}_i(f) = x_i \partial f / \partial x_i + f$. Em outras palavras,

$$\partial_i \cdot \hat{x}_i = \hat{x}_i \cdot \partial_i + 1,$$

onde 1 corresponde ao operador identidade. Utilizando a notação de comutadores, a expressão acima se torna $[\partial_i, \hat{x}_i] = 1$. Através de cálculos similares obtemos que $[\partial_i, \hat{x}_j] = \delta_{ij} \cdot 1$ e $[\partial_i, \partial_j] = [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0$, onde mais uma vez δ_{ij} é o símbolo de Kronecker, e $1 \leq i, j \leq n$. Denotaremos abaixo os operadores $\hat{x}_i$ simplesmente por x_i para simplificar a notação.

O primeiro passo para mostrar a equivalência destas definições é construir uma base para a álgebra de Weyl como $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, a qual chamaremos base canônica. Ela será

descrita através de **multi-índices**, ou seja, elementos $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tais que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Por x^α denotaremos o monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. O grau deste monômio é o **comprimento** $|\alpha|$ do multi-índice α , ou seja, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Também definimos o fatorial de um multi-índice $\beta \in \mathbb{N}^n$ por $\beta! = \beta_1! \cdots \beta_n!$

Lema 2.3.2. *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ e suponhamos que $|\alpha| \leq |\beta|$. Então $\partial^\beta(x^\alpha) = \beta!$ se $\alpha = \beta$ e zero, caso contrário.*

Demonstração: Se $\alpha = \beta$, o resultado decorre da regra do produto, uma vez que $\partial_i^{\alpha_i}(x_i^{\alpha_i}) = \alpha_i!$. Se $\alpha \neq \beta$, existe $1 \leq n_0 \leq n$ tal que $\alpha_{n_0} < \beta_{n_0}$. Como $\partial^{\beta_{n_0}}(x^{\alpha_{n_0}}) = 0$, segue que $\partial^\beta(x^\alpha) = 0$. $\square$

Lema 2.3.3. *Seja $f \in \mathbb{K}[X]$. Então $[\partial_i, f] = \partial f / \partial x_i$.*

Demonstração: Pelas relações apresentadas acima e pelo fato de o comutador ser linear, é suficiente mostrar que $[\partial_i, x_i^n] = nx_i^{n-1}$. Para $n = 0$, o resultado é trivial. Suponhamos que a identidade seja válida para $n = k$. Como, dados $a, b, c \in A_n$, $[a, bc] = b[a, c] + [a, b]c$, temos que

$$[\partial_i, x_i^{k+1}] = x_i[\partial_i, x_i^k] + [\partial_i, x_i]x_i^k = x_i \cdot k \cdot x_i^{k-1} + x_i^k = (k+1)x_i^k.$$

$\square$

Proposição 2.3.4. *O conjunto $B = \{x^\alpha \partial^\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n\}$ é uma base de A_n como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.*

Demonstração: Dado um monômio de A_n , pelo Lema 2.3.3 é possível escrevê-lo como uma soma de monômios com potências dos operadores x_i à esquerda e potências dos operadores ∂_i à direita. Desta forma, segue que qualquer elemento de A_n pode ser escrito como combinação linear de elementos de B .

Agora mostremos que os elementos de B são linearmente independentes. Consideremos uma combinação linear finita $D = \sum c_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$ de elementos de B . Queremos mostrar que se algum $c_{\alpha\beta} \neq 0$, então $D \neq 0$. Mas D é um operador linear em $\mathbb{K}[X]$. Portanto $D \neq 0$ se, e somente se, existe um polinômio f tal que $D(f) \neq 0$. Construiremos tal f .

Seja σ um multi-índice que satisfaz $c_{\alpha\sigma} \neq 0$ para algum índice α , mas $c_{\alpha\beta} = 0$ para todo índice β tal que $|\beta| < |\sigma|$. Pelo Lema 2.3.2, temos que $D(x^\sigma) = \sigma! \sum_{\alpha} c_{\alpha\sigma} x^\alpha \neq 0$, pois um dos $c_{\alpha\sigma}$ é diferente de zero, pela escolha de σ . Logo $f = x^\sigma$ é o polinômio procurado. $\square$

Agora vamos mostrar que as duas definições são equivalentes. Seja $\mathbb{K}\langle z_1, \dots, z_{2n} \rangle$ a álgebra livre em $2n$ geradores, ou seja, o conjunto de todas as combinações lineares finitas de palavras em $z_1, \dots, z_{2n}$. Podemos definir um homomorfismo sobrejetor

$\phi : \mathbb{K}\langle z_1, \dots, z_{2n} \rangle \rightarrow A_n$ tal que $\phi(z_i) = x_i$ e $\phi(z_{i+n}) = \partial_i$, para $i = 1, \dots, n$. Seja J o ideal bilateral gerado por $[z_{i+n}, z_i] - 1$, para $i = 1, 2, \dots, n$ e $[z_i, z_j]$ para $j \neq i + n$ e $1 \leq i, j \leq n$. Segue das relações do início desta seção que $J \subseteq \text{Ker}(\phi)$. Logo ϕ induz um homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras $\hat{\phi} : \mathbb{K}\langle z_1, \dots, z_{2n} \rangle / J \rightarrow A_n$.

Teorema 2.3.5. *A aplicação*

$$\hat{\phi} : \mathbb{K}\langle z_1, \dots, z_{2n} \rangle / J \rightarrow A_n$$

é um isomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras.

Demonstração: Assim como na prova da Proposição 2.3.4, podemos usar as relações entre as classes $z_i + J$ para mostrar que todo elemento de $\mathbb{K}\langle z_1, \dots, z_{2n} \rangle$ pode ser escrito como uma combinação linear de monômios do tipo $z_1^{m_1} \dots z_{2n}^{m_{2n}}$. Pela Proposição 2.3.4, a imagem desses monômios por $\hat{\phi}$ é uma base de A_n como espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Em particular, os monômios são linearmente independentes em $\mathbb{K}\langle z_1, \dots, z_{2n} \rangle / J$. Portanto $\hat{\phi}$ é um isomorfismo de espaços vetoriais, uma vez que já é um isomorfismo de anéis. $\square$

CAPÍTULO 3

MÓDULOS E ÁLGEBRAS FILTRADOS E GRADUADOS

A dimensão clássica de Krull, definida em termos de cadeias descendentes de ideais primos, não é uma ferramenta muito adequada no estudo de anéis não comutativos, principalmente por não se aplicar a módulos. Por outro lado, a dimensão de Gelfand-Kirillov pode ser estendida a módulos. Um primeiro estudo dessa extensão foi feito por Bernstein e, posteriormente, um estudo sistemático foi feito por Joseph e Small. Neste capítulo definiremos a dimensão de Gelfand-Kirillov para módulos e apresentaremos os resultados básicos sobre módulos filtrados e graduados.

3.1 A dimensão de Gelfand-Kirillov de um módulo

Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada com subespaço gerador de dimensão finita V que contém 1, e seja M um A -módulo à direita finitamente gerado com um espaço vetorial F de dimensão finita que gera M como A -módulo. Então

$$M = \bigcup_{n=0}^{\infty} FV^n.$$

Assim como no Lema 1.1.2 é possível verificar que o crescimento $\mathcal{G}(d_{V,F})$ da função $d_{V,F}(n) = \dim_{\mathbb{K}}(FV^n)$ não depende das escolhas particulares para os espaços V e F ; portanto nos referimos ao **crescimento $\mathcal{G}(M)$ do módulo M** , e definimos

$$GKdim(M) = \overline{\lim} \log_n d_{V,F}(n).$$

Mais geralmente, definimos

Definição 3.1.1. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra, e seja M um A -módulo à direita. A **dimensão de Gelfand-Kirillov** de M é dada por*

$$GKdim(M) = \sup_{V,F} \overline{\lim} \log_n \dim_{\mathbb{K}}(FV^n)$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços V de dimensão finita de A que contém 1 e todos os subespaços F de dimensão finita de M . Alternativamente,

$$GKdim(M_A) = \sup_{B,N} GKdim(N_B),$$

onde o supremo é tomado sobre todas as subálgebras B de A finitamente geradas e todos os B -submódulos à direita N de M finitamente gerados. Notemos que $GKdim(0) = -\infty$

Segue da definição que $GKdim(A)$, a dimensão de Gelfand-Kirillov de A como álgebra, e $GKdim(A_A)$, a dimensão de A como A -módulo à direita, coincidem.

