Operadores integrais positivos e espaços de
Hilbert de reprodução

José Claudinei Ferreira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 21 de junho de 2010

Assinatura: _____

Operadores integrais positivos e espaços de Hilbert de reprodução¹

José Claudinei Ferreira

Orientador: *Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Ciências Matemáticas.

USP - São Carlos
Junho/2010

¹O autor teve apoio financeiro da FAPESP, Processo n°. 2007/58086 – 7.

*Aos meus pais, Jovina e
Vicente, e familiares.*

Agradecimentos

Sou grato a todos e a tudo pela possibilidade da conclusão deste trabalho e desta etapa da vida profissional e acadêmica. Em particular, sou grato aos meus pais e familiares, e aos amigos também, pelo apoio ou apenas pela presença. Sou grato ainda ao Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto pela orientação, paciência e dedicação, pelo apoio e pelo exemplo de profissional que é. Aos colegas de trabalho na UNIFAL-MG, pela colaboração e incentivo. Por fim, sou grato à FAPESP pelo apoio financeiro não menos importante.

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo de propriedades teóricas dos operadores integrais positivos em $L^2(X, \nu)$, quando X é um espaço topológico localmente compacto ou primeiro enumerável e ν é uma medida estritamente positiva. Damos ênfase à análise de propriedades espectrais relacionadas com extensões do Teorema de Mercer e ao estudo dos espaços de Hilbert de reprodução relacionados. Como aplicação, estudamos o decaimento dos autovalores destes operadores, em um contexto especial. Finalizamos o trabalho com a análise de propriedades de suavidade das funções do espaço de Hilbert de reprodução, quando X é um subconjunto do espaço euclidiano usual e ν é a medida de Lebesgue usual de X .

Abstract

In this work we study theoretical properties of positive integral operators on $L^2(X, \nu)$, in the case when X is a topological space, either locally compact or first countable, and ν is a strictly positive measure. The analysis is directed to spectral properties of the operator which are related to some extensions of Mercer's Theorem and to the study of the reproducing kernel Hilbert spaces involved. As applications, we deduce decay rates for the eigenvalues of the operators in a special but relevant case. We also consider smoothness properties for functions in the reproducing kernel Hilbert spaces when X is a subset of the Euclidean space and ν is the Lebesgue measure of the space.

Sumário

Introdução	xv
1 Preliminares	1
1.1 Análise e Topologia	1
1.2 Teoria da medida	5
1.3 Espaços de Banach e de Hilbert	8
1.4 Teoria espectral para operadores compactos	12
2 Núcleos positivos definidos	19
2.1 Operadores integrais positivos	19
2.2 Teoria de Mercer	23
2.3 Convergência em L^p	33
2.4 O operador $\mathcal{K}^r$	34
3 Espaços de Hilbert de reprodução	41
3.1 O espaço $\mathcal{H}_K$	41
3.2 Propriedades de $\mathcal{H}_K$	42
3.3 Uma base para $\mathcal{H}_K$	47
3.4 Considerações adicionais	50
4 Decaimento de autovalores	55
4.1 Aproximação na norma traço	57
4.2 (q, t) -compacidade e condições de Lipschitz	62
4.3 Estimativas auxiliares	70
4.4 Decaimento de autovalores	74

5	Derivação termo a termo	79
5.1	Núcleos Lipschitzianos	80
5.2	Núcleos diferenciáveis	82
5.3	Derivação termo a termo	85
5.4	Propriedades de reprodução	90
5.5	Resultados finais	93
	Referências Bibliográficas	97
	Índice Remissivo	102

Introdução

Seja X um conjunto não vazio e $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido, ou seja, para o qual as desigualdades

$$\sum_{i,j=1}^n \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

são satisfeitas, para quaisquer $n \geq 1$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Estas desigualdades possibilitam a definição de um produto interno no espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{K^x := K(\cdot, x) : x \in X\}$. O completamento deste espaço vetorial com produto interno é chamado de *espaço de Hilbert de reprodução* e denotado por $\mathcal{H}_K$ ([2, 4, 56]).

Nos casos em que X está munido de uma medida ν adequada, o núcleo positivo definido K gera um operador integral positivo e autoadjunto $\mathcal{K} : L^2(X, \nu) \rightarrow L^2(X, \nu)$. Esta ligação possibilita o estudo de propriedades de K através de propriedades espectrais de $\mathcal{K}$, quando este operador é compacto. Este estudo é antigo e deu origem ao famoso Teorema de Mercer, o qual é amplamente utilizado.

Teorema de Mercer [43]. *Todo núcleo positivo definido $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, contínuo e simétrico, possui uma representação em série da forma*

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in [0, 1],$$

onde $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ é uma sequência de números reais não negativos convergente para 0 e $\{\phi_n\}$ é um conjunto ortonormal em $L^2([0, 1])$, formado por funções contínuas.

As referências ([5, 6, 7, 8, 21, 22, 23, 27, 28, 37, 38, 46, 47, 60]) contêm resultados relacionados ao assunto aqui tratado onde o Teorema de Mercer aparece como ferramenta fundamental.

É fácil verificar que a série acima, a qual chamamos de série (ou representação) de Mercer para K , é absoluta e uniformemente convergente em ambas as variáveis

simultaneamente e que a sequência de escalares é formada por autovalores do operador integral $\mathcal{K}$ (e o 0), cuja fórmula é dada por

$$\mathcal{K}(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy, \quad x \in X, \quad f \in L^2([0, 1]).$$

Ainda, o conjunto $\{\phi_n\}$ é formado por autofunções deste operador.

Já que nosso trabalho está diretamente relacionado com este teorema, incluímos abaixo informações adicionais sobre o mesmo. Várias versões deste teorema surgiram, de acordo com a necessidade de cada momento. Em 1987, Kühn ([38]) apresentou uma versão do teorema para o caso em que o conjunto X é um espaço topológico compacto e de Hausdorff munido de uma medida estritamente positiva e finita. Em 1984, Novitskiĭ ([46]) já havia apresentado uma versão para o caso em que X é um intervalo real, não necessariamente limitado, acrescentando algumas condições técnicas ao núcleo positivo definido e contínuo. Em 2004, Buescu ([5]) observou que algumas destas condições adicionais eram redundantes e acabou estendendo o resultado anterior. Os autores citados acima e os demais que os seguiram fizeram um amplo estudo das consequências e aplicações deste teorema. Em destaque, citamos o trabalho de Cucker e Smale ([19]), publicado em 2001, e o trabalho de Sun ([60]) de 2005. Este último apresenta uma versão do teorema em questão para o caso em que $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j$ é um espaço métrico munido de uma medida estritamente positiva onde cada X_j tem medida finita, é compacto, $X_j \subset X_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$ e cada subconjunto compacto de X é subconjunto de algum X_j . Esta parece ser a primeira versão do Teorema de Mercer onde o espaço base X é um espaço métrico não compacto.

Como podemos facilmente verificar, o Teorema de Mercer é mais efetivo do que o teorema espectral para operadores compactos e autoadjuntos no que tange a caracterização de algumas propriedades do operador $\mathcal{K}$. Alguns dos artigos citados anteriormente, bem como outros ([59, 61, 62, 64] por exemplo), relacionam estas propriedades com o espaço $\mathcal{H}_K$, obtendo assim consequências relevantes para aplicações em várias áreas da Matemática, incluindo a Teoria do Aprendizado (Learning Theory), Teoria da Aproximação, etc.

Tendo estas referências acima citadas como motivação, estudamos neste trabalho propriedades teóricas dos núcleos positivos definidos, dos operadores integrais gerados por eles e dos espaços de Hilbert de reprodução associados. Em um primeiro momento, nos preocupamos com o estudo de propriedades dos núcleos e dos operadores em um contexto ainda não considerado na literatura: o domínio X é um espaço topológico localmente compacto ou primeiro enumerável munido de uma medida estritamente positiva. Além dos resultados propriamente ditos, incluímos também uma pequena comparação com outros resultados similares da literatura. Em particular, concluímos

que algumas condições impostas por Sun ([60]) sobre o núcleo K são redundantes, mesmo no contexto métrico lá adotado. Concluimos ainda que algumas condições usadas nos artigos [5, 46] podem ser significativamente enfraquecidas. Este tema da tese é tratado no Capítulo 2.

O assunto do Capítulo 3 tem relação direta com os resultados do capítulo anterior já que investigamos algumas propriedades dos espaços de Hilbert de reprodução, mantendo o contexto do Capítulo 2. Por outro lado, os resultados também tem conexão com aqueles obtidos em [61]. Enquanto o contexto métrico de [61] usa um espaço X munido de uma medida finita, o nosso usa um contexto topológico e a adição de continuidade ao núcleo K .

Os dois últimos capítulos do trabalho contêm aplicações dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. No Capítulo 4, adicionamos uma estrutura métrica especial a X e provamos resultados sobre o decaimento dos autovalores $\lambda_n(\mathcal{K})$ de $\mathcal{K}$, quando o núcleo K é suficientemente suave. Em particular, os resultados obtidos estendem aqueles descritos em [8] e outros que fizeram parte de nosso trabalho de mestrado ([24]).

No Capítulo 5, o contexto é aquele em que X é um conjunto aberto do espaço euclidiano usual. Apresentamos uma versão diferenciável do Teorema de Mercer e aplicamos esta versão ao estudo de propriedades de reprodução para derivadas parciais de funções do espaço de reprodução, dando continuidade ao trabalho de Zhou [64], que fez um estudo semelhante, porém, usando um método diferente e supondo a limitação de X .

Destacamos que muitas outras propriedades de núcleos positivos definidos poderiam ser consideradas. Uma delas está relacionada com a nuclearidade de operadores em casos onde o Teorema de Mercer não se aplica, um exemplo típico sendo o caso tratado em [27]. Poderia-se ainda estudar casos onde o núcleo em questão não gera um operador compacto ou um operador limitado, como por exemplo no caso tratado em [47]. Acreditamos que os resultados obtidos aqui podem ser aplicados nestes casos bem como outros alinhados com as referências [21, 22, 23] onde operadores não positivos são permitidos.

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos resultados básicos ou clássicos a serem utilizados no decorrer do trabalho. O critério para a inclusão ou não de cada um deles no texto baseou-se na disponibilidade de referências confiáveis e acessíveis. Apresentamos provas para aqueles que, a nosso ver, não são facilmente encontrados na literatura na forma aqui apresentada ou cujas demonstrações trazem algum argumento técnico que seja relevante em algum ponto do texto. O leitor mais interessado nas contribuições inéditas do trabalho pode omitir a leitura deste capítulo.

1.1 Análise e Topologia

Em todo o trabalho, será de fundamental importância a aplicação de resultados sobre continuidade e sobre a convergência de sequências e séries numéricas e de funções. Começamos com resultados clássicos de análise e/ou topologia, a serem usados explícita ou implicitamente ao longo do texto. Aqueles resultados de topologia não explicitados podem ser encontrados na referência [45].

Teorema 1.1.1. *Sejam X e Y espaços topológicos. Se X é compacto e $f : X \rightarrow Y$ é contínua então $f(X)$ é compacto.*

Este resultado pode ser aplicado, por exemplo, para provar o teorema seguinte, essencial nos argumentos para justificar algumas versões do Teorema de Mercer.

Teorema 1.1.2 (Dini). *Seja X um espaço topológico compacto e $\{f_n\}$ uma sequência de funções reais contínuas definidas em X . Se $\{f_n\}$ é monótona e pontualmente convergente para uma função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ então a convergência é uniforme.*

A seguir, incluímos outros resultados clássicos envolvendo sequências em um conjunto de funções. Começamos com um critério de compacidade para subconjuntos de $C(X)$, o conjunto das funções contínuas do espaço topológico compacto X em $\mathbb{C}$ ([45, p.290], [31, p.137]).

Teorema 1.1.3 (Arzelà-Ascoli). *Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto. Se F é subconjunto de $C(X)$ então o fecho de F em $C(X)$ é compacto se, e somente se:*

- (i) *para cada $x \in X$, o conjunto $\{f(x) : f \in F\}$ é limitado;*
- (ii) *F é equicontínuo, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ e cada $x \in X$, existe um aberto $U = U_x$ tal que*

$$\sup_{f \in F} \sup_{y \in U} |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Em certos momentos, será preciso determinar se o limite de uma sequência (ou soma de uma série) de funções contínuas é também contínua. Esse é o assunto do próximo resultado ([45, p.130]).

Teorema 1.1.4. *Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Se uma sequência $\{f_n\}$ de funções contínuas de X em M converge uniformemente para uma função $f : X \rightarrow M$ então f é contínua.*

Lembramos que um espaço topológico é *primeiro enumerável* ([45, p.190]) quando possui, em cada ponto, uma base enumerável para a topologia do espaço. Exemplos de tais espaços são os espaços métricos. Uma característica importante destes espaços, relacionada com a verificação da continuidade de funções, é dada pelo Teorema 1.1.5 ([45, p.190]).

Teorema 1.1.5. *Seja X um espaço topológico primeiro enumerável e M um espaço métrico. Uma função $f : X \rightarrow M$ é contínua se, e somente se, é sequencialmente contínua: se $x_n \rightarrow x$ em X então $f(x_n) \rightarrow f(x)$ em M .*

O próximo resultado tem relevância na escolha do contexto utilizado nos capítulos seguintes. Lembramos que um espaço topológico é *localmente compacto* quando cada ponto deste espaço possui uma vizinhança aberta cujo fecho é compacto.

Teorema 1.1.6. *Seja X um espaço topológico localmente compacto ou primeiro enumerável e M um espaço métrico. O limite f de uma sequência $\{f_n\}$ de funções contínuas de X em M , uniformemente convergente em subconjuntos compactos de X , é uma função contínua.*

Demonstração: Primeiro suponha que X é localmente compacto. Seja U um aberto de M e seja $\mathcal{F} = \cup_{\alpha \in A} F_\alpha$ uma cobertura aberta de $f^{-1}(U)$ de modo que o fecho $\overline{F_\alpha}$ de cada F_α é compacto. Do Teorema 1.1.4, segue que a restrição $f|_{\overline{F_\alpha}}$ de f a cada $\overline{F_\alpha}$, é contínua. Logo, $G_\alpha := f|_{\overline{F_\alpha}}^{-1}(U) \cap F_\alpha$ é um aberto de X . Assim, $f^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in A} G_\alpha$ é aberto e a continuidade de f segue. Suponha agora que X é primeiro enumerável. Seja $\{x_n\}$ uma sequência convergente para x em X . Como $Y = \{x_n\} \cup \{x\}$ é compacto e $f|_Y$ é contínua, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$, ou seja, f é contínua em x . $\square$

O restante da seção refere-se à ordem de convergência de sequências e séries especiais ([24, 26, 28]). Os resultados serão usados no estudo do decaimento dos autovalores de operadores integrais no Capítulo 4.

Lema 1.1.7. *Se m, p, q e γ são números reais e $p > 1$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$(p(n+1)^m + q)^\gamma \leq p^{\gamma+1} n^{m\gamma}, \quad n \geq n_0.$$

Demonstração: Basta notar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(p(n+1)^m + q)^\gamma}{p^{\gamma+1} n^{m\gamma}} = \frac{1}{p},$$

e observar que $p^{-1} < 1$. $\square$

Uma sequência $\{a_n\}$ de números reais é *eventualmente não crescente* quando existe n_0 tal que $\{a_{n_0+n}\}$ é uma subsequência não crescente ($a_{n_0+n+1} \leq a_{n_0+n}$, para todo n) e de termos não negativos.

Lema 1.1.8. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência eventualmente não crescente. Suponha que existam constantes $m, n_0, p, q \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $C \geq 0$, tais que*

$$\sum_{j=k(n)+q+1}^{\infty} n^\gamma a_j \leq C, \quad n \geq n_0,$$

para algum $k(n) \in \{0, 1, \dots, pn^m\}$. Então o conjunto $\{n^{m+\gamma} a_{2pn^m+q} : n = 1, 2, \dots\}$ é limitado. Ainda, existe um inteiro n_1 tal que

$$0 \leq n^{m+\gamma} a_{2pn^m+q} \leq C, \quad n \geq n_1.$$

Demonstração: Seja n_2 um inteiro positivo com a seguinte característica: a subsequência de termos não negativos $\{a_{n_2+j}\}$ é não crescente. Defina $n_1 = \max\{n_2, n_0\}$ e note que

$$\sum_{j=pn^m+q+1}^{\infty} n^{\gamma} a_j \leq \sum_{j=k(n)+q+1}^{\infty} n^{\gamma} a_j \leq C, \quad n \geq n_1.$$

Utilizando as hipóteses e observando que o vetor $n^{\gamma}(a_{pn^m+q+1}, a_{pn^m+q+2}, \dots, a_{2pn^m+q})$ possui $pn^m \geq n^m$ coordenadas, temos que

$$\begin{aligned} n^{m+\gamma} a_{2pn^m+q} &= n^m n^{\gamma} a_{2pn^m+q} \\ &\leq n^{\gamma} a_{pn^m+q+1} + \dots + n^{\gamma} a_{2pn^m+q} \\ &\leq \sum_{j=pn^m+q+1}^{\infty} n^{\gamma} a_j \leq C, \quad n \geq n_1. \end{aligned}$$

Logo, $\{n^{m+\gamma} a_{2pn^m+q}\}_{n=1}^{\infty} \subset [-r, r]$, onde $r = \max\{C, |n^{m+\gamma} a_{2pn^m+q}| : n = 1, 2, \dots, n_1\}$, o que conclui a prova do lema. $\square$

Teorema 1.1.9. *Seja $\{a_n\}$ uma sequência eventualmente não crescente. Suponha que existam constantes $m, n_0, p, q \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e $C \geq 0$, tais que*

$$\sum_{j=k(n)+q+1}^{\infty} n^{\gamma} a_j \leq C, \quad n \geq n_0,$$

para algum $k(n) \in \{0, 1, \dots, pn^m\}$. Então o conjunto $\{n^{1+\gamma/m} a_n : n = 1, 2, \dots\}$ é limitado. Ainda, existe um inteiro n_1 tal que

$$0 \leq n^{1+\gamma/m} a_n \leq (2p)^{1+\gamma/m} C, \quad n \geq n_1.$$

Demonstração: Do Lema 1.1.8 já temos que o conjunto $\{n^{m+\gamma} a_{2pn^m+q}, n = 1, 2, \dots\}$ é limitado. Na verdade, a prova do lema revela que existe $n_2 > 0$ tal que

$$0 \leq n^{m+\gamma} a_{2pn^m+q} \leq C, \quad n \geq n_2.$$

Para cada natural $s > q$, existe $n_s \in \mathbb{N}$ tal que

$$2pn_s^m + q \leq s \leq 2p(n_s + 1)^m + q.$$

Com isso temos que existe um natural $n_3 \geq n_2$ tal que

$$s^{1+\gamma/m} a_s \leq (2p(n_s + 1)^m + q)^{1+\gamma/m} a_{2pn_s^m+q}, \quad s \geq n_3.$$

Aplicando o Lema 1.1.7 com $p_1 = 2p$ e $\gamma_1 = 1 + \gamma/m$, segue que existe $n_1 \geq n_2 + n_3$ tal que

$$s^{\gamma_1} a_s \leq p_1^{\gamma_1+1} n_s^{m\gamma_1} a_{2pn_s^m+q} = p_1^{\gamma_1+1} n_s^{m+\gamma} a_{2pn_s^m+q} \leq p_1^{\gamma_1+1} C, \quad s \geq n_1.$$

Desta forma, o conjunto $\{n^{1+\gamma/m}a_n, n = n_1, n_1 + 1, \dots\}$ é limitado. $\square$

Na definição seguinte recordamos dois conceitos usuais.

Definição 1.1.10. *Sejam $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ duas seqüências numéricas. Suponha que $b_n \neq 0$, $n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Dizemos que $a_n = o(b_n)$ quando a seqüência $\{a_n b_n^{-1}\}$ converge para 0. Dizemos que $a_n = O(b_n)$ quando $\{a_n b_n^{-1}, n = n_0, n_0 + 1, \dots\}$ é limitada.*

Podemos reescrever parte do Teorema 1.1.9 utilizando a linguagem desta definição.

Corolário 1.1.11. *Se a seqüência $\{a_n\}$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1.9 então $a_n = O(n^{-1-\gamma/m})$.*

Outra consequência do mesmo teorema é a seguinte.

Corolário 1.1.12. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência eventualmente não crescente. Se para cada $C \geq 0$ existem constantes $m, n_0 = n_0(C), p, q \in \mathbb{N}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\sum_{j=k(n)+q+1}^{\infty} n^{\gamma} a_j \leq C, \quad n \geq n_0,$$

para algum $k(n) \in \{0, 1, \dots, pn^m\}$, então $a_n = o(n^{-1-\gamma/m})$.

Demonstração: Seja $\{C_j\}$ uma seqüência de números reais positivos convergente para 0. Do Teorema 1.1.9 segue que, para cada C_j , existe n_j tal que

$$0 \leq n^{1+\gamma/m} a_n \leq (2p)^{1+\gamma/m} C_j, \quad n \geq n_j,$$

e o corolário segue. $\square$

1.2 Teoria da medida

Revisamos nesta seção alguns conceitos e resultados básicos da teoria da medida. Inicialmente, introduzimos os espaços L^p usuais. Alguns resultados não mencionados diretamente aqui podem ser encontrados nas referências [31, 54].

Definição 1.2.1. *Seja (X, ν) um espaço de medida e $p \in (0, \infty]$. Definimos*

$$L^p(X, \nu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é } \nu\text{-mensurável e } \|f\|_p < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_p := \left[\int_X |f(x)|^p d\nu(x) \right]^{1/p}, \quad 0 < p < \infty,$$

e

$$\|f\|_{\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} \{|f(x)|\} = \inf \{a \geq 0 : \nu(\{x \in X : |f(x)| > a\}) = 0\}.$$

O conjunto $L^p(X, \nu)$, para $p \in (0, \infty]$, torna-se um espaço vetorial quando identificamos quaisquer duas funções f e g de $L^p(X, \nu)$ que são idênticas a menos de um conjunto de medida nula. O termo equivalente para tal identificação é *f e g são iguais quase sempre* ou, simplificadaamente, $f = g$ q.s.. No caso em que $X = \mathbb{R}^m$, a menos de especificação em contrário, ν é a medida de Lebesgue usual de $\mathbb{R}^m$. Observação análoga vale no caso em que X é subconjunto de $\mathbb{R}^m$. No contexto de $L^p(X \times Y, \nu \times \mu)$, a medida $\nu \times \mu$ é a medida produto correspondente. Propriedades importantes dos espaços L^p estão presentes no teorema que segue.

Teorema 1.2.2. *Para $p \geq 1$, valem as seguintes propriedades:*

- (i) *O espaço $(L^p(X, \nu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach;*
- (ii) *O conjunto das funções que possuem derivadas de todas as ordens e suporte compacto em $\mathbb{R}^m$ é um subconjunto denso do espaço $L^p(\mathbb{R}^m, \nu)$. Em particular, a intersecção $L^p(\mathbb{R}^m, \nu) \cap L^q(\mathbb{R}^m, \nu)$ é um subconjunto denso de ambos $L^p(\mathbb{R}^m, \nu)$ e $L^q(\mathbb{R}^m, \nu)$.*
- (iii) *$L^2(X, \nu)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por*

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_X f(x) \overline{g(x)} d\nu(x), \quad f, g \in L^2(X, \nu).$$

No desenvolvimento do trabalho fazemos muitas manipulações de integrais, por isso terminamos a seção com alguns resultados úteis sobre o assunto.

Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Hölder). *Seja (X, ν) um espaço de medida e $p \in [1, \infty]$. Considere o expoente conjugado de p , ou seja, o número q que satisfaz $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Se f e g são funções mensuráveis em X então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Em particular, se $f \in L^p(X, \nu)$ e $g \in L^q(X, \nu)$ então $fg \in L^1(X, \nu)$.

O símbolo $L^+(X, \nu)$ indica o conjunto das funções ν -mensuráveis em X que são não negativas.

Teorema 1.2.4 (Convergência Monótona). *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ q.s. e $\{f_n\}$ é uma sequência não decrescente de $L^+(X, \nu)$ então*

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\nu(x).$$

Um resultado usado para verificar a igualdade de funções em L^p é dado pelo Teorema 1.2.5.

Teorema 1.2.5. *Se $f \in L^+(X, \nu)$ então $\int_X f(x) d\nu(x) = 0$ apenas quando $f = 0$ q.s..*

O Teorema da Convergência Monótona, apesar de ser muito importante, não pode ser aplicado em alguns casos. Dependendo da situação, o Teorema da Convergência Dominada surge como um resultado alternativo.

Teorema 1.2.6 (Convergência Dominada). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^1(X, \nu)$ que satisfaz:*

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ q.s.;

(ii) *Existe uma função $g \in L^1(X, \nu)$ tal que $|f_n| \leq g$ q.s., para todo n .*

Então $f \in L^1(X, \nu)$ e

$$\int_X f(x) d\nu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\nu(x).$$

O teorema seguinte garante a iteração de integrais em espaços produto.

