SOBRE APLICAÇÕES GENÉRICAS ENTRE SUPERFÍCIES

Antonio Cesar da Costa Barros

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Área: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Ferreira da Silva Porto Jr.

São Carlos

1993

A meus pais, Túlio e Raquel

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Paulo Ferreira da Silva Porto Jr., pela paciência, compreensão e incentivo constantes.

Aos colegas do Departamento de Matemática da UNESP, Campus de Bauru, pelo apoio e torcida.

À CAPES, pelo apoio financeiro parcial.

ÍNDICE

Capítulo 0	Notações e Fatos Básicos	1
Capítulo 1	Aplicações Genéricas no Plano	5
Capítulo 2	Aplicações Genéricas entre Superfícies	14
Capítulo 3	Resultados Relacionados	32

RESUMO

Neste trabalho apresentamos resultados que relacionam o número de cúspides de uma aplicação genérica $f : M \rightarrow N$, onde M e N são superfícies (M compacta), à possibilidade de f se fatorar por uma imersão $g : M \rightarrow N \times R$ e à característica de Euler-Poincaré de determinadas sub-variedades de M .

Em seguida, nos ocupamos com um resultado sobre eliminação de cúspides, cuja demonstração nos leva a entender o fato geométrico que impede que determinadas aplicações se factorem por uma imersão.

Finalmente, apresentamos resultados que estendem os anteriores a situações mais gerais.

ABSTRACT

In this work we present results that relate the number of cusps of a generic map $f : M \rightarrow N$, where M and N are surfaces (M compact), to the possibility of the factorization of f through an immersion $g : M \rightarrow N \times R$ and to the Euler-Poincaré characteristic of certain submanifolds of M .

Further, we are concerned with a result about elimination of cusps, whose proof leads us to understand the geometric obstruction that does not allow the factorization of some maps through an immersion.

Finally, we present results that extend the ones mentioned to more general ones.

INTRODUÇÃO

O tema central deste trabalho versa sobre o conjunto dos pontos de cúspide de uma aplicação genérica $f : M \rightarrow N$, onde M e N são superfícies, com M compacta.

No Capítulo 1 apresentamos um teorema devido a Haefliger [2] que estabelece uma condição necessária e suficiente para que uma aplicação genérica $f : M \rightarrow R^2$ possa se fatorar por uma imersão no R^3 . Outro teorema de Haefliger fornece um limitante inferior para o número de cúspides de uma tal aplicação em termos da característica de Euler-Poincaré de determinadas sub-variedades de M . Em particular, com uma demonstração análoga à anterior, mostramos que o grau normal de uma superfície compacta com bordo imersa no plano é igual à sua característica de Euler-Poincaré.

No Capítulo 2 mostramos um teorema de Millett [4] sobre eliminação de cúspides, que aperfeiçoa um resultado de H. Levine. O método utilizado para a demonstração deste teorema nos permite "ver" geometricamente porque determinadas aplicações não podem se fatorar por uma imersão. Além disso, estendemos o teorema de fatoração de Haefliger para aplicações genéricas $f : M \rightarrow N$, onde M e N são superfícies compactas.

Finalizando, no Capítulo 3 enunciamos teoremas de Quine [5] e Eliasberg [6] que fornecem relações análogas em situações mais gerais e ilustramos com alguns exemplos.

CAPÍTULO 0

NOTAÇÕES E FATOS BÁSICOS

Neste capítulo vamos fixar notações, introduzir uma nomenclatura e enunciar resultados que serão usados no decorrer deste trabalho.

Sejam M e N duas superfícies e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^2 pelo menos. Dado $p \in M$, podemos colocar coordenadas (x,y) numa vizinhança U de p e coordenadas (u,v) numa vizinhança V de $f(p)$. Expressa nessas coordenadas f pode ser escrita por:

$$\begin{aligned} f &: \phi(U) \rightarrow \psi(V) \\ (x,y) &\mapsto (u(x,y), v(x,y)) \end{aligned}$$

onde ϕ e ψ são cartas em torno de p e $f(p)$, respectivamente.

Denotando por $J_f(p)$, ou simplesmente $J(p)$, o determinante jacobiano de f no ponto p , temos:

$$\begin{aligned} J &: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R} \\ (*) \quad (x,y) &\mapsto u_x(x,y) v_y(x,y) - u_y(x,y) v_x(x,y) \end{aligned}$$

Definição 0.1: Seja $f : M \rightarrow N$ de classe C^2 . Dado $p \in M$, se $J(p) \neq 0$, p é chamado de ponto regular de f ; se $J(p) = 0$, p é chamado de ponto singular de f . Um ponto p de M é dito bom se $J(p) \neq 0$ ou $\nabla J(p) \neq (0,0)$, onde $\nabla J(p)$ é o gradiente de J no ponto p . Dizemos que f é boa se todo ponto de M é bom.

Propriedade 0.1: Observe de (*) que se $u_x(p) = u_y(p) = v_x(p) = v_y(p) = 0$, então $\nabla J(p) = (0,0)$, e portanto p não pode ser bom. Consequentemente, se f é boa, a diferencial de f em p , $Df(p)$, é uma aplicação linear de $T_p(M)$ em $T_{f(p)}(N)$, cuja imagem tem dimensão dois se p é regular e um se p é singular.

Definição 0.2: O conjunto dos pontos singulares de uma aplicação boa f é chamado de dobra geral de f e o representaremos por C_f , ou simplesmente C .