Lema 3.1.2. *Se B é submódulo ou imagem homomorfa de um módulo A , então $GKdim(B) \leq GKdim(A)$.*

Demonstração: Para submódulos o resultado é imediato. Para um módulo quociente $\overline{M}$ de M consideramos subespaços V de A e $\overline{F}$ de $\overline{M}$ de dimensão finita. A partir dos elementos da base de $\overline{F}$ podemos obter, em M , um conjunto de representantes, os quais formam uma base de um subespaço F de M , de dimensão finita. Assim, temos que $\dim(\overline{F}V^n) \leq (\dim FV^n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$\overline{\lim} \log_n \dim(\overline{F}V^n) \leq \overline{\lim} \log_n \dim(FV^n)$$

e portanto,

$$\sup_{V, \bar{F}} \overline{\lim} \log_n \dim(\bar{F}V^n) \leq \sup_{V, F} \overline{\lim} \log_n \dim(FV^n).$$

□

Proposição 3.1.3. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra, e seja M um A -módulo à direita. Então*

(a) *Se $M = \oplus_{i=1}^n M_i$, então $GKdim(M) = \max_i \{GKdim(M_i)\}$.*

(b) *Se $0 \rightarrow K \xrightarrow{\psi} M \xrightarrow{\phi} L \rightarrow 0$ é uma sequência exata de A -módulos à direita, então $GKdim(M) \geq \max\{GKdim(K), GKdim(L)\}$.*

(c) *Se $MI = 0$ para um ideal I de A , então $GKdim(M_A) = GKdim(M_{A/I})$.*

(d) *$GKdim(M_A) \leq GKdim(A)$.*

(e) *Se M é finitamente gerado e $\alpha \in End_A(M)$ é injetor, então*

$$GKdim(M/\alpha(M)) \leq GKdim(M) - 1.$$

Demonstração: (a) Da definição da dimensão de Gelfand-Kirillov para módulos e do Lema 3.1.2, temos que

$$\gamma := \max\{GKdim(M_i)\} \leq GKdim(\oplus_{i=1}^n M_i),$$

e a igualdade vale se $GKdim(M_i) = \infty$ para algum M_i . Suponhamos que γ é finito e $n = 2$, sem perda de generalidade.

Seja FW tal que $F = F_1 \oplus F_2$ é subespaço de M , onde F_1 e F_2 geram M_1 e M_2 , respectivamente, e ambos são de dimensão finita, e W subespaço de A de dimensão finita que contém 1. Temos

$$F = F_1 \oplus F_2 \Rightarrow FV = (F_1 \oplus F_2)V = F_1V \oplus F_2V.$$

Pelo Lema 1.2.1, temos

$$d_{V,F_1}(n) \leq n^{\gamma+\frac{\epsilon}{2}} \quad e \quad d_{V,F_2}(n) \leq n^{\gamma+\frac{\epsilon}{2}}$$

para quase todo n . Como $n^{\frac{\epsilon}{2}} > 2$ para algum n suficientemente grande, temos

$$d_{V,F}(n) = d_{V,F_1}(n) + d_{V,F_2}(n) \leq 2n^{\gamma+\frac{\epsilon}{2}} < n^{\frac{\epsilon}{2}} n^{\gamma+\frac{\epsilon}{2}} = n^{\gamma+\epsilon}$$

para quase todo n . Então $\overline{\lim} \log_n d_{V,F} \leq \gamma$ pelo Lema 1.2.1, e portanto

$$GKdim(M_1 \oplus M_2) = \sup \overline{\lim} \log_n d_W(n) \leq \gamma.$$

(b) Como $K \cong \psi(K)$ (pois é injetora) e $\dim_{\mathbb{K}}(K) \leq \dim_{\mathbb{K}}(M)$, segue que $GKdim(K) \leq GKdim(M)$.

Quanto à outra desigualdade, como ϕ é sobrejetora, sabemos que $L \cong M/Ker\phi$. Logo, pelo 3.1.2, $GKdim(L) \leq GKdim(M)$.

(c) Seja F subespaço de M , V subespaço gerador de A com unidade. Como $MI = 0$, M pode ser visto como um A/I -módulo tal que $m.\bar{a} := ma$.

Seja $\bar{V}$ o conjunto formado pelos elementos correspondentes de V em A/I . Então

$$\dim(FV^n) = \dim(F\bar{V}^n).$$

Consequentemente

$$\overline{\lim} \log_n \dim(FV^n) = \overline{\lim} \log_n \dim(F\bar{V}^n).$$

Então

$$\overline{\lim} \log_n \dim(FV^n) \leq \sup_{F,W} \overline{\lim} \log_n \dim(F\bar{W}^n) \Rightarrow \sup_{F,V} \overline{\lim} \log_n \dim(FV^n) \leq \sup_{F,W} \overline{\lim} \log_n \dim(F\bar{W}^n),$$

onde o supremo é tomado sobre todos os subespaços geradores com unidade W de A/I .

A desigualdade inversa é obtida de maneira análoga a partir da igualdade acima.

(d) Seja F um subespaço de dimensão finita de M , e seja V um subespaço de dimensão finita de A que contém 1. Claramente, $\dim_{\mathbb{K}}(FV^n) \leq \dim_{\mathbb{K}}(F)\dim_{\mathbb{K}}(V^n)$. Logo $\mathcal{G}(d_{F,V}) \leq \mathcal{G}(d_V)$. Portanto $GKdim(M_A) \leq GKdim(A)$.

(e) Seja V um subespaço de dimensão finita de A , com unidade, e seja $\overline{F}$ um subespaço de dimensão finita de $\overline{M} = M/\alpha(M)$ que gera $\overline{M}$ como A -módulo. Como $\alpha(M)$ também é finitamente gerado, existe um subespaço F de M de dimensão finita tal que F gera M como A -módulo e $\overline{F}$ é a imagem de F sob o homomorfismo canônico $M \rightarrow M/\alpha(M)$.

Para cada inteiro $n > 0$, seja C_n o espaço vetorial complementar a $\alpha(M) \cap FV^n$ em FV^n ; logo $C_n \cong \overline{F}V^n$. Como $C_n \cap \alpha(M) = 0$, a soma

$$C_n + \alpha(C_n) + \alpha^2(C_n) + \cdots + \alpha^j(C_n)$$

de subespaços é direta para todo j . De fato, se

$$a_0x_0 + a_1\alpha(x_1) + \cdots + a_j\alpha^j(x_j) = 0,$$

onde $x_i \in C_n$ e $a_i \in \mathbb{K}$, $0 \leq i \leq j$, temos

$$\alpha(a_1x_1 + \cdots + a_j\alpha^{j-1}(x_j)) = -a_0x_0.$$

Como $-a_0x_0$ está em C_n e em $\alpha(M)$, se $a_0 \neq 0$, segue que $x_0 = 0$. Como α é injetor, isto implica que $a_1x_1 + \cdots + a_j\alpha^{j-1}(x_j) = 0$. Aplicando este processo recursivamente, temos que $a_i\alpha^i(x_i) = 0$ para todo i , provando que a soma é direta.

Como $\alpha(F)$ tem dimensão finita e F gera M como A -módulo, existe um subespaço de dimensão finita $W \supseteq V$ de A tal que $\alpha(F) \subseteq FW$.

Assim,

$$\bigoplus_{j=0}^n \alpha^j(C^n) \subseteq \bigoplus_{j=0}^n \alpha^j(FV^n) = \bigoplus_{j=0}^n \alpha^j(F)V^n \subseteq \bigoplus_{j=0}^n FW^jW^n \subseteq FW^{2n},$$

e consequentemente

$$\dim_{\mathbb{K}}(FW^{2n}) \geq (n+1)\dim_{\mathbb{K}}(C_n) = (n+1)\dim_{\mathbb{K}}(\overline{F}V^n)$$

de onde segue o resultado. $\square$

Em geral, a parte (e) do teorema acima não é válida se M não é um A -módulo à direita finitamente gerado. Se $M = \mathbb{K}[x]$ é considerado como um $\mathbb{K}$ -módulo à direita, então $GKdim(M_{\mathbb{K}}) = 0$. Notemos que a multiplicação à direita por x induz um $\mathbb{K}$ -homomorfismo α de M . Então

$$GKdim(M/\alpha(M)) = 0 = GKdim(M),$$

uma vez que $M/\alpha(M) \cong \mathbb{K}$.

Há situações onde a desigualdade em (b) pode ser uma igualdade, o que motiva a próxima definição.

Definição 3.1.4. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra. A dimensão de Gelfand-Kirillov é **exata** para A -módulos à direita se*

$$GKdim(M) = \max\{GKdim(L), GKdim(N)\}$$

para qualquer sequência exata curta $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ de A -módulos à direita.

3.2 Álgebras filtradas e graduadas

Frequentemente, as álgebras são munidas de uma filtração natural, e informações podem ser obtidas ao passar para a álgebra graduada associada, e então trazendo os resultados de volta para a álgebra inicial. Isto é particularmente útil se a álgebra é filtrada por subespaços de dimensão finita tais que a álgebra graduada associada é comutativa - esse tipo de álgebra é chamado álgebra quase-comutativa. A dimensão de Gelfand-Kirillov é uma ferramenta efetiva no seu estudo, o qual será feito no capítulo seguinte.