Teorema 1.2.7 (Fubini). *Sejam (X, ν) e (Y, μ) espaços de medida completos (ou σ -finitos) e $f \in L^1(X \times Y, \nu \times \mu)$. Neste caso, $f(x, \cdot) \in L^1(Y, \mu)$ para quase todo x e $f(\cdot, y) \in L^1(X, \nu)$ para quase todo y . As funções definidas quase sempre*

$$g(x) = \int_Y f(x, y) d\mu(y), \quad h(y) = \int_X f(x, y) d\nu(x),$$

são elementos de $L^1(X, \nu)$ e $L^1(Y, \mu)$ respectivamente. Além disso, vale a fórmula

$$\int_{X \times Y} f d(\nu \times \mu) = \int_X \left[\int_Y f(x, y) d\mu(y) \right] d\nu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x, y) d\nu(x) \right] d\mu(y).$$

Os dois últimos resultados da seção serão aplicados em exemplos no Capítulo 4. No que segue, $|x|$ denota a norma usual de $x \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 1.2.8. *Sejam C e r constantes positivas, $B := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| < r\}$ e f uma função Lebesgue-mensurável em $\mathbb{R}^m$.*

(i) *Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$, $x \in B$, para algum $\alpha < m$, então $f \in L^1(B, \nu)$;*

(ii) *Se $|f(x)| \leq C|x|^{-\alpha}$, $x \notin B$, para algum $\alpha > m$, então $f \in L^1(\mathbb{R}^m \setminus B, \nu)$.*

Teorema 1.2.9. *Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ Lebesgue-mensurável. Suponha que $f \in L^1(\mathbb{R}^m, \nu)$ ou $f \in L^+(\mathbb{R}^m, \nu)$. Se f é radial, ou seja, existe $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $f(x) = g(|x|)$, $x \in \mathbb{R}^m$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x) d\nu(x) = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} \int_0^\infty g(r) r^{m-1} dr.$$

Como a troca na ordem de integração faz-se necessária em várias passagens do texto, vamos supor a partir de agora que as medidas utilizadas são completas ou σ -finitas, embora isto não seja absolutamente necessário em todos os resultados.

1.3 Espaços de Banach e de Hilbert

Esta seção e a seguinte contêm os pré-requisitos de Análise Funcional utilizados ao longo do trabalho. Muitos dos resultados aqui apresentados já estão formatados visando sua utilização no texto. Somente alguns poucos menos conhecidos são provados. Resultados adicionais podem ser encontrados nas referências [31, 32, 48, 63].

Começamos com a clássica desigualdade de Cauchy-Schwarz. Vamos escrever $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ para denotar a norma do espaço vetorial normado $\mathcal{X}$. Ainda, $\|x\|_{\mathcal{X}}^2 = \langle x, x \rangle_{\mathcal{X}}$, $x \in \mathcal{X}$, sempre que $\mathcal{X}$ estiver munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$. Tratamos apenas dos espaços vetoriais de dimensão infinita sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Teorema 1.3.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se $\mathcal{X}$ é um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}}$ então*

$$|\langle x, y \rangle_{\mathcal{X}}| \leq \|x\|_{\mathcal{X}} \|y\|_{\mathcal{X}}, \quad x, y \in \mathcal{X}.$$

Os próximos resultados estão relacionados a propriedades das bases ortonormais de espaços de Hilbert.

Teorema 1.3.2 (Desigualdade de Bessel). *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}$ então*

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle y, x_{\alpha} \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq \|y\|_{\mathcal{H}}^2, \quad y \in \mathcal{H}.$$

Lembramos que o somatório acima representa de fato a soma de uma série, ou seja, os elementos desta soma podem ser não nulos apenas em um conjunto enumerável de índices. O mesmo comentário aplica-se a outros somatórios do texto. Este resultado pode ser melhorado quando o conjunto em questão é uma das bases ortonormais do espaço.

Teorema 1.3.3 (Identidade de Parseval). *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert e $\{x_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ então*

$$y = \sum_{\alpha \in A} \langle y, x_{\alpha} \rangle_{\mathcal{H}} x_{\alpha}, \quad y \in \mathcal{H},$$

e

$$\|y\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle y, x_{\alpha} \rangle_{\mathcal{H}}|^2, \quad y \in \mathcal{H}.$$

Além disso, se $\{c_n\}$ é uma sequência de números complexos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ então $x := \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_{\alpha_n}$ é um elemento de $\mathcal{H}$ e $c_n = \langle x, x_{\alpha_n} \rangle_{\mathcal{H}}$.

Concluimos a seção com alguns resultados sobre transformações lineares. Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços vetoriais normados. O conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é o conjunto de todos os operadores lineares limitados de $\mathcal{X}$ em $\mathcal{Y}$. Quando $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, escrevemos $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathcal{L}(\mathcal{X})$.

Teorema 1.3.4. *Valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são espaços vetoriais normados então $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um espaço vetorial normado com norma dada por*

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})} &:= \sup\{\|T(x)\|_{\mathcal{Y}} : x \in \mathcal{X}, \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\} \\ &= \inf\{C : \|T(x)\|_{\mathcal{Y}} \leq C\|x\|_{\mathcal{X}}, x \in \mathcal{X}\}. \end{aligned}$$

(ii) *Nas condições em (i), se $\mathcal{Y}$ é um espaço de Banach então $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é um espaço de Banach.*

Por simplicidade, denotaremos $\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}$. Quando $\mathcal{X}$ é um espaço de Hilbert e $\mathcal{Y}$ é $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, o teorema anterior pode ser melhorado pelo Teorema da Representação de Riesz que garante a existência de um elemento $y = y(T) \in \mathcal{X}$ tal que

$$T(x) = \langle x, y \rangle_{\mathcal{X}}, \quad x \in \mathcal{X},$$

para cada $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Logo, $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é isomorfo a $\mathcal{X}$ quando $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$.

A definição de operador adjunto origina-se do seguinte teorema.

Teorema 1.3.5. *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ então existe um único operador $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que*

$$\langle T(x), y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^*(y) \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad x \in \mathcal{H}_1, \quad y \in \mathcal{H}_2.$$

Este resultado produz o Corolário 1.3.6, que utilizamos amplamente no decorrer do trabalho.

Corolário 1.3.6. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se existir um subconjunto ortonormal $\{x_n\}$ de $\mathcal{H}$ e uma sequência limitada $\{\lambda_n\}$ de números complexos, tais que*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

então

$$T^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n} \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H}.$$

O operador T^* descrito no teorema anterior é denominado *operador adjunto* de T . O operador T é *autoadjunto* quando $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ e $T = T^*$. Por outro lado, dizemos que T é normal quando $T^*T = TT^*$.

Uma classe importante da teoria de operadores é definida a seguir.

Definição 1.3.7. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ é compacto quando a imagem de cada sequência limitada de $\mathcal{X}$ possuir uma subsequência convergente em $\mathcal{Y}$.*

Um exemplo elementar de operador compacto é fornecido pelo teorema abaixo.

Teorema 1.3.8. *Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ espaços de Banach. Se $T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \dots$, têm posto finito e $T_j \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ então T é compacto.*

No contexto de espaços de Hilbert, o teorema anterior pode ser refinado como segue.

Teorema 1.3.9. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Então T é um operador compacto se, e somente se, T^* é compacto. Ainda, o conjunto dos operadores de posto finito é denso no espaço (de Banach) dos operadores compactos.*

Outra maneira de obtermos operadores compactos é sugerida pelo teorema abaixo.

Teorema 1.3.10. *Sejam $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ espaços de Banach. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $S \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ e T ou S é compacto então a composição ST é um operador compacto.*

Vejamos agora a classe principal de operadores lineares sobre espaços de Hilbert a ser usada neste trabalho.

Definição 1.3.11. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é positivo quando*

$$\langle T(x), x \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Nas condições da definição acima, se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é positivo, escrevemos $T \geq 0$. Se $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, escrevemos $T_1 \geq T_2$ para indicar que $T_1 - T_2 \geq 0$. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ então $T^*T \geq 0$ (autoadjunto) uma vez que

$$\langle T^*T(x), x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T(x), T(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \|T(x)\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}.$$

A identidade de polarização ratifica a validade do seguinte resultado.

Teorema 1.3.12. *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um operador positivo então T é um operador autoadjunto.*

Talvez a principal característica de um operador positivo seja o fato do mesmo possuir uma única raiz quadrada positiva ([55, p.231]). Em particular, esta propriedade entra em vários argumentos nos demais capítulos.

Teorema 1.3.13 (Lema da Raiz n -ésima). *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ um operador positivo. Se n é um inteiro positivo então existe um único operador positivo $\mathcal{S}$ em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $\mathcal{S}^n = T$.*

O operador $\mathcal{S}$ descrito acima é usualmente denotado por $\sqrt[n]{T}$ ou $T^{1/n}$ e chamado de raiz n -ésima de T . O resultado seguinte é de simples verificação e de grande utilidade no decorrer do trabalho. Para dar contexto a tal resultado, destacamos que a imagem de um operador compacto sobre um espaço de Banach é um conjunto separável.

Corolário 1.3.14. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

onde $\{x_n\}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}$ e $\{\lambda_n\}$ é uma sequência limitada de números reais não negativos então $T \geq 0$ e

$$T^{1/j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/j} \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

para todo $j = 1, 2, \dots$

Demonstração: Basta notar que

$$\mathcal{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/j} \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

é tal que $\mathcal{S}^j = T$ e que $\mathcal{S} \geq 0$. □

Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, definimos $|T| := \sqrt{T^*T}$. Observe que $|T| = T$ quando este é autoadjunto e positivo. O Teorema da Decomposição Polar garante que $T = U|T|$, com $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ definido por

$$U(|T|(x)) = T(x), \quad x \in \mathcal{H},$$

sendo $\mathcal{H}_1$ o fecho da imagem de $|T|$ em $\mathcal{H}$. Isto fornece uma caracterização da compactidade de T conforme o teorema seguinte.

Teorema 1.3.15. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Então T é um operador compacto se, e somente se, $|T|$ é um operador compacto.*

Definição 1.3.16. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $T \geq 0$, o traço de T é definido por*

$$\text{tr}(T) := \sum_{\alpha \in A} \langle T(x_\alpha), x_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Fechamos a seção introduzindo mais uma categoria de operadores. Começamos com uma definição.

Definição 1.3.17. *Seja $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é nuclear ou pertence a classe traço (trace-class) quando $\text{tr}(|T|) = \text{tr}(\sqrt{T^*T}) < \infty$.*

As propriedades básicas dos operadores nucleares que utilizamos estão listadas abaixo ([32]).

Teorema 1.3.18. *Nas condições da definição acima, valem as seguintes propriedades:*

- (i) *O conjunto dos operadores nucleares é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$;*
- (ii) *Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é um operador nuclear e $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ então a série $\sum_{\alpha \in A} \langle T(x_\alpha), x_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}$ é absolutamente convergente;*
- (iii) *Nas condições do item (ii), o valor da série independe da base utilizada;*
- (iv) *Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é nuclear então T é compacto.*

O espaço dos operadores nucleares é um espaço normado. Uma possível norma é a norma traço dada pela expressão

$$\|T\|_{tr} := \sum_{\alpha \in A} |\langle T(x_\alpha), x_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}|,$$

onde $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Como a expressão

$$\text{tr}(T) := \sum_{\alpha \in A} \langle T(x_\alpha), x_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}$$

é absolutamente convergente e independe da base é imediato que $\text{tr}(\cdot)$ é um funcional linear contínuo no espaço dos operadores nucleares, com norma menor ou igual a 1.

1.4 Teoria espectral para operadores compactos

Esta seção contém aqueles resultados da teoria espectral que se aplicam aos operadores utilizados no texto. As referências básicas onde tais resultados podem ser encontrados são [32, 48, 55, 63].

No caso de operadores compactos sobre espaços de Hilbert, o resultado mais básico é o teorema seguinte. Utilizamos o símbolo $\lambda_n(T)$ para representar um autovalor do operador T ou 0, o qual também será chamado de autovalor, sem prejuízos aos resultados.

Teorema 1.4.1 (Hilbert-Schmidt). *Seja T um operador compacto sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se T é autoadjunto então existe um conjunto ortonormal $\{x_n\}$ de $\mathcal{H}$ e $\{\lambda_n(T)\} \subset \mathbb{R}$ tais que*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

com $|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \dots \geq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(T) = 0$.

Corolário 1.4.2. *Nas condições do Teorema de Hilbert-Schmidt:*

- (i) *Se $T \geq 0$ então $\lambda_n(T) \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$;*
- (ii) *Se $\mathcal{H}$ for separável então podemos supor que $\{x_n\}$ é uma base ortonormal do espaço.*

Demonstração: Para provar (i) basta notar que quando $T(x) = \lambda(T)x$ e $x \neq 0$ então $0 \leq \langle T(x), x \rangle_{\mathcal{H}} = \lambda(T) \langle x, x \rangle_{\mathcal{H}}$. O item (ii) segue da equivalência entre a separabilidade de $\mathcal{H}$ e a existência de base ortonormal enumerável. $\square$

Se T é um operador compacto sobre um espaço de Hilbert, já sabemos que $|T|$ é autoadjunto, compacto e positivo. Logo, o Teorema de Hilbert-Schmidt é aplicável para este operador. Por simplicidade, denotamos os autovalores de $|T|$ por $s_n(T)$ e supomos que os mesmos estão ordenados na forma

$$s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots \geq 0,$$

levando-se em conta possíveis repetições relacionadas com a multiplicidade algébrica de cada um deles.

Utilizando-se o teorema anterior e algumas manipulações algébricas verifica-se que se T é compacto e autoadjunto, ou pelo menos normal, sobre um espaço de Hilbert então $\lambda_n(T^*) = \overline{\lambda_n(T)}$ e $s_n(T) = |\lambda_n(T)|$.

Na análise do decaimento dos autovalores de operadores compactos, alguns resultados mais finos de análise espectral são necessários. Um deles, que segue do teorema anterior, é descrito abaixo. Se $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, escrevemos $\text{Ker}(S) := \{x \in \mathcal{H} : S(x) = 0\}$.

Teorema 1.4.3. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ compacto e autoadjunto. Então*

$$s_{n+1}(T) = \min\{\|T - S\| : S \in F_n\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

onde F_n é o subconjunto de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ formado pelos operadores de posto no máximo n .

Demonstração: Note que

$$\|T - S\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \mathcal{H}}} \|(T - S)(x)\| \geq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in \text{Ker}(S)}} \|T(x)\|.$$

Se o posto de S for limitado por n , existe

$$y = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j \in \text{Ker}(S), \quad \|y\| = 1,$$

com $T(x_j) = \lambda_j(T)x_j$, de acordo com o Teorema 1.4.1. Logo, $\|T(y)\| \geq |\lambda_{n+1}(T)|$. Tomando agora o operador S dado por

$$S(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(T) \langle x, x_j \rangle_{\mathcal{H}} x_j, \quad x \in \mathcal{H},$$

terminamos a prova. □

O teorema abaixo é uma extensão de um resultado sobre melhor aproximação por operadores de posto finito introduzido por Reade ([49]). Este teorema é a base para o estudo feito no Capítulo 4.

Teorema 1.4.4. *Seja T um operador compacto e autoadjunto sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e considere sua representação*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

segundo o Teorema de Hilbert-Schmidt. Se $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é autoadjunto e tem posto j então

$$\|T - R\|_{tr} \geq \|T - T_j\|_{tr},$$

onde $T_j \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ é dado pela soma truncada

$$T_j(x) = \sum_{n=1}^j \lambda_n(T) \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Demonstração: Como o operador $T - R$ é compacto e autoadjunto, podemos considerar sua representação espectral da forma

$$(T - R)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T - R) \langle x, y_n \rangle_{\mathcal{H}} y_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

com $\{y_n\}$ ortonormal, segundo o Teorema de Hilbert-Schmidt. Definindo $A_0 = R$ e

$$A_p(x) = R(x) + \sum_{n=1}^p \lambda_n(T - R) \langle x, y_n \rangle_{\mathcal{H}} y_n, \quad x \in \mathcal{H}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

observamos que A_p tem posto no máximo $j + p$ e que

$$(T - A_p)(x) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \lambda_n(T - R) \langle x, y_n \rangle_{\mathcal{H}} y_n, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Aplicando o Teorema 1.4.3 chegamos a

$$|\lambda_{p+1}(T - R)| = \|T - A_p\| \geq \|T - T_{j+p}\| = |\lambda_{j+p+1}(T)|, \quad p = 0, 1, \dots$$

A prova segue da definição da norma traço. $\square$

Faremos rapidamente alguns comentários sobre as chamadas classes p de Schatten, para $p > 0$ ([32, p.87]). Um operador compacto T sobre $\mathcal{H}$ pertence à classe $\mathcal{S}_p$ quando

$$\sum_{n=1}^{\infty} (s_n(T))^p < \infty.$$

Quando $p \geq 1$, a classe $\mathcal{S}_p$ forma um espaço de Banach cuja norma é dada por

$$\|T\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} (s_n(T))^p \right)^{1/p}.$$

Em particular,

$$\langle S, T \rangle_{\mathcal{S}_2} := \text{tr}(ST^*), \quad S, T \in \mathcal{S}_2,$$

define um produto interno em $\mathcal{S}_2$ e o par $(\mathcal{S}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_2})$ é então um espaço de Hilbert.

Pode-se mostrar que a classe $\mathcal{S}_1$ é a classe dos operadores nucleares e que

$$\text{tr}(|T|) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T), \quad T \in \mathcal{S}_1.$$

Ainda, a classe $\mathcal{S}_2$ também coincide com a classe dos operadores do tipo Hilbert-Schmidt. Algumas propriedades básicas destes operadores estão registradas nos resultados finais da seção, para o caso em que o espaço de Hilbert em questão é $L^2(X, \nu)$.

Definição 1.4.5. *Considere um operador linear $T : L^2(X, \nu) \rightarrow L^2(X, \nu)$. Se existir uma função $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ para a qual*

$$T(f)(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X \text{ q.s.},$$

dizemos que T é um operador integral sobre $L^2(X, \nu)$. Neste caso, escrevemos $T = \mathcal{K}$ e dizemos que K é o núcleo gerador deste operador.

Quando o núcleo K pertence a $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$, o Teorema de Fubini e a desigualdade de Cauchy-Schwarz garantem que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(f)\|_2^2 &= \int_X |\mathcal{K}(f)(x)|^2 d\nu(x) \\ &= \int_X \left| \int_X K(x, y) f(y) d\nu(y) \right|^2 d\nu(x) \\ &\leq \int_X \left(\left(\int_X |K(x, y)|^2 d\nu(y) \right)^{1/2} \left(\int_X |f(y)|^2 d\nu(y) \right)^{1/2} \right)^2 d\nu(x) \\ &= \|K\|_2^2 \|f\|_2^2, \quad f \in L^2(X, \nu), \end{aligned}$$

ou seja, $\|\mathcal{K}\| \leq \|K\|_2$. Uma propriedade mais forte destes operadores é dada no Lema 1.4.6.

Lema 1.4.6. *Seja K um núcleo em $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$. O operador $\mathcal{K}$ é compacto.*

Demonstração: Seja $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma base ortonormal de $L^2(X, \nu)$. Note que $\{\phi_\alpha \otimes \overline{\phi_\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ é um conjunto ortonormal em $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$, onde

$$\phi_\alpha \otimes \overline{\phi_\beta}(x, y) := \phi_\alpha(x) \overline{\phi_\beta(y)}, \quad x, y \in X.$$

Logo, pela identidade de Parseval temos que

$$\mathcal{K}(\phi_\alpha) = \sum_{\beta \in A} \langle \mathcal{K}(\phi_\alpha), \phi_\beta \rangle_2 \phi_\beta, \quad \alpha \in A,$$

e

$$\mathcal{K}^*(\phi_\alpha) = \sum_{\beta \in A} \langle \mathcal{K}^*(\phi_\alpha), \phi_\beta \rangle_2 \phi_\beta = \sum_{\beta \in A} \langle \phi_\alpha, \mathcal{K}(\phi_\beta) \rangle_2 \phi_\beta, \quad \alpha \in A,$$

onde

$$\mathcal{K}^*(f)(x) = \int_X \overline{K(y, x)} f(y) d\nu(y), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X \text{ q.s..} \quad (1.4.1)$$

Como o Teorema de Fubini garante que

$$\langle \mathcal{K}(\phi_\beta), \phi_\alpha \rangle_2 = \langle K, \phi_\alpha \otimes \overline{\phi_\beta} \rangle_2, \quad \alpha, \beta \in A,$$

a desigualdade de Bessel implica que

$$\sum_{\alpha \in A} \|\mathcal{K}(\phi_\alpha)\|_2^2 = \sum_{\alpha, \beta \in A} |\langle \mathcal{K}(\phi_\alpha), \phi_\beta \rangle_2|^2 \leq \|K\|_2^2$$

e

$$\sum_{\alpha \in A} \|\mathcal{K}^*(\phi_\alpha)\|_2^2 = \sum_{\alpha, \beta \in A} |\langle \phi_\alpha, \mathcal{K}(\phi_\beta) \rangle_2|^2 \leq \|K\|_2^2,$$

uma vez que $K \in L^2(X \times X, \nu \times \nu)$. Com isso, $\|\mathcal{K}^*(\phi_\alpha)\|_2$ pode ser não nulo apenas para α em um conjunto enumerável $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. Desta forma, aplicando a identidade de Parseval mais uma vez temos

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{\alpha \in A} \langle \mathcal{K}(f), \phi_\alpha \rangle_2 \phi_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \langle f, \mathcal{K}^*(\phi_{\alpha_j}) \rangle_2 \phi_{\alpha_j}, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

Segue que

$$\left\| \mathcal{K}(f) - \sum_{j=1}^n \langle f, \mathcal{K}^*(\phi_{\alpha_j}) \rangle_2 \phi_{\alpha_j} \right\|_2^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \|\mathcal{K}^*(\phi_{\alpha_j})\|_2^2, \quad f \in L^2(X, \nu), \quad \|f\|_2 = 1.$$

Logo,

$$\mathcal{K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \langle \cdot, \mathcal{K}^*(\phi_{\alpha_j}) \rangle_2 \phi_{\alpha_j}.$$

O Teorema 1.3.8 garante que $\mathcal{K}$ é compacto. $\square$

Podemos provar que o conjunto $\{\phi_\alpha \otimes \overline{\phi_\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ que aparece na demonstração anterior é uma base ortonormal em $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ quando A é enumerável, ou seja, quando $L^2(X, \nu)$ é separável. Pode-se mostrar ainda o próximo resultado que complementa o anterior.

Teorema 1.4.7. *Seja $T \in \mathcal{L}(L^2(X, \nu))$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *T é do tipo Hilbert-Schmidt;*
- (ii) *Existe $K \in L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ tal que*

$$T(f)(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X \text{ q.s..}$$

Observe que no caso de T ser do tipo Hilbert-Schmidt, a representação de T dada pelo teorema acima e a prova do Lema 1.4.6 produzem as desigualdades:

$$\|T\|^2 \leq \text{tr}(T^*T) = \sum_{\alpha \in A} \|T(\phi_\alpha)\|_2^2 \leq \|K\|_2^2.$$

Lembramos que um núcleo K é *hermitiano* quando $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, $x, y \in X$. Dito isto, temos o seguinte resultado que finaliza o capítulo e motiva o estudo de versões do Teorema de Mercer apresentadas nos capítulos 2 e 3.

Teorema 1.4.8. *Seja K um núcleo hermitiano em $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$. Suponha que toda base ortonormal $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $L^2(X, \nu)$ é tal $\{\phi_\alpha \otimes \phi_\beta\}_{\alpha, \beta \in A}$ é base ortonormal de $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$. Existe uma sequência $\{\lambda_n(K)\} \subset \mathbb{R}$ e um conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ de $L^2(X, \nu)$ tais que*

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(K) \phi_n \otimes \overline{\phi_n},$$

com convergência em $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$.

Demonstração: Como K é hermitiano, a Equação (1.4.1) mostra que $\mathcal{K}$ é autoadjunto. O Lema 1.4.6 revela que $\mathcal{K}$ é compacto. O Teorema 1.4.1 garante que existe um conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ de $L^2(X, \nu)$ e uma sequência $\{\lambda_n(K)\} \subset \mathbb{R}$, convergente para 0, tais que $\mathcal{K}(\phi_n) = \lambda_n(K) \phi_n$ e

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(K) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

Usando o Lema de Zorn podemos completar, se necessário, o conjunto $\{\phi_n\}$ para obter uma base ortonormal de $L^2(X, \nu)$ que denotamos por $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Como o conjunto $\{\phi_\alpha \otimes \overline{\phi_\beta}\}_{\alpha, \beta \in A}$ é uma base ortonormal de $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$, a identidade de Parseval garante que

$$K = \sum_{\alpha, \beta \in A} \langle K, \phi_\alpha \otimes \overline{\phi_\beta} \rangle_2 \phi_\alpha \otimes \overline{\phi_\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n \otimes \overline{\phi_n},$$

uma vez que, pelo Teorema de Fubini,

$$\delta_{\alpha, \beta} \lambda_\alpha(\mathcal{K}) = \langle \mathcal{K}(\phi_\alpha), \phi_\beta \rangle_2 = \langle \mathcal{K}, \phi_\alpha \otimes \overline{\phi_\beta} \rangle_2, \quad \alpha, \beta \in A,$$

onde

$$\delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1 & , \alpha = \beta \\ 0 & , \alpha \neq \beta \end{cases}$$

e $\lambda_\alpha(\mathcal{K}) = 0$ para ϕ_α ortonormal a $\{\phi_n\}$. □

Núcleos positivos definidos

O objetivo deste capítulo é analisar propriedades espectrais do operador integral positivo $\mathcal{K} : L^2(X, \nu) \rightarrow L^2(X, \nu)$ quando K é um núcleo de Mercer (Definição (2.2.1)). Assim sendo, começamos com a apresentação do conceito de núcleo positivo definido e algumas propriedades relevantes para então apresentar o conceito de núcleo de Mercer na seção seguinte. A menos que algo seja dito em contrário, neste capítulo o conjunto X será um espaço topológico localmente compacto ou primeiro enumerável, munido de uma medida ν completa ou σ -finita. Lembramos que as condições impostas aqui são técnicas e relacionadas aos assuntos tratados no Capítulo 1.

