Universalidade e ortogonalidade em espaços de
Hilbert de reprodução

Victor Simões Barbosa

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Universalidade e ortogonalidade em espaços de Hilbert de reprodução

Victor Simões Barbosa¹

***Orientador:* Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como
parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre
em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Abril de 2013

¹ O autor teve apoio financeiro da FAPESP, Processo nº 2010/13025-3.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B228u Barbosa, Victor
 Universalidade e ortogonalidade em espaços de
Hilbert de reprodução / Victor Barbosa; orientador
Valdir Antonio Menegatto. -- São Carlos, 2013.
68 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

1. Núcleos positivos definidos. 2. Função layout.
3. Espaços de Hilbert de reprodução. 4.
Universalidade. 5. Ortogonalidade. I. Menegatto,
Valdir Antonio, orient. II. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele todo este trabalho ainda estaria por ser feito.

Aos meus pais Hamilton e Gisele por serem as pessoas mais fantásticas que conheço e por nunca medirem esforços para possibilitar que eu atingisse meus objetivos.

À minha irmã Amanda e ao meu irmão José Luiz por completarem esta família maravilhosa a qual devo muito do que sou e tenho hoje.

Aos meus quase irmãos e grandes amigos Francys e Lucas pela companhia e todo o apoio que foram fundamentais para superar as dificuldades.

À minha namorada Patricia pela imensa paciência e compreensão, pelo enorme carinho e cuidado durante todo o período de confecção do presente trabalho e por centenas de outros motivos que contribuíram de forma imprescindível para que eu chegasse até aqui.

À Prof^a. Dra. Marta Cilene Gadotti pela ajuda de sempre.

Aos amigos do ICMC: Alina, Ariadne, Evandro, Gabriel, Gil, Laís, Noemi, Preta, Thaís, dentre tantos outros com quem tive o prazer de dividir inúmeros momentos dando-me a certeza que nunca estive só nesta caminhada.

Aos funcionários do ICMC, em especial às secretárias Ana Carolina, Ana Paula, Glaucia e Lhaís por toda a atenção e competência.

Expresso ainda minha sincera gratidão ao meu orientador Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto pela dedicação, paciência, amizade e principalmente por toda a confiança depositada sobre mim.

Por fim agradeço a FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho analisamos o papel das funções layout de um núcleo positivo definido K sobre um espaço topológico de Hausdorff E com relação a duas propriedades específicas: a universalidade de K e a ortogonalidade no espaço de Hilbert de reprodução de K a partir de suportes disjuntos. As funções layout sempre existem mas podem não ser únicas. De uma maneira geral, a função layout é uma aplicação que transfere, convenientemente, informações do espaço E para um espaço com produto interno de dimensão alta, onde métodos lineares podem ser usados. Tanto a universalidade quanto a ortogonalidade pressupõem a continuidade do núcleo. O primeiro conceito exige que para cada compacto não vazio X de E , o conjunto de “seções” $\{K(\cdot, y) : y \in X\}$ seja total no espaço de todas as funções contínuas com domínio X , munido da topologia da convergência uniforme. Um dos resultados principais do trabalho caracteriza a universalidade de um núcleo K através de uma propriedade de universalidade semelhante da função layout. A ortogonalidade a partir de suportes disjuntos almeja, então, a ortogonalidade de quaisquer duas funções do espaço de Hilbert de reprodução de K quando seus suportes não se intersectam.

Abstract

We analyze the role of feature maps of a positive definite kernel K acting on a Hausdorff topological space E in two specific properties: the universality of K and the orthogonality in the reproducing kernel Hilbert space of K from disjoint supports. Feature maps always exist but may not be unique. A feature map may be interpreted as a kernel based procedure that maps the data from the original input space E into a potentially higher dimensional “feature space” in which linear methods may then be used. Both properties, universality and orthogonality from disjoint supports, make sense under continuity of the kernel. Universality of K is equivalent to the fundamentality of $\{K(\cdot, y) : y \in X\}$ in the space of all continuous functions on X , with the topology of uniform convergence, for all nonempty compact subsets X of E . One of the main results in this work is a characterization of the universality of K from a similar concept for the feature map. Orthogonality from disjoint supports seeks the orthogonality of any two functions in the reproducing kernel Hilbert space of K when the functions have disjoint supports.

Sumário

Introdução	13
1 Preliminares	15
1.1 Núcleos positivos definidos e a função layout	15
1.2 Existência de funções layout para um núcleo positivo definido	17
1.3 Funções layout e espaços de Hilbert de reprodução	22
1.4 Espaços de Hilbert de Reprodução de dimensão finita	25
2 Núcleos universais	29
2.1 O teorema de Riesz e a função layout	29
2.2 A injetividade de j_X	32
2.3 A aplicação l_X e o seu papel	35
2.4 Universalidade	37
2.5 Universalidade e a teoria de Mercer	38
3 Exemplificando universalidade	43
3.1 Um núcleo de Mercer clássico	43
3.2 Núcleos definidos por séries de potências	44
3.3 Núcleos PD sobre a esfera unitária	46
3.4 Núcleos invariantes por translação sobre $\mathbb{R}^d$	47
3.5 Núcleos radiais sobre $\mathbb{R}^d$	52
4 Ortogonalidade a partir de suportes disjuntos	57
4.1 Conceitos preliminares e um exemplo	57
4.2 Ortogonalidade via suportes disjuntos e a função layout	58
4.3 Exemplificando	60

Referências Bibliográficas	63
----------------------------	----

Índice Remissivo	67
------------------	----

Introdução

Os núcleos positivos definidos aparecem em vários segmentos da Matemática, incluindo Álgebra Linear, Análise Funcional, Teoria da Aproximação, etc.([8, 25]). Mais recentemente, eles têm sido usados com relativa frequência na Teoria do Aprendizado ([9]), em problemas envolvendo a análise espectral fina de operadores integrais ([3, 10]) bem como em várias outras instâncias em que espaços de Hilbert de reprodução e espaços nativos aparecem nas formulações dos problemas ([4, 17, 25]).

A teoria dos núcleos positivos definidos é composta por uma gama considerável de objetos, dentre os quais podemos destacar as chamadas funções layout (feature maps) atreladas a eles. Estas funções têm papel fundamental nessa teoria já que elas transferem, via o núcleo, propriedades do conjunto domínio do núcleo para um espaço com produto interno conveniente. O objetivo principal deste trabalho é discutir um pouco da teoria dos núcleos positivos definidos sobre um espaço topológico, focando naquelas propriedades que envolvem diretamente as funções layout. Assim sendo, tais funções tem papel determinante nos principais resultados abordados nesta dissertação.

Inicialmente fazemos uma breve introdução da teoria dos núcleos positivos definidos necessária para o entendimento do trabalho. Entre definições, exemplos e resultados, exploramos diversas propriedades: a existência e unicidade do espaço de Hilbert de reprodução associado ao núcleo, a representação do núcleo via função layout e a descrição do espaço de Hilbert de reprodução via função layout. Neste último ponto, analisamos a fundo a existência de tal representação e discutimos a sua não unicidade. Ademais, apresentamos duas formulações diferentes para explicitar o espaço de Hilbert de reprodução em termos de uma função layout, dependendo da presença ou ausência de uma propriedade de fundamentalidade.

Posteriormente, trabalhando tão somente com núcleos positivos definidos contínuos, definimos formalmente o que significa o núcleo possuir a propriedade universal da aproximação (ou resumidamente ser um núcleo universal). Partindo desta definição,

buscamos condições para garantir a universalidade do núcleo, de maneira paralela ao estudo desenvolvido em [16]. Em um dos principais resultados do trabalho, encontramos uma condição necessária e suficiente sobre a função layout para que um núcleo seja universal. Frente as dificuldades existentes, vimo-nos na necessidade de definir diversos objetos, buscando formas de relacioná-los, até obtermos o resultado desejado. Estas definições e relações exigiram conceitos nem sempre tão básicos de integração, teoria da medida, análise funcional clássica, entre outros.

Na sequência, fixando o núcleo dentro de alguma categoria definida, exploramos diferentes condições sobre os mesmos para garantir a propriedade universal da aproximação. Para um núcleo de Mercer clássico, apresentamos uma condição para universalidade envolvendo as aplicações que compõem sua representação. Amparados em resultados envolvendo multi-índices, justificamos a universalidade de núcleos definidos por séries de potências em várias variáveis reais. Análises similares foram implementadas para determinar a universalidade de núcleos positivos definidos na esfera unitária m dimensional, de núcleos radiais sobre $\mathbb{R}^n$ e de núcleos sobre $\mathbb{R}^n$ invariantes por translações.

Por último, examinamos os espaços de Hilbert de reprodução associados a núcleos positivos definidos contínuos, tentando identificar hipóteses adicionais para garantir a ortogonalidade a partir de suportes disjuntos no espaço. Tal propriedade reflete a ortogonalidade de quaisquer duas funções do espaço, quando as mesmas têm suportes disjuntos. Nossa análise baseou-se na referência [27] e tentou usar, tanto quanto possível, as funções layout previamente estudadas.

✓

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos os conceitos necessários ao desenvolvimento do trabalho, exemplificando e apresentando os resultados básicos atrelados a eles. Isso será feito de maneira econômica, ou seja, não exploraremos estes conceitos além daquilo que o trabalho exigirá. Referências que contêm informações adicionais ou mesmo resultados mais profundos envolvendo estes conceitos serão indicadas ao longo do texto.

1.1 Núcleos positivos definidos e a função layout

A seguinte definição contempla a definição usual de núcleo positivo definido. Aqui E é um conjunto não vazio qualquer.

Definição 1.1.1. *Uma função $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ é um núcleo positivo definido sobre E (resumidamente, núcleo PD sobre E) se a matriz $n \times n$ com entradas $K(x_i, x_j)$ é não negativa definida para todo inteiro positivo n e quaisquer n pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de E .*

Em outras palavras, a definição acima exige que

$$\sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} K(x_j, x_k) \geq 0,$$

para todo inteiro positivo n e quaisquer que sejam os pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ de E e os números complexos $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Núcleos PD genuinamente complexos são automaticamente hermitianos. Se o núcleo é uma função a valores reais, e esta mesma propriedade é desejável, então ela tem que

ser adicionada ao contexto. Uma teoria para tais núcleos pode ser encontrada em [3]. A referência [21] traz núcleos positivos definidos em algoritmos para análise de padrão (pattern analysis) e na teoria do aprendizado (learning theory), temas mais modernos onde os mesmos se apresentam.

Agora, ilustraremos a definição acima com alguns poucos exemplos.

Exemplo 1.1.2. Se E é um espaço vetorial complexo com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, então a expressão

$$K(x, y) = \langle x, y \rangle_E, \quad x, y \in E,$$

define um núcleo PD sobre E . De fato, basta notar que

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} K(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^n c_i \overline{c_j} \langle x_i, x_j \rangle_E = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i x_i, \sum_{j=1}^n c_j x_j \right\rangle_E \geq 0,$$

quaisquer que sejam os números complexos c_j 's e os elementos x_j 's de E .

Exemplo 1.1.3. Se f é uma função complexa com domínio E , então a expressão

$$K(x, y) = f(x) \overline{f(y)}, \quad x, y \in E,$$

define um núcleo PD sobre E .

Exemplo 1.1.4. Seja d um inteiro positivo fixado e considere a esfera unitária S^d de $\mathbb{R}^{d+1}$. Seja P_k^d , $k \in \mathbb{Z}_+$, o polinômio de Legendre de grau k associado ao inteiro positivo d , como discutido em [12]. Este polinômio é um múltiplo do polinômio ultra-esférico $P_k^{(d-1)/2}$ de grau k associado ao número real $(d-1)/2$ como descrito em [22] e carrega a normalização $P_k^d(1) = 1$. A expressão

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^d(x \cdot y), \quad x, y \in S^d,$$

onde “ $\cdot$ ” é o produto interno usual de $\mathbb{R}^{d+1}$, cada a_k é não negativo e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$, define um núcleo PD contínuo sobre S^d . Este resultado é uma parte da caracterização dos núcleos PD contínuos e bizonais fornecida por Schoenberg em [20]. Em particular, cada função $(x, y) \in S^d \times S^d \rightarrow P_k^d(x \cdot y)$ é um núcleo PD sobre S^d .

A proposição abaixo descreve uma generalização dos dois primeiros exemplos citados acima.

Proposição 1.1.5. *Seja $\mathcal{W}$ um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$. Se uma aplicação $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz*

$$K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}}, \quad x, y \in E,$$

para alguma função $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$, então K é um núcleo PD sobre E .

Demonstração: Se K é como na fórmula do enunciado da proposição, a forma quadrática da Definição 1.1.1 é

$$\sum_{j,k=1}^n c_j \overline{c_k} \langle \Phi(x_j), \Phi(x_k) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n c_j \Phi(x_j), \sum_{k=1}^n c_k \Phi(x_k) \right\rangle_{\mathcal{W}},$$

uma expressão sempre não negativa. ■

A proposição acima motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.6. *Seja K um núcleo PD sobre E . Se existir um espaço de Hilbert $\mathcal{W}$ munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$ e uma aplicação $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ tal que*

$$K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}}, \quad x, y \in E,$$

diremos que Φ é uma função layout para o núcleo K .

Usualmente, o espaço $\mathcal{W}$ da definição acima é chamado de um *espaço layout* para K , mas esta terminologia não será explorada nesta dissertação. Como a função Φ pode não ser sobrejetora e o espaço $\mathcal{W}$ é passível de restrições ou extensões métricas, é de se esperar que quando uma função layout para K existe, ela não é necessariamente única. Além disso, note que a condição de $\mathcal{W}$ ser um espaço de Hilbert não é necessária para garantir que o núcleo K seja positivo definido, porém a construção que será feita adiante nos fornece a garantia de que tal condição pode ser incorporada à Definição 1.1.6, sem perda alguma de generalidade. A existência e construção de funções layout para um núcleo positivo definido K é o tema da seção seguinte.

1.2 Existência de funções layout para um núcleo positivo definido

Apresentaremos nesta seção dois métodos consideravelmente diferentes para se construir funções layout para um núcleo PD sobre um conjunto não vazio. Em particular, isto ratificará a não unicidade da função layout mencionada no final da seção anterior.

Começaremos recordando a definição de completamento para um espaço com produto interno.

Definição 1.2.1. *Seja E um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. Diremos que um espaço de Hilbert $(\tilde{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{E}})$ é o completamento de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$, se existir uma aplicação $T : E \rightarrow \tilde{E}$ linear e injetora satisfazendo*

- (i) $\langle T(x), T(y) \rangle_{\tilde{E}} = \langle x, y \rangle_E$;
- (ii) $T(E)$ é denso em $\tilde{E}$.

Enunciaremos agora um importante resultado sobre a existência do completamento de um espaço com produto interno. Sua demonstração pode ser encontrada em [15, p.139].

Lema 1.2.2. *Todo espaço com produto interno E admite um completamento $\tilde{E}$. Ademais, este completamento é único a menos de isomorfismos isométricos.*

Dando sequência, definiremos formalmente *espaço de Hilbert de reprodução* (EHR). Se K é um núcleo sobre um conjunto não vazio E e $x \in E$, denotaremos por K_x a função $y \in E \rightarrow K(x, y)$.

Definição 1.2.3. *Seja K um núcleo PD sobre um conjunto não vazio E . O espaço de Hilbert de reprodução associado a K é um espaço de Hilbert $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ (de funções de E em $\mathbb{C}$) que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) $K_x \in \mathcal{H}_K$, $x \in E$;
- (ii) (Propriedade de reprodução) $\langle f, K_x \rangle = f(x)$, $f \in \mathcal{H}_K$, $x \in E$.

