Injetividade global para aplicações entre espaços euclideanos

Yuri Cândido da Silva Ribeiro

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 27 de novembro de 2007

Assinatura: _____

Injetividade global para aplicações entre espaços euclideanos

Yuri Cândido da Silva Ribeiro

Orientador: ***Prof. Dr. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon***

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos
Novembro/2007

À minha família.

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais, Manoel e Celina, e ao meu irmão, Ney, por terem sempre me apoiado nas minhas decisões, por terem contribuído de forma fundamental na minha formação pessoal e por terem sido compreensivos com minha ausência durante o período do mestrado.

À minha namorada Amanda por ter me ajudado durante este trabalho, não somente do ponto de vista técnico mas também me dando sempre ânimo e disposição para prosseguir diante das intempéries. Agradeço também à sua família que sempre me acolheu nos dias em que eu precisava ir até Rio Preto, se tornando como uma segunda família pra mim.

Aos meus amigos Luís Fernando Mello e José Augusto Baêta Segundo, meus orientadores da graduação, por terem sido os grandes responsáveis pelo meu ingresso no mestrado em matemática. Graças a eles, descobri o meu grande interesse pela matemática e pude receber um treinamento na minha graduação que me permitiu estar aqui hoje.

Ao meu orientador Carlos Gutierrez pelos momentos de discussão frutífera e pelo enriquecimento da minha experiência matemática.

Ao professor Nguen Van Chau pelo esclarecimento de certas passagens algébricas necessárias am alguns pontos do trabalho.

Aos meus amigos pelas conversas sempre proveitosas.

Aos professores do instituto que, com toda certeza, contribuíram para meu crescimento profissional.

À CAPES e à FAPESP pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste texto é feita uma discussão sobre alguns resultados que fornecem condições suficientes para que um difeomorfismo local de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ seja injetivo.

Dentro deste cenário, são exploradas as contribuições destes resultados na tentativa de solucionar conhecidas conjecturas no meio científico como a Conjectura Jacobiana e a Conjectura de Ponto Fixo.

Do ponto de vista dinâmico, existem relações entre injetividade global e estabilidade assintótica global. Neste sentido, os resultados também são contextualizados com respeito a importantes conjecturas de estabilidade assintótica: Conjectura de Markus-Yamabe e o Problema de LaSalle.

Palavras-chaves: Injetividade global, Conjectura Jacobiana, Conjectura de Markus-Yamabe, Estabilidade assintótica global, Atrator global.

Abstract

We present some results which give sufficient conditions for a local diffeomorphism from $\mathbb{R}^n$ into itself be globally injective.

Within this context, we consider some partial results addressed to solve the well known Fixed Point Conjecture and Jacobian Conjecture.

From the dynamical point of view, there are connections between global injectivity and global asymptotic stability. In this way, we present a solution of the Markus-Yamabe Conjecture and of the LaSalle Problem.

Keywords: Global injectivity, Jacobian Conjecture, Markus-Yamabe Conjecture, Global asymptotic stability, Global attractor.

Sumário

Introdução **15**

1 Preliminares **19**

1.1 Noções Básicas de Teoria de Folheações 19

1.1.1 Variedades Diferenciáveis 19

1.1.2 A Derivada 22

1.1.3 Campos de Vetores 24

1.1.4 Folheações 24

1.1.5 Folheações Induzidas por Campos de Vetores sem Singularidades . . . 27

1.1.6 As Folhas como Variedades Diferenciáveis 27

1.2 Métricas Riemannianas 29

1.2.1 Métricas Riemannianas 29

1.2.2 O Gradiente Segundo uma Métrica Riemanniana 30

2 Estabilidade Assintótica Global para Campos de Vetores Diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ **33**

2.1 Resultado Parcial 37

2.2 Resultado de Injetividade 50

2.3 Estabilidade Assintótica Global 51

3 O Problema de Markus-Yamabe Discreto **57**

3.1 Enunciado do Problema 57

3.2 O PMYD(n) para Aplicações Triangulares e Polinomiais 60

3.3 A Conjectura Jacobiana e a Conjectura de Ponto Fixo 73

3.4 Relação entre a Conjectura de Markus-Yamabe e o Problema Discreto de Markus-Yamabe 76

3.5 A Resposta ao PMYD(n) para Difeomorfismos 78

3.6 Prova do Teorema 3.5.1 80

4 Injetividade de Difeomorfismos Locais a partir de Condições Quase Espectrais 83

4.1 Enunciado dos Resultados 85

4.2 Provas dos Teoremas 4.1.1 e 4.1.3 87

4.3 Perturbação da Identidade por Aplicações Homogêneas e a Prova do Teorema 4.1.4 95

5 Inversão Global via Condição de Palais-Smale 99

5.1 Introdução 99

5.2 Prova do Teorema Principal 5.1.4 105

5.3 Utilização dos Resultados para Aplicações Polinomiais 111

6 A Conjectura Jacobiana e Outras Conjecturas Notáveis 117

6.1 A Conjectura Jacobiana 118

6.1.1 Teoremas de Redução 118

6.1.2 Conjectura Jacobiana Real 120

6.1.3 Um Resultado Parcial 121

6.2 A Conjectura de Markus-Yamabe 122

6.2.1 Alguns Resultados sobre a Conjectura Bidimensional de Markus-Yamabe 123

6.2.2 Alguns Resultados sobre a Conjectura N-Dimensional de Markus-Yamabe 125

6.3 O Problema de Markus-Yamabe Discreto ou Problema de LaSalle 126

6.4 A Conjectura de Ponto Fixo 129

A Alguns Resultados de Álgebra Linear 133

A.1 Prova do Resultado 3.2.8 133

A.2 Prova da Proposicao 3.3.2 134

B Mudança de Variáveis para um Polinômio Quadrático 137

Índice Remissivo 143

Introdução

Em várias áreas da matemática aparecem problemas relacionados à injetividade, ou seja, em muitas situações é de interesse encontrar condições para que uma determinada classe de aplicações seja injetiva.

Dentro deste contexto, várias conjecturas foram formuladas, sendo, a mais conhecida delas, a Conjectura Jacobiana.

Conjectura Jacobiana: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial tal que $\det JF$ seja constante e não nulo. Então F é injetiva.

Enunciada por Ott-Heinrich Keller em 1939, esta conjectura tem sido estudada sob o ponto de vista de diversas áreas da matemática mas ainda permanece aberta, exceto por alguns casos particulares.

Em alguns casos, a injetividade global de uma aplicação tem forte relação com a estabilidade assintótica das soluções de um sistema de equações diferenciais induzidas por ela.

Sendo assim, problemas relacionados a injetividade global possuem relação com problemas de estabilidade assintótica global. Por isso, também neste texto são estudados alguns resultados associados a uma importante conjectura de estabilidade assintótica global: a Conjectura de Markus-Yamabe.

Conjectura de Markus-Yamabe: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ tal que todos os autovalores de $JF(x)$ têm parte real menor do que zero, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se $F(0) = 0$ então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico contínuo induzido por F.

Enunciada em 1960 por Larry Markus e Hidehiko Yamabe, esta conjectura foi completamente solucionada em 1995.

Este texto se baseia fortemente em quatro artigos relacionados a este tema:

1. *Global Asymptotic Stability for Differenciable Vector Fields of* $\mathbb{R}^2$, de Alexandre Fernandes, Carlos Gutierrez e Roland Rabanal.

2. *The Discrete Markus-Yamabe Problem*, de Anna Cima, Armengol Gasull e Francesc Mañosas.

3. *Injectivity of Local Diffeomorphisms from Nearly Spectral Conditions*, de Brian Smith e Frederico Xavier.

4. *Global Inversion via Palais-Smale Condition*, de Scott Nollet e Frederico Xavier.

O artigo (1) possui um forte resultado de injetividade global e um resultado de estabilidade assintótica global que, inclusive, responde de forma afirmativa à Conjectura de Markus-Yamabe em $\mathbb{R}^2$.

O artigo (2) estuda uma adaptação da Conjectura de Markus-Yamabe para dinâmica de iterações. Tal conjectura é chamada Problema de Discreto de Markus-Yamabe ou de Problema de LaSalle. Seu enunciado é o seguinte,

Problema de LaSalle: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ os autovalores de $JF(x)$ têm módulo menor que um e que $F(0) = 0$. Então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico discreto induzido por F.

O artigo (3) estuda condições para que um difeomorfismo local seja uma bijeção. Em particular, possui resultados fortes de injetividade global a partir de condições espectrais. O método usado para a demonstração destes resultados consiste em transformar o problema de injetividade em um problema de sobrejetividade a partir da construção de uma aplicação auxiliar.

O artigo (4) trata de teoremas de injetividade global a partir de condições de Palais-Smale. Esta condição assume uma forma mais simples quando aplicada a funções da forma,

$$\begin{array}{rcl} F_v \ : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle F, v \rangle, \end{array}$$

onde $v \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^n$, quando F é um difeomorfismo local.

São obtidos resultados interessantes que , inclusive, são confrontados com teoremas já consagrados.

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

No capítulo um são estudadas algumas preliminares na tentativa de se deixar o texto auto-contido para um leitor sem muita familiaridade com certos conceitos usados no decorrer do texto.

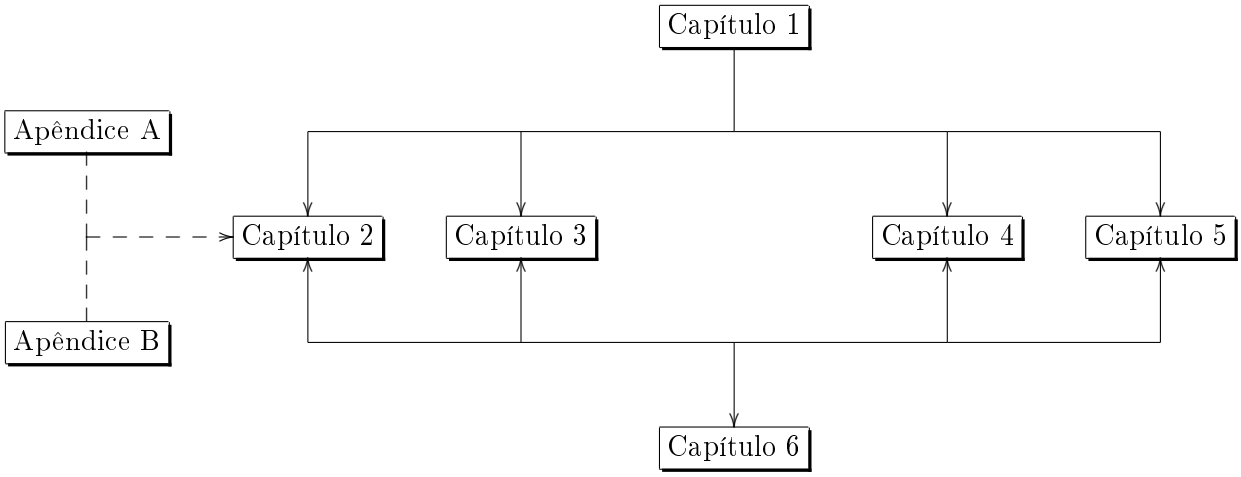
No capítulo seis é feito um apanhado geral sobre os principais aspectos relacionados às conjecturas acima, permitindo que alguns resultados citados no decorrer dos artigos estudados pudessem ser incluídos neste texto. Isso contribui para uma leitura mais completa do assunto.

Os apêndices se dedicam à demonstração de resultados que foram retirados do texto para não comprometer a continuidade da leitura.

Os artigos acima são estudados respectivamente nos capítulos dois, três, quatro e cinco. Portanto, estes capítulos são de leitura independente.

Procurou-se fazer uma versão didática dos artigos, completando passagens, incluindo resultados apenas citados nos artigos originais e relacionando os artigos entre si, para que a leitura se torne mais fluente e mais fácil.

A seguir é exibido o diagrama de interdependência dos capítulos.



Capítulo

1

Preliminares

1.1 Noções Básicas de Teoria de Folheações

Nesta seção serão desenvolvidos alguns conceitos básicos da teoria de folheações que servirão de apoio, principalmente, no que será exposto no capítulo 2.

Para uma leitura mais completa sobre o assunto é sugerida a consulta à referência [6], a qual, inclusive, foi fortemente utilizada no desenvolvimento do que será feito nesta seção.

Para começar será feita uma revisão sobre variedades diferenciáveis com o nível de detalhamento suficiente para que o leitor inexperiente possa acompanhar o desenvolvimento do que segue no texto.

1.1.1 Variedades Diferenciáveis

Para podermos relembrar alguns conceitos e fixar notação, vamos revisar a noção de diferenciabilidade.

Definição 1.1.1. Uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$ é dita *diferenciável* em $x \in U$, se existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que aproxima f numa vizinhança de x, ou seja,

$$f(x+v) = f(x) + T.v + R(v), \text{ com } \lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{|v|} = 0,$$

para todo $v \in \mathbb{R}^m$.

Quando a aplicação T existir, será única. Neste caso ela será denominada *derivada de f em x* a qual é denotada por $Df(x)$.

Definição 1.1.2. Defini-se a *derivada parcial de f com respeito a x_i no ponto x*, com $i = 1, 2, ..., m$, como sendo,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x) \cdot e_i,$$

onde $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$.

Segue da linearidade de $Df(x)$, que,

$$Df(x) \cdot v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \, Df(x) \cdot e_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ é escrito da forma $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$.

Diz-se que f é *de classe $\mathcal{C}^1$ em U* quando todas as suas derivadas parciais forem contínuas, ou seja, quando as aplicações,

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : & U & \to & \mathbb{R}^m \\ & x & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

forem contínuas para todo $i = 1, 2, ..., m$.

Indutivamente diz-se que f é *de classe $\mathcal{C}^r$ em U*, com $r \in \mathbb{N}$, quando as derivadas parciais de f forem de classe $\mathcal{C}^{r-1}$ em U.

Finalmente se f é de classe $\mathcal{C}^r$ para todo $r \in \mathbb{N}$, diz-se que f é *de classe $\mathcal{C}^\infty$* e se f for contínua, que f é *de classe $\mathcal{C}^0$*.

O Teorema da Regra da Cadeia garante que a composição,

$$g \circ f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m,$$

de duas aplicações,

$$f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad g : V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

de classe $\mathcal{C}^r$, é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^r$, e ainda que,

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x).$$

Definição 1.1.3. Diz-se que h é um *difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$*, quando $h : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é de classe $\mathcal{C}^r$ e possui inversa, h^{-1}, também de classe $\mathcal{C}^r$. Neste caso a derivada $Dh(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

A aplicação $h : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é dita um *difeomorfismo local* se, para todo $x \in \mathbb{R}^m$, existirem vizinhanças $V_x \subset U$ e $W_x \subset \mathbb{R}^m$ tais que a restrição,

$$h|_{V_x} : V_x \to W_x,$$

seja um difeomorfismo.

Definição 1.1.4. Uma *carta local* ou *sistema de coordenadas* num espaço topológico M é um par (U, φ) onde U é um aberto de M e $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo de U sobre $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 1.1.5. Um *Atlas* $\mathcal{A}$ de dimensão m e de classe $\mathcal{C}^r$ sobre M é uma coleção de cartas locais cujos domínios cobrem M e tal que se (U, φ) e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ são cartas locais tais que $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, então,

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}),$$

é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$ entre abertos de $\mathbb{R}^m$.

Neste caso $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ é chamada de *mudança de coordenadas*.

Com o auxílio das cartas locais, pode-se introduzir a noção de diferenciabilidade para aplicações entre espaços topológicos, desde que estes possuam um atlas de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$.

De fato, considere M e N espaços topológicos e suponhamos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sejam atlas de classe $\mathcal{C}^r$ sobre M e N respectivamente.

Definição 1.1.6. Uma aplicação $f : M \to N$ é *diferenciável de classe* $\mathcal{C}^k$, $k \leq r$, quando f for contínua e, para cada $x \in M$ existirem cartas locais $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ e $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, com $x \in U$ e $f(x) \in V$, tais que,

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$$

for de classe $\mathcal{C}^k$.

Note que, como as mudanças de coordenadas são difeomorfismos de classe $\mathcal{C}^r$, a definição não depende da carta escolhida.

Definição 1.1.7. Um *Atlas máximo* $\mathcal{A}$ de classe $\mathcal{C}^r$ sobre M, é um atlas que contém todas as cartas locais $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ cujas mudanças de coordenadas com elementos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$,

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} = \varphi(U \cap \tilde{U}) \to \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}),$$

são difeomorfismos de classe $\mathcal{C}^r$.

Definição 1.1.8. Um atlas máximo de classe $\mathcal{C}^r$ e de dimensão m sobre M é chamado de *estrutura diferenciável* de dimensão m e de classe $\mathcal{C}^r$ sobre M.

Definição 1.1.9. Uma *variedade diferenciável* de classe $\mathcal{C}^r$ e de dimensão m é um espaço topológico Hausdorff M, com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão m e de classe $\mathcal{C}^r$.

Exemplo 1.1.1. A esfera $\mathbb{S}^m$.

A esfera $\mathbb{S}^m$ definida como,

$$\mathbb{S}^m = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}; x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{m+1}^2 = 1 \right\},$$

com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{m+1}$ possui uma estrutura de variedade $\mathcal{C}^\infty$ e dimensão m.

De fato, para cada $i = 1, 2, ..., m+1$, considere os conjuntos,

$$U_i^+ = \{x \in \mathbb{S}^m; x_i > 0\}$$

e os conjuntos,

$$U_i^- = \{x \in \mathbb{S}^m; x_i < 0\}.$$

As cartas locais,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i^+ : U_i^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, ..., x_{m+1}) & \longmapsto & (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m+1}), \end{array}$$

juntamente com as cartas locais,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i^- : U_i^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ (x_1, ..., x_{m+1}) & \longmapsto & (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m+1}), \end{array}$$

formam um atlas de $\mathbb{S}^m$, pois a união de seus domínio cobrem a esfera e as mudanças de coordenadas são de classe $\mathcal{C}^\infty$.

1.1.2 A Derivada

Graças à introdução da estrutura de variedade em um espaço topológico, pode-se estender o conceito de derivada para aplicações $f : M \to N$, onde M e N são variedades diferenciáveis.

Tal construção toma como inspiração a idéia geométrica da derivada de aplicações entre espaços euclideanos.

Seja M uma variedade diferenciável, de classe $\mathcal{C}^\infty$ e $x \in M$ um ponto fixado.

Considere o conjunto de todas as curvas $\mathcal{C}^\infty$, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $\varepsilon > 0$ e tais que $\gamma(0) = x$. Denotemos tal conjunto por $C_x(M)$.

Escolha uma carta local qualquer (U, φ) de M desde que $x \in U$.

Note que o conjunto $C_x(M)$ é não vazio porque os caminhos em U que passam por $\varphi(x)$ com parâmetro zero compostos com a inversa de φ pertencem a $C_x(M)$.

O próximo passo é definir uma relação de equivalência em $C_x(M)$. Dois caminhos α e β pertencentes a $C_x(M)$ estarão na mesma classe de equivalência, quando,

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(0).$$

Vejamos que a definição destas classes de equivalência não depende da carta escolhida de início. Considere uma outra carta (V, ψ) de M tal que $x \in V$.

Então, $\psi \circ \alpha = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha)$. E, pela regra da cadeia,

$$\frac{d(\psi \circ \alpha)}{dt}(0) = D[\psi \circ \varphi^{-1}](\varphi \circ \alpha(0)) \cdot \frac{d(\varphi \circ \alpha)}{dt}(0) = D[\psi \circ \varphi^{-1}](\varphi(x)) \cdot \frac{d(\varphi \circ \alpha)}{dt}(0).$$

Como a derivada $D[\psi \circ \varphi^{-1}](\varphi(x))$ é um isomorfismo, temos que,

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha) = \frac{d}{dt}(\psi \circ \beta) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta).$$

Definição 1.1.10. Dada uma variedade M e um ponto $x \in M$, considere o conjunto $C_x(M)$ e a relação de equivalência como dados acima. Ao quociente de $C_x(M)$ pela relação mencionada, damos o nome de *espaço tangente a M no ponto x*, que é denotado por T_xM.

Supondo que a carta (U, φ) seja tal que $\varphi(x) = 0$, dados dois elementos u e v do espaço tangente a M no ponto x e um número real λ, pode-se definir os seguintes elementos de T_xM:

Soma de u com v. Denotado por $u + v$, este elemento de T_xM representa a classe da curva $\varphi^{-1}(\varphi \circ \alpha + \varphi \circ \beta)$, onde α é qualquer representante da classe u e β, da classe v.

Produto de u pelo escalar λ. Denotado por λu, este elemento de T_xM representa a classe da curva $\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \alpha)$, onde α é qualquer representante da classe u.

Com tais operações, o espaço tangente T_xM tem uma estrutura de espaço vetorial e, além disso, novamente com a hipótese da carta ser tal que $\varphi(x) = 0$, tem-se que,

$$\left\{ \left[\varphi^{-1}(te_i)\right] \ ; \ i = 1, 2, ..., n \right\},$$

é uma base para o espaço tangente, onde n é a dimensão da variedade e $t \mapsto te_i$ são curvas em $\mathbb{R}^n$, com $\{e_i \ ; \ i = 1, 2, ...n\}$ sendo a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Neste caso também pode-se usar a notação,

$$\left[\varphi^{-1}(te_i)\right] = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x,$$

para $i = 1, 2, ..., n$, onde $x = \varphi^{-1}(0)$.

Para justificar a notação acima, é interessante olhar a classe $[\varphi^{-1}(te_i)]$ como um operador que age no conjunto das aplicações diferenciáveis de M em N, da seguinte forma,

$$\begin{array}{rccl} \left[\varphi^{-1}(te_i)\right] : & \mathcal{D}(M, N) & \longrightarrow & T_{f(x)}N \\ & f & \longmapsto & \left[f(\varphi^{-1}(te_i))\right]. \end{array}$$

Também pode ser utilizada a notação,

$$\left[\varphi^{-1}(te_i)\right].f = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x .f = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

chamada de *derivada partial de f com respeito a variável x_i no ponto x.*

É possível mostrar que este operador fica bem definido sob as considerações feitas até agora.

Neste ponto é possível generalizar o conceito de derivada de uma aplicação para o caso em que tal aplicação esteja definida entre variedades diferenciáveis.

Definição 1.1.11. Considere uma aplicação $f : M \to N$, onde M e N são variedades diferenciáveis. Para cada ponto $x \in M$, esta aplicação induz uma aplicação entre os espaços tangentes a M no ponto x e a N no ponto $f(x)$,

$$Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N,$$

definida da seguinte forma,

$$Df(x) \cdot [\alpha] = [f \circ \alpha],$$

onde $[\alpha]$ denota a classe de equivalência de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = x$. Tal aplicação está bem definida e à esta aplicação, $Df(x)$, dá-se o nome de *derivada de f no ponto x*.

Para que se tenha uma notação consistente com as propriedades da derivada deve-se ter que, com $\varphi(x) = a$,

$$Df(x).[\varphi^{-1}(a + te_i)] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Mas, de fato,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = [\varphi^{-1}(a + te_i)].f = [f \circ \varphi^{-1}(a + te_i)] = Df(x)[\varphi^{-1}(a + te_i)].$$

1.1.3 Campos de Vetores

Definição 1.1.12. Um *campo de vetores* X em uma variedade M^n é uma aplicação que para cada $p \in M^n$ associa um vetor X_p em T_pM^n.

Através da escolha de uma carta em particular (U, φ), pode-se escrever o campo de vetores como,

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} c_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

onde c_i são funções reais definidas em U.

1.1.4 Folheações

Uma folheação de dimensão n em uma variedade diferenciável M^m de dimensão m é, a grosso modo, uma decomposição de M^m em subvariedades de dimensão n, chamadas de folhas, que se acumulam localmente como os planos x constante, no espaço tridimensional.

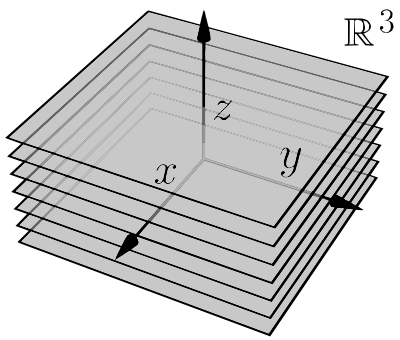


Figura 1.1: Um exemplo simples de folheação em $\mathbb{R}^3$.

Um exemplo bem simples de folheação é o citado acima, a decomposição de $\mathbb{R}^3$ em planos com a terceira coordenada constante. Neste caso os difeomorfismos locais $h : U \subset \mathbb{R}^3 \to V \subset \mathbb{R}^3$ que *preservam as folhas* desta folheação são aqueles que têm a forma,

$$h(x, y, z) = (h_1(x, y, z), h_2(x, y, z), h_3(z)).$$

Assim garante-se que os planos com coordenada z constante ficam preservados pelo difeomorfismo h.

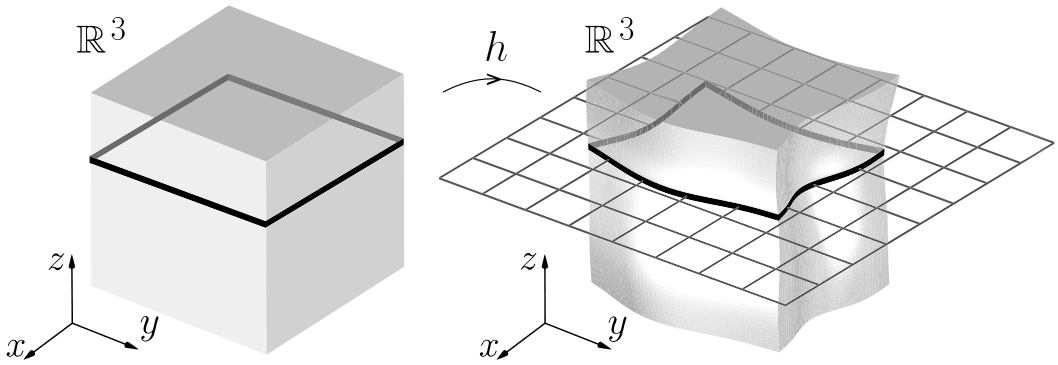


Figura 1.2: A preservação das folhas pelas mudanças de coordenadas.

Definição 1.1.13. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão m e classe $\mathcal{C}^\infty$. Uma *folheação de classe* $\mathcal{C}^r$ e dimensão n de M, é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe $\mathcal{C}^r$ que satisfaz as seguintes propriedades,

(a.) Para toda carta (U, φ) de $\mathcal{F}$, $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente.

(b.) Para todo par de cartas (U, φ) e (V, ψ) de $\mathcal{F}$ tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas,

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V),$$

tem a forma,

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)),$$

onde $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ e h_1 e h_2 são difeomorfismos se classe $\mathcal{C}^r$.

Neste caso diz-se que M é *folheada* por $\mathcal{F}$ ou ainda que $\mathcal{F}$ é uma *estrutura folheada de classe* $\mathcal{C}^r$ *e de dimensão* n *sobre* M.

Observação 1.1.2. A definição acima diz que M é uma variedade diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$, no entanto é exigido que os difeomorfismos do atlas máximo $\mathcal{F}$ sejam apenas de classe $\mathcal{C}^r$. Não há nenhum problema com tal exigência pois, de fato, é exigido que M possua um atlas de classe $\mathcal{C}^\infty$ e que possua um outro atlas bem mais específico, de classe $\mathcal{C}^r$, que precisa atender à segunda exigência da definição que é bastante restritiva.

Observação 1.1.3. Vale a pena observar que se $\mathcal{A}$ é um atlas de M que satisfaz as condições (a.) e (b.), então existe um único atlas máximo que contém $\mathcal{A}$ e que também satisfaz as condições (a.) e (b.). Sendo assim, a exigência de que o atlas seja máximo na definição de estrutura folheada se torna dispensável. No entanto é útil que se tenha um atlas máximo porque neste caso o conjunto de todos os domínios de cartas compõe uma base para a topologia de M.

Definição 1.1.14. As cartas de uma folheação $\mathcal{F}$ também podem ser chamadas de *cartas trivializadoras* de $\mathcal{F}$.

Definição 1.1.15. Tem-se em uma folheação $\mathcal{F}$ de uma variedade diferenciável M, do item (a.) da definição, que as cartas trivializadoras (U, φ) são tais que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Aos conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, com $c \in U_2$, damos o nome de *placas de* $\mathcal{F}$.

Definição 1.1.16. Uma aplicação $F : M \to N$, entre duas variedades é dita uma *imersão* quando, para todo $x \in X$ a derivada $DF(x) : T_xM \to T_yN$, com $y = F(x)$, for injetora.

Além disso, F será um *mergulho* se $F|_M : M \to F(M) \subset N$ for um homeomorfismo considerando-se em $F(M)$ a topologia induzida de N.

Observe que, dada uma carta (U, φ), a aplicação φ^{-1} restrita a $U_1 \times \{c\}$ é um mergulho, ou seja, a restrição,

$$\varphi|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \to \varphi^{-1}(U_1 \times \{c\}),$$

é uma imersão e um homeomorfismo quando se considera na placa a topologia induzida de M. Sendo assim, as placas são subvariedades conexas de dimensão n e de classe $\mathcal{C}^r$ sobre M. De fato, decorre da definição de diferenciabilidade de aplicações entre variedades que φ^{-1} é difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$ e, portanto, a restrição é uma imersão e um homeomorfismo.

Definição 1.1.17. Um *caminho de placas* é uma seqüência de placas $\alpha_1, ..., \alpha_k$, de forma que $\alpha_i \cap \alpha_{i+1} \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, ..., k\}$.

Assim pode ser introduzida a seguinte relação de equivalência no conjunto das placas de $\mathcal{F}$. Diremos que duas placas α e β estarão na mesma classe de equivalência, ou seja, $\alpha \sim \beta$, quando existir um caminho de placas $\alpha_1, ..., \alpha_k$ tal que $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \alpha_k$.

Como M é recoberta por placas, ou seja, todo ponto x de M está em alguma placa, a relação de equivalência acima pode ser usada para induzir uma relação de equivalência em M. Dados dois pontos de M, por exemplo p e q, ocorrerá de $p \overset{\bullet}{\sim} q$ se existir uma placa α que contém p e um placa β que contém q tais que $\alpha \sim \beta$.

Definição 1.1.18. Uma *folha de* $\mathcal{F}$ é uma classe de equivalência da relação $\overset{\bullet}{\sim}$, definida acima.

Será mostrado em uma seção posterior que uma folha F de uma folheação $\mathcal{F}$ sobre uma variedade M possui uma estrutura de variedade diferenciável herdada da variedade M, chamada *estrutura intrínseca de* F.

1.1.5 Folheações Induzidas por Campos de Vetores sem Singularidades

Como já foi visto anteriormente, um campo de vetores X, definido em uma variedade diferenciável M, é uma aplicação que, a cada ponto x de M, faz corresponder um vetor $X(p)$ em T_xM, espaço tangente a M no ponto x.

Pode-se associar uma equação diferencial ordinária a um campo de vetores da seguinte forma,

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \tag{1.1}$$

Uma solução de tal equação diferencial é uma curva $\gamma : (a,b) \subset \mathbb{R} \to M$ tal que $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, para todo $t \in (a,b)$.

Sob certas condições acerca de X, é possível garantir que, para cada $x \in M$, existe uma única solução de (1.1) tal que $\gamma(0) = x$, que é chamada de *órbita de* X *que passa por* x. Neste caso, se o campo de vetores não possui singularidades, ou seja $X(x) \neq 0$ para todo $x \in M$, as órbitas configuram uma folheação de M de dimensão um. Um exemplo é mostrado na figura 1.3.

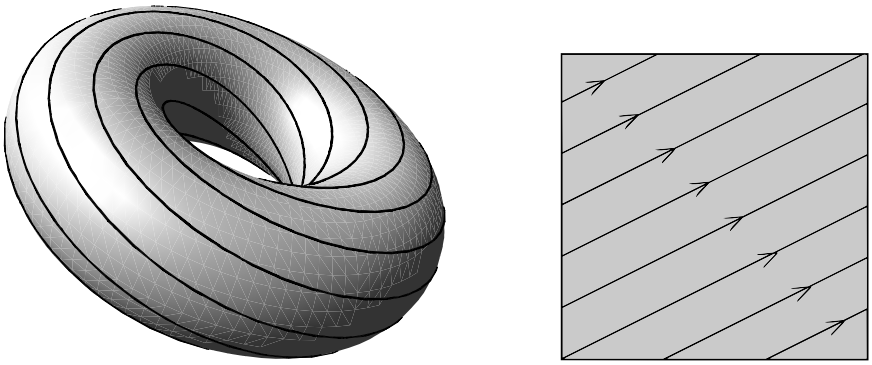


Figura 1.3: Uma folheação de dimensão um induzida por um campo de vetores sem singularidades.

1.1.6 As Folhas como Variedades Diferenciáveis

Definição 1.1.19. Uma folha F de uma folheação $\mathcal{F}$, de dimensão n e de classe $\mathcal{C}^r$, sobre uma variedade diferenciável M, de dimensão m possui uma estrutura de variedade diferenciável, de dimensão n e de classe $\mathcal{C}^r$, induzida pelas cartas de $\mathcal{F}$. Tal estrutura é denominada *estrutura intrínseca de* F.

Tal estrutura pode ser construída da seguinte forma.

Seja M uma variedade diferenciável de classe $\mathcal{C}^\infty$ e dimensão $m = n + s$ folheada por $\mathcal{F}$, folheação de classe $\mathcal{C}^r$ e dimensão n.

Considere F uma folha de $\mathcal{F}$, $p \in F$ e uma carta trivializadora (U, φ). Seja ainda α a placa de U que contém p.

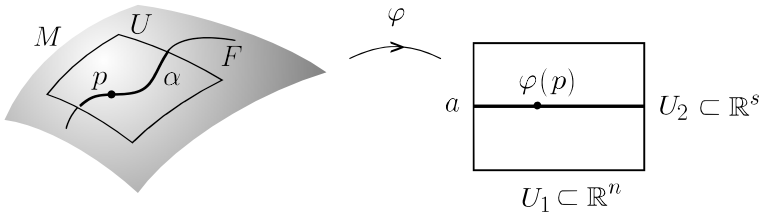


Figura 1.4: As placas de uma folheação.

Neste caso $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$. Assim, considerando $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, com $\varphi_1 : U \to U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : U \to U_2 \subset \mathbb{R}^s$ tem-se que a restrição $\varphi_\alpha = \varphi_1|_\alpha$ é um homeomorfismo de α sobre um conjunto da forma $U_1 \times \{a\}$ com $a \in U_2$.

Vejamos que o conjunto,

$$\mathcal{B} = \{(\alpha, \varphi_\alpha) \ ; \ \alpha \subset F \text{ é placa de } U \text{ com } (U, \varphi) \subset \mathcal{F}\},$$

é um atlas de classe $\mathcal{C}^r$ e dimensão n de F.

Para que $\mathcal{B}$ seja um atlas é preciso verificar as seguintes condições,

(a.) Para que (α, φ_α) sejam cartas locais, é preciso que α seja um aberto de F e que φ_α seja um homeomorfismo entre abertos.

(b.) Para que $\mathcal{B}$ seja um atlas de classe $\mathcal{C}^r$ é necessário e suficiente que, para todos as cartas (α, φ_α) e (β, ψ_β) de $\mathcal{B}$ tais que $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$,

$$\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(\alpha \cap \beta) \to \varphi_\alpha(\alpha \cap \beta),$$

seja um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$ entre abertos.

O item (a.) é facilmente verificado. De fato, $\alpha = F \cap U$, e $\varphi_\alpha(\alpha) = U_1 \times \{a\}$, e portanto são abertos. Além disso como já foi comentado, φ_α é um homeomorfismo.

Para se convencer do item (b.), considere a seguinte afirmação,

Afirmação 1.1. *$\alpha \cap \beta$ é um conjunto aberto em α e em β.*

De fato, considerando as cartas (U, φ) e (V, ψ) de $\mathcal{F}$, temos que, $\varphi \circ \psi^{-1}$ tem a forma,

$$\varphi \circ \psi^{-1} = (h_1(x, y), h_2(y)),$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^s$ e h_1 e h_2 difeomorfismos de classe $\mathcal{C}^r$.

Sendo assim,

$$\varphi \circ \psi^{-1}(x,b) = (h_1(x,b), h_2(b)) = (h_1(x,b), a)\,. \tag{1.2}$$

Além disso, como β é placa de V e α é placa de U, segue que, $U \cap \beta = U \cap V \cap \beta$ e $V \cap \alpha = V \cap U \cap \alpha$, e assim,

$$\varphi(V \cap \alpha) = \varphi(V \cap U \cap \alpha) = \varphi(V \cap U) \cap U_1 \times \{a\},$$

e também,

$$\psi(U \cap \beta) = \psi(U \cap V \cap \beta) = \psi(U \cap V) \cap V_1 \times \{b\}.$$

Agora usando (1.2), temos,

$$\begin{aligned}\varphi(U \cap \beta) &= \varphi \circ \psi^{-1}\left(\psi(U \cap \beta)\right) = \varphi \circ \psi^{-1}\left(\psi(U \cap V) \cap V_1 \times \{b\}\right)\\ &\subset \varphi(U \cap V) \cap U_1 \times \{a\} = \varphi(V \cap \alpha).\end{aligned}$$

mostrando que $U \cap \beta \subset V \cap \alpha$.

Por um procedimento análogo, chega-se a conclusão de que $V \cap \alpha \subset U \cap \beta$, e portanto que $V \cap \alpha = U \cap \beta$. Assim,

$$\alpha \cap \beta = \alpha \cap U \cap \beta = \alpha \cap V \cap \alpha = \alpha \cap V = \beta \cap U.$$

E, uma vez que U e V são abertos de M, conclui-se que $\alpha \cap \beta$ é um aberto de α e de β, estabelecendo a afirmação.

Agora, sendo φ_α e ψ_β dois homeomorfismos, segue que $\varphi_\alpha(\alpha \cap \beta)$ e $\psi_\beta(\alpha \cap \beta)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$.

Finalmente, para concluir que $\varphi_\alpha \circ \psi_\beta$ é um difeomorfismo de classe $\mathcal{C}^r$, basta observar a definição das restrições e ver que

$$\varphi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x) = h_1(x,b) \text{ se } x \in \psi_\beta(\alpha \cap \beta).$$

Isso conclui a construção da estrutura intrínseca de F como subvariedade de M de dimensão n e classe $\mathcal{C}^r$.

1.2 Métricas Riemannianas

Nesta seção será feita a apresentação de dois conceitos que serão utilizados principalmente no capítulo 5. Para a elaboração desta seção foi utilizada, principalmente, a referência [7].

1.2.1 Métricas Riemannianas

Definição 1.2.1. Dada uma variedade M^n, de classe $\mathcal{C}^\infty$, considere uma aplicação g que, para cada ponto p de M^n, associa um produto interno no espaço tangente T_pM^n, ou seja, para cada ponto p de M^n, associa uma forma bilinear simétrica positivas definida em T_pM^n.