2.1 Operadores integrais positivos

Como visto no Capítulo 1, um operador integral $\mathcal{K} : L^2(X, \nu) \rightarrow L^2(X, \nu)$ é positivo quando

$$\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 = \int_X \left(\int_X K(x, y) f(y) d\nu(y) \right) \overline{f(x)} d\nu(x) \geq 0, \quad f \in L^2(X, \nu). \quad (2.1.1)$$

A função K é chamada de *núcleo L^2 -positivo definido* ([8, 9, 24, 26, 27, 28]) quando o operador integral associado é limitado. Denotamos por $L^2PD(X, \nu)$ o conjunto dos núcleos L^2 -positivos definidos sobre (X, ν) .

Veremos no que segue que o conceito de núcleo L^2 -positivo definido está intimamente ligado ao conceito usual de núcleo positivo definido. Lembramos que a função

$K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ é um *núcleo positivo definido* ([3, 24, 34, 43]) quando

$$\sum_{i,j=1}^n \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) \geq 0, \quad (2.1.2)$$

para quaisquer $n \geq 1$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Denotamos o conjunto dos núcleos positivos definidos sobre X por $PD(X)$.

Vejamos três exemplos deste tipo de núcleo. Mais exemplos podem ser encontrados em [2], na seção final de [4], em [19, p.38] e no capítulo 2 de [24].

Exemplo 2.1.1. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ um elemento de $L^2(X, \nu)$. A função $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $K(x, y) = f(x)\overline{f(y)}$, $x, y \in X$, é claramente um núcleo L^2 -positivo definido e também um núcleo positivo definido.

Exemplo 2.1.2. ([4, p.23]) Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\Phi : X \rightarrow \mathcal{H}$ uma função qualquer. O núcleo $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, dado por

$$K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad x, y \in X,$$

é positivo definido. Um caso particular deste contexto é o seguinte: tomamos $\mathcal{H} = L^2([-1, 1], \nu)$, sendo ν a medida de Lebesgue usual, $X = [0, 1]$, e definimos $\Phi(x) := f_x$, onde $f_x(t) = \cos(tx)$ para cada $x \in X$ e $t \in [-1, 1]$. Neste caso,

$$\begin{aligned} K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_2 &= \int_{-1}^1 \cos(tx) \cos(ty) d\nu(t) \\ &= \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{x-y} + \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} & , x \neq y \in [0, 1] \\ 1 + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} & , x = y \in (0, 1] \\ 2 & , x = y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

é um núcleo positivo definido (contínuo).

Exemplo 2.1.3. Seja $X := [-1, 1]$ e defina

$$\phi_n(x) = \cos(n\pi x), \quad x \in X, \quad n = 1, 2, \dots$$

Note que $\{\phi_n\}$ é ortonormal em $L^2(X, \nu)$, quando ν é a medida de Lebesgue. Assim, o núcleo K dado por

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\pi x) \overline{\cos(n\pi y)}, \quad x, y \in X,$$

é um núcleo L^2 -positivo definido e positivo definido (contínuo).

As propriedades de núcleos positivos definidos mais usadas neste trabalho são descritas no lema seguinte ([3, 24, 34]).

Lema 2.1.4. *Seja K um núcleo positivo definido sobre X . Dados dois pontos x e y quaisquer em X , as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $K(x, x) \geq 0$, ou seja, K é diagonalmente não negativo;
- (ii) $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, ou seja, K é hermitiano;
- (iii) $|K(x, y)|^2 \leq K(x, x)K(y, y)$, isto é, K é diagonalmente dominante.

Em muitas aplicações ([60, 61]), trabalha-se em contextos em que $L^2(X, \nu)$ é visto como um conjunto de funções reais. Neste caso, adicionalmente à Condição (2.1.1) ou (2.1.2), exige-se que o núcleo K seja hermitiano (neste caso, simétrico).

A dominância na diagonal, dada pelo lema anterior, tem uma grande importância nos resultados do trabalho. Por isso, muitos resultados serão obtidos através de hipóteses variadas sobre a função κ definida por

$$\kappa(x) = K(x, x), \quad x \in X.$$

Por razões técnicas, vamos precisar de condições sobre um núcleo L^2 -positivo definido que garantam a validade do Lema 2.1.4. Sendo assim, encontramos um contexto onde os conceitos de núcleo positivo definido e de núcleo L^2 -positivo definido coincidem ([26]). Analisamos inicialmente o caso em que X é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ ([24]). Denotamos por $C_c(X)$ o conjunto das funções contínuas e limitadas em X , que se anulam fora de um subconjunto limitado de X . A expressão χ_A denota a função característica de um conjunto A .

Teorema 2.1.5. *Seja X um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$ munido da restrição da medida de Lebesgue usual ν . Todo núcleo K em $PD(X) \cap C(X \times X)$ que gera um operador integral limitado em $L^2(X, \nu)$ é um elemento de $L^2PD(X, \nu)$.*

Demonstração: Seja K um núcleo em $PD(X) \cap C(X \times X)$ para o qual $\mathcal{K}$ é limitado. Como $C_c(X)$ é denso em $L^2(X, \nu)$ ([31, p.217]), para mostrar que $\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 \geq 0$, $f \in L^2(X, \nu)$, basta mostrar que $\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 \geq 0$, $f \in C_c(X)$. Seja então $f \in C_c(X)$ e denote por X_f um subconjunto limitado de X para o qual $f(x) = 0$, $x \in X \setminus X_f$. Existe uma sequência $\{A_n\}$ de subconjuntos compactos de X_f para os quais $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(X_f \setminus A_n) = 0$ ([31, p.70]). Em particular, o núcleo K_f definido por $K_f(x, y) = K(x, y)f(x)f(y)$, $x, y \in X$, é uniformemente contínuo em $A_n \times A_n$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos a convergência de $\{K_f \chi_{A_n \times A_n}\}$ para K_f , em $L^1(X \times X, \nu \times \nu)$. Agora, para cada n , podemos encontrar um número real $r = r(n) > 0$ tal que $A_n \subset [-r/2, r/2]^m$. Escrevendo $[-r/2, r/2]^m =$

$\cup_{j=1}^{k^m} C_j^k$, onde $C_1^k, C_2^k, \dots, C_{k^m}^k$, são cubos m -dimensionais de lados r/k , paralelos aos eixos coordenados, podemos decompor A_n da seguinte forma

$$A_n = \cup_{j=1}^{k^m} A_j^k, \quad A_j^k \subset C_j^k, \quad A_j^k \cap A_l^k = \emptyset, \quad l \neq k.$$

Supondo, por simplicidade, que $A_j^k \neq \emptyset$, escolhendo $x_j^k \in A_j^k$, $j = 1, 2, \dots, k^m$, e definindo

$$g_k^n = \sum_{i,j=1}^{k^m} K(x_i^k, x_j^k) \overline{f(x_i^k)} f(x_j^k) \chi_{A_i^k \times A_j^k},$$

é fácil ver que $\{g_k^n\}$ converge uniformemente para $K_f \chi_{A_n \times A_n}$ em $A_n \times A_n$, quando $k \rightarrow \infty$. Ainda, como $K \in PD(X)$, segue que $g_k^n(x, y) \geq 0$, $x, y \in A_n$. Considerando o fato de $K_f \chi_{A_n \times A_n}$ ser limitado e $\nu(A_n) < \infty$, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada para concluir que

$$\begin{aligned} \int_X \int_X K_f(x, y) d\nu(x) d\nu(y) &= \int_{X_f} \int_{X_f} K_f(x, y) d\nu(x) d\nu(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} \int_{A_n} K_f(x, y) d\nu(x) d\nu(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{A_n} \int_{A_n} g_k^n(x, y) d\nu(x) d\nu(y) \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Segue que, $K \in L^2 PD(X, \nu)$. □

Um raciocínio semelhante pode ser usado para provar a seguinte generalização.

Corolário 2.1.6. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff, localmente compacto e munido de uma medida de Radon ν . Todo núcleo K em $PD(X) \cap C(X \times X)$ que gera um operador integral limitado em $L^2(X, \nu)$ é um elemento de $L^2 PD(X, \nu)$.*

Demonstração: É suficiente repetir a prova do teorema anterior tomando-se A_n compacto ([31, p.217]) e $A_n^k = K_f^{-1}(C_j^k) \cap A_n$ onde cada C_j^r é um quadrado de lado r/k em $\mathbb{C}$ e a família $\{C_j^r\}$ é dois a dois disjunta e cobre a imagem de $A_n \times A_n$ por K_f . □

A recíproca do teorema anterior vale em um contexto geral, mas restrições sobre a medida são necessárias. Se X é um espaço topológico munido de uma medida de Borel (completa ou σ -finita) ν , dizemos que ν é uma *medida estritamente positiva* quando: todo aberto não vazio de X possui medida não nula e todo ponto de X possui uma vizinhança aberta com medida finita. Note que, neste caso, todo compacto de X possui medida finita. Muitos dos resultados desenvolvidos neste trabalho vão utilizar esta definição, mas o leitor deve estar avisado de que alguns resultados podem ser reformulados para tratarem de casos mais gerais. Por uma questão de uniformidade,

não vamos nos prender a tais detalhes aqui (veja o Teorema 2.3 em [25] para um exemplo). Dito isto, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.7. *Seja X um espaço topológico munido de uma medida estritamente positiva ν . Então*

$$L^2PD(X, \nu) \cap C(X \times X) \subset PD(X).$$

Demonstração: Sejam $K \in L^2PD(X, \nu) \cap C(X \times X)$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ pontos em X e $c_1, c_2, \dots, c_n$ em $\mathbb{C}$. Da continuidade de K e do fato de $X \times X$ estar munido da topologia produto segue que, para cada $\epsilon > 0$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, existe um conjunto aberto X_j^ϵ tal que $x_j \in X_j^\epsilon$ e

$$|K(x, y) - K(x_i, x_j)| < \epsilon, \quad x \in X_i^\epsilon, \quad y \in X_j^\epsilon, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Como ν é estritamente positiva, pode-se supor que $0 < \nu(X_j^\epsilon) < \infty$, $j = 1, 2, \dots, n$. Assim, integrando esta expressão, obtemos

$$\frac{1}{\nu(X_i^\epsilon)\nu(X_j^\epsilon)} \int_{X_i^\epsilon} \int_{X_j^\epsilon} |K(x, y) - K(x_i, x_j)| d\nu(x) d\nu(y) < \epsilon.$$

Em particular,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\nu(X_i^\epsilon)\nu(X_j^\epsilon)} \int_{X_i^\epsilon} \int_{X_j^\epsilon} K(x, y) d\nu(x) d\nu(y) = K(x_i, x_j).$$

Tomando as funções

$$f_\epsilon := \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\mu(X_j^\epsilon)} \chi_{X_j^\epsilon}, \quad \epsilon > 0,$$

que estão em $L^2(X, \nu)$, a desigualdade

$$0 \leq \langle \mathcal{K}(f_\epsilon), f_\epsilon \rangle_2 = \sum_{i,j=1}^n \bar{c}_i c_j \frac{1}{\nu(X_i^\epsilon)\nu(X_j^\epsilon)} \int_{X_i^\epsilon} \int_{X_j^\epsilon} K(x, y) d\nu(x) d\nu(y)$$

implica que

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n \bar{c}_i c_j K(x_i, x_j),$$

ou seja, $K \in PD(X)$. □

2.2 Teoria de Mercer

Faremos agora um estudo de um tipo especial de núcleo positivo definido, os chamados núcleos de Mercer. O diferencial entre o que é apresentado aqui e o que é encontrado

em outras fontes na literatura é o contexto que adotamos no início do capítulo, no qual nenhuma teoria similar foi desenvolvida até agora.

Os núcleos de Mercer recebem este nome em homenagem a J. Mercer, autor do clássico artigo [43] que deu origem a vários estudos de propriedades espectrais de operadores gerados por núcleos positivos definidos no caso em que $X = [0, 1]$. Em particular, deu origem à primeira versão de um teorema que recebeu seu nome.

Vários artigos da literatura estão relacionados com este trabalho de Mercer. Um breve comentário sobre estas referências segue abaixo. As referências [25, 26, 29, 30] contêm ou citam os resultados que descrevemos nesta seção. Citamos ainda nossos trabalhos desenvolvidos anteriormente que também possuem alguma conexão com o Teorema de Mercer ([27, 28]). Estes, por sua vez, foram motivados pelos artigos [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 17, 37, 38, 39, 42, 60] e referências lá contidas. Trabalhos envolvendo versões do Teorema de Mercer para núcleos não necessariamente positivos definidos, principalmente no contexto em que $X = [0, 1]$, foram desenvolvidos por Dostanić ([21, 22, 23]). Embora não seja o foco deste trabalho, acreditamos que os resultados obtidos aqui podem ser usados para estender alguns dos resultados destas referências para um contexto mais geral. Finalmente, destacamos uma aplicação do Teorema de Mercer na expansão de Karhunen-Loève (veja [4, p.70] por exemplo).

Enfatizamos mais uma vez que o principal diferencial entre o aqui obtido e os demais resultados do mesmo tipo encontrados na literatura é o contexto tratado, ou seja, o fato do domínio X ser um espaço topológico, localmente compacto ou primeiro enumerável, munido de uma medida estritamente positiva. Os trabalhos de Buescu ([5]) e Kadota ([37]) visam o caso em que X é um intervalo real enquanto que Menegatto ([42]) trata do contexto da esfera euclidiana unitária. Por outro lado, Sun ([60]) trata de um caso especial de espaço métrico e Kühn ([38]) trata de um contexto em que X é um espaço topológico de Hausdorff compacto e com medida finita. Observamos que em todos os casos citados, a medida é estritamente positiva. O contexto que adotamos é em parte motivado pelos teoremas 1.1.4 e 1.1.5. A menos que algo seja dito em contrário, supomos no restante da seção, e do trabalho, que X está munido de uma medida ν estritamente positiva.

Antes de apresentarmos nossa versão do Teorema de Mercer, algumas informações e notações adicionais fazem-se necessárias. Todas as referências já citadas sobre o trabalho de Mercer indicam que, sob certas condições sobre K , podemos analisar propriedades espectrais do operador $\mathcal{K}$. Neste sentido, observe que, se $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ é um núcleo

qualquer e a função $x \in X \rightarrow K_x := K(x, \cdot) \in L^2(X, \nu)$ é contínua, então a fórmula

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(f)(x) &= \int_X K(x, y) f(y) d\nu(y) \\ &= \int_X f(y) K_x(y) d\nu(y) = \Phi_f(\overline{K_x}), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X, \nu), \end{aligned}$$

onde $\Phi_f(g) = \langle f, g \rangle_2$, $g \in L^2(X, \mu)$, mostra que a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $C(X)$. Além disso, quando $K \in L^2PD(X, \nu) \cap L^2(X \times X, \nu \times \nu)$, o operador $\mathcal{K}$ é autoadjunto e do tipo Hilbert-Schmidt (compacto). Isto implica que, após uma aplicação do Teorema 1.4.1, o operador integral $\mathcal{K}$ tem representação espectral da forma

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(X, \nu), \quad (2.2.1)$$

com $\{\phi_n\}$ ortonormal em $L^2(X, \nu)$. Ainda, o conjunto $\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}$ está em $C(X)$ e, nas condições do Teorema 1.4.8, vale a igualdade

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n \otimes \overline{\phi_n}.$$

O objetivo do restante da seção é obter informações adicionais sobre essas duas séries via uma versão do Teorema de Mercer. A nossa definição de núcleo de Mercer vem a seguir.

Definição 2.2.1. *Um núcleo de Mercer K (sobre (X, ν)) é um núcleo positivo definido da forma*

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X, \quad (2.2.2)$$

onde $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ é uma sequência não crescente e convergente para 0, $\{\phi_n\}$ é um conjunto $L^2(X, \nu)$ -ortonormal e cada elemento da sequência $\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}$ é uma função contínua.

A Expressão (2.2.2) é chamada de representação (ou série) de Mercer de K e o conjunto $\{\phi_n\}$ é um conjunto gerador de K .

Em muitas aplicações ([4, p.22],[19]), é comum o uso da definição anterior da seguinte forma: considera-se a função $\Phi : X \rightarrow l^2$ dada por

$$\Phi(x) = (\lambda_1(\mathcal{K})^{1/2} \phi_1(x), \lambda_2(\mathcal{K})^{1/2} \phi_2(x), \dots), \quad x \in X,$$

e o núcleo de Mercer K toma a forma

$$K(x, y) = \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X.$$

Ainda, como

$$\begin{aligned}\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{l^2}^2 &= \langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle_{l^2} + \langle \Phi(y), \Phi(y) \rangle_{l^2} - \langle \Phi(x), \Phi(y) \rangle_{l^2} - \langle \Phi(y), \Phi(x) \rangle_{l^2} \\ &= K(x, x) + K(y, y) - K(x, y) - K(y, x), \quad x, y \in X,\end{aligned}$$

no caso em que X é primeiro enumerável, temos que a função Φ é contínua se, e somente se K o for.

Um detalhe importante sobre os núcleos de Mercer, que justifica a notação usada na definição, é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 2.2.2. *Seja K um núcleo de Mercer representado pela Expressão (2.2.2). As imagens dos operadores compactos e positivos $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}^{1/2}$ possuem apenas funções contínuas. Além disso,*

$$\mathcal{K}(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X, \quad (2.2.3)$$

e

$$\mathcal{K}^{1/2}(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X. \quad (2.2.4)$$

A Série (2.2.2) converge absoluta e uniformemente em subconjuntos compactos de $X \times X$ enquanto que (2.2.3) e (2.2.4) convergem absoluta e uniformemente em subconjuntos compactos de X .

Demonstração: Note que, para cada $x \in X$ fixo, a identidade de Parseval implica na expressão

$$\|K_x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^2 |\phi_n(x)|^2 \leq \lambda_1(\mathcal{K}) \kappa(x) < \infty,$$

ou seja, K_x está em $L^2(X, \nu)$. Isto garante que o operador integral $\mathcal{K}$ está bem definido em $L^2(X, \nu)$. Usando a continuidade do produto interno de $L^2(X, \nu)$ chegamos a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(f)(x) = \langle f, \overline{K_x} \rangle_2 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^j \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X.\end{aligned}$$

Isto implica que $\mathcal{K}$ é compacto (positivo) e que $\lambda_n(\mathcal{K})$ é um autovalor deste operador. Segue também que K é L^2 -positivo definido. Para $r \geq 1/2$ e $j \geq 1$, a desigualdade de

Cauchy-Schwarz garante que

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x) \right|^2 &\leq \sum_{n=j}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle_2|^2 \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{2r} |\phi_n(x)|^2 \\
 &\leq \lambda_1(\mathcal{K})^{2r-1} \|f\|_2^2 \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(x)|^2 \\
 &\leq \lambda_1(\mathcal{K})^{2r-1} \|f\|_2^2 \kappa(x), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X.
 \end{aligned}$$

Isso prova que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X,$$

converge uniformemente em conjuntos onde K é limitado. Em particular, esta série converge absoluta e uniformemente em subconjuntos compactos de X . Como

$$\mathcal{K}^{1/2}(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X,$$

segue, do Teorema 1.1.6, que as imagens de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}^{1/2}$ possuem apenas funções contínuas. Observando que, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)} \right|^2 \leq \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(x)|^2 \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(y)|^2, \quad x, y \in X,$$

uma aplicação do Teorema de Dini garante que a Série (2.2.2) converge absoluta e uniformemente em subconjuntos compactos de $X \times X$. $\square$

As condições sobre K citadas anteriormente são de difícil verificação quando X é um espaço topológico qualquer. Ficará claro, no final deste e do próximo capítulo, que a parte mais difícil é a verificação da continuidade das funções na imagem de $\mathcal{K}$, mesmo quando o núcleo K é contínuo e pertence a $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ e X é um espaço métrico munido de uma estrutura de compacidade como a descrita em [60]. Por isso, o Teorema 2.2.3 apresenta uma forma mais acessível para fazer tal verificação. Uma primeira versão deste resultado surgiu em [5], com o objetivo de complementar resultados de [46, 47], enquanto que a versão apresentada aqui surgiu gradativamente, durante a elaboração dos trabalhos [25, 26, 29]. Esta versão estende as versões citadas e alguns resultados de [38, 39].

Teorema 2.2.3. *Seja K um núcleo contínuo em $L^2PD(X, \nu)$. Se a função κ está em $L^1(X, \nu)$ então a imagem de $\mathcal{K}$ possui apenas funções contínuas.*

Demonstração: Provaremos o teorema tão somente no caso em que X é primeiro enumerável, já que o outro caso seguirá do Teorema 3.2.7. Supomos então as condições do enunciado e que X é primeiro enumerável. O Teorema 2.1.7 garante que K é positivo definido e o Lema 2.1.4 produz a desigualdade

$$|K(x, y)|^2 \leq \kappa(x)\kappa(y), \quad x, y \in X.$$

Isto implica que a função $y \in X \rightarrow K_x(y) = K(x, y)$, $x \in X$, está em $L^2(X, \nu)$. Para finalizar, vamos mostrar que a função $x \in X \rightarrow K_x \in L^2(X, \nu)$ é (sequencialmente) contínua. Tomamos uma sequência $\{x_n\}$ em X convergente para $x_0 \in X$. A continuidade de K garante a convergência da sequência $\{K(x_n, y)\}$ para $K(x_0, y)$, para $y \in X$ fixado. A desigualdade anterior produz a limitação

$$\begin{aligned} |K(x_n, y) - K(x_0, y)|^2 &\leq |K(x_n, y)|^2 + 2|K(x_n, y)||K(x_0, y)| + |K(x_0, y)|^2 \\ &\leq \kappa(y)(\kappa(x_n) + \kappa(x_0)) + 2\kappa(y)\kappa(x_n)^{1/2}\kappa(x_0)^{1/2} \\ &\leq 4 \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \{\kappa(x_m)\} \kappa(y), \quad y \in X. \end{aligned}$$

Uma aplicação do Teorema da Convergência Dominada nos leva a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K_{x_n} - K_{x_0}\|_2^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |K_{x_n}(y) - K_{x_0}(y)|^2 d\nu(y) = 0.$$

A continuidade sequencial de $x \in X \mapsto K_x \in L^2(X, \nu)$ segue. Para X primeiro enumerável, o teorema está provado. $\square$

Como o Lema 1.4.6 e a primeira desigualdade da prova do Teorema 2.2.3 (dominância na diagonal) garantem a compacidade de $\mathcal{K}$, temos uma motivação para o contexto do Teorema 2.2.4 a seguir. Recomendamos ao leitor ficar atendo ao uso implícito do Teorema 1.1.6 nos argumentos desta seção.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Mercer I). *Um núcleo contínuo K em $L^2PD(X, \nu)$, para o qual $\mathcal{K}$ é compacto e possui imagem em $C(X)$, é um núcleo de Mercer.*

Demonstração: Um núcleo K nas condições mencionadas é hermitiano. Como $\mathcal{K}$ é compacto e autoadjunto podemos concluir que $\mathcal{K}$ tem uma representação em série $L^2(X, \nu)$ -convergente da forma

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(X, \nu),$$

com $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ formado por autovalores não negativos e decrescente para 0, enquanto que $\{\phi_n\}$ é $L^2(X, \nu)$ -ortonormal e cada $\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n$ é contínua. Definindo o núcleo auxiliar

K_j , $j \geq 1$, por

$$K_j(x, y) = K(x, y) - \sum_{n=1}^j \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X,$$

a representação espectral de $\mathcal{K}$ implica que $K_j \in L^2PD(X, \nu) \cap C(X \times X)$. O Teorema 2.1.7 garante que K_j é na verdade positivo definido. Logo, $K_j(x, x) \geq 0$, $x \in X$, ou seja,

$$\sum_{n=1}^j \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(x)|^2 \leq K(x, x), \quad x \in X.$$

Seja Y um subconjunto compacto de X e $M_Y := \sup_{z \in Y} K(z, z)$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$\left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)} \right|^2 \leq M_Y \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(y)|^2, \quad y \in X, \quad x \in Y.$$

Para cada $x \in Y$, o critério de Cauchy para convergência e a continuidade de K implicam que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad y \in X,$$

é uniformemente convergente em subconjuntos compactos de X , para uma função G_x em $C(X) \cap L^2(X, \nu)$, com

$$\|G_x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^2 |\phi_n(x)|^2 \leq \lambda_1(\mathcal{K}) M_Y.$$

Tomando agora $f \in L^2(X, \nu)$ e usando a continuidade do produto interno, obtemos

$$\int_X G_x(y) f(y) d\nu(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad x \in Y, \quad (2.2.5)$$

e a desigualdade

$$\left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x) \right|^2 \leq \lambda_1(\mathcal{K}) M_Y \sum_{n=j}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle_2|^2, \quad x \in Y,$$

verifica-se. Logo, a Série (2.2.5) é uniformemente convergente em Y para a restrição da função contínua $\mathcal{K}(f)$ a Y . Com isso, escolhendo para cada $x \in Y$ a função $f_x = \overline{K_x - G_x}$, chegamos à igualdade

$$0 = \mathcal{K}(f_x)(x) - \int_X G_x(y) f_x(y) d\nu(y) = \|K_x - G_x\|_2^2, \quad x \in Y.$$

Usando agora a continuidade de $K_x - G_x$, $x \in Y$, o Teorema 1.2.5 e lembrando as hipóteses sobre X e ν , chegamos a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)} = K(x, y), \quad x \in Y, \quad y \in X.$$

Como Y é arbitrário, segue que K é um núcleo de Mercer. $\square$

O teorema seguinte é uma versão do Teorema de Mercer que generaliza a versão de [46] no caso em que X é um intervalo. Esta versão surgiu em uma tentativa de estender o Teorema 2.2.4 e aparece no trabalho que desenvolvemos em [25] no caso em que X é um espaço métrico. Tal resultado produz uma representação em série para certos núcleos não positivos definidos, semelhante à representação dos núcleos de Mercer. A expressão $\operatorname{Re} z$ denota a parte real de $z \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.2.5. *Seja K um núcleo contínuo para o qual a função κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$. Suponha que $\mathcal{K}$ possui uma representação espectral $L^2(X, \nu)$ -convergente da forma*

$$\mathcal{K}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(X, \nu), \quad (2.2.6)$$

sendo $\{\phi_n\}$ um conjunto $L^2(X, \nu)$ -ortonormal, com $\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}$ formado por funções contínuas e $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ inteiramente contida em um setor circular de centro na origem de $\mathbb{C}$ e de ângulo central menor que π . Então K pertence a $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ e possui uma representação em série da forma

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X,$$

absoluta e uniformemente convergente em subconjuntos compactos de $X \times X$.