A teoria dos espaços de Hilbert de reprodução está bem fundamentada na literatura ([1, 19]). A existência e unicidade do EHR associado a um núcleo K são justificadas abaixo. Antes, porém, lembremos que se U é um subconjunto de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, o *complemento ortogonal* $U^\perp$ de U em $\mathcal{H}$ é o subespaço formado por todos os elementos de $\mathcal{H}$ que são ortogonais a cada elemento de U .

Teorema 1.2.4. *Se K é um núcleo PD sobre um conjunto não vazio E , então existe um espaço de Hilbert de reprodução associado a K , o qual é único a menos de isomorfismos isométricos.*

Demonstração: Consideremos o espaço de funções

$$\mathcal{H}_0 = [\{K_y : y \in E\}].$$

Para duas funções quaisquer em $\mathcal{H}_0$, digamos

$$f(\cdot) = \sum_{i=1}^m \alpha_i K(\cdot, x_i) \quad \text{e} \quad g(\cdot) = \sum_{j=1}^n \beta_j K(\cdot, y_j),$$

a fórmula

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} K(y_j, x_i)$$

define uma aplicação bilinear hermitiana de $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$ em $\mathbb{C}$. Como K é PD sobre E , segue que $\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_0} \geq 0$, $f \in \mathcal{H}_0$. Em particular, a fórmula $\|f\|_{\mathcal{H}_0} = \langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_0}^{1/2}$, $f \in \mathcal{H}_0$,

define uma semi-norma em $\mathcal{H}_0$. Agora, se $\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_0} = 0$, podemos usar a desigualdade de Cauchy-Schwarz para deduzir que

$$|f(x)| = |\langle f, K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}_0}| \leq \|f\|_{\mathcal{H}_0} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}_0} = 0, \quad x \in E.$$

Em outras palavras, $f = 0$. Desta forma, $(\mathcal{H}_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0})$ é um espaço com produto interno. Como

$$\langle f, K(\cdot, x) \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^m \alpha_i K(x, x_i) = f(x), \quad x \in E,$$

as propriedades (i) e (ii) da definição de EHR já valem, mesmo $(\mathcal{H}_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0})$ não sendo ainda um espaço de Hilbert. O completamento $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ de $(\mathcal{H}_0, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_0})$, conforme descrito no início desta seção, é um EHR associado a K . Para mostrarmos que ele é único a menos de isomorfismos isométricos, suponhamos que $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1})$ seja outro EHR associado K . A definição de $\mathcal{H}_0$ implica imediatamente que $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1$ e pela propriedade de reprodução válida em $\mathcal{H}_1$, segue que

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad f, g \in \mathcal{H}_0. \quad (1.1)$$

Consideremos a aplicação inclusão $\mathcal{H}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{H}_1$. É de conhecimento prévio que i é linear e injetora. Além disso (1.1) nos garante que i satisfaz a condição (i) na definição de completamento. Por fim, mostremos que $\overline{i(\mathcal{H}_0)} = \mathcal{H}_1$. Observemos que se esta igualdade não fosse verdadeira, então a inclusão $\overline{i(\mathcal{H}_0)} \subsetneq \mathcal{H}_1$ seria própria, logo poderíamos selecionar uma função g não nula no complemento ortogonal de $\overline{i(\mathcal{H}_0)}$ em $\mathcal{H}_1$. No entanto, a propriedade de reprodução em $\mathcal{H}_1$ implicaria que

$$g(x) = \langle g, K_x \rangle_{\mathcal{H}_1} = 0, \quad x \in E,$$

uma contradição. Assim, temos a igualdade sugerida e pelo Lema 1.2.2, concluímos o resultado. ■

A existência de um EHR $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_K})$ associado a um núcleo positivo definido K sobre E permite a construção imediata de uma função layout para K . De fato, como a construção do EHR apresentada na prova do teorema anterior nos dá

$$K(x, y) = \langle K_x, K_y \rangle_{\mathcal{H}_K}, \quad x, y \in E,$$

basta definirmos $\mathcal{W} := \mathcal{H}_K$ e $\Phi(x) = K_x$, $x \in E$.

Neste momento é importante observarmos que a construção apresentada no teorema anterior não aproveita qualquer estrutura adicional que o conjunto E possa ter. A segunda construção que apresentaremos inclui algumas vantagens em relação à anterior, já que o espaço de Hilbert $\mathcal{W}$ resultante na definição de função layout é automaticamente separável, uma consequência do refinamento das hipóteses sobre K .

Teorema 1.2.5. *Seja E um conjunto não vazio e K um núcleo PD sobre E . Suponha que K admita uma representação na forma*

$$K(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \phi_j(x) \overline{\phi_j(y)}, \quad (x, y) \in E \times E,$$

onde cada λ_j é positivo, cada ϕ_j é uma função com domínio E a valores complexos e a série converge para cada par (x, y) de $E \times E$. Então, existe uma função layout $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ para K , onde o espaço de Hilbert $\mathcal{W}$ é separável.

Demonstração: É suficiente tomarmos $\mathcal{W}$ como sendo o espaço de Hilbert ℓ_2 usual e definirmos $\Phi : E \rightarrow \ell_2$ pela fórmula $\Phi(x) = (x(j))$, $x \in E$, onde

$$x(j) := \lambda_j^{1/2} \phi_j(x), \quad x \in E, \quad j = 0, 1, \dots$$

De fato, denotando o produto interno de ℓ_2 por $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, temos que

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2 = \sum_{j=1}^{\infty} x(j) \overline{y(j)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{1/2} \phi_j(x) \overline{\lambda_j^{1/2} \phi_j(y)} = K(x, y), \quad x, y \in E.$$

Isto finaliza a demonstração do teorema. ■

A representação para K usada como hipótese no teorema anterior está em consonância com a representação para núcleos fornecida pelo teorema de Mercer. O teorema vale em vários contextos, com hipóteses adequadas a cada um deles. A situação mais comum ocorre quando E tem alguma topologia e K é no mínimo contínuo. Por outro lado, o teorema de Mercer usualmente garante a convergência uniforme e absoluta da série que representa K e a sequência de funções na representação é usualmente formada por funções contínuas. Indicamos a referência [10] e outras lá citadas para informações gerais sobre o teorema de Mercer e generalizações.

O teorema anterior é perfeitamente adaptável para o caso em que a série representando K é uma soma finita. Uma formalização deste fato forma o conteúdo dos dois resultados a seguir. Usaremos u^* para denotar o vetor obtido de $u \in \mathbb{C}^d$ via conjugação seguida por uma transposição.

Teorema 1.2.6. *Seja E um conjunto não vazio e K um núcleo PD sobre E . Então, $\mathcal{H}_K$ tem dimensão finita d se, e somente se, existem uma matriz A (que depende de K) hermitiana e positiva definida de ordem d e um conjunto linearmente independente $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}$ de funções complexas com domínio E de modo que*

$$K(x, y) = \phi(x) A \phi(y)^*, \quad x, y \in E, \tag{1.2}$$

onde $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_d(x))$, $x \in E$.

Demonstração: Suponha que $\mathcal{H}_K$ tenha dimensão d e fixe uma base ortogonal $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}$ de $\mathcal{H}_K$. Como $K_x \in \mathcal{H}_K$, $x \in E$, podemos escrever

$$K_x = \sum_{j=1}^d \alpha_j^x \phi_j, \quad \alpha_1^x, \alpha_2^x, \dots, \alpha_d^x \in \mathbb{C}, \quad x \in E.$$

Por outro lado, a ortogonalidade de B nos dá, para cada $x \in E$, que

$$\langle K_x, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_K} = \left\langle \sum_{i=1}^d \alpha_i^x \phi_i, \phi_j \right\rangle_{\mathcal{H}_K} = \sum_{i=1}^d \alpha_i^x \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_K} = \alpha_j^x \|\phi_j\|_{\mathcal{H}_K}^2, \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

Como cada ϕ_j não é identicamente nula, obtemos

$$K_x = \sum_{j=1}^d \frac{\langle K_x, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_K}}{\|\phi_j\|_{\mathcal{H}_K}^2} \phi_j, \quad x \in E.$$

Pela propriedade de reprodução em $\mathcal{H}_K$, podemos agora deduzir que

$$K(x, y) = \langle K_x, K_y \rangle_{\mathcal{H}_K} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\phi_i(x)}{\|\phi_i\|_{\mathcal{H}_K}^2} \overline{\left(\frac{\phi_j(y)}{\|\phi_j\|_{\mathcal{H}_K}^2} \right)} \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_K}, \quad x, y \in E.$$

Rearranjando,

$$K(x, y) = \sum_{i,j=1}^d \frac{\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_K}}{\|\phi_i\|_{\mathcal{H}_K}^2 \|\phi_j\|_{\mathcal{H}_K}^2} \phi_i(x) \overline{\phi_j(y)}, \quad x, y \in E.$$

Esta é a fórmula do enunciado com $A = (a_{ij})$, onde

$$a_{ij} = \frac{\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_K}}{\|\phi_i\|_{\mathcal{H}_K}^2 \|\phi_j\|_{\mathcal{H}_K}^2}, \quad i, j = 1, 2, \dots, d.$$

A recíproca segue do Teorema 1.2.4 e observando-se que cada K_x pertence ao espaço de dimensão finita $[\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d\}]$. ■

Note que na primeira implicação da demonstração acima podemos tomar, em particular, B como sendo uma base ortonormal para $\mathcal{H}_K$. Neste caso, a matriz A torna-se a matriz identidade de ordem d enquanto que a representação para o núcleo K toma a forma simplificada

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^d \phi_i(x) \overline{\phi_i(y)}, \quad x, y \in E.$$

Como toda matriz positiva definida tem uma raiz quadrada, o resultado a seguir dispensa demonstração.

Corolário 1.2.7. *Nas condições do teorema anterior, se $\mathcal{W} = \mathbb{C}^d$ com seu produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^d}$ e B é uma raiz quadrada de A , então $\Phi : E \rightarrow \mathbb{C}^d$ dada por $\Phi(x) = \phi(x)B$, $x \in E$, é uma função layout para K .*

Finalizaremos esta seção, apresentando um resultado independente que atrela a continuidade do núcleo à continuidade de qualquer função layout para ele.

Proposição 1.2.8. *Seja K um núcleo PD sobre um espaço topológico E . Se $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ é uma função layout para K , então K é contínuo se, e somente se, Φ é contínua.*

Demonstração: Seja $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ é uma função layout para K e denote a norma em $\mathcal{W}$ por $\| \cdot \|$. É fácil ver que

$$\begin{aligned} \|\Phi(x) - \Phi(y)\|^2 &= \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle_{\mathcal{W}} + \langle \Phi(y), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}} - \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}} - \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle_{\mathcal{W}} \\ &= K(x, x) + K(y, y) - K(x, y) - K(y, x). \end{aligned}$$

Portanto, a continuidade de K implica na continuidade de Φ . Para a recíproca, basta usar a desigualdade

$$|K(x, y) - K(z, w)| \leq \|\Phi(x) - \Phi(z)\| \|\Phi(y)\| + \|\Phi(z)\| \|\Phi(y) - \Phi(w)\|, \quad x, y, z, w \in E.$$

Isto conclui a demonstração. ■

1.3 Funções layout e espaços de Hilbert de reprodução

Nesta seção, descreveremos dois resultados que estabelecem relações mais efetivas entre as funções layout e os espaços de Hilbert de reprodução.

Vejamos uma motivação para o primeiro deles. Seja $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para o núcleo K PD sobre E . Podemos extrair a seguinte fórmula da definição de função layout:

$$K_y(x) = K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}}, \quad x, y \in E.$$

Se para $u \in \mathcal{W}$ fixo, colocarmos

$$\Phi_u(x) := \langle \Phi(x), u \rangle_{\mathcal{W}}, \quad x \in E,$$

a fórmula anterior se torna

$$K_y(x) = \Phi_{\Phi(y)}(x), \quad x \in E. \tag{1.3}$$

Em particular, ela revela que

$$\{K_y : y \in E\} \subseteq \{\Phi_u : u \in \mathcal{W}\},$$

e, portanto, é razoável tentarmos descrever $\mathcal{H}_K$ através das funções Φ_u .

Lembramos uma terminologia comum que usaremos ao longo do trabalho.

Definição 1.3.1. *Um subconjunto não vazio A de um espaço vetorial normado V é fundamental em V se o subespaço gerado por A é denso em V . Dependendo do contexto, a palavra fundamental pode ser substituída pela palavra total.*

Proposição 1.3.2. *Sejam K um núcleo PD sobre E e $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para K . Se $\Phi(E)$ é um subconjunto fundamental de $\mathcal{W}$, então $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_K})$ é isometricamente isomorfo a $(\mathcal{H}_\Phi, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\Phi})$, onde*

$$\mathcal{H}_\Phi = \{\Phi_u : u \in \mathcal{W}\}$$

e

$$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} = \langle v, u \rangle_{\mathcal{W}}, \quad \Phi_u, \Phi_v \in \mathcal{H}_\Phi. \quad (1.4)$$

Demonstração: O primeiro passo será mostrar que o espaço $\mathcal{H}_\Phi$ é um espaço de Hilbert. Um cálculo direto revela que

$$\Phi_u + \Phi_v = \Phi_{u+v}, \quad u, v \in \mathcal{W},$$

e

$$\lambda \Phi_u = \Phi_{\bar{\lambda}u} \quad u, v \in \mathcal{W}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Logo, $\mathcal{H}_\Phi$ tem estrutura de espaço vetorial. Observemos ainda que, sendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$ produto interno em $\mathcal{W}$, a forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_\Phi}$ define um produto interno para o espaço $\mathcal{H}_\Phi$, como pode ser facilmente verificado. Mostraremos agora que $\mathcal{H}_\Phi$ munido do produto (1.4) é um espaço de Hilbert. Para isso notemos que, se (Φ_{u_n}) , $u_n \in \mathcal{W}$, é uma sequência de Cauchy neste espaço, então

$$\begin{aligned} \|\Phi_{u_n} - \Phi_{u_m}\|_{\mathcal{H}_\Phi}^2 &= \langle \Phi_{u_n}, \Phi_{u_n} \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} - \langle \Phi_{u_n}, \Phi_{u_m} \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} - \langle \Phi_{u_m}, \Phi_{u_n} \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} + \langle \Phi_{u_m}, \Phi_{u_m} \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} \\ &= \langle u_n, u_n \rangle_{\mathcal{W}} - \langle u_n, u_m \rangle_{\mathcal{W}} - \langle u_m, u_n \rangle_{\mathcal{W}} + \langle u_m, u_m \rangle_{\mathcal{W}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\Phi_{u_n} - \Phi_{u_m}\|_{\mathcal{H}_\Phi}^2 = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}}^2, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Logo, (u_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{W}$. Como $\mathcal{W}$ é completo, existe então u em $\mathcal{W}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{\mathcal{W}} = 0.$$

Da igualdade

$$\|\Phi_{u_n} - \Phi_u\|_{\mathcal{H}_\Phi}^2 = \|u_n - u\|_{\mathcal{W}}^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_{u_n} - \Phi_u\|_{\mathcal{H}_\Phi} = 0.$$

Para finalizar a demonstração, consideremos a aplicação

$$\sum_{j=1}^n c_j K_{y_j} \in [\{K_y : y \in E\}] \xrightarrow{\zeta} \sum_{j=1}^n c_j \Phi_{\Phi(y_j)} \in \mathcal{H}_\Phi.$$

Utilizando (1.3) e as duas fórmulas citadas no início da demonstração, podemos verificar sem dificuldades que ζ é linear e injetora. Por outro lado,

$$\langle \zeta(K_x), \zeta(K_y) \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} = \langle \Phi_{\Phi(x)}, \Phi_{\Phi(y)} \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} = \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle_{\mathcal{W}} = K(y, x), \quad x, y \in E,$$

ou seja,

$$\langle \zeta(K_x), \zeta(K_y) \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} = \langle K_x, K_y \rangle_{\mathcal{H}_K}, \quad x, y \in E.$$

Da linearidade de ζ e do produto interno, concluimos que

$$\langle \zeta(f), \zeta(g) \rangle_{\mathcal{H}_\Phi} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_K}, \quad f, g \in [\{K_y : y \in E\}].$$

Por fim, sendo a imagem de Φ fundamental em $\mathcal{W}$, segue que $\zeta([\{K_y : y \in E\}])$ é denso em $\mathcal{H}_\Phi$. Todos estes argumentos juntos implicam que $\mathcal{H}_\Phi$ é um completamento de $[\{K_y : y \in E\}]$. Assim, pela unicidade do mesmo garantida pelo Lema 1.2.2, segue que os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_\Phi$ e $\mathcal{H}_K$ são isometricamente isomorfos. ■

Fechando os argumentos da proposição anterior, observe que o espaço de Hilbert construído tem, de fato, a propriedade de reprodução para K :

$$\langle \Phi_u, K_y \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi_u, \Phi_{\Phi(y)} \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi(y), u \rangle_{\mathcal{W}} = \Phi_u(y), \quad y \in E.$$

A próxima proposição explica com mais detalhes o efeito real da hipótese de fundamentalidade utilizada na proposição anterior. Essencialmente, a proposição descreve como tal hipótese pode ser retirada e a qual preço.