Além disso, suponha que g varie de forma diferenciável, ou seja, suponha que se X e Y são campos de vetores diferenciáveis em M^n, então a aplicação $p \mapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$ seja diferenciável. Então, sob tais hipóteses, diz-se que g é uma *métrica riemanniana em* M^n e que M^n é uma *variedade riemanniana*.

É possível também definir uma métrica riemanniana através de suas funções coordenadas, ou seja, uma vez escolhida uma carta (U, φ) de M^n e para cada $(i,j) \in \{1,2,...,n\} \times \{1,2,...,n\}$, pode-se definir as funções,

$$g_{i,j}(p) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p,$$

que são funções a valores reais. Neste caso é necessário e suficiente que estas funções sejam diferenciáveis em $\varphi^{-1}(U)$.

1.2.2 O Gradiente Segundo uma Métrica Riemanniana

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Segue da definição de derivada que,

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

e, portanto, a derivada de f avaliada em um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é um funcional linear, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Este funcional será denotado por Df_x.

Sendo assim, se $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, temos que,

$$Df_x(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

para todo $i = 1, 2, ..., n$, e assim, se $v \in \mathbb{R}^n$ é tal que,

$$v = \sum_1^n c_i e_i,$$

segue da linearidade do funcional que,

$$Df_x(v) = c_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + ... + c_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Inspirados na última expressão, pode ser definido o seguinte campo de vetores,

$$\begin{array}{rccl} \nabla f : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & x & \longmapsto & \nabla f(x) \quad = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right) \end{array} \tag{1.3}$$

E, se consideramos o produto interno usual do $\mathbb{R}^n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tem-se,

$$Df_x(v) = \left\langle \nabla f(x), v \right\rangle, \tag{1.4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Definição 1.2.2. O campo de vetores definido por (1.3) é chamado de *campo gradiente de f* e ao vetor $\nabla f(x)$ dá-se o nome de *vetor gradiente de f no ponto x*.

As principais propriedades do vetor gradiente de f em um ponto x, onde o gradiente é não nulo, são as seguintes,

(g1) A função f cresce à medida que deslocamos na direção de $\nabla f(x)$. Mais precisamente, se γ é uma curva em $\mathbb{R}^n$, com $\gamma(t_0) = x$ tal que,

$$\gamma'(t_0) = \lambda \nabla f(x), \text{ com } \lambda > 0,$$

então a função $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona crescente numa vizinhança de t_0.

(g2) A direção de $\nabla f(x)$ é aquela cuja função f cresce com mais intensidade. Em outras palavras, se $v \in \mathbb{R}^n$ é tal que $|v| = |\nabla f(x)|$, então f cresce mais intensamente na direção de $\nabla f(x)$ do que de v, no mesmo sentido do item (g1) (com $\lambda = 1$).

(g3) O gradiente de f no ponto x é perpendicular à superfície de nível de f, que contém x, no ponto x.

Vejamos a demonstração de cada item citado acima.

Prova de (g1). Lembre-se de que está sendo considerado o gradiente de f num ponto x onde o gradiente é não nulo. Da regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)\bigg|_{t=t_0} = Df_x(\gamma'(t_0)). \tag{1.5}$$

Assim, da equação (1.4) e da hipótese sobre a derivada de γ no ponto $t = t_0$, tem-se,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) = \Big\langle \nabla f(x), \gamma'(t_0) \Big\rangle = \lambda \Big\langle \nabla f(x), \nabla f(x) \Big\rangle = \lambda |\nabla f(x)|^2 > 0.$$

□

Prova de (g2). Agora considere $v \in \mathbb{R}^n$ um vetor tal que $|v| = |\nabla f(x)|$.
Assim, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos,

$$Df_x(v) = \Big\langle \nabla f(x), v \Big\rangle \leq |\nabla f(x)||v| = |\nabla f(x)|^2 = \Big\langle \nabla f(x), \nabla f(x) \Big\rangle = Df_x(\nabla f(x)).$$

Para a conclusão, basta notar que, da equação (1.5) do item (g1), o crescimento da função na direção do vetor v é representada pela quantidade $Df_x(v)$. □

Prova de (g3). Neste caso lembre-se que uma superfície de nível de f é um conjunto N_c, dado por

$$N_c = \{p \in \mathbb{R}^n \ ; \ f(p) = c\},$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Embora, a princípio N_c seja apenas um *conjunto de nível*, de fato, como o gradiente de f no ponto $x \in N_c$ é não nulo, é possível conseguir uma vizinhança U de x em N_c de forma que U seja uma *superfície*.

Dada qualquer curva γ na superfície de nível N_c e tal que $\gamma(t_0) = x$, pode-se verificar que $(f \circ \gamma)'(t_0) = 0$, pois a função $f \circ \gamma(t)$ é constante igual a c.

Assim,

$$0 = (f \circ \gamma)'(t_0) = \left\langle \nabla f(x), \gamma'(t_0) \right\rangle$$

o que permite a conclusão de que o vetor tangente a curva γ no ponto x é perpendicular ao gradiente de f no ponto x. Desta forma, o vetor $\nabla f(x)$ é perpendicular a qualquer vetor no plano tangente à superfície de nível no ponto x, ou seja, $\nabla f(x)$ é perpendicular à superfície de nível de f que contém x. □

Observe que as três propriedades acima podem ser concluídas a partir da expressão (1.4) que, por sua vez, está fundamentada no isomorfismo existente entre $\mathbb{R}^n$ e seu dual $\mathbb{R}^{n*}$, que é o espaço dos funcionais lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

Definição 1.2.3. Seja M uma variedade diferenciável e $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ uma métrica riemanniana em M. Dada uma função $h : M \to \mathbb{R}$, o gradiente de h num ponto $x \in M$, denotado por $\nabla^{(g)} h(x)$, é um vetor em $T_x M$ tal que,

$$Dh_x(v) = \left\langle \nabla^{(g)} h(x), v \right\rangle_g, \text{ para todo } v \in T_x M.$$

Desta forma, o vetor gradiente de h no ponto x passa a ter as mesmas propriedades fundamentais do gradiente de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$.

É possível relacionar o gradiente com respeito a uma métrica riemanniana e o gradiente com respeito à métrica euclideana da seguinte forma.

$$\left\langle \nabla h(x), v \right\rangle = \left\langle \nabla^{(g)} h(x), v \right\rangle_g = \left\langle \nabla^{(g)} h(x), g_{ij}.v \right\rangle$$

onde g_{ij} denota a matriz simétrica positiva definida associada ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ no ponto x.

Assim, como a igualdade acima é satisfeita para todo $v \in T_x M$,

$$\nabla^{(g)} h(x) = g_{ij}^{-1}.\nabla h(x).$$

Capítulo

2

Estabilidade Assintótica Global para Campos de Vetores Diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$

Este capítulo é dedicado ao estudo do artigo **"Global Asymptotic Stability for Differenciable Vector Fields of $\mathbb{R}^2$"** [1], de Alexandre Fernandes, Carlos Gutierrez e Roland Rabanal.

De início, seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável . Para denotar o conjunto dos autovalores (complexos) da derivada $DF(p)$, quando p assume valores em $\mathbb{R}^n$, será usada a notação $\mathrm{Spec}\,(F)$.

Os principais resultados desde artigo são:

Teorema 2.2.1. Seja $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Se, para algum $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Spec}\,(X) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$, então X é injetiva .

Teorema 2.3.1. Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, uma campo de vetores diferenciável tal que $X(0) = 0$ e $\mathrm{Spec}\,(X) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0\}$. Então , para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe uma única trajetória positiva começando em p. Além disso o conjunto ω-limite de p é $\{0\}$.

O Teorema 2.3.1 acima, restrito ao caso em que X é um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^1$, foi provado por Fessler e Gutierrez [16, 17]. Note que, com isto provaram a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe em dimensão dois, a qual é falsa em dimensões maiores que dois como mostrado em [15].

Ambos teoremas enunciados acima são relevantes com respeito às seguintes conjecturas, como será visto nos comentários a seguir.

Conjectura Jacobiana de Keller: Uma das várias formulações desta conjectura diz que, se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação polinomial com Jacobiano constante e não nulo, então F é injetiva.
Nota: Embora este enunciado esteja um pouco diferente de outros exibidos neste texto, viu-se por bem mantê-lo tal como esta, uma vez que esta formulação é equivalente à usual. Ver seção 6.1.2.

Conjectura Fraca de Markus-Yamabe: Tal conjectura diz que, se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\mathcal{C}^1$ tal que, $\mathrm{Spec}\,(F) \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) < 0\}$, então F é injetiva.

Conjectura de Chamberland: Esta conjectura enuncia que, se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\mathcal{C}^1$ tal que, para algum $\varepsilon > 0$, $\mathrm{Spec}\,(F) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\} = \emptyset$, então F é injetiva [14].

Conjectura de Alexandrov: Seja $n \geq 2$, e seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ com $\det DF(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assuma ainda que exista uma constante $K < \infty$, tal que $r(DF(x)^{-1}) \leq K$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, onde $r(DF(x)^{-1})$ denota o raio espectral da aplicação linear $DF(x)^{-1}$, ou seja, o máximo dentre os módulos dos autovalores de $DF(x)^{-1}$. Então $F(\mathbb{R}^n)$ é um domínio convexo e F é injetiva.

Pode-se mostrar que a Conjectura de Chamberland implica na Conjectura Fraca de Markus-Yamabe, ou seja, se a Conjectura de Chamberland for demonstrada então a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe se torna automaticamente verdadeira.

De fato, suponha que valha a Conjectura de Chamberland.

Agora, seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ com

$$\mathrm{Spec}\,(F) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\,(z) < 0\}.$$

Seja $F_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida, para cada $k \in \mathbb{N}$, por

$$F_k(x) = F(x) - \frac{1}{k}\, I(x),$$

onde I denota a aplicação identidade em $\mathbb{R}^n$.

Segue que

$$\mathrm{Spec}\,(F_k) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\,(z) < -1/k\},$$

além do que, para todo $k \in \mathbb{N}$, F_k é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, a Conjectura de Chamberland, assumida como verdadeira, permite concluir que F_k é injetiva.

Logo, como $F_k \to F$ quando $k \to \infty$, segue do Lema 2.2.2 que F é injetiva. Assim fica provada a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe.

Comentários

(1) O Teorema 2.2.1 possui hipóteses mínimas no sentido de que, se a hipótese $\mathrm{Spec}\,(X) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$ for relaxada para apenas $0 \notin \mathrm{Spec}\,(X)$, o resultado falha mesmo para o caso de aplicações polinomiais, como mostrado pelo contra-exemplo de Pinchuck, exemplo 6.1.6. Além disso, Smith e Xavier, provaram que existem inteiros $n > 2$ e aplicações polinomiais não injetivas $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tais que $\mathrm{Spec}\,(P) \cap [0, \infty) = \emptyset$. Veja Teorema 4.1.4.

(2) O Teorema 2.2.1 implica o resultado de injetividade de Fessler [16] e Gutierrez, o qual requer que X seja de classe $\mathcal{C}^1$ e que $\mathrm{Spec}\,(X) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$.

(3) O Teorema 2.2.1 confirma, de uma maneira mais forte, as Conjecturas de Chamberland e de Alexandrov em dimensão dois. No entanto ele não implica na Conjectura Jacobiana Real de Keller em dimensão dois, pois, dado um número natural par n, a aplicação polinomial

$$X(x, y) = (-y, x + y^n),$$

cumpre com as hipóteses da Conjectura Jacobiana de Keller mas não se enquadra nas hipóteses do Teorema 2.2.1.

Note que X tem derivada,

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & ny^{n-1} \end{pmatrix},$$

e assim, tem Jacobiano constante igual a um.

Vejamos que X é tal que,

$$\mathrm{Spec}\,(X) = \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

De fato, seu polinômio característico é,

$$p(\lambda) = \lambda^2 - ny^{n-1}\lambda + 1,$$

de onde pode-se ver que o produto dos seus autovalores é igual a um e portanto,

$$\mathrm{Spec}\,(X) \subset \mathbb{S}^1 \cup \mathbb{R}.$$

Além disso, se $y = 0$ os autovalores são i e $-i$.

Os autovalores da derivada de X no ponto (x, y) são dados por,

$$\lambda_1(y) = \frac{ny^{n-1}}{2} + \sqrt{\frac{n^2 y^{2(n-1)}}{4} - 1},$$

e,

$$\lambda_2(y) = \frac{ny^{n-1}}{2} - \sqrt{\frac{n^2y^{2(n-1)}}{4} - 1}.$$

Como n é par, pode-se tomar o número real $a = (2/n)^{-(n-1)}$.

Agora observe que, nas equações acima, tomando $y = -a$ e $y = a$, tem-se,

$$\lambda_1(-a) = \lambda_2(-a) = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_1(a) = \lambda_2(a) = 1.$$

Além disso,

$$\lim_{y\to\infty} \lambda_2(y) = \lim_{y\to-\infty} \lambda_1(y) = 0,$$

$$\lim_{y\to-\infty} \lambda_2(y) = -\infty,$$

e,

$$\lim_{y\to\infty} \lambda_1(y) = \infty.$$

Para completar basta observar que o espectro é um conjunto conexo e que, para todo $y \in \mathbb{R}$, $\lambda_1(y) \neq 0$ e $\lambda_2(y) \neq 0$.

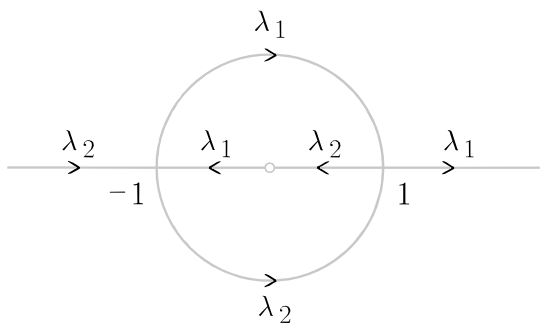


Figura 2.1: O espectro de $X(x, y) = (-y, x + y^n)$ com n par.

(4) Campbell [11] classifica as aplicações de classe $\mathcal{C}^1$ em dimensão 2 cujos autovalores são ambos iguais a um. Todas as aplicações deste tipo possuem uma forma explícita para sua inversa. A classe de funções consideradas no Teorema 2.2.1 é muito maior, porém não é dada nenhuma forma explícita para a inversa. Além disso, a sobrejetividade das aplicações estudadas por Campbell permanece como uma questão aberta no caso de aplicações diferenciáveis em geral.

Este Capítulo está organizado da seguinte forma. A primeira seção será dedicada à prova do Teorema 2.2.1 sob uma hipótese mais forte. A prova do Teorema 2.2.1 é completada na segunda seção. Na terceira seção será exibida a prova do Teorema 2.3.1.

2.1 Resultado Parcial

Nesta seção será demonstrado o seguinte resultado:

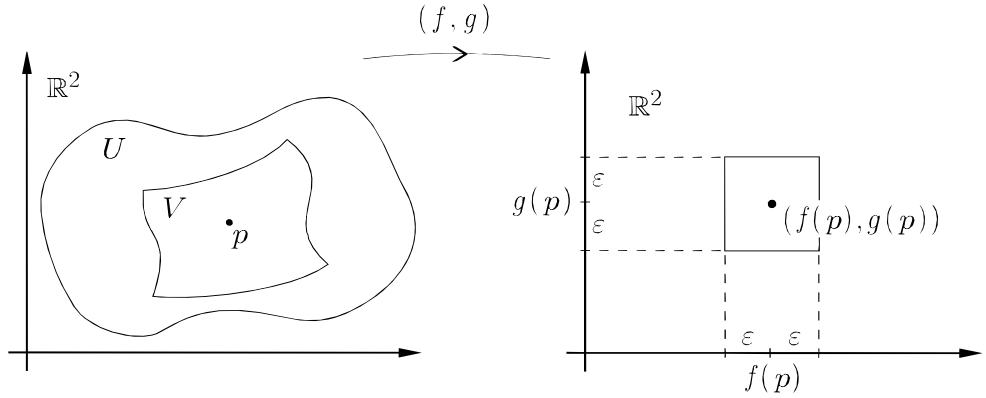
Teorema 2.1.1. *Seja $X(f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Se, para algum $\varepsilon > 0$, $\operatorname{Spec}(X) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, então X é injetiva.*

Com o objetivo de se provar tal resultado, será utilizado o seguinte Teorema de Černavskii [12, 13].

Teorema 2.1.2. (Černavskii) *Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$ e $X = (f,g) : U \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que, para todo $p \in U$, $DX(p)$ é não singular. Então, para todo $p \in U$, existe uma vizinhança $V = V(p)$ e $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ tais que*

$$X|_V : V \to (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \times (g(p) - \varepsilon, g(p) + \varepsilon)$$

seja um homeomorfismo.



Como uma conseqüência deste resultado, obtemos:

Corolário 2.1.3. *Seja $X = (f,g) : U \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, $DX(p)$ seja não singular. Então as curvas de nível $\{f = constante\}$ constituem uma $\mathcal{C}^0$-folheação $\mathcal{F}(f)$ sobre $\mathbb{R}^2$, sem singularidades, tal que, se L é uma folha de $\mathcal{F}(f)$ então $g|L$ é estritamente monótona. Em particular $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.2 para cada ponto $p \in \mathbb{R}^2$, existem U_p e V_p, vizinhanças de p e de $X(p)$, respectivamente, tais que $X|_{U_p} : U_p \to V_p$ é um homeomorfismo.

Desta forma, o conjunto

$$\left\{ \left(U_p, X|_{U_p}\right) ; p \in \mathbb{R}^2 \right\},$$

é um Atlas de $\mathbb{R}^2$. Observe que, embora este Atlas não seja máximo, pela observação 1.1.3, isso não compromete a construção da folheação.

Note que, dadas duas cartas trivializadoras, $(U_p, X|_{U_p})$ e $(U_q, X|_{U_q})$, com $U_p \cap U_q \neq \emptyset$ temos que,

$$X|_{U_p} \circ X^{-1}|_{V_q}(x,y) = (x,y), \text{ para todo } (x,y) \in V_p \cap V_q.$$

Portanto é um difeomorfismo e tem a forma,

$$(h_1(x), h_2(y)),$$

com h_1 e h_2 difeomorfismos.

Assim, $X|_{U_p} \circ X^{-1}|_{V_q}(x, y)$ preserva os níveis de f e de g e, portanto, os níveis de f compõem as folhas de uma folheação, $\mathcal{F}(f)$, de $\mathbb{R}^2$, assim como os níveis de g compõem as folhas de uma folheação $\mathcal{F}(g)$. Como este argumento é válido para qualquer $p \in \mathbb{R}^2$, as folheações não possuem singularidades.

Considere L uma folha de $\mathcal{F}(f)$. Deve-se mostrar que $g|_L$ é estritamente monótona. Se for suposto, por absurdo, que existam pontos $p_1 \neq p_2$, ambos contidos em L, tais que $g(p_1) = g(p_2) = z$, então vê-se que $g|_{[p_1,p_2]}$ possui um valor máximo ou mínimo em (p_1, p_2). Sem perda de generalidade assumamos que $g|_{[p_1,p_2]}$ possui um máximo m.

Considere p um ponto de (p_1, p_2) tal que $g(p) = m$. Então o Teorema 2.1.2 falha para p. De fato, dada qualquer vizinhança U_p de p, não existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$X|_{U_p} : U_p \to (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \times (g(p) - \varepsilon, g(p) + \varepsilon),$$

seja um homeomorfismo, pois a restrição não seria injetiva uma vez que $f|_L$ é constante. Ver figura 2.2.

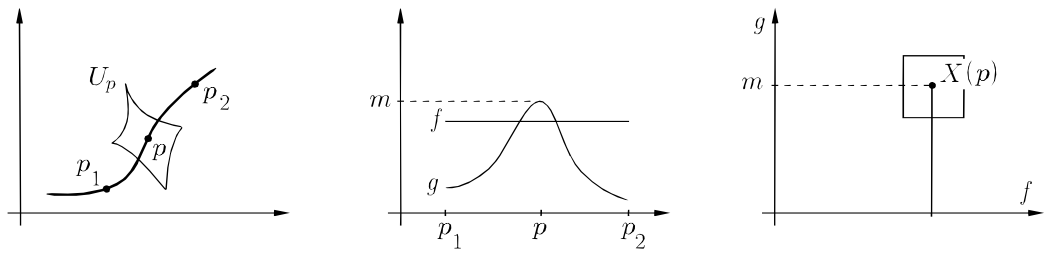


Figura 2.2: Em nenhuma vizinhança de p, X seria homeomorfismo.

Para completar a prova é preciso provar que $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais.

Para ver isso, basta supor que existe $q \in \mathbb{R}^2$ tal que existam $L_1 \in \mathcal{F}(f)$ e $L_2 \in \mathcal{F}(g)$ com L_1 e L_2 se tangenciando no ponto q. Como L_1 está contido em um nível de f e L_2 está contido em um nível de g, pode-se concluir que ∇f é paralelo ao vetor ∇g no ponto q. Assim,

$$\det(DX(q)) = \det \begin{pmatrix} \nabla f(q) \\ \nabla g(q) \end{pmatrix} = 0.$$

Esta contradição prova o desejado e completa a prova do Corolário 2.1.3. □

Considere uma orientação para $\mathcal{F}(f)$ de tal forma que, se L é uma folha orientada de $\mathcal{F}(f)$, então $g|L$ seja crescente em conformidade com a orientação de L. Considere uma orientação análoga para as folhas de $\mathcal{F}(g)$.

Esta possibilidade é garantida pelo fato de $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ serem transversais.

Definição 2.1.1. Seja $a > 0$ e $\sigma, \gamma : (-a, a) \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^0$-curvas, injetivas, tais que $\sigma(0) = \gamma(0)$. Diz-se que γ é *transversal* a σ em $\gamma(0) = \sigma(0)$, se existir $\varepsilon > 0$, vizinhanças V de $\gamma(0)$ e U de $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$ e um homeomorfismo $H : V \to U$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \varepsilon$,

$$H \circ \sigma(t) = (t, 0) \quad \text{e} \quad H \circ \gamma(t) = (t, t).$$

Definição 2.1.2. Seja $a > 0$ e $\sigma, \gamma : [-a, a) \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}^0$-curvas, injetivas, tais que $\sigma(0) = \gamma(0)$. Diz-se que γ é *tangente* a σ em $\gamma(0) = \sigma(0)$, se existir $\varepsilon > 0$, vizinhanças V de $\gamma(0)$ e U de $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$ e um homeomorfismo $H : V \to U$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \varepsilon$,

$$H \circ \sigma(t) = (t, 0) \quad \text{e} \quad H \circ \gamma(t) = (t, \Phi(t)),$$

onde $\Phi(t) \geq 0$ e $\Phi(0) = 0$. Além disso, se for possível tomar $\Phi(t) = |t|$, dizemos que a tangência é *genérica*.

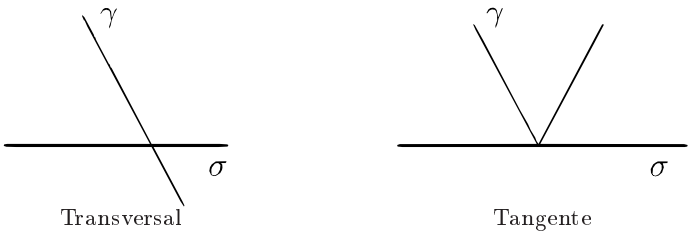
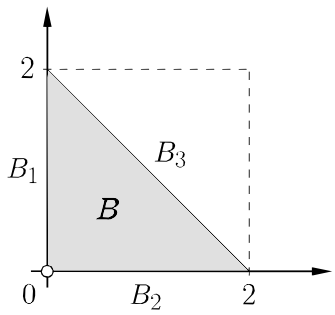


Figura 2.3: Exemplo de curvas transversais e tangentes.

Seja $h_0(x, y) = xy$ e considere o conjunto,

$$B = \{(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]; 0 < x + y \leq 2\}.$$



Definição 2.1.3. Considere $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, $DX(p)$ é não singular. Dado $h \in \{f, g\}$ será dito que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ é uma *meia componente de Reeb*, ou simplesmente uma *mcR*, de $\mathcal{F}(h)$ se existe um homeomorfismo $H : B \to \mathcal{A}$ que é uma equivalência topológica entre $\mathcal{F}(h)|_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{F}(h_0)|_B$ e ainda que,

(1) O segmento B_3 é levado por H em uma seção transversal à folheação $\mathcal{F}(h)$ no complemento de $H(1, 1)$. Tal seção é chamada de *fronteira compacta de* $\mathcal{A}$.

(2) Os segmentos B_1 e B_2 são enviados em meias trajetórias de $\mathcal{F}(h)$ chamadas de *fronteiras não compactas de* $\mathcal{A}$.

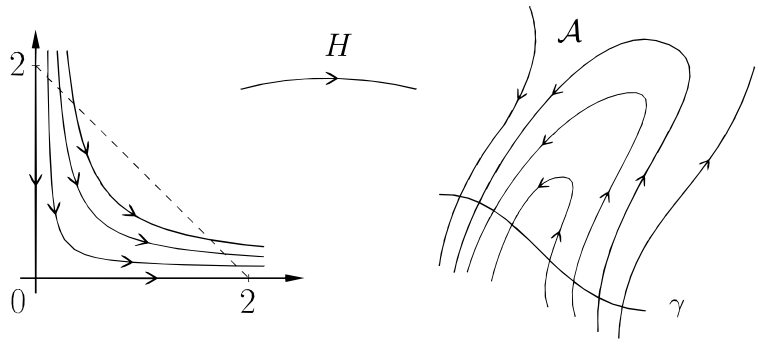


Figura 2.4: Uma meia componente de Reeb.

Proposição 2.1.4. *Seja* $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *uma aplicação diferenciável tal que* $0 \notin \operatorname{Spec}(X)$. *Se* X *é não injetiva, então tanto* $\mathcal{F}(f)$ *quanto* $\mathcal{F}(g)$ *possuem meias componentes de Reeb.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{F}(f)$ não tenha uma mcR e que X não seja injetiva. Sem perda de generalidade, suponha que existem pontos $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, distintos, tais que $X(p_1) = X(p_2) = 0$. Seja α_i, para $i \in \{1, 2\}$, a trajetória de $\mathcal{F}(f)$ passando por p_i. Como $g|_{\alpha_i}$ é monótona e $g(p_1) = g(p_2) = 0$ temos que $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset$. Ver figura 2.5.

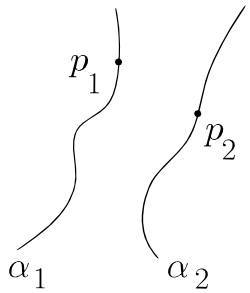


Figura 2.5: As duas folhas α_1 e α_2 de $\mathcal{F}(f)$.

De fato, se $\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \emptyset$ então $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Mas isso violaria a monotonicidade estrita de $g|_\alpha$ uma vez que $p_1, p_2 \in \alpha$, $g(p_1) = g(p_2)$ e $p_1 \neq p_2$.

Seja $\Omega(p_1, p_2)$ o conjunto de arcos compactos de $\mathbb{R}^2$ cujos pontos extremos são p_1 e p_2 e que sejam transversais a $\mathcal{F}(f)$ em $\{p_1, p_2\}$.

Seja $\Gamma \in \Omega(p_1, p_2)$ um elemento que minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$.

Vamos mostrar que,

Afirmação 2.1. $\alpha_i \cap \Gamma = \{p_i\}$, *com* $i \in \{1, 2\}$.

De fato, se fosse assumido, por contradição, que $\alpha_1 \cap \Gamma$ contém $\{p_1\}$ propriamente, seria possível encontrar $q \in \Gamma \setminus \{p_1, p_2\}$ e um subintervalo fechado α de α_1, com extremos p_1 e q, tal que $\alpha \cap \Gamma = \{p_1, q\}$. Pode-se assumir que Γ é transversal a α em q.

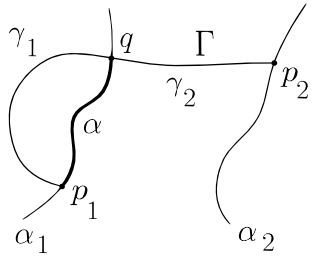


Figura 2.6: A curva Γ intersectando α_1.

Seja γ_1 a componente conexa de $\Gamma \setminus \{q\}$ que contém p_1 e γ_2 a componente conexa de $\Gamma \setminus \{q\}$ que contém p_2. Assim, $\alpha \cup \gamma_2$ é um arco conectando p_1 e p_2. Note que γ_1 tem algum ponto de tangência com $\mathcal{F}(f)$.

Para se convencer disso, basta observar que, como γ_1 é transversal a α_1 em $\{p_1\}$, existe algum ponto q_0 de γ_1 onde f é diferente de $f(p_1) = f(q)$. Suponhamos que $f(q_0) > f(q)$, pois, caso contrário, o argumento seria análogo. Sendo assim, $f|_{\gamma_1 \cup \{q\}}$ teria um ponto de máximo no interior de γ_1. Neste ponto, γ_1 seria tangente à $\mathcal{F}(f)$.

Agora, considere a seguinte afirmação.

Afirmação 2.2. *É possível aproximar $\alpha \cup \gamma_2$ por um arco, de forma que tal arco possua menos tangências com $\mathcal{F}(f)$ do que Γ.*

De fato como foi assumido que Γ é transversal a α em p_1 e em q, pode-se assumir que, numa vizinhança de tais pontos, Γ está sobre um arco de trajetória de $\mathcal{F}(g)$.

Assim, é possível tomar um retângulo formado por estes dois pequenos arcos de trajetória de $\mathcal{F}(g)$ que passam por p_1 e q e por dois arcos de trajetória de X paralelos a α, com extremos nos pequenos arcos de $\mathcal{F}(g)$. Ver figura 2.7.

A imagem deste retângulo por X é um retângulo, no sentido estrito da palavra, ou seja, com os lados compostos por segmentos paralelos que se encontram perfazendo ângulos de $90°$, como na figura 2.7.

Agora, escolhendo um ponto sobre o lado que contém q, pode-se construir um segmento com extremos em p_1 e neste ponto, de tal forma que a pré-imagem deste novo segmento α' seja transversal às folhas paralelas a α. Assim, a curva composta por α unida com uma porção adequada de γ_2, consiste em uma aproximação de $\alpha \cup \gamma_2$ que possui menos tangências com $\mathcal{F}(f)$.

A Afirmação 2.2 viola a definição de Γ. Com isso prova-se a Afirmação 2.1, para $i = 1$. Para $i = 2$, a prova é essencialmente a mesma.

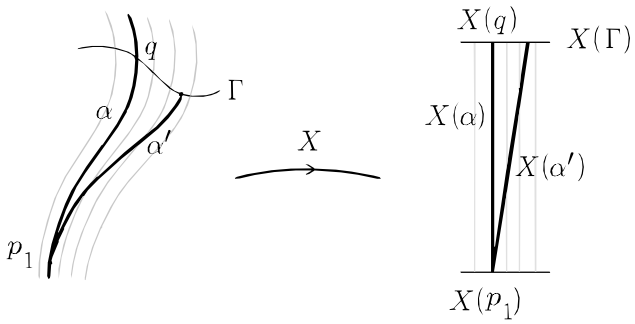


Figura 2.7: Aproximação de α por uma curva sem tangências com $\mathcal{F}(f)$.

Como $f(p_1) = f(p_2) = 0$, $\mathcal{F}(f)$ é tangente a Γ em algum ponto $q \notin \{p_1, p_2\}$. Usando o fato de que Γ minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$, pode-se considerar que todas estas tangências sejam genéricas.

De fato, se Γ possui alguma tangência não genérica e minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$, como na figura 2.8, pode-se deformar Γ de maneira a se obter uma outra curva $\tilde{\Gamma}$ que também minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$ mas que, porém, possui todas as tangências genéricas.

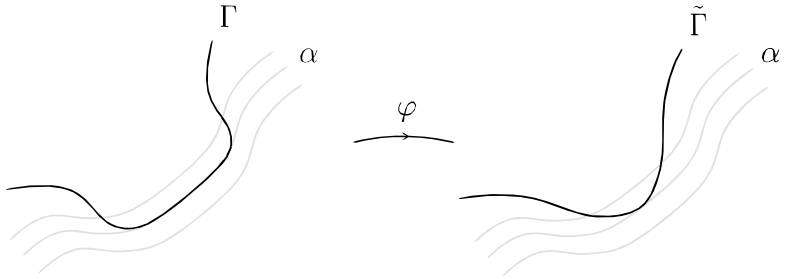


Figura 2.8: Tangência não-genérica se tornando genérica

Olhando as trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ em torno de q, figura 2.9, é possível ver que existem subintervalos fechados $[p, q]$, $[q, T(p)]$ de Γ, com $[p, q] \cap [q, T(p)] = \{q\}$ e um homeomorfismo $T : [p, q] \to [q, T(p)]$ tal que,

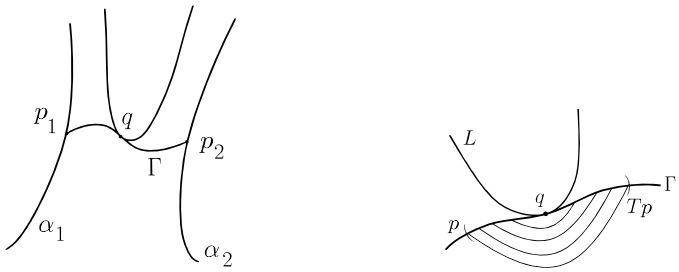


Figura 2.9: Trajetórias em uma vizinhança de q

(c1) $T(q) = q$ e, para todo $x \in (p, q)$, existe um arco de trajetória $[x, T(x)]_f$ de $\mathcal{F}(f)$, começando em x, terminando em $T(x)$ e intersectando Γ exatamente e transversalmente em $\{x, T(x)\}$.

(c2) A família $\{[x, T(x)]_f; x \in (p, q)\}$ depende continuamente de x e tende a $\{q\}$ quando $x \to q$.

A partir de agora, suponha que [p, q] seja maximal com respeito a (c1) e (c2).

Afirmação 2.3. $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \emptyset$.

É claro que se $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \{p, T(p)\}$ então α_1 e α_2 são fronteiras não compactas de uma meia componente de Reeb da qual Γ é a fronteira compacta.

Assim, basta mostrar que não podemos ter $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \{p\}$, ou ainda, sem perda de generalidade, mostrar que não se pode ter $p = p_1$.

Suponha, por absurdo, que $p = p_1$.

Considere a folha $\alpha_3 \subset \mathcal{F}(f)$ que contém o ponto $T(p)$. Como $f(p_1) = f(p) = f(T(p))$, tem-se, da Afirmação 2.1, que $\alpha_3 \cap \alpha_2 = \emptyset$ e $\alpha_3 \cap \alpha_1 = \emptyset$.

Vejamos, agora, que α_3, α_1 e uma porção dequada de Γ, compõem fronteiras de uma meia componente de Reeb.

É claro que $\alpha_3 \cap (p, q) = \emptyset$ (observe a figura 2.9). Também, se $\alpha_3 \cap [q, T(p)) \neq \emptyset$ então existiria alguma folha de $\mathcal{F}(f)$ tangente a Γ em $(q, T(p))$ o que viola a definição do intervalo $[p, q]$.

Assim, tem-se que α_3 e α_1 são as fronteiras não compactas de uma meia componente de Reeb cuja fronteira compacta é a porção da curva Γ compreendida entre as mesmas. O que é um absurdo.

Fica provada assim a Afirmação 2.3.

Afirmação 2.4. *Não existe arco de trajetória $[p, T(p)]_f$ de $\mathcal{F}(f)$ conectando p e $T(p)$ tal que a família $\{[x, T(x)]_f; x \in (p, q]\}$ aproxima continuamente de $[p, T(p)]_f$ quando $x \to p$.*

De fato, suponha que a Afirmação seja falsa. Então, usando o fato de $[p, q]$ ser maximal, conclui-se que $[p, T(p)]_f$ é tangente a Γ pelo menos em p ou $T(p)$. Pois, caso o arco $[p, T(p)]_f$ fosse transversal a Γ nos dois extremos existiriam vizinhanças destes pontos tais que o domínio e o contradomínio de T pudessem ser estendidos, violando a maximalidade do intervalo $[p, q]$.

Neste ponto, é possível aproximar a curva que é união de $[p, T(p)]_f$ com $\Gamma \backslash \{(p, q] \cup [q, T(p))\}$ por uma curva $\Gamma_1 \in \Omega(p_1, p_2)$ que tem menos tangências com $\mathcal{F}(f)$ que Γ. Para isso, observe na figura 2.10, que a tangência em q é eliminada substituindo o trecho de Γ entre p e Tp pela curva em destaque que não possui tangências com $\mathcal{F}(f)$. Assim podemos tomar Γ_1 como a união da curva em destaque com $\Gamma \setminus [\tilde{p}, \tilde{q}]$.

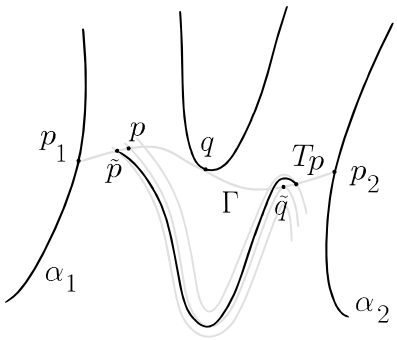


Figura 2.10: Um arco próximo a $[p, T(p)]_f$ que não possui tangências com $\mathcal{F}(f)$.

Portanto, o subintervalo $[p, q] \cup [q, T(p)]$ é a fronteira compacta de uma *mcR* de $\mathcal{F}(f)$ constituída de duas trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ começando em p e $T(p)$, respectivamente, juntamente com a união dos arcos $[x, T(x)]_f$ com $x \in (p, q]$. Este absurdo completa a prova. $\square$

Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, considere a rotação linear,

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Para prosseguir se faz necessária a seguinte Proposição,

Proposição 2.1.5. *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável não injetiva tal que $0 \notin \operatorname{Spec}(X)$. Seja $\mathcal{A}$ uma mcR de $\mathcal{F}(f)$ e seja*

$$(f_\theta, g_\theta) = \mathcal{R}_\theta \circ X \circ \mathcal{R}_{-\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Se $\Pi(\mathcal{A})$ é limitada, onde $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $\Pi(x, y) = x$, então existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\theta \in (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$, $\mathcal{F}(f_\theta)$ tem uma mcR, $\mathcal{A}_\theta$, tal que $\Pi(\mathcal{A}_\theta)$ é um intervalo infinito.

Demonstração. Vejamos, primeiro, a seguinte Afirmação,

Afirmação 2.5. *Seja $\theta \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $m \in \mathbb{Z}$, $\theta \neq m\pi/2$. Então $\mathcal{F}(f_\theta)$ é transversal a $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{F}(f))$.*

De fato, se $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ é uma curva injetiva contida num folha de $\mathcal{F}(f)$, então

$$f_\theta(\mathcal{R}_\theta \circ \alpha(t)) = \cos(\theta)\, f(\alpha(t)) - \operatorname{sen}(\theta)\, g(\alpha(t))$$

que é estritamente monótona pois $f(\alpha(t))$ é uma função constante, $g(\alpha(t))$ é estritamente monótona e $\operatorname{sen}(\theta) \neq 0$.