Demonstração: Antes de começar a prova propriamente dita, precisamos normalizar o contexto. Escolhemos dois números reais $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $l > 0$ de modo que o conjunto $\{e^{i\alpha} \lambda_n(\mathcal{K}) : n = 1, 2, \dots\}$ dos autovalores do operador $P := e^{i\alpha} \mathcal{K}$ esteja contido em um setor circular na origem de $\mathbb{C}$, com ângulo central menor que $\pi - 2\arccot(l)$, limitado pelos raios $t = \pm ls$, $s \geq 0$. Escrevemos então $\alpha_n = e^{i\alpha} \lambda_n(\mathcal{K})$, $n = 1, 2, \dots$, para simplificar notação e tomamos $T := (P + P^*)/2$. Claramente, T é um operador integral gerado pelo núcleo

$$L(x, y) = \frac{e^{i\alpha} K(x, y) + e^{-i\alpha} \overline{K(x, y)}}{2}, \quad x, y \in X,$$

cuja representação espectral é da forma

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \alpha_n) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

O núcleo L é contínuo e a aplicação $x \in X \rightarrow L(x, x)$ pertence a $L^1(X, \nu)$ uma vez que K é contínuo e κ está em $L^1(X, \nu)$. Ainda, a representação de T garante que L é também L^2 -positivo definido. Logo, os teoremas 2.2.3 e 2.2.4 podem ser aplicados para concluirmos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \alpha_n) |\phi_n(x)|^2 = L(x, x), \quad x \in X, \quad (2.2.7)$$

com convergência uniforme em subconjuntos compactos de X . Das desigualdades

$$|\lambda_n(\mathcal{K})|^2 = |\alpha_n|^2 \leq (\operatorname{Re} \alpha_n)^2 (1 + l^2), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2.8)$$

e de Cauchy-Schwarz, chegamos a

$$\left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)} \right|^2 \leq (1 + l^2) \sum_{n=j}^{\infty} (\operatorname{Re} \alpha_n) |\phi_n(x)|^2 \sum_{n=j}^{\infty} (\operatorname{Re} \alpha_n) |\phi_n(y)|^2, \quad x, y \in X.$$

Isto implica na convergência absoluta e uniforme da série nas duas variáveis, em subconjuntos compactos de $X \times X$, para uma função contínua. Usando argumentos semelhantes aos aplicados no final da prova do Teorema 2.2.4, provamos que a série converge de fato para K . $\square$

O teorema anterior permite ainda a conclusão de mais propriedades do operador $\mathcal{K}$, as quais registramos abaixo.

Corolário 2.2.6. *Nas condições do Teorema 2.2.5, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *A imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $C(X) \cap L^2(X, \nu)$;*
- (ii) *O operador $\mathcal{K}$ é normal;*
- (iii) *A Série (2.2.6) é absoluta e uniformemente convergente em subconjuntos compactos de X .*

Demonstração: A Série (2.2.6) e cálculos diretos implicam que $\mathcal{K}$ é normal. O item (ii) segue. Ainda, se $Y \subset X$ é compacto então

$$\left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x) \right|^2 \leq \sqrt{1 + l^2} \|\mathcal{K}\| \sup_{y \in Y} L(y, y) \sum_{n=j}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle_2|^2, \quad x \in Y,$$

contanto que $f \in L^2(X, \nu)$. Isto garante a convergência uniforme da Série (2.2.6) em Y . Como Y é arbitrário, isto também implica na continuidade de $\mathcal{K}(f)$. A prova está completa. $\square$

Informamos o leitor que algumas condições impostas nos resultados desta seção podem ser omitidas quando X é compacto ou possui medida finita.

O resultado seguinte dá informações sobre o decaimento dos autovalores do operador integral $\mathcal{K}$.

Corolário 2.2.7. *Nas condições do Teorema 2.2.5, as afirmações que seguem são verdadeiras:*

(i) *Existem $\alpha \in [0, 2\pi]$ e $l > 0$ tais que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(\mathcal{K}) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(\mathcal{K})| \leq \sqrt{1+l^2} \int_X \operatorname{Re}(e^{i\alpha} K(x, x)) d\nu(x);$$

(ii) *O operador $\mathcal{K}$ é nuclear. Em particular, $\mathcal{K}$ pertence a $\mathcal{S}_p$, $p \geq 1$;*

(iii) *Se os autovalores de $\mathcal{K}$ forem ordenados na forma $|\lambda_n(\mathcal{K})| \geq |\lambda_{n+1}(\mathcal{K})|$, $n = 1, 2, \dots$, então*

$$|\lambda_n(\mathcal{K})| \leq \frac{\sqrt{1+l^2}}{n} \int_X \operatorname{Re}(e^{i\alpha} K(x, x)) d\nu(x), \quad n = 1, 2, \dots;$$

(iv) *Sob as condições em (iii), $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1})$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Escolhendo α e l como na prova do Teorema 2.2.5 podemos integrar a Equação (2.2.7) e obter

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \alpha_n = \int_X L(x, x) d\nu(x).$$

Usando agora a Desigualdade (2.2.8) chegamos a

$$\begin{aligned} |\lambda_1(\mathcal{K})| + \dots + |\lambda_n(\mathcal{K})| &\leq \sqrt{1+l^2} (\operatorname{Re} \alpha_1 + \dots + \operatorname{Re} \alpha_n) \\ &\leq \sqrt{1+l^2} \int_X L(x, x) d\nu(x). \end{aligned}$$

O item (i) segue. A afirmação (ii) é consequência da fórmula em (i). Sob as condições impostas em (iii), a desigualdade anterior pode ser refinada como segue

$$n|\lambda_n(\mathcal{K})| \leq \sqrt{1+l^2} \int_X L(x, x) d\nu(x),$$

o que prova a desigualdade em (iii). O item (iv) segue de (i) e do Corolário 1.1.12. $\square$

Para finalizar a seção, destacamos que os resultados aqui apresentados incluem ou melhoram aqueles encontrados em [5, 24]. Os mesmos aparecem descritos nos artigos [25, 26].

2.3 Convergência em L^p

Caracterizamos agora os núcleos de Mercer K para os quais a função κ pertence a $L^{p/2}(X, \nu)$, para algum $p \geq 1$. Neste caso, obtemos ainda a convergência da Série (2.2.2) e estimativas para a norma de K , no sentido de $L^p(X \times X, \nu \times \nu)$. Para facilitar a escrita dos resultados, fazemos a definição seguinte.

Definição 2.3.1. *Se p é um número real positivo, o conjunto $\mathcal{A}_p(X, \nu)$ é o conjunto dos núcleos de Mercer K sobre (X, ν) para os quais a função κ é um elemento de $L^{p/2}(X, \nu)$.*

Esta definição produz o resultado abaixo.

Teorema 2.3.2. *Seja K um núcleo de Mercer como em (2.2.2). Se K é um elemento de $\mathcal{A}_p(X, \nu)$ então K pertence a $L^p(X \times X, \nu \times \nu)$ e*

$$\|K\|_p \leq \|\kappa\|_{p/2}.$$

Se $p \geq 1$, a convergência em (2.2.2) vale na norma de $L^p(X \times X, \nu \times \nu)$.

Demonstração: Seja $p > 0$. A desigualdade

$$\begin{aligned} \int_X \int_X |K(x, y)|^p d\nu(x) d\nu(y) &\leq \int_X \kappa(x)^{p/2} \kappa(y)^{p/2} d\nu(x) d\nu(y) \\ &= \left(\int_X \kappa(x)^{p/2} d\nu(x) \right)^2 \end{aligned}$$

revela que $K \in L^p(X \times X, \nu \times \nu)$ quando $\kappa \in L^{p/2}(X, \nu)$. Podemos concluir ainda a desigualdade do enunciado do teorema. Para completar a prova, defina

$$g_n(x, y) = \sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) |\phi_j(x)| |\phi_j(y)|, \quad x, y \in X, \quad n = 1, 2, \dots$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz implica que

$$\begin{aligned} |g_n(x, y)|^p &= \left| \sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) |\phi_j(x)| |\phi_j(y)| \right|^{2p/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) |\phi_j(x)|^2 \right)^{p/2} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) |\phi_j(y)|^2 \right)^{p/2} \\ &\leq \kappa(x)^{p/2} \kappa(y)^{p/2}, \quad x, y \in X. \end{aligned}$$

Segue que a sequência $\{|g_n|^p\}$ é limitada, não crescente e pontualmente convergente para 0. Logo,

$$\int_X \int_X \left| K(x, y) - \sum_{j=1}^n \lambda_j(\mathcal{K}) \phi_j(x) \overline{\phi_j(y)} \right|^p d\nu(x) d\nu(y) \leq \int_X \int_X |g_n(x, y)|^p d\nu(x) d\nu(y),$$

e o Teorema da Convergência Monótona garante que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j(\mathcal{K}) \phi_j \otimes \overline{\phi_j} - K \right\|_p = 0.$$

Se $p \geq 1$ então $L^p(X \times X, \nu \times \nu)$ é um espaço de Banach e a prova está completa. $\square$

Definindo-se

$$\kappa_n(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(\mathcal{K}) |\phi_j(x)|^2, \quad x \in X,$$

observa-se na prova do resultado anterior que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\kappa_n - \kappa\|_{p/2} = 0$.

Um contexto especial no qual tem-se automaticamente satisfeitas as condições acima ocorre quando X é um subconjunto Lebesgue-mensurável de $\mathbb{R}^m$ e existe β tal que $\beta p/2 > m$ e $\sup_{x \in X} |x|^\beta \kappa(x) < \infty$. De fato, se $K \in PD(X) \cap C(X \times X)$ então a função κ é limitada e pertence a $L^{p/2}(X, \nu)$ (veja o Teorema 1.2.9). Em particular $K \in \mathcal{A}_p(X, \nu)$.

2.4 O operador $\mathcal{K}^r$

Para finalizar o capítulo, faremos a verificação de propriedades de potências generalizadas do operador $\mathcal{K}$, quando K é oriundo de $\mathcal{A}_p(X, \nu)$. Lembramos que a existência de $\mathcal{K}^{1/i}$, $i = 2, 3, \dots$, é garantida por resultados conhecidos sobre espaços de Hilbert. Entretanto, definimos o operador $\mathcal{K}^r : L^2(X, \nu) \rightarrow L^2(X, \nu)$, $r > 0$, por

$$\mathcal{K}^r(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X, \nu). \quad (2.4.1)$$

Podemos verificar que $\mathcal{K}^{i/j} = (\mathcal{K}^i)^{1/j}$, $i, j = 1, 2, \dots$, com $\mathcal{K}^i = \mathcal{K} \circ \mathcal{K} \circ \dots \circ \mathcal{K}$ (i vezes).

Precisamos destacar aqui que os resultados sobre $\mathcal{K}^{1/2}$ e também sobre $\mathcal{K}^{m/2}$, $m = 2, 3, \dots$, possuem aplicações importantes na teoria de espaços de Hilbert de reprodução apresentada no Capítulo 3 ([19, 29, 30, 60, 61]). Estes resultados serão úteis no estudo do decaimento de autovalores que faremos no Capítulo 4. Na realidade, estes fatos são a motivação para a apresentação dos resultados desta seção. Começamos com um teorema que traz informações sobre a imagem de $\mathcal{K}^r$.

Teorema 2.4.1. *Sejam K um núcleo de Mercer sobre (X, ν) e $r \geq 1/2$. Valem as seguintes afirmações:*

- (i) *A imagem de $\mathcal{K}^r$ é um subconjunto de $L^2(X, \nu) \cap C(X)$ e a Série (2.4.1) converge absoluta e uniformemente em subconjuntos compactos de X ;*
(ii) *Se $f \in L^2(X, \nu)$ então*

$$|\mathcal{K}^r(f)(x)| \leq \|f\|_2 \lambda_1(\mathcal{K})^{(r-1/2)} \kappa(x)^{1/2}, \quad x \in X;$$

- (iii) *Se κ é limitada então a norma de $\mathcal{K}^r : L^2(X, \nu) \rightarrow C(X)$ é no máximo*

$$\lambda_1(\mathcal{K})^{(r-1/2)} \sup_{x \in X} \kappa(x)^{1/2};$$

- (iv) *Se $\lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0$ então*

$$|\phi_n(x)| \leq \frac{\lambda_1(\mathcal{K})^{(r-1/2)}}{\lambda_n(\mathcal{K})^r} \kappa(x)^{1/2}, \quad x \in X;$$

- (v) *Para cada $p \geq 1$,*

$$\|\mathcal{K}^r(f)\|_p \leq \left(\int_X \kappa(x)^{p/2} d\nu(x) \right)^{1/p} \lambda_1(\mathcal{K})^{(r-1/2)} \|f\|_2, \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X;$$

- (vi) *Se $p \geq 1$ e $\lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0$ então*

$$\|\phi_n\|_p \leq \frac{\lambda_1(\mathcal{K})^{(r-1/2)}}{\lambda_n(\mathcal{K})^r} \left(\int_X \kappa(x)^{p/2} d\nu(x) \right)^{1/p}, \quad x \in X;$$

- (vii) *Se K é um elemento de $\mathcal{A}_p(X, \nu)$ e $p \geq 1$ então a Série (2.4.1) converge em $L^p(X, \nu)$. Ainda, a norma de $\mathcal{K}^r : L^2(X, \nu) \rightarrow L^p(X, \nu)$ é no máximo*

$$\lambda_1(\mathcal{K})^{(r-1/2)} \|\kappa\|_{p/2}^2.$$

Demonstração: Essencialmente, a prova é baseada na Fórmula (2.4.1). Se $\lambda_n(\mathcal{K}) > 0$ então ϕ_n é uma autofunção contínua de $\mathcal{K}$. Com isso, a continuidade de $\mathcal{K}^r(f)$, $f \in L^2(X, \nu)$, segue se mostrarmos que a Série (2.4.1) é uniformemente convergente em subconjuntos compactos de X . Mas isso segue das desigualdades

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x) \right|^p &\leq \left(\sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{2r} |\phi_n(x)|^2 \sum_{n=j}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle_2|^2 \right)^{p/2} \\ &\leq \lambda_1(\mathcal{K})^{(r-1/2)p} \left(\sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(x)|^2 \right)^{p/2} \|f\|_2^p \\ &\leq \lambda_1(\mathcal{K})^{(r-1/2)p} \kappa(x)^{p/2} \|f\|_2^p, \quad x \in X, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

que são consequências das desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Bessel. O resultado segue da aplicação do Teorema da Convergência Dominada. $\square$

No que segue, o símbolo $B[y, r]$ denota a bola fechada de raio r e centro y no espaço métrico X .

Corolário 2.4.2. *Nas condições do Teorema 2.4.1, se (X, d) é um espaço métrico (não compacto) para o qual as bolas fechadas são compactas e*

$$\lim_{d(x, z) \rightarrow \infty} \kappa(x) = 0,$$

para algum $z \in X$ então a imagem de $\mathcal{K}^r$ contém apenas funções uniformemente contínuas e

$$\lim_{d(x, z) \rightarrow \infty} \mathcal{K}^r(f)(x) = 0, \quad f \in L^2(x, \nu).$$

Ainda, a série que define K e a Série (2.4.1) são uniformemente convergentes quando $r \geq 1/2$.

Demonstração: Nas condições do enunciado, a função κ é limitada. Logo, o Teorema 2.4.1-(i), (ii) garante a continuidade da imagem de $\mathcal{K}^r$ e ainda que

$$\lim_{d(x, z) \rightarrow \infty} \mathcal{K}^r(f)(x) = 0, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

Usando a compactificação de um ponto de X ([45, p.183]) e procedendo como na prova do teorema anterior, obtemos a convergência uniforme da série de Mercer de K e da Série (2.4.1). Como supomos que as bolas fechadas são compactas, para cada $\epsilon > 0$ e $f \in L^2(X, \nu)$, existe $t > 0$ tal que $|\mathcal{K}^r(f)(x)| < \epsilon/2$, $x \in X \setminus B[z, t]$, e existe $\delta \in (0, 1)$ para o qual

$$|\mathcal{K}^r(f)(x) - \mathcal{K}^r(f)(y)| < \epsilon, \quad x, y \in B[z, t+1], \quad d(x, y) < \delta.$$

Assim, dados $x, y \in X$, com $d(x, y) < \delta$, temos duas alternativas: $x, y \in B[z, t+1]$ ou $x, y \in X \setminus B[z, t]$. Para o segundo caso, temos

$$|\mathcal{K}^r(f)(x) - \mathcal{K}^r(f)(y)| \leq |\mathcal{K}^r(f)(x)| + |\mathcal{K}^r(f)(y)| < \epsilon.$$

O resultado segue. $\square$

É possível construir exemplos de núcleos que satisfazem as condições do Teorema 2.4.1 mas não satisfazem as condições do Corolário 2.4.2, para os quais as respectivas séries de Mercer e (2.4.1) não convergem uniformemente ([24, p.43]).

Teorema 2.4.3. *Seja K um núcleo em $\mathcal{A}_2(X, \nu)$ com representação (2.2.2). O operador $\mathcal{K}^r$, $r \geq 1/2$, é um operador integral positivo, gerado pelo núcleo $K_r \in L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ dado por*

$$K_r(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X. \quad (2.4.2)$$

Ainda, se $r \geq 1$, esta série é absoluta e uniformemente convergente em subconjuntos compactos de $X \times X$ e K_r é um núcleo em $\mathcal{A}_2(X, \nu)$.

Demonstração: Como $K \in \mathcal{A}_2(X, \nu)$, é fácil ver que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \phi_n \otimes \overline{\phi_n}, \quad r \geq \frac{1}{2},$$

converge para uma função K_r em $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ cuja norma é dada por

$$\|K_r\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{2r} \leq \lambda_1(\mathcal{K})^{2r-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) = \lambda_1(\mathcal{K})^{2r-1} \int_X \kappa(x) d\nu(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_r(f)(x) &:= \int_X K_r(x, y) f(y) d\nu(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x) \\ &= \mathcal{K}^r(f)(x), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X, \nu), \end{aligned}$$

isto é, $\mathcal{S}_r = \mathcal{K}^r$. A positividade definida de K_r e a positividade de $\mathcal{K}^r$ são claras. Para finalizar, observe que, quando $r \geq 1$, valem as desigualdades

$$\sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r |\phi_n(x)|^2 \leq \lambda_1(\mathcal{K})^{r-1} \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(x)|^2, \quad x \in X,$$

e

$$K_r(x, x) \leq \lambda_1(\mathcal{K})^{r-1} \kappa(x), \quad x \in X.$$

Aplicando agora a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (2.4.2), obtemos a convergência uniforme em subconjuntos compactos de $X \times X$. E o resultado segue. $\square$

Corolário 2.4.4. *Nas condições do Teorema 2.3.2, a convergência em*

$$K_r(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X,$$

vale em $L^p(X \times X, \nu \times \nu)$, contanto que $r \geq 1$ e $p \geq 1$.

Demonstração: Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz e das últimas desigualdades da prova do teorema anterior. $\square$

Se $0 < p < r < q \leq \infty$ então $L^p(X, \nu) \cap L^q(X, \nu) \subset L^r(X, \nu)$ (veja [31, p.185]). Deste fato, segue que para todo conjunto A , $l^p(A) \subset l^q(A)$, sempre que $0 < p < q \leq \infty$. Com isso, se K é um núcleo de Mercer e κ é um elemento de $L^{p/2}(X, \nu) \cap L^q(X, \nu)$, para algum $p \in (0, 1]$ e $q \in [1, \infty]$, então $K \in \mathcal{A}_r(X, \nu)$, para todo $r \in [p, 2q] \supset [1, 2]$. Sendo assim, nas condições do Teorema 2.4.3, obtemos $\{\lambda_n(\mathcal{K})\} \in l^r$, $r \geq 1$. Veremos no Capítulo 4 condições sobre K e X para garantir a existência de $t \in (0, 1)$ tal que $\{\lambda_n(\mathcal{K})\} \in l^r$, quando $r > t$. Em tal contexto, a série

$$K_r = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \phi_n \otimes \overline{\phi_n}$$

é $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ -convergente e $\mathcal{K}^r$ é um operador integral sobre $L^2(X, \nu)$, sempre que $2r > t$. Além disso, se $r > t$, a aplicação

$$x \in X \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r |\phi_n(x)|^2$$

torna-se um elemento de $L^1(X, \nu)$.

O resultado seguinte estabelece uma relação entre os núcleos K_{2r} e K_r associados aos operadores $\mathcal{K}^{2r}$ e $\mathcal{K}^r$ respectivamente.

Teorema 2.4.5. *Nas condições do Teorema 2.4.3, o núcleo K_{2r} , $r \geq 1/2$, pode ser obtido de K_r através da fórmula*

$$\int_X K_r(x, u) \overline{K_r(x, v)} d\nu(x) = K_{2r}(v, u), \quad u, v \in X.$$

Demonstração: Fixe $r \geq 1/2$. O Teorema 2.4.3 garante que $S := K_r$ está em $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$. Fixe $y \in X$ e defina

$$S_y^j := \sum_{n=1}^j \lambda_n(\mathcal{K})^r \overline{\phi_n(y)} \phi_n, \quad j = 1, 2, \dots$$

Como $S_y^j \in L^2(X, \nu)$, $j = 1, 2, \dots$ e $S(\cdot, y) \in L^2(X, \nu)$, é claro que

$$\langle S(\cdot, y) - S_y^j, S(\cdot, y) - S_y^j \rangle_2 = \sum_{n=j+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{2r} |\phi_n(y)|^2, \quad y \in X, \quad j = 1, 2, \dots$$

A continuidade do produto interno garante então que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle S_u^j, S_v^j \rangle_2 = \langle S(\cdot, u), S(\cdot, v) \rangle_2, \quad u, v \in X,$$

enquanto que a ortonormalidade de $\{\phi_n\}$ implica em

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle S_u^j, S_v^j \rangle_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^j \lambda_n(\mathcal{K})^{2r} \phi_n(v) \overline{\phi_n(u)} = K_{2r}(v, u), \quad u, v \in X.$$

Por unicidade, obtemos $\langle S(\cdot, u), S(\cdot, v) \rangle_2 = K_{2r}(v, u)$, $u, v \in X$, e o resultado segue. $\square$

Seja $K \in L^2PD(X, \nu) \cap L^2(X \times X, \nu \times \nu)$. Nas condições do Teorema 1.4.8, a continuidade do produto interno garante que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^2(f)(x) &= \int_X K(x, y) \left(\int_X K(y, z) f(z) d\nu(z) \right) d\nu(y) \\ &= \int_X \left(\int_X K(x, y) K(y, z) d\nu(y) \right) f(z) d\nu(z), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X, \nu), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{K}^2$ é um operador integral positivo com núcleo

$$K_2(x, z) := \int_X K(x, y) K(y, z) d\nu(y), \quad x, z \in X,$$

para o qual

$$\int_X K_2(x, x) d\nu(x) = \|K\|_2^2.$$

Segue que $x \in X \rightarrow K_2(x, x)$ está em $L^1(X, \nu)$.

Os exemplos apresentados em [5, 24] mostram que as estimativas aqui apresentadas para normas em L^1 são ótimas quando $X \subset \mathbb{R}^m$ está munido da medida de Lebesgue. Estes exemplos mostram também que as hipóteses utilizadas são necessárias. Isto sugere que as estimativas para normas em L^p também são ótimas. Sugere também que as hipóteses não podem ser enfraquecidas. Ainda, as estimativas dadas pelos teoremas 2.3.2 e 2.4.1 são atingidas quando $K(x, y) = \phi(x) \overline{\phi(y)}$, onde $\phi(x) \geq 0$, $\phi \in C(X) \cap L^p(X, \nu) \cap L^2(X, \nu)$, $\|\phi\|_2 = 1$ e $p > 0$, ou seja, as estimativas não são passíveis de melhora.

Espaços de Hilbert de reprodução

Os chamados espaços de Hilbert de reprodução (reproducing kernel Hilbert spaces) têm sua origem no famoso artigo de Aronszajn [2] e são úteis em vários segmentos da matemática, entre eles, Teoria do Aprendizado (Learning Theory) ([19]), Teoria da Aproximação, onde são chamados espaços nativos ([57, 58]), Análise Funcional, Probabilidade e Estatística ([4, p.55]), etc. A utilização e necessidade destes espaços podem ser ratificadas nos artigos recentes ([13, 59, 60, 61, 62, 64]). Uma formalização bem como várias propriedades básicas em torno do conceito de espaços de reprodução podem ser encontradas em [2], [4, p.13], [19] e [56, p.20].

A prova do Teorema 2.2.3 é o fator motivador para o estudo desenvolvido neste capítulo. As hipóteses sobre (X, ν) , quais sejam, X é um espaço topológico localmente compacto ou primeiro enumerável e ν é uma medida estritamente positiva, serão mantidas aqui. Destacamos que, embora X esteja munido de uma medida, alguns resultados e definições independem dela.