Lembremos que se F é um subespaço fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, temos a decomposição $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$ ([26, p.40]). Para o resultado a seguir, fixada uma função layout $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ para K , consideraremos a decomposição $\mathcal{W} = \overline{[\Phi(E)]} \oplus \overline{[\Phi(E)]}^\perp$ e a projeção ortogonal P_Φ de $\mathcal{W}$ sobre $\overline{[\Phi(E)]}$.

Proposição 1.3.3. *Seja $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para o núcleo K . Então, $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_K})$ é isometricamente isomorfo a $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ onde*

$$\mathcal{H} = \left\{ \Phi_u : u \in \overline{[\Phi(E)]} \right\}$$

e

$$\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle P_\Phi(v), P_\Phi(u) \rangle_{\mathcal{W}}, \quad \Phi_u, \Phi_v \in \mathcal{H}.$$

Demonstração: Como no teorema anterior, $\mathcal{H}$ tem estrutura de espaço vetorial. Para verificar que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ define um produto interno em $\mathcal{H}$, é suficiente usar a linearidade do produto interno em $\mathcal{W}$ e a linearidade da projeção P_{Φ} . Para a verificação de que $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert, basta observar que se (Φ_{u_n}) , $u_n \in \mathcal{W}$, é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$, então

$$\|\Phi_{u_n} - \Phi_{u_m}\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}}^2 = \|P_{\Phi}(u_n) - P_{\Phi}(u_m)\|_{\mathcal{W}}^2, \quad m, n = 1, 2, \dots,$$

e repetir os argumentos da demonstração anterior. Aqui estamos usando o fato da projeção ortogonal ser um operador de norma 1. Como na proposição anterior, a aplicação

$$\sum_{j=1}^n c_j K_{y_j} \in [\{K_y : y \in E\}] \xrightarrow{\zeta} \sum_{j=1}^n c_j \Phi_{\Phi(y_j)} \in \mathcal{H}$$

é linear e injetora. Uma vez que a imagem de P_{Φ} é o conjunto dos pontos fixos de P_{Φ} ,

$$\begin{aligned} \langle \zeta(K_x), \zeta(K_y) \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \Phi_{\Phi(x)}, \Phi_{\Phi(y)} \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle P_{\Phi}(\Phi(y)), P_{\Phi}(\Phi(x)) \rangle_{\mathcal{W}} \\ &= \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle_{\mathcal{W}} = K(y, x), \quad x, y \in E. \end{aligned}$$

Logo, como na prova da proposição anterior, segue que

$$\langle \zeta(f), \zeta(g) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_K}, \quad f, g \in [\{K_y : y \in E\}].$$

Finalmente, como $\overline{[\Phi(E)]}$ é um subespaço fechado do espaço de Hilbert $\mathcal{W}$, ele próprio é um espaço de Hilbert munido do produto interno induzido de $\mathcal{W}$ ([15, p.140]). Essa é a informação primordial na justificativa de que a imagem de ζ é densa em $\mathcal{H}$. ■

Observação 1.3.4. Como consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que uma função layout para K satisfaz

$$\begin{aligned} |\Phi_u(x) - \Phi_u(y)| &= |\langle \Phi(x) - \Phi(y), u \rangle_{\mathcal{W}}| \\ &\leq \|u\|_{\mathcal{W}} \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\mathcal{W}} = \|\Phi_u\|_{\mathcal{H}_K} \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{\mathcal{W}}, \quad x, y \in E. \end{aligned}$$

Se Φ é contínua (ou equivalentemente, K é contínuo), então cada Φ_u é contínua. A Proposição 1.3.2 nos revela, então, que todo elemento de $\mathcal{H}_K$ é uma função contínua, ratificando de maneira alternativa metade do que foi justificado na Proposição 1.2.7.

1.4 Espaços de Hilbert de Reprodução de dimensão finita

Nesta última seção do capítulo, estudaremos um pouco mais a fundo os EHR que possuem dimensão finita, incorporando a matriz A da equivalência do Teorema 1.2.6 aos resultados da seção anterior.

Seja, então, K um núcleo que possui a descrição (1.2) para alguma matriz A de ordem d e funções ϕ_k , $k = 1, 2, \dots, d$, nas condições do teorema. A ideia principal é tentar visualizar o espaço $(\mathcal{H}_K, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_K})$ através de A .

Inicialmente, definamos o produto interno

$$\langle z, w \rangle_A = zAw^* = \sum_{i,j=1}^d z_i \overline{w_j} a_{ij}, \quad z, w \in \mathbb{C}^d,$$

onde estamos escrevendo $z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$ e $w = (w_1, w_2, \dots, w_d)$. Como A é positiva definida e hermitiana, as propriedades que comprovam que tal aplicação é, de fato, um produto interno em $\mathbb{C}^d$ são facilmente verificadas. Definindo, então, $\mathcal{W} := (\mathbb{C}^d, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$, é fácil ver que $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ dada por

$$\Phi(x) := \phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_d(x)), \quad x \in E,$$

é uma função layout para K .

Para $c \in \overline{[\Phi(E)]}$, escrevamos $(Ac^*)_i$ para denotar a i -ésima componente do vetor Ac^* .

Teorema 1.4.1. *Seja K um núcleo conforme explicitado acima. Então $\mathcal{H}_K$ é isometricamente isomorfo ao espaço*

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^d (Ac^*)_i \phi_i : c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in \overline{[\Phi(E)]} \right\}.$$

munido do produto interno

$$\left\langle \sum_{i=1}^d (Ab^*)_i \phi_i, \sum_{j=1}^d (Ac^*)_j \phi_j \right\rangle_{\mathcal{H}_A} = P_\Phi(c) A P_\Phi(b)^*, \quad b, c \in \mathbb{C}^d,$$

onde $b = (b_1, b_2, \dots, b_d)$ e $c = (c_1, c_2, \dots, c_d)$.

Demonstração: Aplicando a Proposição 1.3.3, temos que $\mathcal{H}_K$ é uma cópia isométrica do espaço

$$\mathcal{H} = \left\{ \Phi_c : c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in \overline{[\Phi(E)]} \right\},$$

onde $\Phi_c(x) = \langle \Phi(x), c \rangle_A$, $x \in E$. Com isso, pela fórmula do produto interno em questão, obtemos

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i,j=1}^d a_{ij} \overline{c_j} \phi_i : c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in \overline{[\Phi(E)]} \right\}.$$

Ou seja,

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d a_{ij} \overline{c_j} \right) \phi_i : c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in \overline{[\Phi(E)]} \right\}.$$

Simplificando um pouco mais chegamos a

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^d (Ac^*)_i \phi_i : c = (c_1, c_2, \dots, c_d) \in \overline{[\Phi(E)]} \right\}.$$

Para obtermos a fórmula para o produto interno, fixemos dois elementos $f = \sum_{i=1}^d (Ab^*)_i \phi_i$ e $g = \sum_{j=1}^d (Ac^*)_j \phi_j$ de $\mathcal{H}$. Como

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi_b, \Phi_c \rangle_{\mathcal{H}},$$

a Proposição 1.3.3 implica que

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle P_{\Phi}(c), P_{\Phi}(b) \rangle_{\mathcal{W}} = P_{\Phi}(c) A P_{\Phi}(b)^*,$$

e o resultado segue. ■

Pequenas modificações nos argumentos utilizados na demonstração do teorema acima produzem a seguinte formulação adicional. No que segue, A^T denotará a transposta da matriz A .

Corolário 1.4.2. *Nas condições do teorema anterior, se a imagem de Φ é um subconjunto fundamental de $\mathbb{C}^d$, então*

$$\mathcal{H}_K = \left\{ \sum_{i=1}^d \psi_i w_i : w = (w_1, w_2, \dots, w_d) \in \mathbb{C}^d \right\}$$

munido do produto interno

$$\left\langle \sum_{i=1}^d \psi_i z_i, \sum_{j=1}^d \psi_j w_j \right\rangle_{\mathcal{H}_K} = \left\langle z (A^T)^{-1}, w \right\rangle_{\mathbb{C}^d}, \quad w, z \in \mathbb{C}^d,$$

onde $w = (w_1, w_2, \dots, w_d)$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_d)$.

Núcleos universais

Ao longo deste capítulo, E será um espaço topológico de Hausdorff e K um núcleo PD contínuo sobre E . Se X é um subconjunto compacto não vazio de E , denotaremos por $C(X)$ o espaço de todas as funções contínuas a valores complexos definidas em X , munido de sua topologia da convergência uniforme em X . A norma em $C(X)$ será denotada por $\|\cdot\|_\infty$. Isto feito, diremos que K é um núcleo *universal* se para cada subconjunto compacto X de E , o conjunto $\{K(\cdot, y) : y \in X\}$ formado pelas restrições das aplicações K_y a X é fundamental em $C(X)$. Equivalentemente, K é universal se, e somente se, fixados o compacto X , uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, existe uma função g no fecho de $\{K(\cdot, y) : y \in X\}$ em $C(X)$, de modo que

$$\|f - g\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Neste capítulo, estudaremos detalhadamente a universalidade de um núcleo contínuo K em conexão com uma função layout para K fixada. Já que existe uma forte ligação entre o núcleo PD e qualquer uma de suas funções layout, determinaremos que propriedade a função layout deve possuir para que tenhamos garantida a universalidade do núcleo e vice e versa. O processo para se chegar a resultados desta natureza é longo e técnico, razão pela qual dividiremos este capítulo em várias seções.

2.1 O teorema de Riesz e a função layout

Fixada uma função layout $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$, estudaremos nesta seção algumas transformações integrais especiais definidas através de Φ . Os resultados são puramente técnicos

e entram nas justificativas dos resultados principais do trabalho apresentados à frente. A menos de especificação em contrário, o símbolo X indicará um subconjunto compacto arbitrário e não vazio de E .

Escreveremos $\mathcal{M}(X)$ para denotar o espaço de todas as medidas de Radon complexas sobre X . Para cada μ em $\mathcal{M}(X)$, podemos construir naturalmente um elemento do dual $C(X)^*$ de $C(X)$ através da fórmula

$$I_\mu(f) = \int_X f d\mu, \quad f \in C(X).$$

A expressão

$$\|\mu\| = \sup \{|I_\mu(g)| : g \in C(X) : \|g\|_\infty \leq 1\},$$

é usualmente conhecida por *variação total de μ* e define uma norma em $\mathcal{M}(X)$. Isto pode ser ratificado em [11, p.94] ou no Capítulo 5 de [13]. Mais do que isso, segundo o Teorema de Representação de Riesz ([11, p.223]), a aplicação

$$\mu \in \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\iota} I_\mu \in C(X)^* \quad (2.1)$$

é um isomorfismo isométrico. Por outro lado, se χ_Y denota a função característica de Y , a fórmula

$$|\mu|(Y) = \sup \{|I_\mu(g\chi_Y)| : g \in C(X) : \|g\|_\infty \leq 1\}, \quad Y \subseteq X,$$

define uma medida sobre X , a *medida de variação total de μ* . Sua relação com a variação total de μ é descrita pela fórmula $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Lema 2.1.1. *Sejam μ um elemento de $\mathcal{M}(X)$ e K um núcleo PD e contínuo sobre E . Suponha que $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ seja uma função layout para K . Então, a fórmula*

$$L(u) := \overline{\int_X \Phi_u(x) d\mu(x)}, \quad u \in \mathcal{W},$$

define um elemento de $C(\mathcal{W})^$. Ainda, existe um único $w_0 \in \mathcal{W}$ de modo que*

$$\overline{L(u)} = \langle w_0, u \rangle_{\mathcal{W}}, \quad u \in \mathcal{W}. \quad (2.2)$$

Demonstração: É fácil ver que L é uma aplicação linear. Para verificarmos a sua continuidade, primeiro note que

$$|L(u)| \leq \left| \int_X \Phi_u(x) d\mu(x) \right| \leq \int_X |\langle \Phi(x), u \rangle_{\mathcal{W}}| d|\mu|(x), \quad u \in \mathcal{W}.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que

$$|L(u)| \leq \int_X \|\Phi(x)\|_{\mathcal{W}} \|u\|_{\mathcal{W}} d|\mu|(x), \quad u \in \mathcal{W}.$$

Como Φ é contínua,

$$|L(u)| \leq \sup_{x \in X} \|\Phi(x)\|_{\mathcal{W}} \int_X \|u\|_{\mathcal{W}} d|\mu|(x), \quad u \in \mathcal{W}.$$

Como medidas de Radon complexas são regulares, segue que

$$\|L\| \leq \sup_{x \in X} \|\Phi(x)\|_{\mathcal{W}} \|\mu\| < \infty.$$

A afirmação do lema é, então, uma consequência do Teorema da Representação de Riesz usual. ■

O elemento w_0 fornecido pelo lema anterior depende de X , Φ (portanto, de K) e μ . Logo, se um destes dados está devidamente fixado, esta dependência, apesar de ainda existir, poderia ser omitida nas notações. Sempre omitiremos a dependência de X , já que o contexto deixará isto bem claro.

Nas condições do lema anterior, denotaremos por w_{Φ}^{μ} o único elemento w_0 lá descrito. Em outras palavras, w_{Φ}^{μ} é o único elemento de $\mathcal{W}$ que satisfaz

$$\langle w_{\Phi}^{\mu}, u \rangle_{\mathcal{W}} = \int_X \Phi_u(x) d\mu(x), \quad u \in \mathcal{W}. \quad (2.3)$$

A seguinte consequência da fórmula acima será utilizada à frente.

Corolário 2.1.2. *Seja μ um elemento de $\mathcal{M}(X)$. Suponha que $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ seja uma função layout para K . Então,*

$$\langle w_{\Phi}^{\mu}, \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}} = \int_X K(x, y) d\mu(x), \quad y \in X. \quad (2.4)$$

Demonstração: É suficiente observar que a imagem de Φ é um subconjunto de $\mathcal{W}$ e utilizar a fórmula da definição anterior com $u = \Phi(y)$, $y \in X$. ■

Na proposição abaixo computaremos a norma de w_{Φ}^{μ} em $\mathcal{W}$, quando μ e Φ estão fixados. O símbolo $\bar{\mu}$ indicará a medida conjugada da medida μ de $\mathcal{M}(X)$.