Apesar de graduações gerais já terem sido estudadas, nos preocuparemos com graduações cujas componentes estão indexadas por números naturais ou inteiros. Além disso, nos restringiremos às graduações por subespaços de dimensão finita, as chamadas graduações finitas.

Definição 3.2.1. *Uma **graduação** $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ da $\mathbb{K}$ -álgebra A é uma sequência de $\mathbb{K}$ -subespaços A_i de A tais que*

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i \quad \text{e} \quad A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j} \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{Z}.$$

*Uma álgebra com uma graduação $\mathcal{A}$ é chamada **A -graduada**, ou simplesmente **graduada**; é **finitamente graduada** se cada uma das componentes A_i é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Os elementos de A_n são ditos **homogêneos de grau n** . A componente A_0*

é uma subálgebra de A que contém 1_A e portanto contém o corpo base $\mathbb{K}$. Se A é finitamente graduada, $A_0 = \mathbb{K}$, e $A_i = 0$ para todo $i < 0$, então A é chamado **graduada conexa**.

Definição 3.2.2. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com graduação $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Um A -módulo à direita M é **$\mathcal{A}$ -graduado**, ou simplesmente **graduado**, se existem subespaços M_i tais que

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i \quad \text{e} \quad M_i A_j \subseteq M_{i+j} \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{Z}.$$

Se cada M_i possui dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, então M é dito **finitamente graduado**. Os elementos de M_n são chamados **homogêneos de grau n** .

Seja $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i$ uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente graduada, e seja $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i$ um A -módulo finitamente graduado. Defina

$$A(n) = \bigoplus_{i=-n}^n A_i, \quad d_A(n) = \dim_{\mathbb{K}} A(n), \quad \text{e}$$

$$M(n) = \bigoplus_{i=-n}^n M_i, \quad d_M(n) = \dim_{\mathbb{K}} M(n).$$

O lema seguinte mostra que $\mathcal{G}(d_M)$ fornece um limitante superior para o crescimento do módulo M e que a igualdade vale se A é uma álgebra finitamente gerada e M é um A -módulo finitamente gerado à direita.

Lema 3.2.3. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente graduada, e seja M um A -módulo finitamente graduado. Então

(a) Se V é um subespaço de dimensão finita de A que contém 1 e E é um subespaço de dimensão finita de M , então $\mathcal{G}(d_{V,E}) \leq \mathcal{G}(d_M)$, e portanto $GKdim(M) \leq \overline{\lim} \log_n d_M(n)$.

(b) Se A é finitamente gerado como álgebra e M_A é finitamente gerado, então

$$\mathcal{G}(M) = \mathcal{G}(d_M) \quad \text{e} \quad GKdim(M) = \overline{\lim} \log_n d_M(n).$$

Demonstração: (a) Como V e E possuem dimensão finita, existe um número natural p tal que $V \subseteq A(p)$ e $E \subseteq M(p)$. Portanto

$$EV^n \subseteq EA(np) \subseteq M(np + p) \subseteq M(2pn)$$

para qualquer inteiro $n \geq 1$. Consequentemente, $d_{V,E}(n) \leq d_M(2pn)$, e segue a afirmação.

(b) Para p inteiro suficientemente grande, o espaço vetorial $V = A(p)$ gera A e contém 1, e $E = M(p)$ gera M como A -módulo. Queremos mostrar que $M(n) \subseteq EV^n$ para todo $n > 0$, e é suficiente mostrar que $M_{-n} + M_n \subseteq EV^n$. Demonstraremos que $M_n \subseteq EV^n$; um argumento simétrico nos dá que $M_{-n} \subseteq EV^{-n}$. Como os subespaços EV^m , $m = 0, 1, \dots$, fornecem uma filtração exaustiva de M , $M_n \subseteq EV^r$ para algum inteiro positivo r . Cada elemento $0 \neq x \in M_n$ é, portanto, uma soma de elementos não nulos $v_0 v_1 \cdots v_s$ com elementos homogêneos

$$v_0 \in E, v_i \in V, 1 \leq i \leq s, \quad \text{onde } s < r.$$

Vamos assumir que cada monômio foi simplificado ao máximo, isto é, assumiremos que

$$v_0 v_1 \notin E = M(p) \quad e \quad v_i v_{i+1} \notin V = A(p) \quad \text{para } i \geq 1$$

ou, equivalentemente, que $|deg(v_i v_{i+1})| > p$, para $i \geq 0$. Como

$$deg(v_0 v_1 \cdots v_s) = deg(v_0) + deg(v_1) + \cdots + deg(v_s) = n > 0,$$

pelo menos um dos v_i deve ter grau positivo. Suponhamos que $deg(v_i) > 0$, mas $deg(v_{i+1}) \leq 0$ para algum i . Então

$$|deg(v_i v_{i+1})| \leq \max\{|deg(v_i)|, |deg(v_{i+1})|\} \leq p,$$

uma contradição (para $i=s$, considerar $v_{s-1} v_s$). Portanto todo v_i possui grau positivo, logo $n \geq s + 1$ e consequentemente $v_0 v_1 \cdots v_s \in EV^n$, logo $M_n \subseteq EV^n$. $\square$

Definição 3.2.4. Uma $\mathbb{Z}$ -**filtração**, ou simplesmente uma **filtração** de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A é uma sequência de $\mathbb{K}$ -subespaços

$$\cdots \subseteq A_{i-1} \subseteq A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \cdots, i \in \mathbb{Z},$$

tal que

$$1 \in A_0, \quad A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j} \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{Z}, \quad e \quad A = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} A_i.$$

Uma filtração é chamada **finita** se cada A_i tem dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, e é chamada **discreta** se $A_i = 0$ para todo $i < n_0$ para algum inteiro $n_0 \leq 0$. O $\mathbb{K}$ -espaço vetorial

$$gr(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A_i/A_{i-1},$$

munido de uma multiplicação dada pela regra

$$(x + A_{i-1}) \cdot (y + A_{j-1}) = xy + A_{i+j-1},$$

onde x e y são elementos homogêneos de $gr(A)$, é chamado **álgebra graduada associada**. A operação se estende aos demais elementos de A por linearidade.

Veremos abaixo que se a álgebra graduada associada de uma $\mathbb{K}$ -álgebra discretamente filtrada A é finitamente gerada, então A é finitamente gerado.

Suponhamos que $gr(A)$ é gerado por $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_r$. Podemos supor que cada um desses geradores é homogêneo, sem perda de generalidade. Desta forma, a cada $\bar{x}_i$ podemos associar um $x_i \in A$. Seja $B \subseteq A$ a subálgebra gerada por $x_1, \dots, x_r$. Vamos mostrar que $A \subseteq B$. Por indução, mostraremos que cada $A_n \subseteq B$, $n \geq n_0$. Decorre da hipótese de a filtração ser discreta que $A_{n_0} \subseteq B$, uma vez que a primeira parcela não nula de $gr(A) = \bigoplus_{-\infty}^{\infty} A_i/A_{i-1}$ é justamente A_{n_0} . Suponhamos agora que $A_k \subseteq B$, para $k \geq n_0$. Mostremos que $A_{k+1} \subseteq B$. Seja $y \in A_{k+1}$. Ele possui um elemento correspondente $\bar{y} \in A_{k+1}/A_k$. Como $gr(A)$ é finitamente gerado, podemos escrever

$$\bar{y} = \sum_j \alpha_j \bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_s},$$

onde $1 \leq i_1, \dots, i_s \leq r$. Isto significa que $y - \sum_j \alpha_j x_{i_1} \cdots x_{i_s} \in A_k$. Como, pela hipótese de indução, $A_k \subseteq B$ e $\sum_j \alpha_j x_{i_1} \cdots x_{i_s} \in B$, segue que $y \in B$.

Definição 3.2.5. Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra filtrada por subespaços $A_i, i \in \mathbb{Z}$, e seja M um A -módulo à direita. Uma **filtração** de M é uma sequência de subespaços

$$\cdots \subseteq M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq M_{i+1} \subseteq \cdots, i \in \mathbb{Z},$$

tal que

$$M_i \cdot A_j \subseteq M_{i+j} \quad \text{para todo } i, j \in \mathbb{Z}, \quad \text{e} \quad M = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} M_i.$$

Uma filtração é **finita** se cada um dos espaços vetoriais M_i tem dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, e é **discreta** se $M_i = 0$ para todo $i < n_0$ para algum inteiro n_0 . O $\mathbb{K}$ -espaço vetorial

$$gr(M) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M_i / M_{i-1},$$

com a estrutura de $gr(A)$ -módulo dada pela regra

$$(m + M_{i-1}) \cdot (a + A_{j-1}) = ma + M_{i+j-1},$$

onde m e a são elementos homogêneos de $gr(M)$ e $gr(A)$, respectivamente, é chamado **módulo graduado associado**. A operação se estende aos demais elementos de M por linearidade.