Propriedade 0.2: Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação boa. Dado $p \in C$, numa vizinhança de p , C é uma curva suave em M .

Definição 0.3: Dado $p \in C$, seja ϕ uma C^2 -parametrização da dobra geral de f tal que $\phi(0) = p$.

p é chamado um ponto de dobra de f se $\frac{d}{dt}(f \circ \phi)(0) \neq 0$.

p é chamado um ponto de cúspide de f se $\frac{d}{dt}(f \circ \phi)(0) = 0$, mas $\frac{d^2}{dt^2}(f \circ \phi)(0) \neq 0$.

Observação: Decorre da definição de ponto de cúspide que tais pontos são isolados. Denotaremos o conjunto destes pontos por D_f .

Teorema 0.1: Seja p um ponto de dobra de $f \in C^\infty(M, N)$. Então podem ser introduzidos sistemas de coordenadas suaves (x, y) e (u, v) em torno de p e $f(p)$, respectivamente, em termos dos quais f toma a forma:

$$f(x, y) = (x^2, y) .$$

Teorema 0.2: Seja p um ponto de cúspide de $f \in C^\infty(M, N)$. Então podem ser introduzidos sistemas de coordenadas suaves (x, y) e (u, v) em torno de p e $f(p)$, respectivamente, em termos dos quais f toma a forma:

$$f(x, y) = (xy - x^3, y) .$$

Definição 0.4: Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação boa. Um ponto p de M é dito excelente se ele é regular, ou um ponto de dobra, ou um ponto de cúspide. Dizemos que f é excelente se todo ponto de M é excelente. Pode-se mostrar que o conjunto das aplicações excelentes de M em N é aberto e denso em $C^\infty(M, N)$. Por essa razão elas também são chamadas de genéricas. Ao longo deste trabalho usaremos esta última denominação.

Teorema 0.3: (Berger ; Gostiaux [1], p. 140) Sejam S uma variedade compacta de dimensão d e $h : S \rightarrow R$ de classe C^1 tendo somente pontos críticos não-degenerados. Denotando por $\chi(S)$ a característica de Euler-Poincaré de S e $c_k(h)$ o número de pontos críticos de h de índice k , então vale:

$$\chi(S) = \sum_{k=0}^d (-1)^k c_k(h) .$$

Teorema 0.3': (Berger ; Gostiaux [1], p 272) Sejam S uma variedade compacta e V um campo de vetores em S tendo somente singularidades isoladas $v_1, v_2, \dots, v_n$. Então vale:

$$\chi(S) = \sum_{i=1}^n \text{ind}_{v_i} V$$

onde $\text{ind}_{v_i} V$ é o índice de V em v_i .

Observações:

1) Se tivermos uma tal função h , podemos definir V por:
 $V(p) = \nabla h(p)$.

2) O Teorema 0.3' continua válido para variedades com bordo, desde que o campo de vetores aponte para fora da variedade ao longo do bordo.

Definição 0.5: (Berger ; Gostiaux [1], p. 253) Sejam M e N variedades orientadas, compactas e conexas de mesma dimensão d e $f \in C^\infty(M, N)$. Dado y valor regular de f , definimos o grau de f por:

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn}(J_x(f))$$

onde $\text{sgn}(J_x(f))$ é o sinal do determinante jacobiano de f em x . Em particular, se $f^{-1}(y) = \emptyset$, o grau é 0.

CAPITULO 1

APLICAÇÕES GENÉRICAS NO PLANO

Neste capítulo apresentamos resultados que relacionam o número de cúspides de uma dada aplicação a fatos geométricos.

Em todos os exemplos deste capítulo, vamos representar a imagem da dobra geral de uma aplicação genérica no plano por um traço grosso contínuo.

Definição 1.1: Seja $f : M \rightarrow R^2$ aplicação genérica. De acordo com a Propriedade 0.1, dado $p \in C$, o núcleo $N(p)$ de $Df(p)$ é um sub-espço vetorial de $T_p(M)$ de dimensão um. Portanto, está definido ao longo de C um campo de direções (não orientadas): o campo dos núcleos de Df . Vamos denotá-lo por N .

Lema 1.1: Considere M superfície compacta e $f : M \rightarrow R^2$ genérica. O número de cúspides numa componente C_0 da dobra de f é par se uma vizinhança suficientemente pequena de C_0 e o campo de núcleos N_0 de Df ao longo de C_0 são ambos orientáveis ou não-orientáveis, ímpar se um é orientável e o outro não.

Demonstração: Podemos escolher uma vizinhança U de C_0 difeomorfa ao quociente do plano R^2 (com coordenadas x e y) pela relação de equivalência associada à ação do grupo G determinado pela transformação $x' = x+1$, $y' = y$ ou $y' = -y$, conforme U é orientável ou não; o quociente de reta $d: y = 0$ sendo difeomorfo à C_0 . O campo N_0 ao longo de C_0

transporta-se a um campo D de direções em R^2 ao longo de d invariante por G .