Tal conclusão implica que $\mathcal{R}_\theta(\alpha(t))$ é transversal aos níveis de f_θ e, portanto, a $\mathcal{F}(f_\theta)$.

Isso prova a Afirmação 2.5.

Um procedimento análogo nos permite mostrar que $\mathcal{F}(g_\theta)$ é transversal a $R_\theta(\mathcal{F}(g))$.

Sem perda de generalidade, pode-se assumir que, próximo a seus pontos extremos, a fronteira compacta de $\mathcal{A}$ é formada por arcos de $\mathcal{F}(g)$. Deste modo, existe $a > 0$ e uma curva contínua e injetiva $\gamma : (-a, 1+a) \to \mathcal{A}$, tal que,

(b1) $\gamma[0,1]$ é uma fronteira compacta de $\mathcal{A}$.

(b2) $\gamma|_{(-a,a)}$ e $\gamma|_{(1-a,1+a)}$ estão contidas em folhas de $\mathcal{F}(g)$.

(b3) Para algum $a \in \mathbb{R}$ e algum $\delta \in (0,a)$, existe uma função injetiva que reverte orientação,

$$\varphi_0 : [-\delta, \delta] \to (1-a, 1+a),$$

com $\varphi_0(0) = 1$, tal que $f(\gamma(s)) = f(\gamma(\varphi_0(s)))$, portanto, se $s \in [0,\delta)$ então $\varphi_0(s) \in (1-a, 1]$ e existe um arco de trajetória $T_0(s) \subset \mathcal{A}$, de $\mathcal{F}(f)$, conectando $\gamma(s)$ com $\gamma(\varphi_0(s))$.

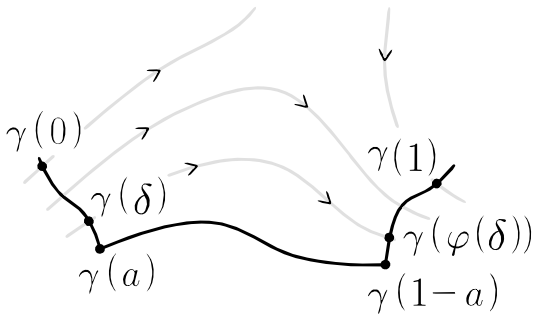


Figura 2.11: A função φ preserva os níveis de f.

De maneira similar a (b1), (b2) e (b3), pode-se construir agora uma família de arcos de trajetória de $\mathcal{F}(f_\theta)$ intersectando $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, começando e terminando nos pontos de $\mathcal{R}_\theta \circ \gamma((-a, 1+a))$.

Se $\varepsilon > 0$ é pequeno suficiente, então, para cada $\theta \in \mathbb{R}$ com $|\theta| < \varepsilon$, existe uma função contínua, injetiva e que reverte orientação,

$$\varphi_\theta : [-\delta, \delta] \to (1-a, 1+a)$$

e um número real $\sigma_\theta \in [-\delta, \delta/2)$ tais que,

(c1) $f_\theta(\mathcal{R}_\theta(\gamma(s))) = f_\theta(\mathcal{R}_\theta(\gamma(\varphi_\theta(s))))$, para todo $s \in [-\delta, \delta]$.

Em outras palavras, a aplicação φ_θ leva pontos de $\mathcal{R}_\theta\big(\gamma([-\delta,\delta])\big)$ em pontos de $\mathcal{R}_\theta\big(\gamma([1-a, 1+a])\big)$ preservando os níveis de f_θ.

(c2) Para todo $s \in (\sigma_\theta, \delta/2]$, existe um arco de trajetória $T_\theta(s)$ de $\mathcal{F}(f_\theta)$ o qual toca $\mathcal{R}_\theta\big(\gamma([-\delta, 1+a))\big)$ exatamente nos seus pontos extremos, $\mathcal{R}_\theta(\gamma(s))$ e $\mathcal{R}_\theta(\gamma(\varphi_\theta(s)))$.

Note que, após a perturbação pela rotação, alguns arcos de trajetória podem não estar bem definidos para s próximo de zero, por isso é introduzido o número real σ_θ, para restringir o domínio de φ_θ.

(c3) $T_\theta(\delta/2) \subset \mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$ e σ_θ é ínfimo do conjunto dos $\sigma \in [-\delta, \delta/2]$ para os quais os arcos de família $\{T_\theta(s); \sigma < s \leq \delta/2\}$ estejam bem definidos e dependam continuamente de s.

Note que, se θ é suficientemente pequeno, o arco $T_\theta(\delta/2)$ ainda permanece dentro da região delimitada por $T(\xi), T(\delta)$ e $R_\theta \circ \gamma$, onde $\xi > 0$ é tomado menor que $\delta/2$, figura 2.12. Assim, o conjunto dos arcos da família acima é não vazio e o ínfimo σ_θ fica bem definido.

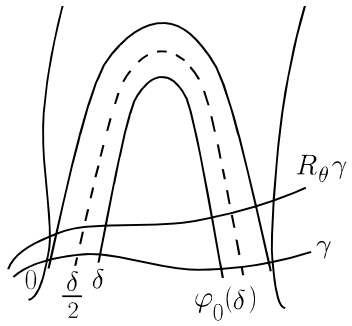


Figura 2.12: O arco $T(\delta/2)$.

(c4) $\varphi_\theta(-\delta) > 1$.

A família $\{T_\theta(s)\}$ não pode ser estendida continuamente a $s = -\delta$ pois $\varphi_\theta(-\delta) > 1$ e, como pode-se observar, caso tal arco existisse, ele deveria possuir uma tangência com $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{F}(f))$ num ponto de $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, violando a Afirmação 2.5.

Assim, o conjunto,

$$\overline{\bigcup_{\sigma_\theta < s \leq \frac{\delta}{2}} T_\theta(s)}$$

contém uma mcR, $\mathcal{A}_\theta$, de $\mathcal{F}(f_\theta)$.

Portanto podemos notar que uma das fronteiras não compactas de $\mathcal{A}_\theta$ devem estar contidas em $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$. Isso implica que $\Pi(\mathcal{A}_\theta)$ é um intervalo de comprimento infinito.

De fato, se nenhuma das fronteiras compactas de $\mathcal{A}_\theta$ estivessem contidas em $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, alguma folha de $\mathcal{F}(f_\theta)$ possuiria tangência com alguma folha de $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, figura 2.13, o que violaria a Afirmação 2.5. □

Vai-se omitir neste trabalho a prova do seguinte Lema, que será necessário para o que será feito mais adiante, porque fugiria do contexto do trabalho. Sua prova pode ser encontrada em [21].

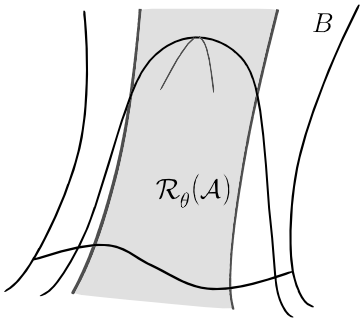


Figura 2.13: Caso ambas fronteiras compactas de $\mathcal{A}_\theta$ estivessem fora de $\mathcal{R}_\theta\mathcal{A}$.

Lema 2.1.6. *Seja I um intervalo limitado de $\mathbb{R}$ e $H : I \to \mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada. Se A denota o conjunto dos $x \in I$ tais que,*

$$\lim_{h\to 0} \frac{|H(x+h) - H(x)|}{|h|} = \infty,$$

então, A tem medida de Lebesgue nula.

Lema 2.1.7. *Toda função não-decrescente, ϕ, num intervalo $[a, b]$ é derivável em quase todo ponto. Se ϕ' denota sua derivada, então ϕ' é mensurável,*

$$\int_a^b |\phi'(x)|\, dx < \infty,$$

e,

$$\int_a^b \phi'(x)\, dx \leq \phi(b) - \phi(a).$$

A demonstração deste Lema foge do escopo deste trabalho e pode ser encontrada na referencia [5], na página 154.

Prova do Teorema 2.1.1 Suponha, por contradição, que $X = (f, g)$ não seja injetiva sob as hipóteses enunciadas. Pela Proposição 2.1.4, $\mathcal{F}(f)$ tem uma *mcR* $\mathcal{A}$.

Seja $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a projeção ortogonal na primeira coordenada. Pode ser assumido que $\Pi(\mathcal{A})$ seja um intervalo ilimitado. Caso contrário, pela Proposição 2.1.5. podemos compor X com uma rotação rígida.

Para simplificar, vamos supor que $[b, \infty) \subset \Pi(\mathcal{A})$.

Assim, se $a > b$ é suficientemente grande:

(a) Para qualquer $x \geq a$, a reta vertical $\Pi^{-1}(x)$ intersecta exatamente uma trajetória $\alpha_x \subset \mathcal{A}$ tal que $\Pi(\alpha_x) \cap (x, \infty) = \emptyset$, figura 2.14. Em outras palavras, x é o máximo do conjunto $\Pi(\alpha_x)$.

Como α_x é uma curva contínua, segue que,

(b) Se $x \geq a$, $\alpha_x \cap \Pi^{-1}(x)$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{A}$.

Seja $H : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por,

$$H(x) = \sup \left\{ y \in \mathbb{R}; (x, y) \in \alpha_x \cap \Pi^{-1}(x) \right\}.$$

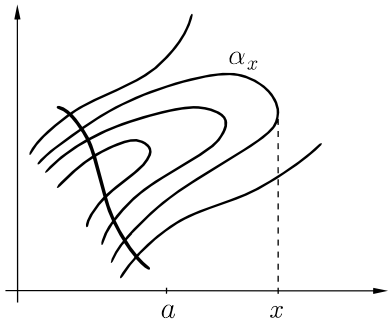


Figura 2.14: Para cada $x > a$ associa-se uma folha α_x

Como $\mathcal{F}(f)$ é uma folheação, pode-se obter que,
(c) $\varphi(x) = f(x, H(x))$ é uma função contínua estritamente monótona a qual, quando restrita a um intervalo $(a, b]$, é limitada.

Para se convercer de que φ é monótona, simplesmente observe que, caso contrário deveriam existir folhas dentro de $\mathcal{A}$ que pertencessem ao mesmo nível de f. Decorreria a existência de uma folha composta por mínimos ou máximos locais, sob a qual $\nabla f(x) = 0$ tornando $\det JF(x) = 0$ para todo x nesta folha.

Assim, pelo Lema 2.1.7, φ é diferenciável quase sempre.

Para ver que φ é uma função contínua num ponto x_0, tome $\varepsilon > 0$ e vejamos que existe um $\delta > 0$ de forma que a imagem de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esteja contida em $(\varphi(x_0) - \varepsilon, \varphi(x_0) + \varepsilon)$.

Pela continuidade de f, existe um $\xi > 0$ de tal forma que, qualquer folha cuja distância de α_{x_0}, dentro da meia componente de Reeb, seja menor que ξ, pertence a um nível entre $f(\alpha_{x_0}) - \varepsilon$ e $f(\alpha_{x_0}) + \varepsilon$.

Em seguida, tome duas folhas, α_y e α_z, que estejam inteiramente contidas nesta vizinhaça, diferentes de α_{x_0}.

Agora, tomando $\delta = min\{|x_0 - y|, |x_0 - z|\}$, tem-se que, qualquer folha α_ζ com $\zeta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ estará compreendida entre as folhas α_y e α_z e portanto $\varphi(\zeta) = f(\zeta, H(\zeta))$ estará em $(\varphi(x_0) - \varepsilon, \varphi(x_0) + \varepsilon)$.

Afirmação 2.6. *H é semicontínua superiormente. Em particular, H é uma função mensurável.*

De fato, suponha, por contradição, que H não seja semicontínua superiormente em $x_0 > a$. Como H restrita a $(a, x_0 + 1)$ é limitada, existe $c \in \mathbb{R}$ e uma seqüência $x_n \to x_0$ tal que $H(x_0) < c$ e $H(x_n) \to c$. No entanto, φ é contínua.

Decorre que,

$$f(x_0, c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, H(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0) = f(x_0, H(x_0)).$$

Mas $H(x_0) = \sup\{y; (x, y) \in \alpha_x\}$. Então, $(x_0, c) \notin \alpha_x \cap \Pi^{-1}(x)$. Sendo assim, o ponto (x_0, c) deve pertencer a outra folha β de $\mathcal{F}(f)$ tal que $f(\beta) = f(\alpha_x)$, mas isso contradiz o fato de φ ser monótona.

Tal contradição prova a Afirmação 2.6.

Em seguida, será aplicado o Lema 2.1.6 à função H. Para tanto, deve-se observar que o intervalo (a, ∞) é união enumerável de intervalos limitados. Em cada um destes intervalos pode ser aplicado o Lema 2.1.6. Finalmente, uma vez que, união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula, obtem-se a mesma conclusão para H em todo seu domínio.

Pela Afirmação 2.6 e pelo Lema 2.1.6, se $a > 0$ é grande suficiente, existe um subconjunto $M \subset (a, \infty)$ de forma que seu complementar tenha medida nula, tal que,
(e) Se $x \in M$, então φ é diferenciável em x e

$$\liminf_{h \to 0} \frac{|H(x+h) - H(x)|}{|h|} < \infty.$$

Para continuar, vai-se considerar o caso onde φ é estritamente crescente. Neste caso afirma-se que,

Afirmação 2.7. *Se $x \in M$, então $\varphi'(x) = f_x(x, H(x)) \geq \varepsilon$.*

De fato, se $x \in M$, existe uma seqüência $h_n \to 0$ tal que,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k_n}{h_n} = \sigma \in \mathbb{R},$$

onde $k_n = H(x+h_n) - H(x)$. Assim, pela estrutura das curvas de nível de $f|_{\mathcal{A}}$ e pela hipótese de que φ seja estritamente crescente,

$$f(x, H(x)) = \inf \left\{ f(x, y) \, ; \, y \in \Pi^{-1}(x) \cap \mathcal{A} \right\}.$$

Isto implica que, $f_y(x, H(x)) = 0$, ou seja, o gradiente de f no ponto $(x, H(x))$ é paralelo ao eixo x. Segue assim, como f é diferenciável em $(x, H(x))$, que existem funções ε_1 e ε_2, a valores reais, definidas numa vizinhança de $(0, 0)$, tais que,

$$f(x + h_n, H(x) + k_n) = f(x, H(x)) + f_x(x, H(x))h_n + \varepsilon_1(h_n, k_n)h_n + \varepsilon_2(h_n, k_n)k_n,$$

e com,

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_1(h_n, k_n) = \lim_{n \to \infty} \varepsilon_2(h_n, k_n) = 0.$$

Portanto, para n grande suficiente,

$$\frac{\varphi(x + h_n) - \varphi(x)}{h_n} = f_x(x, H(x)) + \varepsilon_1(h_n, k_h) + \varepsilon_2(h_n, k_n)\frac{k_n}{h_n},$$

o que implica que,

$$\varphi'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(x + h_n) - \varphi(x)}{h_n} = f_x(x, H(x)).$$

Note que a escolha de uma seqüência particular k_n/h_n não é restritiva pois φ é diferenciável em x.

Segue, portanto, que

$$DX(x, H(x)) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ g_x(x, H(x)) & g_y(x, H(x)) \end{pmatrix},$$

isto é, $\varphi'(x)$ é um autovalor de $DX(x, H(x))$.

Pela hipótese

$$\text{Spec}\,(X) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset,$$

do fato de φ ser estritamente crescente, tem-se que $\varphi'(x) \geq \varepsilon$ e a Afirmação 2.7 fica provada.

Como $f|_{\mathcal{A}}$ é limitada, então φ é limitada. Assim existe uma constante $K > 0$, tal que , para todo $x > a$, $\varphi(x) - \varphi(a) < K$.

Tome $c > a$ de forma que $(c - a)\varepsilon > K$.

Agora, usando o Lema 2.1.7, tem-se que,

$$K > \varphi(c) - \varphi(a) \geq \int_a^c \varphi'(x)\, dx \geq \int_a^c \varepsilon\, dx = (c - a)\varepsilon > K.$$

Esta contradição prova o Teorema. □

2.2 Resultado de Injetividade

Esta seção se dedica à prova do seguinte resultado.

Teorema 2.2.1. *Seja $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Se, para algum $\varepsilon > 0$, $\text{Spec}\,(X) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$, então X é injetiva.*

Para a prova deste Teorema, é necessário o seguinte Lema,

Lema 2.2.2. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que $\det DF(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dado $t \in \mathbb{R}$, considere $F_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a aplicação definida por $F_t(x) = F(x) - tx$. Se existir uma seqüência $\{t_m\}$ de números reais convergindo a zero, tal que toda as aplicações $F_{t_m} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sejam injetivas, então F é injetiva.*

Demonstração. Escolha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $F(x_1) = F(x_2) = y$. Vejamos que, neste caso, $x_1 = x_2$. Pelo Teorema da Aplicação Inversa, pode-se encontrar vizinhanças U_1, U_2 e V, respectivamente de x_1, x_2 e y, tais que, para $i \in \{1, 2\}$, $F|_{U_i} : U_i \to V$ seja um homeomorfismo e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Se m é grande o suficiente, então $F_{t_m}(U_1) \cap F_{t_m}(U_2)$ conterá uma vizinhança, W, de y. Deste modo, para todo $\omega \in W$, $\#F_{t_m}^{-1}(w) \geq 2$. Esta contradição com as hipóteses prova o Lema. □

Observação. Mesmo no caso em que $n = 1$ e as aplicações no Lema 2.2.2 são difeomorfismos suaves, não se pode concluir que F seja um difeomorfismo. No entanto, se $F : \mathbb{R} \to (0, 1)$ é um difeomorfismo suave que reverte orientação, então, para todo $t > 0$, a aplicação $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, será um difeomorfismo global que reverte orientação.

Prova do Teorema 2.2.1 Afirma-se que, para todo $t \in (0, \varepsilon)$, a aplicação $F_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $F_t(x) = F(x) - tx$ é injetiva.

De fato, como $DF_t(x) = DF(x) - tI$, onde I denota a aplicação identidade em $\mathbb{R}^2$, obtem-se que, se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < a < min\{t, \varepsilon - t\}$, então $\mathrm{Spec}\,(F_t) \cap (-a, a) = \emptyset$. Assim, o resultado segue diretamente do Lema 2.2.2 e do Teorema 2.1.1 $\square$

2.3 Estabilidade Assintótica Global

Sob as fortes hipóteses de que X seja uma aplicação injetiva de classe $\mathcal{C}^1$, o Teorema abaixo foi provado por Olech em 1963 (ver Teorema 6.2.3).

A menos do Teorema 2.2.1 e de alguns resultados da teoria de campos de vetores contínuos, as principais idéias para se provar o Teorema a seguir são essencialmente as mesmas usadas por Olech.

Teorema 2.3.1. *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de vetores diferenciável tal que $X(0) = 0$ e $\mathrm{Spec}\,(X) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\,(z) < 0\}$. Então, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe uma única trajetória positiva começando em p. Além disso o conjunto ω-limite de p é igual a $\{0\}$.*

Seja $X^* = (-g, f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Note que X^* é ortogonal a $X = (f, g)$. No que seque, a mesma notação usual para intervalos de $\mathbb{R}$ será usada para arcos de trajetória orientados de X, por exemplo, será denotado por $[p, q)$ o arco de trajetória de X que conecta os pontos p e q, incluindo o ponto p, mas não o ponto q.

Similarmente será usado $[p, q]^*$, $(p, q]^*$, etc, para denotar arcos de trajetórias de X^* conectando os pontos p e q.

A orientação de tais arcos são induzidas pelos campos de vetores correspondentes.

Para qualquer arco de trajetória $[p, q]^*$, é definida a função $L(p, q)$ por,

$$L(p, q) = \left| \int_{[p,q]^*} \|X\| \, ds \right|,$$

onde ds denota o elemento *comprimento de arco*.

Lema 2.3.2. *Seja $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de vetores tal que*

$$X(0) = 0 \quad e \quad \mathrm{Spec}\,(X) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\,(z) < 0\}.$$

Seja A um retângulo compacto cujas faces são constituídas dos seguintes arcos de trajetórias (orientados),

$$[p_1, q_1], [p_2, q_2] \ \ de \ \ X \ \ e \ \ [p_1, p_2]^*, [q_1, q_2]^* \ \ de \ \ X^*.$$

Então,

$$L(q_1, q_2) - L(p_1, p_2) < 0$$

Demonstração. Como $\mathrm{Spec}\,(X) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\,(z) < 0\}$, tem-se que os autovalores de $DX(x, y)$ têm parte real negativa, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, se $\lambda_1(x, y)$ e $\lambda_2(x, y)$ são os autovalores de $DX(x, y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{Tr}(DX(x, y)) = \lambda_1(x, y) + \lambda_2(x, y),$$

é um número real negativo para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

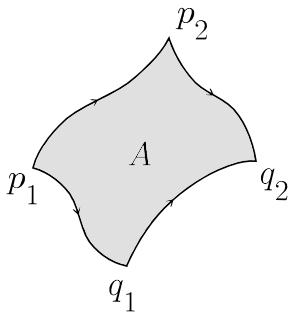
Assim, uma vez que $\mathrm{Tr}(DX(x, y))$ é Lebesgue integrável em A, tem-se,

$$0 > \int_A \mathrm{Tr}(DX(x, y))dx \wedge dy = \int_A \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\, dx \wedge dy.$$

Aplicando o Teorema de Green para X^*, tem-se,

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\, dx \wedge dy = \int_{\partial A} X \cdot n\, ds,$$

onde ∂A denota a fronteira do retângulo compacto A orientada positivamente, sem os vértices, e n denota o vetor unitário normal a ∂A para cada ponto da fronteira (sem os vértices).



Escrevendo,

$$\partial A = (p_1, q_1) \cup (q_1, q_2)^* \cup (q_2, p_2) \cup (p_2, p_1)^*,$$

Vê-se que,

$$\int_{\partial A} X \cdot n\, ds = \int_{(p_1,q_1)} X \cdot n\, ds + \int_{(q_1,q_2)^*} X \cdot n\, ds + \int_{(q_2,p_2)} X \cdot n\, ds + \int_{(p_2,p_1)^*} X \cdot n\, ds.$$

Porém, como as faces (p_1, q_1) e (q_2, p_2) são arcos de trajetórias de X, $X \cdot n = 0$ para todo ponto nestes arcos.

Assim,

$$\int_{\partial A} X \cdot n\, ds = \int_{(q_1,q_2)^*} X \cdot n\, ds + \int_{(p_2,p_1)^*} X \cdot n\, ds.$$

Da mesma forma, como $(p_2, p_1)^*$ e $(q_1, q_2)^*$ são arcos de trajetórias de X^*, para todo ponto do arco $(q_1, q_2)^*$, $X \cdot n = \|X\|$, pois X e n têm a mesma direção e sentido. Analogamente, para todo ponto de $(p_2, p_1)^*$, $X \cdot n = -\|X\|$, pois X e n têm a mesma direção e sentidos opostos.

Assim,

$$\int_{(q_1,q_2)^*} X \cdot n\, ds + \int_{(p_2,p_1)^*} X \cdot n\, ds = \int_{(q_1,q_2)^*} \|X\|\, ds - \int_{(p_2,p_1)^*} \|X\|\, ds.$$

Como, ambas integrais acima resultam positivas,

$$\begin{aligned}
\int_{(q_1,q_2)^*} \|X\|\, ds - \int_{(p_2,p_1)^*} \|X\|\, ds &= \left| \int_{(q_1,q_2)^*} \|X\|\, ds \right| - \left| \int_{(p_2,p_1)^*} \|X\|\, ds \right| \\
&= L(q_1, q_2) - L(p_2, p_1) \\
&= L(q_1, q_2) - L(p_1, p_2).
\end{aligned}$$

Isto prova o Lema. □

Lema 2.3.3. *Seja $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação com*

$$X(0) = 0 \quad e \quad \mathrm{Spec}\,(X) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\,(z) < 0\}.$$

Então, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe uma única semi-trajetória positiva de X começando em p.

Demonstração. Suponha, por contradição, que existam duas semi-trajetórias positivas γ_p^+ e σ_p^+, começando em p. Como $X(p) \neq 0$, podemos tomar o triângulo (que consiste de um retângulo degenerado) cujas faces são constituídas dos dois arcos de trajetórias de X, $[p, q_1] \subset \sigma_p^+$ e $[p, q_2] \subset \gamma_p^+$, e um arco de trajetória de X^*, $[q_1, q_2]^*$, figura 2.15.

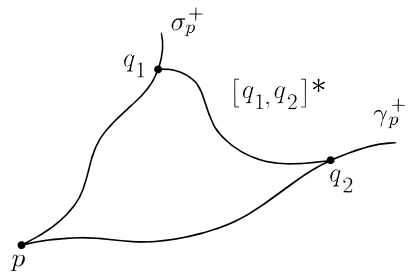


Figura 2.15: As duas supostas semi-trajetórias positivas de p.

Aplicando o Lema 2.3.2, temos que,

$$L(q_1, q_2) < 0,$$

o que é um absurdo. Tal contradição prova o Lema. □

No próximo Lema é necessário algum conhecimento das características dos fluxos que persistem quando a unicidade falha.

Dados os arcos (p, q), $(p, q]$, etc, de X denota-se seus comprimentos por $\ell(p, q)$. De forma semelhante, é denotado por $\ell(p, q)^*$, o comprimento dos arcos $(p, q)^*$, $[p, q)^*$, etc.

Lema 2.3.4. *Considere $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação tal que*

$$X(0) = 0 \quad e \quad \mathrm{Spec}\,(X) \subset \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\,(z) < 0\}.$$

Seja W uma vizinhança aberta, relativamente compacta, de $0 \in \mathbb{R}^2$ e $p_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{W}$. Se $\varepsilon > 0$ é pequeno suficiente, então existe $\delta > 0$ tal que, se

(h1) $[p_1, q_1]$ é um arco de trajetória de X com $[p_1, q_1] \cap \overline{W} = \emptyset$ e

(h2) $[p_1, p_2]^*$ é um arco de trajetória de X^* com $\ell(p_1, p_2)^* < \delta$,

então existem arcos de trajetória $[q_1, q_2]$ *de* X *e* $[p_2, q_2]^*$ *de* X^* *tais que,*

$$\ell(q_1, q_2)^* < \varepsilon$$

Ainda, se considerarmos em (h_2) *o arco* $[p_2, p_1]^*$*, então a conclusão permanece a mesma, garantindo a existência de um arco* $[q_2, q_1]^*$*de* X^* *com* $\ell(q_1, q_2)^* < \varepsilon$.

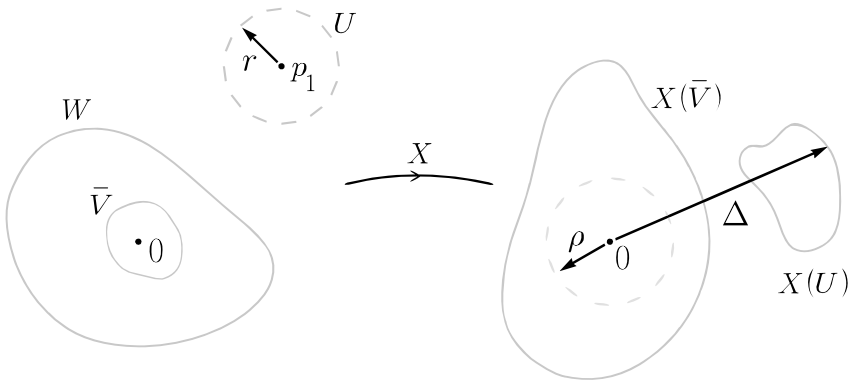
Demonstração. Seja $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus W$ um disco aberto, de raio r, centrado em p_1. Considere $V \subset \mathbb{R}^2$, uma vizinhança aberta da origem tal que, $V \subset \overline{V} \subset W$.

Uma vez que X é um difeomorfismo local, $X(0) = 0$ e X é injetiva pelo Teorema 2.2.1, existe $\rho > 0$ tal que, para todo $p \in \mathbb{R}^2 \setminus V$, $\|X(p)\| > \rho$.

Seja $\Delta = sup\{\|X(p)\|\,; p \in U\}$.

Tome $\varepsilon > 0$ menor que a distância entre V e $\mathbb{R}^2 \setminus W$ e tome

$$\delta = \min\left\{r, \frac{\varepsilon\,\rho}{\Delta}\right\}.$$



Vamos denotar por $R(p_1, q_1; q_2)$ o retângulo cujo bordo é formado pelos arcos $[p_1, q_1]$, $[p_1, p_2]^*$, $[p_1, q_2]$, $[q_1, q_2]^*$.

Observe que, se o retângulo $R(p_1, q_1; q_2)$ existe, então, segue de (h_1) que $[q_1, q_2]^* \cap V = \emptyset$, e assim,

$$\rho\,\ell(q_1, q_2)^* = \rho \int_{[q_1,q_2]^*} ds \leq \int_{[q_1,q_2]^*} \|X\|\; ds = L(q_1, q_2) < L(p_1, p_2)$$

mas, pela escolha de δ, decorre que $[p_1, p_2]^* \subset U$ e, assim,

$$L(p_1, p_2) = \int_{[p_1,p_2]^*} \|X\|\; ds \leq \Delta\,\ell(p_1, p_2)^*,$$

e assim,

$$\ell(q_1, q_2)^* \leq \frac{\Delta}{\rho}\ell(p_1, p_2)^*,$$

que, pelas hipóteses acima, implica que

$$\ell(q_1, q_2)^* \leq \frac{\Delta}{\rho}\ell(p_1, p_2)^* < \frac{\Delta}{\rho}\,\delta < \frac{\Delta}{\rho}\,\frac{\varepsilon\rho}{\Delta} = \varepsilon.$$

Seja m o supremo de todos os $x \in [p_1, q_1]$ tais que, qualquer que seja $y \in [p_1, x)$, $R(p_1, y; q_2)$ exista. Usando a Proposição 2.1 e o Corolário 2.2 de [20] juntamente com as observações acima, conclui-se que $m = q_1$. Isso prova o Lema. □

Observação. Note que, dado $p_1 \neq 0$, é possível obter uma vizinhança de p_1, de forma que, para todo p_2 nesta vizinhança, sua órbita permaneça próxima da órbita de p_1. Esta interpretação mais geométrica do Lema permite uma melhor compreensão das idéias envolvidas mais adiante.

Dado um ponto $p \in \mathbb{R}^2$ denotamos por $\omega(p)$ o seu conjunto ω-limite.

Seja W^s o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ os quais possuem o conjunto $\{0\}$ como ω-limite,

$$W^s = \left\{p \in \mathbb{R}^2; \omega(p) = \{0\}\right\}.$$

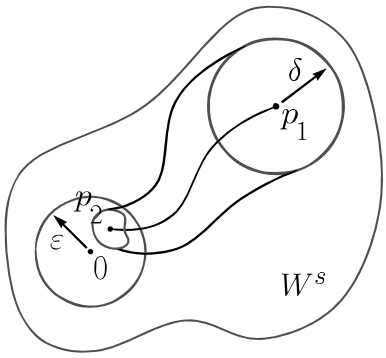
Das hipóteses, a origem é um poço local, pois os autovalores de $DX(0)$ têm parte real negativa. Então, segue do Lema acima que,

Corolário 2.3.5. *W^s é um aberto não vazio.*

Demonstração. Como a origem é um poço local, então existe uma vizinhança aberta $V \subset \mathbb{R}^2$ da origem tal que, para todo $p \in V$, $\omega(p) = \{0\}$.

Tome $\varepsilon > 0$, pequeno o suficiente, de tal forma que exista um disco aberto, $D_\varepsilon(0)$, centrado em 0 de raio ε contido em $V \subset W^s$.

Seja $p_1 \in W^s$, ou seja, $\omega(p_1) = \{0\}$ e tome p_2 um ponto da órbita de p_1 tal que $p_2 \in D_{\varepsilon/2}(0)$.



Pelo Lema 2.3.4 é possível conseguir uma vizinhança aberta U de p_1, tal que, se $q_1 \in U$ então existe um ponto q_2 na trajetória de q_1 tal que $q_2 \in D_\varepsilon(0)$.

Assim $\omega(q_1) = \{0\}$, e, portanto, $U \subset W^s$ o que implica que W^s é aberto. □

Lema 2.3.6. *O campo de vetores X não tem trajetórias fechadas, além disso, dado $p \in \mathbb{R}^2$, o conjunto ω-limite de p é $\{0\}$ ou $\emptyset$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo que o campo de vetores X possua uma órbita fechada γ.

Novamente aplicando o Teorema de Green para X^*, o observando que o campo é tangente à curva γ, tem-se,

$$0 = \int_\gamma X \cdot n \, ds = \int_A \mathrm{Tr}(DX(x,y)) dx \wedge dy,$$

onde A é a região interior à curva γ.

Porém, como $\mathrm{Tr}(DX(x,y)) < 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se um absurdo. Assim o campo de vetores X não possui órbitas fechadas.

Como, pela injetividade de X, o único ponto de equilíbrio do campo é a origem, segue do Teorema de Poincaré-Bendixon que o $\omega(p)$ só pode ser $\{0\}$ ou $\emptyset$, qualquer que seja $p \in \mathbb{R}^2$. $\square$

Prova do Teorema 2.3.1 usando o Corolário 2.3.5, o conjunto W^s é um aberto não vazio. Pelo Lema 2.3.4 pode ser obtido que $\mathbb{R}^2 \setminus W^s$ é um aberto.

De fato, dado p_1, tal que, $\omega(p_1) = \emptyset$, tome Δ e ρ como na demonstração do Lema 2.3.4. Considere dado um $M > 0$. Como a órbita de p_1 tende a infinito existe um ponto q_1 tal que $[p_1, q_1]$ esteja definido e que $|q_1| > M$.

Novamente da demonstração do Lema,

$$\ell(q_1, q_2)^* \leq \frac{\Delta}{\rho} \ell(p_1, p_2)^*,$$

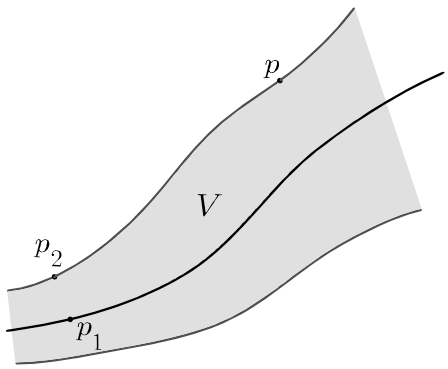
para todo p_2 tal que $\ell(p_1, p_2)^* < \delta$ e para algum q_2 na trajetória de p_2.

Como Δ e ρ não dependem de q_1, tem-se que o ponto q_2 não se distancia muito do ponto q_1, que pode ser tomado arbitrário sobre a órbita de p_1.

Assim, considere a vizinhança aberta de p_1 da forma,

$$V = \left\{ p \in \mathbb{R}^2 \, ; \, \exists \, p_2 \text{ na trajetória de } p \text{ com } \ell(p_1, p_2)^* < \delta \right\}.$$

Este conjunto é um aberto e, se $p \in V$ então tomando p_2 como na definição de V, tem-se que $\omega(p) = \emptyset$.



Pela conexidade de $\mathbb{R}^2$, pode-se concluir que $W^s = \mathbb{R}^2$. $\square$

Capítulo

3

O Problema de Markus-Yamabe Discreto

Neste capítulo, será feito o estudo do artigo **"The Discrete Markus-Yamabe Problem"** [2], sob a autoria de Anna Cima, Armengol Gasull e Francesc Mañosas.

3.1 Enunciado do Problema

Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação $\mathcal{C}^1$ e considere o sistemas de equações diferenciais,

$$\dot{x} = F(x). \tag{3.1}$$

Assuma que p é um ponto crítico de (3.1) , ou seja, $F(p) = 0$.
Considere $\phi(t, x)$ a solução de (3.1) que passa pelo ponto x em tempo $t = 0$.

Definição 3.1.1. Diz-se que p é um *atrator* do sistema dinâmico contínuo induzido por (3.1) quando,

(a) Existe um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ contendo p tal que, para algum tempo $t > 0$,

$$\phi(t, \overline{U}) \subsetneq U.$$

(b) $\displaystyle\bigcap_{t>0} \phi(t, U) = \{p\}$.

Além disso, se U puder ser tomado como sendo todo $\mathbb{R}^n$ então p será denominado um *atrator global* para o sistema dinâmico induzido por (3.1).

Observação 3.1.1. No artigo original os autores dão a seguinte definição para atrator global do sistema dinâmico contínuo induzido por (3.1).

"Diz-se que p é um atrator global *do sistema dinâmico contínuo induzido por (3.1) se, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t,x) = p,$$

onde $\phi(t,x)$ denota a solução de (3.1) com $\phi(0,x) = x$."

No entanto, tal definição captura certos objetos que não são adequados para serem denominados de atratores globais, veja exemplo 3.1.2 e figura 3.1. Porém deve-se ressaltar aqui que nenhuma parte subseqüente do artigo original fica incompatível com a nova definição não sendo requerida nenhuma adaptação.

Exemplo 3.1.2. Considere a seguinte função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \left(x^2(y-x) + y^5, y^2(y-2x)\right).$$

Então, dado qualquer ponto $z_0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, a solução de,

$$\dot{z} = F(z),$$

que começa em z_0 tende para a origem quando $t \to \infty$, porém a origem não é um atrator segundo a definição 3.1.1. O aspecto das soluções do sistema acima é mostrado na figura 3.1.

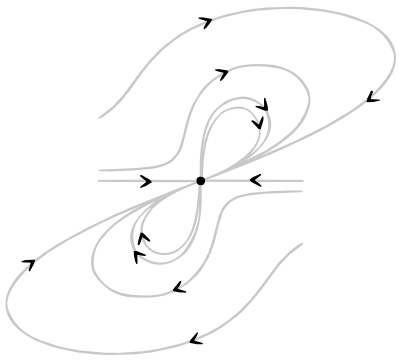


Figura 3.1: Retrato de fase do sistema induzido por F.

A seguinte conjectura foi enunciada explicitamente por Markus e Yamabe em 1960 [18].

Conjectura de Markus-Yamabe de dimensão n – CMY(n): Seja F uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ nele mesmo tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, a matriz Jacobiana de F em x tem todos seus autovalores com parte real negativa. Se $F(p) = 0$, então p é um atrator global de,

$$\dot{x} = F(x).$$

Esta Conjectura foi provada para aplicações polinomiais no plano em 1988, por Meisters e Olech [31]. A prova para aplicações de classe $\mathcal{C}^1$, planares, foi exibida em 1993 por Gutierrez [17] e Fessler [16], independentemente, e em 1994 uma outra prova foi exibida por Glutsuk [27].

Existem exemplos de campos de vetores suaves em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$, satisfazendo as hipóteses da Conjectura mas que possuem uma órbita periódica, ver exemplo 6.2.8 e também existe o exemplo de um campo de vetores polinomial em $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, satisfazendo também as hipóteses da Conjectura, mas que possui algumas órbitas escapando para infinito, ver exemplo 6.2.9.

Desta forma a Conjectura em questão é verdadeira apenas para $n = 2$. Em [24], van den Essen mostra que uma conjectura mais fraca que a de Markus-Yamabe implica na Conjectura Jacobiana Clássica.