De forma análoga à que vimos anteriormente, é possível mostrar que se o módulo graduado associado de um módulo discretamente filtrado é finitamente gerado, então o módulo original também é finitamente gerado.

Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com filtração $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, e seja M um A -módulo à direita com filtração $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Utilizando os homomorfismos canônicos

$$gr_i : M_i \rightarrow M_i / M_{i-1}, \quad \text{defina} \quad gr(E) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} gr_i(E \cap M_i)$$

para qualquer subespaço E de M . Se E é um submódulo de M , é fácil ver que $gr(E)$ é um $gr(A)$ -submódulo de $gr(M)_{gr(A)}$. A aplicação $E \rightarrow gr(E)$ preserva a ordem entre os submódulos de M_A e os submódulos de $gr(M)_{gr(A)}$. Se a filtração é discreta, então esta aplicação preserva inclusões estritas, como veremos a seguir.

Sejam E e F submódulos de M_A tais que $E \subseteq F$ e $gr(E) = gr(F)$. Vamos assumir que $F \setminus E \neq \emptyset$ e tome i minimal com relação à propriedade de que existe um elemento $f \in F \cap M_i$, $f \notin E$ - a existência deste i é garantida pelo fato de a filtração ser discreta. Como $gr(E) = gr(F)$, temos que

$$gr_i(f) = f + M_{i-1} = e + M_{i-1} = gr_i(e)$$

para algum $e \in E$. Portanto, $f - e \in M_{i-1}$. Como $E \subseteq F$, segue que $f - e \in F$. Pela minimalidade de i , segue que $f - e \in E$, de onde decorre que $f \in E$, uma contradição. Deste fato segue o próximo resultado.

Proposição 3.2.6. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra filtrada, e seja M um A -módulo discretamente filtrado. Se $gr(M)_{gr(A)}$ é noetheriano, então M_A é noetheriano.*

Lema 3.2.7. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com uma filtração $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, e seja M um A -módulo à direita filtrado com filtração $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Então*

$$GKdim(gr(M)_{gr(A)}) \leq GKdim(M_A).$$

Demonstração: Seja W um subespaço de dimensão finita de $gr(A)$ que contém 1, e seja F um subespaço de dimensão finita de $gr(M)$. Então existe um subespaço V de A de dimensão finita que contém 1 e um subespaço de dimensão finita E de M tal que $W \subseteq gr(V)$ e $F \subseteq gr(E)$. Então

$$FW^n \subseteq gr(E)gr(V)^n \subseteq gr(E)gr(V^n) \subseteq gr(EV^n)$$

uma vez que

$$gr(EV^n) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(EV^n \cap M_i) + M_{i-1}}{M_{i-1}} \cong \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \frac{(EV^n \cap M_i)}{(EV^n \cap M_{i-1})},$$

e como $\dim_{\mathbb{K}}(EV^n) < \infty$, segue que $\dim_{\mathbb{K}}(FW^n) \leq \dim_{\mathbb{K}}(EV^n)$ para todo inteiro $n > 0$. Pela definição da dimensão de Gelfand-Kirillov para módulos, segue o resultado. $\square$

Temos interesse especial no caso em que a desigualdade acima é uma igualdade.

Proposição 3.2.8. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com filtração finita $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $gr(A)$ é finitamente gerado, e seja M um A -módulo à direita com filtração discreta finita $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tal que $gr(M)_{gr(A)}$ é finitamente gerado. Se $d_{\mathcal{M}} := \dim_{\mathbb{K}} M_n$, para $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\mathcal{G}(gr(M)) = \mathcal{G}(M) = \mathcal{G}(d_{\mathcal{M}}) = \mathcal{G}(d_{gr(M)}),$$

e portanto, em particular,

$$GKdim(gr(M)_{gr(A)}) = GKdim(M_A) = \overline{\lim} \log_n d_{\mathcal{M}}(n).$$

Demonstração: Por hipótese, existe um número natural q tal que $M_i = 0$ para todo $i < -q$. Logo

$$gr(M)(n) = \bigoplus_{i=-n}^n \frac{M_i}{M_{i-1}} \cong M_n$$

como $\mathbb{K}$ -módulos, para todo $n \geq q$, implicando que $d_{\mathcal{M}} \equiv d_{gr(M)}$, e consequentemente que

$$\mathcal{G}(d_{\mathcal{M}}) = \mathcal{G}(d_{gr(M)}).$$

Pelo Lema 3.2.3 (b), temos que

$$\mathcal{G}(gr(M)) = \mathcal{G}(d_{gr(M)}).$$

Segue das hipóteses que A é uma álgebra finitamente gerada e que M é um A -módulo finitamente gerado. Seja V um subespaço gerador de A , de dimensão finita e que contém 1, e seja E um subespaço de dimensão finita de M que gera M como A -módulo à direita. Existe um número natural p tal que $V \subseteq A_p$ e $E \subseteq M_p$. Então

$$EV^n \subseteq M_p A_p^n \subseteq M_p A_{np} \subseteq M_{2pn} \quad \text{para todo } n \geq 1,$$

de forma que

$$d_{V,E}(n) \leq d_{\mathcal{M}}(2pn); \quad \text{portanto } \mathcal{G}(M) \leq \mathcal{G}(d_{\mathcal{M}}).$$

Por fim, temos do lema anterior que

$$\mathcal{G}(gr(M)) = \mathcal{G}(M).$$

□

O resultado acima é amplamente aplicável pois, como o lema seguinte mostra, qualquer módulo finitamente gerado sobre uma $\mathbb{K}$ -álgebra filtrada possui uma filtração tal que o módulo graduado associado é finitamente gerado.

Lema 3.2.9. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com filtração $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, e seja M um A -módulo finitamente gerado, $M = EA$, onde E é um subespaço de dimensão finita de M . Então $gr(M)_{gr(A)}$, o módulo graduado sob a filtração $\{EA_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$, é finitamente gerado.*

Demonstração: Seja $x + EA_{i-1} \in EA_i/EA_{i-1}$ um elemento homogêneo de $gr(M)$. Se os elementos $e_1, \dots, e_n$ constituem uma base para o espaço vetorial $E \subseteq EA_0$, então $x = \sum_{j=1}^n e_j a_{ij}$ com $a_{ij} \in A_i$. Portanto

$$x + EA_{i-1} = \sum_{j=1}^n (e_j + EA_{-1})(a_{ij} + A_{i-1}),$$

mostrando que os elementos $e_j + EA_{-1}$, $1 \leq j \leq r$, geram $gr(M)$ como $gr(A)$ -módulo. $\square$

Definição 3.2.10. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra com uma filtração $\{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ e seja M um A -módulo finitamente gerado à direita, $M = EA$, para algum subespaço de dimensão finita E de M . A filtração $\{EA_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ é uma **filtração standard** de M .*

Pela Proposição 3.2.8, o comportamento do crescimento de duas filtrações discretas finitas com módulos graduados associados finitamente gerados é essencialmente o mesmo para qualquer A -módulo, onde A é uma $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente filtrada e $gr(A)$ é finitamente gerada. De fato, tais filtrações do A -módulo à direita M estão ainda mais relacionadas, e são equivalentes no seguinte sentido.

Definição 3.2.11. *Sejam $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ e $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ duas filtrações do A -módulo à direita M , onde A é uma $\mathbb{K}$ -álgebra filtrada. Então $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são **equivalentes** se há um número natural n tal que*

$$N_i \subseteq M_{i+n} \quad e \quad M_i \subseteq N_{i+n} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Proposição 3.2.12. *Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ uma filtração discreta finita de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A , e sejam $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ e $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ duas filtrações discretas finitas de um A -módulo à direita M . Se $gr(M)_{gr(A)}$ é finitamente gerado, então existe um número natural n tal que $M_i \subseteq N_{i+n}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Como vamos assumir que todas as filtrações são discretas, existe um número natural q tal que

$$A_s = 0, \quad e \quad N_s = M_s = 0, \quad \forall s < -q.$$

Como $gr(M)_{gr(A)}$ é finitamente gerado, existe um inteiro $r \geq q$ tal que

$$gr_{\mathcal{M}}(M)(r) = \bigoplus_{j=-q}^r \frac{M_j}{M_{j-1}}$$

é um subespaço gerador de dimensão finita. Como M_r possui dimensão finita, existe um número natural n tal que $M_r \subseteq N_{n-q}$. Portanto, se $-q \leq i \leq r$, então $n - q \leq n + i$ e consequentemente

$$M_i \subseteq M_r \subseteq N_{n-q} \subseteq N_{i+n}.$$

Agora, seja $i > r$, e assuma que $M_j \subseteq N_{j+n}$ já foi estabelecido para $j < i$. Como $gr_{\mathcal{M}}(M)(r)$ gera $gr_{\mathcal{M}}(M)$ como $gr(A)$ -módulo, segue que

$$\frac{M_i}{M_{i+1}} = \sum_{j=-q}^r (M_j/M_{j-1})(A_{i-j}/A_{i-j-1}),$$

e portanto que

$$M_i = \sum_{j=-q}^r (M_j A_{i-j}) + M_{i-1} \subseteq \sum_{j=-q}^r (N_{j+n} A_{i-j}) + N_{i-1+n} \subseteq N_{i+n}.$$

E portanto o resultado segue por indução. $\square$

Corolário 3.2.13. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra discreta e finitamente filtrada, e seja M um A -módulo à direita. Então duas filtrações discretas finitas de M são equivalentes, sempre que seus módulos graduados associados sejam $gr(A)$ -módulos à direita finitamente gerados.*

Em particular, segue do corolário acima e do Lema 3.2.9 que qualquer filtração discreta e finita de um A -módulo finitamente gerado é equivalente à filtração standard.