Proposição 2.1.3. *Seja μ um elemento de $\mathcal{M}(X)$. Suponha que $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ seja uma função layout para K . Então,*

$$\|w_{\Phi}^{\mu}\|_{\mathcal{W}}^2 = \int_X \left(\int_X K(x, y) d\bar{\mu}(y) \right) d\mu(x). \quad (2.5)$$

Demonstração: Conjugando a equação (2.4) e usando o fato de K ser hermitiano, vemos que

$$\overline{\langle w_{\Phi}^{\mu}, \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}}} = \int_X K(y, x) d\bar{\mu}(x), \quad y \in X.$$

Integrando membro a membro em relação a μ e utilizando (1.3) e (2.3) vem que

$$\int_X \left(\int_X K(y, x) d\bar{\mu}(x) \right) d\mu(y) = \int_X \langle \Phi(y), w_\Phi^\mu \rangle_{\mathcal{W}} d\mu(y) = \langle w_\Phi^\mu, w_\Phi^\mu \rangle_{\mathcal{W}} = \|w_\Phi^\mu\|_{\mathcal{W}}^2.$$

Isto completa a demonstração. ■

No último resultado desta seção registraremos duas propriedades da aplicação $j_X : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{W}$ dada por

$$j_X(\mu) = w_\Phi^\mu, \quad \mu \in \mathcal{M}(X).$$

Proposição 2.1.4. *Seja μ um elemento de $\mathcal{M}(X)$. Suponha que $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ seja uma função layout para K . Então, a aplicação j_X é linear e contínua.*

Demonstração: A linearidade segue de (2.3) e da unicidade de w_Φ^μ . Para obtermos a limitação da aplicação note que, usando a última igualdade na demonstração da proposição anterior, deduzimos que

$$\|w_\Phi^\mu\|_{\mathcal{W}}^2 \leq \int_X \int_X |K(x, y)| d|\mu|(y) d|\mu|(x).$$

Portanto,

$$\|w_\Phi^\mu\|_{\mathcal{W}}^2 \leq \max_{x, y \in X} |K(x, y)| (|\mu|(X))^2 = \max_{x, y \in X} |K(x, y)| \|\mu\|^2,$$

ou seja, j_X é limitada e sua norma não excede $\max_{x, y \in X} |K(x, y)|$. ■

Observação 2.1.5. A eliminação dos parênteses na primeira desigualdade da demonstração acima é justificada pelo Teorema de Fubini-Tonelli ([11, p.67]).

2.2 A injetividade de j_X

Nesta seção, X ainda será um subconjunto compacto não vazio de E . Coletaremos vários resultados envolvendo as aplicações ι e j_X definidas anteriormente. Estaremos particularmente interessados em possíveis relações entre elas e uma caracterização para a injetividade de j_X .

Se U é um subconjunto de um espaço de Hilbert, a linearidade e continuidade do produto interno do espaço fornecem a igualdade $\overline{[U]}^\perp = U^\perp$. Escreveremos $U^{\perp\perp}$ para denotar o subespaço $(U^\perp)^\perp$. Se U é um subespaço fechado do espaço de Hilbert, então é sabido que $U^{\perp\perp} = U$ ([26, p.41]).

No primeiro resultado da seção descreveremos o fecho da imagem de j_X em $\mathcal{W}$.

Proposição 2.2.1. *Se $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ é uma função layout para K , então os fechos da imagem de j_X e do gerado pela imagem de Φ em $\mathcal{W}$ coincidem, isto é, $\overline{j_X(\mathcal{M}(X))} = \overline{[\Phi(X)]}$.*

Demonstração: Fixemos uma função layout $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ para K . A demonstração consiste em justificar que $j_X(\mathcal{M}(X))^\perp = \Phi(X)^\perp$ e, então, usar as propriedades mencionadas no parágrafo que antecede a proposição. Se $u \in \Phi(X)^\perp$, podemos usar a equação (2.3) para obter

$$\langle j_X(\mu), u \rangle_{\mathcal{W}} = \langle w_\Phi^\mu, u \rangle_{\mathcal{W}} = \int_X \Phi_u(x) d\mu(x) = 0, \quad \mu \in \mathcal{M}(X),$$

e concluir que $u \in j_X(\mathcal{M}(X))^\perp$. Reciprocamente, se $v \in j_X(\mathcal{M}(X))^\perp$, um procedimento análogo nos permite concluir que

$$\int_X \Phi_v(x) d\mu(x) = 0, \quad \mu \in \mathcal{M}(X).$$

Agora, para cada $x \in X$, a medida de Dirac δ_x é um elemento de $\mathcal{M}(X)$. Usando a igualdade acima para cada δ_x , concluímos que $\langle \Phi(x), v \rangle_{\mathcal{W}} = \Phi_v(x) = 0$, $x \in X$. Portanto, $v \in \Phi(X)^\perp$. Tendo provado a igualdade inicial, podemos agora escrever

$$\overline{j_X(\mathcal{M}(X))}^\perp = j_X(\mathcal{M}(X))^\perp = \Phi(X)^\perp = \overline{[\Phi(X)]}^\perp.$$

Tomando-se o ortogonal em ambos os membros da igualdade acima, temos que

$$\overline{j_X(\mathcal{M}(X))} = \overline{j_X(\mathcal{M}(X))}^{\perp\perp} = \overline{[\Phi(X)]}^{\perp\perp} = \overline{[\Phi(X)]}.$$

Isto completa a demonstração. ■

A seguir, lidaremos formalmente com os anuladores de alguns subconjuntos de $C(X)$ e também com suas imagens inversas pelo isomorfismo ι . Se A é um subconjunto de $C(X)$, o *anulador* de A é o subespaço A° de $C(X)^*$ dado por

$$A^\circ := \{F \in C(X)^* : F(f) = 0, f \in A\}.$$

Consequentemente,

$$\iota^{-1}(A^\circ) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \iota(\mu) \in A^\circ\} = \left\{ \mu \in \mathcal{M}(X) : \int_X f(x) d\mu(x) = 0, f \in A \right\}.$$

Os dois lemas a seguir descrevem propriedades técnicas que até extrapolam o contexto no qual estamos trabalhando. A primeira delas é usada implicitamente em algumas passagens à frente.

Lema 2.2.2. *Se A é um subconjunto de $C(X)$, então $\iota^{-1}(A^\circ) = \iota^{-1}(\overline{[A]^\circ})$.*

Demonstração: Fixado um subconjunto A de $C(X)$, é suficiente demonstrarmos que $A^\circ = \overline{[A]^\circ}$. Como $A \subset [A]$, a inclusão $\overline{[A]^\circ} \subset A^\circ$ é óbvia. Reciprocamente, se $F \in C(X)^*$ anula todas as funções de A , então F também anula todas as funções de $[A]$ por linearidade. Como F é uma função contínua, então F anula todas as funções em $\overline{[A]}$. Em outras palavras, a inclusão $A^\circ \subset \overline{[A]^\circ}$ também vale. ■

Lema 2.2.3. *Sejam A e B subconjuntos de $C(X)$. Então, $\iota^{-1}(A^o) = \iota^{-1}(B^o)$ se, e somente se, $\overline{A} = \overline{B}$.*

Demonstração: Se $\overline{A} = \overline{B}$, então uma aplicação direta do lema anterior implica que $\iota^{-1}(A^o) = \iota^{-1}(B^o)$. Reciprocamente, suponha que $\iota^{-1}(A^o) = \iota^{-1}(B^o)$, mas que $\overline{A} \neq \overline{B}$. Sem perda de generalidade, assumiremos que $\overline{A} \subsetneq \overline{A} \cup \overline{B}$. Como $\overline{A}$ é fechado em $\overline{A} \cup \overline{B}$, por uma das consequências do Teorema de Hahn-Banach ([11, p.159]) existe $F \in C(\overline{A} \cup \overline{B})^*$ que anula $\overline{A}$ mas não anula $\overline{A} \cup \overline{B} \setminus \overline{A}$. Logo, F anula $\overline{A}$ mas não anula $\overline{B} \setminus \overline{A}$. Usando o Teorema de Hahn-Banach e o fato de $\overline{A} \cup \overline{B}$ ser fechado em $C(X)$, podemos obter uma extensão (conveniente) $\tilde{F}$ de F em $C(X)^*$. Escrevamos, via (2.1), $\tilde{F} = I_\mu$, para alguma $\mu \in M(X)$. Então, $\mu \in \iota^{-1}(A^o)$ mas $\mu \notin \iota^{-1}(B^o)$. Isto contradiz nossa suposição inicial. ■

A seguinte proposição é agora evidente.

Proposição 2.2.4. *Sejam A e B subespaços fechados de $C(X)$. Então, $A = B$ se, e somente se, $\iota^{-1}(A^o) = \iota^{-1}(B^o)$.*

O resultado a seguir é uma consequência direta do Teorema de Hahn-Banach.

Lema 2.2.5. *Seja A um subconjunto de $C(X)$. Então $\overline{A} = C(X)$ se, e somente se, $\iota^{-1}(A^o) = \{0\}$.*

Demonstração: O Teorema de Hahn-Banach garante que $\overline{A} = C(X)$ se, e somente se, $A^o = \{0\}$. A equivalência entre esta última igualdade e $\iota^{-1}(A^o) = \{0\}$ é imediata. ■

Tendo estabelecido os resultados técnicos necessários, concluiremos a seção com um resultado que descreve uma equivalência para a injetividade de j_X . Antes disso, porém, introduziremos notações adicionais. Escreveremos $G_K(X)$ para indicar o espaço de todas as funções em $C(X)$ que são limites uniformes (de restrições a X) de funções da forma

$$\sum_{k=1}^n c_k K(\cdot, x_k), \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in X, \quad n = 1, 2, \dots$$

Em outras palavras,

$$G_K(X) = \overline{\{K_y : y \in X\}}, \quad (2.6)$$

onde o fecho acima é tomado em $C(X)$.

Teorema 2.2.6. *Seja $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para K . Então*

$$\ker j_X = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : \iota(\mu) \in G_K(X)^o\} = \iota^{-1}(G_K(X)^o).$$

Consequentemente, j_X é injetora se, e somente se, $G_K(X) = C(X)$.

Demonstração: Se $\mu \in i^{-1}(G_K(X)^o) \stackrel{\text{Lema 2.2.2}}{=} \iota^{-1}(\{K_y : y \in X\}^o)$, então

$$0 = \int_X K_y(x) d\mu(x) = \int_X K(x, y) d\mu(x), \quad y \in X.$$

Neste ponto entramos com a função layout para K . Lembrando a Proposição 2.1.3, a definição da aplicação j_X e usando o Teorema de Fubini para inverter a ordem de integração, obtemos

$$\|j_X(\mu)\|_{\mathcal{W}}^2 = \|w_{\Phi}^{\mu}\|_{\mathcal{W}}^2 = \int_X \left(\int_X K(x, y) d\mu(x) \right) d\bar{\mu}(y) = \int_X 0 d\bar{\mu}(y) = 0,$$

ou seja, $\mu \in \ker j_X$. Isto mostra que $\iota^{-1}(G_K(X)^o) \subset \ker j_X$. Reciprocamente, se $\nu \in \mathcal{M}(X)$ e $j_X(\nu) = 0$, podemos usar a fórmula (2.4) para deduzir que

$$\int_X K(x, y) d\nu(x) = \langle j_X(\nu), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}} = 0, \quad y \in X,$$

ou seja,

$$\int_X K_y(x) d\nu(x) = 0, \quad y \in X.$$

Logo, $\nu \in \iota^{-1}(\{K_y : y \in X\}^o) = \iota^{-1}(G_K(X)^o)$ e, portanto, $\ker j_X \subset \iota^{-1}(G_K(X)^o)$. Para justificarmos a última parte do enunciado do teorema, note que a injetividade de j_X é agora equivalente à igualdade $i^{-1}(G_K(X)^o) = \{0\}$. No entanto, pelo Lema 2.2.5, ela torna-se equivalente à igualdade $C(X) = \overline{[G_K(X)]}$. Como $G_K(X)$ já é fechado em $C(X)$, esta igualdade é, de fato, $C(X) = G_K(X)$. ■

2.3 A aplicação l_X e o seu papel

Nesta seção, ainda manteremos um compacto não vazio X de E fixo e a continuidade do núcleo K .

Fixada uma função layout $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$, estudaremos o papel da transformação conjugada linear $l_X : \mathcal{W} \rightarrow C(X)$ dada por

$$l_X(u) = \Phi_u, \quad u \in \mathcal{W}.$$

A expressão que define l_X é exatamente aquela que aparece no integrando da fórmula (2.3) que estabelece a definição do elemento w_{Φ}^u oriundo da aplicação layout Φ . Ela é útil principalmente em descrições alternativas para o conjunto $G_K(X)$.

Note que para tal aplicação verifica-se a igualdade

$$\langle j_X(\mu), u \rangle_{\mathcal{W}} = \int_X l_X(u)(x) d\mu(x) = I_{\mu}(l_X(u)), \quad \mu \in M(X), \quad u \in \mathcal{W}. \quad (2.7)$$

Vejamos agora a descrição de $G_K(X)$ através de l_X .

Teorema 2.3.1. *Se $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ é uma função layout para K , então $G_K(X)$ coincide com o fecho da imagem de l_X em $C(X)$, isto é, $G_K(X) = \overline{l_X(\mathcal{W})}$.*

Demonstração: Seja $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para K . Ambos os espaços da igualdade do enunciado do teorema são fechados em $C(X)$. Logo, devido a Proposição 2.2.4, o teorema estará demonstrado tão logo provemos que a igualdade $\iota^{-1}(G_K(X)^o) = \iota^{-1}(\overline{l_X(\mathcal{W})}^o)$ vale. Pelo Teorema 2.2.6, já temos que $\iota^{-1}(G_K(X)^o) = \ker j_X$, enquanto que o Lema 2.2.2 nos dá que $\iota^{-1}(\overline{l_X(\mathcal{W})}^o) = \iota^{-1}(l_X(\mathcal{W})^o)$. Portanto, a demonstração resume-se a mostrar que $\ker j_X = \iota^{-1}(l_X(\mathcal{W})^o)$. Mas, usando (2.7), vemos imediatamente que para $\mu \in \mathcal{M}(X)$ fixada, a condição $j_X(\mu) = 0$ equivale a $\iota(\mu)(l_X(u)) = 0$, $u \in \mathcal{W}$, ou seja, equivale a $\iota(\mu) \in l_X(\mathcal{W})^o$. A demonstração está completa. ■

Corolário 2.3.2. *Seja $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para K . Se U é um subconjunto fundamental de $\mathcal{W}$, $l_X(U)$ é fundamental em $G_K(X)$. Em outras palavras, se $\overline{[U]} = \mathcal{W}$, então $G_K(X) = \overline{[l_X(U)]}$.*

Demonstração: Seja $U \subset \mathcal{W}$ tal que $\overline{[U]} = \mathcal{W}$. Pelo teorema anterior temos que

$$G_K(X) = \overline{l_X(\overline{[U]})} = \overline{l_X([U])} = \overline{[l_X(U)]} = \overline{[l_X(U)]},$$

e o resultado segue. ■

A última caracterização para $G_K(X)$ que apresentaremos, dependerá de uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $\mathcal{W}$ que aparece na definição de função layout. Como $\mathcal{W}$ pode não ser separável, lembramos dois aspectos fundamentais de uma base ortonormal $\mathcal{B}$ para $\mathcal{W}$: fixado $u \in \mathcal{W}$, o conjunto

$$\{v \in \mathcal{B} : \langle u, v \rangle_{\mathcal{W}} \neq 0\}$$

é enumerável. Além disso, vale a decomposição

$$u = \sum_{v \in \mathcal{B}} \langle u, v \rangle v,$$

com convergência da série, qualquer que seja a ordenação em $\mathcal{B}$. Tais resultados podem ser ratificados em [2, p.144].