Escolhemos uma orientação para a direção do campo D na origem e a prolongamos por continuidade a D . Obtemos assim um campo D' de direções orientadas ao longo de d . Seja $n_2(x)$ a projeção no eixo y do vetor unitário que define a orientação do campo D' no ponto $(x,0)$. Os pontos $(x,0)$ de d onde D é tangente a d , isto é, onde $n_2(x) = 0$, correspondem às cúspides em C_0 . Pode-se verificar que nestes pontos, de acordo com as equações locais de uma cúspide, $dn_2(0)/dx \neq 0$. Se U e N_0 são ambos orientáveis ou não, então $n_2(1) = n_2(0)$. Se U é orientável e N_0 não ou inversamente, então $n_2(1) = -n_2(0)$. Assim, o número de cúspides em C_0 , isto é, o número de zeros de $n_2(x)$ no intervalo $[0,1]$, é par no primeiro caso e ímpar no segundo. ■

Definição 1.2: Seja $f : M \rightarrow R^2$. Dizemos que a aplicação f pode se fatorar por uma imersão no R^3 se existe imersão $g : M \rightarrow R^3$ tal que $f = \pi \circ g$, onde π é dada por:

$$\begin{aligned} \pi : R^3 &\rightarrow R^2 \\ (u,v,w) &\mapsto (u,v) \end{aligned}$$

Lema 1.2: Seja M superfície compacta. Uma aplicação genérica $f : M \rightarrow R^2$ pode se fatorar por uma imersão $g : M \rightarrow R^3$ se, e somente se, o campo N dos núcleos de Df ao longo de C é orientável.

Demonstração: Se a imersão g existe, então a função coordenada w em M (isto é, a função $w \circ g$) é tal que, em todo ponto p de M , a intersecção dos núcleos de Df e Dw é o vetor nulo e reciprocamente. Isto é equivalente a dizer que a função w é regular em todo ponto p de C e que a tangente à curva de nível de w é transversal ao núcleo $N(p)$ de f .

Consideremos uma métrica riemanniana sobre M . Se uma tal função w existe sobre M , então o gradiente de w em todo ponto p de C nunca é ortogonal ao núcleo $N(p)$ de f . Então a projeção ortogonal de $\nabla w(p)$ sobre $N(p)$ nunca é nula e, portanto, define uma orientação em N .

Reciprocamente, suponhamos o campo N orientável. Utilizando as representações e notações da demonstração do Lema 1.1, seja $n_1(x)$ a projeção no eixo x do vetor unitário que define a orientação do campo D' no ponto $(x,0)$. Como N é orientável, n_1 é uma função de período $\underline{um}$. Pode-se aproximá-la por uma função diferenciável n' de período $\underline{um}$ com um número finito de zeros no intervalo $[0,1)$ e uma derivada não nula nestes pontos. Resulta que n' anula-se um número par de vezes neste intervalo. Na construção de n' toma-se o cuidado de que ela seja suficientemente próxima a n_1 de modo que os vetores $(n_1(x), n_2(x))$ e $(n'(x), n_2(x))$ nunca sejam ortogonais. Pode-se construir uma função diferenciável r de período $\underline{um}$ tal que:

$$dr(x)/dx = s(x) n'(x)$$

onde s é uma função diferenciável não nula. Então o gradiente da função $h(x,y) = s(x) n_2(x) y + r(x)$ nunca é ortogonal ao campo D . Como esta função é invariante pelo grupo G , ela define, por passagem ao quociente, uma função diferenciável w_0 na vizinhança U de C_0 , cujas curvas de nível são transversais ao campo N_0 em todo ponto de C_0 . Repetindo esta construção em cada componente conexa C_i de C e emendando diferenciavelmente estas funções, construímos uma função diferenciável w em M que coincide com as funções w_i numa vizinhança de C_i . ■

Teorema 1.1 (Haefliger [2]): Seja M uma superfície compacta. Uma aplicação genérica $f : M \rightarrow R^2$ pode se fatorar por uma imersão $g : M \rightarrow R^3$ se, e somente se, em cada componente conexa C_i da dobra C de f , o número de cúspides é par ou ímpar, conforme C_i admita uma vizinhança orientável ou não, respectivamente.

Demonstração: Suponhamos que f possa se fatorar por uma imersão g . Pelo Lema 1.2, N é orientável. Seja C_1 uma componente conexa de C . Pelo Lema 1.1, se C_1 admite vizinhança orientável, o número de cúspides nesta componente é par; caso contrário, este número é ímpar.

Reciprocamente, admitimos que cada componente conexa C_1 de C satisfaz à seguinte propriedade:

Se C_1 admite vizinhança orientável, o número de cúspides nesta componente é par; caso contrário, este número é ímpar.

Suponhamos, por absurdo, que f não pode se fatorar por uma imersão. Então, pelo Lema 1.2, existe componente conexa C_0 de C , tal que N_0 é não-orientável. Se C_0 admite vizinhança orientável, pelo Lema 1.1, o número de cúspides de C_0 é ímpar (contra a hipótese). Se C_0 não admite vizinhança orientável, novamente pelo Lema 1.1, o número de cúspides de C_0 é par (contra a hipótese). ■

Exemplo 1.1: A Figura 1.1 mostra um exemplo de uma aplicação da esfera no plano que não pode se fatorar por uma imersão. A dobra é formada por dois paralelos C' e C'' contendo uma cúspide cada um. A imagem de uma faixa limitada por dois paralelos entre C' e C'' é uma fita em forma de 8, limitada pelas duas curvas pontilhadas. As curvas representadas por um traço fino contínuo são as imagens de paralelos bordando as calotas polares.