O principal objetivo do artigo estudado aqui é discutir a tradução natural de CMY para a dinâmica de iterações de aplicações.

Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação $\mathcal{C}^1$ e considere a seqüência

$$x^{(m+1)} = F(x^{(m)}) \ , \ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Seja p um ponto fixo de F, ou seja, um ponto tal que $F(p) = p$.

Definição 3.1.2. Diz-se que p é um *atrator global do sistema dinâmico discreto* (3.2) se, qualquer que seja $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = p.$$

O problema é o seguinte,

Problema de Markus-Yamabe Discreto de dimensão n – PMYD(n)[1]: Seja F uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ nele mesmo tal que $F(0) = 0$ e, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $JF(x)$ tem todos seus autovalores com módulo menor que um. É verdade que zero é um atrator global do sistema dinâmico discreto gerado por F?

A resposta para PMYD(1) é trivialmente afirmativa. Szlenk trabalhou neste problema para $n = 2$ e forneceu um exemplo de aplicação racional $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que dá uma resposta negativa para PMYD(2). Infelizmente Szlenk faleceu subtamente em julho de 1995. Seu exemplo é reproduzido no Teorema 3.5.1 da seção 3.5 deste capítulo e provamos suas propriedades na seção 3.6.

O exemplo de Szlenk não é nem polinomial nem difeomorfismo, no entanto, pode ser levemente modificado de forma a se tornar um difeomorfismo e ainda assim continuar controverso ao PMYD(2), isso é mostrado no Teorema 3.5.2 da seção 3.5.

[1]Nota: Os autores do artigo informam que, após a confecção do mesmo, G. Meisters os informou sobre um enunciado semelhante ao PMYD(n), enunciado no livro de LaSalle [59], página 20.

Voltando a nossa atenção a família das aplicações polinomiais, é possível provar que a resposta ao PMYD(2) é afirmativa, como mostrado no Teorema 3.2.7 da seção 3.2.

Uma resposta negativa para PMYD(n), com $n \geq 4$, é dada em [25]. Mais tarde são dados exemplos que respondem negativamente à PMYD(n) para $n \geq 3$, ver exemplo 6.3.5.

Desta forma, o problema está completamente resolvido.

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na próxima seção é exibida a prova de que a resposta ao PMYD(n) é afirmativa para aplicações triangulares em $\mathbb{R}^n$. Nas seções 3.3 e 3.4 o problema em questão é relacionado com a Conjectura Jacobiana e com a Conjectura de Markus-Yamabe, respectivamente.

A seção 3.5 é dedicada à obtenção de um difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ que fornece uma resposta negativa ao PMYD(2) e, finalmente, na seção 3.6 é apresentado o exemplo de Szlenk, mencionado acima.

3.2 O PMYD(n) para Aplicações Triangulares e Polinomiais

Definição 3.2.1. Diz-se que F é uma *aplicação triangular* se ela tem a forma,

$$F(x) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), ..., F_n(x_1, x_2, ..., x_n)) .$$

Diz-se que F é *linearmente triangularizável* se existir uma mudança de coordenadas linear tal que torne F triangular.

O primeiro resultado que pode ser enunciado é o seguinte,

Teorema 3.2.1. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação triangular, de classe $\mathcal{C}^1$, tal que todos os autovalores de $JF(x)$ tenham módulo menor que um, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$. Assuma que $F(0) = 0$. Então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por F.*

Prova. Seja a seguinte afirmação.

Afirmação 3.1. *Considere $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação triangular de classe $\mathcal{C}^1$ tal que,*

$$\left|\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x)\right| < 1, \left|\frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x)\right| < 1, ..., \left|\frac{\partial F_m}{\partial x_m}(x)\right| < 1 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m \text{ e } F(0) = 0.$$

Fixe $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ e seja,

$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)}).$$

Então existem $k_0 \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, $M \in \mathbb{R}^+$ e $K \in (0, 1)$, tais que

$$\left|x_i^{(k+k_0)}\right| \leq M\,K^k, \text{ para todo } i = 1, 2, ..., m \text{ e para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Observe que, com a prova da Afirmação 3.1 acima o resultado segue diretamente.

A Afirmação será provada por indução sobre a dimensão m.

Caso 1: $m = 1$.

Neste caso F é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ com $F(0) = 0$ e

$$\left|\frac{dF}{dx}(x)\right| < 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Fixando $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ considere o intervalo compacto da reta

$$I = \left[-|x^{(0)}|, |x^{(0)}|\right].$$

Como a derivada de F é contínua tem-se que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$-1 < -a < \frac{dF}{dx}(x) < a < 1, \text{ para todo } x \in I.$$

Sendo assim,

$$|x^{(1)}| = |F(x^{(0)})| < a|x^{(0)}|.$$

Portanto

$$|x^{(k)}| < a^k\,|x^{(0)}|, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Isso prova o caso em que $m = 1$.

Caso 2: m qualquer.

Suponha que a Afirmação 3.1 seja verdade para $m = s-1$. Vai-se mostrar que, nesse caso, ela também será verdade para $m = s$. Assim, o caso geral fica demonstrado por indução.

Novamente, fixe $x^{(0)} \in \mathbb{R}^s$. Considere a aplicação,

$$\hat{F}(x_1, x_2, ..., x_{s-1}) = (F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), ..., F_{s-1}(x_1, x_2, ..., x_{s-1})).$$

Aplicando a hipótese de indução, tem-se que existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{R}^+$ e $K \in \mathbb{R}$, tais que,

$$\left|x_i^{(k+k_0)}\right| \leq M\,K^k, \text{ para todo } i = 1, 2, ..., s-1 \text{ e para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Neste ponto, por facilidade de notação, pode-se trocar $x^{(0)}$ por $x^{(k_0)}$ e, assim,

$$\left|x_i^{(k)}\right| \leq M\,K^k, \text{ para todo } i = 1, 2, ..., s-1 \text{ e para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Vejamos que,

$$\begin{aligned}
x_s^{(k)} &= F_s(x^{(k-1)}) \\
&= F_s(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, ..., x_s^{(k-1)}) \\
&= \int_0^{x_s^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_s}\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, ..., x_{s-1}^{(k-1)}, t\right) dt \\
&+ \int_0^{x_{s-1}^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_{s-1}}\left(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, ..., x_{s-2}^{(k-1)}, t, 0\right) dt \\
&+ ... \\
&+ \int_0^{x_1^{(k-1)}} \frac{\partial F_s}{\partial x_1}(t, 0, ..., 0)\, dt.
\end{aligned}$$

Agora, vejamos que, existe um $R > 0$ tal que,

$$\left|x_s^{(k)}\right| \leq \left|x_s^{(k-1)}\right| + R\left(\left|x_{s-1}^{(k-1)}\right| + ... + \left|x_1^{(k-1)}\right|\right). \tag{3.4}$$

De fato, pela hipótese de indução, a seqüência

$$\{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_{s-1}^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}},$$

é limitada e, portanto, existe uma bola $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ que contém esta seqüência. Assim, tome

$$R = \max\left\{\left|\frac{\partial F_s}{\partial x_i}(y_1, y_2, ..., y_{s-1}, 0)\right|; (y_1, y_2, ..., y_{s-1}) \in \overline{B} \text{ e } i = 1, 2, ..., s-1\right\}.$$

Agora, usando as equações (3.3) e (3.4), e escolhendo M e K que seja satisfatório a x_i para todo $i \in \{1, 2, ..., s-1\}$,

$$\left|x_s^{(k)}\right| \leq \left|x_s^{(k-1)}\right| + (s-1)\, M\, R\, K^{k-1}. \tag{3.5}$$

Denotando $(s-1)\, R\, M$ por C, pode-se escrever,

$$\begin{aligned}\left|x_s^{(k)}\right| &\leq \left|x_s^{(k-2)}\right| + (s-1)\, R\, M\, K^{k-2} + (s-1)\, R\, M\, K^{k-1}\\ &\leq \left|x_s^{(0)}\right| + C\,(K^{k-1} + K^{k-2} + ... + 1)\\ &\leq \left|x_s^{(0)}\right| + \frac{C}{1-K}.\end{aligned}$$

O que implica que $\{x_s^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada.

Como o mesmo é verdade para a seqüência $\{x_i^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, com $i = 1, 2, ..., s-1$, então existe $L > 0$ tal que $|x_i^{(k)}| \leq L$, para todo $i = 1, 2, ..., s$ e para todo $k \in \mathbb{N}$.

Desta forma, podemos definir,

$$D = \max\left\{\left|\frac{\partial F_s}{\partial x_s}(y_1, y_2, ..., y_s)\right|; |y_i| \leq L, i = 1, 2, ..., s\right\},$$

e assegurar que D é estritamente menor que um.

Com esta nova estimativa, pode-se repetir o mesmo procedimento usado para se obter a equação (3.4) e concluir que,

$$\left|x_s^{(k)}\right| \leq D\, \left|x_s^{(k-1)}\right| + R\left(\left|x_{s-1}^{(k-1)}\right| + ... + \left|x_1^{(k-1)}\right|\right),$$

e a inequação (3.5), pode ser modificada para,

$$
\begin{aligned}
\left|x_s^{(k)}\right| &\leq D\left(D\left|x_s^{(k-2)}\right| + K^{k-2}\,C\right) + K^{k-1}\,C \\
&\vdots \\
&\leq D^k\left|x_s^{(0)}\right| + C\left(K^{k-1} + D\,K^{k-2} + ... + D^{k-1}\right) \\
&\leq D^k\left|x_s^{(0)}\right| + k\,C\,(\max\{K,D\})^{k-1} \\
&\leq (\max\{D,K\})^{k-1}\,D\left|x_s^{(0)}\right| + k\,C\,(\max\{K,D\})^{k-1} \\
&\leq (\max\{K,D\})^{k-1}\left(D\left|x_s^{(0)}\right| + k\,C\right) \\
&\leq (\max\{K,D\})^{k-1}\left(\max\{K,D\}\left|x_s^{(0)}\right| + k\,C\right) \\
&\leq (\max\{K,D\})^{k}\left(\left|x_s^{(0)}\right| + \frac{k\,C}{\max\{K,D\}}\right) \\
&\leq (\max\{K,D\})^{k}\,\hat{M} \\
&= \hat{M}\,\hat{K}^k,
\end{aligned}
$$

para algum $\hat{M} \in \mathbb{R}$, onde $\max\{K,D\} = \hat{K} < 1$.

Isso conclui a prova do caso geral. □

O próximo objetivo é mostrar que a resposta ao PMYD(2) para aplicações polinomiais é afirmativa.

Observação 3.2.2. Observe que, no caso $n = 2$, o Teorema 2.2.1 implica que qualquer aplicação (não necessariamente polinomial) satisfazendo as hipóteses do PMYD(2) tem no máximo um único ponto fixo.

Isso decorre da verificação de que, se F é tal como no PMYD(2), a aplicação $G = F - I$ é tal que $JG(x)$ tem todos seus autovalores com parte real menor do que zero, ou ainda, que $\mathrm{Spec}\,(F) \subset \{p \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}\,(p) < 0\}$. Pelo Teorema 2.2.1, pode-se concluir que G é injetiva. Portanto, F possui no máximo um único ponto fixo.

Para garantir a existência de tal ponto fixo, basta notar que G é uma aplicação polinomial injetiva e, portanto, é sobrejetiva (ver Teorema 6.1.1).

Lema 3.2.3. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial tal que todos os autovalores de $JF(x)$ possuem módulo menor que um em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Então o polinômio característico de $JF(x)$ é independente de x.*

Antes da demonstração do Lema 3.2.3, deve-se observar que esse Lema também é verdade para aplicações de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$.

Demonstração. Seja $P_x(\lambda)$ o polinômio característico de $JF(x)$ e sejam $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ suas raízes. Então,

$$P_x(\lambda) = \lambda^n - t_1\,\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n\,t_n,$$

onde

$$t_j = \sum_{\substack{i_1 < i_2 < ... < i_j \\ i_1, i_2, ..., i_j = 1}}^{n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} ... \lambda_{i_j}$$

Como $|\lambda_i| < 1$ para todo $i = 1, 2, ..., n$ tem-se que

$$|t_j| < \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} = \frac{n!}{j!\,(n-j)!} < n!, \tag{3.6}$$

para todo $j = 1, 2, ..., n$. Por outro lado, como as componentes de F são polinomiais e cada t_j pode ser descrito como a soma de todos os menores principais de $JF(x)$, de ordem j, que possuem a sua diagonal sobre a diagonal principal, podemos concluir que t_j é um polinômio em x para todo $j = 1, 2, ..., n$. Como os únicos polinômios limitados são constantes, o Lema fica provado. □

Vejamos um Lema que será útil mais adiante.

Lema 3.2.4. *Seja $h(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ uma aplicação onde P é polinomial homogênea de grau $d > 1$ e Q é polinomial homogênea de grau $l > 1$ tal que,*

$$\det(Dh(x, y)) = 0, \text{ para todo } (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

Então, existem $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{C}$, tais que,

$$P^m(x, y) = cQ^n(x, y).$$

Demonstração. Como $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ e $Q : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ são polinomiais homogêneas de grau d e l respectivamente, é possível reescrevê-las das formas,

$$P(x, y) = x^d f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = x^l g\left(\frac{y}{x}\right),$$

onde $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são funções polinomiais em uma variável.

Um cálculo direto mostra que,

$$P_x(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = dx^{d-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{d-2} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$P_y(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = x^{d-1} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$Q_x(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = lx^{l-1} g\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{l-2} g'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$Q_y(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = x^{l-1} g'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Mas, por hipótese,

$$0 = \det Dh(x,y) = \det \begin{pmatrix} P_x(x,y) & P_y(x,y) \\ Q_x(x,y) & Q_y(x,y) \end{pmatrix} = P_x(x,y)Q_y(x,y) - Q_x(x,y)P_y(x,y).$$

De onde podemos escrever,

$$\left[dx^{d-1} f\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{d-2} f'\left(\frac{y}{x}\right)\right] x^{l-1} g'\left(\frac{y}{x}\right) = x^{d-1} f'\left(\frac{y}{x}\right)\left[lx^{l-1} g\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{l-2} g'\left(\frac{y}{x}\right)\right].$$

Que implica na equação diferencial,

$$df\left(\frac{y}{x}\right) g'\left(\frac{y}{x}\right) = lg\left(\frac{y}{x}\right) f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

cuja soluções devem respeitar a seguinte relação,

$$g^m\left(\frac{y}{x}\right) = cf^n\left(\frac{y}{x}\right),$$

onde $d = mk$ e $l = nk$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{C}$.

Observando que $ml = dn$, pode-se escrever,

$$Q^m(x,y) = x^{ml} g^m\left(\frac{y}{x}\right) = cx^{nd} f^n\left(\frac{y}{x}\right) = cP^n(x,y).$$

E a prova do Lema fica completa. □

Agora, serão enunciados dois resultados que serão utilizados em um Teorema posterior, dentre os quais um será demonstrado.

Teorema 3.2.5 (Jörgens). *Seja f uma aplicação definida em todo $\mathbb{R}^2$ tal que a sua matriz Hessiana tem determinante constante positivo. Então f é quadrática.*

A demonstração deste resultado será omitida aqui e pode ser encontrada em [30].

O outro resultado é devido a Dillen [23] e sua demonstração será transcrita aqui porque nos será útil a posteriori.

Teorema 3.2.6 (Dillen). *Se P é uma aplicação polinomial complexa em duas variáveis, x e y, e se o determinante de sua matriz Hessiana é constante igual a c, então existe uma transformação afim no plano (u,v) através da qual P toma a forma,*

$$P(x,y) = xy + Q(x),$$

onde Q é uma aplicação polinomial em uma variável.

Demonstração. Seja $P \in \mathbb{C}[x,y]$ uma aplicação polinomial com determinante da sua matriz Hessiana constante igual a c.

Como $P \in \mathbb{C}[x,y]$, pode-se proceder com uma mudança de variáveis linear de forma que se tenha $c \leq 0$.

Assim, suponha que $c \leq 0$.

Se o grau de P é igual a dois, então pode-se encontrar novas variáveis segundo as quais P toma a forma desejada. Ver apêndice B.

Suponha então que P tenha grau $n > 2$ e decomponha P em termos de suas parcelas homogêneas, ou seja, escreva

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{n} Q_n(x,y),$$

onde Q_i são aplicação homogêneas de grau i.

Pode-se constatar que o determinante da matriz Hessiana de P possui um parcela exatamente igual ao determinante da matriz Hessiana de Q_n que, aliás corresponde aos únicos termos de grau $2n-4>0$. Sendo assim o determinante da matriz Hessiana de Q_n deve ser nulo.

Vejamos que existe uma mudança de variáveis que faz com que $Q_n(x,y)$ assuma a forma γu^n. Para isso, usa-se o Lema 3.2.4 aplicado às funções $(Q_n)_x$ e $(Q_n)_y$ que são ambas homogêneas de grau $n-1>1$.

Assim, tal Lema nos permite concluir que

$$(Q_n)_x = \xi (Q_n)_y, \tag{3.7}$$

para algum complexo ξ, pois podemos escolher os expoentes iguais a um (ver demonstração do Lema 3.2.4)

Considere novas variáveis

$$v = x - \xi y \quad \text{e} \quad u = \xi x + y. \tag{3.8}$$

Nestas variáveis,

$$(Q_n)_v = (Q_n)_x \frac{\partial x}{\partial v} + (Q_n)_y \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{1+\xi^2}\big((Q_n)_x - \xi (Q_n)_y\big) = 0.$$

Portanto tem-se que

$$Q_n(u,v) = \gamma u^n. \tag{3.9}$$

Agora, escreva P como uma aplicação polinomial na variável v com coeficientes em $\mathbb{C}[u]$,

$$P(u,v) = \sum_{i=0}^{m} P_i(u) v^i.$$

Note que $m < n$ pois o termos de grau n de P, Q_n, não depende de v. Então o grau de P_0, igual a n, é estritamente maior que m.

Vejamos duas possibilidades para m.

Caso 1. $m = 1$.

Neste caso,

$$P(u,v) = P_0(u) + P_1(u) v,$$

cujo determinante da matriz Hessiana,

$$H(P) = -\left(\frac{dP_1}{du}\right)^2. \tag{3.10}$$

Assim, tem-se que $P_1(u) = \sqrt{-c}u$. Lembre-se que no caso em questão, $c \leq 0$.

Portanto, temos que P assume a forma desejada neste caso.

Caso 2. $m > 1$.

Neste caso a matriz Hessiana pode ser escrita da seguinte forma,

$$H(P) = \det\begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{m} P_i''(u)v^i & \sum_{i=0}^{m} iP_i'(u)v^{i-1} \\ \sum_{i=0}^{m} iP_i'(u)v^{i-1} & \sum_{i=0}^{m} i(i-1)P_i(u)v^{i-2} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Observando o coeficiente de v^{2m-2} (ou seja $i = m$), vê-se que,

$$(m-1)P_m''(u)P_m(u) = m(P_m')^2.$$

Resolvendo a equação diferencial tem-se que

$$P_m(u) = (\alpha u + \beta)^{1-m}.$$

Porém, como P_m deve ser polinomial, conclui-se que $\alpha = 0$ e, portanto, $P_m(u)$ é constante.

Agora, considere a seguinte afirmação,

Afirmação 3.2. *O grau de P_i é sempre menor ou igual a $m - i$, para todo $i = 0, 1, ..., m$.*

De fato, decorre do procedimento anterior que a afirmação é válida para $i = m$. Agora, será mostrado que se a afirmação vale para todo $i \in \{m, m-1, ..., m-s+1\}$ então ela também é verdadeira para $i = m - s$. Com isso a afirmação fica provada por indução.

Pela hipótese de indução, o grau de P_i é menor ou igual a $m-i$ para todo $m \geq i > m-s$.

Com a matriz Hessiana escrita como na equação (3.11), tem-se que,

$$H(P) = \sum_{i,j=0}^{m} j\left((j-1)P_i''(u)P_j(u) - iP_i'(u)P_j'(u)\right)v^{i+j-2}.$$

Observando o coeficiente de v^{2m-s-2}, vê-se que este coeficiente é constante se $m = s = 2$ e nulo caso contrário.

Tomando $j = m - s + k$ e $i = m - k$ este coeficiente pode ser escrito da forma,

$$\sum_{k=0}^{s}(m-s+k)\left((m-s+k-1)P_{m-k}''(u)P_{m-s+k}(u) - (m-k)P_{m-k}'(u)P_{m-s+k}'(u)\right).$$

Agora, note que, para $0 < k < s$, $P_{m-s+k}(u)$ e $P_{m-k}(u)$ têm grau menor ou igual a $s-k$ e k respectivamente, pela hipótese de indução. Sendo assim, tais parcelas da soma têm grau menor ou igual a $s-2$.

Quando $k = 0$,

$$(m-s)\left((m-s-1)P''_m(u)P_{m-s}(u) - m(P'_{m-s}(u)P'_m(u))\right) = 0,$$

pois $P_m(x)$ é uma constante, e quando $k = s$,

$$m\left((m-1)P''_{m-s}(u)P_m(u) - (m-s)(P'_m(u)P'_{m-s}(u))\right) = m(m-1)P''_{m-s}(u)P_m(u).$$

Como $H(P)$ é constante e P_m é constante, segue que

$$\deg\left(P''_{m-s}(u)\right) \leq s-2,$$

pois todos os demais termos tem grau no máximo $s-2$ e precisa haver cancelamento na soma.

Embora a demonstração fique um pouco obscura no caso em que que $s \in \{0,1\}$, estes casos podem ser verificados separadamente usando a mesma idéia.

Assim, $\deg(P_{m-s}) \leq s$ e provamos a afirmação 3.2.

Agora, com a prova da afirmação tem-se um absurdo, pois $\deg(P_0) = n > m$, como foi mostrado no início da demonstração.

Decorre que $m = 1$ e que apenas o primeiro caso é possível, ou seja,

$$P(u,v) = \sqrt{-c}uv + P_0(u). \qquad \square$$

Vejamos o resultado que afirma a veracidade do Problema Discreto de Markus-Yamabe para aplicações polinomiais de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.2.7. *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial com todos os autovalores de $JF(x)$ com módulo menor que um para todo ponto $x \in \mathbb{R}^2$. Então existe um único ponto fixo de F o qual é um atrator global para o sistema dinâmico discreto gerado por F.*

Demonstração. Observe que a existência e unicidade do ponto fixo decorre diretamente do Teorema de Gutierrez 2.2.1 (ver observação 3.2.2).

Sendo assim, basta mostrar que o único ponto fixo de F é um atrator global.

Seja $F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$. Do Lema 3.2.3 sabe-se que,

$$t_1(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y),$$

e

$$t_2(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

são constantes, que serão denotadas apenas por t_1 e t_2.

Considere $G = F - (t_1/2)\,I$ e sejam $\overline{P}$ e $\overline{Q}$ tais que $G(x,y) = \big(\overline{P}(x,y), \overline{Q}(x,y)\big)$.

Assim, tem-se as constantes,

$$\overline{t_1} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \overline{Q}}{\partial y}(x,y) = 0, \tag{3.12}$$

e

$$\overline{t_2} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \overline{Q}}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \overline{P}}{\partial y}(x,y)\frac{\partial \overline{Q}}{\partial x}(x,y) = t_2 - \frac{t_1^2}{4}. \tag{3.13}$$

Como $\overline{t_1} = 0$, vejamos que existe um polinômio $h(x,y)$ tal que,

$$\overline{P}(x,y) = -\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \quad \text{e} \quad \overline{Q}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y).$$

De fato, se for definido,

$$h_1(x,y) = -\int \overline{P}(x,y)\,dy + \varphi(x),$$

e,

$$h_2(x,y) = \int \overline{Q}(x,y)\,dx + \psi(y),$$

é preciso mostrar que é possível tomar $\varphi(x)$ e $\psi(y)$ de tal forma que $h_1(x,y) = h_2(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Pode-se notar que,

$$h_2(x,y) - h_1(x,y) = \int \overline{Q}(x,y)\,dx + \psi(y) + \int \overline{P}(x,y)\,dy - \varphi(x).$$

Portanto, o problema fica resolvido se for possível escrever,

$$\int \overline{Q}(x,y)\,dx + \int \overline{P}(x,y)\,dy = \varphi(x) - \psi(y).$$

Mas usando a equação (3.12),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\int \overline{Q}(x,y)\,dx + \int \overline{P}(x,y)\,dy\right] &= \overline{Q}(x,y) + \int \frac{\partial \overline{P}}{\partial x}(x,y)\,dy \\
&= \overline{Q}(x,y) - \int \frac{\partial \overline{Q}}{\partial y}(x,y)\,dy \\
&= \overline{Q}(x,y) - \overline{Q}(x,y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De forma análoga, pode-se mostrar que,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int \overline{Q}(x,y)\,dx + \int \overline{P}(x,y)\,dy\right] = 0. \tag{3.14}$$

Isso implica que a soma das integrais é uma constante e, portanto, pode ser tomada de forma que $h_1(x,y) = h_2(x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Além disso,

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\overline{Q}(x,y), -\overline{P}(x,y)\right),$$

e a matriz Hessiana de h é dada por,

$$Hh(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \overline{Q}}{\partial y}(x,y) \\ -\dfrac{\partial \overline{P}}{\partial x}(x,y) & -\dfrac{\partial \overline{P}}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix},$$

cujo determinante é igual a $\overline{t_2}$.

Estudemos as possibilidades para $\overline{t_2}$.

Caso 1: $\overline{t_2} > 0$.

Pelo resultado clássico de Jörgens 3.2.5, sabemos que $h(x,y)$ é quadrática. Isso implica que F é uma aplicação polinomial de grau um. Para este tipo de aplicação o resultado pode ser facilmente provado.

Vejamos. Suponha

$$F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)),$$

onde $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são polinômios de grau um.

Suponha que o ponto fixo seja a origem de $\mathbb{R}^2$. Esta hipótese não é restritiva pois bastaria proceder com uma mudança de coordenadas do tipo translação.

Neste caso, $F(x,y)$ seria da forma,

$$F(x,y) = (\alpha_1\, x + \alpha_2\, y, \beta_1\, x + \beta_2\, y) = A \cdot (x,y),$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = JF(x,y).$$

Tome $p = (x_0, y_0)$ um ponto qualquer de $\mathbb{R}^2$.

A seguir, é necessário um lema cuja demonstração será omitida para não comprometer a continuidade do texto. No entanto sua demonstração será feita no apêndice A.

Lema 3.2.8. *Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear. Então existe uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ de forma que A assume uma das duas formas,*

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad ou \quad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores de A e ε é um número real maior ou igual a zero.

Assim, com o auxílio de uma função de Lyapunov,

$$V(x,y) = x^2 + y^2,$$

tem-se que, no primeiro caso,

$$V(A_1 \cdot (x,y)) = (\lambda_1 x)^2 + (\lambda_2 y)^2 \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\}(x^2 + y^2) < x^2 + y^2 = V(x,y),$$

para todo ponto $(x, y) \neq (0, 0)$.

No segundo caso,

$$\begin{aligned} V\left(A_2 \cdot (x, y)\right) &= (\lambda_1 x + \varepsilon y)^2 + (\lambda_1 y)^2 \\ &\leq \lambda_1^2 x^2 + \left(\varepsilon^2 + \lambda_1^2\right) y^2 + 2\varepsilon\lambda_1 xy \\ &\leq \lambda_1^2 x^2 + \left(\varepsilon^2 + \lambda_1^2\right) y^2 + 2\varepsilon\lambda_1 (x^2 + y^2) \\ &\leq \left[(\lambda_1^2 + \varepsilon^2) + 2\varepsilon\lambda_1\right] (x^2 + y^2) \\ &= \left[\lambda_1^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\lambda_1\right] V(x, y), \end{aligned}$$

para todo ponto $(x, y) \neq (0, 0)$.

Como,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_1^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\lambda_1 = \lambda_1^2 < 1,$$

é possível tomar ε pequeno suficiente de forma que,

$$\lambda_1^2 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\lambda_1 < 1.$$

O que permite concluir, em ambos casos, que a origem é um atrator global para o sistema dinâmico discreto induzido por F.

Caso 2: $\overline{t_2} < 0$.

Neste caso, pode-se supor que o grau de h é $n > 2$ pois, no caso em que $n \leq 2$, deve-se ter $n = 2$ pois tem-se como hipótese que $\overline{t_2} \neq 0$. Desta forma, com h quadrático, procede-se exatamente como no caso anterior.

Aplicando o Teorema 3.2.6 conclui-se que, existe uma transformação de coordenadas afim A, de forma que,

$$h \circ A(u, v) = \sqrt{-\overline{t_2}}\, u\, v + p(u),$$

onde p é um polinômio em uma variável, u.

Como está sendo considerado $h(x, y) \in \mathbb{R}$, da prova do Teorema 3.2.6, a transformação afim pode ser tomada com coeficientes reais. De fato, como o grau de h é $n > 2$, basta perceber que $Q_n(x, y) = \gamma(\xi x + y)^n$ e é uma aplicação a valores reais, sendo assim γ e ξ devem ser reais e, portanto, a transformação em questão é dada por,

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} \xi & 1 \\ 1 & -\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

que tem coeficientes reais (ver equação (3.8)).

Observe que embora A não seja ortogonal,

$$AA^\top = \frac{1}{\det A}\, I,$$

onde I denota a identidade de $\mathbb{R}^2$.

Assim, $A^\top = c\, A^{-1}$.

Vejamos que A triangulariza F.

De fato, observe que,

$$D(h \circ A)(u,v) = (\sqrt{-\overline{t_2}}\, v + p'(u), \sqrt{-\overline{t_2}}\, u).$$

Além disso, da regra da cadeia,

$$D(h \circ A)(u,v) = Dh(A(u,v))DA(u,v) = \big(\overline{Q}(A(u,v)), -\overline{P}(A(u,v))\big)A. \tag{3.15}$$

Identificando o funcional linear $D(h \circ A)(u,v)$ com o vetor gradiente de h no ponto (u,v), pode-se tomar a transposta do último membro, obtendo,

$$D(h \circ A)(u,v) = A^{\top}\big(\overline{Q}(A(u,v)), -\overline{P}(A(u,v))\big) = c\, A^{-1} \circ Dh \circ A(u,v).$$

No entanto, segue da forma de $h \circ A$ que $D(h \circ A)$ é triangular. Isso implica que A triangulariza Dh.

Para concluir, note que,

$$F = G + \frac{t_1}{2} I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Dh + \frac{t_1}{2} I.$$

Sendo assim, como,

$$\begin{aligned} A^{-1}\, c\, F\, A &= c\, A^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Dh\, A + c\, \frac{t_1}{2} I \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} c\, A^{-1}\, Dh\, A + c\, \frac{t_1}{2} I = \big(\sqrt{-\overline{t_2}}\, u, -\sqrt{-\overline{t_2}}\, v + p'(u)\big) + c\, \frac{t_1}{2}(u,v) \\ &= \big(\sqrt{-\overline{t_2}}\, u + c\, u, -\sqrt{-\overline{t_2}}\, v + p'(u) + c\, v\big), \end{aligned}$$

decorre que A triangulariza F.

Segue do Teorema 3.2.1 que o ponto fixo de F é um atrator global para o sistema dinâmico discreto induzido por F.

Caso 3: $\overline{t_2} = 0$.

Novamente sob a hipótese que o grau de h seja maior que dois, segue da equação (3.10), presente na prova do Teorema 3.2.6, que através de uma transformação afim,

$$h(u,v) = k\, v + q(u),$$

para algum $k \in \mathbb{R}$ e o resultado segue como no caso anterior pois F se torna triangular.

Assim, são exauridas todas as possibilidades para $\overline{t_2}$ e a prova fica completa. $\square$

3.3 A Conjectura Jacobiana e a Conjectura de Ponto Fixo

Nesta seção será dada importância especial as aplicações polinomiais.

Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial tal que $JF(x)$ tem todos seus autovalores com módulo menor que um. Na seção um, perguntou-se sobre a existência de um ponto fixo o qual é um atrator global. Agora é formulado um problema mais fraco,

Conjectura de Ponto Fixo – CPF: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial tal que $JF(x)$ tem todos seus autovalores com módulo menor que um, para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Então F tem um único ponto fixo.

Considerando as partes real e imaginária das componentes de uma aplicação complexa $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ e usando argumentos usuais de álgebra linear vê-se que esta conjectura pode ser reescrita da seguinte maneira equivalente (ver Proposição 6.4.1),

Conjectura de Ponto Fixo – CPF: Seja $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial tal que $JF(x)$ tem todos seus autovalores com módulo menor que um, para cada $x \in \mathbb{C}^n$. Então F tem um único ponto fixo.

O Teorema a seguir, mostra que este problema é equivalente à célebre Conjectura Jacobiana,

Conjectura Jacobiana – CJ: Seja $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial tal que $\det JF(x) \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ para todo ponto $x \in \mathbb{C}^n$. Então F é invertível.

Vale a pena observar que, embora o enunciado da CJ acima seja ligeiramente diferente do enunciado do capítulo 2, elas estão fortemente relacionadas, como é estudado na seção 6.1.2.

Teorema 3.3.1. *A CJ é equivalente à CPF.*

Demonstração. Vejamos, primeiramente a implicação,

$$CJ \Rightarrow CPF.$$

Desta forma assuma que CJ seja verdadeira e considere uma aplicação F que satisfaça as hipóteses de CPF para algum $n \in \mathbb{N}$.

Considere, ainda, a função $G(x) = F(x) - x$. Assim, os autovalores de $JG(x)$ são exatamente os autovalores de $JF(x)$ decrementados de um. Portanto, pelo Lema 3.2.3, tem-se que $\det JG(x)$ é constante. Das hipóteses sobre F, concluímos que esta constante não pode ser zero. Segue da veracidade da Conjectura Jacobiana que G é invertível e existe um único ponto x_0, zero de G, que é o único ponto fixo de F.

Provemos, agora, a outra implicação,

$$CPF \Rightarrow CJ.$$

Por contraposição, assuma que CJ falhe para algum $m \in \mathbb{N}$. Do Teorema de Redução [22] (Teorema 6.1.2) significa que existe um $n \in \mathbb{N}$ e um $G : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ não invertível tal que

$$G(x) = x + H(x),$$

com $JH(x)$ uma matriz nilpotente para cada $x \in \mathbb{C}^n$. Agora seja $g(x) = (1/2)\, G(x)$ e seja y e z dois pontos distintos de $\mathbb{C}^n$ tais que $g(y) = g(z) = p$.

Denotando por $h(x)$ a expressão $x + p - g(x)$, temos que $h(y) = y$ e $h(z) = z$. Por outro lado, como $JH(x)$ é uma matriz nilpotente para cada $x \in \mathbb{C}^n$, todos seus autovalores são zero.

Da definição de $h(x)$ pode-se obter:

$$Jh(x) = I - Jg(x) = I - \left(\frac{1}{2}\, I + \frac{1}{2}\, JH(x)\right) = \frac{1}{2}\, I - \frac{1}{2}\, JH(x),$$

o que implica que todos os autovalores de $Jh(x)$ são iguais a $1/2$ para qualquer $x \in \mathbb{C}^n$. Portanto, $h(x)$ satisfaz a hipótese de CPF e tem dois pontos fixos diferentes. □

Para terminar esta seção enunciamos uma Conjectura que implica na CJ. Primeiramente vejamos como surgiu tal Conjectura.

Note que PMYD(n) possui uma resposta afirmativa para aplicações triangulares. Desta forma, imaginou-se que o próximo passo seria investigar sua veracidade para aplicações que têm a forma $F(x) = (f(x), g(x_n))$, com $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$.

Existem problemas para solucionar este caso e, portanto, foi decidido considerar um caso mais simples onde F seja polinomial e todos autovalores de $JF(x)$ sejam nulos, ou seja, foi tentado solucionar o PMYD para aplicações polinomiais da forma $F(x) = (f(x), 0)$, onde $JF(x)$ seja nilpotente.

Neste ponto indagou-se se todas as aplicações polinomiais com matriz Jacobiana nilpotente poderiam ser reduzidas a esse caso,

Conjectura Nilpotente – CN: Seja $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial tal que $JF(x)$ seja nilpotente. Então existe uma mudança de coordenadas linear A tal que

$$AFA^{-1}(x) = (f(x), 0)\,,$$

onde f é uma aplicação polinomial de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^{n-1}$.

Para o próximo resultado, será necessário de um resultado de álgebra linear cuja demonstração será exibida no apêndice A.

Proposição 3.3.2. *Seja N uma matriz nilpotente que tem a seguinte forma,*

$$N = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & \dots & n_{1,m-1} & n_{1,m} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & \dots & n_{2,m-1} & n_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n_{m-1,1} & n_{m-1,2} & \dots & n_{m-1,m-1} & n_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n_{m,m} \end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Então, a submatriz $N_{m,m}$ obtida a partir de N excluindo-se a última linha e a última coluna, também é uma matriz nilpotente.

Vejamos o seguinte resultado mostrado por van den Essen.

Proposição 3.3.3. *CN implica CJ.*

Demonstração. É conhecido que é suficiente provar a Conjectura Jacobiana para aplicação F tais que $F = I + N$ com N homogênea de grau três e com JN nilpotente. Ver Teorema 6.1.3.

Desta forma, assumimos que CN seja verdadeira e vamos provar por indução sobre n a seguinte afirmação.

Afirmação 3.3. *Qualquer aplicação polinomial $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que $JF = N + I$, com N nilpotente, é injetiva.*

Para $n = 1$ a afirmação é trivialmente verdadeira, pois $N = 0$.

Suponha, agora, que a afirmação seja verdadeira em dimensão n e seja $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ tal que $JF = I + N$, com N nilpotente.

Assumindo que CN seja verdadeira, a aplicação F, por meio de uma mudança de coordenadas linear, pode ser escrita como,

$$F(x_1, ..., x_{n+1}) = \big(x_1 + P_1(x_1, ..., x_{n+1}), x_2 + P_2(x_1, ..., x_{n+1}), ..., x_{n+1}\big).$$

Para mostra que esta aplicação é injetiva é suficiente mostrar que, para qualquer $a \in \mathbb{C}$, aplicação,

$$F_a(x_1, ...x_n) = \big(x_1 + P_1(x_1, ..., x_n, a), x_2 + P_2(x_1, ..., x_n, a), ..., x_n + P_n(x_1, ..., x_n, a)\big),$$

é injetiva. De fato, suponha que existam z e w, pontos distintos de $\mathbb{C}^{n+1}$ tal que $F(z) = F(w)$. Em particular $z_{n+1} = w_{n+1}$ uma vez que a última coordenada de $F(z)$ é igual a z_{n+1} e a última coordenada de $F(w)$ é igual a w_{n+1}.

Então, tomando $a = z_{n+1}$, temos que $F_a(z_1, ..., z_n) = F_a(w_1, ..., w_n)$ e, portanto, F_a não é injetiva.

Vejamos que F_a satisfaz a hipótese de indução.