Se $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ é uma função layout para K e uma base ortonormal $\mathcal{B}$ está disponível para $\mathcal{W}$, podemos definir o conjunto

$$\Phi_X(\mathcal{B}) := \overline{[\{\Phi_v|_X : v \in \mathcal{B}\}]}.$$

Observação 2.3.3. A similaridade entre as notações $\Phi(X)$ e $\Phi_X(\mathcal{B})$ não deve gerar confusão, uma vez que $\Phi(X)$ é um subconjunto de $\mathcal{W}$ e $\Phi_X(\mathcal{B})$ é um subconjunto de $C(X)$.

Estamos prontos para uma terceira caracterização para $G_K(X)$.

Teorema 2.3.4. *Seja $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para K . Se $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal para $\mathcal{W}$, então $G_K(X) = \Phi_X(\mathcal{B})$.*

Demonstração: Como $\overline{[\mathcal{B}]} = \mathcal{W}$, o Corolário 2.3.2 implica que

$$G_K(X) = \overline{[l_X(\mathcal{B})]} = \overline{[\{\Phi_v|_X : v \in \mathcal{B}\}]} = \Phi_X(\mathcal{B}),$$

a igualdade do enunciado. ■

2.4 Universalidade

Nesta seção, apresentaremos os resultados principais do trabalho. Essencialmente, descreveremos resultados que fornecem equivalências para que um núcleo K PD e contínuo sobre E tenha a propriedade universal da aproximação.

Iniciaremos com a formalização do conceito de universalidade.

Definição 2.4.1. *Um núcleo contínuo $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ possui a propriedade universal da aproximação (ou resumidamente que K é um núcleo universal) se para cada subconjunto compacto e não vazio X de E , qualquer $\varepsilon > 0$ e qualquer função $f \in C(X)$, existe $g \in G_K(X)$ tal que*

$$\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Observamos que, devido à definição de $G_K(X)$ em (2.6), a universalidade K é equivalente à fundamentalidade de $\{K_y : y \in X\}$ em $C(X)$, qualquer que seja o compacto não vazio X do espaço topológico E . Notemos ainda que, conforme indicado no início do capítulo, o conjunto mencionado acima é composto das restrições das funções K_y a X . Outra maneira de expressar a propriedade de universalidade para um núcleo K é exigir que $G_K(X) = C(X)$, qualquer que seja o compacto não vazio X de E .

De maneira análoga, introduziremos universalidade para uma função layout Φ de K , via o conjunto $\Phi_X(\mathcal{B})$ introduzido na seção anterior.

Definição 2.4.2. *Sejam $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para um núcleo K PD sobre E e $\mathcal{B}$ uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $\mathcal{W}$. A função Φ é universal se para cada subconjunto compacto e não vazio X de E , qualquer $\varepsilon > 0$ e qualquer função $f \in C(X)$, existe $g \in \Phi_X(\mathcal{B})$ tal que*

$$\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Observamos que a universalidade de Φ é então equivalente à fundamentalidade do conjunto $\{\Phi_v|_X : v \in \mathcal{B}\}$ em $C(X)$, qualquer que seja o subconjunto compacto não vazio X de E . Equivalentemente, $\Phi_X(\mathcal{B}) = C(X)$, qualquer que seja o subconjunto compacto não vazio X de E .

Uma primeira caracterização para universalidade do núcleo K está, então, implícita no Teorema 2.3.4.

Teorema 2.4.3. *Sejam $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para o núcleo K PD e contínuo sobre E e $\mathcal{B}$ uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $\mathcal{W}$. Então, K é universal se, e somente se, Φ é universal.*

2.5 Universalidade e a teoria de Mercer

A teoria de Mercer pode ser interpretada como aquela que engloba resultados envolvendo simultaneamente um núcleo positivo definido e o operador integral gerado por ele. Nesta seção, analisaremos os conceitos de universalidade introduzidos na seção anterior, envolvendo um pouco da teoria de Mercer nos resultados.

Em toda a seção, K será um núcleo PD contínuo sobre o espaço topológico E .

Se X é um subconjunto compacto e não vazio de E e μ é uma medida de Borel sobre X , então a fórmula

$$\mathcal{K}(g)(x) := \int_X K(x, y)g(y)d\mu(y) \quad (2.8)$$

define um operador integral $\mathcal{K} : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$. A análise funcional clássica garante, então, que a restrição de K a $X \times X$ é representável por uma série absoluta e uniformemente convergente da forma

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X,$$

onde $\{\phi_n\}$ é um conjunto $L^2(X, \mu)$ -ortonormal formado por funções contínuas, ϕ_n é uma auto-função do operador integral $\mathcal{K}$ associada ao autovalor $\lambda_n \geq 0$, respectivamente, e 0 é o único ponto de acumulação de $\{\lambda_n\}$. Por simplicidade, assumiremos que $\lambda_n > 0$ para todo n .

Até o final desta seção, exceto se mencionado o contrário, assumiremos o contexto descrito acima. Consequentemente, sempre consideraremos uma função layout $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}(= \ell_2)$ para K da forma $\Phi(x) = (x(j))$, $x \in E$, onde

$$x(j) := \lambda_j^{1/2} \phi_j(x), \quad x \in X, \quad j = 0, 1, \dots,$$

como adiantado no Teorema 1.2.5.

Um primeiro resultado que pode gerar uma equivalência para a universalidade de K no âmbito da teoria de Mercer está descrito abaixo.

Teorema 2.5.1. *Se K é um núcleo PD e contínuo como descrito no início da seção, então, $G_K(X) = C(X)$ se, e somente se, $\overline{[\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}]} = C(X)$.*

Demonstração: Fixado X , a ideia da demonstração é aproveitar tanto quanto possível, o Teorema 2.3.4. Para tanto, comecemos notando que

$$\Phi_v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} v(j) \lambda_j^{1/2} \phi_j(x), \quad x \in X,$$

onde estamos escrevendo $v = (v(j)) \in \mathcal{B}$ (base ortonormal de ℓ_2). A fórmula acima implica

imediatamente que cada $\Phi_v|_X$ é um elemento de $\overline{[\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}]}$ e, consequentemente,

$$\Phi_X(\mathcal{B}) \subseteq \overline{[\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}]}.$$

Para demonstrarmos a inclusão reversa, tomemos um elemento genérico

$$\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$$

em $[\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}]$. A fórmula

$$w := \left(\alpha_1 \lambda_1^{-1/2}, \alpha_2 \lambda_2^{-1/2}, \dots, \alpha_n \lambda_n^{-1/2}, 0, 0, \dots \right)$$

define um elemento de ℓ_2 que satisfaz

$$\langle \Phi(x), w \rangle_2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^{1/2} \phi_j(x) \alpha_j \lambda_j^{-1/2} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j(x) = \xi(x), \quad x \in X.$$

Como ℓ_2 é separável, podemos, sem perda de generalidade, escrever $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots\}$. Decompondo w com relação a esta base, digamos,

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j v_j, \quad \gamma_j \in \mathbb{C},$$

obtemos, via continuidade do produto interno,

$$\xi(x) = \left\langle \Phi(x), \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j v_j \right\rangle_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\gamma_j} \langle \Phi(x), v_j \rangle_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\gamma_j} \Phi_{v_j}(x), \quad x \in X.$$

Segue que $\xi \in \overline{[\{\Phi_v|_X : v \in \mathcal{B}\}]} = \Phi_X(\mathcal{B})$ e, conseqüentemente, $\overline{[\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}]} \subseteq \Phi_X(\mathcal{B})$. Assim, $\overline{[\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}]} = \Phi_X(\mathcal{B})$ e o Teorema 2.3.4 nos dá que

$$\overline{[\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}]} = G_K(X).$$

O resultado segue. ■

Ainda buscando uma associação entre o operador integral $\mathcal{K}$ e a universalidade do núcleo PD K , temos o próximo resultado, que diz respeito à imagem de $\mathcal{K}$.

Teorema 2.5.2. *Se X é um subconjunto compacto e não vazio de E , então $G_K(X)$ coincide com o fecho da imagem de $\mathcal{K}$ em $C(X)$, isto é, $G_K(X) = \overline{\mathcal{K}(L^2(X, \mu))}$.*

Demonstração: Fixado X , o Lema 2.2.3 garante que a demonstração resume-se a justificar que

$$\iota^{-1}(\{K_y : y \in X\}^o) = \iota^{-1}(\mathcal{K}(L^2(X, \mu))^o).$$

Se $\mu \in \iota^{-1}(\{K_y : y \in X\}^o)$, temos imediatamente que

$$\int_X K(x, y) d\mu(x) = 0, \quad y \in X.$$

Por outro lado, se integramos ambos os lados de (2.8) obtemos

$$\int_X \mathcal{K}(g)(x) d\mu(x) = \int_X \int_X K(x, y) g(y) d\mu(y) d\mu(x), \quad g \in L^2(X, \mu).$$

Daí, pelo Teorema de Fubini, segue que

$$\int_X \mathcal{K}(g)(x) d\mu(x) = \int_X g(y) \left(\int_X K(x, y) d\mu(x) \right) d\mu(y) = 0, \quad g \in L^2(X, \mu).$$

Em outras palavras, $\mu \in \iota^{-1}(\mathcal{K}(L^2(X, \mu)))$. Reciprocamente, se

$$\int_X \mathcal{K}(g)(x) d\mu(x) = 0, \quad g \in L^2(X, \mu),$$

então procedendo como na parte anterior, podemos deduzir que

$$\int_X g(y) \left\{ \int_X K(x, y) d\mu(x) \right\} d\mu(y) = 0, \quad g \in L^2(X, \mu).$$

Em particular, como a função

$$g_\mu := \overline{\int_X K(x, \cdot) d\mu(x)}$$

é um elemento de $L^2(X, \mu)$, segue que

$$\int_X |g_\mu(y)|^2 d\mu(y) = \int_X \left| \int_X K(x, y) d\mu(x) \right|^2 d\mu(y) = 0.$$

Da continuidade de g_μ e da igualdade acima, segue que g_μ é identicamente nula. Em outras palavras,

$$\int_X K(x, y) d\mu(x) = 0, \quad y \in X.$$

Portanto, $\mu \in \iota^{-1}(\{K_y : y \in X\}^o)$. ■

O corolário abaixo não necessita justificativa.

Corolário 2.5.3. *Seja X um subconjunto compacto e não vazio de E . Então, $G_K(X) = C(X)$ se, e somente se, $\overline{\mathcal{K}(L^2(X, \mu))} = C(X)$.*

Finalizamos a seção registrando um resultado de universalidade envolvendo os resultados que acabamos de demonstrar.

Teorema 2.5.4. *Seja μ uma medida sobre E de tal modo que, para cada compacto não vazio X de E , a restrição de μ a X é uma medida de Borel em X e o contexto descrito no começo da seção vale. Então, K é universal se, e somente se, $\overline{\mathcal{K}(L^2(X, \mu))} = C(X)$ para cada compacto não vazio X de E .*

Exemplificando universalidade

Neste capítulo analisaremos alguns exemplos concretos, onde os resultados das seções anteriores são aplicáveis. Descreveremos a universalidade do núcleo através de propriedades tão explícitas quanto possíveis.

3.1 Um núcleo de Mercer clássico

Neste exemplo, consideraremos um núcleo de Mercer clássico sobre um espaço topológico E , ou seja, um núcleo $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ da forma

$$K(x, y) := \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \overline{\phi_j(y)}, \quad (x, y) \in E \times E,$$

onde cada função ϕ_j é contínua em E . Assumiremos que a série acima é uniformemente convergente em cada conjunto $X \times X$, onde X é um subconjunto compacto e não vazio de E . É imediato verificar que K é positivo definido (e contínuo).

Demonstraremos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1. *O núcleo K descrito acima é universal se, e somente se, para cada subconjunto compacto e não vazio X de E , o conjunto $\{\phi_j|_X : j = 1, 2, \dots\}$ é fundamental em $C(X)$.*

Demonstração: Considerando o espaço de Hilbert ℓ_2 munido de seu produto interno canônico, uma função layout para K é $\Phi : E \rightarrow \ell_2$ dada por

$$\Phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots), \quad x \in E.$$

Assim sendo, usaremos o Teorema 2.4.3 para justificar o resultado, determinando uma condição para a universalidade de Φ . Fixando a base canônica $\mathcal{B}_0$ de ℓ_2 , a universalidade de Φ exige que $\Phi_X(\mathcal{B}_0) = C(X)$, qualquer que seja o compacto não vazio X de E . É fácil ver que se $v(j) = e^i(j) \in \mathcal{B}_0$, onde e^i é o vetor constituído por um na i -ésima entrada e zero nas demais, então

$$\Phi_v(x) = \langle \Phi(x), v \rangle_{\ell_2} = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{e^i(j)} \phi_j(x) = \phi_i(x), \quad x \in X.$$

Logo,

$$\Phi_X(\mathcal{B}_0) = \overline{[\{\Phi_v : v \in \mathcal{B}_0\}]} = \overline{[\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}]},$$

e a universalidade de Φ corresponde, então, à condição do enunciado. ■

Observação 3.1.2. O resultado acima continua válido se na representação de K tivermos uma soma finita. Basta trocar o espaço ℓ_2 por um espaço de dimensão finita. Detalhes serão omitidos.

3.2 Núcleos definidos por séries de potências

No exemplo desta seção, abordaremos um núcleo positivo definido e contínuo sobre $\mathbb{R}^d$ da forma

$$K(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x \cdot y)^n, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

onde cada coeficiente a_n é positivo. O núcleo K acima é, de fato, PD em $\mathbb{R}^d$ por ser um limite pontual de núcleos deste tipo. Por outro lado, as contas abaixo evidenciarão isso diretamente.

No lema abaixo deduziremos uma expressão alternativa para K . Empregaremos um pouco de notação multinomial usual. Para um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, escreveremos

$$\tilde{\alpha} := \binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!}.$$

Lema 3.2.1. *O núcleo K em (3.1) pode ser escrito na forma*

$$K(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \phi_\alpha(x) \phi_\alpha(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

onde

$$\phi_\alpha(x) := (\tilde{\alpha} a_{|\alpha|})^{1/2} x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Demonstração: Escrevendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ e usando o teorema multinomial ([5, p.56]) em $(x \cdot y)^n$ obtemos

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d = n} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!} (x_1 y_1)^{\alpha_1} (x_2 y_2)^{\alpha_2} \dots (x_d y_d)^{\alpha_d} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Um pequeno ajuste transforma a fórmula acima em

$$K(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=n} a_{|\alpha|} \tilde{\alpha} (x_1 y_1)^{\alpha_1} (x_2 y_2)^{\alpha_2} \dots (x_d y_d)^{\alpha_d} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

ou seja,

$$K(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} a_{|\alpha|} \tilde{\alpha} (x_1 y_1)^{\alpha_1} (x_2 y_2)^{\alpha_2} \dots (x_d y_d)^{\alpha_d}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Podemos condensar índices nesta última expressão e chegar em

$$K(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} a_{|\alpha|} \tilde{\alpha} x^\alpha y^\alpha, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

e esta é a expressão do enunciado do lema. ■

Podemos agora enunciar e provar o teorema principal desta seção.