Figura 1.1

Corolário 1.1: Seja $f : M \rightarrow R^2$ genérica tal que a dobra C de f seja conexa. Então f sempre pode se fatorar por uma imersão no R^3 .

Demonstração: Considere uma vizinhança tubular U de C . Conforme U é orientável ou não, U é uma faixa simples ou uma faixa de Möbius e a fronteira de U se compõe de dois círculos no primeiro caso e de um só no segundo. A característica de Euler-Poincaré $\chi(U)$ de U é sempre zero. O complementar S de U está imerso no plano, o qual é uma superfície orientada, cuja característica $\chi(S)$ será par ou ímpar, conforme seu bordo se compõe de dois círculos ou de um. Portanto $\chi(M) = \chi(U) + \chi(S)$ será par ou ímpar, conforme U é orientável ou não. Mas, segundo Thom [3], o número de cúspides é da mesma paridade que $\chi(M)$ e o Teorema 1.1 implica o corolário. ■

Teorema 1.2 (Haefliger [2]): Sejam M uma superfície compacta orientável e $f : M \rightarrow R^2$ genérica. Suponha que a dobra C de f divida M em duas partes M_1 e M_2 , tal que C é a fronteira comum. Então o número de cúspides de f é maior ou igual ao módulo da diferença entre as características de Euler-Poincaré de M_1 e M_2 .

Demonstração: De acordo com o Teorema 0.3, podemos calcular a característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$ de uma superfície S de bordo B contando convenientemente os pontos singulares de uma função diferenciável h definida em S . Sejam (x, y) as coordenadas locais numa vizinhança de um ponto p de B , tais que S seja definida por $y \geq 0$ e B por $y = 0$. Expressa nessas coordenadas, h é a restrição ao semi-plano $y \geq 0$ de uma função diferenciável h' . Se uma curva de nível de h' é tangente a B em p com contato de primeira ordem, a contribuição de p para o cálculo de $\chi(S)$ será não nula somente se o gradiente de h' em p está dirigido ao interior de S e será $+1$ ou -1 , conforme a restrição de h' a B tenha um mínimo ou um máximo em p , respectivamente.

Seja h uma função linear definida no plano, tal que as curvas de nível de h não sejam tangentes a $f(C)$ nas imagens dos pontos de cúspide. Seja h_i ($i = 1, 2$) a restrição de $h \circ f$ a M_i . Um ponto p de M_1 será um ponto singular de h_i somente se $p \in C$ e se a) $f(C)$ é tangente em $f(p)$ a uma curva de nível de h , ou b) p é uma cúspide, pois em tal ponto o posto da restrição de f a C (e conseqüentemente de $h \circ f$) é zero.

No caso a), a contribuição de p será a mesma por simetria para o cálculo de $\chi(M_1)$ e $\chi(M_2)$. No caso b), o gradiente de $h \circ f$ em p está dirigido ao interior de uma das superfícies M_1 e M_2 e ao exterior da outra. A contribuição de p será, então, ± 1 para uma das superfícies e zero para a outra, donde a desigualdade. ■

Exemplo 1.2: Se a superfície M é um toro e a dobra C de f é conexa, então C borda um disco M_1 em M . Segue que $\chi(M_1) = 1$ e $\chi(M_2) = -1$. Então $|\chi(M_1) - \chi(M_2)| = 2$ e portanto f apresenta pelo menos duas cúspides. As Figuras 1.2 e 1.3 mostram uma tal situação com o mínimo de cúspides. O traço fino contínuo borda um disco e o traço pontilhado borda o complementar de um disco no toro.

Figura 1.2

Figura 1.3

Exemplo 1.3: Se M é uma esfera com duas asas e C borda um disco M_1 em M , temos que $\chi(M_1) = 1$ e $\chi(M_2) = -3$. Então $|\chi(M_1) - \chi(M_2)| = 4$ e portanto C tem pelo menos quatro cúspides.

Exemplo 1.4: Na Figura 1.4 ilustramos um exemplo onde M é uma esfera com duas asas e a dobra C é formada por duas curvas que bordam, por um lado, um pedaço de asa (M_1) e por outro, um toro com dois furos (M_2). Temos que $\chi(M_1) = 0$ e $\chi(M_2) = -2$ e portanto $|\chi(M_1) - \chi(M_2)| = 2$.

Figura 1.4

Definição 1.3: Seja M uma superfície compacta de bordo C imersa por uma aplicação diferenciável f no plano. A orientação natural do plano induz uma orientação em M . Orientemos, então, C como o bordo de M . C é uma união de círculos orientados $C_1, \dots, C_k$. Seja n_i o número de voltas que a tangente a C_i faz, quando a percorremos uma vez no sentido da orientação. A soma dos n_i ($i = 1, 2, \dots, k$) é chamada de grau normal de C imersa por f .

Teorema 1.3 (Haefliger [2]): O grau normal do bordo de uma superfície compacta M imersa no plano é igual a característica de Euler-Poincaré de M .