Lema 3.2.14. *Seja $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ uma $\mathbb{K}$ -álgebra graduada, gerada como álgebra por A_1 , e seja $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ um A -módulo graduado à direita com um sistema de geradores homogêneos $\{m_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que $\deg(m_{\lambda}) \leq n_0$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Então*

$$M_{n+j} = M_n A_j \quad \text{para todo } n \geq n_0 \text{ e todo } 0 \leq j \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração: Seja $n \geq n_0$, e seja $m \in M_{n+1}$. Então $m = \sum_{\lambda \in \Lambda_0} m_\lambda a_\lambda$ para um subconjunto finito Λ_0 de Λ , e podemos supor que os elementos $a_\lambda \in A$ são homogêneos de grau $n+1 - \deg(m_\lambda)$. Como a álgebra A é gerada por A_1 , e como $\deg(a_\lambda) \geq 0$ para cada $\lambda \in \Lambda_0$, cada a_λ é uma soma de termos da forma cb com $b \in A_1$ e um elemento $c \in A$ que é homogêneo de grau $n - \deg(m_\lambda)$. Logo $m \in M_n A_1$, portanto $M_{n+1} = M_n A_1$, e o resultado segue por indução. $\square$

Como vimos no início deste capítulo, a dimensão de Gelfand-Kirillov nem sempre é exata. Como a exatidão é a chave no estudo de inúmeros resultados relacionados a estrutura de álgebras, o teorema seguinte é importante para o estudo de álgebras noetherianas.

Teorema 3.2.15. *Seja $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ uma filtração discreta finita de uma $\mathbb{K}$ -álgebra A , tal que a álgebra graduada associada $gr_{\mathcal{A}}(A)$ é finitamente gerada e noetheriana à direita. Então*

$$GKdim(M) = \max\{GKdim(N), GKdim(P)\}$$

para toda sequência exata $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ de A -módulos à direita finitamente gerados.

Demonstração: Como M_A é finitamente gerado, $M = EA$ para um subespaço E de dimensão finita. Seja $\mathcal{M} = \{EA_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ a filtração canônica resultante. Pelo Lema 3.2.9, o módulo graduado associado $gr_{\mathcal{M}}(M)$ é finitamente gerado e, portanto, noetheriano, pois $gr(A)$ é noetheriano à direita por hipótese. As filtrações induzidas

$$\mathcal{N} = \{M_i \cap N\}_{i \in \mathbb{Z}} \quad e \quad \mathcal{P} = \left\{ \frac{M_i + N}{N} \right\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

levam à sequência exata

$$0 \rightarrow gr_{\mathcal{N}}(N) \rightarrow gr_{\mathcal{M}}(M) \rightarrow gr_{\mathcal{P}}(P) \rightarrow 0$$

de $gr(A)$ -módulos graduados à direita. Como $gr_{\mathcal{M}}(M)$ é noetheriano, $gr_{\mathcal{N}}(N)$ e $gr_{\mathcal{P}}(P)$ são finitamente gerados. Note que todas as filtrações são finitas e que

$$d_{\mathcal{M}}(n) = \dim_{\mathbb{K}}(M_n) = \dim_{\mathbb{K}}(M_n \cap N) + \dim_{\mathbb{K}}((M_n + N)/N) = d_{\mathcal{N}}(n) + d_{\mathcal{P}}(n)$$

para qualquer número natural n . Segue do Lema 1.2.1 e da Proposição 2.1.2 que

$$\overline{\lim} \log_n d_{\mathcal{M}}(n) = \max\{\overline{\lim} \log_n d_{\mathcal{N}}(n), \overline{\lim} \log_n d_{\mathcal{P}}(n)\}$$

Pela Proposição 3.2.8, temos

$$\begin{aligned} GKdim(M_A) &= GKdim(gr_{\mathcal{M}}(M)_{gr(A)}) = \overline{\lim} \log_n d_{\mathcal{M}}(n) \\ &= \max\{\overline{\lim} \log_n d_{\mathcal{N}}(n), \overline{\lim} \log_n d_{\mathcal{P}}(n)\} \\ &= \max\{GKdim(gr_{\mathcal{N}}(N)_{gr(A)}), GKdim(gr_{\mathcal{P}}(P)_{gr(A)})\} \\ &= \max\{GKdim(N_A), GKdim(P_A)\}. \quad \square \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

ÁLGEBRAS QUASE-COMUTATIVAS

4.1 Álgebras quase-comutativas

Definição 4.1.1. *Uma $\mathbb{K}$ -álgebra é **quase-comutativa** se existe uma filtração*

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = A$$

tal que

(a) $A_0 = \mathbb{K}$.

(b) A_1 tem dimensão finita e $A_i = A_1^i$ para todo $i \geq 1$.

(c) A álgebra graduada associada

$$gr(A) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \frac{A_i}{A_{i-1}}$$

é comutativa.

Pelo Teorema 3.2.15, o resultado seguinte mostra que a dimensão de Gelfand-Kirillov é exata para módulos finitamente gerados sobre uma álgebra quase-comutativa.

Teorema 4.1.2. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra quase-comutativa com respeito à filtração $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i=0}^\infty$. Então*

(a) *$gr_{\mathcal{A}}(A)$ é uma álgebra comutativa noetheriana finitamente gerada.*

(b) *A é noetheriano à esquerda e à direita.*

Demonstração: (b) decorre de (a) pela Proposição 3.2.6. Como uma álgebra, $gr(A)$ é gerada por A_1/A_0 , e cada A_i/A_{i-1} é gerado pelas palavras de comprimento i compostas por finitos elementos da base do espaço vetorial A_1/A_0 . Então existe um homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras graduadas da álgebra simétrica $S = S(A_1/A_0)$ sobre $gr(A)$. S é noetheriano pelo Teorema da Base de Hilbert, logo $gr(A)$ é noetheriano. $\square$

Exemplo 4.1.3. *Seja $A_n = A_n(\mathbb{K})$ a n -ésima álgebra de Weyl com geradores $x_1, \dots, x_n, \partial_1, \dots, \partial_n$. Um elemento $a \in A_n$ pode ser escrito unicamente como uma combinação linear finita de monômios*

$$x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \partial_1^{j_1} \cdots \partial_n^{j_n},$$

onde os expoentes são inteiros não-negativos. O grau de tal monômio é a soma de seus expoentes, e o grau $\deg(a)$ do elemento a é o maior valor que ocorre como um dos graus dos monômios que compõem a . Isto nos dá uma filtração natural de A_n por subespaços de dimensão finita

$$M_0 = \mathbb{K}, \quad M_i = \{a \in A_n, \deg(a) \leq i\}.$$

Esta filtração é chamada **filtração de Bernstein de A_n** .

$\square$

Teorema 4.1.4. *A álgebra graduada $gr(A_n)$ segundo a filtração de Bernstein é isomorfa ao anel de polinômios sobre $\mathbb{K}$ em $2n$ variáveis.*

Demonstração: Para $i = 1, \dots, n$, sejam $y_i = gr_1(x_i)$ e $y_{i+n} = gr_1(\partial_i)$. Dividiremos a prova em três partes.

Primeiro passo: $gr(A_n)$ é gerado por $y_1, \dots, y_{2n}$ como $\mathbb{K}$ -álgebra.

É suficiente mostrar este fato para os elementos homogêneos de $gr(A_n)$. Mas um elemento homogêneo de $gr(A_n)$ é da forma $gr_k(d)$ para algum elemento d em A_n de grau k . Porém d é uma combinação linear de monômios $x^\alpha \partial^\beta$, com $|\alpha| + |\beta| \leq k$. Se $|\alpha| + |\beta| = k$, então

$$gr_k(x^\alpha \partial^\beta) = (y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n})(y_{n+1}^{\beta_1} \cdots y_{2n}^{\beta_n}).$$

Portanto $gr_k(d)$ é combinação linear de monômios de grau k em $y_1, \dots, y_{2n}$, como queríamos demonstrar.

Segundo passo: $gr(A_n)$ é um anel comutativo.