3.1 O espaço $\mathcal{H}_K$

Lembramos que um núcleo positivo definido $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaz a desigualdade

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{c}_i c_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

para quaisquer $n \geq 1$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ e $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Esta expressão possibilita a definição do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$ sobre o espaço vetorial V_K gerado pelo

conjunto $\{K^x := K(\cdot, x) : x \in X\}$ da seguinte forma:

$$\langle f, g \rangle_K := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{d}_j c_i K(x_j, x_i), \quad (3.1.1)$$

para $f = \sum_{i=1}^n c_i K^{x_i}$ e $g = \sum_{j=1}^m d_j K^{x_j}$. Com base em resultados clássicos de Análise Funcional ([31, p.159], [56, p.35]) temos a seguinte definição.

Definição 3.1.1. *O espaço de Hilbert $\mathcal{H}_K$ formado pelo completamento do espaço V_K , com relação ao produto interno (3.1.1), é chamado de espaço de Hilbert de reprodução associado ao núcleo K .*

As referências [4, 56] incluem inúmeras propriedades e aplicações destes espaços enquanto que [4, p.300] apresenta vários exemplos importantes.

Como o conjugado $\bar{K}$ de um núcleo K também é positivo definido, podemos definir o espaço $\mathcal{H}_{\bar{K}}$ de forma análoga. Logo, o estudo desenvolvido aqui aplica-se a este espaço também. Claramente $\mathcal{H}_{\bar{K}} = \mathcal{H}_K$ quando K for uma função real ([19, 64]). Em geral, estes espaços são diferentes.

Como $f = \sum_{i=1}^n c_i K^{x_i}$ satisfaz a igualdade

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i K^{x_i}(x) = \sum_{i=1}^n c_i K(x, x_i) = \langle f, K^x \rangle_K, \quad x \in X,$$

uma das propriedades mais importantes de $\mathcal{H}_K$, a qual na verdade motiva seu nome, é a propriedade de reprodução

$$f(x) = \langle f, K^x \rangle_K, \quad f \in \mathcal{H}_K, \quad x \in X, \quad (3.1.2)$$

que segue facilmente da definição deste espaço. Esta, junto com a estrutura de espaço de Hilbert que $\mathcal{H}_K$ possui, entram na solução de muitos problemas (veja referências já citadas acima).

Várias propriedades espectrais do operador integral $\mathcal{K}$ têm relação direta com propriedades envolvendo o espaço de Hilbert de reprodução $\mathcal{H}_K$ produzido pelo núcleo gerador K . Os resultados descritos neste capítulo destacam algumas destas conexões no contexto que fixamos para (X, ν) .

3.2 Propriedades de $\mathcal{H}_K$

O objetivo desta seção é estudar o espaço $\mathcal{H}_K$ e algumas de suas propriedades quando o núcleo positivo definido K é contínuo e a função κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$. Um dos resultados principais da seção revela que nas condições acima, a imagem de

$\mathcal{K}$ é um subconjunto de $\mathcal{H}_K$. Em particular, ela também é um subconjunto de $C(X)$. Como consequência, a conclusão do Teorema 2.2.3 vale e K é um núcleo de Mercer em $\mathcal{A}_2(X, \nu)$.

O argumento chave na justificativa do resultado acima é a utilização de uma relação entre os produtos internos de $L^2(X, \nu)$ e de $\mathcal{H}_K$. A mesma relação é usada na seção seguinte, na determinação de uma base ortonormal do espaço de Hilbert de reprodução. Esta, por sua vez, permite que possamos descrever o espaço como a imagem de $\mathcal{K}^{1/2}$.

O ponto de partida para o que desenvolveremos aqui é o seguinte teorema, cuja prova é essencialmente baseada em argumentos apresentados em [56, p.36].

Teorema 3.2.1. *Seja K um núcleo positivo definido sobre X . Valem as seguintes afirmações:*

- (i) $|f(x)| \leq \|f\|_K \kappa(x)^{1/2}$, $f \in \mathcal{H}_K$, $x \in X$;
- (ii) $|f(x) - f(y)| \leq \|f\|_K \|K^x - K^y\|_K$, $f \in \mathcal{H}_K$, $x, y \in X$;
- (iii) Se a sequência $\{f_n\} \subset \mathcal{H}_K$ converge para f em $\mathcal{H}_K$, $A \subset X$ e κ é limitada em A então a convergência é uniforme em A ;
- (iv) Se a função κ é limitada em subconjuntos compactos de X e cada função K^x é contínua então $\mathcal{H}_K$ é subconjunto de $C(X)$.

Demonstração: Usando a propriedade de reprodução (3.1.2), chegamos a

$$|f(x)| = |\langle f, K^x \rangle_K| \leq \|f\|_K \|K^x\|_K = \|f\|_K \kappa(x)^{1/2}, \quad x \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K,$$

e

$$|f(x) - f(y)| = |\langle f, K^x - K^y \rangle_K| \leq \|f\|_K \|K^x - K^y\|_K, \quad x, y \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

Seja $\{f_n\}$ uma sequência convergente para f em $\mathcal{H}_K$. Neste caso,

$$|f_n(x) - f(x)| = |\langle f_n - f, K^x \rangle_K| \leq \|f_n - f\|_K \kappa(x)^{1/2}, \quad x \in X,$$

e esta sequência converge uniformemente em todo conjunto A , contanto que κ seja limitada lá. Se $f_n = \sum_{i=1}^{j_n} c_i K^{x_i}$, κ é limitada em compactos e cada K^x é contínua, segue do Teorema 1.1.6 que f é contínua. Como o conjunto das funções com a descrição acima é denso em $\mathcal{H}_K$, o resultado segue. $\square$

Não é difícil ver que

$$\|K^x - K^y\|_K^2 = K(x, x) - K(x, y) - K(y, x) + K(y, y), \quad x, y \in X. \quad (3.2.1)$$

Logo, no caso em que X é primeiro enumerável, o item (iv) do teorema anterior ainda é verdadeiro quando κ é contínua e para cada $x \in X$, a função $\text{Re } K(x, y)$ é contínua em

$y = x$. A conclusão do resultado anterior ainda vale com outros conjuntos de hipóteses, sendo um deles aquele descrito em [4, p.34].

Como o Teorema 3.2.1 vale quando K é contínuo e positivo definido, no restante do capítulo, vamos supor que K é um núcleo L^2 -positivo definido e contínuo. Vamos usar propriedades de K e $\mathcal{K}$ apresentadas no Capítulo 2 para estudar propriedades de $\mathcal{H}_K$. Como já sabemos que $\mathcal{H}_K$ contém apenas funções contínuas, o resultado seguinte apresenta um contexto onde a inclusão de $\mathcal{H}_K$ em $C(X)$ é limitada. A condição imposta sobre K aparece frequentemente em problemas que envolvem a utilização da Teoria Mercer para K e $\mathcal{K}$ ([25, 26, 57, 60, 61]).

Corolário 3.2.2. *Se $\sup_{x \in X} \kappa(x)^{1/2} < \infty$ então a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C(X)$ é limitada.*

Demonstração: O resultado segue do Teorema 3.2.1-(i). $\square$

Alguns problemas exigem que o espaço $\mathcal{H}_K$ contenha apenas funções mensuráveis ([61]). Como estamos supondo que X está munido de uma medida de Borel (completa ou σ -finita), as funções do espaço $\mathcal{H}_K$ são automaticamente mensuráveis, visto que são contínuas. Ainda, a desigualdade do Teorema 3.2.1-(i) e uma condição de integrabilidade sobre κ podem ser usadas para mergulhar $\mathcal{H}_K$ em $L^p(X, \nu)$, $p > 0$. Um caso particular de tal situação é registrado no seguinte resultado.

Corolário 3.2.3. *Se κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$ então $\mathcal{H}_K$ é um subconjunto de $L^2(X, \nu)$. Em particular, a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow L^2(X, \nu)$ é limitada e tem norma no máximo $\|\kappa\|_1^{1/2}$.*

A continuidade de K está relacionada com a continuidade da aplicação (feature map) $\eta : X \rightarrow \mathcal{H}_K$ dada por $\eta(x) = K^x$, $x \in X$. Como $\|\eta(x)\|_K^2 = \kappa(x)$, $x \in X$, η é uniformemente limitada se, e somente se, a função $\kappa^{1/2}$ é limitada. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\eta(x) - \eta(y)\|_K^2 &= \langle K^x - K^y, K^x - K^y \rangle_K \\ &= K(x, x) - K(x, y) - K(y, x) + K(y, y), \quad x, y \in X, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |K(x, y) - K(u, v)| &= |\langle \eta(x), \eta(y) \rangle_K - \langle \eta(u), \eta(v) \rangle_K| \\ &\leq |\langle \eta(x) - \eta(u), \eta(y) \rangle_K| + |\langle \eta(u), \eta(y) - \eta(v) \rangle_K|, \quad x, y, u, v \in X. \end{aligned}$$

Segue então que, se X é primeiro enumerável, o núcleo K será contínuo se, e somente se, a função η for contínua. Ainda, quando X é compacto e de Hausdorff, uma simples aplicação dos comentários precedentes, em conjunto com o Teorema de Arzelà-Ascoli,

garantem que K é contínuo se, e somente se, a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C(X)$ é compacta. A prova deste fato, em um caso particular em que X é um espaço métrico munido de uma medida finita ν , aparece em [61]. Usamos uma adaptação para provar a proposição seguinte.

Proposição 3.2.4. *Suponha que X é um espaço topológico compacto e de Hausdorff. Se K é contínuo então a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C(X)$ é compacta. Se X é também primeiro enumerável, a recíproca da afirmação anterior também vale.*

Demonstração: Suponha primeiramente que K é contínuo. Como X é compacto, existe um número real positivo M tal que $|K(x, y)|^{1/2} < M$, $x, y \in X$. Logo, pelo Corolário 3.2.2, temos que

$$|f(x)| \leq M\|f\|_K, \quad x \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K,$$

e que a inclusão i é limitada. Pelo Teorema 3.2.1 temos que $\mathcal{H}_K \subset C(X)$ e que

$$|f(x) - f(y)|^2 = |\langle f, K^x - K^y \rangle_K|^2 \leq \|f\|_K^2 \|K^x - K^y\|_K^2, \quad x, y \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

Usando a Equação (3.2.1) e a compacidade de X concluímos que todo conjunto limitado de $\mathcal{H}_K$ é equicontínuo. Segue então do Teorema de Arzelà-Ascoli que a inclusão i é compacta. Supondo agora que i é compacta, seja B a bola unitária fechada em $\mathcal{H}_K$. Se $x, y \in X$ então

$$\sup_{f \in B} |\langle f, K^x - K^y \rangle_K| = \sup_{f \in B} |f(x) - f(y)| = \|K^x - K^y\|_K = \|\eta(x) - \eta(y)\|_K.$$

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, B é equicontínuo e, portanto, η e K são funções contínuas quando X é primeiro enumerável. $\square$

Uma propriedade interessante de $\mathcal{H}_K$ é dada pelo resultado seguinte.

Corolário 3.2.5. *Suponha que X é compacto e de Hausdorff. Se K é contínuo então todo conjunto fechado e limitado de $\mathcal{H}_K$ é compacto em $C(X)$.*

Demonstração: Seja B um conjunto fechado e limitado de $\mathcal{H}_K$ e suponha que K é contínuo. A proposição anterior garante que o fecho de B em $C(X)$ é compacto. Seja $\{f_n\} \subset B$ uma sequência uniformemente convergente. Como $\mathcal{H}_K$ é um espaço de Hilbert, B é fracamente compacto (veja o Teorema de Alaoglu em [31, p.169] ou [54, p.202]). Logo, existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ fracamente convergente em B , digamos para $f \in B$. Como

$$f_{n_j}(x) - f(x) = \langle f_{n_j} - f, K^x \rangle_K, \quad x \in X,$$

segue que $\{f_{n_j}\}$ converge pontualmente para f . Sendo assim, $\{f_n\}$ converge para f em $C(X)$. Portanto, B é fechado em $C(X)$. $\square$

Em aplicações como em [59, 61] e para provarmos o último resultado da seção, é desejável que a imagem de $\mathcal{K}$ seja um subconjunto de $\mathcal{H}_K$. O seguinte resultado trata deste problema.

Proposição 3.2.6. *Se κ pertence a $L^1(X, \nu)$ então a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $\mathcal{H}_K$.*

Demonstração: Seja $f \in L^2(X, \nu)$. Em vista da propriedade de reprodução, é suficiente verificar que

$$\mathcal{K}(f)(x) = \langle h, K^x \rangle_K, \quad x \in X,$$

para algum $h \in \mathcal{H}_K$. Considere o funcional linear $\Phi_f : \mathcal{H}_K \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\Phi_f(g) = \langle g, f \rangle_2, \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e o Teorema 3.2.1-(i) deduzimos que

$$|\Phi_f(g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \leq \|f\|_2 \|\kappa\|_1^{1/2} \|g\|_K.$$

Assim, o Teorema da representação de Riesz (veja o Teorema 5.25 em [31, p.174]) garante a existência de $h \in \mathcal{H}_K$ tal que

$$\Phi_f(g) = \langle g, f \rangle_2 = \langle g, h \rangle_K, \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

Em particular,

$$h(x) = \langle h, K^x \rangle_K = \langle f, K^x \rangle_2 = \mathcal{K}(f)(x), \quad x \in X.$$

A proposição está provada. $\square$

Finalizamos a seção com uma forma elegante de provar o Teorema 2.2.3, que é a nosso ver um dos resultados mais importantes deste trabalho. Na realidade este resultado é um corolário da proposição acima.

Teorema 3.2.7 (Teorema de Mercer II). *Se κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$ então a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $C(X)$. Em particular, K é um núcleo de Mercer.*

Demonstração: É suficiente aplicar o Teorema 3.2.1-(iv) e a Proposição 3.2.6 e proceder, em seguida, como na prova do Teorema 2.2.4. $\square$

3.3 Uma base para $\mathcal{H}_K$

Faremos agora um estudo de propriedades do espaço de Hilbert de reprodução $\mathcal{H}_K$ relacionadas à representação do núcleo K quando este é um núcleo de Mercer. Para começarmos tal estudo, precisamos de uma conexão entre o produto interno de $\mathcal{H}_K$ e o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ de $L^2(X, \nu)$. Destacamos que os resultados desta seção serão utilizados no Capítulo 5 quando analisaremos a diferenciação de funções de $\mathcal{H}_K$, no caso em que X é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$.

Proposição 3.3.1. *Se κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$ então*

$$\langle \mathcal{K}(f), g \rangle_K = \langle f, g \rangle_2, \quad g \in \mathcal{H}_K, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

Em particular,

$$\|\mathcal{K}(f)\|_K^2 = \langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

Demonstração: O resultado segue da igualdade

$$\langle g, f \rangle_2 = \Phi_f(g) = \langle g, h \rangle_K = \langle g, \mathcal{K}(f) \rangle_K, \quad g \in \mathcal{H}_K, \quad f \in L^2(X, \nu),$$

que é uma consequência da prova da Proposição 3.2.6. $\square$

Este resultado é aplicado na construção de uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_K$ como segue.

Teorema 3.3.2. *Suponha que κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$. Se $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ é um conjunto gerador para K então o conjunto $\{\lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n : \lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_K$.*

Demonstração: Seja $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ um conjunto gerador para o núcleo de Mercer K . Como $\mathcal{K}(\phi_n) = \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n$, $n = 1, 2, \dots$, cada ϕ_n é um elemento de $\mathcal{H}_K \cap L^2(X, \nu)$, sempre que $\lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0$. A Proposição 3.3.1 pode ser usada para concluir que

$$\begin{aligned} \langle \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n, \lambda_m(\mathcal{K})^{1/2} \phi_m \rangle_K &= \left\langle \mathcal{K}(\phi_n), \frac{\lambda_m(\mathcal{K})^{1/2}}{\lambda_n(\mathcal{K})^{1/2}} \phi_m \right\rangle_K \\ &= \left\langle \phi_n, \frac{\lambda_m(\mathcal{K})^{1/2}}{\lambda_n(\mathcal{K})^{1/2}} \phi_m \right\rangle_2 = \delta_{m,n}. \end{aligned}$$

quando $\lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0$. Consequentemente, $\{\lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n : \lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0\}$ é um subconjunto ortonormal de $\mathcal{H}_K$. Da relação $\phi_n(x) = \langle \phi_n, K^x \rangle_K$, $x \in X$, vemos que

$$K^x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \overline{\phi_n(x)} \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K^x, \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \rangle_K \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n, \quad x \in X. \quad (3.3.1)$$

Se $f \in \mathcal{H}_K$ satisfaz $\langle f, \phi_n \rangle_K = 0$, $n = 1, 2, \dots$, então

$$\begin{aligned} f(x) = \langle f, K^x \rangle_K &= \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} \langle K^x, \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \rangle_K \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \right\rangle_K \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_K \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) = 0, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Assim, $\{\lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n : \lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_K$. $\square$

Um comentário importante sobre a prova do teorema acima é que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \rangle_K \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n, \quad f \in \mathcal{H}_K,$$

converge uniformemente para f em subconjuntos compactos de X . Para ver isto, aplique as desigualdades de Bessel e de Cauchy-Schwarz para obter

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=j}^{\infty} \langle f, \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \rangle_K \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n(x) \right|^2 &\leq \sum_{n=j}^{\infty} |\langle f, \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \rangle_K|^2 \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(x)|^2 \\ &\leq \|f\|_K^2 \kappa(x), \quad f \in \mathcal{H}_K, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Além disso, este teorema permite a caracterização de $\mathcal{H}_K$ como um subespaço de $L^2(X, \nu)$. Na prova seguinte, denotamos o fecho de um subconjunto B de $L^2(X, \nu)$ por $\overline{B}$, enquanto $B^\perp$ denota o conjunto ortogonal de B neste mesmo espaço. A expressão $\text{span}\{B\}$ denota o espaço gerado por B .

Teorema 3.3.3. *Se κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$ então o operador $\mathcal{K}^{1/2} : \overline{V_K} \rightarrow \mathcal{H}_K$ é um isomorfismo isométrico. Ainda, $\overline{V_K} = \overline{\text{span}\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}}$ e*

$$\mathcal{H}_K = \{\mathcal{K}^{1/2}(f) : f \in L^2(X, \nu)\}$$

quando $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ é um conjunto gerador para K .

Demonstração: Suponha que $\kappa \in L^1(X, \nu)$ e lembre que $V_K = \text{span}\{K^x : x \in X\}$. Como K é um núcleo de Mercer, a Equação (3.3.1) garante que $V_K \subset \overline{\text{span}\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}}$. Sendo assim, a inclusão $\overline{V_K} \subset \overline{\text{span}\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}}$ segue e, conseqüentemente, podemos concluir que $\overline{\text{span}\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}}^\perp \subset \overline{V_K}^\perp$. Por outro lado, se $f \in L^2(X, \nu)$ é ortogonal a $\overline{V_K}$ então

$$\mathcal{K}(f)(x) = \langle f, K^x \rangle_2 = 0, \quad x \in X,$$

e segue que $\mathcal{K}(f) = 0$. Portanto, a Proposição 3.3.1 permite-nos concluir que

$$\langle f, \lambda_n(\mathcal{K})\phi_n \rangle_2 = \lambda_n(\mathcal{K}) \langle \mathcal{K}(f), \phi_n \rangle_K = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Da ortonormalidade de $\{\phi_n\}$ em $L^2(X, \nu)$, chegamos a

$$\langle f, g \rangle_2 = 0, \quad g \in \overline{\text{span}\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}}.$$

É claro então que $\overline{\text{span}\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}}^\perp \supset \overline{V_K}^\perp$. Assim, a igualdade $\overline{V_K} = \overline{\text{span}\{\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n\}}$ se verifica. Para completar a prova, note que, quando $g \in \mathcal{H}_K$,

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n = \mathcal{K}^{1/2}(f),$$

onde $f = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \phi_n$ pertence a $\overline{V_K}$ (note que β_n é nulo quando $\lambda_n(\mathcal{K})$ o for). Finalmente, se $f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \phi_n \in \overline{V_K}$, a igualdade

$$\mathcal{K}^{1/2}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n,$$

e uma aplicação da identidade de Parseval produzem a igualdade

$$\|\mathcal{K}^{1/2}(f)\|_K^2 = \langle \mathcal{K}^{1/2}(f), \mathcal{K}^{1/2}(f) \rangle_K = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|f\|_2^2,$$

ou seja, $\mathcal{K}^{1/2}$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços considerados. $\square$

Uma análise mais detalhada da prova do resultado anterior mostra que trabalhamos de fato com a restrição $\mathcal{K}_{\overline{V_K}}$ de $\mathcal{K}$ a $\overline{V_K}$. Isto não produz nenhuma inconveniência porque $(\overline{V_K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ é também um espaço de Hilbert. Como a imagem de $\mathcal{K}^{1/2}$ é um subconjunto de $\overline{V_K}$, a igualdade $(\mathcal{K}_{\overline{V_K}})^{1/2} = (\mathcal{K}^{1/2})_{\overline{V_K}}$ se verifica facilmente. Ainda, denotando a restrição de $\mathcal{K}$ a $\mathcal{H}_K$ também por $\mathcal{K}$, verificamos, usando os resultados vistos, que $\mathcal{K} : \mathcal{H}_K \rightarrow \mathcal{H}_K$ faz sentido e

$$\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_K = \langle f, f \rangle_2, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

Segue que $\mathcal{K}$ é positivo, compacto e autoadjunto em $\mathcal{H}_K$, possuindo $\lambda_n(\mathcal{K})$ como autovalor associado (quando não nulo) à autofunção $\lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n$, $n = 1, 2, \dots$

O último resultado da seção complementa o teorema anterior e refina a estimativa para a norma da inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow L^2(X, \nu)$ obtida no Corolário 3.2.3.

Teorema 3.3.4. *Se κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$ então a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow L^2(X, \nu)$ é limitada e sua norma é no máximo $\lambda_1(\mathcal{K})^{1/2}$.*

Demonstração: Suponha que κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$. Seja f um elemento de $\mathcal{H}_K$ e escreva-o na forma

$$f = \sum_{i=1}^m \alpha_i K(\cdot, x_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{\phi_n(x_i)} \right) \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n,$$

onde $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ é um conjunto gerador para K . Como f pertence a $\mathcal{H}_K$, a desigualdade de Bessel implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{\phi_n(x_i)} \right|^2 \leq \|f\|_K^2 < \infty.$$

Sendo f também um elemento de $L^2(X, \nu)$, é claro que

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \sum_{i=1}^m \alpha_i \overline{\phi_n(x_i)} \right|^2 \lambda_n(\mathcal{K}) \leq \lambda_1(\mathcal{K}) \|f\|_K^2.$$

Como V_K é um subconjunto de $L^2(X, \nu) \cap \mathcal{H}_K$ e denso em $\mathcal{H}_K$, o resultado segue. $\square$

Observação 3.3.5. Um fato curioso sobre o espaço $\mathcal{H}_K$ quando K é um núcleo de Mercer, é o seguinte: se $\{\psi_n\}$ é base ortonormal deste espaço então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi_n, K^x \rangle_K|^2 = \|K^x\|_K^2 = \kappa(x), \quad x \in X.$$

Em particular, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) = 0$, $x \in X$.

É proveitoso para o leitor comparar os resultados que apresentamos, nesta e na seção anterior, com aqueles descritos em [60] e [61]. Apesar das similaridades de alguns argumentos, o diferencial no nosso trabalho são as condições básicas utilizadas: o contexto métrico e as condições sobre a medida utilizada naquelas referências são substituídas pelo contexto adotado e pela continuidade do núcleo K na maioria dos resultados.

3.4 Considerações adicionais

O objetivo desta seção é reanalisar os resultados da seção anterior, eliminando a exigência de κ ser um elemento de $L^1(X, \nu)$. Como K é diagonalmente dominante, esta condição implica que K é necessariamente um elemento de $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$. Isto por sua vez garante a compacidade de $\mathcal{K}$. Entretanto, $\mathcal{K}$ pode ser compacto e $\mathcal{H}_K$ conter apenas funções contínuas, mesmo quando $|K|^2$ não é integrável. Para ver isso, basta tomar um núcleo de Mercer K que não pertença a $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ (veja também [36]). Surge então a dúvida sobre a validade dos resultados da seção anterior neste contexto. Para tentar obter algumas respostas, finalizamos este capítulo com os comentários e resultados obtidos após uma análise.

Ao longo desta seção, vamos supor que K é L^2 -positivo definido e contínuo, em particular, $\mathcal{K}$ é limitado. O primeiro resultado refere-se à ação de $\mathcal{K}$ sobre as funções

de suporte compacto. Vamos denotar o conjunto das funções de $L^2(X, \nu)$ com suporte compacto por $L_c^2(X, \nu)$.

Proposição 3.4.1. *Se $f \in L_c^2(X, \nu)$ então $\mathcal{K}(f)$ é um elemento de $\mathcal{H}_K$ e vale a igualdade*

$$\langle \mathcal{K}(f), g \rangle_K = \langle f, g \rangle_2, \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

Demonstração: Basta alterar a prova da Proposição 3.2.6, observando que o funcional linear $\Phi_f : \mathcal{H}_K \rightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$\Phi_f(g) = \langle g, f \rangle_2, \quad g \in \mathcal{H}_K,$$

pode ser limitado como segue

$$|\Phi_f(g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_K \left(\int_Y \kappa(x) d\nu(x) \right)^{1/2},$$

onde Y é o suporte de f . Note que, como ν é estritamente positiva, compactos possuem medida finita. $\square$

O corolário seguinte discute a extensão deste resultado para o fecho de $L_c^2(X, \nu)$ em $L^2(X, \nu)$.