Demonstração: Considere uma função linear h definida no plano, tal que $f(C)$ seja tangente às curvas de nível de h num número finito de pontos e com contato de ordem 1. Em todo ponto p de C , seja $v(p)$ a normal unitária a $f(C)$ em $f(p)$ orientada de maneira que a tangente orientada a $f(C)$ em p e $v(p)$ definam uma orientação positiva do plano. A aplicação v de C no círculo unitário S^1 é diferenciável e o ponto η correspondente a direção do gradiente de h é um valor regular de v (isto é, o posto de v em todo ponto p onde $v(p) = \eta$ é um). Então o grau normal de C , que não é outro senão o grau de v , é igual à soma algébrica dos pontos p de C tais que $v(p) = \eta$, o ponto p sendo computado positivamente ou negativamente conforme v em p aplica a orientação de C sobre a orientação de S^1 ou sobre sua oposta. Isto é equivalente a dizer que a restrição de $h \circ f$ a C tem um mínimo ou um máximo em p . Esta soma é, então, igual à característica de Euler-Poincaré de M (conforme demonstração do Teorema 1.2). ■

CAPÍTULO 2

APLICAÇÕES GENÉRICAS ENTRE SUPERFÍCIES

Neste capítulo apresentamos um resultado sobre eliminação de cúspides e outro que estende o Teorema 1.1 para aplicações entre duas superfícies compactas.

Primeiramente precisamos introduzir alguns conceitos, vocabulário e notações para podermos descrever as relações e os métodos geométricos de modificar uma aplicação genérica. Seja f uma aplicação genérica de uma superfície compacta e conexa M numa superfície compacta, conexa e orientada N . Se M está orientada, C_f separa M em duas regiões com C_f como fronteira comum determinadas por f preservar ou inverter a orientação de N . Chamaremos estas regiões de positiva e negativa, respectivamente.

Quando M está orientada, iremos distinguir entre dois tipos de cúspides, a saber, se a cúspide "aponta" da região positiva ou da região negativa. Vamos chamá-las de positiva e negativa, respectivamente. Na Figura 2.1 ilustramos um exemplo de uma cúspide negativa.

Figura 2.1 Uma cúspide negativa

$$\begin{aligned}\bar{f}(x, y) &= (x, y, xy + x^3); \quad p(x, y, z) = (y, z); \\ f(x, y) &= (y, xy + x^3).\end{aligned}$$

Passaremos agora a apresentar três procedimentos que descrevem homotopias entre aplicações que mudam a estrutura de pontos de dobra e de cúspide. Primeiramente, se temos duas cúspides apontando para a mesma componente do complementar de C_f , podemos deslocá-las ao longo de um caminho que as ligue e então cancelá-las. Este processo está ilustrado na Figura 2.2 .

Figura 2.2 Cancelando cúspides de mesmo sinal

A segunda modificação é a introdução de duas cúspides por meio de um "twist". Este processo introduz um par de cúspides, uma positiva e outra negativa. Veja a Figura 2.3 .

Figura 2.3 "Twist"

A terceira modificação é uma troca de cúspides. Isto pode ocorrer quando tem-se uma cúspide positiva e outra negativa que aparecem na fronteira de uma região conexa. Veja a Figura 2.4 .

Figura 2.4 Troca de cúspides

Teorema 2.1 (Millett [4]): Sejam M superfície compacta conexa, N superfície orientada conexa e $f : M \rightarrow N$ genérica. Se M é orientável, f é homotópica a uma aplicação genérica $g : M \rightarrow N$ sem cúspides. Se M é não-orientável, f é homotópica a uma aplicação genérica $g : M \rightarrow N$ tendo no máximo uma cúspide ou nenhuma, dependendo se o genus de M é ímpar ou par, respectivamente.

Demonstração: Primeiramente vamos considerar o caso em que M é orientável e está orientada. Neste caso, as curvas de dobra C_f , determinam uma classe de homologia $[C_f] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, a qual é trivial, pois ela é a fronteira da região onde f preserva a orientação. Introduzindo cúspides via a modificação "twist" e cancelando duas a duas através do primeiro procedimento, definimos uma homotopia a uma aplicação genérica f_1 tal que C_{f_1} é uma curva fechada simples em M . Como C_{f_1} é o bordo da região positiva, existe um cobordismo entre C_{f_1} e o bordo de um disco, o qual está no interior da região positiva. Este cobordismo tem uma estrutura de asa, a qual nos permite definir uma homotopia a uma aplicação genérica f_2 , tal que C_{f_2} é o bordo da região positiva que é, agora, um disco. Isto é conseguido usando "twists" para introduzir cúspides, que podem ser canceladas seguindo a prescrição fornecida pelas curvas de nível do cobordismo e as um-asas, conforme elas forem sendo adicionadas. Em outras palavras, a região positiva associada a f_2 pode ser cortada num disco, via cortes ao longo de uma coleção finita de arcos disjuntos. Cúspides podem ser introduzidas nos finais dos arcos e então canceladas ao longo dos arcos. Isto está ilustrado na Figura 2.5.

Figura 2.5 Adicionando uma asa e cancelando cúspides

A aplicação genérica resultante, f_2 , pode ter uma estrutura muito complicada, pois criamos um grande número de cúspides. Entretanto, podemos escolher um pequeno disco D na componente positiva do complementar de C_{f_2} , tal que $f_2|_D$ é um difeomorfismo e tal que $f_2(D) \cap f_2(C_{f_2}) = \emptyset$. Então $f_2^{-1}(f_2(D))$ é uma coleção finita de discos suaves e, se definirmos $M_2 = M \setminus (\text{interior } f_2^{-1}(f_2(D)))$ e $N_2 = N \setminus (\text{interior } f_2(D))$, $f_2|_{M_2}: M_2 \rightarrow N_2$ é uma aplicação genérica própria entre variedades com bordo. Considere a imersão "standard" de N_2 em $\mathbb{R}^2$ que preserva orientação, conforme procedimento descrito em Kauffman [7]. Denotemos por i a extensão desta imersão a uma aplicação genérica de N tendo $2g(N)$ cúspides negativas; onde $g(N)$ é o genus de N . Tal imersão está ilustrada na Figura 2.6.