Como $gr(A_n)$ é gerado por $y_1, \dots, y_{2n}$, precisamos mostrar apenas que estes elementos comutam em $gr(A)$. Para $i = 1, \dots, n$, temos que $y_i y_{i+n} = gr_2(x_i \partial_i)$ e $y_{i+n} y_i = gr_2(\partial_i x_i)$. Como $\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1$, segue que

$$gr_2(\partial_i x_i) = gr_2(x_i \partial_i),$$

e portanto $y_j y_{i+n} = y_{i+n} y_j$. Além disso, para $j \neq i + n$, temos que $y_i y_{i+n} = y_{i+n} y_i$ uma vez que os elementos correspondentes comutam em A_n .

Seja $\mathbb{K}[z_1, \dots, z_{2n}]$ o anel de polinômios em $2n$ variáveis. Os dois passos anteriores nos permitem definir um homomorfismo sobrejetor de anéis

$$\phi : \mathbb{K}[z_1, \dots, z_{2n}] \rightarrow gr(A_n)$$

por $\phi(z_i) = y_i$. Como os z possuem grau 1 em $\mathbb{K}[z_1, \dots, z_{2n}]$ e os y possuem grau 1 em $gr(A_n)$, ϕ é um homomorfismo graduado de $\mathbb{K}$ -álgebras.

Terceiro passo: ϕ é injetor

Seja $F \in \mathbb{K}[z_1, \dots, z_{2n}]$, e suponha que $\phi(F) = 0$. Como ϕ é um homomorfismo graduado, podemos assumir que F é um polinômio homogêneo. Seja

$$F(y_1, \dots, y_{2n}) = \sum c_{\alpha\beta} y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n} \cdot y_{n+1}^{\beta_1} \cdots y_{2n}^{\beta_n},$$

onde $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n = k$. Defina um operador d de A_n pela fórmula

$$d = \sum c_{\alpha\beta} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \cdot \partial_1^{\beta_1} \cdots \partial_n^{\beta_n}.$$

Logo, $gr_k(d) = F(y_1, \dots, y_{2n})$.

Se $gr_k(d) = \phi(F) = 0$, então $d \in M_{k-1}$. Portanto d pode ser escrito como combinação linear de monômios $x^\alpha \partial^\beta$ com $|\alpha| + |\beta| < k$. Portanto, pela Proposição 2.3.4, todos os $c_{\alpha\beta}$ acima são iguais a zero. Portanto F é o polinômio nulo e ϕ é injetor, como queríamos. $\square$

Como já foi mencionado, a dimensão de Gelfand-Kirillov é exata para módulos graduados sobre uma álgebra polinomial comutativa A . Como módulos finitamente gerados possuem crescimento polinomial, mostraremos que $GKdim(M)$ é um inteiro positivo (ou $-\infty$, se $M = 0$). O ponto de partida é um teorema clássico, enunciado por Hilbert, sobre módulos graduados sobre álgebras quase-comutativas. A prova dada é devida a Serre. Os polinômios que surgem são chamados polinômios de Hilbert-Samuel.

Teorema 4.1.5. *Seja $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]$ uma álgebra polinomial comutativa, vista como uma álgebra graduada $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ via a graduação usual, e seja $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ um A -módulo graduado finitamente gerado.*

- (a) *Cada M_i é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita.*
- (b) *Para n suficientemente grande, $\dim_{\mathbb{K}} M_n$ é um polinômio em n de grau $\leq r - 1$ com coeficientes racionais.*
- (c) *Para números naturais $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grandes,*

$$d_M(n) := \dim_{\mathbb{K}}(M_0 \oplus \cdots \oplus M_n)$$

é um polinômio em n de grau $\leq r$ com coeficientes racionais.

Demonstração: Para mostrar (a), seja $\{m_1, \dots, m_s\}$ um conjunto de geradores homogêneos de M . Para qualquer número natural q , um conjunto finito de geradores do $\mathbb{K}$ -módulo M_q é obtido ao considerar, para cada $j = 1, \dots, s$ todos os elementos $m_j \mu_{jl}$, onde μ_{jl} varia entre todos os monômios em $x_1, \dots, x_r$ de grau $q - \deg(m_j)$.

(b) Vamos proceder por indução sobre r . Se $r = 0$, então $A = \mathbb{K}$, e como M é finitamente gerado, $M_n = 0$ para n suficientemente grande. Logo a afirmação vale se fixarmos o grau -1 para o polinômio nulo.

Para $r > 0$, defina

$$\theta : M \rightarrow M \quad \text{por} \quad \theta(m) = x_r m.$$

Então θ é um homomorfismo de grau 1 do A -módulo graduado M em si mesmo. Considere a sequência exata

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \xrightarrow{\theta} M \rightarrow C \rightarrow 0,$$

de A -módulos graduados, onde $K = \text{Ker}(\theta)$ e $C = \text{Coker}(\theta)$.

Para cada n , temos induzida uma sequência exata de $\mathbb{K}$ -homomorfismos para as componentes homogêneas

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow M_n \xrightarrow{\theta} M_{n+1} \rightarrow C_{n+1}$$

Como M é noetheriano, C e K são finitamente gerados, e são módulos sobre a álgebra

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_{r-1}] \cong \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_r]}{(x_r)},$$

pois $x_r C = 0 = x_r K$.

Pela hipótese de indução,

$$\dim_{\mathbb{K}} K_n \quad \text{e} \quad \dim_{\mathbb{K}} C_{n+1}$$

são polinômios em n de grau menor ou igual a $r - 2$, se n é suficientemente grande. Agora

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} C_{n+1} &= \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{M_{n+1}}{\theta(M_n)} \right) = \dim_{\mathbb{K}}(M_{n+1}) - \dim_{\mathbb{K}} \left(\frac{M_n}{K_n} \right) \\ &= \dim_{\mathbb{K}}(M_{n+1}) - \dim_{\mathbb{K}}(M_n) + \dim_{\mathbb{K}}(K_n), \end{aligned}$$

pelo Teorema dos Isomorfismos. Logo

$$\dim_{\mathbb{K}}(M_{n+1}) - \dim_{\mathbb{K}}(M_n) = \dim_{\mathbb{K}}(C_{n+1}) - \dim_{\mathbb{K}}(K_n)$$

é um polinômio de grau $\leq r - 2$ para n suficientemente grande. Portanto $\dim_{\mathbb{K}}(M_n)$ é um polinômio de grau $\leq r - 1$ pelo Lema 1.1.6 (b).

(c) Segue do item anterior e do Lema 1.1.6 (b). $\square$

Corolário 4.1.6. *Seja $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ uma $\mathbb{K}$ -álgebra comutativa tal que $A_0 = \mathbb{K}$ e A_1 seja um subespaço gerador de dimensão finita para A , e seja $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ um A -módulo graduado finitamente gerado. Então, para valores suficientemente grandes de n ,*

$$d_M(n) := \dim_{\mathbb{K}}(M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots \oplus M_n)$$

é um polinômio em n com coeficientes racionais e de grau $GKdim(M)$.

Demonstração: A álgebra A é imagem homomorfa de $S(A_1)$, a álgebra simétrica em $\dim_{\mathbb{K}} A_1$ geradores. Logo M é um módulo graduado finitamente gerado sobre uma álgebra polinomial comutativa e a primeira asserção segue do Teorema 4.1.5. Note que como $A \cong \frac{S(A_1)}{I}$, para algum $I \subset S(A_1)$, então M visto como $S(A_1)$ -módulo satisfaz $MI = 0$. Pela Proposição 3.1.3 (c), temos que

$$GKdim(M_A) = GKdim(M_{S(A_1)}),$$

e pelo Lema 3.2.3 (b) este número é igual ao grau do polinômio d_M . $\square$

Definição 4.1.7. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra quase-comutativa com respeito à filtração $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, e seja M um A -módulo à direita com filtração $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que o módulo graduado associado $gr_{\mathcal{M}}(M)$ é finitamente gerado. Para valores suficientemente grandes de n , a função*

$$d_{\mathcal{M}}(n) = \dim_{\mathbb{K}} M_n = \dim_{\mathbb{K}} \left(M_0 \oplus \frac{M_1}{M_0} \oplus \cdots \oplus \frac{M_n}{M_{n+1}} \right) = d_{gr_{\mathcal{M}}(M)}(n)$$

*é um polinômio em n com coeficientes racionais, chamado **polinômio de Hilbert-Samuel** de M com respeito às filtrações $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$. Se $d_{\mathcal{M}}(n)$ é escrito como*

$$d_{\mathcal{M}}(n) = a_d \binom{n}{d} + a_{d-1} \binom{n}{d-1} + \cdots + a_1 \binom{n}{1} + a_0,$$

então $e(M) = e_{\mathcal{A}, \mathcal{M}} := a_d$ é chamado **número de Bernstein de M** .