De fato, a matriz Jacobiana de F no ponto x é tem a forma,

$$JF(x) = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial P_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial P_1}{\partial x_2}(x) & ... & \dfrac{\partial P_1}{\partial x_n}(x) & \dfrac{\partial P_1}{\partial x_{n+1}}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial P_n}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial P_n}{\partial x_2}(x) & ... & 1 + \dfrac{\partial P_n}{\partial x_n}(x) & \dfrac{\partial P_n}{\partial x_{n+1}}(x) \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= I + \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial P_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial P_1}{\partial x_{n+1}}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial P_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n}(x) & \frac{\partial P_n}{\partial x_{n+1}}(x) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= I + N.
\end{aligned}
$$

Usando a Proposição 3.3.2, a submatriz,

$$
N_m = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial P_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial x_n}(x) & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial P_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial x_n}(x) & \end{pmatrix},
$$

também é nilpotente.

Além disso, uma simples verificação permite observar que $JF_a = N_m + I$ e, portanto, F_a satisfaz a hipótese de indução. Isso conclui a prova. □

Após a primeira versão do artigo estudado neste capítulo, van den Essen e Hubbers encontraram um contra-exemplo da CN para todo $n \geq 2$ de grau maior ou igual a quatro [26].

Observe que com a mesma prova da Proposição 3.3.3, pode ser provado que,

Proposição 3.3.4. *A CN para aplicações polinomiais de grau menor ou igual a 3 implica a CJ.*

3.4 Relação entre a Conjectura de Markus-Yamabe e o Problema Discreto de Markus-Yamabe

Nesta seção vamos relacionar a CMY(n) com o PMYD(n).

Considere o sistema de equações diferenciais,

$$\dot{x} = F(x), \tag{3.17}$$

com F uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ e seja $\phi(t,x)$ a solução de (3.17) com $\phi(0,x) = x$.

Assuma que $\phi(T,x)$ esteja definida para algum $T > 0$ e para algum $x \in \mathbb{R}^n$. Então podemos considerar o sistema dinâmico discreto,

$$\phi(T,\cdot) : V \to \mathbb{R}^n,$$

onde V é um aberto de $\mathbb{R}^n$ que contem x.

Lema 3.4.1. *Seja F uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ nele mesmo e seja $\phi(t,x)$ a solução de (3.17) com $\phi(0,x) = x$. Então são verdadeiras as seguintes afirmações.*

(i) Se, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $JF(x)$ tem todos os seus autovalores com parte real negativa, então, dado U aberto limitado de $\mathbb{R}^n$, existe $T > 0$ tal que, para todo $t \in (0, T)$ a matriz Jacobiana de $\phi(t, \cdot) : U \to \mathbb{R}^n$ tem todos seus autovalores com módulo menor do que um, para todo $x \in U$.

(ii) Assuma que a derivada de $\phi(t, x)$ com respeito à variável x tenha todos seus autovalores com módulo menor do que um para todo $t \in (0, t_x]$. Então $JF(x)$ tem todos seus autovalores com parte real menor ou igual a zero.

Demonstração. Como $\phi(t, x)$ é a solução de $\dot{x} = F(x)$ com $\phi(0, x) = x$, então,

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x) = F(\phi(t, x)).$$

Tomando as derivadas com respeito a x e avaliando em $t = 0$, pode-se, escrever (ver Teorema 1 da página 38 de [10]),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dx}(\phi(t, x))\right)\Big|_{t=0} = JF(x),$$

que pode ser reescrito da forma,

$$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{d}{dx}(\phi(t, x)) - I}{t} = JF(x), \tag{3.18}$$

onde I denota a matrix identidade.

Da relação escrita acima é claro que, para cada $y \in \mathcal{C}\ell(U)$, onde $\mathcal{C}\ell(U)$ denota o fecho topológico de U, existe uma vizinhança de y, U_y, e um número real positivo T_y, tal que, para cada $z \in U_y$ e para todo $t \in (0, T_y)$, a derivada de $\phi(t, x)$ com respeito a x avaliada no ponto z, tem todos seus autovalores com parte real menor do que um. Também, podemos tomar T_y de forma que para todo $z \in U_y$ e para todo $t \in (-T_y, 0)$ a derivada de $\phi(t, x)$ com respeito a x avaliada em z, tem todos seus autovalores com parte real maior do que um.

Em outras palavras, se $t > 0$, como os autovalores de $JF(x)$ têm parte real menor do que zero, os autovalores da derivada de $\phi(t, x)$ com respeito à variável x avaliada no ponto y devem ter parte real menor do que um, para t suficientemente pequeno.

De forma análoga, se $t < 0$, então a derivada de $\phi(t, x)$ com respeito a x avaliada no ponto y deve possuir autovalores com parte real maior do que um, para t suficiente pequeno.

Assim, para cada y, pode-se escolher um número real $T_y > 0$ tal que as duas considerações acima valham, respectivamente, para todo $t \in (0, T_y)$ e para todo $t \in (-T_y, 0)$.

Além disso, como F é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$, então $\phi(t, x)$ também é de classe $\mathcal{C}^1$ e, portanto, sua derivada com respeito a x é contínua. Com isso, pode-se conseguir uma vizinhança de y, U_y, onde continue valendo a propriedade acima. Possivelmente o valor T_y pode precisar ser alterado mais ainda assim $T_y > 0$.

Uma vez que ϕ é contínua e $\phi(0, x) = x$, existe W_y, vizinhança de y e um número real positivo γ_y com $\gamma_y < T_y$, tal que, $\phi(t, z) \in U_y$, para todo $z \in W_y$ e para todo $t \in (-\gamma_y, \gamma_y)$.

Seja $z \in W_y$ e $t \in (0, \gamma_y)$. Como $\phi(-t, \phi(t,x)) = x$, pelo Teorema da Regra da Cadeia,

$$\frac{d\phi(-t,x)}{dx}(\phi(t,x))\,\frac{d\phi(t,x)}{dx}(x) = I.$$

Seja $\lambda = a + bi$ um autovalor de

$$\frac{d\phi(t,x)}{dx}(z).$$

Então,

$$\lambda^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2},$$

é um autovalor de

$$\frac{d\phi(-t,x)}{dx}(\phi(t,z)).$$

Como z e $\phi(t,z)$ estão em U_y e $t \in (0, T_y)$, obtém-se que $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 1$ e $\mathrm{Re}\left(\lambda^{-1}\right) > 1$. Isso implica que,

$$|\lambda| = \sqrt{(a^2 + b^2)} < 1.$$

Viu-se que, para todo $y \in \mathcal{C}\ell(U)$ existe uma vizinhança W_y de y e um número positivo γ_y tal que a derivada de $\phi(t,x)$ com respeito a x no ponto z tem todos seus autovalores com módulo menor do que 1, para todo $z \in W_y$ e para todo $t \in (0, \gamma_y)$. Sendo assim, sejam W_{y_1}, ..., W_{y_k}, uma cobertura finita de $\mathcal{C}\ell(U)$ e tome $T = \min\{\gamma_{y_1}, ..., \gamma_{y_k}\}$. Como $T > 0$, (i) fica provado.

Para a prova (ii), faz-se uso da equação (3.18). Observe que se, para qualquer $z \in \mathbb{R}^n$ e $t \in (0, t_x]$, para algum $t_x > 0$, a derivada de $\phi(t,x)$ com respeito a x avaliada em z tem autovalores com módulo menor que um, então o limite tem parte real menor ou igual a zero.

Esta observação prova (ii) e completa a prova do Lema. □

O conjunto dos valores de t para os quais a parte (i) do Lema 3.4.1 é verdadeira não pode ser estendido a $\mathbb{R}^+$ devido ao seguinte resultado conhecido e de alguns contra-exemplos com órbitas periódicas, ver Exemplo 6.2.8.

Lema 3.4.2 (Hartmann [29]). *Assuma que (3.17) tenha uma órbita periódica de período T. Então o fluxo de tempo T tem um autovalor igual a um.*

Se a resposta ao PMYD para fluxos (que são casos particulares de difeomorfismos) fosse afirmativa, então seria possível concluir que o sistema (3.17) tem um atrator global sob a hipótese de que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\phi(t,x)$ está definida para algum $t > 0$ e $\phi(t,\cdot)$ tem todos seus autovalores com módulo menor do que um.

3.5 A Resposta ao PMYD(n) para Difeomorfismos

Nesta seção é exibido um difeomorfismo racional de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, que satisfaz a hipótese do PMYD(n) e tem uma órbita periódica. Este exemplo é uma modificação do exemplo de Szlenk o qual é apresentado no Teorema que segue e que será demonstrado na seção 3.6.

Teorema 3.5.1 (Szlenk). *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por,*

$$F(x,y) = \left(\frac{-ky^3}{1+x^2+y^2}, \frac{kx^3}{1+x^2+y^2} \right),$$

onde $k \in (1, 2/\sqrt{3})$. A aplicação F possui as seguintes propriedades,

(1) Tome $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ e seja λ um autovalor de $JF(p)$. Se $xy = 0$ então $\lambda = 0$. Caso contrário $\lambda \notin \mathbb{R}$ e $|\lambda| < k\sqrt{3}/2$.

(2) $F^4(1/\sqrt{k-1}, 0) = (1/\sqrt{k-1}, 0)$.

(3) F é injetiva.

Defina, agora,

$$G_a(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{-kx_2^3}{1+x_1^2+x_2^2} - ax_1, \frac{kx_1^3}{1+x_1^2+x_2^2} - ax_2, cx_3, ..., cx_n \right),$$

onde $|c| < 1$ e $k \in (1, 2/\sqrt{3})$.

Teorema 3.5.2. *Para a suficientemente pequeno, a aplicação G_a, definida acima, é um difeomorfismo global de $\mathbb{R}^n$ nele mesmo que satisfaz as seguintes propriedades,*

(1) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se λ é um autovalor da derivada de G_a no ponto x, então $|\lambda| < 1$.

(2) $G_a(0) = 0$ e existe $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ tal que $G_a^4(p) = p$.

Demonstração. Observe, primeiramente, que pode-se assumir $n = 2$. Assim, $G_a = F - aI$, onde F é dada como no Teorema 3.5.1 e I é a identidade em $\mathbb{R}^2$.

Como $JF(x)$ tem, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, autovalores com módulo menor do que $k\sqrt{3}/2$, segue que, para a pequeno suficiente, $JG_a(x)$ tem, para todo x, autovalores com módulo menor do que um.

Note que, uma vez que $JF(x)$ tem todos os seus autovalores diferentes de a, $JG_a(x)$ tem, para cada $x \in \mathbb{R}^2$, autovalores diferentes de zero. Lembre-se de que os autovalores de $JF(x)$ ou são iguais a zero ou têm parte imaginária não nula.

Então G_a é um difeomorfismo local em $\mathbb{R}^2$.

Para a conclusão de que G_a é um difeomorfismo global em $\mathbb{R}^2$, pode-se recorrer ao Teorema de Hadamard [28] que assegura que aplicações suaves de $\mathbb{R}^n$ nele mesmo são difeomorfismos globais quando são difeomorfismos locais e são próprias.

Lembre-se de que uma aplicação é própria quando a pré-imagem de qualquer conjunto compacto é também um conjunto compacto.

Assim, vejamos que G_a é própria. Para isso é suficiente mostrar que,

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} |G_a(x,y)| = \infty. \tag{3.19}$$

De fato, como G_a é contínua, já pode-se concluir que a pré-imagem, por G_a, de um conjunto fechado também é um conjunto fechado. Restando mostrar que conjuntos limitados têm pré-imagem, por G_a, limitada.

Por contraposição, isso é equivalente a mostrar que conjuntos ilimitados têm imagem ilimitada, que é exatamente o que a equação (3.19) significa.

Um cálculo simples permite verificar que,

$$|G_a(x,y)|^2 = \frac{k^2r^6(\cos^6\theta + \operatorname{sen}^6\theta) + a^2r^2(1+r^2)^2 - kar^4 \operatorname{sen} 4\theta(1+r^2)/2}{(1+r^2)^2},$$

onde r e θ denotam as coordenadas polares usuais associadas a (x,y).

Usando que ,

$$\cos^6\theta + \operatorname{sen}^6\theta \geq \frac{1}{4} \quad , \quad \operatorname{sen} 4\theta \leq 1 \quad \text{e} \quad 1 + r^2 < 2r^2 \quad \text{para } r \text{ grande},$$

chega-se a,

$$\begin{aligned} |G_a(x,y)|^2 &\geq \frac{k^2r^6}{4(1+r^2)^2} + a^2r^2 - \frac{kar^4}{2(1+r^2)} \\ &\geq \frac{k^2r^6}{16r^4} + a^2r^2 - \frac{kar^2}{2} \\ &= \left(\frac{k}{4} - a\right)^2 r^2, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{r\to\infty} |G_a(x,y)| = \infty.$$

Desta forma, conclui-se que G_a é um difeomorfismo global em $\mathbb{R}^n$, desde que $a \neq 0$.

Tome $p = (1/\sqrt{k-1}, 0)$. Um cálculo simples permite verificar que,

$$JF^4(p) = \begin{pmatrix} \left(3 - \frac{2}{k}\right)^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovalores de $JF^4(p)$ são de módulo diferente de um e, portanto, a órbita periódica é hiperbólica. Sendo assim, a órbita periódica sobrevive à pequenas perturbações da aplicação.

Segue que, se a é pequeno suficiente G_a ainda possui uma órbita de período quatro. Isso conclui a prova do Teorema. □

3.6 Prova do Teorema 3.5.1

Esta seção é dedicada à prova do Teorema 3.5.1 que é devido a W. Szlenk.

O Teorema 3.5.1 em questão fornece um exemplo de um homeomorfismo suave global, que não é um difeomorfismo, que responde de forma negativa ao PMYD(2).

Prova do Teorema 3.5.1. Vejamos a prova de (1).

Através de cálculos simples pode-se ver que,

$$\det JF(x,y) = \frac{3k^2x^2y^2(x^2+y^2+3)}{(1+x^2+y^2)^3},$$

e,

$$\operatorname{Tr} JF(x,y) = \frac{-2kxy(x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2},$$

onde Tr denota o traço do operador.

Usando coordenadas polares, obtemos,

$$\begin{aligned}\det JF(r,\theta) &= \frac{3k^2 \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta r^4(r^2+3)}{(1+r^2)^3}\\ &= \frac{3k^2\operatorname{sen}^2 2\theta(r^6+3r^4)}{4(r^6+3r^4+3r^2+1)}\\ &< \frac{3k^2}{4} \leq 1.\end{aligned}$$

Por outro lado, tem-se que o discriminante do polinômio característico de $JF(x,y)$, $\Delta(x,y)$, satisfaz,

$$\begin{aligned}\Delta(x,y) &= \operatorname{Tr}^2(JF(x,y)) - 4\det(JF(x,y))\\ &= -4k^2x^2y^2\left[\frac{2x^4+8x^2y^2+2y^4+12x^2+12y^2+9}{(1+x^2+y^2)^4}\right]\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

Se $xy = 0$, então $\det JF(x,y) = 0$ e $\operatorname{Tr} JF(x,y) = 0$ de onde segue que $\lambda = 0$. Caso contrário $\Delta(x,y) < 0$ e, portanto, os autovalores de $JF(x,y)$ não são reais.

Quando os autovalores não são reais,

$$|\lambda| = \sqrt{\det JF(x,y)} < \sqrt{\frac{3k^2}{4}} = \frac{k\sqrt{3}}{2}.$$

Isso conclui a prova do item (1).

Para provar o item (2) vejamos que, se for definido,

$$h(x) = \frac{kx^3}{1+x^2},$$

e for tomado $z = 1/\sqrt{k-1}$, tem-se,

$$h(z) = \frac{k\dfrac{1}{(k-1)\sqrt{k-1}}}{1+\dfrac{1}{k-1}} = \frac{\dfrac{k}{\sqrt{k-1}}}{k} = \frac{1}{\sqrt{k-1}} = z.$$

Com base nisto pode-se observar que, se $p = (1/\sqrt{k-1}, 0) = (z, 0)$, então,

$$F(p) = (0, h(z)) = (0, z).$$

Ainda temos que,

$$F(F(p)) = F(0,z) = (-h(z),0) = (-z,0).$$

Portanto, prosseguindo, tem-se que $F^4(p) = (z,0) = p$, provando (2).

Para provar (3) suponha, por contradição, que existam p_1 e p_2 em $\mathbb{R}^2$ tais que $p_1 \neq p_2$ e $F(p_1) = F(p_2)$.

Sendo assim,

$$\frac{-ky_1^3}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{-ky_2^3}{1+x_2^2+y_2^2}, \tag{3.20}$$

e,

$$\frac{kx_1^3}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{kx_2^3}{1+x_2^2+y_2^2}, \tag{3.21}$$

onde $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$.

Suponha, sem perda de generalidade que $y_2 > y_1$ e tome $c = y_2/y_1 > 1$.

Neste ponto deve-se observar que as componentes x_1, x_2, y_1 e y_2 são todas diferentes de zero. Pois, suponha que $x_1 = 0$, então a segunda componente de $F(p_1)$ também seria nula o que, por sua vez implicaria que $x_2 = 0$. Mas, se $x_1 = x_2 = 0$, necessariamente $y_1 = y_2$ pois $F(0,y) = (-h(y),0)$ e a função $h(x)$ definida acima é injetiva, uma vez que sua derivada é maior que zero em todo ponto da reta, exceto na origem.

Assim, pode-se dividir as igualdades (3.20) e (3.21), membro a membro, chegando à relação,

$$\frac{x_1^3}{y_1^3} = \frac{x_2^3}{y_2^3},$$

que leva à igualdade,

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = c. \tag{3.22}$$

Agora vejamos que, da equação (3.20),

$$\begin{aligned}
&\frac{y_1^3}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{y_2^3}{1+x_2^2+y_2^2} \\
\Rightarrow &\frac{y_1^3}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{c^3y_1^3}{1+x_2^2+c^2y_1^2} \\
\Rightarrow &\frac{1}{1+x_1^2+y_1^2} = \frac{c^3}{1+x_2^2+c^2y_1^2} \\
\Rightarrow &1+x_1^2+y_1^2 = \frac{1+x_2^2+c^2y_1^2}{c^3}.
\end{aligned}$$

Isso implica que,

$$\begin{aligned}
x_2^2 &= c^3 + c^3x_1^2 + y_1^2c^3 - 1 - c^2y_1^2 \\
&= (c^3-1) + y_1^2(c^3-c^2) + c^3x_1^2 > c^3x_1^2 > c^2x_1^2.
\end{aligned}$$

Esta desigualdade contradiz a relação (3.22). Tal contradição prova o item (3) e completa a prova do teorema. □

Capítulo

4

Injetividade de Difeomorfismos Locais a partir de Condições Quase Espectrais

Neste capítulo será estudado sistematicamente o artigo **"Injectivity of Local Diffeomorphisms from Nearly Spectral Conditions"** [3], sob autoria de Brian Smith e Frederico Xavier.

De início enuncia-se a conjetura bidimensional de estabilidade assintótica global.

Conjectura Bidimensional de Estabilidade Assintótica Global: Se f é um campo de vetores de classe $\mathcal{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^2$ com uma singularidade na origem e os autovalores de $Df(x)$ possuem parte real negativa para todo $x \in \mathbb{R}^2$, então a variedade estável associada a origem é $\mathbb{R}^2$.

A resposta afirmativa a esta conjectura foi dada independentemente por Fessler [16] e por Gutierrez [17] (ver Teorema 2.3.1). Outra prova ainda diferente, devida a Glutsyuk, pode ser encontrada em [27].

Mais adiante, Bernat e Llibre [56] deram um contra-exemplo analítico para a Conjectura de Markus-Yamabe em dimensão quatro ou mais, ver exemplo 6.2.8. O exemplo dado por eles possui uma órbita periódica limitada e que, portanto, não tende para a origem com a evolução do tempo. Após isso, Anna Cima, Arno van den Essen, Armengol Gasull, Engelbert Hubbers e Francesco Mañosas encontraram um campo de vetores *polinomial*, extremamente simples,

em dimensão três e quatro (e, é claro, maiores), o qual consistia em um contra-exemplo para a Conjectura de Markus-Yamabe. Neste caso não existiam órbitas periódicas mas, ao invés disso, órbitas que escapavam para infinito com o tempo, ver exemplo 6.2.9.

Agora, permanecem algumas questões em aberto. Por exemplo,

Questão 1: Se um campo vetores *polinomial* cumpre com as hipóteses da Conjectura de Markus-Yamabe então todas as suas órbitas limitadas tendem para a origem e todas as suas órbitas ilimitadas tendem para o infinito à medida que o tempo evolui para infinito?

Questão 2: O que a hipótese da Conjectura de Estabilidade Assintótia Global impõe sobre os campos de vetores polinomiais, analíticos e outros?

Os autores do artigo não estavam interessados em desenvolver resultados a cerca da Conjectura de estabilidade assintótica global. Na verdade, os resultados do artigo estudado neste capítulo não têm superposição com os resultados dos artigos mencionados acima e a técnica utilizada pelos autores é nova.

A referência [17] é de grande interesse no desenvolvimento que será feito aqui por conter o resultado muito forte de injetividade, enunciado por Gutierrez,

Teorema de Injetividade : *Uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$ é injetiva se,*

$$[0, \infty) \cap \operatorname{Spec}(Df(x)) = \emptyset,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Este resultado e um Teorema de Olech [19] são ingredientes essenciais da solução encontrada por Gutierrez em [17].

O objetivo deste capítulo está dividido em três etapas.

(i) Um Teorema sobre difeomorfismos locais definidos em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, com condições "quase" espectrais (Teorema 4.1.1).

(ii) A existência de exemplos mostrando que o resultado de injetividade de Gutierrez, citado acima, não continua válido se aplicado em dimensões mais altas (Teorema 4.1.4).

(iii) Um Teorema de injetividade com hipóteses sobre o espectro para difeomorfismos locais definidos em discos de $\mathbb{R}^2$ (Teorema 4.1.3).

A idéia do método usado pelos autores do artigo estudado, pode ser esboçada da seguinte forma.

Para mostrar que um difeomorfismo local $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é injetivo, é construída uma nova aplicação $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, obtida a partir de f por uma construção similar à aplicação exponencial na geometria riemaniana. Depois é mostrado que f é injetiva se ψ for sobrejetiva. Pode-se considerar ψ como uma espécie de "adjunta não-linear" de f.

A vantagem deste método é reduzir questões sobre injetividade a questões sobre sobrejetividade as quais podem ser tratadas utilizando várias técnicas de análise não-linear.

4.1 Enunciado dos Resultados

Para fixar notação, considere,

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n; |v| = 1\},$$

a esfera unitária de $\mathbb{R}^n$ e quando $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, H_v denota qualquer região de $\mathbb{R}^n$ limitado por dois hyperplanos ortogonais a v, figura 4.1, que será denominado *v-setor*.

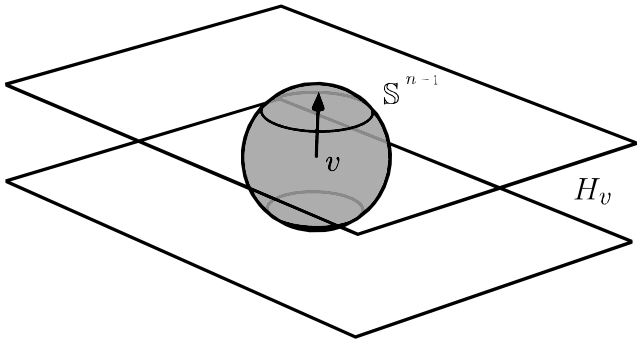


Figura 4.1: Um v-setor.

O próximo resultado é provado usando teoria de graus.

Teorema 4.1.1. *Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, de classe $\mathcal{C}^1$, é injetiva se,*

(i) $[0, \infty) \cap \mathrm{Spec}\,(Df(x)) = \emptyset$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *e,*

(ii) Para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ *e para cada v-setor* H_v*,*

$$\int_0^\infty \left(1 - \left\langle v, \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|} \right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} ds = \infty,$$

para qualquer curva $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ *com velocidade unitária e imagem contida no v-setor* H_v*, que satisfaz,*

$$\lim_{s \to \infty} |x(s)| = \infty.$$

Vejamos que, o integrando em (ii) envolvendo $Df(x)^*$ (a adjunta da linearização $Df(x)$) é sempre positivo.

De fato, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left\langle v, \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|} \right\rangle \leq |v|. \left| \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|} \right| = 1.$$

Portanto o integrando é não negativo.

No entanto, supondo que o integrando seja nulo, temos,

$$\left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|} \right\rangle = 1,$$

o que implica que,

$$v = \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|},$$

ou seja, v é autovetor de $Df(x)^*$ associado a um autovalor λ. Mas, então,

$$v = \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|} = \frac{\lambda v}{|\lambda v|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\, v,$$

Implicando que $\lambda = |\lambda|$ e que, portanto, $\lambda \in [0, \infty)$. Mas isso contraria a hipótese (i) mostrando que realmente o integrando é positivo.

É claro que isso tende a tornar a integral infinita. O que deve ser observado é que o resultado diz que um difeomorfismo local é injetivo se o espectro não intersectar o conjunto $[0, \infty)$, exigência explícita através da condição (i), e também não se aproximar muito rapidamente do mesmo conjunto, o que é formalizado pela condição (ii). Neste sentido, a condição (ii) fornece restrições sobre as proximidades do espectro, é com esta idéia que as hipóteses do teorema foram chamadas "quase" espectrais.

Como conseqüência obtém-se o resultado,

Teorema 4.1.2. *Uma difeomorfismo local de classe $\mathcal{C}^1$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ é injetiva se, para cada $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ e para cada v-setor H_v,*

$$\sup_{x \in H_v} \left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|} \right\rangle < 1$$

O Teorema 4.1.2 generaliza fortemente a conhecida condição suficiente para a injetividade,

$$\left\langle Df(x)v, v \right\rangle < 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ e para todo } v \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Por uma variação do argumento utilizado no Teorema 4.1.2, podemos provar o seguinte resultado,

Teorema 4.1.3. *Seja $B(r)$ um disco aberto de raio r em $\mathbb{R}^2$ e seja $f : B(r) \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$. Se*

(i) $[0, \infty) \cap \operatorname{Spec}(Df(x)) = \emptyset$, *para todo $x \in B(r)$ e,*

(ii) $\mathbb{R} \cap \operatorname{Spec}(Df(x)) = \emptyset$, *para todo $x \notin B(r/\sqrt{2})$,*

então f é injetiva em $B(r/\sqrt{2})$.

Finalmente, usando resultados de geometria algébrica é possível de se construir exemplos mostrando que o resultado de injetividade de Gutierrez não pode ser aplicado em dimensões mais altas.

Teorema 4.1.4. *Existem inteiros $n > 2$ e aplicações polinomiais não injetivas $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tais que,*

$$[0, \infty) \cap \operatorname{Spec}(Df(x)) = \emptyset,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Na verdade, pode-se exibir f como no Teorema 4.1.4 explicitamente, porém o inteiro n deve ser grande.

4.2 Provas dos Teoremas 4.1.1 e 4.1.3

Primeiramente vejamos as provas destes resultados sob a hipótese de que f seja uma aplicação suave, ou seja, $\mathcal{C}^\infty$. Esta exigência será removida ao final da seção.

Para $v \in \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, defina o campo de vetores G_v sobre $\mathbb{R}^n$ por,

$$G_v(x) = v - \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|}.$$

Considere a seguinte propriedade,

(P) Para todo $a, b \in \mathbb{R}^n$, distintos, existe $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que a G_v-trajetória de a contém b.

Vejamos que se (P) é verdadeira, então f é injetiva.

De fato, suponha que $f(a) = f(b)$ com $a \neq b$ e seja v como no enunciado de (P), com correspondente G_v-trajetória $\phi_v(t)$, onde $\phi_v(0) = a$ e $\phi_v(t_0) = b$.

Considerando $x(t) = \phi_v(t)$ temos que,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big\langle f(x(t)), v \Big\rangle &= \Big\langle \frac{d}{dt} f(x(t)), v \Big\rangle + \Big\langle f(x(t)), \frac{dv}{dt} \Big\rangle \\
&= \Big\langle Df(x(t)) \frac{dx(t)}{dt}, v \Big\rangle \\
&= \Big\langle \frac{dx(t)}{dt}, Df(x(t))^* v \Big\rangle \\
&= \Big\langle G_v(x(t)), Df(x(t))^* v \Big\rangle \\
&= \Big\langle v - \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|}, Df(x(t))^* v \Big\rangle \\
&= |Df(x)^* v| \left(-1 + \Big\langle v, \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|} \Big\rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Como já foi analisado na hipótese (ii) do Teorema 4.1.1, a última sentença escrita acima é negativa.

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo temos,

$$\Big\langle f(b) - f(a), v \Big\rangle = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \Big\langle f(x(t)), v \Big\rangle < 0. \tag{4.2}$$

Mas isso contraria o fato de $f(a) = f(b)$.

Agora vejamos que a propriedade (P) é implicada pelas hipóteses dos Teoremas 4.1.1 e 4.1.3.

Prova do Teorema 4.1.1. Como já foi visto em comentários anteriores, a hipótese (i) implica que,

$$\left(1 - \left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|}\right\rangle\right) \neq 0,$$

pois a expressão apenas se anularia caso v fosse autovetor associado a algum autovalor real não negativo.

Desta forma, pode-se definir o campo de vetores $\overline{G_v}$ por,

$$\overline{G_v}(x) = \left(1 - \left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|}\right\rangle\right)^{-1} G_v(x).$$

Afirma-se que $\overline{G_v}$ é um campo de vetores *completo*, ou seja, que todas suas soluções estão definidas para todo tempo t.

Suponha, por contradição, que $x(t)$, com $0 \leq t < \tau < \infty$, seja uma trajetória maximal de $\overline{G_v}$ e que s seja o seu comprimento de arco.

Então,

$$\tau = \int_0^\tau dt = \int_0^\infty \frac{dt}{ds}\, ds = \int_0^\infty \frac{1}{|\overline{G_v}(x(s))|}\, ds = \int_0^\infty \frac{\left|1 - \left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|}\right\rangle\right|}{\sqrt{\left\langle v - \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|}, v - \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|}\right\rangle}}\, ds$$

$$= \int_0^\infty \frac{\left|1 - \left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|}\right\rangle\right|}{\sqrt{2 - 2\left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|}\right\rangle}}\, ds = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \left(1 - \left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|}\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} ds,$$

mostrando que a última integral é finita.

Observe que as passagens acima são justificadas pelo fato do campo $\overline{G_v}$ não se anular.

Agora, vejamos que, dado qualquer $\xi \in [0, \tau)$,

$$\left\langle x(\xi) - x(0), v\right\rangle = \int_0^\xi \frac{d}{dt}\left\langle x(t), v\right\rangle dt = \int_0^\xi \left\langle \overline{G_v}(x(t)), v\right\rangle dt = \int_0^\xi 1\, dt = \xi < \tau,$$

e, assim, como a projeção do arco de trajetória na direção do vetor v tem comprimento limitado, tem-se que $x([0, \tau))$ está contida num v-setor, contrariando a hipótese (ii) no enunciado do Teorema.

Isso mostra que o campo de vetores $\overline{G_v}$ é completo.

Sendo f suficientemente diferenciável, pode-se definir uma aplicação contínua $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por,

$$\psi(x) = \begin{cases} a & \text{, se } x = 0 \\ \phi_{\frac{x}{|x|}}(|x|) & \text{, se } x \neq 0 \end{cases}$$

Nesta parte do argumento ϕ_v denota a curva integral de $\overline{G_v}$ passando por a em tempo zero.

Claramente a propriedade (P) seguirá se a sobrejetividade de ψ for provada.

Esta etapa da demonstração será cumprida mostrando que a aplicação ψ é propriamente homotópica à identidade. A conclusão então seguirá da invariância do grau topológico sob homotopias próprias.

Defina $H : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por $H(s,w) = (1-s)\psi(w) + s\,w$.

Assim, lembrando que $\langle \overline{G_v}(x), v \rangle = 1$,

$$t = \int_0^t dt = \int_0^t \left\langle \overline{G_v}(x(t)), v \right\rangle dt = \left\langle \phi_v(t), v \right\rangle - \left\langle \phi_v(0), v \right\rangle,$$

permite concluir que,

$$\left\langle \phi_v(t), v \right\rangle = \left\langle \phi_v(0), v \right\rangle + t,$$

que, tomando $v = w/|w|$, conduz a,

$$\left\langle \psi(w), \frac{w}{|w|} \right\rangle = \left\langle a, \frac{w}{|w|} \right\rangle + |w|.$$

Daqui, pode-se concluir que,

$$\begin{aligned}
\left\langle H(s,w), \frac{w}{|w|} \right\rangle &= \left\langle (1-s)\,\psi(w) + s\,w, \frac{w}{|w|} \right\rangle \\
&= (1-s)\left\langle \psi(w), \frac{w}{|w|} \right\rangle + s\left\langle w, \frac{w}{|w|} \right\rangle \\
&= (1-s)\left(\left\langle a, \frac{w}{|w|} \right\rangle + |w| \right) + s\,|w| \\
&= (1-s)\left\langle a, \frac{w}{|w|} \right\rangle + |w| \\
&\geq |w| - |a|,
\end{aligned}$$

sendo que, a última passagem, é justificada por,

$$-|a| \leq -(1-s)|a| \leq (1-s)\left\langle a, \frac{w}{|w|} \right\rangle.$$

Decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz que,

$$|H(s,w)| = |H(s,w)|\,.\left|\frac{w}{|w|}\right| \geq \left\langle H(s,w), \frac{w}{|w|} \right\rangle \geq |w| - |a|,$$

e que, portanto,

$$\lim_{|w|\to\infty} |H(s,w)| = \infty,$$

uniformemente com respeito a $s \in [0,1]$, ou seja, H é própria.

Isso conclui a prova do Teorema 4.1.1 sob a hipótese mais forte de que f seja suave. $\square$

Prova do Teorema 4.1.3. Na prova do Teorema 4.1.3 se procede de forma similar à prova anterior. Novamente deve-se mostrar que (P) é verdadeira para cada par de pontos a e b de $B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})$, com $\varepsilon > 0$ pequeno suficiente para que (ii), no enunciado do Teorema, valha para o complementar de $B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})$.

Nesta argumentação, o campo G_v, usado na demonstração anterior, é modificado ligeiramente, tomando,

$$\overline{G_v}(x) = \rho(x)\frac{G_v(x)}{|G_v(x)|},$$

onde ρ é uma função suave não-negativa em $B(r)$ a qual vale um em $B(r-\varepsilon)$ e cujo suporte é um disco no interior de $B(r)$, ver figura 4.2.

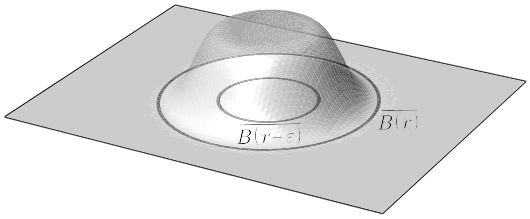


Figura 4.2: O gráfico da função ρ.

As curvas integrais $\phi_v(t)$ (passando por a em tempo zero) destes novos campos $\overline{G_v}$ são definidas para todo $t \geq 0$, pois a função ρ anula-se fora da bola de raio r e portanto, restringe as soluções ao disco. Além disso, vale a pena ressaltar que as curvas soluções de G_v coincidem com as curvas soluções de $\overline{G_v}$ em $\overline{B(r-\varepsilon)}$.

Se, para algum v ocorrer de $\phi(t_0) = b$, de forma análoga como foi feito anteriormente,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big\langle f(\phi_v(t)), v\Big\rangle &= \Big\langle Df(\phi_v(t))\frac{d\phi_v(t)}{dt}, v\Big\rangle \\
&= \Big\langle Df(x)\rho(x)\frac{G_v(x)}{|G_v(x)|}, v\Big\rangle \\
&= \frac{\rho(x)}{|G_v(x)|}\Big\langle G_v(x), Df(x)^* v\Big\rangle.
\end{aligned}$$

Como ρ é uma função não negativa e o produto interno no último membro é negativo, pela equação (4.1), segue que a expressão é não positiva.

Na verdade, se $a \in \overline{B(r-\varepsilon)}$, o que implica que $\rho(a) > 0$, então, segue como na equação (4.2) que,

$$\Big\langle f(b) - f(a), v\Big\rangle < 0,$$

e, assim, que f não pode identificar o ponto a com o ponto b.

Pela hipótese (i) do Teorema tem-se que,

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{G_v}(x), v \right\rangle &= \left\langle \frac{\rho(x)}{|G_v(x)|} G_v(x), v \right\rangle \\ &= \frac{\rho(x)}{|G_v(x)|} \left(\left\langle v, v \right\rangle - \left\langle \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|}, v \right\rangle \right) \\ &= \frac{\rho(x)}{|G_v(x)|} \left(1 - \left\langle \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|}, v \right\rangle \right) \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

para todo $x \in B(r)$ e que,

$$\left\langle \overline{G_v}(x), v \right\rangle > 0,$$

em $\overline{B(r-\varepsilon)}$, pois $\rho \equiv 1$ nesta bola.

Como a função $(x, v) \mapsto \left\langle \overline{G_v}(x), v \right\rangle$ é contínua e $\overline{B(r-\varepsilon)}$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^2$ pode-se definir $k(\varepsilon)$ da forma,

$$k(\varepsilon) = \inf \left\{ \left\langle \overline{G_v}(x), v \right\rangle ; x \in \overline{B(r-\varepsilon)}, v \in \mathbb{S}^1 \right\}.$$

Desta forma,

$$\frac{d}{dt} \left\langle \phi_v(t), v \right\rangle \geq k(\varepsilon) > 0,$$

desde que $\phi_v(t) \in \overline{B(r-\varepsilon)}$.

Isso implica que a velocidade com que as trajetórias são percorridas no interior do disco $\overline{B(r-\varepsilon)}$ tem uma componente maior ou igual a $k(\varepsilon)$ na direção de v.

Assim, cada trajetória $\phi_v(t)$ sai de $\overline{B(r-\varepsilon)}$ em,

$$\tau(\varepsilon) = 2\,\frac{r-\varepsilon}{k(\varepsilon)},$$

ou antes deste tempo.

Considere i a unidade imaginária complexa ou, pela equivalência de $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$,

$$i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vejamos que, pela hipótese (ii) a expressão $\langle \overline{G_v}(x), i\,v \rangle$ tem sinal fixo, independente de v, no conjunto,

$$K = \overline{B(r-\varepsilon)} - B((r-\varepsilon)/\sqrt{2}).$$

De fato,

$$\left\langle \overline{G_v}(x), i\,v \right\rangle = \frac{\rho(x)}{|G_v(x)|} \left\langle v - \frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|}, i\,v \right\rangle = \frac{\rho(x)}{|G_v(x)|} \left\langle -\frac{Df(x)^* v}{|Df(x)^* v|}, i\,v \right\rangle$$

Neste caso, a figura 4.3, ilustra o lugar geométrico permitido aos vetores $Df(x)^* v/|Df(x)^* v|$, mostrando que existem dois pontos no círculo unitário sobre os quais

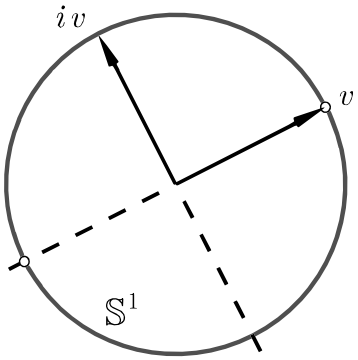


Figura 4.3: Posições permitidas aos vetores $Df(x)^*v/|Df(x)^*v|$.

estes vetores não podem estar, devido à restrição imposta aos autovalores de $Df(x)^*$ na hipótese (ii) do Teorema.