Teorema 3.2.2. *O núcleo K em (3.1) é universal.*

Demonstração: O lema anterior revela que o núcleo se encaixa na descrição do Teorema 3.1.1 com $E = \mathbb{R}^d$ e

$$\phi_\alpha(x) := (\tilde{\alpha} a_{|\alpha|})^{1/2} x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

onde agora o conjunto de índices é $\mathbb{Z}_+^d$ (ainda enumerável). Assim sendo, para provarmos o teorema basta fixarmos um compacto não vazio X de $\mathbb{R}^d$ e verificarmos que o conjunto $A := \{\phi_\alpha|_X : \alpha \in \mathbb{Z}_+^d\}$ é fundamental em $C(X)$. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass ([23, 24]), é suficiente verificarmos que A é uma sub-álgebra que separa pontos em $C(X)$. Tomando-se $\alpha = 0$, verificamos que A contém as funções constantes. É relativamente simples verificar que se $f, g \in A$, então $fg \in A$. Ainda, se $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, também temos que $r_1 f + r_2 g \in A$. Resta, então, verificarmos que A separa pontos. Sejam $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ dois pontos distintos de X (se X for unitário, não há nada para ser demonstrado). Existe, então, pelo menos um par de números, x_k e y_k , com $x_k \neq y_k$. Tomemos o multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_d)$ de $\mathbb{Z}_+^d$ com $\alpha_k = 1$ e $\alpha_j = 0$ para $j \neq k$. Então,

$$\phi_\alpha(x) = x_k a_1^{1/2} \neq y_k a_1^{1/2} = \phi_\alpha(y).$$

Assim, o Teorema de Stone-Weierstrass implica que o fecho de A em $C(X)$ é o próprio $C(X)$. Isto completa a prova. ■

O teorema anterior pode ser generalizado para o contexto complexo. Para isto, o núcleo $K : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tem que ser da forma

$$K(z, w) := \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{m,n} (z \cdot w)^m (\overline{z \cdot w})^n, \quad z, w \in \mathbb{C}^d,$$

onde “ $\cdot$ ” é o produto escalar usual em $\mathbb{C}^d$ e os coeficientes $a_{m,n}$ são todos positivos. A representação para K do lema toma a forma

$$K(z, w) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d} \phi_{\alpha, \beta}(z) \overline{\phi_{\alpha, \beta}(w)}, \quad z, w \in \mathbb{C}^d,$$

onde

$$\phi_{\alpha, \beta}(z) := (\tilde{\alpha} \tilde{\beta} a_{|\alpha|, |\beta|})^{1/2} z^\alpha \overline{z}^\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Na demonstração da versão complexa do Teorema 3.2.2 é necessário utilizar a versão complexa do teorema de Stone-Weierstrass. Os detalhes serão omitidos.

3.3 Núcleos PD sobre a esfera unitária

Nesta seção consideraremos o núcleo contínuo e PD K sobre a esfera unitária S^d introduzido no Exemplo 1.1.4:

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k^d(x \cdot y), \quad x, y \in S^d.$$

O resultado que descreve uma equivalência para a universalidade de K é como segue.

Teorema 3.3.1. *O núcleo K acima é universal se, e somente se, cada coeficiente a_k é positivo.*

Demonstração: Primeiramente há de se notar que na verificação da definição de universalidade neste caso, basta considerar o caso $X = S^d$, uma vez que a própria S^d já é compacta. Como no exemplo anterior, a ideia aqui é reescrever a expressão que define K , colocando-a no formato de um núcleo PD clássico. Para tanto, seja $\{Y_{kj} : j = 1, 2, \dots, N(k, d)\}$ uma base ortonormal (com relação ao produto interno de $L^2(S^d)$ usual) do espaço de todos os harmônicos esféricos de grau k em $d+1$ variáveis. O teorema da adição para harmônicos esféricos ([12]) nos informa que para cada k ,

$$P_k^d(x \cdot y) = \frac{\sigma_d}{N(k, d)} \sum_{j=1}^{N(k, d)} Y_{kj}(x) \overline{Y_{kj}(y)}, \quad x, y \in S^d,$$

onde σ_d é a área de superfície de S^d . Logo, a representação de K toma a forma

$$K(x, y) = \sigma_d \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{N(k, d)} \sum_{j=1}^{N(k, d)} \overline{Y_{kj}(x) Y_{kj}(y)}, \quad x, y \in S^d.$$

Em outras palavras, definindo $\mathcal{I} := \{(k, l) : k \in \mathbb{Z}_+, l = 1, 2, \dots, N(k, d)\}$, temos que

$$K(x, y) = \sum_{(k, l) \in \mathcal{I}} \phi_{kl}(x) \overline{\phi_{kl}(y)}, \quad x, y \in S^d,$$

onde

$$\phi_{kl}(x) := \sigma_d^{1/2} \left(\frac{a_k}{N(k, d)} \right)^{1/2} Y_{kl}(x), \quad x \in S^d, \quad (k, l) \in \mathcal{I}.$$

Um resultado clássico da análise na esfera garante que $\{\phi_{kl} : (k, l) \in \mathcal{I}\}$ é fundamental em $C(S^d)$, enquanto que a fundamentalidade se perde quando qualquer par (k, l) é omitido na indexação do conjunto. Assim, lembrando o Teorema 3.1.1, deduzimos que K é universal se, e somente se, cada coeficiente a_k é positivo. ■

Observamos que existe uma versão similar do teorema acima para núcleos PD sobre a esfera unitária de $\mathbb{C}^q$. Não incluiremos os detalhes aqui, preferindo analisar casos que não tem tanta semelhança com o anterior.

3.4 Núcleos invariantes por translação sobre $\mathbb{R}^d$

Nesta seção consideraremos núcleos $K : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ da forma

$$K(x, y) = \kappa(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (3.2)$$

onde $\kappa : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua conveniente. Núcleos deste tipo não se alteram quando ambas as variáveis x e y são transladadas por um mesmo vetor de $\mathbb{R}^d$.

O seguinte resultado clássico de Bochner ([6]) descreve com exatidão quais funções κ produzem um núcleo K PD sobre $\mathbb{R}^d$ via (3.2).

Proposição 3.4.1. *A aplicação K definida em (3.2) é um núcleo PD e contínuo se, e somente se, existe uma única medida de Borel finita e não negativa μ sobre $\mathbb{R}^d$ tal que*

$$\kappa(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x \cdot y)} d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Se um núcleo K como em (3.2) é PD sobre $\mathbb{R}^d$, escreveremos $K = K_\mu$ para indicar qual é a medida μ da proposição que está atrelada à representação da função κ correspondente. O objetivo principal nesta seção é então descrever a universalidade de K_μ através de alguma propriedade envolvendo a medida μ .

No primeiro resultado descreveremos a função layout para K . Lembramos que o suporte $\text{supp}(\mu)$ de uma medida de Borel μ é o conjunto de todos os pontos x de $\mathbb{R}^d$ para os quais qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^d$ centrada em x tem medida positiva. Em outras palavras,

$$\text{supp}(\mu) = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup \{ \mathcal{O} : \mathcal{O} \text{ é aberto em } \mathbb{R}^d \text{ e } \mu(\mathcal{O}) = 0 \}. \quad (3.3)$$

O suporte de μ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^d$ e $\mu(\mathbb{R}^d \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$. Este conceito e as propriedades listadas acima são discutidos em [13, p.122] e também em [8, p.88].

Proposição 3.4.2. *Seja μ uma medida de Borel finita e não negativa sobre $\mathbb{R}^d$. Se $\mathcal{W}$ é o espaço de Hilbert $L^2(\text{supp}(\mu), \mu)$ usual, então uma função layout para K_μ é $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{W}$ dada por*

$$\Phi(x)(y) := e^{i(x \cdot y)}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad y \in \text{supp}(\mu).$$

Demonstração: Escrevamos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{W}}$ para indicar o produto interno de $\mathcal{W}$ definido por

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{W}} := \int_{\text{supp}(\mu)} f(x) \overline{g(x)} d\mu(x), \quad f, g \in \mathcal{W}.$$

Como $\mu(\mathbb{R}^d \setminus \text{supp}(\mu)) = 0$,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}} &= \int_{\text{supp}(\mu)} e^{i[(x-y) \cdot w]} d\mu(w) \\ &= \int_{\text{supp}(\mu)} e^{i[(x-y) \cdot w]} d\mu(w) + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \text{supp}(\mu)} e^{i[(x-y) \cdot w]} d\mu(w), \quad x, y \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i[(x-y) \cdot w]} d\mu(w) = \kappa(x-y) = K_\mu(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

como queríamos. ■

Antes de prosseguir, notemos que a imagem de Φ contém tão somente funções contínuas.

Lema 3.4.3. *Sejam μ uma medida de Borel finita e não negativa sobre $\mathbb{R}^d$ e Φ a função layout para K_μ definida na proposição anterior. Se X é um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}^d$, então $\ker j_X$ coincide com a imagem inversa por ι do anulador do conjunto*

$$\exp(\mu) := \{ \Phi(x) \in C(X) : x \in \text{supp}(\mu) \}$$

em $C(X)$, ou seja, $\ker j_X = \iota^{-1}(\exp(\mu)^\circ)$.

Demonstração: Seja X um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}^d$. Se $\nu \in \mathcal{M}(X)$ é tal que $j_X(\nu) = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 = \langle j_X(\nu), f \rangle_{\mathcal{W}} &= \int_X \langle \Phi(x), f \rangle_{\mathcal{W}} d\nu(x) \\ &= \int_X \int_{\text{supp}(\mu)} \Phi(x)(w) \overline{f(w)} d\mu(w) d\nu(x), \quad f \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Embutindo a definição de Φ e trocando a ordem de integração vem que

$$0 = \int_{\text{supp}(\mu)} \left(\int_X e^{i(x \cdot w)} d\nu(x) \right) \overline{f(w)} d\mu(w), \quad f \in L^2(\text{supp}(\mu), \mu).$$

Logo, a função $h \in L^2(\text{supp}(\mu), \mu)$ dada por

$$h(w) = \int_X e^{i(x \cdot w)} d\nu(x), \quad w \in \text{supp}(\mu),$$

é ortogonal a cada elemento de $L^2(\text{supp}(\mu), \mu)$. Como $L^2(\text{supp}(\mu), \mu)$ é um espaço de Hilbert, segue que h é identicamente nula em $L^2(\text{supp}(\mu), \mu)$, ou seja, $\iota(\nu) \in \exp(\mu)^\circ$. Claramente, estes argumentos podem ser revertidos para justificar a outra inclusão. ■

Corolário 3.4.4. *Sejam μ e Φ como descritos na proposição anterior. Se X é um subconjunto compacto não vazio de $\mathbb{R}^d$, então $G_K(X) = C(X)$ se, e somente se, $\exp(\mu)$ é fundamental em $C(X)$.*

Demonstração: Seja X um subconjunto compacto e não vazio de $\mathbb{R}^d$. Lembrando o Lema 2.2.5 e usando o resultado anterior, podemos deduzir que j_X é injetora se, e somente se, $\exp(\mu)$ é fundamental em $C(X)$. Por outro lado, o Teorema 2.2.6 revela que j_X é injetora se, e somente se, $G_{K_\mu}(X) = C(X)$. ■

Desta forma, temos a seguinte equivalência para a universalidade de K_μ .

Teorema 3.4.5. *Seja μ uma medida de Borel finita e não negativa sobre $\mathbb{R}^d$. O núcleo K_μ é universal se, e somente se, $\overline{\exp(\mu)} = C(X)$, qualquer que seja o subconjunto compacto e não vazio X de $\mathbb{R}^d$.*

O resultado a seguir permite obtermos a universalidade de um núcleo a partir da universalidade de outro.

Corolário 3.4.6. *Sejam μ e ν medidas de Borel finitas e não negativas sobre $\mathbb{R}^d$. Se $\text{supp}(\mu) = \text{supp}(\nu)$, então o núcleo K_μ é universal se, e somente se, K_ν é universal.*

Demonstração: É suficiente observar que para dois núcleos K_μ e K_ν com $\text{supp}(\mu) = \text{supp}(\nu)$, temos necessariamente que $\exp(\mu) = \exp(\nu)$ e, em seguida, usar o teorema anterior. ■

No próximo resultado descreveremos uma condição suficiente para a universalidade de K_μ . A condição faz uso de um conceito adicional que passamos a descrever. Um subconjunto A de $\mathbb{C}^d$ é um *conjunto de unicidade* para $\mathbb{C}^d$ se a única função inteira que se anula em todos os pontos de A é a função nula.

Proposição 3.4.7. *Seja μ uma medida de Borel finita e não negativa sobre $\mathbb{R}^d$. Se $\text{supp}(\mu)$ é um conjunto de unicidade para $\mathbb{C}^d$, então K_μ é universal.*

Demonstração: Provaremos que se $\text{supp}(\mu)$ é um conjunto de unicidade para $\mathbb{C}^d$, então j_X é injetora, qualquer que seja subconjunto compacto e não vazio X de $\mathbb{R}^d$. Fixe X e suponha que exista uma medida não nula ν em $\mathcal{M}(X)$ tal que $j_X(\nu) = 0$. Consultando o Lema 3.4.3 e sua demonstração, concluímos que

$$\int_X e^{i(x \cdot y)} d\nu(x) = 0, \quad y \in \text{supp}(\mu).$$

Em outras palavras, a função inteira g dada por

$$g(z) := \int_X e^{i(x \cdot z)} d\nu(x), \quad z \in \mathbb{C}^d,$$

anula-se em $\text{supp}(\nu)$. Se este é um conjunto de unicidade para $\mathbb{C}^d$, poderemos concluir que g é identicamente nula em $\mathbb{C}^d$. Calculando g em pontos da forma $-iy$, $y \in \mathbb{R}^d$, obtemos

$$\int_X e^{x \cdot y} d\nu(x) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Como o integrando é positivo, isso só ocorre se $\nu = 0$. O Teorema 2.2.6 nos garante o resultado. ■

Corolário 3.4.8. *Seja μ uma medida de Borel finita e não negativa sobre $\mathbb{R}^d$. Se $\text{supp}(\mu)$ tem medida de Lebesgue não negativa em $\mathbb{R}^d$, então K_μ é universal.*

Demonstração: Um subconjunto de $\mathbb{R}^d$ com medida de Lebesgue não negativa é necessariamente um conjunto de unicidade para $\mathbb{C}^d$. Isso é consequência do seguinte fato: o conjunto dos zeros reais de uma função inteira em $\mathbb{C}^d$ é um conjunto com medida de Lebesgue nula em $\mathbb{R}^d$ ([14, p.102]). Assim, o resultado segue da proposição anterior. ■

A seguir, apresentaremos outra condição para a universalidade de K_μ , agora usando o Teorema da Decomposição de Lebesgue ([18, p.278]). Denote por m a medida de Lebesgue usual sobre $\mathbb{R}^d$. Se ν é uma medida de Borel finita não negativa sobre $\mathbb{R}^d$, tal teorema garante que ν pode ser decomposta de maneira única na forma $\nu = \nu_c + \nu_s$, onde ν_c é uma medida não negativa *absolutamente contínua* em relação a m , isto

é, $\nu_c(A) = 0$ sempre que $m(A) = 0$, enquanto que ν_s é uma medida não negativa *mutualmente singular* a m , isto é, existem $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ disjuntos tais que $\mathbb{R}^d = A \cup B$ e $m(X) = \nu_s(Y) = 0$, quaisquer que sejam X em A e Y em B .