Segue da Proposição 3.2.8 que $GKdim(M_A)$ é o grau de $d_{\mathcal{M}}$. No entanto seu formato particular pode depender de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M}$, mas:

- o grau do polinômio de Hilbert-Samuel de M **não depende** das filtrações escolhidas para A e M ,

desde que eles estejam especificados como na definição. Note que o número de Bernstein também pode ser escrito como

$$(\text{coeficiente dominante de } d_{\mathcal{M}}(n)).(GKdim(M))!$$

Dadas duas filtrações $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{N} = \{N_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de M tais que os módulos $gr_{\mathcal{M}}(M)$ e $gr_{\mathcal{N}}(M)$ são finitamente gerados (e portanto noetherianos, pois A é noetheriano pela Proposição 4.1.2), então $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ são equivalentes pelo Corolário 3.2.13. Logo existe um número natural q tal que

$$N_n \subseteq M_{n+q} \quad \text{e} \quad M_n \subseteq N_{n+q} \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}.$$

Se $e_{\mathcal{M}}(M)$ e $e_{\mathcal{N}}(M)$ são os respectivos números de Bernstein, então para valores suficientemente grandes de n temos que

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{N}}(n) &= e_{\mathcal{N}}(M) \binom{n}{d} + (\text{termos de grau} < d) \\ &= \frac{e_{\mathcal{N}}(M)}{d!} n^d + (\text{termos de grau} < d) \\ &\leq d_{\mathcal{M}}(n+q) = e_{\mathcal{M}}(M) \binom{n+q}{d} + (\text{termos de grau} < d) \\ &= \frac{e_{\mathcal{M}}(M)}{d!} n^d + (\text{termos de grau} < d), \end{aligned}$$

e disso segue que $e_{\mathcal{N}}(M) \leq e_{\mathcal{M}}(M)$. Um argumento simétrico nos dá a desigualdade reversa. Portanto $e_{\mathcal{N}}(M) = e_{\mathcal{M}}(M)$. Logo,

- o número de Bernstein de M **não depende** da filtração particular escolhida para M .

Consequentemente denotaremos o número de Bernstein por $e(M)$, porém, estritamente falando, deve ser feita referência à filtração de A , pois o seguinte exemplo mostra que

- o número de Bernstein depende da filtração particular de A .

Exemplo 4.1.8. *Seja $A = \mathbb{K}[x]$ e sejam $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ duas filtrações de A , dadas por*

$$A_n = \mathbb{K} + \mathbb{K}x + \cdots + \mathbb{K}x^n, B_n = \mathbb{K} + \mathbb{K}x + \cdots + \mathbb{K}x^{2n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Seja $M = A_A$, e tome o subespaço gerador $E = \mathbb{K}$ de M . Sejam

$$\mathcal{M} = \{EA_n\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{EB_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

as filtrações standard resultantes de M . Então

$$d_{\mathcal{M}}(n) = \dim_{\mathbb{K}}(EA_n) = \dim_{\mathbb{K}}(A_n) = n + 1; \text{ logo } e_{\mathcal{A}}(M) = 1.$$

Por outro lado,

$$d_{\mathcal{N}}(n) = \dim_{\mathbb{K}}(EB_n) = \dim_{\mathbb{K}}(B_n) = 2n + 1; \text{ logo } e_{\mathcal{B}}(M) = 2.$$

□

Note que em ambos os casos o número de Bernstein é um inteiro positivo. Pelo Lema 1.1.6 (d), isto sempre ocorre.

Seja A uma álgebra quase-comutativa, e seja

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \xrightarrow{\phi} N \rightarrow 0$$

uma sequência exata curta de A -módulos à direita finitamente gerados. Sabemos do Teorema 3.2.15 que

$$GKdim(M) = \max\{GKdim(L), GKdim(N)\}.$$

Além disso, se $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma filtração standard de M , ou, de fato, é uma filtração para a qual o módulo graduado associado é finitamente gerado, e se $\mathcal{L} = (L \cap M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{N} = (\phi(M_n))_{n \in \mathbb{N}}$ são filtrações induzidas sobre L e N , respectivamente, então

$$d_{\mathcal{M}}(n) = \dim_{\mathbb{K}}(M_n) = \dim_{\mathbb{K}}(M_n \cap N) + \dim_{\mathbb{K}}((M_n + N)/N) = d_{\mathcal{L}}(n) + d_{\mathcal{N}}(n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $d_{\mathcal{M}}$, $d_{\mathcal{L}}$ e $d_{\mathcal{N}}$ são polinômios em n para valores suficientemente grandes de n , a exatidão da dimensão de Gelfand-Kirillov para A -módulos finitamente gerados segue trivialmente, e a parte (c) do teorema seguinte também vale. Entretanto, a filtração $\mathcal{L}$ induzida sobre L por uma filtração standard $\mathcal{M}$ de M não é necessariamente uma filtração standard.

Como é vantajoso trabalhar com filtrações standard, a primeira parte do resultado seguinte é importante.

Teorema 4.1.9. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra quase-comutativa, e seja*

$$0 \rightarrow L \rightarrow M \xrightarrow{\phi} N \rightarrow 0$$

uma sequência exata curta de A -módulos à direita finitamente gerados. Então

(a) *Há filtrações standard $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ de L , M e N , respectivamente, tais que $d_{\mathcal{M}}(n) = d_{\mathcal{N}}(n) + d_{\mathcal{L}}(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(b) $GKdim(M) = \max\{GKdim(L), GKdim(N)\}$.

(c) *Uma das seguintes relações é válida:*

$$GKdim(L) < GKdim(M) = GKdim(N), e(M) = e(N);$$

$$GKdim(N) < GKdim(M) = GKdim(L), e(M) = e(L);$$

$$GKdim(L) = GKdim(M) = GKdim(N), e(M) = e(L) + e(N).$$

Demonstração: Como $d_{\mathcal{L}}$, $d_{\mathcal{M}}$ e $d_{\mathcal{N}}$ são polinômios em n para valores de n suficientemente grandes, é claro que (b) e (c) seguem de (a). Seja $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a filtração que torna A quase-comutativa, seja E um subespaço gerador de dimensão finita para M , e defina

$$M_n := EA_n, \quad L_n := L \cap M_n, \quad e \quad N_n := \phi(M_n) = \phi(E)A_n.$$

Apesar de $\mathcal{M} = \{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\mathcal{N} = \{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ serem filtrações standard de M e N , respectivamente, $L = \{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não é uma filtração standard de L em geral. Vamos construir

uma nova filtração standard para M de modo que todas as filtrações induzidas também são standard, e isto conclui o argumento. Notemos que para cada n há uma sequência exata

$$0 \rightarrow L_n \rightarrow M_n \rightarrow N_n \rightarrow 0$$

de $\mathbb{K}$ -módulos; então obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow gr_{\mathcal{L}}(L) \rightarrow gr_{\mathcal{M}}(M) \rightarrow gr_{\mathcal{N}}(N) \rightarrow 0$$

de $gr(A)$ -módulos graduados à direita. Como $gr(A)$ é um anel noetheriano, e como $gr_{\mathcal{M}}$ é um $gr(A)$ -módulo à direita finitamente gerado, segundo o Lema 3.2.9, $gr_{\mathcal{M}}(M)$ é noetheriano; portanto $gr_{\mathcal{L}}(L)$ é finitamente gerado por, digamos,

$$L_0 \oplus \frac{L_1}{L_0} \oplus \cdots \oplus \frac{L_m}{L_{m-1}}.$$

Então

$$\frac{L_n}{L_{n-1}} = \left(\frac{L_m}{L_{m-1}} \right) \cdot \left(\frac{A_{n-m}}{A_{n-m-1}} \right) \text{ para todo } n \geq m$$

pelo Lema 3.2.14; portanto

$$L_n = L_m A_{n-m} + L_{n-1}.$$

Afirmamos que

$$L_n = L_m A_{n-m}, \text{ para } n \geq m.$$

De fato, primeiramente, para $n = m$, temos $L_m = L_m A_0 + L_{m-1}$. Mas $L_{m-1} = L_{m-1} \cdot 1 \subseteq L_m A_0$, pois $\mathcal{L}$ é filtração. Agora suponhamos que o resultado vale para $n = k - 1 \geq m$ e mostremos que vale para $n = k$. Temos que $L_k = L_m A_{k-m} + L_{k-1}$. Pela hipótese de indução, $L_{k-1} = L_m A_{k-m-1} \subseteq L_m A_{k-m}$, de onde segue que $L_k \subseteq L_m A_{k-m}$, concluindo a afirmação.