Figura 2.6

Seja $\tilde{f}_2 = i \circ f_2$ e denotemos por d_+ e d_- o número de discos de $f_2^{-1}(f_2(D))$ em M^+ e M^- , as componentes positiva e negativa do complementar de C_{f_2} . Para cada um dos d_+ discos, $\tilde{f}_2$ introduz um novo círculo a C_{f_2} , $2g(N)$ cúspides negativas, e um novo disco à região negativa. Analogamente, para cada um dos d_- discos, $\tilde{f}_2$ introduz um novo círculo a C_{f_2} , $2g(N)$ cúspides positivas e um novo disco à região positiva.

Denotemos por n_+ (n_+) e n_- (n_-) o número de cúspides positivas e negativas de f_2 ($\tilde{f}_2$). Do que foi exposto acima, temos as seguintes relações:

$$n_+ = n_+ + (2g(N)) d_-$$

$$n_- = n_- + (2g(N)) d_+$$

$$\chi(\mathfrak{M}^+) = \chi(M^+) + d_- - d_+$$

$$\chi(\mathfrak{M}^-) = \chi(M^-) + d_+ - d_-$$

Aplicaremos agora a Observação 1.1 a $\tilde{f}_2 = i \circ f_2 : M \rightarrow R^2$.

Observação 2.1 (Haefliger [2]): $\chi(\mathfrak{M}^+) - \chi(\mathfrak{M}^-) = n_+ - n_-$. Então $\chi(M^+) - \chi(M^-) = n_+ - n_- - 2(g(N)-1)(d_+ - d_-)$.

Pela nossa construção, $\chi(M^+) = 1$ e $\chi(M^-) = 1 - 2g(M)$ e então $n_+ - n_- = 2g(M) + 2(g(N) - 1)(d_+ - d_-)$ que é par. Portanto, ou n_+ e n_- são ambos pares ou são ambos ímpares. No último caso, introduzimos um "twist", o qual adiciona uma cúspide positiva e uma negativa, para assegurar que ambos são pares para a aplicação genérica resultante, a qual denotaremos por $f_3 : M \rightarrow N$. Como consequência da demonstração neste ponto, temos a seguinte generalização de observação de Haefliger.

Observação 2.2: Se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação genérica de grau $d(f)$ então $n_+ - n_- = 2(\chi(M) - (g(M) - 1) + (g(N) - 1) d(f))$.

Para completar a prova para o caso onde M é orientável, primeiramente cancelamos cúspides adjacentes se ambas são positivas ou negativas. Por exemplo, uma configuração da forma da Figura 2.7 (i) pode ser substituída por uma da forma da Figura 2.7 (ii), tal que f_3 seja homotópica a uma aplicação genérica f_4 , tal que C_{f_4} é a união de curvas sem cúspides e uma curva com um número par de cúspides positivas e negativas que alternam.

Figura 2.7

Por uma sequência de pares de aplicações de trocas de cúspides e cancelando-as, encontramos uma aplicação g genérica e homotópica a f , sem cúspides como mostrado na Figura 2.8 (i), primeiramente por uma troca de cúspides, Figura 2.8 (ii), e então cancelando-as, Figura 2.8 (iii), para remover cúspides adjacentes de sinais opostos. Denotemos por g a aplicação genérica resultante. Portanto provamos o primeiro caso do Teorema 2.1.

Figura 2.8

O método da prova da segunda parte do Teorema 2.1 é bastante semelhante. Primeiramente, usaremos um resultado de Thom [5] .

Teorema 2.2 (Thom): Se f é uma aplicação genérica de uma superfície fechada M numa superfície orientada N , então as classes de cohomologia duais a C_f e D_f são a primeira e segunda classes de Stiefel-Whitney módulo 2, respectivamente.

Como, por hipótese, M é não-orientável, a primeira classe de Stiefel-Whitney é diferente de zero, tal que, seguindo uma homotopia de f a f_1 , como no caso anterior, C_{f_1} é uma curva fechada simples. M é a soma conexa de $g(M)$ planos projetivos reais e tem característica de Euler $\chi(M) = 2 - g(M)$. Além disso, a avaliação da segunda classe de Stiefel-Whitney na classe fundamental de M , o segundo número de Stiefel-Whitney, é igual à classe de Euler módulo 2. Então o número de cúspides é igual ao genus de M , $g(M)$, módulo 2.

Como no caso orientável, podemos assumir que cúspides adjacentes não estão no mesmo lado, pois poderíamos cancelá-las. Se elas forem opostas, aplicamos uma troca e cancelamos as cúspides resultantes. Então, como no caso orientável, podemos eliminar todas as cúspides se $g(M)$ é par e devemos terminar com uma cúspide se $g(M)$ é ímpar e, portanto, provamos o segundo caso do Teorema 2.1 . ■

Sejam M e N duas superfícies compactas e $p : N \times R \rightarrow N$ a projeção de $N \times R$ sobre seu primeiro fator. Análogo ao Lema 1.1 temos o:

Lema 2.1: Dada $f : M \rightarrow N$ genérica, o número de cúspides numa componente C_1 de C é par se e somente se uma vizinhança suficientemente pequena de C_1 e o fibrado $\ker Df|_{C_1}$ são ambos orientáveis ou não-orientáveis e ímpar, se um é orientável e o outro não.