Agora, considere o conjunto conexo $K \times \mathbb{S}^1$. Novamente pela continuidade da função

$$\begin{aligned} \xi \ : \ & K \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (x, v) \longmapsto \left\langle \overline{G_v}(x), iv \right\rangle, \end{aligned}$$

vê-se que, a existência de dois pares (x, v) e (y, w) de $K \times \mathbb{S}^1$ tais que o sinal de $\xi(x, v)$ seja diferente do sinal de $\xi(y, w)$ implica na existência de algum par $(z, u) \in K \times \mathbb{S}^1$ tal que $\xi(z, u) = 0$. Mas esta conclusão viola a observação acima e portanto viola a hipótese (ii) do Teorema.

Sem perda de generalidade assuma que este sinal seja positivo.

Para cada $v \in \mathbb{S}^1$ seja Σ_v o quadrado tangente a $B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})$ com lados paralelos a v e $i\,v$. Note que tal quadrado está contido em K, figura 4.4.

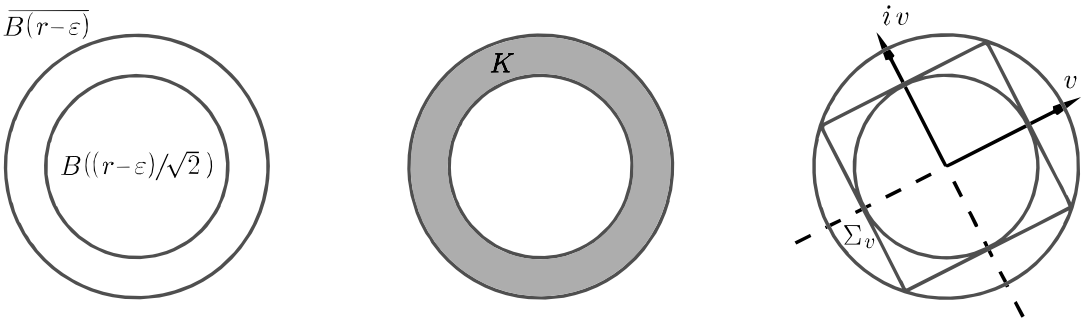


Figura 4.4: As bolas $\overline{B(r-\varepsilon)}$, $B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})$ e o quadrado Σ_v.

Suponha que, para algum $v \in \mathbb{S}^1$, a trajetória $\phi_v(t)$, e que, conseqüentemente, sai de $\overline{B(r-\varepsilon)}$, entre novamente em $B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})$ e, portanto, em Σ_v).

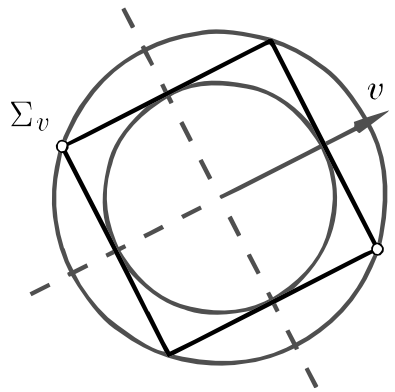


Figura 4.5: Arestas pelas quais $\phi_v(t)$ pode entrar ou sair de $\overline{B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})}$.

Como $\langle \overline{G_v}(x), i\,v\rangle > 0$ e $\langle \overline{G_v}(x), v\rangle > 0$ em K, a trajetória $\phi_v(t)$, que passa por $\overline{B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})}$ uma vez que $a \in \overline{B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})}$, pode apenas deixar Σ_v pela região de seu bordo que corresponde a parte superior em destaque na figura 4.5. Além disso, tal trajetória só pode entrar em em Σ_v pela região de seu bordo correspondente à parte inferior em destaque na figura 4.5.

Como $\langle \overline{G_v}(x), v\rangle \geq 0$ em $B(r)$, está trajetória nunca volta para Σ_v.

Em resumo, uma vez fora de $\overline{B(r-\varepsilon)}$ a trajetória nunca retorna a $B((r-\varepsilon)/\sqrt{2})$.

Seja Ω o disco fechado de raio $\tau(\varepsilon)$, definido acima, com centro na origem de $\mathbb{R}^2$. Pode-se definir uma aplicação contínua $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ como,

$$\psi(x) = \begin{cases} a & \text{, se } x = 0 \\ \phi_{\frac{x}{|x|}}(|x|) & \text{, se } x \neq 0 \end{cases}.$$

A discussão anterior mostra que $\psi(\partial\Omega) \cap B((r-\varepsilon)/\sqrt{2}) = \emptyset$.

Notemos que, como

$$\left\langle \frac{d}{dt}\phi_v(t), v \right\rangle > 0,$$

para todo v numa vizinhança da origem, então a é atingido precisamente uma vez por ψ e, assim, o seu índice com respeito à curva $\psi(\partial\Omega)$ é não nulo. De fato, dentro do disco $\overline{B(r-\varepsilon)}$ vale a desigualdade acima, portanto se uma trajetória ϕ_v retornasse a a, ela precisaria sair do tal disco primeiro, mas como já foi mostrado, se uma trajetória sai deste disco ela não entra mais no disco $B\left(r-\varepsilon/\sqrt{(2)}\right)$.

Como o segmento $\overline{ab}$ não toca $\psi(\partial\Omega)$, pois $\overline{ab} \subset \overline{B(r-\varepsilon)}$, segue, das considerações anteriores, que b também deve ter um índice não nulo com respeito a curva, aliás o mesmo índice de a pois estão na mesma componente conexa.

Mas, se for suposto que $b \notin \psi(\Omega)$ então, seguiria da homotopia natural,

$$\psi_s = \psi|_{|z|=s}, \text{ com } 0 \leq s \leq \tau(\varepsilon),$$

que b deveria ter o mesmo índice com respeito a cada uma das curvas ψ_s. Como ψ_0 é constante igual a a, o ponto b teria índice nulo relativamente a curva ψ_0.

Esta contradição significa que $\psi(w) = b$ para alguma $w \in \Omega$, isto é, $\phi_v(t) = b$ para algum $v \in \mathbb{S}^1$ e $t > 0$.

Finalmente, pela propriedade (P) segue a prova do Teorema. □

Observe que, nas provas dos Teoremas 4.1.1 e 4.1.3 dadas acima, foi necessário exigir que f fosse suficientemente suave para garantir que a aplicação ψ ficasse bem definida.

Agora será mostrado como pode ser retirada a hipótese de suavidade de f no Teorema 4.1.1. Uma observação semelhante pode ser usada no caso do Teorema 4.1.3.

Suponha que f, como no Teorema 4.1.1 seja apenas de classe $\mathcal{C}^1$.

Pode-se aproximar f na topologia de Whitney $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ por aplicações suaves f_n verificando as hipóteses e tais que f_n convirjam para f uniformemente em conjuntos compactos.

Nosso trabalho anterior implica que f_n é injetiva qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Para concluir que f é injetiva usamos alguns fatos simples sobre o grau topológico.

Suponha que $f(p_1) = f(p_2) = q$ com $p_1 \neq p_2$. Como f é um difeomorfismo local de classe $\mathcal{C}^1$, existem vizinhanças disjuntas limitadas U_i de p_i, para $i = 1, 2$, que são homeomorficamente mapeadas sobre uma vizinhança V de q. Em particular,

$$\deg(f, U_i, q) \in \{1, -1\}, \text{ com } i = 1, 2,$$

conforme f preserve ou reverta orientação.

Como a restrição de f_n ao compacto $\overline{U_i}$ converge uniformemente para a restrição de f a $\overline{U_i}$, temos que,

$$\deg(f_n, U_i, q) \in \{1, -1\}, \text{ com } i = 1, 2,$$

desde que n deja suficientemente grande.

Mas isso contraria a injetividade de f_n.

Com esta contradição a prova dos dois Teoremas fica completa.

Como observado na introdução, o Teorema 4.1.3 nem implica e nem é implicado pelo resultado de injetividade de Gutierrez. No entanto, pode-se citar aqui um caso especial de seu resultado, que segue da prova do Teorema 4.1.3.

Até onde se sabe, isto é o mais próximo que o método usado aqui se aproxima do resultado de Gutierrez.

Teorema 4.2.1. *Uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$, é injetiva se,*

$$[0, \infty) \cap \operatorname{Spec}(Df(x)) = \emptyset, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2,$$

e, em cada faixa o conjunto dos pontos y onde,

$$(-\infty, 0) \cap \operatorname{Spec}(Df(y)) \neq \emptyset,$$

é limitado.

4.3 Perturbação da Identidade por Aplicações Homogêneas e a Prova do Teorema 4.1.4

Definição 4.3.1. Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ homogênea de grau r com $r > 1$, isto é,

$$H(\tau x) = \tau^r H(x), \text{ para todo } \tau > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^n.$$

Então à aplicação $F = I - H$, onde I denota a aplicação identidade dá-se o nome de *perturbação da identidade por uma aplicação homogênea*.

Enquanto, num primeiro momento, estas aplicações não pareçam muito especiais, na verdade, elas desempenham um papel importante dentre as aplicações polinomiais. A razão disso é a existência de um resultado de geometria algébrica devido a Bass-Connell-Wright [22], Yagzhev [53] e Drużkowski [32] citado como Teorema 4.3.2 abaixo (ver seção 6.1.1).

Da fórmula de Euler,

$$DH(x)x = rH(x),$$

vê-se que F satisfaz a equação funcional,

$$DF(x)x = rF(x) + (1 - r)x. \tag{4.3}$$

Suponha ainda que,

$$F \text{ seja um difeomorfismo local.} \tag{4.4}$$

Vejamos que é uma conseqüência direta da homogeneidade, que (4.4) é equivalente a,

$$(0, \infty) \cap \operatorname{Spec}(DH(x)) = \emptyset, \text{ para todo } x \neq 0. \tag{4.5}$$

De fato, pela contrapositiva, suponha que $DH(x)$ possua um autovalor $\lambda \in (0, \infty)$, com v seu autovetor associado.

Então, como a derivada DH também é homogênea (de grau $r - 1$),

$$\lambda v = DH(x)v = DH\left(\sqrt[r-1]{\lambda}\frac{x}{\sqrt[r-1]{\lambda}}\right)v = \lambda DH\left(\frac{x}{\sqrt[r-1]{\lambda}}\right)v.$$

Portanto,

$$v = DH(\frac{x}{\sqrt[r-1]{\lambda}})v.$$

A igualdade acima implica existe um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ de tal forma que $DH(x)$ possua um autovalor igual a um, mas como $F = I - H$, decorre que $DF(x)$ tem um autovalor nulo contradizendo que F é um difeomorfismo local.

Para concluir que (4.5) implica em (4.4) basta recorrer ao Teorema da Função Inversa.

Tomando $F(x) = 0$ em (4.3), temos que $DH(x)x = rx$, o que contradiz (4.5) a menos que $x = 0$. Isso mostra que a origem é atingida uma única vez por F. Esta observação sugere a possibilidade de que, sob condições favoráveis, uma perturbação localmente invertível da identidade por uma aplicação homogênea seja injetiva (veja referência [33]).

Observe que as condições equivalentes (4.4) e (4.5) implicam na injetividade local de F. Como o espectro de um operador é igual ao espectro de seu adjunto, tem-se,

$$v \notin \{DH(x)^*v; x \in H_v\}, \forall v \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ e } \forall H_v \Rightarrow F \text{ é localmente invertível,}$$

onde H_v denota um v-setor.

Note que a condição descrita acima equivale a dizer que $DH(x)^*$ não possui autovalor igual a um, e que, pelos comentários acima, equivale a dizer que,

$$\operatorname{Spec}(DH(x)) \cap (0, \infty) = \emptyset.$$

Isso pode ser comparado às hipóteses do próximo Teorema, no qual $\mathcal{C}\ell(A)$ denota o fecho de A e H_v novamente denota um v-setor.

Teorema 4.3.1. *Seja $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação $\mathcal{C}^1$, homogênea de grau $r > 1$. Então,*

$$v \notin \mathcal{C}\ell\{DH(x)^*v; x \in H_v\}, \forall v \in \mathbb{S}^{n-1} \text{ e } \forall H_v \Rightarrow F = I - H \text{ é invertível.}$$

Demonstração. Será mostrado que $f = -F = -I + H$ satisfaz a hipótese do Teorema 4.1.2 e, portanto é injetiva.

Fixe $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. Como a hipótese implica em (4.5), fica claro que $Df(x)^*v \neq 0$.

Então a quantidade,

$$\left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|} \right\rangle,$$

é o cosseno do ângulo formado por v e $Df(x)^*v = -v + DH(x)^*v$.

Observe que,

$$\measuredangle(v, DH(x)^*v) \leq \measuredangle(v, Df(x)^*v), \tag{4.6}$$

como sugere a figura 4.6.

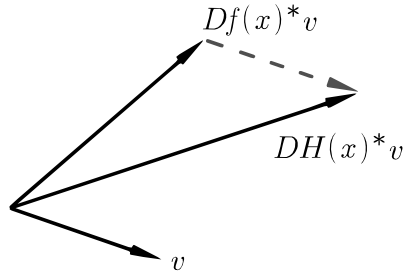


Figura 4.6: Os vetores $Df(x)^*v$ e $DH(x)^*v$ com relação a v.

Pela hipótese sabe-se que, para cada v-setor H_v, existe uma constante $\delta \in (0, \pi/2)$ tal que $\measuredangle(v, Df(x)^*v) > \delta$ para todo $x \in H_v$, figura 4.7, ou seja, existe uma calota em torno de v que não intersecta o conjunto,

$$\{Df(x)^*v; x \in H_v\}.$$

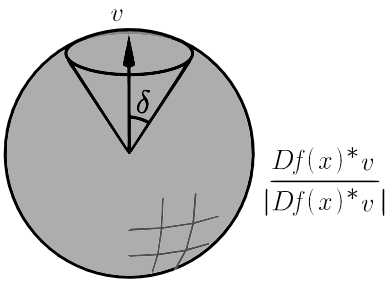


Figura 4.7: A calota em torno de v e os vetores $Df(x)^*v/|Df(x)^*v|$.

Assim, para cada $v \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\sup_{x \in H_v} \left\langle v, \frac{Df(x)^*v}{|Df(x)^*v|} \right\rangle < 1$$

e o resultado segue do Teorema 4.1.2. □

A seguir será recordado um resultado de geometria algébrica devido a Bass-Connell-Wright [22], Yagzhev [53] e Drużkowski [32].

Teorema 4.3.2. *Seja $p : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação polinomial. Então é possível de se construir efetivamente uma outra aplicação polinomial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, para algum $n = n(p) > m$, com as seguintes propriedades,*

(i) F é uma perturbação da identidade por uma aplicação polinomial homogênea de grau menor ou igual a 3.

(ii) p é um difeomorfismo local se e somente se F também o for. Além disso,

$$\det Dp \equiv 1 \Leftrightarrow \det DF \equiv 1.$$

(iii) p é injetiva se e somente se F também o for.

A prova do Teorema acima será omitida neste texto e pode ser encontrada na referência [22] ou na referência [32], página 105.

O Teorema 4.3.2 é freqüentemente referido na literatura como Teorema de Redução (ver seção 6.1.1).

Vejamos novamente o enunciado da Conjectura Jacobiana (real),

Conjectura Jacobiana: Se $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação polinomial tal que o determinante de seu Jacobiano seja constante e não nulo então p é injetiva.

O Teorema 4.3.2 é conhecido como Teorema de Redução porque ele permite reduzir a prova desta conjectura à prova da injetividade das aplicações polinomiais com determinante

não nulo que sejam perturbações da identidade por aplicações homogêneas de grau 3, com o custo de se aumentar a dimensão.

Acreditava-se que qualquer aplicação polinomial $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ com determinante do Jacobiano não nulo (não necessariamente constante) seria injetiva. No entanto foi construído um contra-exemplo por Pinchuk [54] que mostra o contrário. Ver o exemplo 6.1.6.

Teorema 4.3.3. *Existe um difeomorfismo local polinomial não injetivo* $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

A prova deste Teorema será omitida aqui mas pode ser encontrada no capítulo 6, exemplo 6.1.6.

Prova do Teorema 4.1.4. Seja $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como no Teorema 4.3.3 e $F : \mathbb{R}^n \to R^n$ a sua aplicação associada dada pelo Teorema 4.3.2. Então F é um difeomorfismo local não injetivo da forma $F = I - H$, onde H é uma aplicação homogênea.

Pode-se afirmar que a aplicação não injetiva $f = -F$ também satisfaz a conclusão do Teorema 4.1.4. De fato, se,

$$Df(x)v = \lambda v,$$

com $\lambda \geq 0$ para algum $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, então,

$$DH(x)v = (\lambda + 1)v,$$

em contradição com o fato de que (4.5) e (4.4) são equivalentes.

Isso conclui a prova do Teorema 4.1.4. □

Observação 4.3.4. Note que o exemplo f, na demonstração acima, mostra que o fecho, na hipótese do Teorema 4.3.1, não pode ser retirado. De fato, no exemplo acima,

$$\operatorname{Spec}(Df) \cap (0, \infty) = \emptyset,$$

portanto, satisfaz que, para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ e para todo v-setor H_v,

$$v \notin \{DH(x)^* v; x \in H_v\}.$$

No entanto f (e portanto F) não é injetiva.

Capítulo

5

Inversão Global via Condição de Palais-Smale

5.1 Introdução

Neste capítulo será estudado sistematicamente o artigo **"Global Inversion via Palais-Smale Condition"** de Scott Nollet e Frederico Xavier [4].

O interesse principal do artigo em estudo é a busca por condições para que um difeomorfismo local $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ seja uma bijeção.

Este tipo de interesse é motivado por problemas em áreas tão diversas quanto por exemplo, economia matemática e geometria algébrica. Pode-se citar os trabalhos [41], [43] e [48] como boas referências sobre o assunto.

Alguns resultados relacionados sobre bijetividade podem ser encontrados em [36, 42] , em particular, a idéia de se usar condições do tipo Palais-Smale tem sido explorada, como, por exemplo, em [35], [45] e [46].

Seja $f_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função altura dada por,

$$f_v(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, v_i,$$

onde $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Desta forma tem-se o seguinte resultado.

Teorema 5.1.1. *Um difeomorfismo local $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma bijeção se existir uma métrica riemaniana completa g em $\mathbb{R}^n$ com respeito a qual f_v satisfaz a condição de Palais-Smale para todo $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo.*

Primeiramente, deve-se observar melhor a hipótese do Teorema 5.1.1.

Vejamos que, uma função continuamente diferenciável $h : X \to \mathbb{R}$, onde X é um espaço de Banach, satisfaz a *condição de Palais-Smale* se, para cada seqüência $\{x_n\} \in X$ tal que $h(x_n)$ seja limitada e $\left|dh(x_n)\right| \to 0$, existir uma subseqüência convergente x_{n_k} (veja [51], página 161).

Vejamos que, se h *não possuir pontos críticos*, a condição de Palais-Smale para h é equivalente a,

$$\inf_{x \in h^{-1}[a,b]} \left|dh(x)\right| > 0, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

De fato, a condição de Palais-Smale é satisfeita por vacuidade sob a hipótese 5.1.

Em contrapartida, se o ínfimo na condição 5.1 for igual a zero, então existe uma seqüência $\{x_n\} \subset h^{-1}[a, b]$ tal que $dh(x_n) \to 0$.

Assumindo a condição de Palais-Smale, existe uma subseqüência x_{n_k} cujo limite x é tal que $dh(x) = 0$, violando a hipótese de que h não possui pontos críticos.

Para uma métrica riemanniana completa g em $\mathbb{R}^n$ e uma função suave $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, considere $\nabla^{(g)}h$ o gradiente de h relativo a g, de forma que,

$$\left\langle \nabla^{(g)}h(x), w \right\rangle_g = dh_x(w), \text{ para todo } w \in \mathbb{R}^n.$$

Tomando h igual a f_v no Teorema 5.1.1 acima, h não possui pontos críticos. De fato, como f é um difeomorfismo local, sua derivada $Df(x)$ é um isomorfismo para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sendo assim, $Df_v(x) = \left\langle Df(x), v \right\rangle$ é não nula para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^n$ não nulo.

Decorre que, pelo parágrafo anterior, a condição de Palais-Smale para h é equivalente a,

$$\inf_{x \in h^{-1}[a,b]} \left|\nabla^{(g)}h(x)\right|_g > 0, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

Aqui, $\left|\nabla^{(g)}h(x)\right|_g$ denota a norma de $\nabla^{(g)}h(x)$ com respeito à métrica g e portanto,

$$\left|\nabla^{(g)}h(x)\right|_g = \max_{|w|_g=1} \left|dh_x(w)\right|_g.$$

Outro resultado sobre injetividade global usando hipóteses similares à condição de Palais-Smale pode ser encontrado em [35].

Uma conseqüência imediata do Teorema 5.1.1 é a seguinte,

Teorema 5.1.2. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação suave e considere os conjuntos,*

$$S_v = \{Df(x)^* v \,;\, x \in \mathbb{R}^n\}\,, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

(*a*) *Se $0 \notin S_v$, para todo $v \neq 0$, então f é localmente invertível.*

(*b*) *Se $0 \notin \overline{S_v}$, para todo $v \neq 0$, então f é globalmente invertível.*

A parte (a) do Teorema 5.1.2 é o Teorema da Função Inversa usual e que foi incluída apenas para efeitos comparativos.

A parte (b) segue do Teorema 5.1.1 se for tomada a métrica g como a métrica usual em $\mathbb{R}^n$ e observar-se que

$$\nabla f_v(x)y = D\Big\langle f(x), v \Big\rangle y = \Big\langle Df(x)y, v \Big\rangle = \Big\langle y, Df(x)^* v \Big\rangle,$$

e, portanto,

$$\nabla f_v(x) = Df(x)^* v.$$

A parte (b) foi primeiro provada no caso especial onde f é uma perturbação da identidade por uma aplicação homogênea, veja Teorema 4.3.1.

É importante notar que a hipótese da parte (b) não requer que

$$0 \notin \overline{\bigcup_{v \neq 0} S_v},$$

o que seria uma restrição muito forte que, inclusive, implica na hipótese do Teorema de Hadamard-Plastock, veja Teorema 5.1.6 abaixo.

Observação 5.1.3. O Teorema 5.1.2 tem uma contraparte natural para biholomorfismos locais $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, onde $DF(x)^*$ denota a adjunta (transposta conjugada) da matriz Jacobiana complexa $DF(x)$. Isto segue das equações de Cauchy-Riemann uma vez que a aplicação real induzida $\tilde{F} :\ \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ satisfaz

$$\Big| D\tilde{F}(\tilde{p})^t \tilde{v} \Big| = \Big| DF(p)^* v \Big|.$$

Para se convencer disto, observe que se as componentes de F, $f_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, para $k = 1, 2, ..., n$, são funções holomorfas, então,

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_j} = a + ib \cong \begin{pmatrix} a_{k,j} & b_{k,j} \\ -b_{k,j} & a_{k,j} \end{pmatrix}.$$

Notemos que,

$$
\begin{aligned}
DF(x)^* &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}} & \cdots & \overline{\dfrac{\partial f_1}{\partial z_n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\dfrac{\partial f_n}{\partial z_1}} & \cdots & \overline{\dfrac{\partial f_n}{\partial z_n}} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \overline{\dfrac{\partial f_1}{\partial z_1}} & \cdots & \overline{\dfrac{\partial f_n}{\partial z_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{\dfrac{\partial f_1}{\partial z_n}} & \cdots & \overline{\dfrac{\partial f_n}{\partial z_n}} \end{pmatrix} \\
&\cong \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & -b_{1,1} \\ b_{1,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{n,1} & -b_{n,1} \\ b_{n,1} & a_{n,1} \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{1,n} & -b_{1,n} \\ b_{1,n} & a_{1,n} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{n,n} & -b_{n,n} \\ b_{n,n} & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & b_{1,1} \\ -b_{1,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{1,n} & b_{1,n} \\ -b_{1,n} & a_{1,n} \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ \begin{pmatrix} a_{n,1} & b_{n,1} \\ -b_{n,1} & a_{n,1} \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} a_{n,n} & b_{n,n} \\ -b_{n,n} & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{pmatrix}^t = D\tilde{F}(\tilde{x})^t
\end{aligned}
$$

O Teorema 5.1.1 é um caso particular do seguinte resultado mais geral.

Teorema 5.1.4. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local e g uma métrica riemanniana completa em $\mathbb{R}^n$. Suponha que, para todo $v \neq 0$ o campo de vetores suave,*

$$\frac{\nabla^{(g)} f_v(x)}{\left|\nabla^{(g)} f_v(x)\right|_g^2},$$

seja completo, isto é, suas curvas integrais estão definidas para todo tempo t. Então f é bijetiva.

Primeiramente deve-se explicitar a razão pela qual o Teorema 5.1.1 decorre do Teorema 5.1.4.

Suponha que o campo de vetores dado no Teorema 5.1.4 não seja completo. Então existe uma curva $\gamma : [0, \tau) \to \mathbb{R}^n$ tal que,

$$\lim_{t \to \tau} \gamma(t) = \infty \quad \text{e} \quad \frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{\nabla^{(g)} f_v(\gamma(t))}{|\nabla^{(g)} f_v(\gamma(t))|_g^2}.$$

Sendo assim, o campo de vetores deve ficar arbitrariamente grande ao longo da trajetória γ pois,

$$\gamma(t) - \gamma(0) = \int_0^t \frac{d\gamma(\xi)}{d\xi}\, d\xi \leq \tau \sup_{[0,t]} \frac{\nabla^{(g)} f_v(\gamma(t))}{|\nabla^{(g)} f_v(\gamma(t))|_g^2}.$$

A mesma desigualdade permite concluir que o gradiente de f_v fica arbitrariamente pequeno ao longo da trajetória γ.

Vejamos que, para qualquer $t \in [0, \tau)$,

$$\left\langle f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)), v \right\rangle = f_v(\gamma(t)) - f_v(\gamma(0)) = \int_0^t Df_v(\gamma(\xi)) \frac{d\gamma(\xi)}{d\xi}\, d\xi$$
$$= \int_0^t \left\langle \nabla^{(g)} f_v(\gamma(\xi)), \frac{d\gamma(\xi)}{d\xi} \right\rangle_g d\xi = \int_0^t d\xi = t < \tau.$$

Portanto, a curva $f \circ \gamma$ está contida em um v-setor. Mas então, tomando um intervalo real J suficientemente grande, tem-se que a imagem da curva γ pela função f_v fica contida em J e, como o gradiente de f_v tende a zero ao longo da curva γ, a função f_v não atende à condição de Palais-Smale, como deveria ser mostrado.

Vejamos agora que o Teorema 5.1.1 é conclusivo em muito mais casos do que o Teorema 5.1.2.

Por exemplo, considere a métrica completa com peso $(1 + |x|)^{-1}$ em $\mathbb{R}^n$. O gradiente de uma função h nesta métrica tem comprimento $(1 + |x|)|\nabla h|$, onde ∇h denota o gradiente usual em $\mathbb{R}^n$. A limitação do campo de vetores no Teorema 5.1.4 é equivalente a,

$$|\nabla h(x)| > c(1 + |x|)^{-1},$$

para alguma constante $c > 0$.

Aqui, observe que, se $h(x) = f_v(x)$, então,

$$\nabla h(x) = Df(x)^* v,$$

e portanto este caso não se enquadra na hipótese de 5.1.2(b), porém se enquadra na hipótese de 5.1.1.

Então, observando as hipóteses do Teorema 5.1.2 veremos que o Teorema 5.1.1 é estritamente melhor, pois mais casos são capturados admitindo-se outras métricas que não apenas a métrica euclideana.

Outra conseqüência do Teorema 5.1.4 é o seguinte,

Teorema 5.1.5. *Um difeomorfismo local $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é bijetivo se, para todo $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$,*

$$\int_0^\infty \min_{|x|=r} \left|\nabla f_v(x)\right| dr = \infty.$$

A demonstração deste resultado pode ser realizada utilizando o Lema 5.2.2 juntamente com o Teorema 5.1.4.

Isso sugere uma comparação com o seguinte resultado ([44],Teorema 4.2),

Teorema 5.1.6 (Teorema Hadamard-Plastock). *Um difeomorfismo local $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é bijetivo se,*

$$\int_0^\infty \min_{|x|=r} \left\|Df(x)^{-1}\right\|^{-1} dr = \infty.$$

O Teorema 5.1.5 é uma generalização considerável do Teorema 5.1.6.

Para se convencer disto observe que,

$$\left\|Df(x)^{-1}\right\|^{-1} = \left\|(Df(x)^{-1})^*\right\|^{-1} = \left\|(Df(x)^*)^{-1}\right\|^{-1} = \left[\max_{|v|=1}\left|(Df(x)^*)^{-1}v\right|\right]^{-1}$$
$$= \left[\frac{1}{\min\limits_{|v|=1}\left|Df(x)^*v\right|}\right]^{-1} = \min_{|v|=1}|Df(x)^*v| = \min_{|v|=1}|\nabla f_v(x)|\,.$$

Em particular, pode-se reescrever a condição do Teorema 5.1.6 como

$$\int_0^\infty \min_{|x|=r}\min_{|v|=1}|\nabla f_v(x)|\;dr = \infty.$$

Assim, fica claro que o Teorema 5.1.5 é mais forte que o Teorema 5.1.6. O seguinte exemplo ilustra este ponto.

Exemplo 5.1.7. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por,

$$f(x,y) = \left(x+y^3, y\right).$$

Para que o Teorema 5.1.6 seja aplicado é preciso que a seguinte integral divirja,

$$\int_0^\infty \min_{|(x,y)|=r}\min_{|v|=1}|\nabla f_v(x,y)|\;dr.$$

Escrevendo $v=(v_1,v_2)$ encontra-se que,

$$|\nabla f_v(x,y)| = \sqrt{v_1^2+(3y^2v_1+v_2)^2},$$

e escolhendo

$$v = \left((1+9r^4)^{-1/2}, -3r^2(1+9r^4)^{-1/2}\right),$$

e $(x,y)=(0,r)$, obtém-se o valor, $(1+9r^4)^{-1/2}$, que conduz à convergência da integral.

Note, no entanto, que

$$|\nabla f_v(x,y)| = |v_2| > 0,$$

se $v_1=0$, enquanto,

$$|\nabla f_v(x,y)| \geq |v_1| > 0,$$

se $v_1\neq 0$.

Em ambos casos,

$$\int_0^\infty \min_{|(x,y)|=r}|\nabla f_v(x,y)|\;dr = \infty,$$

e o Teorema 5.1.5 se aplica. Note que, $f^{-1}(u,v)=(u-v^3,v)$.

Será mostrado na Proposição 5.3.6 que o Teorema 5.1.5 se aplica a qualquer aplicação quadrática enquanto que o Teorema 5.1.6 não necessariamente. Veja o exemplo 5.3.7.

O Teorema 5.1.6 ainda permanece válido para espaços de Banach de dimensão infinita. Tal versão é de grande valia em análise não linear. Mesmo sabendo que em dimensão finita o Teorema 5.1.6 é superado pelo Teorema 5.1.5, a situação em dimensão infinita fica obscura porque os argumentos usados em tal justificativa provém da Teoria de Graus.

É tautológico que um difeomorfismo local é injetivo se e somente se a pré-imagem de pontos são conjuntos conexos. A condição de Palais-Smale aplicada às funções altura f_v implicam diretamente que os *pull-backs* de hiperplanos são conexos. Assim, somos induzidos a enunciar a seguinte conjectura.

Conjectura. *Um difeomorfismo local de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é injetivo se a pré-imagem de todo hiperplano afim é um conjunto conexo.*

Este capítulo está organizado da seguinte forma. Na segunda seção, será exibida a prova do resultado principal, o Teorema 5.1.4, usando idéias similares àquelas usadas em [3] e [50]. Também será elucidado como o Teorema 5.1.4 implica no Teorema 5.1.5.

A seção três é dedicada às aplicações polinomiais. Depois de uma breve discussão sobre a conexidade das pré-imagens neste caso, interpreta-se os resultados para dar um critério de inversibilidade de aplicações polinomiais em termos dos coeficientes de Lojasiewicz e do fato delas serem *tame*.

Diz-se que um polinômio $P(x)$ é *tame* quando não existir seqüência $\{z_n\}$ com $|z_n| \to \infty$ tal que $\nabla P(z_n) \to 0$, como definido em [34].

Também serão exibidos alguns resultados sobre a Conjectura Jacobiana.

5.2 Prova do Teorema Principal 5.1.4

De início, considere o seguinte Lema, o qual segue diretamente da Teoria de Graus (veja [40]). Por uma conveniência de notação, considere,

$$S_r = \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; |x| = r\},$$

a esfera de raio r e de dimensão $n-1$.

Lema 5.2.1. *Seja $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e fixe um ponto p pertencente a $\mathbb{R}^n$. A aplicação ψ é sobrejetiva desde que as seguintes condições sejam satisfeitas,*

a.) $\psi(x) = p$ se e somente se $x = 0$.

b.) Existe $r_0 > 0$ tal que $\psi(S_{r_0}) \neq 0$ em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{p\}) \approx \mathbb{Z}$.

c.) Para cada $M > 0$, existe $R > 0$ tal que $|\psi(x)| > M$ se $|x| > R$.

Demonstração. Como é possível compor ψ com uma translação de forma a não afetar nenhuma hipótese, nenhuma generalidade é perdida em se supor que $p = 0$.

Vejamos que, qualquer que seja $w \in \mathbb{R}^n$, tem-se que $w \in \psi(\mathbb{R}^n)$.

Isso segue imediatamente de (a.) se $w = 0$, então pode-se assumir que $w \neq 0$.

Pela continuidade de ψ, existe $0 < \delta < r_0$ pequeno suficiente de forma que $|\psi(x)| < |w|$ para cada $x \in S_\delta$, e assim, $\psi(S_\delta)$ é zero em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{w\})$.

Usando a condição (c.), podemos encontra um $R > r_0 > \delta$ grande o suficiente de forma que $|\psi(x)| > |w|$ para todo x tal que $|x| > R$.

As imagens $\psi(S_t)$ para $t \in [r_0, R]$, consiste em uma homotopia que mostra que $\psi(S_R)$ é diferente de zero em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, uma vez que $0 \notin \psi(S_t)$ para $t \in [r_0, R]$, por (a.).

Agora, afirma-se que $w \in S_t$ para alguma $t \in [\delta, R]$. De fato, se este não fosse o caso, então a homotopia $\psi(S_t)$ mostra que $\psi(S_R)$ seria trivial em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{w\})$. Assim, contraindo a bola fechada B de raio $|w|$ centrada na origem, que não intersecta $\psi(S_R)$ pela escolha de R, para zero e para w, vemos que $\psi(S_R)$ deve ser igual a zero em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$, o que é uma contradição.

□

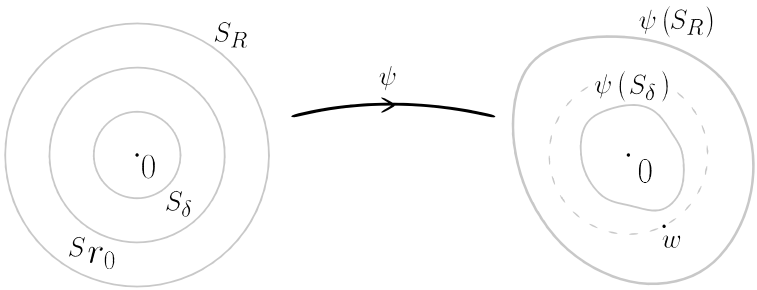


Figura 5.1: As esferas e suas respectivas imagens.

Agora, vejamos à prova do Teorema 5.1.4 enunciado na introdução.

Prova do Teorema 5.1.4. Dado um difeomorfismo local $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e uma métrica riemanniana completa g tal que o campo de vetores,

$$Z_v(x) = \frac{\nabla^{(g)} f_v(x)}{\left|\nabla^{(g)} f_v(x)\right|_g^2},$$

seja completo para qualquer $v \neq 0$, vai-se mostrar que f é bijetiva.

A demonstração será dividida em duas partes, uma que assegura a sobrejetividade e outra que assegura a injetividade.

Parte 1 - A sobrejetividade de f.

Para ver que f é sobrejetiva, seja $\beta_v : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ a trajetória positiva maximal de Z_v passando pela origem em $t = 0$. O intervalo de definição de β_v é $[0, \infty)$, pela hipótese de completude.

Defina a aplicação $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ por,

$$\psi(v) = \begin{cases} f(0), \text{ se } v = 0, \\ f(\beta_v(|v|^2)), \text{ se } v \neq 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

É claro que ψ é contínua.

Para $t \geq 0$ e $v \neq 0$, tem-se,

$$\frac{d}{dt} f_v(\beta_v(t)) = Df_v(\beta_v(t)).\beta_v'(t) = \left\langle \nabla^{(g)} f_v(\beta_v(t)), Z_v(\beta_v(t)) \right\rangle_g = 1. \tag{5.3}$$

Integrando, tem-se,

$$f_v(\beta_v(|v|^2)) - f_v(\beta_v(0)) = \int_0^{|v|^2} \frac{d}{dt} f_v(\beta_v(t))\, dt = |v|^2,$$

e, assim, da desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|\psi(v) - \psi(0)||v| \geq \left\langle \psi(v) - \psi(0), v \right\rangle = |v|^2, \tag{5.4}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno usual.

Agora, aplique o Lema 5.2.1 a ψ, tomando $p = \psi(0)$. É imediato da equação (5.4) que as condições (a.) e (c.) são satisfeitas.

De fato, observe que se $\psi(v) = \psi(0) = p$, então o primeiro membro é nulo implicando que $|v| = 0$ e, portanto, que $v = 0$. Assim, (a.) fica satisfeita.

Para a condição (c.) ser verificada basta notar que, de (5.4),

$$|\psi(v) - \psi(0)| \geq |v|,$$

e assim, para um dado $M > 0$, tomando $R > 0$ de forma que $R > M + |p|$,

$$|\psi(v)| + |p| \geq |\psi(v) - \psi(0)| \geq |v| > R > M + |p|,$$

para todo v tal que $|v| > R$.

Para verificar a condição (b.), define-se uma homotopia de $\psi(S_1)$ na esfera unitária centrada em p, $H : [0,1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ por,

$$H(s, v) = s(p + v) + (1 - s)\psi(v).$$

O ponto crucial aqui é que esta homotopia não atinge o ponto p, pois, da equação (5.4),

$$\begin{aligned} \left\langle H(s,v) - p, v \right\rangle &= \left\langle s(p+v) + (1-s)\psi(v) - p, v \right\rangle \\ &= \left\langle s(p+v) + (1-s)\psi(0) - p, v \right\rangle + (1-s)|v|^2 \\ &= |v|^2 > 0. \end{aligned}$$

Assim, $H(s, v) \neq p$ para todo $s \in [0, 1]$ e para todo $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ e, portanto, $\psi(S_1)$ é não trivial em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{p\}) \approx \mathbb{Z}$.