O contexto acima ainda permite a aplicação do Teorema de Radon-Nikodym ([18, p.276]) para ν_c . Consequentemente, existe uma função não negativa g_ν em $L^1(\mathbb{R}^d)$ de modo que

$$\nu_c(A) = \int_A g_\nu(x) dm(x), \quad (3.4)$$

qualquer que seja o subconjunto de Borel A de $\mathbb{R}^d$.

Concluída esta pequena revisão do Teorema da Decomposição de Lebesgue, podemos enunciar e demonstrar mais uma condição para a universalidade para um núcleo K_μ . Na demonstração, utilizaremos a seguinte definição do suporte de uma função f de $L^1(\mathbb{R}^d, m)$ ([7, p.105])

$$\text{supp}(f) = \bigcap \{F \subset \mathbb{R}^d : F \text{ é fechado em } \mathbb{R}^d \text{ e } f = 0, \text{ m-q.s. em } \mathbb{R}^d \setminus F\}. \quad (3.5)$$

Proposição 3.4.9. *Seja μ uma medida de Borel finita e não negativa sobre $\mathbb{R}^d$. Se na decomposição de Lebesgue de μ , a medida μ_c é não nula sobre os conjuntos m mensuráveis, então K_μ é universal.*

Demonstração: A ideia da demonstração é deduzir que, na condição de μ_c ser não nula, $\text{supp}(\mu)$ tem medida de Lebesgue não negativa e, então, aplicar o corolário anterior. Mostremos inicialmente que $\text{supp}(g_\mu) \subseteq \text{supp}(\mu)$. Para tanto, considere os conjuntos $C_{g_\mu} = \{F \subset \mathbb{R}^d : F \text{ é fechado em } \mathbb{R}^d \text{ e } g_\mu = 0 \text{ m-q.s. em } \mathbb{R}^d \setminus F\}$ e $C_\mu = \{F \subset \mathbb{R}^d : F \text{ é fechado em } \mathbb{R}^d \text{ e } \mu(\mathbb{R}^d \setminus F) = 0\}$. Seja F' um elemento arbitrário de C_μ . A equação (3.4) nos mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus F'} g_\mu(x) dm(x) = \mu_c(\mathbb{R}^d \setminus F'),$$

e pela decomposição de Lebesgue obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus F'} g_\mu(x) dm(x) = \mu(\mathbb{R}^d \setminus F') - \mu_s(\mathbb{R}^d \setminus F').$$

Da hipótese de $\mathbb{R}^d \setminus F'$ ser um conjunto de medida μ nula, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus F'} g_\mu(x) dm(x) = -\mu_s(\mathbb{R}^d \setminus F').$$

Uma vez que μ_s é mutualmente singular a medida de Lebesgue m , existem $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ disjuntos tais que $\mathbb{R}^d = A \cup B$ e, para quaisquer $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, tem-se $m(X) = \mu_s(Y) = 0$. Com tais conjuntos reescrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus F'} g_\mu(x) dm(x) = -\mu_s((A \cup B) \setminus F') = -(\mu_s(A \setminus F') + \mu_s(B \setminus F')).$$

É fácil ver que $\mu_s(B \setminus F') = 0$, logo a fórmula acima se torna

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus F'} g_\mu(x) dm(x) = -\mu_s(A \setminus F'),$$

e usando novamente a expressão fornecida pela decomposição de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus F'} g_\mu(x) dm(x) = -\mu(A \setminus F') + \mu_c(A \setminus F').$$

Novamente da hipótese de $\mu(\mathbb{R}^d \setminus F') = 0$, juntamente ao fato de μ ser de Borel, temos que $\mu(A \setminus F') = 0$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus F'} g_\mu(x) dm(x) = \mu_c(A \setminus F'),$$

e pela fórmula do teorema de Radon-Nikodym,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus F'} g_\mu(x) dm(x) = \int_{A \setminus F'} g_\mu(x) dm(x).$$

Como $m(A) = 0$, segue trivialmente que $m(A \setminus F') = 0$. Com isso a integral do lado direito da última equação é nula e consequentemente o mesmo ocorre com o termo do lado esquerdo. Logo $g_\mu = 0$ m -q.s em $\mathbb{R}^d \setminus F'$ e, consequentemente, $F' \in C_{g_\mu}$. Portanto $C_\mu \subseteq C_{g_\mu}$ e então

$$\bigcap_{F \in C_{g_\mu}} F \subseteq \bigcap_{F \in C_\mu} F.$$

Assim, pelas fórmulas (3.3) e (3.5), obtemos a inclusão desejada. Por fim, da igualdade (3.4) obtemos trivialmente que se μ_c é não nula então g_μ não pode ser identicamente nula. Mais do que isso, tal equação mostra que $m(\text{supp } g_\mu) > 0$. Assim, existe um conjunto de Borel M tal que $M \subseteq \text{supp } g_\mu$ e $m(M) > 0$, e a inclusão $\text{supp } g_\mu \subseteq \text{supp } (\mu)$ nos garante o resultado.

3.5 Núcleos radiais sobre $\mathbb{R}^d$

Nesta seção, consideraremos os núcleos positivos definidos sobre $\mathbb{R}^d$ que são radiais. Um núcleo contínuo K sobre $\mathbb{R}^d$ é *radial* se existir uma função contínua $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo

$$K(x, y) := g(\|x - y\|^2), \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (3.6)$$

onde $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana do espaço $\mathbb{R}^d$. É fácil notar que um núcleo radial é necessariamente invariante por translações das variáveis envolvidas. Em outras palavras, estaremos estudando aqui uma subcategoria especial dos núcleos considerados na seção anterior.

Os núcleos contínuos, PD e radiais foram caracterizados em [20]. Em tal referência encontra-se a demonstração do resultado que segue.

Proposição 3.5.1. *Seja K um núcleo contínuo e PD sobre $\mathbb{R}^d$. Então, K é radial se, e somente se, a função g em (3.6) é da forma*

$$g(t) = \int_0^\infty e^{-tr} d\tau(r), \quad t \in [0, \infty), \quad (3.7)$$

onde τ é uma medida de Borel finita e não negativa em $[0, \infty)$.

Discutiremos agora a universalidade de um núcleo como acima.

Teorema 3.5.2. *Seja K um núcleo contínuo, PD e radial sobre $\mathbb{R}^d$. Então, K é universal se, e somente se, a medida τ descrita em (3.7) não é concentrada em $r = 0$.*

Demonstração: Se τ é concentrada em $r = 0$, então K é necessariamente constante e, portanto, não é universal. Reciprocamente, suponhamos que τ não está concentrada em 0. Note, então, que $\text{supp}(\tau)$ contém pelo menos um número real positivo. Começemos observando que a representação para K é

$$K(x, y) = \int_0^\infty e^{-r\|x-y\|^2} d\tau(r), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Calculando a norma na expressão acima e reagrupando, chegamos na expressão

$$K(x, y) = \int_0^\infty e^{-r(\|x\|^2 + \|y\|^2)} e^{2r(x \cdot y)} d\tau(r), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Usando a série de Maclaurin para a função exponencial usual e também o teorema multinomial, podemos reescrever a expressão acima na forma

$$K(x, y) = \int_0^\infty e^{-r(\|x\|^2 + \|y\|^2)} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!} r^{|\alpha|} x^\alpha y^\alpha \right) d\tau(r), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Como $\tau(\mathbb{R}_+ \setminus \text{supp}(\tau)) = 0$, a expressão acima reduz-se a

$$K(x, y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!} \int_{\text{supp}(\tau)} r^{|\alpha|} x^\alpha e^{-r\|x\|^2} y^\alpha e^{-r\|y\|^2} d\tau(r).$$

Esta representação para K sugere considerarmos o espaço de funções

$$\mathcal{W}_\tau = \{F : \mathbb{Z}_+^d \times \text{supp}(\tau) \rightarrow \mathbb{R} : F(\alpha, \cdot) \in L^2(\text{supp}(\tau), \tau), \alpha \in \mathbb{Z}_+^d\},$$

munido do produto interno

$$\langle F, G \rangle_\tau := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!} \int_{\text{supp}(\tau)} F(\alpha, r) G(\alpha, r) d\tau(r), \quad F, G \in \mathcal{W}_\tau.$$

É fácil ver que este espaço é de Hilbert. Se $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{W}_\tau$ é dada por

$$\Phi(x)(\alpha, r) := r^{|\alpha|/2} x^\alpha e^{-r\|x\|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

então Φ está bem definida, $\Phi(x) \in \mathcal{W}_\tau$, $x \in \mathbb{R}^d$ e

$$K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{W}_\tau}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

ou seja, Φ é uma função layout para K . Assim sendo, fixaremos um subconjunto compacto não vazio X de $\mathbb{R}^d$ e analisaremos a injetividade da função j_X introduzida na Seção 2.1. Se $\mu \in \mathcal{M}(X)$ e $F \in \mathcal{W}_\tau$, a equação (2.3) toma a forma

$$\begin{aligned} \langle j_X(\mu), F \rangle_\tau &= \int_X \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!} \int_{\text{supp}(\tau)} \Phi(x)(\alpha, r) F(\alpha, r) d\tau(r) \right) d\mu(x) \\ &= \int_X \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!} \int_{\text{supp}(\tau)} r^{|\alpha|/2} x^\alpha e^{-r\|x\|^2} F(\alpha, r) d\tau(r) \right) d\mu(x). \end{aligned}$$

Trocando a série com a integral vem que

$$\langle j_X(\mu), F \rangle_\tau = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!} \int_X \left(\int_{\text{supp}(\tau)} r^{|\alpha|/2} x^\alpha e^{-r\|x\|^2} F(\alpha, r) d\tau(r) \right) d\mu(x),$$

enquanto que uma troca na ordem de integração permite reescrevermos a igualdade acima na forma

$$\langle j_X(\mu), F \rangle_\tau = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{2^{|\alpha|}}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_d!} \int_{\text{supp}(\tau)} F(\alpha, r) \left(\int_X r^{|\alpha|/2} x^\alpha e^{-r\|x\|^2} d\mu(x) \right) d\tau(r).$$

Se $j_X(\mu) = 0$, esta última igualdade revela que a função

$$(\alpha, r) \in \mathbb{Z}_+^d \times \text{supp}(\tau) \rightarrow \int_X r^{|\alpha|/2} x^\alpha e^{-r\|x\|^2} d\mu(x)$$

é ortogonal a cada função de $\mathcal{W}_\tau$. Como este é um espaço de Hilbert, segue que tal função é identicamente nula em $\mathcal{W}_\tau$. Portanto, como o suporte de τ contém algum $r_0 > 0$, podemos concluir que

$$\int_X r_0^{|\alpha|/2} x^\alpha e^{-r_0\|x\|^2} d\mu(x) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d,$$

ou seja,

$$\int_X x^\alpha e^{-r_0\|x\|^2} d\mu(x) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^d.$$

Como o conjunto $\{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}_+^d\}$ é denso em $C(X)$ e a função exponencial no integrando acima é estritamente positiva, o Teorema de Hahn-Banach implica que $\mu = 0$. Assim, a função j_X é injetora e o Teorema 2.2.6 nos dá que $G_K(X) = C(X)$. O resultado descrito no enunciado segue. ■

Finalizemos a seção apresentando um exemplo simples para ilustrar o último teorema. Considere o núcleo

$$K(x, y) := e^{-\alpha \|x-y\|^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

Se τ é a medida de Borel em $\mathbb{R}^d$ definida por $\tau(\alpha) = 1$ e $\tau(x) = 0$, $x \neq \alpha$, então estamos nas hipóteses da Proposição 3.5.1 garantindo que K é um núcleo radial. Além disso, o Teorema 3.5.2 nos garante que tal núcleo é universal.

Ortogonalidade a partir de suportes disjuntos

Neste capítulo, consideraremos núcleos contínuos e positivos definidos sobre um espaço topológico E . Fixada uma função layout $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$, analisaremos a seguinte propriedade em $\mathcal{H}_K$: sob quais condições duas funções de $\mathcal{H}_K$ são sempre ortogonais, quando seus suportes são subconjuntos disjuntos de E ? Tanto quanto possível, nossos resultados envolverão predominantemente a função layout Φ .

4.1 Conceitos preliminares e um exemplo

Neste capítulo, todas as funções que consideraremos serão contínuas a valores complexos. No caso de uma função de $C(E)$, a definição de suporte que introduzimos em (3.5) retorna ao seu formato mais comum, ou seja, $\text{supp}(f)$ é o fecho do conjunto $\{x \in E : f(x) \neq 0\}$ em E .

Definição 4.1.1. *Seja $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ um espaço de Hilbert inteiramente formado por funções contínuas em E . Diremos que $\mathcal{H}$ possui ortogonalidade a partir de suportes disjuntos se quaisquer duas funções f e g de $\mathcal{H}$ com suportes disjuntos são ortogonais em $\mathcal{H}$. Em símbolos, se $\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$, então $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = 0$.*

À primeira vista, podemos ter a impressão de que qualquer espaço de Hilbert de funções contínuas terá a propriedade da ortogonalidade a partir de suportes disjuntos. Nosso primeiro objetivo será, então, o de exibir um exemplo de espaço de Hilbert que não tem tal propriedade.

Exemplo 4.1.2. Sejam E um espaço topológico discreto (E é um conjunto finito munido da topologia discreta) e $\mathcal{H}$ o espaço das funções a valores complexos definidas em E . Sem perda de generalidade, escreveremos $E = \{1, 2, \dots, d\}$, para algum natural d . Como todos os subconjuntos de E são abertos, qualquer função complexa com domínio E é contínua. Podemos ainda identificar naturalmente uma tal função f com sua imagem através da fórmula

$$f := (f(1), f(2), \dots, f(d)).$$

Fixada uma matriz A positiva definida de ordem d , a forma quadrática

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d f(i) \overline{g(j)} A_{ji}, \quad f, g \in \mathcal{H},$$

faz com que $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ seja um espaço de Hilbert. Neste contexto, se $f \in \mathcal{H}$, então $\text{supp}(f) = \{j : f(j) \neq 0\}$. Logo, se $f, g \in \mathcal{H}$ e $\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$, então para cada $j \in \{1, 2, \dots, d\}$, $f(j)$ e $g(j)$ não são simultaneamente não nulos e, conseqüentemente,

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d f(i) \overline{g(j)} A_{ji} = \sum_{i \neq j}^d f(i) \overline{g(j)} A_{ji}.$$

Desta forma, se A é diagonal, o espaço tem ortogonalidade a partir de suportes disjuntos. Se A não é diagonal e $A_{pq} \neq 0$ para dois índices distintos p e q , podemos definir f e g em $\mathcal{H}$ satisfazendo $f(p) = g(q) = 1$ e $f(i) = g(j) = 0$, $1 \leq i, j \leq d$, $i \neq p$ e $j \neq q$, para obter f e g com suportes disjuntos e $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = A_{pq} \neq 0$. Assim, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ tem a ortogonalidade a partir de suportes disjuntos se, e somente se, A é diagonal.

4.2 Ortogonalidade via suportes disjuntos e a função layout

O objetivo principal desta seção é descrever uma condição necessária e suficiente para que o EHR $\mathcal{H}_K$ possua a propriedade de ortogonalidade a partir de suportes disjuntos, via a função layout Φ . Em todo o restante do capítulo, K será um núcleo contínuo. Por questões de uniformização, escreveremos $\Phi(\emptyset) = \{0\}$.

Teorema 4.2.1. *Sejam K um núcleo PD sobre E e $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para K . Suponha que a imagem de Φ seja um subconjunto fundamental de $\mathcal{W}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\mathcal{H}_K$ possui ortogonalidade a partir de suportes disjuntos;
- (ii) Se U e V são subconjuntos abertos de E e $U \cup V = E$, então $\Phi(U)^\perp \perp \Phi(V)^\perp$.