Corolário 3.4.2. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em $L_c^2(X, \nu)$. Se $\{f_n\}$ converge para f em $L^2(X, \nu)$ então $\mathcal{K}(f)$ é um elemento de $\mathcal{H}_K$ e*

$$\langle \mathcal{K}(f), g \rangle_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle_2, \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

Em particular, $\mathcal{K}(f)$ é uma função contínua e

$$\langle \mathcal{K}(f), g \rangle_K = \langle f, g \rangle_2, \quad g \in \mathcal{H}_K \cap L^2(X, \nu).$$

Demonstração: Suponha que $\{f_n\}$ converge para f em $L^2(X, \nu)$. A proposição anterior garante que cada $\mathcal{K}(f_n)$ é um elemento de $\mathcal{H}_K$ e que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(f_n) - \mathcal{K}(f_m)\|_K^2 &= \langle \mathcal{K}(f_n) - \mathcal{K}(f_m), \mathcal{K}(f_n) - \mathcal{K}(f_m) \rangle_K \\ &= \langle f_n - f_m, \mathcal{K}(f_n) - \mathcal{K}(f_m) \rangle_2 \\ &\leq \|f_n - f_m\|_2 \|\mathcal{K}(f_n) - \mathcal{K}(f_m)\|_2, \quad n \geq m \geq 1. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Sendo $\mathcal{K}$ limitado, temos que $\mathcal{K}(f_n) \rightarrow \mathcal{K}(f)$ em $L^2(X, \nu)$ e, por conseguinte, $\{\mathcal{K}(f_n)\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}_K$. Logo, a convergência vale em $\mathcal{H}_K$ também. Pelo Teorema 3.2.1, sabemos que a convergência em $\mathcal{H}_K$ implica em convergência uniforme

em subconjuntos compactos de X . Aplicando agora o Teorema 1.1.6 concluímos que $\mathcal{K}(f)$ é (ou possui uma representante) contínua em $\mathcal{H}_K$. Segue que $\mathcal{K}(f) \in \mathcal{H}_K$ e

$$\langle \mathcal{K}(f), g \rangle_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{K}(f_n), g \rangle_K = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle_2, \quad g \in \mathcal{H}_K,$$

o que conclui a prova. $\square$

Este resultado leva ao seguinte teorema, aplicável em muitas situações.

Teorema 3.4.3 (Teorema de Mercer III). *Suponha que $L_c^2(X, \nu)$ é denso em $L^2(X, \nu)$. Então a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $\mathcal{H}_K$. Em particular, K é um núcleo de Mercer quando $\mathcal{K}$ é compacto.*

Demonstração: Segue do Corolário 3.4.2 e do Teorema 2.2.4. $\square$

Uma versão mais prática desse resultado é dada pelo corolário que segue.

Corolário 3.4.4. *Se K é um elemento de $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ e $L_c^2(X, \nu)$ é denso em $L^2(X, \nu)$ então K é um núcleo de Mercer.*

Demonstração: Segue do Lema 1.4.6 e do Teorema 3.4.3. $\square$

A condição de densidade suposta no enunciado do Teorema 3.4.3 não era esperada, já que, em outros contextos, existem resultados similares na literatura levando às mesmas conclusões sem a necessidade de tal condição. Ela ocorre de fato no caso em que X é localmente compacto e ν é medida de Radon, em particular, para certos subconjuntos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$ munidos da medida de Lebesgue usual ([19, 57]). Outra situação é aquela em que X é um espaço métrico com uma estrutura de compacidade do tipo descrito em [60].

Assim sendo, os dois últimos resultados que enunciamos estendem os resultados das seções 3 e 7 de [57] e da seção 3 de [60]. Mostram ainda que algumas das hipóteses lá impostas são redundantes, mesmo o contexto lá adotado sendo muito particular. Por outro lado, nossos resultados ainda revelam que algumas condições impostas nos artigos [5, 46] são muito restritivas, uma vez que nestas referências a integrabilidade de κ fazia parte do conjunto de hipóteses utilizado para provar o Teorema de Mercer, mesmo X sendo um intervalo, o que não é o caso no nosso Corolário 3.4.4.

Este mesmo corolário pode ser usado para apresentar uma situação concreta onde o Teorema 2 de [47] se aplica. Tal teorema é, na verdade, uma versão mais geral do Teorema 2.2.5 para o caso em que X é um intervalo, que não exige, por exemplo, a integrabilidade de κ .

Os últimos resultados do capítulo ainda usam a hipótese adicional sobre $L_c^2(X, \nu)$. Estes resultados ainda referem-se à caracterização do espaço $\mathcal{H}_K$ como discutido na seção anterior. Finalizamos o capítulo com uma caracterização adicional deste espaço.

Teorema 3.4.5. *Suponha que $L_c^2(X, \nu)$ é denso em $L^2(X, \nu)$. Se $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ é um conjunto gerador para o núcleo de Mercer K então o conjunto $\{\lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n : \lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}_K$.*

Demonstração: Note que ϕ_n está em $\mathcal{H}_K \cap L^2(X, \nu)$ sempre que $\lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0$. Para finalizar, basta modificar a prova do Teorema 3.3.2 trocando a Proposição 3.3.1 pelo Corolário 3.4.2. $\square$

Um fato importante da seção anterior é a identificação de $\mathcal{H}_K$ como um subespaço de $L^2(X, \nu)$. Este também é o conteúdo do resultado seguinte.

Teorema 3.4.6. *Suponha que $L_c^2(X, \nu)$ é denso em $L^2(X, \nu)$. Se K é um núcleo de Mercer então $\mathcal{K}^{1/2} : \overline{V_K} \rightarrow \mathcal{H}_K$ é um isomorfismo isométrico. Ainda, a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow L^2(X, \nu)$ é limitada e possui norma no máximo $\lambda_1(\mathcal{K})^{1/2}$.*

Demonstração: Basta ver que

$$\|K^x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^2 |\phi_n(x)|^2 \leq \lambda_1(\mathcal{K}) \kappa(x) < \infty, \quad x \in X,$$

e repetir argumentos da prova dos teoremas 3.3.3 e 3.3.4, trocando a aplicação da Proposição 3.3.1 pelo Corolário 3.4.2 e usando o Teorema 3.4.5. $\square$

Vejamos agora outra versão da Proposição 3.3.1. Este resultado segue diretamente do Teorema 3.4.6 e do Corolário 3.4.2.

Teorema 3.4.7. *Suponha que $L_c^2(X, \nu)$ é denso em $L^2(X, \nu)$. Se K é um núcleo de Mercer então*

$$\langle \mathcal{K}(f), g \rangle_K = \langle f, g \rangle_2, \quad f \in L^2(X, \nu), \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

O teorema seguinte estende resultados de [19] para o caso em que X não é necessariamente uma variedade diferenciável e compacta. Ele fornece ainda outra forma de caracterizar o espaço $\mathcal{H}_K$, quando K é um núcleo de Mercer, caracterização esta que pode ser usada para definir o espaço $\mathcal{H}_K$ ([19, 57]).

Teorema 3.4.8. *Nas condições dos teoremas 3.3.2 ou 3.4.6, vale a igualdade*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad x \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K,$$

com convergência absoluta e uniforme em subconjuntos compactos de X . Ainda, supondo por simplicidade que $\lambda_n(\mathcal{K}) \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, vale a igualdade

$$\mathcal{H}_K = \left\{ f \in L^2(X, \nu) : f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \phi_n \rangle_2|^2}{\lambda_n(\mathcal{K})} < \infty \right\},$$

com

$$\langle f, g \rangle_K = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n \rangle_2 \langle \phi_n, g \rangle_2}{\lambda_n(\mathcal{K})}, \quad f, g \in \mathcal{H}_K.$$

Demonstração: Nas condições enunciadas, podemos aplicar a Equação (3.3.1) e a Proposição 3.3.1 (ou o Teorema 3.4.7) para obter

$$\begin{aligned} f(x) = \langle f, K^x \rangle_K &= \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} \langle K^x, \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \rangle_K \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \right\rangle_K \\ &= \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} \langle K^x, \phi_n \rangle_K \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n \right\rangle_K \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n \rangle_K \langle \phi_n, K^x \rangle_K \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \mathcal{K}(\phi_n) \rangle_K \phi_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad x \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K. \end{aligned}$$

Ainda, vale a desigualdade

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=j}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x) \right|^2 &= \left| \sum_{n=j}^{\infty} \langle f, \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \rangle_K \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq \sum_{n=j}^{\infty} |\langle f, \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n \rangle_K|^2 \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |\phi_n(x)|^2 \\ &\leq \|f\|_K^2 \kappa(x), \quad x \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K, \end{aligned}$$

da qual extraímos a convergência absoluta e uniforme em subconjuntos compactos de X . Tome agora uma função $f \in L^2(X, \nu)$ da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \phi_n \rangle_2}{\lambda(\mathcal{K})^{1/2}} \lambda(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n(x), \quad x \in X,$$

com

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle f, \phi_n \rangle_2|^2}{\lambda_n(\mathcal{K})} < \infty.$$

Então $f \in \mathcal{H}_K$ enquanto que o resto segue da continuidade do produto interno de $\mathcal{H}_K$ e da fórmula acima. $\square$

Decaimento de autovalores

Este capítulo contém uma análise do decaimento dos autovalores de operadores integrais positivos sobre $L^2(X, \nu)$ quando X é um espaço métrico com propriedades específicas. Tentamos manter o contexto o mais geral possível, entretanto, as técnicas usadas exigiram a metrizabilidade do espaço. Supondo a positividade definida do núcleo gerador, além de condições razoáveis de suavidade, analisaremos o decaimento dos autovalores, generalizando vários resultados presentes na literatura. Acreditamos que uma das principais contribuições do capítulo seja o fato de que o contexto adotado é suficientemente geral a ponto de várias contribuições similares, por exemplo, aquelas em [6, 7, 8, 15, 16, 17, 18, 20, 28, 35, 38, 39, 49, 50, 51, 52] tornarem-se casos particulares.

Lembramos que um operador integral $\mathcal{K}$, gerado por um núcleo de Mercer K , possui um número enumerável de autovalores que podem ser ordenados na forma $\lambda_1(\mathcal{K}) \geq \lambda_2(\mathcal{K}) \geq \dots \geq 0$. Além disso, o Corolário 2.2.7 produz a igualdade

$$tr(\mathcal{K}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) = \int_X \kappa(x) d\nu(x). \quad (4.0.1)$$

Quando tal soma é finita, ou seja, quando κ é um elemento de $L^1(X, \nu)$, segue que $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1})$, ou seja, $n\lambda_n(\mathcal{K}) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. O exemplo seguinte ([24, 50]) mostra que esta estimativa para o decaimento dos autovalores não pode ser melhorada, a menos que condições adicionais sejam impostas.

Seja $X = [-1, 1]$, munido da medida de Lebesgue usual ν e $\mathcal{K}$ o operador integral gerado pelo núcleo $L^2([-1, 1], \nu)$ -positivo definido dado por

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1+\epsilon}} \cos(n\pi x) \cos(n\pi y), \quad x, y \in [-1, 1],$$

para algum inteiro não negativo p e algum $\epsilon > 0$. Se

$$\phi_n(x) := \cos(n\pi x), \quad x \in [-1, 1],$$

então o conjunto $\{\phi_n\}$ é $L^2([-1, 1], \nu)$ -ortonormal e $\lambda_n(\mathcal{K}) = n^{-1-p-\epsilon}$, $n = 1, 2, \dots$. Desta forma $\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1-p-\epsilon}) = o(n^{-1-p})$ quando $n \rightarrow \infty$, mas $\lambda_n(\mathcal{K}) \neq o(n^{-1-p-\epsilon})$ quando $n \rightarrow \infty$. Como a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q}{n^{p+1+\epsilon}}, \quad 0 \leq q \leq p,$$

é convergente, é fácil ver que as derivadas parciais de K , de ordem máxima p , são contínuas. Logo, K é de classe C^p .

Muitos resultados da literatura trazem estimativas melhores do que a mencionada acima. Os artigos de Reade [49, 50] tratam do caso em que o conjunto X é um intervalo compacto, enquanto que o trabalho de Kühn [17, 38, 39] trata do caso em que X é um espaço métrico compacto ou uma variedade diferenciável compacta com medida finita. Por outro lado, o estudo do assunto, com a retirada da compacidade de X , é feito por Buescu [6, 7, 8], que trata do contexto onde X é um intervalo. Os trabalhos [15, 16, 18, 20, 24, 28, 35] tratam deste assunto em contextos semelhantes aos citados.

Neste capítulo, esta questão é tratada mais uma vez, supondo que X é um espaço métrico com uma estrutura especial, o qual chamamos de (q, t) -compacto, sem a exigência da compacidade usual. Descrevemos condições para obter resultados sobre o decaimento de autovalores do operador $\mathcal{K}$, quando K satisfaz uma propriedade de suavidade do tipo Lipschitz. Enfatizamos que a metodologia usada aqui foi baseada nos trabalhos de Buescu [7, 8], em [24] e em referências lá citadas. Em particular, os resultados obtidos neste capítulo produziram os artigos [25, 26]. Avisamos o leitor que as demonstrações dos resultados exigem etapas técnicas. Por isso, os resultados principais sobre o decaimento de autovalores serão apresentados na seção final do capítulo, ficando as demais seções dedicadas aos resultados auxiliares, que vão determinar o contexto adotado.

As estimativas obtidas aqui podem ser usadas para a obtenção de um número positivo q de modo que $\mathcal{K}$ seja um elemento da classe p de Schatten, para $p > q$. Ainda, os contextos para os quais as estimativas são obtidas incluem o caso em que o conjunto

X é um aberto e convexo do espaço euclidiano, uma esfera ou um toro. Ainda cabe informar que os resultados apresentados incluem e estendem aqueles apresentados em [8] e no capítulo 3 de [24].

4.1 Aproximação na norma traço

As hipóteses sobre (X, ν) continuam as mesmas aqui: X é espaço topológico localmente compacto ou primeiro enumerável enquanto que ν é uma medida estritamente positiva. Nesta seção, vamos analisar algumas propriedades do operador integral $\mathcal{F}$ de posto finito e gerado pelo núcleo positivo definido dado pela fórmula

$$F(x, y) := \sum_{n=1}^{\Gamma} \frac{1}{\nu(C_n)} \chi_{C_n}(x) \chi_{C_n}(y), \quad x, y \in X, \quad (4.1.1)$$

sendo $\{C_n : n = 1, 2, \dots, \Gamma\}$ uma família de subconjuntos mensuráveis de X satisfazendo as seguintes condições: $0 < \nu(C_n) < \infty$ e $\nu(C_n \cap C_l) = 0$, $n \neq l$. Esta exigência pretende garantir que F pertença a $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$ e que certos argumentos de ortonormalidade sejam válidos (veja, por exemplo, o início da prova do Lema 4.1.1 a seguir).

Para algumas famílias $\{C_n : n = 1, 2, \dots, \Gamma\}$, a função $\mathcal{F}$ pode ser usada para construir uma aproximação de $\mathcal{K}$ na norma traço por um operador de posto finito. Denotamos por I o operador identidade.

Lema 4.1.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *O operador integral $\mathcal{F} : L^2(X, \nu) \rightarrow L^2(X, \nu)$ é positivo de posto no máximo Γ ;*
- (ii) *O operador $I - \mathcal{F}$ é positivo.*

Demonstração: Como o conjunto $\{\nu(C_n)^{-1/2} \chi_{C_n} : n = 1, 2, \dots, \Gamma\}$ é $L^2(X, \nu)$ -ortonormal, podemos escrever $\mathcal{F}$ na forma

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=1}^{\Gamma} \langle f, \nu(C_n)^{-1/2} \chi_{C_n} \rangle_2 \nu(C_n)^{-1/2} \chi_{C_n}, \quad f \in L^2(X, \nu), \quad (4.1.2)$$

e o item (i) segue. A mesma representação mostra que os autovalores de $\mathcal{F}$ são 0 e 1. Consequentemente, $\mathcal{F}$ tem norma 1 e para cada $f \in L^2(X, \nu)$ vale a igualdade

$$\langle (I - \mathcal{F})(f), f \rangle_2 = \langle f, f \rangle_2 - \langle \mathcal{F}(f), f \rangle_2 \geq \langle f, f \rangle_2 - \|\mathcal{F}\| \langle f, f \rangle_2 = 0. \quad (4.1.3)$$

A prova está completa. □

O resultado seguinte está relacionado com o operador raiz quadrada $\mathcal{K}^{1/2}$ de $\mathcal{K}$. Lembramos que quando $K \in \mathcal{A}_2(X, \nu)$, a função κ pertence a $L^1(X, \nu)$ e K é um núcleo de Mercer.

Lema 4.1.2. *Seja K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) $\mathcal{K}^{1/2} \mathcal{F} \mathcal{K}^{1/2}$ é um operador integral cujo núcleo pertence a $\mathcal{A}_2(X, \nu)$;
- (ii) O posto de $\mathcal{K}^{1/2} \mathcal{F} \mathcal{K}^{1/2}$ é no máximo Γ ;
- (iii) O operador $\mathcal{K} - \mathcal{K}^{1/2} \mathcal{F} \mathcal{K}^{1/2}$ é positivo.

Demonstração: Vamos definir $\mathcal{S} := \mathcal{K}^{1/2}$ e $S = K_{1/2}$, por simplicidade. Lembrando da prova do Teorema 2.4.3, deduzimos que

$$\mathcal{S} \mathcal{F} \mathcal{S}(f)(x) = \int_X S(x, u) \left(\int_X F(u, v) \left(\int_X S(v, y) f(y) d\nu(y) \right) d\nu(v) \right) d\nu(u), \quad x \in X,$$

quando $f \in L^2(X, \nu)$. Usando as expressões de F e S , podemos aplicar o Teorema de Fubini para garantir que $\mathcal{S} \mathcal{F} \mathcal{S}$ é um operador integral sobre $L^2(X, \nu)$, com núcleo $G \in L^2(X \times X, \nu \times \nu)$, dado pela fórmula

$$G(x, y) = \int_X \int_X S(x, u) F(u, v) S(v, y) d\nu(u) d\nu(v), \quad x, y \in X,$$

ou ainda,

$$G(x, y) = \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} S(x, u) F(u, v) S(v, y) d\nu(u) d\nu(v), \quad x, y \in X. \quad (4.1.4)$$

A definição de F produz a expressão

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{n=1}^{\Gamma} \int_X S(x, u) \frac{\chi_{C_n}(u)}{\nu(C_n)^{1/2}} d\nu(u) \int_X S(v, y) \overline{\frac{\chi_{C_n}(v)}{\nu(C_n)^{1/2}}} d\nu(v) \\ &= \sum_{n=1}^{\Gamma} \int_X S(x, u) \frac{\chi_{C_n}(u)}{\nu(C_n)^{1/2}} d\nu(u) \overline{\int_X S(y, v) \frac{\chi_{C_n}(v)}{\nu(C_n)^{1/2}} d\nu(v)} \\ &= \sum_{n=1}^{\Gamma} \mathcal{S} \left(\frac{\chi_{C_n}}{\nu(C_n)^{1/2}} \right) (x) \overline{\mathcal{S} \left(\frac{\chi_{C_n}}{\nu(C_n)^{1/2}} \right) (y)}, \quad x, y \in X. \end{aligned}$$

Segue que $\mathcal{S} \mathcal{F} \mathcal{S}$ tem posto no máximo Γ . O Teorema 2.4.1 garante que G é um núcleo contínuo, enquanto que o Lema 4.1.1-(i) justifica a desigualdade

$$\langle \mathcal{S} \mathcal{F} \mathcal{S}(f), f \rangle_2 = \langle \mathcal{F} \mathcal{S}(f), \mathcal{S}(f) \rangle_2 \geq 0, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

Em outras palavras, $G \in L^2 PD(X) \cap C(X \times X)$. Para finalizar a prova, usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para obter

$$0 \leq G(x, x) = \sum_{n=1}^{\Gamma} \left| \int_X S(x, u) \frac{\chi_{C_n}(u)}{\nu(C_n)^{1/2}} d\nu(u) \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\Gamma} \int_X |S(x, u)|^2 d\nu(u), \quad x \in X.$$

Aplicando agora o Teorema 2.4.5 chegamos às desigualdades

$$0 \leq G(x, x) \leq K(x, x)\Gamma, \quad x \in X,$$

que mostram que a função $x \in X \rightarrow G(x, x)$ pertence a $L^1(X, \nu)$. Com isso, provamos os itens (i) e (ii). Usando agora o Lema 4.1.1-(ii) e (4.1.3), podemos escrever

$$\langle \mathcal{K}(f), f \rangle_2 = \langle \mathcal{S}(f), \mathcal{S}(f) \rangle_2 \geq \langle \mathcal{F}\mathcal{S}(f), \mathcal{S}(f) \rangle_2 = \langle \mathcal{S}\mathcal{F}\mathcal{S}(f), f \rangle_2, \quad f \in L^2(X, \nu),$$

o que prova o item (iii). $\square$

O lema seguinte produz uma expressão que possibilita a comparação entre os traços de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}^{1/2}\mathcal{F}\mathcal{K}^{1/2}$.

Lema 4.1.3. *Seja K em $\mathcal{A}_2(X, \nu)$ e $\mathcal{S} := \mathcal{K}^{1/2}$. Então*

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{K} - \mathcal{S}\mathcal{F}\mathcal{S}) &= \sum_{n=1}^{\Gamma} \frac{1}{\nu(C_n)} \int_{C_n} \int_{C_n} \text{Re}[K(u, u) - K(v, u)] \, d\nu(u) \, d\nu(v) \\ &\quad + \int_{X \setminus (\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n)} K(u, u) \, d\nu(u) \\ &= \sum_{n=1}^{\Gamma} \frac{1}{\nu(C_n)} \int_{C_n} \int_{C_n} \text{Re} \left[\frac{K(u, u) + K(v, v)}{2} - K(v, u) \right] \, d\nu(u) \, d\nu(v) \\ &\quad + \int_{X \setminus (\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n)} K(u, u) \, d\nu(u). \end{aligned}$$

Demonstração: Suponha que K está em $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. O Lema 4.1.2-(i) e a Expressão (4.0.1) podem ser aplicados a $\mathcal{K}$ e a $\mathcal{K}^{1/2}\mathcal{F}\mathcal{K}^{1/2}$. Portanto,

$$\text{tr}(\mathcal{K} - \mathcal{S}\mathcal{F}\mathcal{S}) = \text{tr}(\mathcal{K}) - \text{tr}(\mathcal{K}^{1/2}\mathcal{F}\mathcal{K}^{1/2}) = \int_X K(x, x) \, d\nu(x) - \int_X G(x, x) \, d\nu(x).$$

Vamos calcular cada integral separadamente. Usando a Equação (4.1.4), o Teorema de Fubini e o Teorema 2.4.5, verificamos que

$$\begin{aligned} \int_X G(x, x) \, d\nu(x) &= \int_X \int_X F(u, v) \int_X S(x, u) S(v, x) \, d\nu(x) \, d\nu(u) \, d\nu(v) \\ &= \int_X \int_X F(u, v) K(v, u) \, d\nu(u) \, d\nu(v) \\ &= \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} F(u, v) K(v, u) \, d\nu(u) \, d\nu(v). \end{aligned}$$

A definição de F revela que

$$\int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} F(u, v) \, d\nu(u) = \sum_{n=1}^{\Gamma} \chi_{C_n}(v) = 1, \quad v \in \cup_{n=1}^{\Gamma} C_n, \quad \text{q.s.,}$$

e

$$\int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} F(u, v) d\nu(v) = \sum_{n=1}^{\Gamma} \chi_{C_n}(u) = 1, \quad u \in \cup_{n=1}^{\Gamma} C_n, \text{ q.s..}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} K(u, u) d\nu(u) &= \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} \left[\int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} F(v, u) d\nu(v) \right] K(u, u) d\nu(u) \\ &= \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} \left[\int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} F(u, v) d\nu(u) \right] K(v, v) d\nu(v). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_X K(u, u) d\nu(u) &= \int_{X \setminus (\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n)} K(u, u) d\nu(u) + \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} K(u, u) d\nu(u) \\ &= \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} F(u, v) K(v, v) d\nu(u) d\nu(v) \\ &\quad + \int_{X \setminus (\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n)} K(u, u) d\nu(u). \end{aligned}$$

Sendo assim, tomando $\mathcal{S} = \mathcal{K}^{1/2}$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{K} - \mathcal{S}\mathcal{F}\mathcal{S}) &= \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} F(u, v) [K(v, v) - K(v, u)] d\nu(u) d\nu(v) \\ &\quad + \int_{X \setminus (\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n)} K(u, u) d\nu(u) \\ &= \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} \int_{\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n} F(u, v) \left[\frac{K(u, u) + K(v, v)}{2} - K(v, u) \right] d\nu(u) d\nu(v) \\ &\quad + \int_{X \setminus (\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n)} K(u, u) d\nu(u). \end{aligned}$$

A fórmula dada no enunciado do lema segue da Equação (4.1.1), uma vez que uma aplicação do Teorema de Fubini garante que

$$\int_{C_n} \int_{C_n} L(y, x) d\nu(x) d\nu(y) = \int_{C_n} \int_{C_n} \text{Re } L(y, x) d\nu(x) d\nu(y),$$

quando $L(x, y) = \overline{L(y, x)}$, $x, y \in C_n$, e L é integrável em C_n . □

Nas proposições que seguem, apresentamos um método para estimar os autovalores de $\mathcal{K}$ usando a família $\{C_n : n = 1, 2, \dots, \Gamma\}$ que define F . Este resultado determina as condições adicionais que colocaremos sobre X até o final do capítulo.