Segue do Lema 5.2.1 que ψ é sobrejetiva. Uma vez que $\psi(\mathbb{R}^n) \subset f(\mathbb{R}^n)$ concluímos que f é sobre.

Parte 2 - A injetividade de f.

Agora, será mostrado que f é injetiva. Tome a e b, dois pontos distintos de $\mathbb{R}^n$. Então deve-se ter que $f(a) \neq f(b)$.

Para isso, é suficiente encontrar uma linha de fluxo $\alpha(t)$ de a até b de algum dos campos de vetores,

$$Y_v(x) = \frac{\nabla^{(g)} f_v(x)}{|\nabla^{(g)} f_v(x)|},$$

com $v \neq 0$. Aqui, observe que o campo de vetores Y_v tem módulo igual a um em todo ponto, uma vez que f_v não possui pontos críticos.

De fato, supondo que $\alpha(0) = a$ e que $\alpha(\tau) = b$, pode-se escrever,

$$\Big\langle f(b) - f(a), v \Big\rangle = f_v(b) - f_v(a) = \int_0^\tau \frac{d}{dt} f_v(\alpha(t))\, dt,$$

mas, uma vez que f_v não possui pontos críticos, temos que,

$$\frac{d}{dt} f_v(\alpha_t) = \Big\langle \nabla^{(g)} f_v(\alpha(t)), \alpha'(t) \Big\rangle_g = \Big| \nabla^{(g)} f_v(\alpha(t)) \Big| > 0,$$

logo $f(a) \neq f(b)$.

Para obter uma linha de fluxo como acima, deve-se começar por estabelecer o seguinte,

Afirmação 5.1. *Seja $M > 0$. Então existe uma limitação uniforme $L > 0$ tal que, para qualquer linha de fluxo $\alpha : [0, \zeta] \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo $\alpha'(t) = Y_v(\alpha(t))$, $\alpha(0) = a$ e $|\alpha(\zeta) - a| \leq M$, o comprimento da curva α é menor ou igual a L.*

Para isso usamos o campo de vetores completo Z_v para $v \in \mathbb{S}^{n-1}$, o qual tem as mesmas trajetórias do campo Y_v.

Seja $\gamma_v : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ uma trajetória de Z_v com $\gamma_v(0) = a$ e $|\gamma(\tau) - a| \leq M$. Aqui, τ é tomado de forma que $\alpha(\zeta) = \gamma_v(\tau)$. Note que, pela completude de Z_v, existe este τ.

Como foi mostrado anteriormente (Equação (5.3)),

$$\frac{d}{dt} f_v(\gamma_v(t)) = 1,$$

que, integrando de 0 a τ, conduz a,

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^\tau \frac{d}{dt} f_v(\gamma_v(t))\, dt = f_v(\gamma_v(\tau)) - f_v(\gamma_v(0)) = \Big\langle f(\gamma_v(\tau)) - f(\gamma_v(0)), v \Big\rangle \\ &\leq 2 \max_{|x-a| \leq M} |f(x)| = A(M) \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Agora, considere a aplicação contínua $F : [0, A(M)] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(t, v) = \big| Z_v(\gamma_v(t)) \big|$. Tendo um domínio compacto, F assume seu máximo valor $U \in \mathbb{R}$. Assim, pode-se estimar uniformemente o comprimento das trajetórias de Z_v cujos pontos extremos à direita estão a uma distância menor ou igual a M do ponto a.

Para qualquer trajetória desta forma a equação (5.5) conduz a,

$$\ell(\gamma_v) = \int_0^\tau |\gamma_v'(t)|\, dt = \int_0^\tau |Z_v(\gamma_v(t))|\, dt \leq A(M) \max_{\substack{|v|=1 \\ |t|\leq A(M)}} |Z_v(\gamma_v(t))| = A(M)U.$$

Com a prova da afirmação sobre a uniformidade dos comprimentos, deve-se voltar ao estudo das trajetórias do campo de vetores Y_v.

Seja $\alpha_v : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma trajetória maximal à direita de Y_v que passa por $a \in \mathbb{R}^n$ em tempo zero e considere a aplicação contínua $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por,

$$\phi(w) = \begin{cases} a, \text{ se } w = 0, \\ \alpha_w(|w|), \text{ se } w \neq 0. \end{cases} . \tag{5.6}$$

Aqui, deve ser lembrado que o campo Y_v é completo por ser limitado, permitindo a existência da trajetória α_v como acima.

Para que se encontre uma trajetória de Y_v que passe por a e b é suficiente mostrar que ϕ é sobrejetora e, para isso, aplicamos o Lema 5.2.1.

Vejamos que,

$$\frac{d}{dt} f_w(\alpha_w(t)) = \left\langle \nabla^{(g)} f_w(\alpha_w(t)), Y_w(\alpha_w(t)) \right\rangle_g = \left| \nabla^{(g)} f_w(\alpha_w(t)) \right|.$$

Uma integração leva a,

$$\begin{aligned} \left\langle f(\phi(w)) - f(a), w \right\rangle &= f_w(\phi(w)) - f_w(a) \\ &= f_w(\alpha_w(|w|)) - f_w(\alpha_w(0)) \\ &= \int_0^{|w|} \left| \nabla^{(g)} f_w(\alpha_w(t)) \right| dt > 0, \end{aligned} \tag{5.7}$$

se $w \neq 0$.

Da equação (5.7) é imediato que a condição (a.) do Lema 5.2.1 aplica-se a ϕ se for tomado $p = a$. Vejamos. Se $w = 0$ então,

$$\phi(w) = \phi(0) = a = p.$$

E, se $w \neq 0$, então,$\langle f(\phi(w)) - f(a), w \rangle > 0$, implicando que $f(\phi(w)) \neq f(a)$, ou seja, que $\phi(w) \neq a = p$.

Para se concluir que a condição (c.) é satisfeita, veja que, pela Afirmação 5.1, se $|\alpha_v(|v|) - a| \leq N = M + |a|$, então existe $L > 0$ tal que $\ell(\alpha_v|_{[0,|v|]}) \leq L$. Por contraposição, se $\ell(\alpha_v|_{[0,|v|]}) > L$ então $|\alpha_v(|v|) - a| > N$. Mas,

$$\ell(\alpha_v|_{[0,|v|]}) = \int_0^{|v|} |\alpha_v'(t)| dt = \int_0^{|v|} dt = |v|.$$

Segue que,

$$|\phi(v)| + |a| \geq |\phi(v) - a| > N = M + |a|,$$

para todo $v \in S_{L+1}$.

Portanto, $|\phi(v)| > M$ para todo $v \in S_{L+1}$.

Finalmente verifica-se a condição (b.) do Lema. A equação (5.7) mostra que $f(\phi(w)) = f(a)$ se e somente se $w = 0$. Segue que f induz um homomorfismo de grupo de $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{a\})$ em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{f(a)\})$. Basta observar que a restrição,

$$f|_{\mathbb{R}^n - \{a\}} : \mathbb{R}^n - \{a\} \to \mathbb{R}^n - \{f(a)\},$$

é uma função contínua.

Assim, para mostrar que $\phi(S_1)$ é não trivial em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{a\})$ é suficiente provar que $f(\phi(S_1))$ é não trivial em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{f(a)\})$.

Para ver isso, considere a homotopia $H[0,1] \times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ de $f(\phi(S_1))$ até a esfera unitária centrada em $f(a)$ dada por,

$$H(s,v) = s(f(a) + v) + (1-s)f(\phi(v)).$$

Usando a equação (5.7) mais uma vez, calcula-se que,

$$\begin{aligned}
\Big\langle H(s,v) - f(a), v \Big\rangle &= \Big\langle (s-1)f(a) + sv + (1-s)f(\phi(v)), v \Big\rangle \\
&= s|v|^2 + (1-s)f_v(\phi(v)) - (1-s)f_v(\phi(0)) \\
&= s|v|^2 + (1-s)\int_0^{|v|} |\nabla f_v(\alpha_v(t))|\, dt > 0,
\end{aligned}$$

e, portanto, que $H(s,v) \neq f(a)$ para todo par $(s,v) \in [0,1] \times \mathbb{S}^{n-1}$. Em particular, $f(\phi(S_1))$ é não trivial em $\Pi_{n-1}(\mathbb{R}^n - \{f(a)\})$, como desejado.

Uma vez verificadas as hipóteses do Lema 5.2.1 tem-se que ϕ é sobrejetiva, que, por sua vez, conduz à conclusão de que existe uma linha de fluxo que vai de a para b implicando na injetividade de f. □

Agora será provado o Lema que permite a conclusão de que o Teorema 5.1.5 segue do Teorema 5.1.4.

Lema 5.2.2. *Seja $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores suave que não se anula e que satisfaz,*

$$\int_0^\infty \min_{|x|=r} |V(x)|\, dr = \infty.$$

Então o campo de vetores,

$$\frac{V(x)}{|V(x)|^2},$$

é completo.

Demonstração. Pelo Teorema de Plastock ([44], Teorema 4.1) a hipótese do Lema implica que $\mathbb{R}^n$ é completo com respeito ao comprimento de arco com peso $|V(x)|$. Agora, seja $\alpha(t)$ uma solução para $\alpha'(t) = Y(\alpha(t))$, onde

$$Y(x) = \frac{V(x)}{|V(x)|^2},$$

e assuma que o intervalo de definição maximal para α seja $[0, \tau)$ com $\tau < \infty$. Observe que a integral,

$$\int_0^\tau |V(\alpha(t))| \left\|\alpha'(t)\right\| \, dt = \int_0^\tau dt = \tau,$$

é finita.

Como $\mathbb{R}^n$ é completo com respeito ao peso $|V(x)|$, concluímos que o limite,

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t),$$

existe e é finito (veja [44], definição 3.2).

Resolvendo a equação diferencial numa vizinhança de $\alpha(\tau)$, vemos que o intervalo maximal de definição de α se estende para $t > \tau$. Concluímos assim, que o intervalo máximo de definição de α é $[0, \infty)$, ou seja, o campo de vetores Y é completo. □

5.3 Utilização dos Resultados para Aplicações Polinomiais

Um problema amplamente conhecido na geometria algébrica é o seguinte.

Conjectura Jacobiana. Se $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial tal que o $\det JF(x)$ é constante e não nulo, então F tem inversa polinomial.

Este problema tem sido estudado no âmbito da álgebra, da geometria e de equações diferenciais. Em vários casos especiais a resposta é positiva, mas ainda não existe uma resposta geral para o problema ($n \geq 2$) a não ser por algumas provas incompletas.

É conhecido [22] que a Conjectura Jacobiana enunciada tal como acima é verdadeira se e somente se ela é verdadeira para aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e, além disso, que apenas a injetividade precisa ser provada. Ver capítulo 6 e observação 6.1.7.

Um exemplo de Pinchuk [54] mostra que um difeomorfismo local polinomial de $\mathbb{R}^2$ não necessariamente é bijetivo, logo, a condição de que o determinante seja constante não nulo é essencial no caso real. Ver exemplo 6.1.6.

Um Teorema de Hadamard [28] afirma que qualquer difeomorfismo local próprio de $\mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo global, portanto, o fato de ser ou não própria parece desempenhar um papel importante neste estudo.

Antes de aplicar os resultados da primeira seção deste capítulo, seria interessante explicitar porque a conexidade é também um ponto crucial no estudo da Conjectura Jacobiana.

Observação 5.3.1. Na verdade é possível mostrar que, se $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial com Jacobiano constante não nulo para algum $n \geq 2$ e se $L \subset \mathbb{C}^n$ é um subespaço *genérico* linear afim de dimensão $m \geq 1$, então $F^{-1}(L)$ é um conjunto conexo na topologia euclideana. Para detalhes verificar o artigo original [4].

Sob a luz de tal fato e da Conjectura enunciada na primeira seção deste capítulo, é natural indagar se, com F da forma acima, é verdade que a imagem inversa de todo hiperplano afim (real ou complexo) é um subconjunto conexo na topologia euclideana.

Observação 5.3.2. Como comentado acima, a pré-imagem, por F, de retas *complexas genéricas* são conjuntos conexos para $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ satisfazendo as hipóteses da Conjectura Jacobiana.

Por outro lado, se for verdade que, dada uma aplicação polinomial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as hipóteses da Conjectura Jacobiana, então a pré-imagem $C = F^{-1}(L)$ de retas *reais genéricas* são conexas na topologia euclideana, então a Conjectura Jacobiana é verdadeira.

De fato, como C é conexo, pode-se encontrar um caminho $\gamma(t)$ entre quaisquer duas imagens inversas de um ponto $p \in L$. O caminho $F \circ \gamma(t) \subset L$ deve evidentemente mudar de direção em algum ponto t_0, e assim,

$$DF(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0) = 0.$$

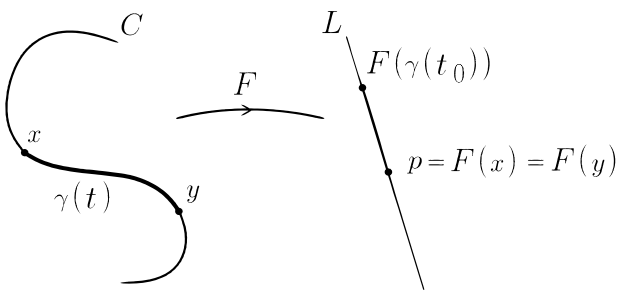


Figura 5.2: Curva ligando duas pré-imagens do ponto p e sua imagem.

Como $\gamma'(t) \neq 0$, $DF(x)$ é não invertível em $x = \gamma(t_0)$, contradizendo a hipótese da Conjectura Jacobiana.

Sendo assim, um ponto genérico deveria ter exatamente um única pré-imagem, e neste caso F seria injetiva e, portanto, invertível pelo Teorema 6.1.1.

Agora, serão aplicados os resultados da primeira seção para uma aplicação polinomial $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, onde $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ (veja observação 5.1.3).

A hipótese destes resultados se referem a quão perto a origem se situa do conjunto,

$$S_v = \{DF(x)^* v \; ; \; x \in \mathbb{K}^n\},$$

para v não nulo, no sentido assintótico.

Isto pode ser convenientemente reescrito em termos de expoentes de Lojasiewics.

Definição 5.3.1. Seja uma aplicação polinomial, $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, *o expoente de Lojasiewics de g no infinito* é o numero,

$$\mathcal{L}_\infty(g) = \sup\{s \in \mathbb{R} \; ; \; \exists A, r > 0 \; ; \; (|x| > r) \Rightarrow (|g(x)| \geq A|x|^s)\}.$$

Assim, tem-se o seguinte teste para inversibilidade.

Critério 5.3.3. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial com determinante da matriz Jacobiana constante não nulo. Se $\mathcal{L}_\infty(DF(x)^*v) > -1$ para cada $v \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, então F é invertível.*

Demonstração. Se $\mathcal{L}_\infty(DF(x)^*v) > -1$ para todo $v \neq 0$, então existe A e r_0 maiores que zero tal que,

$$|x| > r_0 \Rightarrow |DF(x)^*v| \geq A|x|^{-1},$$

e, portanto,

$$\int_0^\infty \min_{|x|=r} |\nabla f_v(x)| \, dr \geq \int_{r_0}^\infty A|r|^{-1} \, dr = \infty.$$

A partir disto o Teorema 5.1.5 permite concluir a tese. □

Observação 5.3.4. Existe um limitante inferior para o expoente de Lojasiewics em termos do grau do polinômio [37, 38, 39], mas em geral são difíceis de se calcular.

O Teorema 5.1.2 conduz a um critério mais fraco para a inversibilidade global de uma aplicação polinomial $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ o qual é mais simples de ser aplicado. Com a notação acima precisa-se saber se

$$0 \notin \overline{\{DF(x)^*v \; ; \; x \in \mathbb{K}^n\}},$$

para qualquer $v \neq 0$ em $\mathbb{K}^n$.

Como zero não pertence ao conjunto, o que pode ser concluído a partir do fato de que $\det DF$ é constante e não nulo, esta condição é equivalente a exigir que a aplicação polinomial $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ seja *tame* para $v \neq 0$.

O que vem a seguir, pode ser testado com aplicações polinomiais,

Proposição 5.3.5. *Assuma que, para todo $v \neq 0$ existe um polinômio $g_v \in \mathbb{K}[x_1, x_2, ..., x_n]$, tal que,*

(i) $g_v(DF(x)^*v) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{K}^n$.

(ii) $g_v(0) \neq 0$.

Então F é invertível.

Demonstração. De fato, o conjunto fechado $g_v^{-1}(0)$ contém S_v mas não 0. Daí o Teorema 5.1.2 conclui. □

O fato da Conjectura Jacobiana ser verdadeira para aplicações quadráticas foi originalmente provado por Wang [47] através de métodos algébricos para aplicações com Jacobiano constante. Ver Teorema 6.1.8.

Mais tarde o resultado foi generalizado, tomando a forma abaixo, para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Existe uma prova mais curta utilizando de um efetivo teorema do valor médio para aplicações quadráticas, veja [41], parágrafo 2.3.

O critério algébrico acima conduz diretamente ao resultado.

Proposição 5.3.6. *Seja $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ uma aplicação quadrática. Se* $\det DF(x) \neq 0$ *para cada $x \in \mathbb{K}^n$, então F é injetiva.*

Demonstração. Para qualquer $v \in \mathbb{K}^n$ não nulo, o conjunto,

$$S_v = \{DF(x)^* v \; ; \; x \in \mathbb{K}^n\},$$

é um subespaço linear afim que não contém a origem.

Assim, pode-se encontrar um polinômio linear g_v que se anula em S_v mas que $g_v(0) \neq 0$ e aplicar a proposição 5.3.5.

Também pode-se notar que $\mathcal{L}_\infty(DF(x)^* v) = 1$ para a aplicação linear afim que não se anula $x \mapsto DF(x)^* v$ e usar o critério 5.3.3. □

Exemplo 5.3.7. Considere a aplicação quadrática $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z).$$

O Teorema 5.1.6 não pode ser aplicado nesta situação porque, como será mostrado,

$$\int_0^\infty \min_{|(x,y,z)|=r} \min_{|v|=1} |\nabla f_v(x, y, z)| \, dr < \infty.$$

De fato, a escolha de

$$(x, y, z) = \left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{2}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad v = \frac{\left(\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r}, 1\right)}{\left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} + 1\right)^{-\frac{1}{2}}},$$

mostra que o mínimo duplo do integrando é menor ou igual a

$$\left(\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{r^2} \leq \frac{1}{r^2},$$

que conduz a uma integral convergente. Por outro lado, f é invertível pela proposição 5.3.6.

Enquanto aplicações quadráticas podem parecer uma classe restrita de aplicações, a Conjectura Jacobiana geral reduz-se a aplicações polinomiais de grau menor ou igual a 3 (ver Teorema 6.1.2).

Definição 5.3.2. Uma aplicação polinomial $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é dita ser *homogênea cúbica* se $F(x) = x + H(x)$, sendo $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial cujas coordenadas são funções polinomiais homogêneas de grau três.

Sob o custo de se aumentar o número de variáveis, é suficiente considerar a Conjectura Jacobiana para tal classe de aplicações. Mais precisamente, a Conjectura Jacobiana, para todo $n \geq 2$, é verdadeira para cada aplicação homogênea cúbica $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ se e somente se é verdadeira em geral [22] (ver capítulo 6).

Na verdade, Drużkowski [32] reduziu ainda mais a classe de aplicações para a qual a Conjectura Jacobiana precisa ser provada. Ele reduziu a uma subclasse das aplicações homogêneas cúbicas (ver Teorema 6.1.4).

Definição 5.3.3. Uma aplicação homogênea cúbica $F(x) = x + H(x) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é dita uma *aplicação de Drużkowski* se

$$H(x) = \left(L_1^3, L_2^3, ..., L_n^3\right),$$

para algumas aplicações lineares L_1, L_2, ..., $L_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

Considere A a matriz $n \times n$ de coeficientes de L_i, isto é, o elemento $A_{i,j}$ é o coeficiente de x_j em L_i. É usual denotar por H_A e F_A as aplicações H e F respectivamente.

Proposição 5.3.8. *Com a notação acima, suponha que* $\det DF_A(x) = 1$ *e que o conjunto,*

$$\left\{\left(L_1(x)^2, L_2(x)^2, ..., L_n(x)^2\right) \ ; \ x \in \mathbb{C}^n\right\},$$

tenha imagem fechada sob qualquer aplicação linear de $\mathbb{C}^n$ *nele mesmo. Então* F_A *é invertível.*

Demonstração. Para $v = (v_1, v_2, ..., v_n) \neq 0$, derivando tem-se que,

$$DF_A(x)^* v = v + 3A^* \left(L_1^2 v_1, L_2^2 v_2, ..., L_n^2 v_n\right),$$

e $0 \notin S_v = \{DF_A(x)^* v \ ; \ x \in \mathbb{C}^n\}$ por hipótese, uma vez que $\det DF_A$ não se anula.

Por outro lado, S_v é fechado uma vez que ele é obtido do conjunto,

$$\{(L_1(x)^2, L_2(x)^2, ..., L_n(x)^2 \ ; \ x \in \mathbb{C}^n\},$$

através de uma multiplicação pela matrix diagonal D com $3v_i$ na diagonal, depois pela multiplicação por A^* e, finalmente, pela translação por v. Segue que $0 \notin \overline{S_v}$ e o Teorema 5.1.2 se aplica. □

Observação 5.3.9. Seria interessante investigar precisamente quais subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ tem imagem fechada sob qualquer aplicação linear de $\mathbb{C}^n$ nele mesmo (ver o artigo original para mais detalhes).

Exemplo 5.3.10. Consideremos o seguinte exemplo de Wright, veja [49] parágrafo 3.

Seja $H : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada por,

$$H(x, y, u, v) = \left(0, 0, uxy + vy^2, -ux^2 - vxy\right),$$

e tome $F(x, y, u, v) = (x, y, u, v) + H(x, y, u, v)$.

Pra cada $v \neq 0$ no plano $\{x = y = 0\}$ a hipótese da proposição 5.3.5 ou do Teorema 5.1.2 falha.

Por exemplo, se $v = (0, 0, a, b)$ com $ab \neq 0$, então

$$\lim_{n\to\infty} DF(x_n)^* v = 0, \quad \text{para a seqüência} \quad x_n = \left(a_n + \frac{1}{2b_n}, b - \frac{1}{2a_n}, b, -a\right).$$

No entanto, é possível aplicar estes resultados após modificar F.

Dentro da idéia dos Teoremas de Redução 6.1.3 e 6.1.4, acrescenta-se quatro novas variáveis p, q, r, s e define-se $\tilde{F} : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^8$ por,

$$\tilde{F}(x, y, u, v, p, q, r, s) = \big(F(x, y, u, v) + (0, 0, px^2 + qy^2, rx^2 + sy^2), p, q, r, s\big)\,.$$

É fácil checar que F é injetiva se e somente se $\tilde{F}$ também o for e que

$$\det DF(x, y, u, v) = \det D\tilde{F}(x, y, u, v, p, q, r, s).$$

Observando que $D\tilde{F} = 1$, pode-se aplicar a Proposição 5.3.5 escolhendo polinômios quadráticos e lineares adequados, de acordo com o vetor v.

No entanto, vai-se argumentar utilizando diretamente o Teorema 5.1.2.

Seja $v = (v_1, v_2, ..., v_8) \neq 0$ e considere o conjunto

$$S_v = \{D\tilde{F}(x, y, u, v, p, q, r, s)^* v \;;\; (x, y, u, v, p, q, r, s) \in \mathbb{C}^8\}.$$

Se $v_3 = v_4 = 0$, então $S_v = \{v\}$ e fica claro que $0 \notin S_v$. Por outro lado, se $(v_3, v_4) \neq (0, 0)$ e $0 \in \overline{S_v}$, então existe uma seqüência $X_n = (x_n, y_n, u_n, v_n, p_n, q_n, r_n, s_n)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} D\tilde{F}(X_n)^* v = 0.$$

Examinando as variáveis p, q, r e s vê-se que x_n e y_n são limitadas e, então, pode-se encontrar subseqüências para as quais $\lim x_n = a$ e $\lim y_n = b$.

As variáveis u e v levam a equação matricial ,

$$\begin{pmatrix} 1 + ab & -a^2 \\ b^2 & 1 - ab \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz à esquerda é invertível para qualquer que sejam a e b em $\mathbb{C}$, contradizendo a hipótese de $(v_3, v_4) \neq (0, 0)$. Isso mostra que $0 \notin \overline{S_v}$.

Conclui-se do Teorema 5.1.2 que $\tilde{F}$ é bijetiva e, portanto, F também.

Sob a luz do Teorema de Redução, faz-se a seguinte pergunta,

Questão. *Quando é possível modificar uma aplicação cúbica homogênea $F(x) = x + H(x)$ de forma a obter outra aplicação também cúbica homogênea $\tilde{F}(x, y)$ para a qual se pode usar o teste de inversibilidade como no exemplo 5.3.10?*

Capítulo

6

A Conjectura Jacobiana e Outras Conjecturas Notáveis

Neste capítulo serão abordados alguns dos principais resultados associados a Conjectura Jacobiana de Keller e, além disso, serão exibidas algumas outras Conjecturas que estão, de alguma forma, relacionadas a ela.

Neste contexto serão apresentados alguns resultados parciais, alguns contra-exemplos e algumas relações entre a Conjectura Jacobiana de Keller e outras conjecturas conhecidas no meio científico.

Para uma leitura mais completa sobre o assunto, são indicadas as referências [8] e [9].

Na primeira seção serão exibidos os principais resultados relacionados à Conjectura Jacobiana tanto no caso complexo quanto no caso real, a qual é denomianada Conjectura Jacobiana Real. Ainda nesta seção serão discutidos os conhecidos teoremas de redução.

Na segunda seção será dado destaque à Conjectura de Markus-Yamabe e a Conjectura de Markus-Yamabe Fraca.

A terceira seção será dedicada ao Problema Discreto de Markus-Yamabe, também conhecido como Problema de LaSalle, sobre o qual alguns importantes resultados serão enunciados.

Na quarta seção estuda-se a relação entre o Problema de Markus-Yamabe Discreto e a Conjectura de Ponto Fixo.

6.1 A Conjectura Jacobiana

Em 1939, Ott-Heinrich Keller enuncia em um de seus trabalhos a seguinte conjectura [55],

Conjectura Jacobiana: Se $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação polinomial tal que $\det JF(x)$ seja diferente de zero, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, então F tem inversa polinomial.

De fato, exigir que o determinante do Jacobiano de F seja diferente de zero para todo $x \in \mathbb{C}^n$ é equivalente a exigir que ele seja constante igual a um, pois, o $\det JF(x)$ é um polinômio e portanto é constante ou sobrejetor. No caso em que ele é constante igual a $c \in \mathbb{C}$, então a aplicação,

$$\begin{array}{rccl} G: & \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & x & \longmapsto & G(x) = \dfrac{1}{c}F(x), \end{array}$$

tem Jacobiano constante igual a um e tem inversa polinomial se e somente se F também o tem.

Assim pode-se definir,

Definição 6.1.1. Diz-se que $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma *aplicação de Keller* se $\det JF(x)$ é igual a um para todo ponto $x \in \mathbb{C}^n$.

Neste contexto pode-se enunciar a Conjectura Jacobiana da seguinte forma,

Conjectura Jacobiana: Se $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação de Keller, então F tem inversa polinomial.

Desde a inserção desta Conjectura no meio científico, muitas pessoas de várias áreas da matemática demonstraram interesse neste problema e, desta forma, muitos resultados parciais foram encontrados embora o caso geral esteja ainda em aberto.

Os chamados *Teoremas de Redução* têm por objetivo diminuir o universo de aplicações para as quais a Conjectura precisa ser provada. Na seção seguinte tem-se alguns destes Teoremas exibidos.

6.1.1 Teoremas de Redução

A primeira redução considerável na prova da conjectura Jacobiana é devido ao seguinte resultado de Bialynicki-Birula e Rosenlicht [52] em 1962,

Teorema 6.1.1 (Bialynicki-Birula, Rosenlicht). *Se $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, com $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, é uma aplicação polinomial injetiva, então F é sobrejetiva. Além disso, quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sua inversa é também polinomial.*

Sob a luz deste resultado a Conjectura Jacobiana é equivalente a seguinte conjectura,

Conjectura Jacobiana: Se $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é uma aplicação de Keller, então F é injetiva.

Outro Teorema que reduz fortemente o conjunto das aplicações para as quais a Conjectura Jacobiana precisa ser mostrada é o seguinte,

Teorema 6.1.2. *Se a Conjectura Jacobiana for verdadeira para todo $n \geq 2$ e para todas aplicações F da forma $F = I + H$, onde I é a identidade e H é uma aplicação de grau menor ou igual a três com JH nilpotente, então a Conjectura Jacobiana é verdadeira em geral.*

A demonstração deste resultado será omitida aqui mas pode ser encontrada em [8] durante a demonstração do Teorema 6.3.1 na página 125.

Em 1981, Yagzhev [53] provou um resultado que permite reduzir ainda mais o universo de aplicações para as quais devemos provar a Conjectura Jacobiana. Independentemente em 1982, Bass, Connell e Wright [22] provaram o mesmo resultado.

Antes de enunciar este resultado deve ser introduzida uma notação e uma definição.

Definição 6.1.2. Diz-se que uma aplicação $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ é *cúbica homogênea*, quando ela for da forma $F = I + H$ onde I é a aplicação identidade em $\mathbb{K}^n$ e $H = (H_1, ..., H_n)$ sendo H_i uma aplicação polinomial homogênea de grau três ou nula para cada $i = 1, 2, ..., n$.

Denota-se por $\mathrm{End}(\mathbb{K}, n)$, o conjunto das aplicações polinomiais da forma $F = (F_1, ..., F_n) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. E denota-se por $\mathrm{End}^1(\mathbb{K}, n)$ o conjunto,

$$\mathrm{End}^1(\mathbb{K}, n) = \{F \in \mathrm{End}(\mathbb{K}, n) \ ; \ F(0) = 0 \text{ e } JF(0) = I\},$$

onde I denota a aplicação identidade em $\mathbb{K}^n$.

Teorema 6.1.3 (Yagzhev, Bass, Connell, Wright). *A Conjectura Jacobiana no caso geral é equivalente à Conjectura Jacobiana para aplicações polinomiais homogêneas cúbicas que pertençam ao conjunto* $\mathrm{End}^1(\mathbb{K}, n)$*, para todo $n \geq 2$.*

Para enunciar o último Teorema de Redução que citaremos neste texto vamos precisar de mais uma definição,

Definição 6.1.3. Diz-se que uma aplicação $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ é uma *Aplicação de Drużkowski* quando ela for cúbica homogênea e além disso cada H_i for o cubo de alguma aplicação linear, ou seja,

$$H(x) = (L_1^3, L_2^3, ..., L_n^3),$$

para algumas aplicações lineares $L_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, com $i = 1, 2, ..., n$.

Observe que as aplicações L_i da definição acima são funcionais lineares e portanto podem ser identificados com vetores de $\mathbb{K}^n$. O cubo de tais aplicações denota a multiplicação usual de funções, ou seja,

$$L_1^3(x) = L_1(x)^3, \text{ para todo } x \in \mathbb{K}^n.$$

Note que, se A é a matriz que se constrói a partir da colocação dos vetores L_i em suas linhas, então,

$$\big[\mathrm{diag}(Ax)\big]^2 Ax = \big[\mathrm{diag}(L_1(x), ..., L_n(x))\big]^2 \big(L_1(x), ..., L_n(x)\big) = \big(L_1(x)^3, ..., L_n(x)^3\big).$$

Por isso, algumas vezes as aplicações de Drużkowski são definidas como sendo da forma $I + H$, com H da forma,

$$H(x) = \big[\mathrm{diag}(Ax)\big]^2 Ax,$$

para alguma aplicação linear $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

Com tais definições, pode-se enunciar,

Teorema 6.1.4 (Drużkowski). *A Conjectura Jacobiana no caso geral é equivalente à conjectura Jacobiana para aplicações de Drużkowski em todas as dimensões maiores ou iguais a dois.*

Note que, o conjunto das aplicações de Drużkowski é um subconjunto próprio de $\mathrm{End}^1(\mathbb{K}^n)$.

6.1.2 Conjectura Jacobiana Real

Na seção anterior foi visto que, no caso em que F é uma aplicação polinomial de $\mathbb{C}^n$ nele mesmo, a condição $\det JF(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, é equivalente a exigir que F seja uma aplicação de Keller. Além disso o Teorema 6.1.1 sugere que a inversa se uma aplicação polinomial em $\mathbb{R}^n$ não precisa necessariamente ser polinomial.

Exemplo 6.1.5. A aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = x + x^3$ tem Jacobiano igual a $1 + 3x^2$ e que portanto é sempre diferente de 0 e, no entanto, sua inversa é analítica mas não polinomial.

A equivalência entre a exigência de que o determinante do Jacobiano seja não nulo e da exigência de que o determinante seja constante igual a um, está fundamentada no fato de que todo polinômio não constante possui raízes complexas. Porém, se for de interesse restringir ao caso real, a Conjectura Jacobiana precisa ser formulada adequadamente,

Conjectura Jacobiana Real Forte: Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação polinomial tal que o $\det JF(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então F tem inversa analítica.

A inclusão do adjetivo "forte" ao nome da Conjectura deve-se ao fato de não se exigir que o Jacobiano seja constante, mas apenas, diferente de zero.

Pode-se notar que a Conjectura Jacobiana Real Forte implica na Conjectura Jacobiana pela identificação usual de $\mathbb{C}^n$ com $\mathbb{R}^{2n}$.

No entanto, em 1996, foi exibido um contra-exemplo para esta Conjectura mesmo em dimensão dois, por Pinchuk [54],

Exemplo 6.1.6 (Pinchuk). Considere a seguinte aplicação polinomial em $\mathbb{R}^2$, $F = (p, q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada da seguinte forma,

$$\begin{aligned} p(x,y) &= f(x,y) + h(x,y), \\ q(x,y) &= -t^2(x,y) - 6t(x,y)h(x,y)\big[h(x,y)+1\big] - 170f(x,y)h(x,y) \\ &\quad - 91h^2(x,y) - 195f(x,y)h^2(x,y) - 69h^3(x,y) - 75h^3(x,y)f(x,y) - \frac{75}{4}h^4(x,y), \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{(h(x,y)+1)}{x}\big[xt(x,y)+1\big]^2, \\ h(x,y) &= t(x,y)\big[xt(x,y)+1\big], \\ t(x,y) &= xy - 1. \end{aligned}$$

Então a aplicação F é tal que,

1. $\det JF(z) = t(z)^2 + \Big(t(z) + f(z)\big(13 + 15h(z)\big)\Big)^2 + f(z)^2$ para todo $z \in \mathbb{R}^2$,
2. $F(1,0) = F(-1,-2) = (0,-1)$.

Como pode ser verificado através de cálculos diretos.

Vejamos que $\det JF(z) > 0$ para todo $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Suponha que $t(x,y) = 0$. Então $x \neq 0$ e $h(x,y) = 0$. Mas assim, $f(x,y) = 1/x \neq 0$ implicando que o determinante seja não nulo.

Observação 6.1.7. Como foi visto acima, o fato da Conjectura Jacobiana Real implicar a Conjectura Jacobiana de nada ajuda na resolução da última pois a primeira é falsa. No entanto pode-se modificar ligeiramente o enunciado da Conjectura Jacobiana Real de forma a se obter uma Conjectura equivalente à Conjectura Jacobiana.

Conjectura Jacobiana Real: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial tal que $\det JF(x)$ seja *constante* e não nulo. Então F é injetiva.

Para verificar a equivalência basta usar a identificação usual entre $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{R}^{2n}$ e observar que $|\det J_{\mathbb{C}}F|^2 = \det J_{\mathbb{R}}F$.

6.1.3 Um Resultado Parcial

Nesta seção será exibido um resultado que comprova parcialmente a Conjectura Jacobiana.

O resultado que enunciamos aqui é devido a Wang [47] (ver Teorema 5.3.6),

Teorema 6.1.8 (Wang). *Se $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, é uma aplicação polinomial de grau menor ou igual a dois tal que $\det JF(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$, então F é invertível.*

Antes da prova deste Teorema vale a pena observar que, embora a conclusão do Teorema só diga que F é invertível, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pode-se recorrer ao Teorema 6.1.1 para concluir que sua inversa também é polinomial. Sendo assim, este Teorema responde como afirmativa a Conjectura Jacobiana (e a Conjectura Jacobiana Real) para o caso em que o grau de F é menor ou igual a dois.

Demonstração. Pelo Teorema de 6.1.1 basta provar a injetividade de F. Sendo assim, suponha por absurdo que existam dois pontos a e b de $\mathbb{K}^n$ de tal forma que $F(a) = F(b)$.

Tome a função $G(x) = F(x + a) - F(b)$ e observemos que G tem o mesmo grau de F, $G(0) = 0$ e tomando $c = b - a$ vê-se que $c \neq 0$ e $G(c) = 0$.

Agora, note que $JG(x) = JF(x - a)$ e portanto G satisfaz as hipóteses da Conjectura Jacobiana (real ou complexa).

Seja $G = G_{(1)} + G_{(2)}$ a decomposição de G em suas parcelas homogêneas.

Derivando a expressão $G(tc) = tG_{(1)}(c) + t^2G_{(2)}(c)$ com respeito a t, temos,

$$G_{(1)}(c) + 2tG_{(2)}(c) = \frac{d}{dt}G(tc) = JG(tc)c \neq 0.$$

Substituindo t por meio, temos que $G(c) \neq 0$ o que é um absurdo. Sendo assim F é injetiva. □

6.2 A Conjectura de Markus-Yamabe

De início, uma pequena motivação para o surgimento desta conjectura.

Definição 6.2.1. Diz-se que uma matriz $n \times n$ é *estável* quando todos seus autovalores tiverem parte real negativa.

Definição 6.2.2. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$. Diz-se que um ponto $w \in \mathbb{R}^n$ é um *atrator local* para o sistema dinâmico contínuo induzido por F quando, existir uma vizinhança aberta U de w tal que,

(1.) Existe algum tempo $t > 0$ tal que a função $\phi_t(x)$, que mapeia x no ponto de sua órbita atingido no tempo t, leva $\overline{U}$ em um subconjunto de U.

(2.) A intersecção,

$$\bigcap_{t>0} \phi_t(U) = \{w\}.$$

Definição 6.2.3. Diz-se que um ponto $w \in \mathbb{R}^n$ é um *atrator global* para o sistema dinâmico induzido por $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe $\mathcal{C}^1$, quando o aberto U na definição acima puder ser tomado como sendo todo o $\mathbb{R}^n$.

O seguinte resultado é devido a Lyapunov,

Teorema 6.2.1. *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ de tal forma que $F(0) = 0$. Se a matrix $JF(0)$ for estável então a origem é um atrator local.*

Motivados por este resultado, em 1960, Larry Markus e Hidehiko Yamabe enunciaram a seguinte conjectura [18],

Conjectura de Markus-Yamabe: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ com $F(0) = 0$. Se a matrix $JF(x)$ for estável para todo $x \in \mathbb{R}^n$ então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico contínuo induzido por F.