Demonstração: Análoga à do Lema 1.1 . ■

Definição 2.1: Seja $f : M \rightarrow N$. Dizemos que f pode se fatorar por uma imersão em $N \times R$ se existe imersão $g : M \rightarrow N \times R$ tal que $f = p \circ g$.

Lema 2.2: Uma aplicação genérica $f : M \rightarrow N$ pode se fatorar por uma imersão em $N \times R$ se e somente se o fibrado $\ker Df|_{C_1}$ é orientável.

Demonstração: Análoga à do Lema 1.2, com a seguinte observação: Considere a imagem de uma componente C_1 de C_f . Independentemente do número de cúspides que aparecem em C_1 , sua imagem tem somente um lado, globalmente, isto é, o lado para o qual ela dobra não é alterado pelo aparecimento de uma cúspide, como ilustrado na Figura 2.9. Como consequência, a imagem de C_1 tem uma vizinhança cilíndrica que pode ser tomada como R^2 e então podemos tomar vantagem da prova do Lema 1.2 para construir uma função altura para uma imersão numa vizinhança de C_1 que projeta-se em N , coincidindo com a restrição de f nesta vizinhança. A extensão de uma vizinhança de C a M pode ser conseguida estendendo-se suavemente a função altura para toda M . A compacidade de N é necessária para que tal imersão possa ser estendida por toda $N \times R$.

Figura 2.9 Imagem de uma dobra

Teorema 2.3: (Millett [4]) Uma aplicação genérica $f : M \rightarrow N$ pode-se fatorar por uma imersão $g : M \rightarrow N \times R$ se e somente se em cada componente da dobra de f o número de cúspides é par ou ímpar, dependendo se a componente tem uma vizinhança cilíndrica ou de Möbius.

Demonstração: Este teorema segue do Lema 2.2 e da observação que $\ker Df|_{C_i}$ é orientável se, e somente se, C_i 's com vizinhanças cilíndricas tem um número par de cúspides e C_i 's com vizinhanças de Möbius tem um número ímpar de cúspides. ■

Considere uma aplicação genérica $f : M \rightarrow N$, cuja dobra tem uma componente que admite uma vizinhança orientável e que contém uma cúspide. Nestas condições não é possível fatorar tal aplicação por uma imersão, devido à necessidade de uma configuração que não é permitida numa imersão, uma singularidade do tipo "pinch". Tal fato está ilustrado na Figura 2.10.

Figura 2.10 Singularidade do tipo "pinch"

Exemplo 2.1: Vamos retomar a aplicação da esfera no plano dada no Exemplo 1.1 . Recordemos que a dobra de f é formada por dois paralelos contendo uma cúspide cada um. Se começarmos a deslocá-las ligando-as por um caminho, teremos a configuração mostrada na Figura 2.11 . Depois de cancelá-las, temos um lugar geométrico que pode ser obtido pela projeção de uma imersão, como mostra a Figura 2.12 .

Figura 2.11

Figura 2.12

Na Figura 2.12 , a linha sólida borda um disco imerso, como mostrado na Figura 2.13 , enquanto que a linha pontilhada borda outro disco imerso, não equivalente ao anterior, e está representado na Figura 2.14 . Sua união dá uma esfera imersa em R^3 , cuja dobra projeta-se naquela mostrada na Figura 2.12

Figura 2.13

Figura 2.14

A mudança entre aquela superfície imersa e a aplicação tendo curvas de dobra como mostrado na Figura 2.11 ocorre na região crítica da Figura 2.12 , e está ilustrada nas Figuras 2.15 e 2.16 . A razão fundamental de não se conseguir uma imersão é a necessidade de uma singularidade do tipo "pinch". Tais cruzamentos devem sempre ocorrer se o domínio é orientável e podem, portanto, ser removidos revertendo o processo mostrado nas Figuras 2.15 e 2.16 .

Figura 2.15 Uma imersão de S^2

Figura 2.16 Não há imersão devido aos pontos do tipo "pinch" A e B

Exemplo 2.2: Vamos dar um exemplo de uma imersão de RP_2 em R^3 , cuja projeção em R^2 tem uma curva conexa com uma cúspide. Na Figura 2.17 está representada a dobra desta aplicação. Esta dobra tem uma vizinhança que é uma faixa de Möbius, a qual contém um disco. Na Figura 2.18 está representado o bordo do disco imerso.

Figura 2.17

Figura 2.18

Nas Figuras de 2.19 a 2.22 estão mostrados os vários estágios da imersão.

Figura 2.19 Imersão de um disco (1)

Figura 2.20 Imersão de um disco (2)

Figura 2.21 Imersão de um disco (3)

Figura 2.22 Imersão de um disco (4)

CAPÍTULO 3

RESULTADOS RELACIONADOS

Passaremos agora a apresentar alguns resultados relacionados que generalizam os anteriores.