Teorema 4.1.4. *Seja K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Se $\{C_n : n = 1, 2, \dots, \Gamma\}$ é uma família de subconjuntos mensuráveis de X para a qual $0 < \nu(C_n) < \infty$ e $\nu(C_n \cap C_l) = 0$, $n \neq l$, então*

$$\begin{aligned} \sum_{n=\Gamma+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \leq & \sum_{n=1}^{\Gamma} \frac{1}{\nu(C_n)} \int_{C_n} \int_{C_n} \operatorname{Re} [K(u, u) - K(v, u)] d\nu(u) d\nu(v) \\ & + \int_{X \setminus (\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n)} K(u, u) d\nu(u). \end{aligned}$$

Demonstração: Considere a série que representa o operador $\mathcal{K}$ gerado pelo núcleo de Mercer K , e defina T como o operador obtido da série de $\mathcal{K}$ truncada em Γ , ou seja,

$$T(f) = \sum_{n=1}^{\Gamma} \lambda_n(\mathcal{K}) \langle f, \phi_n \rangle_2 \phi_n, \quad f \in L^2(X, \nu).$$

O Teorema 1.4.4 implica que

$$\sum_{n=\Gamma+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) = \|\mathcal{K} - T\|_{tr} \leq \|\mathcal{K} - \mathcal{K}^{1/2} \mathcal{F} \mathcal{K}^{1/2}\|_{tr},$$

onde F é definido em (4.1.1). Como

$$\|\mathcal{K} - \mathcal{K}^{1/2} \mathcal{F} \mathcal{K}^{1/2}\|_{tr} = \operatorname{tr}(\mathcal{K}) - \operatorname{tr}(\mathcal{K}^{1/2} \mathcal{F} \mathcal{K}^{1/2}),$$

a desigualdade do enunciado do teorema segue do Lema 4.1.3. □

Uma forma alternativa para o resultado anterior é a seguinte.

Teorema 4.1.5. *Seja K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Se $\{C_n : n = 1, 2, \dots, \Gamma\}$ é uma família de subconjuntos mensuráveis de X para a qual $0 < \nu(C_n) < \infty$ e $\nu(C_n \cap C_l) = 0$, $n \neq l$, então*

$$\begin{aligned} \sum_{n=\Gamma+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \leq & \sum_{n=1}^{\Gamma} \frac{1}{\nu(C_n)} \int_{C_n} \int_{C_n} \operatorname{Re} \left[\frac{K(u, u) + K(v, v)}{2} - K(v, u) \right] d\nu(u) d\nu(v) \\ & + \int_{X \setminus (\cup_{n=1}^{\Gamma} C_n)} K(u, u) d\nu(u). \end{aligned}$$

Demonstração: A prova é análoga à prova do Teorema 4.1.4, bastando usar a segunda igualdade fornecida pelo Lema 4.1.3, aquela envolvendo o núcleo dado por $2^{-1}(K(u, u) + K(v, v)) - K(v, u)$. □

Os resultados acima serão usados para o estudo do decaimento dos autovalores de $\mathcal{K}$ no final do capítulo. Comentamos aqui a ideia a ser utilizada. Já sabemos de antemão

que nas condições de tais resultados, vale

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{n=j+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) = 0,$$

com $\lambda_n(\mathcal{K}) \geq \lambda_{n+1}(\mathcal{K}) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Aplicando o Corolário 1.1.12, verificamos então que $n\lambda_n(\mathcal{K}) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. A ideia que utilizamos é a seguinte: impondo condições convenientes sobre X e K , aplicamos o Teorema 4.1.4 ou 4.1.5 para concluir que

$$\sum_{n=pj^q+l}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \leq \frac{C_1}{j^\gamma}, \quad j \geq n_0,$$

para algum $C_1, \gamma > 0$, com $p, q, l \in \mathbb{N}$. Feito isso, o Teorema 1.1.9, ou um de seus corolários, pode ser aplicado para concluir, por exemplo, que

$$n^{1+\gamma/q} \lambda_n(\mathcal{K}) \leq C_2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para algum $C_2 > 0$.

4.2 (q, t) -compacidade e condições de Lipschitz

Esta seção apresenta as condições técnicas sobre o conjunto X a serem usadas no restante do capítulo. Supomos que o conjunto X é um espaço métrico munido de uma medida estritamente positiva ν e de uma métrica d . A definição seguinte foi introduzida nos trabalhos [25, 26], concomitantemente com o desenvolvimento do presente trabalho.

Definição 4.2.1. *Seja q um número natural e t um número real positivo. Um espaço métrico (X, d) é chamado de (q, t) -compacto quando existir um ponto $x_0 \in X$ e números reais positivos a, b, c, e e r_0 para os quais as seguintes condições se verificam: para cada $N \in \mathbb{N}$ e $r \geq r_0$ existe uma família $\{C_n^r : n = 1, 2, \dots, k(N)\}$ de subconjuntos de X satisfazendo:*

- (i) $\nu(C_n^r \cap C_l^r) = 0, n \neq l$;
- (ii) $d(x, y) \leq ar^t N^{-t}, x, y \in C_n^r$;
- (iii) $\nu(C_n^r) \leq er^q N^{-q}, 1 \leq n \leq k(N)$;
- (iv) $k(N) \leq bN^q$;
- (v) $B[x_0, r] := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} = \bigcup_{n=1}^{k(N)} C_n^r$.

Observação 4.2.2. Uma comparação com o trabalho desenvolvido em [26] revela que a definição anterior é mais restritiva, ou seja, naquele trabalho, não usamos o item (iii) na definição correspondente. Esta mudança permitirá que os resultados de [25] possam ser considerados. Entretanto, o item em questão não será necessário em todos

os resultados, o que ficará claro em suas demonstrações. Um exemplo disso é a prova do Teorema 4.3.1.

Vamos ilustrar a definição de espaço (q, t) -compacto com alguns exemplos importantes. Na realidade, são estes exemplos que motivaram tal definição, uma vez que estão presentes em trabalhos sobre o decaimento dos autovalores de operadores integrais sobre $L^2(X, \nu)$, com X em um desses contextos ([28, 38, 39]).

Exemplo 4.2.3. Um subconjunto Lebesgue-mensurável X de $\mathbb{R}^m$ é $(m, 1)$ -compacto. Basta tomar $a = \sqrt{m}$, $b = 1$, $c = 1/2$, $e = 1$ e escolher algum $x_0 \in X$. Claramente, $B[x_0, r/2]$ é um subconjunto de um cubo m -dimensional (fechado) e de lado r . Subdividindo este cubo em N^m cubos menores (não necessariamente fechados, disjuntos e com lados congruentes), denotados por Q_n^r , $n = 1, 2, \dots, N^m := k(N)$, verificamos que $C_n^r := Q_n^r \cap B[x_0, r/2] \cap X$ satisfaz as condições da definição para $t = 1$ e $q = m$. O número r_0 pode ser qualquer número real positivo.

A ideia deste exemplo pode ser usada para mostrar que certas superfícies são conjuntos $(m, 1)$ -compactos.

Exemplo 4.2.4. Seja A um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^m$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ um mergulho de classe C^1 para o qual $0 < M_1 \leq |f'(x)| \leq M_2$, $x \in A$. Introduzindo em $f(X)$, $X \subset A$, uma estrutura de espaço de medida, seguindo [31, p.29] e [44, p.188], podemos verificar que $f(X)$ munido da distância euclidiana é $(m, 1)$ -compacto. Para ver isso, note que existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que $c_1|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \leq c_2|f(x) - f(y)|$, $x, y \in X$. Com isso, podemos usar a $(m, 1)$ -compacidade de X para concluir a afirmação.

Exemplo 4.2.5. Um processo similar ao apresentado nos exemplos anteriores pode ser usado para verificar as condições da definição de (q, t) -compacidade, exceto a condição (iii), quando X é um subconjunto de uma superfície p -dimensional de $\mathbb{R}^m$, munido de uma medida de superfície. Podemos mostrar tais condições quando (X, d) é um espaço métrico, sendo d a métrica induzida pela norma usual de $\mathbb{R}^m$, para $q = m_1 \leq m$ e $t = 1$. Ainda, se X é um subconjunto de uma variedade p -dimensional M de classe C^k e munida de uma medida finita em bolas, podemos usar um dos teoremas de Whitney ([33, p.54]) e mostrar que (X, d) é $(m, 1)$ -compacto sempre que m for suficientemente grande e $d(x, y) := d_1(f(x), f(y))$, para algum mergulho $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{m+p}$, onde d_1 é a métrica em $f(M)$, induzida pela norma usual de $\mathbb{R}^{m+p}$.

Veremos mais dois exemplos especiais e muito usados.

Exemplo 4.2.6. A ideia dos exemplos anteriores pode ser adaptada para mostrar que o toro usual ([41, p.53])

$$T^2 = \{(2 \cos t + \cos s \cos t, 2 \sin t + \cos s \sin t, \sin s) : s, t \in [-\pi, \pi]\}$$

no espaço euclidiano tridimensional, munido da distância euclidiana ou geodésica e da medida de superfície usual, é $(2, 1)$ -compacto.

O mesmo argumento aplica-se aos toros m -dimensionais. Logo, certos subconjuntos do toro usual T^m são $(m, 1)$ -compactos.

Exemplo 4.2.7. Resultados técnicos encontrados em [28] e [53, p.18, 219] mostram que subconjuntos da esfera euclidiana unitária S^{m-1} , e consequentemente de qualquer esfera euclidiana em $\mathbb{R}^m$, munida da medida de superfície ν_m usual, é $(m-1, 1)$ -compacta. Os números que verificam a definição para S^{m-1} são $a = \pi/2$, $b = 10$, $c = 1$, $e = \nu_{m-1}(S^{m-2})(\pi/2)^{m-1}$ e $r_0 = 2$. O ponto x_0 pode ser qualquer ponto em S^{m-1} .

Vejam agora uma propriedade básica dos espaços (q, t) -compactos.

Lema 4.2.8. *Sejam (X, d) um espaço métrico, q um inteiro positivo e t um número real positivo. Se $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e cada X_j é mensurável e não vazio então (X, d) é (q, t) -compacto se, e somente se, cada (X_j, d) é (q, t) -compacto.*

Demonstração: Suponha que o espaço métrico (X, d) é (q, t) -compacto com $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e fixe $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Sejam $x_0 \in X$ e a, b, c, e e r_0 as constantes que surgem da definição de (q, t) -compacidade. Tome

$$\alpha = \max\{d(x_0, X_l) : l = 1, 2, \dots, m\}$$

e escolha $x_0^j \in B[x_0, \alpha + 1] \cap X_j$. Agora, defina $B_j[x_0^j, r] := B[x_0^j, r] \cap X_j$. Se $r \geq \alpha + 1$ e $x \in B_j[x_0^j, r]$ então

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_0^j) + d(x_0^j, x_0) \leq r + \alpha \leq 2r,$$

ou seja, $B_j[x_0^j, r] \subset B[x_0, 2r]$. Se $r \geq \max\{r_0, \alpha + 1\}$ então podemos tomar a família $\{C_n^{2r} : n = 1, 2, \dots, k(N)\}$, $k(N) \leq bN^q$, da definição de (q, t) -compacidade de (X, d) , e definir

$$C_n^r(j) := C_n^{2r} \cap B_j[x_0^j, rc], \quad n = 1, 2, \dots, k(N).$$

Claramente, $\nu(C_n^r(j) \cap C_i^r(j)) = 0$, $n \neq i$. Além disso,

$$d(x, y) \leq a(2r)^t N^{-t} = (a2^t)r^t N^{-t}, \quad x, y \in C_n^r(j), \quad n = 1, 2, \dots, k(N),$$

e

$$\nu(C_n^r(j)) \leq \nu(C_n^{2r}) \leq (e2^q)r^q N^{-q}, \quad n = 1, 2, \dots, k(N).$$

Finalmente, a igualdade

$$\cup_{n=1}^{k(N)} C_n^r(j) = \left(\cup_{n=1}^{k(N)} C_n^{2r} \right) \cap B_j[x_0^j, rc] = B[x_0, 2rc] \cap B_j[x_0^j, rc] = B_j[x_0^j, rc]$$

completa a prova da (q, t) -compacidade de (X_j, d) .

Reciprocamente, suponha que (X_j, d) é (q, t) -compacto, $j = 1, 2, \dots$. Sejam $x_0^j \in X_j$ e a_j, b_j, c_j, e_j e r_0^j as constantes dadas na definição da (q, t) -compacidade de (X_j, d) . Vamos mostrar a (q, t) -compacidade de (X, d) usando as seguintes constantes: $a = \max\{a_j : j = 1, 2, \dots, m\}$, $b = \max\{b_j : j = 1, 2, \dots, m\}$, $c = \min\{c_j : j = 1, 2, \dots, m\}$ e $e = \max\{e_j : j = 1, 2, \dots, m\}$. Para isso, definimos primeiramente $\beta = \max\{d(x_0^1, x_0^j) : j = 2, 3, \dots, m\}$ e $r_0 = \max\{r_0^j : j = 1, 2, \dots, m\}$. Se r e rc são no mínimo $\beta + r_0$ e $x \in B[x_0^1, rc] \cap X_j$, para algum j , então $d(x, x_0^j) \leq d(x, x_0^1) + d(x_0^1, x_0^j) \leq rc + \beta \leq 2rc$, ou seja, $x \in B_j[x_0^j, 2rc_j]$. Logo,

$$B[x_0^1, rc] \subset \cup_{j=1}^m B_j[x_0^j, 2rc_j] \subset \cup_{j=1}^m B_j[x_0^j, 2rc_j].$$

Fixando um inteiro positivo N e tomando $x_0 := x_0^1$. Mantendo r sujeito às escolhas anteriores, podemos selecionar as famílias $\{C_n^{2r}(j) : n = 1, 2, \dots, k_j(N)\}$ satisfazendo as condições da (q, t) -compacidade de (X_j, d) . Definindo

$$\hat{C}_n^r(1) := C_n^{2r}(1) \cap B[x_0, rc], \quad n = 1, 2, \dots, k_1(N),$$

e, indutivamente,

$$\hat{C}_n^r(j) := (C_n^{2r}(j) \cap B[x_0, rc]) \setminus \bigcup_{l=1}^{j-1} \bigcup_{i=1}^{k_l(N)} \hat{C}_i^r(l),$$

para $j = 2, 3, \dots, m$ e $n = 1, 2, \dots, k_j(N)$, podemos considerar agora a família F de todos os $\hat{C}_n^r(j)$ não vazios. Podemos ver que F pode ser indexada por um conjunto de cardinalidade no máximo mbN^q . Quaisquer dois conjuntos distintos de F são disjuntos. Se $\hat{C}_n^r(j) \in F$ então $d(x, y) \leq 2^t ar^t N^{-t}$, $x, y \in \hat{C}_n^r(j)$. Ainda, $\nu(\hat{C}_n^r(j)) \leq 2^q er^q N^{-q}$. Para finalizar,

$$\begin{aligned} \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{n=1}^{k_j(N)} \hat{C}_n^r(j) &= \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{n=1}^{k_j(N)} [(C_n^{2r}(j) \cap B[x_0, rc]) \setminus \bigcup_{l=1}^{j-1} \bigcup_{i=1}^{k_l(N)} \hat{C}_i^r(l)] \\ &= \bigcup_{j=1}^m [\bigcup_{n=1}^{k_j(N)} C_n^{2r}(j)] \cap B[x_0, rc] \\ &= (\bigcup_{j=1}^m B_j[x_0^j, 2rc_j]) \cap B[x_0^1, rc] = B[x_0^1, rc] = B[x_0, rc]. \end{aligned}$$

Segue que (X, d) é (q, t) -compacto. □

Note que o lema anterior ainda é verdadeiro se considerarmos a Definição 4.2.1 sem o item (iii) (veja a Observação 4.2.2).

A definição seguinte apresenta uma das condições de Lipschitz que adotamos. Tal definição é motivada pelo Teorema 4.1.4. Enfatizamos que no restante do capítulo, o conjunto X é um espaço métrico munido da métrica d , enquanto que ν continua sendo estritamente positiva, embora isto não entre decisivamente em todos os argumentos.

Definição 4.2.9. *Sejam $\alpha > 0$ e $s \geq 0$ constantes reais. Um núcleo G é um elemento da classe $Lip^{\alpha, s}(X, \nu)$ quando as condições abaixo valem:*

(i) *Existe $\delta > 0$ e uma função mensurável $A : X \rightarrow [0, \infty]$ tais que*

$$|G(x, x) - G(x, y)| \leq A(x)d(x, y)^\alpha, \quad x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta;$$

(ii) *Existe $B \geq 0$ tal que*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-s} \int_{B[y, r]} A(x) d\nu(x) < B, \quad y \in X.$$

Em alguns casos vamos escrever $Lip_A^{\alpha, s}(X, \nu)$ para enfatizar a função A usada em (i). Eventualmente vamos usar a notação $G \in Lip_A^{\alpha, s}(Y, \nu)$, com $Y \subset X$, para dizer que

a restrição $G|_{Y \times Y}$ de G a $Y \times Y$ está neste conjunto. O mesmo raciocínio se aplica às definições seguintes.

A definição anterior, além de ter sido utilizada em [26], pode ser encontrada em outros trabalhos da literatura (veja [8] por exemplo). Ela é uma versão mais fraca de outro conceito encontrado em outras referências tais como [28, 38, 39]. Nestes casos, a desigualdade em (i) toma a forma não local

$$|G(x, y) - G(x, y')| \leq A(x)d(y, y')^\alpha, \quad x, y, y' \in X.$$

Utilizaremos esta versão em uma aplicação na Seção 5.1.

Introduzimos agora uma noção alternativa para o conceito de continuidade uniforme que é mais adequada para os nossos interesses ([9]). Seja V um espaço vetorial normado. A função $G : X \times X \rightarrow V$ é *uniformemente contínua na diagonal* de $X \times X$ se, para todo número real $\epsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|G(x, y) - G(x, x)\| < \epsilon, \quad x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta.$$

É claro que uma função uniformemente contínua é uniformemente contínua na diagonal quando $X \times X$ estiver munido da métrica da soma, entretanto, isto pode não ser uma equivalência. Quando G é um núcleo hermitiano, a última desigualdade implica em

$$\left\| \frac{G(x, x) + G(y, y)}{2} - G(y, x) \right\| < \epsilon, \quad x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta.$$

O conceito de função uniformemente contínua na diagonal e o Teorema 4.1.5 motivam a seguinte definição formal.

Definição 4.2.10. *Sejam $\alpha > 0$ e G um núcleo sobre X . Dizemos que G tem a propriedade da média- α sempre que pudermos encontrar uma constante $M > 0$ satisfazendo a seguinte condição: para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\left| \frac{G(x, x) + G(y, y)}{2} - G(y, x) \right| < Md(x, y)^\alpha \epsilon, \quad x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta.$$

Vejam um exemplo.

Exemplo 4.2.11. Sejam U um conjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^m$ e $G : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ um núcleo hermitiano para o qual $\partial G / \partial x$ é uniformemente contínua na diagonal de $S \times S$, onde S é uma superfície conexa e de classe C^1 em U , munida de uma distância geodésica d . Fixado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x) \right\| < \epsilon, \quad x, y \in S, \quad d(x, y) < \delta. \quad (4.2.1)$$

Como G é real e hermitiano,

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial G}{\partial x}(y, x), \quad x, y \in U. \quad (4.2.2)$$

A seguir vamos aplicar a desigualdade do valor médio para o núcleo $L : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L(x, y) = \frac{G(x, x) + G(y, y)}{2} - G(y, x), \quad x, y \in U.$$

Cálculos diretos mostram que L é diferenciável e que $L(x, x) = 0$, $x \in U$. Sendo assim, deduzimos que

$$|L(x, x) - L(x, y)| = \left| \frac{G(x, x) + G(y, y)}{2} - G(y, x) \right| \leq d(x, y) \sup_{z \in \overline{xy}} \|L'(x, z)\|,$$

para todo $x, y \in S$, com $\overline{xy}$ denotando uma geodésica ligando x a y em S e L' a derivada de L . Usando a Equação (4.2.2), podemos ver que

$$L'(x, y) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x, x) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) \right) + \left(\frac{\partial G}{\partial x}(y, y) - \frac{\partial G}{\partial x}(y, x) \right),$$

enquanto que a Desigualdade (4.2.1) mostra que $|L(x, x) - L(x, y)| \leq 2d(x, y)\epsilon$, quando $x, y \in S$ e $d(x, y) < \delta$. Em particular, a restrição de G a $S \times S$ possui a propriedade da média-1. A mesma conclusão pode ser aplicada para a restrição de G a um subconjunto de $S \times S$.

Uma versão mais fraca do conceito anterior está presente na definição que segue.

Definição 4.2.12. *Sejam $\alpha > 0$ e $s \geq 0$ constantes e G um núcleo sobre X . Dizemos que G possui a propriedade da média- $Lip^{\alpha, s}(X, \nu)$ quando:*

(i) *Existe $\delta > 0$ e uma função mensurável $A : X \rightarrow [0, \infty]$ tais que*

$$\left| \frac{G(x, x) + G(y, y)}{2} - G(y, x) \right| \leq A(x)d(x, y)^\alpha, \quad x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta;$$

(ii) *Existe $B \geq 0$ tal que*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-s} \int_{B[y, r]} A(x) d\nu(x) < B, \quad y \in X.$$

Note que, se G é hermitiano e pertence a $Lip_A^{\alpha, s}(X, \nu)$, com A uma função constante, a função G tem a propriedade da média- $Lip^{\alpha, s}(X, \nu)$. A outra inclusão parece não ser verdadeira. É uma boa hora para dizer que algumas definições introduzidas aqui fazem-se necessárias para que possamos estender alguns resultados de [8, 24] para casos onde X não é o fecho de um subconjunto aberto do espaço euclidiano.

Para completar a discussão apresentamos o próximo resultado.

Proposição 4.2.13. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto. Se K é um núcleo sobre X com a propriedade da média- α , para algum $\alpha > 0$, então K possui a propriedade da média- $Lip^{\alpha, q}(X, \nu)$.*

Demonstração: Suponha que K possui a propriedade da média- α e tome M como descrito na Definição 4.2.10. Existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{G(x, x) + G(y, y)}{2} - G(y, x) \right| < M d(x, y)^\alpha, \quad x, y \in X, \quad d(x, y) < \delta,$$

e a condição (i) da Definição 4.2.12 se verifica. Para o item (ii), pretendemos usar o ponto $x_0 \in X$ e as constantes b, e e r_0 dadas pela definição da (q, t) -compacidade de X . Tome $y \in X$ e defina $r_1 := d(y, x_0) + r_0$. Claramente,

$$B[y, r] \subset B[x_0, 2r], \quad r \geq r_1.$$

Logo, tomando um inteiro positivo N e uma constante $r > 0$ suficientemente grande e usando a família $\{C_n^{2r}\}$ que vem da definição da (q, t) -compacidade de X , podemos deduzir as desigualdades

$$\begin{aligned} r^{-q} \int_{B[y, r]} M d\nu(x) &\leq r^{-q} \int_{B[x_0, 2r]} M d\nu(x) \\ &= r^{-q} M \sum_{n=1}^{k(N)} \int_{C_n^{2r}} d\nu(x) \\ &\leq r^{-q} M \sum_{n=1}^{bN^q} e 2^q r^q N^{-q} = M b e 2^q. \end{aligned}$$

Assim, a condição (ii) da Definição 4.2.12 segue. $\square$

Vejamos agora outro exemplo.

Exemplo 4.2.14. Vamos retornar ao contexto do Exemplo 4.2.11. Se $\partial G / \partial x$ existe e pertence a $Lip_A^{\alpha, s}(S, \nu)$, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{G(x, x) + G(y, y)}{2} - G(y, x) \right| \leq [A(u) + A(v)] d(x, y)^{\alpha+1},$$

sempre que $x, y \in X$ e $d(x, y) < \delta$, com $u, v \in \overline{xy}$. Em particular, se a função A é constante então a restrição de G a $S \times S$ possui a propriedade da média- $Lip^{\alpha+1, s}(S, \nu)$. A mesma conclusão se aplica a restrição de G a um subconjunto mensurável $X \times X$ de $S \times S$. Ainda, se $\partial G / \partial x$ é contínua e $\partial^2 G / \partial x \partial y$ existe e é limitada, podemos tomar $\alpha = 1$ e $s = q$ nas considerações anteriores, contanto que S seja (q, t) -compacto.

Observação 4.2.15. No Exemplo 4.2.11, se supormos que $S \cap U = \cup_{i=1}^n S_i$ (união disjunta), os mesmos argumentos usados podem ser aplicados para concluir que a restrição de G a $S_i \times S_i$ possui a propriedade da média-1. Uma observação semelhante aplica-se ao Exemplo 4.2.14. Isto motiva o contexto dos teoremas da seção seguinte.

4.3 Estimativas auxiliares

O contexto adotado nesta seção precisa ser aquele em que os resultados enunciados até o momento sejam válidos. Sendo assim, supomos que (X, d) é um espaço métrico munido de uma medida estritamente positiva ν e que o núcleo K é um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. A sequência de autovalores do operador $\mathcal{K}$ será sempre escrita na forma $\lambda_1(\mathcal{K}) \geq \lambda_2(\mathcal{K}) \geq \dots$, considerando-se as multiplicidades algébricas de cada autovalor. Estas condições básicas são supostas até o final do capítulo.

Descrevemos resultados técnicos necessários ao estudo do decaimento dos autovalores de $\mathcal{K}$ quando K satisfaz alguma condição do tipo Lipschitz. Este decaimento se aplica ao contexto em que o espaço (X, d) satisfaz a condição de (q, t) -compacidade.

O primeiro resultado da seção descreve uma limitação para a soma dos autovalores de $\mathcal{K}$. Os conjuntos X_j a seguir serão sempre subconjuntos mensuráveis de X .