No artigo onde Markus e Yamabe enunciam esta conjectura, eles provam-na para dimensão dois e no caso em que $JF(x)$ é uma matriz com alguma entrada identicamente nula.

Desde então muitos matemáticos tentaram resolver este problema, alguns fornecendo resultados positivos, outros, contra-exemplos. Até que em 1995, os últimos pedaços deste problema foram resolvidos de forma que, hoje, esta Conjectura está completamente resolvida.

Outra conjectura que está fortemente relacionada com a Conjectura de Markus-Yamabe é a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe,

Conjectura Fraca de Markus-Yamabe: Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\mathcal{C}^1$ com $F(0) = 0$ e se a matriz $JF(x)$ é estável para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então F é injetiva.

Pode ser mostrada a seguinte implicação a cerca destas duas conjecturas,

Proposição 6.2.2. *A Conjectura de Markus-Yamabe implica na Conjectura Fraca de Markus-Yamabe.*

Demonstração. Suponha que F satisfaça as hipóteses da Conjectura de Markus-Yamabe e que existam dois pontos distintos a e b em $\mathbb{R}^n$ tais que $F(a) = F(b)$.

Defina $G(x) = F(x+a) - F(b)$ e observe que G também satisfaz as hipóteses da Conjectura de Markus-Yamabe.

Assumindo que a Conjectura de Markus-Yamabe seja verdadeira, a origem deve ser um atrator global para o sistema dinâmico $\dot{x} = G(x)$. Mas isso viola o fato de que $x(t) = b - a$ é também uma solução constante do sistema e $b - a \neq 0$. □

Vejamos agora alguns destes resultados que permitiram a solução desta Conjectura.

6.2.1 Alguns Resultados sobre a Conjectura Bidimensional de Markus-Yamabe

Um importante resultado no sentido de solucionar parte desta Conjectura foi enunciado em 1963 e é devido a Olech [19],

Teorema 6.2.3 (Olech). *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $F(0) = 0$ e a matriz $JF(x)$ seja estável para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Se existirem constantes $\varepsilon > 0$ e $r > 0$ de forma que,*

$$|x| \geq \varepsilon \Longrightarrow \left|F(x)\right| \geq r,$$

então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico contínuo induzido por F.

Através deste resultado pode-se mostrar o seguinte,

Teorema 6.2.4. *A Conjectura Fraca de Markus-Yamabe em dimensão dois implica na Conjectura de Markus-Yamabe em dimensão dois. Sendo assim, em dimensão dois, as duas Conjecturas são equivalentes (pelo Teorema 6.2.2).*

Demonstração. Suponha que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja uma aplicação que satisfaça as hipóteses da Conjectura de Markus-Yamabe, ou seja, F é de classe $\mathcal{C}^1$, com $F(0) = 0$ e $JF(x)$ é estável para todo ponto $x \in \mathbb{R}^2$.

Segue do Teorema da Função Inversa que F é um homeomorfismo local, em particular, existe um número real $\varepsilon > 0$ de forma que a bola de raio ε e centro na origem seja mapeada homeomorficamente em uma vizinhança V de $F(0) = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

Sendo assim, V contem uma bola centrada na origem. Tome $r > 0$ como sendo o raio desta bola.

Pela veracidade assumida da Conjectura de Markus-Yamabe Fraca, F é injetiva, implicando que nenhum ponto x com módulo maior que ε tenha imagem com módulo menor que r, ou seja,

$$\text{Se } |x| > \varepsilon \text{ então } |F(x)| > r.$$

Usando o Teorema de Olech 6.2.3, conclui-se que a origem é um atrator global para o sistema dinâmico contínuo induzido por F, ou seja, a Conjectura de Markus-Yamabe é verdadeira neste caso. □

Através deste Teorema, em 1987, Meisters e Olech provaram que a Conjectura de Markus-Yamabe é verdadeira para aplicações polinomiais de $\mathbb{R}^2$ nele mesmo,

Teorema 6.2.5 (Meister,Olech). *Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação polinomial tal que $F(0) = 0$ e a matriz $JF(x)$ seja estável para todo $x \in \mathbb{R}^2$, então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico contínuo induzido por F.*

A prova deste resultado pode ser encontrada na página 181 da referência [8].

Finalmente em 1993, Fessler [16] e Gutierrez [17], independentemente, exibem a prova de que a Conjectura de Markus-Yamabe é verdadeira em dimensão dois,

Teorema 6.2.6 (Gutierrez, Fessler). *Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $F(0) = 0$ e que a matriz $JF(x)$ seja estável para todo $x \in \mathbb{R}^2$, então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico $\dot{x} = F(x)$.*

No ano de 2004, Gutierrez mostra que, de fato, basta exigir a diferenciabilidade da aplicação F no teorema acima como pode ser visto no capítulo 2 deste texto, Teorema 2.3.1.

6.2.2 Alguns Resultados sobre a Conjectura N-Dimensional de Markus-Yamabe

Logo após a proposição da Conjectura de Markus-Yamabe, Hartmann [58], em 1961, enuncia o seguinte resultado,

Teorema 6.2.7 (Hartmann). *Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$, com $F(0) = 0$, tal que a matriz $JF(x) + JF(x)^t$ seja estável para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico induzido por F.*

Em 1988, Barabanov [57] deu idéias de como se construir um contra-exemplo para a Conjectura de Markus-Yamabe em dimensão quatro, mas as idéias ficaram ainda meio obscuras.

No entanto em 1994, Bernat e Llibre [56] inspirados pelo artigo de Barabanov, constroem um contra-exemplo para a Conjectura de Markus-Yamabe em dimensão quatro.

Exemplo 6.2.8 (Bernat, Llibre). O seguinte sistema satisfaz as hipóteses da Conjectura de Markus-Yamabe mas possui uma órbita periódica não constante.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_4 \\ \dot{x}_3 = x_1 - 2x_4 - \dfrac{9131}{900}\psi x_4 \\ \dot{x}_4 = x_1 + x_3 - x_4 - \dfrac{1837}{180}\psi x_4 \end{cases} \tag{6.1}$$

onde ψ pode ser tomada de classe $\mathcal{C}^r$, com $r \geq 1$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou mesmo analítica.

Em 1995, Cima, Gasull, Mañosas, Hubbers e van den Essen encontraram um contra-exemplo para a Conjectura de Markus-Yamabe em dimensão três. Assim, finalmente o último pedaço do quebra-cabeça foi encaixado,

Exemplo 6.2.9 (Cima, Gasull, Mañosas, Hubbers, van den Essen). O seguinte sistema polinomial satisfaz as hipóteses da Conjectura de Markus-Yamabe e tem uma órbita que tende a infinito a medida que o tempo tende a infinito.

$$\dot{x} = F(x) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_3(x_1 + x_2x_3)^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - (x_1 + x_2x_3)^2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases} \tag{6.2}$$

A origem é um ponto fixo do sistema acima como pode-se facilmente verificar. Além disso, a matriz Jacobiana de F é dada por,

$$JF(x) = \begin{pmatrix} -1 + 2dx_3 & 2dx_3^2 & d^2 + 2dx_2x_3 \\ -2d & -1 - 2dx_3 & -2dx_2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

onde $d = (x_1 + x_2x_3)$. O polinômio característico de $JF(x)$ é,

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3,$$

e, portanto, para todo $x \in \mathbb{R}^3$ todos autovalores de $JF(x)$ são iguais a menos um.

No entanto,

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(18e^t, -12e^{2t}, e^{-t}\right),$$

é uma solução deste sistema que tende a infinito quando $t \to \infty$.

Uma observação interessante no exemplo acima é que se o campo for restrito ao plano $x_3 = 0$ vê-se que qualquer solução que passa por este plano fica inteiramente contida nele e, portanto deve tender para a origem conforme o tempo evolui uma vez que a Conjectura de Markus-Yamabe é verdadeira em $\mathbb{R}^2$.

6.3 O Problema de Markus-Yamabe Discreto ou Problema de LaSalle

Antes de enunciar o Problema de LaSalle, também conhecido como Problema Discreto de Markus-Yamabe (ver Capítulo 3), vejamos uma definição.

Definição 6.3.1. Seja uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Diz-se que um ponto $w \in \mathbb{R}^n$ é um *atrator global para o sistema dinâmico discreto induzido por* F, quando,

$$\lim_{n\to\infty} F^{(n)}(x) = w, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $F^{(n)}(x) = F \circ F \circ ... \circ F(x)$, n vezes.

Em 1976, LaSalle [59], propõe o seguinte Problema,

Problema de LaSalle: Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1$, com $F(0) = 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ todos os autovalores de $JF(x)$ tem valor absoluto menor do que um. Então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico discreto induzido por F?

No capítulo 3 desde texto são exibidos vários resultados sobre esta Conjectura que foram extraídos de [2].

Nesta seção será feita a transcrição de alguns resultados e remetemos ao capítulo 3 para as respectivas demonstrações.

Para enunciar o primeiro resultado, será precisa uma definição,

Definição 6.3.2. Uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dita *triangular* quando ela tiver a forma,

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \big(F_1(x_1), F_2(x_1, x_2), ..., F_n(x_1, x_2, ...x_n)\big).$$

Também diz-se que ela é *linearmente triangularizável* quando existir alguma transformação linear L em $\mathbb{R}^n$ tal que,

$$L^1 \circ F \circ L,$$

seja triangular.

O primeiro resultado dá uma resposta afirmativa para o Problema acima para um caso especial 3.2.1,

Teorema 6.3.1 (Cima, Gasull, Mañosas). *Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação triangular de classe $\mathcal{C}^1$ com $F(0) = 0$. Se todos os autovalores de $JF(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, têm valor absoluto menor do que um, então a origem é um atrator global para o sistema dinâmico discreto associado a F. Em outras palavras o Problema de LaSalle tem resposta afirmativa para aplicações triangulares.*

Para a demonstração ver Teorema 3.2.1.

Este resultado juntamente com dois outros resultados clássicos, um devido a Jörgens [30], Teorema 3.2.5, e outro devido a Dillen, Teorema 3.2.6, cuja demonstração pode ser encontrada no capítulo 3, permitiram que Cima, Gasull e Mañosas [2], em 1995, provassem o seguinte resultado (Teorema 3.2.7),

Teorema 6.3.2 (Cima, Gasull, Mañosas). *Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma aplicação polinomial tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, todos autovalores de $JF(x)$ tem valor absoluto menor do que um, então F possui um único ponto fixo que é um atrator global do sistema dinâmico discreto induzido por F.*

A prova deste resultado pode ser encontrada no Teorema 3.2.7

No entanto, Szlenk encontra um exemplo de aplicação racional de $\mathbb{R}^2$ nele mesmo, que satisfaz a hipótese do Problema de LaSalle mas que possui uma órbita periódica. Vejamos o exemplo (exemplo 3.5.1),

Teorema 6.3.3 (Szlenk). *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por,*

$$F(x, y) = \left(\frac{-ky^3}{1 + x^+ y^2}, \frac{kx^3}{1 + x^2 + y^2} \right),$$

onde $k \in (1, 2/\sqrt{3})$. Então F cumpre com as hipóteses do Problema de LaSalle porém tem uma órbita periódica, a saber,

$$F^4 \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0 \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}, 0 \right).$$

A prova de que o exemplo realmente é um contra-exemplo para o Problema de LaSalle é exibida no capítulo 3, exemplo 3.5.1.

A partir deste exemplo, em 1995, Cima, Gasull e Mañosas [2], conseguem dar um exemplo de difeomorfismo que responde negativamente ao Problema de LaSalle (Teorema 3.5.2),

Teorema 6.3.4 (Cima, Gasull, Mañosas). *Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida no exemplo de Szlenk (exemplo 6.3.3). Para um dado $a \in \mathbb{R}$, defina,*

$$G_a(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{-kx_2^3}{1 + x_1^2 + x_2^2} - ax_1, \frac{kx_1^3}{1 + x_1^2 + x_2^2} - ax_2, cx_3, ..., cx_n \right),$$

onde $|c| < 1$ e $k \in (1, 2/\sqrt{3})$. Então, para a suficientemente pequeno,

(1) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se λ é um autovalor da derivada de G_a no ponto x, então $|\lambda| < 1$.

(2) $G_a(0) = 0$ e existe $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ tal que $G_a^4(p) = p$.

Aprova do Teorema acima conta no capítulo 3, Teorema 3.5.2.

Finalmente em 1997, Cima, Gasull, Mañosas, Hubbers e van den Essen [15], encontram um contra-exemplo polinomial para o Problema de LaSalle em dimensão maior ou igual a três,

Teorema 6.3.5 (Cima, Gasull, Mañosas, Hubbers, van den Essen). *Seja a aplicação, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, dada por,*

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(\frac{1}{2}x_1 + x_3 d(x)^2, \frac{1}{2}x_2 - d(x)^2, \frac{1}{2}x_3, ..., \frac{1}{2}x_n\right),$$

onde $d(x) = x_1 + x_2x_3$. Então existe um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que a seqüência $\{F^n(x_0)\}$ tende para infinito quando $n \to \infty$ e a aplicação F cumpre com as hipóteses do Problema de LaSalle.

Demonstração. Primeiramente vejamos que F cumpre com as hipóteses do Problema de LaSalle. A matriz Jacobiana de F é,

$$JF(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2d(x)x_3 & 2d(x)x_3^2 & d(x)^2 + 2d(x)x_2 & \dots & 0 \\ -2d(x) & \frac{1}{2} - 2d(x)x_3 & -2d(x)x_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Com polinômio característico igual a,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^{n-3} \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2d(x)x_3 - \lambda & 2d(x)x_3^2 & d^2(x) + 2d(x)x_2 \\ -2d(x) & \frac{1}{2} - 2d(x)x_3 - \lambda & -2d(x)x_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^{n-2} \left[\left(\frac{1}{2} + 2d(x)x_3 - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - 2d(x)x_3 - \lambda\right) + 4d(x)x_3^2\right] = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^n \end{aligned}$$

Sendo assim, todos os autovalores de F são iguais a meio e portanto tem valor absoluto menor do que um. Além disso F é de classe $\mathcal{C}^1$ e $F(0) = 0$.

No entanto, tomando

$$x^{(0)} = \left(\frac{147}{32}, -\frac{63}{32}, 1, 0, ..., 0\right),$$

pode-se verificar por indução que.

$$x^{(n)} = \left(\frac{147}{32}2^n, -\frac{63}{32}2^n, \frac{1}{2^n}, 0, ..., 0\right),$$

que claramente tende a infinito a medida que $n \to \infty$. □

6.4 A Conjectura de Ponto Fixo

No decorrer do desenvolvimento da pesquisa sobre o Problema de LaSalle, uma observação trivial foi feita, porém com boas conseqüências,
"Se o Problema de LaSalle for verdadeiro para aplicações polinomiais, então todo polinônio que satisfizer as hipóteses deste Problema deve ter a origem como único ponto fixo."

Esta observação leva a formulação da seguinte Conjectura,

Conjectura de Ponto Fixo: Toda aplicação polinomial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, os autovalores de $JF(x)$ tem valor absoluto menor do que um, possui um único ponto fixo.

Esta Conjectura também aparece em sua versão complexa,

Conjectura de Ponto Fixo (Caso Complexo): Toda aplicação polinomial $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que, para todo $x \in \mathbb{C}^n$, os autovalores de $JF(x)$ tem valor absoluto menor do que um, possui um único ponto fixo.

Proposição 6.4.1. *Os dois enunciados acima para a Conjectura de Ponto Fixo são equivalentes.*

Demonstração. Primeiro observe que se A e B são duas matrizes reais $n \times n$, então a matriz $A + iB$ tem os mesmos autovalores que a matriz $2n \times 2n$,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}.$$

De fato, suponha que existam $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{cases} Ax - By = \lambda x \\ Bx + Ay = \lambda y \end{cases},$$

que equivale a dizer que $(A + iB)(x + iy) = \lambda(x + iy)$, ou seja, λ é um autovalor de $A + iB$.

Agora, suponha que $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ seja uma aplicação polinomial tal que todos os autovalores de $JF(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}^n$, possuam valor absoluto menor do que um.

Considere a aplicação polinomial $\tilde{F} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dada por,

$$\tilde{F}(x, y) = \Big(\mathrm{Re}\,(F(x + iy))\,, \mathrm{Im}\,(F(x + iy))\Big) = \Big(G(x, y), H(x, y)\Big),$$

de onde,

$$J\tilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial x_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial y_n} \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial x_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial H_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial H_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial x_1} & \frac{\partial H_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial H_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Agora, deve-se observar que, se $\sim: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ é a identificação usual,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}(x,y) &= D\left(\mathrm{Re}\left(F_1(\widetilde{(x,y)})\right)\right)(e_1) \\ &= \mathrm{Re}\left(DF_1(x+iy).\widetilde{e_1}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}(x+iy), ..., \frac{\partial F_1}{\partial z_n}(x+iy)\right).\widetilde{e_1}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}(x+iy)\right). \end{aligned}$$

Fazendo o cálculo para mais um caso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial y_1}(x,y) &= D\left(\mathrm{Im}\left(F_1(\widetilde{(x,y)})\right)\right)(e_{n+1}) \\ &= \mathrm{Im}\left(DF_1(x+iy).\widetilde{e_{n+1}}\right) = \mathrm{Im}\left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}(x+iy), ..., \frac{\partial F_1}{\partial z_n}(x+iy)\right).ie_1\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}(x+iy)\right). \end{aligned}$$

Os demais casos podem ser obtidos realizando o mesmo procedimento.

Segue destas observações que,

$$J\tilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\right) & \dots & \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_n}\right) & -\mathrm{Im}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\right) & \dots & -\mathrm{Im}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_n}\right) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_n}{\partial z_1}\right) & \dots & \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_n}{\partial z_n}\right) & -\mathrm{Im}\left(\frac{\partial F_n}{\partial z_1}\right) & \dots & -\mathrm{Im}\left(\frac{\partial F_n}{\partial z_n}\right) \\ \mathrm{Im}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\right) & \dots & \mathrm{Im}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_n}\right) & \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\right) & \dots & \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_n}\right) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Im}\left(\frac{\partial F_n}{\partial z_1}\right) & \dots & \mathrm{Im}\left(\frac{\partial F_n}{\partial z_n}\right) & \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_n}{\partial z_1}\right) & \dots & \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F_n}{\partial z_n}\right) \end{pmatrix}(x+iy).$$

Portanto,

$$J\tilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(JF(x+iy)\right) & -\mathrm{Im}\left(JF(x+iy)\right) \\ \mathrm{Im}\left(JF(x+iy)\right) & \mathrm{Re}\left(JF(x+iy)\right) \end{pmatrix},$$

e assim, $J\tilde{F}(x,y)$ possui os mesmos autovalores que $JF(x+iy)$.

Logo, $\tilde{F}$ cumpre com as hipóteses da Conjectura de Ponto Fixo (caso real) se e somente F cumpre (caso complexo). É claro que (x, y) é um ponto fixo de $\tilde{F}$ se e somente se $x + iy$ é um ponto fixo de F. Fica assim provado que o caso complexo da Conjectura de Ponto Fixo é equivalente ao caso real. $\square$

Em 1995, Cima, Gasull e Mañosas [2], mostram o seguinte resultado,

Teorema 6.4.2 (Cima, Gasull, Mañosas). *A Conjectura Jacobiana é equivalente a Conjectura de Ponto Fixo.*

A prova deste fato pode ser encontrada no capítulo 3, Teorema 3.3.1.

Apêndice

A

Alguns Resultados de Álgebra Linear

Neste apêndice serão apresentadas as demonstrações de alguns resultados de álgebra linear que foram utilizados no texto mas que, no entanto, tiveram suas demonstrações omitidas.

A.1 Prova do Resultado 3.2.8

Será dada agora a prova do seguinte resultado utilizado no capítulo 3. Recomenda-se a leitura de um bom livro de álgebra linear para uma prova mais geral em dimensões mais altas. Aqui será exibida uma prova específica para o caso em estudo, de fácil leitura e que não demanda muito conhecimento de álgebra linear.

Lema 3.2.8. *Seja $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear. Então existe uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ de forma que A assume uma das duas formas,*

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad ou \quad A_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores de A e ε é um número real maior ou igual a zero.

Prova.A prova será dividida em três casos conforme a configuração dos autovalores e autoespaços de A.

Caso 1: A possui dois autovalores distintos.

Como já é sabido, se u_1 é um autovetor de A associado ao autovalor λ_1 e u_2 associado ao autovalor λ_2, então o conjunto $\{u_1, u_2\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^2$.

Neste caso,

$$A.u_1 = \lambda_1 u_1 \quad \text{e} \quad A.u_2 = \lambda_2 u_2,$$

permitindo concluir que através de uma mudança de coordenadas que transforme as coordenadas usuais nas coordenadas associadas à base $\{u_1, u_2\}$, A assume a forma de A_1.

Caso 2: A possui autovalores iguais e o autoespaço associado tem dimensão dois.

Neste caso, embora os autovalores não sejam distintos, é possível conseguir uma base de $\mathbb{R}^2$ composta por autovetores e, assim, pelo mesmo procedimento acima, pode ser conseguido uma mudança de coordenadas segundo a qual A assume a forma A_2, com $\varepsilon = 0$.

Caso 3: A possui autovalores mas o autoespaço tem dimensão um.

Desta vez, não é possível encontrar uma base de $\mathbb{R}^2$ que seja formada por autovetores de A.

Assim, considere u_1 um autovetor associado ao autovalor λ_1. Seja E_1 o autoespaço unidimensional associado ao autovalor λ_1.

Como o autovalor λ_1 tem multiplicidade algébrica dois,

$$(A - \lambda_1 I)^2 = 0, \tag{A.1}$$

onde I é a matriz identidade em $\mathbb{R}^2$.

Tome v um vetor de $\mathbb{R}^2$ que não pertença a E_1. Isso significa que $(A - \lambda_1 I)v \neq 0$. Porém, pela equação A.1, $(A - \lambda_1 I)^2 v = 0$.

Decorre que $(A - \lambda_1 I)v \in E_1$ e portanto que,

$$(A - \lambda_1 I)v = cu_1.$$

Agora, pela linearidade do operador $(A - \lambda_1 I)$, para qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se tomar $u_2 = (\varepsilon/c)v$. Desta forma,

$$Au_2 = A\frac{\varepsilon}{c}v = \frac{\varepsilon}{c}(cu_1 + \lambda_1 v) = \varepsilon u_1 + \frac{\varepsilon}{c}\lambda_1 v = \varepsilon u_1 + \lambda_1 u_2.$$

Daí, tem-se que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ sob a qual A assume a forma A_2.

Isso completa a prova do lema por exaustão. $\square$.

A.2 Prova da Proposicao 3.3.2

Nesta seção exibe-se a prova da proposição 3.3.2 que, embora simples, julgou-se necessária a sua inclusão neste apêndice.

Proposição 3.3.2. *Seja N uma matriz nilpotente que tem a seguinte forma,*

$$N = \begin{bmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & \dots & n_{1,m} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & \dots & n_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_{m-1,1} & n_{m-1,2} & \dots & n_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \dots & n_{m,m} \end{bmatrix}. \tag{A.2}$$

Então, a submatriz $N_{m,m}$ obtida a partir de N excluindo-se a última linha e a última coluna, também é uma matriz nilpotente.

Prova. Para provar esta proposição procede-se simplesmente com o cálculo do produto N^2 e verifica-se que os elementos desta matriz dependem somente dos elementos da submatriz $N_{m,m}$.

De fato,

$$N^2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} n_{1,j}n_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^{m} n_{1,j}n_{j,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} n_{m,j}n_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^{m} n_{m,j}n_{j,m} \end{bmatrix}. \tag{A.3}$$

Mas, como por hipótese $n_{m,j}$ é igual a zero para todo $j = 1, 2, ..., m-1$,

$$N^2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m-1} n_{1,j}n_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^{m-1} n_{1,j}n_{j,m-1} & \sum_{j=1}^{m} n_{1,j}n_{j,m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m-1} n_{m-1,j}n_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^{m-1} n_{m-1,j}n_{j,m-1} & \sum_{j=1}^{m} n_{1,j}n_{j,m} \\ 0 & \dots & 0 & n_{m,m}^2 \end{bmatrix}. \tag{A.4}$$

Agora, fazendo o cômputo do produto $(N_{m,m})^2$, chega-se a,

$$(N_{m,m})^2 = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m-1} n_{1,j}n_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^{m-1} n_{1,j}n_{j,m-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m-1} n_{m-1,j}n_{j,1} & \dots & \sum_{j=1}^{m-1} n_{m-1,j}n_{j,m-1} \end{bmatrix}. \tag{A.5}$$

O que mostra que $(N_{m,m})^2 = (N^2)_{m,m}$. E, como N^2 tem a mesma forma de N, segue por indução que, $(N_{m,m})^k = (N_{m,m}^k)$, para todo $k = 2^p$, com $p \in \mathbb{N}$.

Como a matriz N é nilpotente, existe um $q \in \mathbb{N}$ de forma que $N^{2^q} = 0$ e portanto $(N^{2^q})_{m,m} = 0$, de onde segue que $N_{m,m}$ também é nilpotente. □

Apêndice

B

Mudança de Variáveis para um Polinômio Quadrático

Na demonstração do Teorema 3.2.6 e do Teorema 3.2.7, usa-se um procedimento de mudança de coordenadas para que uma aplicação polinomial quadrática assuma a forma,

$$P(x, y) = x\,y + p(y).$$

Infelizmente não é de meu conhecimento nenhum método mais formal para se conclui tal fato, sendo assim, a demonstração deste fato será feita de forma analítica. Por esta razão foi feita a transcrição deste resultado para um apêndice.

Proposição B.0.1. *Seja $P : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial quadrática. Então existe uma mudança de variáveis afim no plano complexo $(x, y) \mapsto (u, v)$ tal que,*

$$P(u, v) = u\,v + p(v),$$

onde p é um polinômio em uma variável.

Demonstração. Seja $P(x, y)$ um polinômio quadrático geral,

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f, \tag{B.1}$$

onde a, b, c, d, e e f são números complexos.

Considere, agora uma transformação de coordenadas afim,

$$x = r_1 u + r_2 v + r_3, \tag{B.2}$$

e,

$$y = s_1 u + s_2 v + s_3, \tag{B.3}$$

onde, para $i = 1, 2, 3$, r_i e s_i representam números complexos.

Substituindo as equações B.2 e B.3 na equação B.1 obtém-se,

$$\begin{aligned} P(u,v) = {} & u^2(ar_1^2 + br_1s_1 + cs_1^2) + uv(2ar_1r_2 + br_1s_2 + br_2s_1 + 2cs_1s_2) \\ & + v^2(ar_2^2 + br_2s_2 + cs_2^2) + u(2ar_1r_3 + br_1s_3 + br_3s_1 + 2cs_1s_3 + dr_1 + es_1) \\ & + v(2ar_2r_3 + br_2s_3 + br_3s_2 + 2cs_2s_3 + dr_2 + es_2) \\ & + ar_3^2 + br_3s_3 + cs_3^2 + dr_3 + es_3 + f. \end{aligned}$$

Desta forma, para que $P(u,v)$ adquira a forma desejada, é suficiente que,

$$lar_1^2 + br_1s_1 + cs_1^2 = 0 \tag{B.4}$$

$$2ar_1r_3 + br_1s_3 + br_3s_1 + 2cs_1s_3 + dr_1 + es_1 = 0 \tag{B.5}$$

$$2ar_1r_2 + br_1s_2 + br_2s_1 + 2cs_1s_2 = 1. \tag{B.6}$$

Para resolver o sistema acima pode-se proceder da seguinte forma,

1. Primeiro fixa-se um deles com sendo diferente de zero e encontra-se um valor para o outro que satisfaça B.4.

2. Depois, com s_3 fixo e com s_1 e r_1 determinados, resolve-se a equação B.5 para r_3. Observe que isso é sempre possível pois o coeficiente de r_3, $2ar_1 + bs_1$ é sempre não nulo uma vez que sua nulidade implicaria em $s_1 = r_1 = 0$ na equação B.4

3. Finalmente, fixando s_2 ou r_2, pode-se resolver a equação B.6 para o outro. Isso é sempre possível pela mesma observação do ítem anterior.

Isso completa a prova da proposição. □

Observação B.0.2. Durante a demonstração do Teorema 3.2.7, faz-se referência a este resultado, porém aplicado para aplicações $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $\det(HP) < 0$. Neste caso o resultado continua válido, pois, se s_1 for o valor fixado para a equação B.4, então o discriminate dela se torna, $-s_1^2 \det(HP) > 0$, indicando que as raízes são reais e permitindo a resolução dela para r_1.

Referências Bibliográficas

[1] A. Fernandes, C. Gutierrez, R. Rabanal – *Global asymptotic stability for differentiable vector fields of* $\mathbb{R}^2$, J. Differential Equations 206 (2004) 470-482.

[2] A. Cima, A. Gasull, F. Mañosas – *The discrete Markus-Yamabe problem*, NonLinear Anal. 35 (1999) 343-354.

[3] B. Smyth, F. Xavier – *Injectivity of local diffeomorphisms from nearly spectral conditions*, J. Differential Equations 130 (1996) 406-414.

[4] F. Xavier, S. Nollet – *Global inversion via Palais-Smale condition*, Discrete and Continuous Dynamical Systems 8 (2002) 17-28.

[5] P. Fernandes – *Medida e integração*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA (2002) 2ª Edição.

[6] C. Camacho, A. L. Neto – *Teoria Geométrica das Folheações*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA (1979).

[7] M. P. do Carmo – *Geometria Riemanniana*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA (2005) 3ª Edição.

[8] A. van den Essen – *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics 190, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin (2000).

[9] G. Meisters – *A biography of the Markus-Yamabe Conjecture*, Notas de palestra realizada na conferência "Aspects of Mathematics - Algebra, Geometry and several Complex Variables",www.math.unl.edu/ gmeisters1/papers/HK1996.pdf, Junho (1996).

[10] J. Sotomayor – *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, Rio de Janeiro (1979).

[11] L. A. Campbell – *Unipotent Jacobian matrices and univalent maps*, Contemp. Math. 264 (2000) 157-177.

[12] A. V. Černavskii – *Finite-to-one open mappings of manifolds*, Mat. Sbornik 65 (1964) 357-369.

[13] A. V. Černavskii – *Addendum to the paper Finite-to-one open mappings of manifolds*, Mat. Sbornik 66 (1965) 471-472.

[14] M. Chamberland, G. Meisters – *A mountain pass to the Jacobian Conjecture*, Canad. Math. Bull. 41 (1998) 442-451.

[15] A. Cima, A. van den Essen, A. Gassul, E. Hubbers, F. Mañosas – *A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe conjecture*, Adv. Math. 131 (1997) 453-457.

[16] R. Fessler – *A proof of the two dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and generalization*, Ann. Polon. Math. LXII (1995) 45-74.

[17] C. Gutierrez – *A solution to the bidimensionl global asymptotic stability conjecture*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire 12 (1995) 627-671

[18] L. Markus, H. Yamabe – *Global stability criteria for differential systems*, Osaka Math. J. 12 (1960) 305-317.

[19] C. Olech – *On the global stability of autonomous system on plane*, Cont. Differential Equations 1 (1963) 389-400.

[20] C. Pugh – *Funnel Sections*, J. Differential Equations 19, 2, (1975) 270-295.

[21] S. Saks – *Sur les nombres dérivés des fonctions*, Fundamenta Math. 5 (1924) 98-104.

[22] H. Bass, E. H. Connell, D. Wright – *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. Math. Soc. 7 (1982) 287-330.

[23] F. Dillen – *Polynomials with constant hessian determinant*, J. Pure Appl. Algebra 71 (1991) 13-18.

[24] A. van den Essen – *conjectures and problems surrounding the Jacobian conjecture, in: M. sabatini (Ed.), Recent Results on the Global Asymptotic Stability Jacobian Conjecture*, Matemática 429, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento.

[25] A. van den Essen, E. Hubbers – *Chaotic polinomial automorphisms; Conterexamples to several conjectures*, Adv. in Appl. Math.18 (1997) 382-388

[26] A. van den Essen, E. Hubbers – *A new clas of invertible polynomial maps*, J. Algebra 187 (1997) 214-226.

[27] A. A. Glutsuk – *The complete solution of the jacobian problem for vector fields on the plane*, Comm. Moscow Math. Soc., Russian Math Surveys 49 (1994) 185-186.

[28] J. Hadamard – *Sur les transformations punctuelles*, Bull. Soc. Math. France 34 (1906) 349-363.

[29] P. Hartmann – *Ordinary Diferential Equations*, Wiley, New York, 1964.

[30] K. Jörgens – *Über die lösungen der Differentialgleichung* $rt - s^2 = 1$, Math. Ann. 127 (1954) 130-134.

[31] G. Meisters, C. Olech – *Solution of the global asymptotic stability jacobian conjecture for the polynomial case*, Anal. Math. Appl. 373-381, gauthier-Villars, Paris, 1988.

[32] L. Drużkowski – *An effective approach to Keller's Jacobian conjecture*, Math. Ann. 264 (1983) 303-313.

[33] F. Xavier – *Invertibility of Bass-Connell-Wright polynomial maps*, Math. Ann. 295 (1993) 163-166.

[34] S. A. Broughton – *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces*, Invent. Math. 92 (1988) 217-241.

[35] M. Chamberland, G. Meisters – *A mountain pass to the Jacobian Conjecture*, Canad. Math. Bull. 41 (1998) 442-451.

[36] C. Cicone, J. Sotomayor – *On a class of complete polynomial vector fields in the plane*, J. Differencial Equations 61 (1986) 398-418.

[37] E. Cygar, T. Krasinski, P. Tworzewski – *Separation of algebraic sets and Lojasiewicz expoent of polynomial mappings*, Invent. Math. 136 (1999) 75-87.

[38] S. Ji, J. Kóllar, B. Shiffman – *A global Lojasiewicz inequality for algebraic varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992) 813-818.

[39] J. Kóllar – *An effective Lojasiewicz inequality for real polynomials*, preprint.

[40] N. G. Lloyd – *Degree Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics 73, Cambridge University Press, London (1978).

[41] G. Meisters – *Inverting polynomial maps of n-space by solving differential equations*, Delay and Differential Equations, Proceedings in honor of George Seifert, Ames, Iowa, Oct. 18-19 1991, (A. Fink, R. Miller, W. Kliemann, Eds.), World Scientific, Singapore (1992).

[42] G. Meisters, Cz. Olech – *A polyflow formulation of the Jacobian Conjecture*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 35 (1987) 725-731.

[43] T. Parthasarathy – *On global univalence theorems*, Lecture Notes in Mathematics 977, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1983).

[44] R. Plastock – *Homeomorphisms between Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 200 (1974) 169-183.

[45] P. J. Rabier – *On global diffeomorphisms of Euclidean space*, Nonlinear Anal. 21 (1993) 925-947.

[46] P. J. Rabier – *Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphims of Finsler manifolds*, Ann. Math. (2) 146 (1997) 647-691.

[47] S. S.-S. Wang – *A Jacobian criterion for separability*, J. Algebra 69 (1980) 453-494.

[48] A. van den Essen – *Automorphisms of affine spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London (1995).

[49] D. Wright – *The Jacobian Conjecture: Linear triangulization for cubics in dimension three*, Linear and Multilinear Algebra 34 (1993) 85-97.

[50] F. Xavier – *Injectivity as a transversality phenomenon in geometries of negative curvature*, Illinois J. Math. (2) 43 (1999) 256-263.

[51] E. Zeidler – *Nonlinear Functional Analysis and its Applications III - Variational Methods and Optimization*, Springer-Verlag, New York, (1984).

[52] A. Bialynicki-Birula, M. Rosenlicht – *Injective morphisms of real algebraic varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962) 200-203.

[53] A. V. Yagzhev – *Keller's Problem*, Siberian Math. J. 21 (1981) 747-754.

[54] S. Pinchuk – *Counterexample to the Strong Real Jacobian Conjecture*, Math. Z. 217 (1994) 1-4.

[55] O.-H. Keller – *Ganze cremona transformationen*, Monatsh. Math. 47 (1939) 299-306.

[56] J. Bernat, J. Llibre – *Counterexample to Kalman and Markus-Yamabe Conjecures in dimension 4*, Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems 1 (1996).

[57] N. Barabanov – *On a problem of Kalman*, siberian Math. J. 29 (1988) 333-341.

[58] P. Hartmann – *On stability in the large for systems of ordinary differential equations*, Canadian Journal of Mathematics 13 (1961) 480-492.

[59] J. LaSalle – *The stability of dynamical systems*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 25 (1976).

Índice Remissivo

Órbita, 27

Aplicação
- Cúbica Homogênea, 119
- de Classe $\mathcal{C}^r$, 20, 21
- de Drużkowski, 115, 119
- de Keller, 118
- Diferenciável, 19, 33
- Homogênea Cúbica, 114
- Injetiva, 33
- Linear, 34
- Triangular, 60, 126

Atlas, 21
- Máximo, 21

Atrator, 57
- Global, 58, 59, 122
- Global para Sist. Din. Discretos, 126
- Local, 122

Caminho de Placas, 26

Campo
- de Vetores, 24
- Gradiente, 31

Carta Local, 21

Carta Trivializadora, 26

Condição de Palais-Smale, 100

Conjectura
- de Alexandrov, 34, 35
- de Chamberland, 34, 35
- de Estabilidade Assintótica Global, 83
- de Markus-Yamabe, 33, 58, 123
- de Ponto Fixo, 73, 129
- Fraca de Markus-Yamabe, 34, 35, 123
- Jacobiana, 34, 35, 73, 97, 111, 118, 119
- Jacobiana Real, 121
- Jacobiana Real Forte, 120
- Nilpotente, 74

Curvas
- Tangentes, 39
- Transversais, 39

Derivada
- de uma Aplicação, 20, 24
- Parcial, 20

Desigualdade de Cauchy-Schwarz, 85

Difeomorfismo
- de Classe $\mathcal{C}^r$, 20
- Local, 20

Espaço Tangente, 23

Estrutura
- Diferenciável, 21
- Folheada, 25
- Intrínseca, 27

Exemplo
- de Pinchuk, 35, 121
- de Szlenk, 79

Expoente de Lojasiewics no Infinito, 112

Folha, 27
Folheação de Classe $\mathcal{C}^r$, 25
Fronteira
    Compacta, 39
    Não Compacta, 40

Imersão, 26

Métrica Riemanniana, 30
Matriz Estável, 122
Meia Componente de Reeb, 39
Mergulho, 26

Perturbação da Identidade por Aplicação
        Homogênea, 95
Placa, 26
Problema
    de LaSalle, 59, 126
    Discreto de Markus-Yamabe, 59, 126

Sistema de Coordenadas, 21

Teorema
    de Černavskii, 37
    de Dillen, 65
    de Hadamard-Plastock, 103
    de Injetividade, 84
    de Jögens, 65
    de Redução, 97, 118

Variedade
    Diferenciável, 21
    Riemanniana, 30
Vetor Gradiente, 31