Notemos agora que L_m é um subespaço gerador de dimensão finita de L . Agora escolhamos novas filtrações para M , N e L definindo

$$M_0^* = M_m, N_0^* = \phi(M_m) = \phi(M_0), L_0^* = L_m,$$

e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} M_n^* &= M_0^* A_n = M_{m+n} \\ N_n^* &= N_0^* A_n = \phi(M_n^*) \\ L_n^* &= L_0^* A_n = L_m A_n = L_{m+n} = L \cap M_n^*. \end{aligned}$$

Estas são todas filtrações standard, e as filtrações de L e N são induzidas pela nova filtração de M . $\square$

Corolário 4.1.10. *Seja A uma $\mathbb{K}$ -álgebra quase-comutativa, e seja M um A -módulo à direita finitamente gerado com $GKdim(M) = d$ e número de Bernstein $e(M)$. Seja*

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_i \supset M_{i+1} \supset \cdots \supset M_n$$

uma cadeia estritamente descendente de submódulos com

$$GKdim(M_i/M_{i+1}) = d \quad \text{para} \quad 0 \leq i \leq n-1.$$

Então

$$(a) \quad e(M/M_i) = \sum_{j=0}^{i-1} e(M_j/M_{j+1}).$$

$$(b) \quad n \leq e(M).$$

Demonstração: (a) O resultado será provado por indução sobre n . Para $n = 1$, não há o que provar. Suponhamos que o resultado tenha sido provado para cadeias de tamanho k . Para $n = k + 1$, consideremos a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow \frac{M_k}{M_{k+1}} \rightarrow \frac{M_0}{M_{k+1}} \rightarrow \frac{M_0}{M_k} \rightarrow 0.$$

Por hipótese, $GKdim(M_k/M_{k+1}) = GKdim(M_0/M_1) = d$. Logo, pelo Teorema 4.1.9 (b), segue-se por indução que $GKdim(M_0/M_k) = d$. E portanto, pelo item (c) do Teorema 4.1.9,

$$e(M_0/M_{k+1}) = e(M_0/M_k) + e(M_k/M_{k+1}) = \sum_{j=0}^k e(M_j/M_{j+1}).$$

(b) Pelo Lema 1.1.6 (b), o número de Bernstein de um módulo não nulo é um inteiro positivo, logo

$$e(M_j/M_{j+1}) \geq 1 \text{ para } 0 \leq j \leq n-1.$$

Logo,

$$n \leq \sum_{j=0}^{n-1} e(M_j/M_{j+1}) = e(M/M_n) \leq e(M)$$

pela parte (a) e pelo Teorema 4.1.9 (c). $\square$

4.2 A dimensão de Gelfand-Kirillov de A_n -módulos

Como provamos no Teorema 4.1.4, a álgebra graduada associada de A_n com respeito à filtração de Bernstein é a álgebra polinomial $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$, logo $GKdim(A_n) = 2n$ (notemos que A_n satisfaz as hipóteses da Proposição 3.2.8), como já sabíamos.

Queremos agora mostrar a **desigualdade de Bernstein** para A_n , segundo a qual $GKdim(M) \geq n$ para todo A_n -módulo M não nulo.

Lema 4.2.1. *Sejam $A \subseteq B$ $\mathbb{K}$ -álgebras quase-comutativas com respeito às filtrações induzidas pelos subespaços geradores $V \subseteq W$, respectivamente. Seja M um B -módulo finitamente gerado com $GKdim(M_B) = d$ e número de Bernstein $e_B(M)$. Se N é um A -submódulo finitamente gerado de M , então*

$$(a) \quad GKdim(N_A) \leq d$$

$$(b) \quad GKdim(N_A) = d \text{ implica que } e_A(N) \leq e_B(N).$$

Demonstração: (a) Escolha subespaços geradores de dimensão finita $N_0 \subseteq M_0$ para N_A e M_B respectivamente e defina $N_n = N_0 V^n$, $M_n = M_0 W^n$. Então $N_n \subseteq M_n$ para todo n , logo

$$\begin{aligned} GKdim(N_A) &= \overline{\lim} \log_n \dim_{\mathbb{K}}(N_n) \\ &\leq \overline{\lim} \log_n \dim_{\mathbb{K}}(M_n) = GKdim(M_B) = d. \end{aligned}$$

(b) Se $GKdim(N_A) = GKdim(M_B)$, então para valores suficientemente grandes de n temos que $dim_{\mathbb{K}}(N_n)$ e $dim_{\mathbb{K}}(M_n)$ são polinômios em n de grau d e coeficientes dominantes $e_A(n)/d!$ e $e_B(n)/d!$, respectivamente. Logo, como $dim_{\mathbb{K}}(N_n) \leq dim_{\mathbb{K}}(M_n)$, segue que $e_A(N) \leq e_B(M)$.

O Lema de Quillen é essencial na prova da desigualdade de Bernstein para a dimensão de A_n -módulos.

Lema 4.2.2. ([6], página 171) *Se M é um módulo de comprimento finito sobre uma $\mathbb{K}$ -álgebra quase-comutativa A , então $End_A(M)$ é algébrico sobre $\mathbb{K}$.*

Teorema 4.2.3. *Se M é um módulo não nulo à direita sobre a álgebra de Weyl A_n , então $GKdim(M) \geq n$.*

Demonstração: Por indução em n . O caso $n = 1$ é o [Corolário 7.13, página 84, [4]], o qual não iremos demonstrar pois foge do objetivo desta dissertação, uma vez que utiliza a dimensão de Krull não comutativa de um módulo M . Assuma que para $n \geq 2$ qualquer A_{n-1} -módulo possui dimensão de Gelfand-Kirillov pelo menos $n - 1$. A álgebra de Weyl $B = A_n$ gerada por $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ contém

$$A = A_{n-1} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}] \quad e \quad C = A_1 = \mathbb{K}[x_n, y_n]$$

como subálgebras. Suponha que M é um B -módulo à direita não nulo e finitamente gerado com $GKdim(M_B) < n$, e seja N um A -submódulo não nulo finitamente gerado de M . Segue da hipótese de indução que

$$n - 1 \leq GKdim(N_A) \leq GKdim(M_A) \leq GKdim(M_B) < n,$$

logo

$$GKdim(N_A) = GKdim(M_B) = n - 1.$$

Logo, pelo Lema 4.2.1, $e_A(N) \leq e_B(M)$. Como todo A -módulo diferente de 0 possui dimensão de Gelfand-Kirillov pelo menos $n - 1$, por indução, o Corolário 4.1.10 mostra que N possui série de composição de comprimento, no máximo, $e_B(M)$. Mas N é um A -submódulo finitamente gerado arbitrário de M . Logo isso implica que M_A possui série de

composição de comprimento no máximo $e_B(M)$, e portanto $End_A(M)$ é algébrico sobre $\mathbb{K}$, pelo Lema de Quillen. Como os elementos de C comutam com os elementos de A , afirmamos que a álgebra C está mergulhada em $End_A(M)$. De fato, consideremos a aplicação

$$\Phi : C \rightarrow End_A M \quad c \mapsto \psi_c(x) = xc$$

e mostremos que ela é um mergulho.

(a) Φ preserva adição

Sejam $c, d \in C$. Então, para todo $x \in M$,

$$\Phi(c + d) = \psi_{c+d}(x) = x(c + d) = xc + xd = \psi_c(x) + \psi_d(x) = \Phi(c) + \Phi(d).$$

(b) Φ preserva multiplicação por escalar.

Seja $c \in C$, $\alpha \in A$. Então, para todo $x \in M$,

$$\Phi_c(xa) = xac = xca = \Phi_c(x) \cdot a,$$

uma vez que c comuta com todo elemento de A .

(c) Φ é injetor.

Queremos mostrar que $Ker \Phi = 0$. Seja $c \in Ker \Phi$. Isto significa que $xc = 0$ para todo $x \in M$. Portanto, $c \in r(M)$, o anulador à direita de M . Mais ainda, $x\lambda c = 0$ para todo $x \in A$, uma vez que c comuta com todos os elementos de A . Logo $r(M)$ é um ideal bilateral de A . Porém, A é simples e Φ não é identicamente nula (uma vez que $\Phi(1)$ é a aplicação identidade em M . Portanto $r(M) = 0$, ou seja, $c = 0$).

Porém, a existência desse mergulho é uma contradição, uma vez que $C = A_1$ não é algébrico sobre $\mathbb{K}$. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ATIYAH, M., MACDONALD, I.C., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, London, 1969.
- [2] COUTINHO, S.C., *A primer of algebraic D-modules*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 33, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [3] GOODEARL, K.R., WARFIELD JR., R.B., *An introduction to noncommutative noetherian rings*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. 61, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [4] KRAUSE, G.R., LENAGAN, T.H., *Growth of algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, Revised Edition, Graduate Studies in Mathematics, vol. 22, American Mathematical Society, 2000.
- [5] MILIES, C.P., *Anéis e módulos*, Publicações do IME-USP, São Paulo, 1973.
- [6] QUILLEN, D., *On the endomorphism ring of a simple module over an enveloping algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 21, 1969, 171-172.
- [7] REID, M., *Undergraduate commutative algebra*, London Mathematical Society Student Texts, Vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.