Demonstração: Suponhamos inicialmente que (ii) vale e tomemos $f, g \in \mathcal{H}_K$ com suportes disjuntos. Pela Proposição 1.3.2, podemos escrever $f = \Phi_u$ e $g = \Phi_v$, com $u, v \in \mathcal{W}$. Ainda, a mesma proposição garante que

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle v, u \rangle_{\mathcal{W}}.$$

Escrevamos $A_f = E \setminus \text{supp}(f)$ e $A_g = E \setminus \text{supp}(g)$. Os conjuntos A_f e A_g são abertos em E e

$$E \setminus (A_f \cup A_g) = (E \setminus A_f) \cap (E \setminus A_g) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g).$$

Como f e g possuem suportes disjuntos, concluímos que $A_f \cup A_g = E$. Por outro lado,

$$0 = f(x) = \langle \Phi(x), u \rangle_{\mathcal{W}}, \quad x \in A_f,$$

ou seja, $u \in \Phi(A_f)^\perp$. Analogamente, também temos que $v \in \Phi(A_g)^\perp$. Aplicando (ii) vemos que $\langle v, u \rangle_{\mathcal{W}} = 0$ e, conseqüentemente, $\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_K} = 0$. Isto demonstra que $\mathcal{H}_K$ possui ortogonalidade a partir de suportes disjuntos. Reciprocamente, suponha que $\mathcal{H}_K$ tenha tal propriedade e sejam U e V subconjuntos abertos de E satisfazendo $E = U \cup V$. Para provar que $\Phi(U)^\perp \perp \Phi(V)^\perp$, sejam $u \in \Phi(U)^\perp$ e $v \in \Phi(V)^\perp$. É fácil ver que as aplicações $f := \Phi_u$ e $g := \Phi_v$ anulam-se em U e V , respectivamente. Logo, $\text{supp}(\Phi_u) \subseteq E \setminus U$ e $\text{supp}(\Phi_v) \subseteq E \setminus V$. Em particular,

$$\text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) \subseteq (E \setminus U) \cap (E \setminus V) = E \setminus (U \cup V) = \emptyset.$$

Pela condição (i), concluímos que $\langle \Phi_u, \Phi_v \rangle_{\mathcal{H}_K} = 0$. Retornando à primeira igualdade da demonstração, deduzimos que $\langle v, u \rangle_{\mathcal{W}} = 0$. Assim, (i) e (ii) são, de fato, afirmações equivalentes. ■

O corolário a seguir fornece uma roupagem alternativa para o teorema anterior.

Corolário 4.2.2. *Nas condições do teorema anterior, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\mathcal{H}_K$ possui ortogonalidade a partir de suportes disjuntos;
- (ii) Se U e V são subconjuntos abertos de E e $U \cup V = E$, então $\Phi(U)^\perp \subseteq \overline{[\Phi(V)]}$ ou $\Phi(V)^\perp \subseteq \overline{[\Phi(U)]}$.

Demonstração: Se $\Phi(U)^\perp \perp \Phi(V)^\perp$, então

$$\Phi(U)^\perp \subseteq \Phi(V)^{\perp\perp} = \overline{[\Phi(V)]}^{\perp\perp} = \overline{[\Phi(V)]}$$

e

$$\Phi(V)^\perp \subseteq \Phi(U)^{\perp\perp} = \overline{[\Phi(U)]}^{\perp\perp} = \overline{[\Phi(U)]}.$$

Por outro lado, se uma das inclusões acima vale, digamos, a primeira delas, então

$$\Phi(U)^\perp \subseteq \overline{[\Phi(V)]} = \Phi(V)^{\perp\perp}$$

e, por conseguinte, $\Phi(U)^\perp \perp \Phi(V)^\perp$. Assim, a equivalência segue do Teorema 4.2.1. ■

A consequência a seguir é uma situação particular dos resultados anteriores.

Corolário 4.2.3. *Sejam K um núcleo PD sobre E e $\Phi : E \rightarrow \mathcal{W}$ uma função layout para K . Se E é conexo e a imagem de Φ é um subconjunto fundamental de $\mathcal{W}$, então $\mathcal{H}_K$ possui a ortogonalidade a partir de suportes disjuntos.*

Demonstração: Sejam U e V abertos de E satisfazendo $U \cup V = E$. Sem perda de generalidade, suponhamos que tal união é disjunta (se não for, trocamos V por $V \setminus U$). Neste caso, a união $U \cup V$ é uma cisão de E . Se E é conexo, $E = U$ ou $E = V$. Desta forma, $\Phi(V) = \Phi(E)$ ou $\Phi(U) = \Phi(E)$. Se, além disso, $\Phi(E)$ é fundamental em $\mathcal{W}$, então

$$\Phi(U)^\perp = \Phi(E)^\perp = \overline{[\Phi(E)]}^\perp = \mathcal{W}^\perp = \{0\},$$

ou $\Phi(V)^\perp = \{0\}$. Em particular, a fórmula $\Phi(U)^\perp \perp \Phi(V)^\perp$ é trivialmente satisfeita. Assim, o resultado é uma consequência do Teorema 4.2.1. ■

4.3 Exemplificando

Nesta última seção do trabalho, investigaremos a ortogonalidade a partir de suportes disjuntos no caso em que $\mathcal{H}_K$ tem dimensão finita. Para tanto, adotaremos as notações e conteúdos do Teorema 1.2.6 e do seu corolário. Vamos supor ainda que os suportes das aplicações ϕ_j são dois a dois disjuntos.

Teorema 4.3.1. *Nas hipóteses do Teorema 1.2.6, suponha que as funções ϕ_j 's tenham suportes disjuntos. Então $\mathcal{H}_K$ possui ortogonalidade a partir de suportes disjuntos se, e somente se, A é uma matriz diagonal.*

Demonstração: Inicialmente vamos supor que a matriz A definida no Teorema 1.2.6 é diagonal. Uma vez que A é positiva definida segue que $a_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, d$. Como nossa intenção é aplicar o Teorema 4.2.1, sejam U e V abertos de E tais que $U \cup V = E$. Lembremos que a função layout para K é dada por $\Phi(x) = \phi(x)A^{1/2}$, $x \in E$, onde $A^{1/2} = (b_{ij})$ é a raiz quadrada de A e $\mathcal{W} = \mathbb{C}^d$, munido de seu produto interno usual. Da hipótese de A ser diagonal, segue trivialmente que $A^{1/2}$ também o é. Dando sequência, se $z = (z_1, z_2, \dots, z_d) \in \Phi(U)^\perp$, temos que

$$0 = \langle z, \Phi(x) \rangle_{\mathbb{C}^d} = \langle z, \phi(x)A^{1/2} \rangle_{\mathbb{C}^d} = \sum_{j=1}^d b_{jj} z_j \overline{\phi_j(x)}, \quad x \in U.$$

De maneira análoga, se $w = (w_1, w_2, \dots, w_d) \in \Phi(V)^\perp$, então

$$0 = \langle w, \Phi(y) \rangle_{\mathbb{C}^d} = \sum_{j=1}^d b_{jj} w_j \overline{\phi_j(y)}, \quad y \in V.$$

Como cada ϕ_k é não nula e estamos assumindo que os suportes das ϕ_k 's são disjuntos, tomamos pontos $x^1, x^2, \dots, x^d$ em E satisfazendo $\phi_k(x^k) \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, d$ e $\phi_k(x^j) = 0$, $j \neq k$. Como $E = U \cup V$ temos que considerar dois casos (para cada i): se $x^i \in U$, então a penúltima igualdade toma a forma

$$0 = b_{ii} z_i \overline{\phi_i(x^i)},$$

e, portanto, $z_i = 0$. Se $x^i \in V$, de maneira análoga obtemos que $w_i = 0$. Essas argumentações implicam que $\langle z, w \rangle_{\mathbb{C}^d} = 0$ e, portanto, $\Phi(U)^\perp$ e $\Phi(V)^\perp$ são ortogonais. Assim, o espaço $\mathcal{H}_\Phi$ possui a ortogonalidade a partir de suportes disjuntos. Sendo $\mathcal{H}_K$ uma cópia isométrica deste último, o mesmo vale para $\mathcal{H}_K$.

Reciprocamente, suponhamos que A não seja uma matriz diagonal. Consequentemente, sua inversa $A^{-1} = (b_{ij})$ também não é diagonal. Logo, existem índices $1 \leq r < s \leq d$ tais que $b_{rs} \neq 0$. Os conjuntos $U := E \setminus \text{supp}(\psi_r)$ e $V := E \setminus \text{supp}(\psi_s)$ são abertos em E e, como os suportes das ϕ_k 's são disjuntos, temos que $U \cup V = E$. Ainda, $\text{supp}(\phi_j) \subset U$, $j \neq r$ e $\text{supp}(\phi_i) \subset V$, $i \neq s$. Para concluirmos os argumentos, é conveniente explicitarmos adequadamente ambos, $\Phi(U)^\perp$ e $\Phi(V)^\perp$. Observe que se $c \in \Phi(U)^\perp$, então

$$0 = \langle \Phi(x), c \rangle_{\mathbb{C}^d} = \langle \phi(x) A^{1/2}, c \rangle_{\mathbb{C}^d}, \quad x \in U.$$

Expandindo o termo à direita obtemos

$$\sum_{i=1}^d \phi_i(x) (A^{1/2} c^*)_i = 0, \quad x \in U,$$

onde $(A^{1/2} c^*)_i$ indica a i -ésima entrada do vetor $A^{1/2} c^*$. Como os suportes das ϕ_k 's são disjuntos, podemos tomar valores particulares de x em $\text{supp}(\phi_i)$, $i \neq r$, para deduzir da fórmula acima que $(A^{1/2} c^*)_j = 0$, $j \neq r$. Em outras palavras,

$$\Phi(U)^\perp = \left\{ c \in \mathbb{C}^d : (A^{1/2} c^*)_j = 0, \quad j \neq r \right\}.$$

Analogamente,

$$\Phi(V)^\perp = \left\{ c \in \mathbb{C}^d : (A^{1/2} c^*)_j = 0, \quad j \neq s \right\}.$$

Agora é fácil notar que se e_j indica o elemento canônico de $\mathbb{C}^d$ possuindo a j -ésima coordenada igual a 1 e zeros nas demais, então $((A^{1/2})^{-1} e_r^*)^*$ e $((A^{1/2})^{-1} e_s^*)^*$ são elementos de $\Phi(U)^\perp$ e $\Phi(V)^\perp$, respectivamente. Por outro lado,

$$\left\langle \left((A^{1/2})^{-1} e_s^* \right)^*, \left((A^{1/2})^{-1} e_r^* \right)^* \right\rangle_{\mathbb{C}^d} = b_{rs} \neq 0,$$

ou seja, $\Phi(U)^\perp$ e $\Phi(V)^\perp$ não são ortogonais. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Aronszajn, N., *Theory of reproducing kernels*. Trans. Amer. Math. Soc. 68, (1950). 337-404.
- [2] Bachman, G.; Narici, L., *Functional analysis*. Academic Press, New York-London, 1966.
- [3] Berg, C.; Christensen, J. P. R.; Ressel, P., *Harmonic analysis on semigroups*. Theory of positive definite and related functions. Graduate Texts in Mathematics, 100. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [4] Berlinet, A.; Thomas-Agnan, C., *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics*. With a preface by Persi Diaconis. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.
- [5] Berman, G.; Fryer, K. D., *Introduction to combinatorics*. Academic Press, New York-London, 1972.
- [6] Bochner, S., *Lectures on Fourier integrals*. With an author's supplement on monotonic functions, Stieltjes integrals, and harmonic analysis. Translated by Morris Tenenbaum and Harry Pollard. Annals of Mathematics Studies, No. 42 Princeton University Press, Princeton, N.J., 1959
- [7] Brezis, H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [8] Cheney, W.; Light, W., *A course in approximation theory*. Reprint of the 2000 original. Graduate Studies in Mathematics, 101. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

-
- [9] Cucker, F.; Zhou, Ding-Xuan, *Learning theory: an approximation theory viewpoint*. With a foreword by Stephen Smale. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [10] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A., *Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels*. Integral Equations Operator Theory 64 (2009), no. 1, 61-81.
- [11] Folland, G. B., *Real analysis. Modern techniques and their applications*. Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [12] Groemer, H., *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*. (English summary) Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 61. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [13] Hewitt, E.; Stromberg, K., *Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable*. Third printing. Graduate Texts in Mathematics, No. 25. Springer-Verlag New York-Heidelberg, 1975.
- [14] Krantz, S. G., *Function theory of several complex variables*. Second edition. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1992.
- [15] Kreyszig, E., *Introductory functional analysis with applications*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [16] Micchelli, C. A.; Xu, Yuesheng; Zhang, Haizhang, *Universal kernels*. J. Mach. Learn. Res. 7 (2006), 2651-2667.
- [17] Oktumustur, B., *Reproducing kernel Hilbert spaces*, MSc. Thesis, Bilkent University, Turkey, 2005.
- [18] Royden, L. H., *Real Analysis*. 3rd Edition, Macmillan Publishing Company, New York, 1988.
- [19] Saitoh, Saburo, *Theory of reproducing kernels and its applications*. Pitman Research Notes in Mathematics Series, 189. Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.
- [20] Schoenberg, I. J., *Positive definite functions on spheres*. Duke Math. J. 9, (1942), 96-108.

- [21] Shawe-Taylor, J.; Cristianini, N., *Kernel methods for pattern analysis*. Cambridge University Press, 2004.
- [22] Szegő, G., *Orthogonal polynomials*. Third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 23. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [23] Stone, M., *The Generalized Weierstrass Approximation Theorem*. Mathematics Magazine 21 #5 (1948), 237-254.
- [24] Stone, M., *The Generalized Weierstrass Approximation Theorem*. Mathematics Magazine 21 #21 (1948), 167-184.
- [25] Wendland, H., *Scattered data approximation*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 17. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [26] Young, N., *An Introduction to Hilbert space*. Cambridge University Press, 1988.
- [27] Zhang, Haizhang, *Orthogonality from disjoint support in reproducing kernel Hilbert spaces*. J. Math. Anal. Appl. 349 (2009), no. 1, 201-210.

Índice Remissivo

$G_K(X)$, 34

I_μ , 30

K_y , 18

L , 30

$\Phi_X(\mathcal{B})$, 36

Φ_u , 22

ι , 30

$\mathcal{M}(X)$, 30

j_X , 32

l_X , 35

w_Φ^μ , 31

Anulador, 33

Base ortonormal para um espaço de Hilbert, 36

Complemento ortogonal, 18

Completamento de espaço vetorial, 17

Conjunto

de unicidade, 50

fundamental, 23

total, 23

Espaço

de Hilbert de reprodução, 18

layout, 17

Função layout, 17

Função layout universal, 37

Medida

absolutamente contínua, 50

de Radon, 30

de variação total, 30

Medidas mutualmente singulares, 51

Núcleo

de Mercer, 14, 43

invariante por translação, 47

positivo definido, 15

radial, 52

universal, 29, 37

Operador integral, 38

Ortogonalidade a partir de suportes disjuntos, 57

Polinômios

de Legendre, 16, 46

ultra-esférico, 16

Propriedade universal da aproximação, 37

Suporte

de uma função, 51, 57

de uma medida, 48

Teorema

de Decomposição de Lebesgue, 50

de Fubini-Tonelli, 32

de Radon-Nikodym, 51
de Representação de Riesz, 30, 31
multinomial, 45, 53
de Hahn-Banach, 34
de Stone-Weierstrass, 45
Teoria de Mercer, 20, 38, 43
Variação total, 30