Teorema 3.1 (Quine [5]): Sejam M e N 2-variedades suaves, compactas, orientadas e conexas. Seja $f : M \rightarrow N$ genérica. Definimos: M^+ o conjunto onde f preserva a orientação e M^- o conjunto onde f inverte a orientação. Sejam $p_1, p_2, \dots, p_n$ os pontos de cúspide e $\mu(p_k)$ o grau local no ponto de cúspide p_k . Então vale:

$$(*) \quad \chi(M) - 2\chi(M^-) + \sum_{k=1}^n \mu(p_k) = (\deg f) \chi(N)$$

onde χ é a característica de Euler e $\deg$ é o grau de uma aplicação.

Este fato também pode ser apresentado na forma:

$$(**) \quad \chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum_{k=1}^n \mu(p_k) = (\deg f) \chi(N) .$$

Corolário 3.1: Este teorema generaliza o Teorema 1.2 .

Prova: Vamos considerar R^2 como S^2 menos um ponto. Fazendo $N = S^2$ no teorema, como f não é sobrejetora, segue que $\deg f = 0$. Portanto, por (**), $\sum \mu(p_k) = \chi(M^-) - \chi(M^+)$. Mas o número de cúspides de f é maior ou igual a $|\sum \mu(p_k)|$ e o resultado segue. ■

Corolário 3.2: Sob as hipóteses do Teorema 3.1, o número de cúspides de f é par.

Prova: Observe que, neste caso, $\chi(M)$ e $\chi(N)$ são pares e que $\sum \mu(p_k)$ tem a mesma paridade do número de cúspides. ■

Corolário 3.3: A fórmula de Riemann-Hurwitz segue da equação (*).

Prova: Suponha que $f : M \rightarrow N$ preserva orientação exceto para pontos de bifurcação em $p_1, \dots, p_n$ de ordens $\nu_1, \dots, \nu_n$; respectivamente. Embora f não seja genérica, ela pode ser levemente perturbada tal que ao invés de um ponto de bifurcação de ordem ν_k em p_k , tenhamos $\nu_k + 1$ cúspides do tipo positiva numa única dobra geral fechada. Esta dobra geral borda uma componente de M^- em seu interior. Então $\chi(M^-) = n$ e $\sum \mu(p_k) = n + \sum \nu_k$. E portanto, por (*) temos:

$$(***) \quad \chi(M) + \sum (\nu_k - 1) = (\deg f) \chi(N)$$

Se N é a esfera, $\chi(N) = 2$ e (***) é a fórmula de Riemann-Hurwitz. ■

Exemplo 3.1: Seja M um toro considerado como uma esfera N com uma asa. Seja f obtida por projetar M sobre N . A dobra geral e as cúspides estão mostradas na Figura 3.1. As quatro cúspides são positivas. Temos que: $\sum \mu(p_k) = 4$, $\chi(M) = 0$, $\chi(N) = 2$, $\chi(M^-) = 1$ e $\deg f = 1$.

Figura 3.1

Exemplo 3.2: Sejam M um toro e N uma esfera (veja a Figura 3.2). Construa f de tal modo que ela leve S_k em T_k ; $k = 1, \dots, 4$; preserve as orientações indicadas e leve os pontos indicados em S_1 e S_3 nas cúspides em T_1 e T_3 . Todas as cúspides são positivas e $\sum \mu(p_k) = 4$, $\chi(M^-) = 0$, $\chi(M) = 0$, $\chi(N) = 2$ e $\deg f = 2$.

Figura 3.2

O teorema a seguir é uma certa recíproca do Teorema 1.2 .

Teorema 3.2 (Eliasberg [6]): Sejam M uma variedade bidimensional fechada conexa e orientada, N uma variedade bidimensional orientada e sem bordo, $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação de grau p ($p = 0$ se N não é fechada) e C uma sub-variedade de M unidimensional e fechada, que divide M em duas variedades M_1 e M_2 com bordo comum C . Além disso, suponha que sejam dados $n_1 + n_2$ pontos em C , n_1 dos quais com normais a C em M apontadas para M_2 e n_2 com normais apontadas para M_1 . Então se:

$$| \chi(M_1) - \chi(M_2) - n_1 + n_2 | = | p \chi(N) | ,$$

existe uma aplicação genérica $f : M \rightarrow N$ homotópica a ϕ tal que a dobra de f seja C , os n_1 pontos dados são cúspides de f de um mesmo sinal e os outros n_2 são cúspides de f de sinal oposto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BERGER, M. ; GOSTIAUX, B.   *Differential geometry: manifolds, curves and surfaces.*   New York. Springer-Verlag, 1988.
- [2] HAEFLIGER, A.   Quelques remarques sur les applications différentiables d'une surface dans le plan.   *Ann. Inst. Fourier*, v. 10, p. 47-60, 1960.
- [3] THOM, R.   Les singularités des applications différentiables.   *Ann. Inst. Fourier*, v. 6, p. 43-87, 1955-6.
- [4] MILLETT, K. C.   Generic smooth maps of surfaces.   *Topology Appl.*, v 18, n. 2-3, p. 197-215, 1984.
- [5] QUINE, J. R.   A global theorem for singularities of maps between oriented 2-manifolds.   *Transactions of The American Mathematical Society*, v. 236, p.307-14, 1978.
- [6] ELIASBERG, J. M.   On singularities of folding type.   *Math. USSR-Izvestija*, v. 4, n. 5, p. 1119-34, 1970.
- [7] Kauffman, Louis H.   Planar surface immersions.   *Illinois Journal of Mathematics*, v. 23, n. 4, p. 648-65, 1979.