Teorema 4.3.1. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $\operatorname{Re} K$ possui a propriedade da média- α em cada $X_j \times X_j$, para algum $\alpha > 0$. Suponha ainda que existe $\beta > 0$ tal que*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^\beta \int_{X \setminus B[y, r]} K(x, x) d\nu(x) = 0, \quad y \in X.$$

Defina $\gamma := \beta t \alpha (\beta + q + t \alpha)^{-1}$. Se $n \in \mathbb{N}$ então existe $b > 0$ e um inteiro $k(n) \in \{1, \dots, mbn^q\}$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k(n)+1}^{\infty} n^\gamma \lambda_j(\mathcal{K}) = 0.$$

Demonstração: Fixe $\epsilon > 0$. Usando a Definição 4.2.10, podemos escolher $\delta > 0$ e $M > 0$ tais que

$$\left| \operatorname{Re} \left[\frac{K(x, x) + K(y, y)}{2} - K(y, x) \right] \right| < M d(x, y)^\alpha \epsilon, \quad x, y \in X_j,$$

para $j = 1, 2, \dots, m$, sempre que $d(x, y) \leq \delta$. Lembrando da prova do Lema 4.2.8, podemos escolher um ponto $x_0^j \in X_j$ e números reais positivos a, b, c, e e r_0 para os quais a seguinte afirmação é válida: se $N \in \mathbb{N}$, $r \geq r_0$ e $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ existe uma família $\{C_n^r(j) : n = 1, 2, \dots, k_j(N)\}$ de subconjuntos de X_j tais que:

- $\nu(C_n^r(j) \cap C_l^r(j)) = 0$, $n \neq l$;
- $d(x, y) \leq ar^t N^{-t}$, $x, y \in C_n^r(j)$;
- $\nu(C_n^r(j)) \leq er^q N^{-q}$, $n = 1, 2, \dots, k_j(N)$;
- $k_j(N) \leq bN^q$;
- $B_j[x_0^j, rc] = \bigcup_{n=1}^{k_j(N)} C_n^r(j)$.

Vamos aplicar este fato na conclusão da prova, usando uma escolha adequada para r . Na realidade, fixamos N e usamos a conclusão acima com $r = r(N) := N^{t\alpha/(\beta+q+t\alpha)}$. Esta escolha tem as seguintes características: $r(N) \rightarrow \infty$ e $N^{-1}r(N) \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$, enquanto que $r(N) > r_0$ e $aN^{-t}r(N)^t < \delta$, para N suficientemente grande. Aplicando agora o Teorema 4.1.5 deduzimos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=\Gamma+1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{k_j(N)} \frac{1}{\nu(C_n^r(j))} \int_{C_n^r(j)} \int_{C_n^r(j)} \operatorname{Re} L(x, y) d\nu(x) d\nu(y) \\ &\quad + \int_{X \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j[x_0^j, rc]} K(x, x) d\nu(x), \end{aligned}$$

onde $\Gamma := \sum_{j=1}^m k_j(N) \leq mbN^q$ e

$$L(x, y) := \frac{K(x, x) + K(y, y)}{2} - K(y, x), \quad x, y \in X.$$

Note que podemos supor que $\nu(C_n^r(j)) > 0$ para todo $n = 1, 2, \dots, k_j(N)$ na desigualdade acima. Vamos limitar a soma dupla acima, que chamamos de S_1 , como segue:

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{k_j(N)} \frac{1}{\nu(C_n^r(j))} \int_{C_n^r(j)} \int_{C_n^r(j)} Md(x, y)^\alpha \epsilon d\nu(x) d\nu(y) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{k_j(N)} \frac{1}{\nu(C_n^r(j))} \int_{C_n^r(j)} \int_{C_n^r(j)} Ma^\alpha r^{t\alpha} N^{-t\alpha} \epsilon d\nu(x) d\nu(y) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{k_j(N)} Ma^\alpha r^{t\alpha} N^{-t\alpha} \nu(C_n^r(j)) \epsilon \\ &\leq mbeMa^\alpha r^{q+t\alpha} N^{-t\alpha} \epsilon. \end{aligned}$$

Para r suficientemente grande chegamos a

$$\int_{X \setminus \bigcup_{j=1}^m B_j[x_0^j, rc]} K(x, x) d\nu(x) \leq \int_{X \setminus B[x_0^1, rc/2]} K(x, x) d\nu(x) \leq \frac{\epsilon}{r(N)^\beta}.$$

Introduzindo nossa escolha para r , finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=k(N)+1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) &\leq pbea^\alpha M \epsilon \frac{r(N)^{q+t\alpha}}{N^{t\alpha}} + \frac{\epsilon}{r(N)^\beta} \\ &= mbea^\alpha M \epsilon \frac{(N^{t\alpha/(\beta+q+t\alpha)})^{q+t\alpha}}{N^{t\alpha}} + \frac{\epsilon}{(N^{t\alpha/(\beta+q+t\alpha)})^\beta} \\ &= \frac{mbea^\alpha M \epsilon}{N^{t\alpha\beta/(\beta+q+t\alpha)}} + \frac{\epsilon}{N^{t\alpha\beta/(\beta+q+t\alpha)}}, \end{aligned}$$

contanto que N seja suficientemente grande. Em particular, nestas mesmas condições,

$$\sum_{j=k(N)+1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) \leq \frac{C_1 \epsilon}{N^\gamma},$$

onde $C_1 = mbea^\alpha M + 1$ e $k(N) \leq mbN^q$. O resultado segue. $\square$

O teorema anterior fica bem mais simples quando condições mais fortes sobre X ou K são impostas, conforme o corolário seguinte. Nestes casos, a condição sobre o limite não é necessária.

Corolário 4.3.2. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $Re K$ possui a propriedade da média- α em cada $X_j \times X_j$, para algum $\alpha > 0$. Se X ou o suporte de K é limitado então existe uma constante $b > 0$ e um inteiro $k(n) \in \{0, 1, \dots, mbn^q\}$ tais que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=k(n)+1}^{\infty} n^{t\alpha} \lambda_j(\mathcal{K}) = 0.$$

Demonstração: Se a condição adicional sobre X ou K vale, para cada $y \in X$, existe $r_0 > 0$ tal que

$$\int_{X \setminus B[y, rc]} K(x, x) d\nu(x) = 0, \quad r \geq r_0.$$

Para continuar, repetimos os argumentos da prova do Teorema 4.3.1, aplicando a propriedade da média- α para $\epsilon > 0$ arbitrário e $r = r_0 + 1$. A estimativa para S_1 torna-se $|S_1| \leq (mbeMa^\alpha r^{q+t\alpha} n^{-t\alpha})\epsilon$, para n suficientemente grande. Sendo assim, para r suficientemente grande e fixo, podemos encontrar um número $k(n)$ em $\{0, 1, \dots, mbn^q\}$ tal que

$$\sum_{j=k(n)+1}^{\infty} n^{t\alpha} \lambda_j(\mathcal{K}) \leq (mbea^\alpha M r^{q+t\alpha})\epsilon,$$

para n suficientemente grande. $\square$

Finalizamos a seção com uma variante do Teorema 4.3.1 na qual trocamos a propriedade da média- α por uma condição de Lipschitz. Destacamos que tal resultado é,

como sua prova mostra, ainda verdadeiro quando a condição (iii) da Definição 4.2.1 de (q, t) -compacidade não está presente. O mesmo comentário se aplica àqueles resultados que são consequências do teorema.

Teorema 4.3.3. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $\operatorname{Re} K$ pertença a classe $\operatorname{Lip}^{\alpha, s}(X_j, \nu)$ ou possui a propriedade da média- $\operatorname{Lip}^{\alpha, s}(X_j, \nu)$, para cada X_j e algum $\alpha > 0$ e $s \geq 0$. Suponha ainda que existam $\beta > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^\beta \int_{X \setminus B[y, r]} K(x, x) d\nu(x) < C, \quad y \in X.$$

Defina $\gamma := t\alpha\beta(\beta + s + t\alpha)^{-1}$. Se $n \in \mathbb{N}$ então existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\sum_{j=k(n)+1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) \leq \frac{C_1}{n^\gamma},$$

para algum $k(n) \in \{0, 1, \dots, mbn^q\}$.

Demonstração: Suponha primeiro que a restrição de $\operatorname{Re} K$ a cada $X_j \times X_j$ esteja em $\operatorname{Lip}^{\alpha, s}(X_j, \nu)$. Usando a mesma notação e o raciocínio do início da prova do Teorema 4.3.1 e usando o Teorema 4.1.4, deduzimos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=\Gamma+1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{k_j(N)} \frac{1}{\nu(C_n^r(j))} \int_{C_n^r(j)} \int_{C_n^r(j)} \operatorname{Re} [K(x, x) - K(y, x)] d\nu(x) d\nu(y) \\ &\quad + \int_{X \setminus \cup_{j=1}^m B_j[x_0^j, rc]} K(x, x) d\nu(x), \end{aligned}$$

onde $\Gamma := \sum_{j=1}^m k_j(N) \leq mbN^q$ e $r > r_0$. Aumentando r_0 se necessário, obtemos

$$\int_{B[x_0, rc]} A(x) d\nu(x) \leq Br^s, \quad r \geq r_0,$$

para algum $B > 0$, onde A vem da condição de Lipschitz. A condição do limite superior garante que

$$\int_{X \setminus \cup_{j=1}^m B_j[x_0^j, rc]} K(x, x) d\nu(x) \leq \int_{X \setminus B[x_0, rc/2]} K(x, x) d\nu(x) \leq \frac{2^\beta C c^{-\beta}}{r^\beta}.$$

Tomando $r = r(N) := N^{\alpha t / (\beta + \alpha t + s)}$ e N grande, podemos usar a condição de Lipschitz para concluir que

$$\sum_{n=k(N)+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \leq \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{k_j(N)} \frac{1}{\nu(C_n^r(j))} \int_{C_n^r(j)} \int_{C_n^r(j)} A(x) d(x, y)^\alpha d\nu(x) d\nu(y) + \frac{2^\beta C c^{-\beta}}{r^\beta}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k(N)+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) &\leq \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{k_j(N)} \frac{1}{\nu(C_n^r(j))} \int_{C_n^r(j)} \int_{C_n^r(j)} A(x) a^\alpha \left(\frac{r}{N} \right)^{t\alpha} d\nu(x) d\nu(y) \\
&\quad + \frac{2^\beta C c^{-\beta}}{r^\beta} \\
&\leq a^\alpha \left(\frac{r}{N} \right)^{t\alpha} \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{k_j(N)} \int_{C_n^r(j)} A(x) d\nu(x) + \frac{2^\beta C c^{-\beta}}{r^\beta} \\
&\leq a^\alpha \left(\frac{r}{N} \right)^{t\alpha} \int_{B[x_0, r c]} A(x) d\nu(x) + \frac{2^\beta C c^{-\beta}}{r^\beta} \\
&\leq a^\alpha \left(\frac{r}{N} \right)^{t\alpha} B r^s + \frac{2^\beta C c^{-\beta}}{r^\beta} \\
&= B a^\alpha \frac{r^{\alpha t+s}}{N^{\alpha t}} + \frac{2^\beta C c^{-\beta}}{r^\beta},
\end{aligned}$$

para $r \geq r_0$ e N suficientemente grande. Substituindo r por $r(N)$, vemos que

$$\sum_{n=k(N)+1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \leq \frac{B a^\alpha + 2^\beta C c^{-\beta}}{N^{\alpha t \beta / (\alpha t + \beta + s)}}.$$

A prova do primeiro caso segue. Para o segundo caso, proceda como na prova do Teorema 4.3.1 e use os argumentos da parte anterior. $\square$

O resultado seguinte é um caso especial.

Corolário 4.3.4. *Seja (X, d) um espaço (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $\text{Re } K$ pertence a $\text{Lip}^{\alpha, s}(X_j, \nu)$ ou possui a propriedade da média- $\text{Lip}^{\alpha, s}(X_j, \nu)$, para cada X_j e algum $\alpha > 0$ e $s \geq 0$. Se X é limitado ou o suporte de K é limitado então existe $C_1 > 0$ tal que*

$$\sum_{j=k(n)+1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{K}) \leq \frac{C_1}{n^{t\alpha}},$$

para algum $k(n) \in \{0, 1, \dots, m b n^q\}$.

Demonstração: Basta seguir o procedimento da prova do Corolário 4.3.2 usando os argumentos da prova do Teorema 4.3.3. $\square$

4.4 Decaimento de autovalores

Nesta seção usamos os resultados obtidos até o momento para analisar o decaimento dos autovalores do operador $\mathcal{K}$. As conclusões estendem aqueles resultados de [8, 24] e

estão registradas nos artigos [25, 26]. Um contexto tratado em [8] é aquele em que X é um intervalo ilimitado e $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\beta k(x) = 0$, para algum $\beta > 1$.

Um dos resultados principais do capítulo pode agora ser enunciado.

Teorema 4.4.1. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $Re K$ pertença a classe $Lip^{\alpha, s}(X_j, \nu)$ ou possui a propriedade da média- $Lip^{\alpha, s}(X_j, \nu)$, para cada X_j e para algum $\alpha > 0$ e $s \geq 0$. Ainda, suponha a existência de constantes $\beta > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^\beta \int_{X \setminus B[y, r]} K(x, x) d\nu(x) < C, \quad y \in X.$$

Defina $\gamma := \beta t \alpha (\beta + s + t \alpha)^{-1}$. Neste caso,

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1-\gamma/q}), \quad n \rightarrow \infty,$$

e $\mathcal{K} \in \mathcal{S}_p$ quando $p > (1 + \gamma/q)^{-1}$.

Demonstração: A primeira afirmação segue dos teoremas 4.3.3 e 1.1.9. Para finalizar, note que, se $C > 0$ e $\lambda_n(\mathcal{K}) \leq C n^{-1-\gamma/q}$ então

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\mathcal{K}))^p \leq C^p \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\gamma/q)p} < \infty,$$

contanto que $p > (1 + \gamma/q)^{-1}$. □

Este resultado pode ser refinado através do seguinte corolário.

Corolário 4.4.2. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $Re K$ pertence a $Lip^{\alpha, s}(X_j, \nu)$ ou possui a propriedade da média- $Lip^{\alpha, s}(X_j, \nu)$, para cada X_j e para algum $\alpha > 0$ e $s \geq 0$. Se, para cada $\beta > 0$, existe $C = C(\beta) > 0$ tal que*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^\beta \int_{X \setminus B[y, r]} K(x, x) d\nu(x) < C, \quad y \in X,$$

então

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1-\theta/q}), \quad n \rightarrow \infty,$$

para todo $\theta \in [0, t\alpha]$. Ainda, $\mathcal{K} \in \mathcal{S}_p$ quando $p > (1 + t\alpha/q)^{-1}$.

Demonstração: A função

$$\gamma(\beta) := t\alpha \frac{\beta}{\beta + s + t\alpha}, \quad \beta \in [0, \infty),$$

é contínua e sua imagem é $[0, t\alpha)$. Sendo assim, o teorema anterior garante que

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1-\theta/q}), \quad n \rightarrow \infty,$$

sempre que $\theta \in [0, t\alpha)$. Supondo por absurdo que

$$\lambda_n(\mathcal{K}) \neq o(n^{-1-\gamma_0/q}), \quad n \rightarrow \infty,$$

para algum $\gamma_0 \in [0, t\alpha)$, deve existir $C > 0$ para o qual

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{n^{1+\gamma_0/q} \lambda_n(\mathcal{K})\} \geq C.$$

Mas isto implicaria que a sequência $\{n^{1+\theta/q} \lambda_n(\mathcal{K})\}$ é ilimitada, para $\theta \in (\gamma_0, t\alpha)$, o que é uma contradição. $\square$

Observação 4.4.3. Note que o fato de $n^{1/q} \alpha_n \rightarrow 0$, isto é, $\alpha_n = o(n^{-1/q})$ quando $n \rightarrow \infty$, não implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^q < \infty.$$

Sendo assim, esta convergência pode ocorrer para $q > p$, e ser falsa para $q = p$. Como exemplo, considere $X = [-1, 1]$ munido da medida de Lebesgue usual e $\lambda_n(\mathcal{K}) = ((n+1) \log(n+1))^{-5/2}$. Então o núcleo

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \cos(n\pi x) \cos(n\pi y), \quad x, y \in X,$$

gera um operador integral $\mathcal{K}$ pertencente a classe $\mathcal{S}_p$, $p > 2/5$, mas não pertencente a $\mathcal{S}_{2/5}$. Isto ratifica que a condição $\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1/q})$ ou $\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1/q})$, quando $n \rightarrow \infty$, é mais fraca que a condição $\mathcal{K} \in \mathcal{S}_q$. Em particular, isto sugere que o estudo do decaimento de autovalores pode não ser uma forma ótima de se determinar qual classe $\mathcal{S}_p$ inclui o operador integral em análise.

O Corolário 4.3.4 e o Teorema 1.1.9 produzem o seguinte resultado, que é ainda um refinamento do corolário anterior.

Teorema 4.4.4. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $Re K$ pertence a $Lip^{\alpha, s}(X_j, \nu)$ ou possui a propriedade da média- $Lip^{\alpha, s}(X_j, \nu)$, para cada X_j e para algum $\alpha > 0$ e $s \geq 0$. Se X ou o suporte de K é limitado então*

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = O(n^{-1-t\alpha/q}), \quad n \rightarrow \infty,$$

e $\mathcal{K} \in \mathcal{S}_p$ quando $p > (1 + t\alpha/q)^{-1}$.

Lembrando da Proposição 4.2.13, notamos que os resultados já obtidos apresentam uma estimativa para o decaimento dos autovalores para operadores integrais gerados por núcleos em $\mathcal{A}_2(X, \nu)$ e possuindo a propriedade da média- α . Os resultados seguintes produzem estimativas mais finas, no mesmo contexto. Estes resultados serviram de motivação para a introdução do conceito da propriedade da média- α e também da inclusão da condição (iii) na Definição de (q, t) -compacidade.

Teorema 4.4.5. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $\operatorname{Re} K$ possui a propriedade da média- α , para cada X_j e para algum $\alpha > 0$. Se*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^\beta \int_{X \setminus B[y, r]} K(x, x) d\nu(x) = 0, \quad \beta > 0, \quad y \in X,$$

então

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1-\gamma/q}), \quad n \rightarrow \infty,$$

onde $\gamma := \beta t \alpha (\beta + q + t \alpha)^{-1}$.

Demonstração: O resultado segue do Teorema 4.3.1 e do Corolário 1.1.12. □

Uma aplicação dos corolários 1.1.12 e 4.3.2 produz o resultado final do capítulo.

Teorema 4.4.6. *Seja (X, d) um espaço métrico (q, t) -compacto e K um elemento de $\mathcal{A}_2(X, \nu)$. Suponha que $X = \cup_{j=1}^m X_j$ e que $\operatorname{Re} K$ possui a propriedade da média- α , para cada X_j e para algum $\alpha > 0$. Se X ou o suporte de K é limitado então*

$$\lambda_n(\mathcal{K}) = o(n^{-1-t\alpha/q}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Finalizamos o capítulo com alguns comentários pertinentes. Se X é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, a condição

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^\beta \int_{X \setminus B[y, r]} K(x, x) d\nu(x) < C, \quad y \in X,$$

fica automaticamente satisfeita quando existe $\beta > 0$ tal que

$$\limsup_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in X}} |x|^{\beta+m} K(x, x) < \infty.$$

Similarmente, se o limite superior acima é finito para todo $\beta > 0$ então a constante C acima depende de β . Ainda, quando este limite superior anula-se, a constante C é 0.

Outro fato a ser registrado neste momento é que os exemplos 4.2.11 e 4.2.14 e a Observação 4.2.15 mostram que a constante α que aparece nos resultados desta seção

pode assumir os valores 1 ou 2, quando $t = 1$. Finalmente, uma comparação com outros resultados na literatura, em especial aqueles encontrados em [38, 39], sugerem que alguns dos resultados encontrados neste capítulo são ótimos. Ainda, acreditamos que os resultados apresentados aqui possam ser usados em futuras aplicações, como por exemplo em assuntos relacionados a Proposição 9 em [19, p.43] que trata de estimativas de números de entropia (entropy numbers) de operadores compactos ([19, p.16]).

Derivação termo a termo

Finalizamos o trabalho dedicando este capítulo à extração de propriedades de suavidade das funções de $\mathcal{H}_K$ e da imagem de $\mathcal{K}$, quando o núcleo K é suave em um sentido a ser especificado. A análise será feita no caso em que X é um aberto de $\mathbb{R}^m$ munido da medida de Lebesgue usual ν . Observamos que a justificativa de algumas propriedades mais elementares, por exemplo aquelas relacionadas com suavidade do tipo Lipschitz, não exigem de fato o contexto aqui tratado. O leitor pode conferir isto analisando com cuidado as justificativas apresentadas.

Resultados sobre suavidade para funções de $\mathcal{H}_K$ no formato aqui apresentados são utilizados na Teoria do Aprendizado (Learning Theory), mais especificamente em algoritmos de reconhecimento de funções (learning algorithms). Um exemplo disso é o recente trabalho de Zhou [64] que trata da suavidade das funções de $\mathcal{H}_K$ no caso em que X é limitado e a função K tem uma extensão diferenciável ao bordo de X e aplica estas propriedades em algoritmos que envolvem derivadas parciais de funções de $\mathcal{H}_K$. Os resultados do Capítulo 3 mostram que a suavidade das funções da imagem de $\mathcal{K}$ é útil no estudo de propriedades de suavidade das funções de $\mathcal{H}_K$. Os artigos [10, 11, 12, 37] analisam propriedades de suavidade das funções da imagem de $\mathcal{K}$ para o caso em que X é um intervalo da reta, enquanto que os artigos [14, 42] apresentam resultados no contexto esférico.

Lembramos que se X é como descrito acima e K é um núcleo positivo definido, o Teorema 3.2.1 garante que o espaço $\mathcal{H}_K$ é um subconjunto de $C(X)$, contanto que a função κ seja contínua e que, para cada $x \in X$, $\operatorname{Re} K(x, y)$ seja contínua em $y = x$. Como os teoremas 3.4.6 e 3.4.8 apresentam algumas relações entre $\mathcal{H}_K$ e a imagem de

$\mathcal{K}$, em um primeiro momento do capítulo analisamos algumas condições de suavidade das funções da imagem de $\mathcal{K}$.

Na segunda metade do capítulo, estudamos a derivação termo a termo da série de Mercer de certos núcleos suaves, em uma tentativa de estender resultados já obtidos na literatura. A motivação para tal estudo reside nos trabalhos citados anteriormente e referências lá contidas. Como aplicação, consideramos uma extensão do Teorema 1 em [64] sobre a diferenciabilidade e propriedades de reprodução das funções de $\mathcal{H}_K$.

5.1 Núcleos Lipschitzianos

Esta seção motiva o contexto adotado no capítulo. Começamos com uma condição de Lipschitz um pouco mais forte do que aquelas introduzidas no Capítulo 4. Se α é uma constante positiva, dizemos que K é $Lip^\alpha(X, \nu)$ na segunda variável quando existem $\delta > 0$ e uma função $A : X \rightarrow [0, \infty]$ em $L^2(X, \nu)$ tais que

$$|K(x, y) - K(z, y)| \leq A(y)|x - z|^\alpha, \quad x, y, z \in X, \quad |x - z| < \delta.$$

A proposição seguinte traz informações sobre a imagem de $\mathcal{K}$ quando K satisfaz a definição acima. É importante destacar que esta condição não garante necessariamente a continuidade de κ .

Proposição 5.1.1. *Se K é $Lip^\alpha(X, \nu)$ na segunda variável então a imagem de $\mathcal{K}$ possui apenas funções α -Lipschitzianas. Em particular, a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $C(X)$.*

Demonstração: Suponha que K é $Lip^\alpha(X, \nu)$ na segunda variável e tome $f \in L^2(X, \nu)$. É fácil ver que

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}(f)(x) - \mathcal{K}(f)(z)| &\leq \int_X |K(x, y) - K(z, y)| |f(y)| d\nu(y) \\ &\leq |x - z|^\alpha \int_X A(y) |f(y)| d\nu(y), \end{aligned}$$

para $x, z \in X$ com $|x - z| < \delta$, onde ambos A e δ vêm da definição anterior. A desigualdade de Hölder garante que

$$|\mathcal{K}(f)(x) - \mathcal{K}(f)(z)| \leq \|A\|_2 \|f\|_2 |x - z|^\alpha,$$

para $x, z \in X$ e $|x - z| < \delta$. Segue que f é α -Lipschitziana. $\square$

Usando agora um caso particular das definições 4.2.9 e 4.2.12, no qual a função A é constante, temos o resultado seguinte. Destacamos que, nestas condições, a função κ é contínua, enquanto que a função K^x é contínua em $y = x$.

Proposição 5.1.2. *Se o núcleo K possui a propriedade da média- $Lip_A^{\alpha,m}(X, \nu)$ com A constante, então $\mathcal{H}_K$ contém apenas funções $\alpha/2$ -Lipschitzianas.*

Demonstração: Suponha que K possui a propriedade da média- $Lip_A^{\alpha,m}(X, \nu)$ com A constante. Usando o Teorema 3.2.1 e a Equação (3.1.1) obtemos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \|f\|_K (|K(x, x) - K(x, y) - K(y, x) + K(y, y)|)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_K \left(2 \left| \frac{K(x, x) + K(y, y)}{2} - K(x, y) \right| \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_K \sqrt{2A} |x - y|^{\alpha/2}, \quad f \in \mathcal{H}_K, \end{aligned}$$

para $x, y \in X$ e $|x - y| < \delta$, conforme a Definição 4.2.12. O resultado segue. $\square$

Já vimos anteriormente (veja o Teorema 2.4.5) que, se K satisfaz certas condições, o operador integral $\mathcal{K}$ possui uma única raiz quadrada positiva $\mathcal{K}^{1/2}$, um operador integral cujo núcleo $K_{1/2}$ é L^2 -positivo definido e que K pode ser recuperado de $K_{1/2}$ pela fórmula

$$\int_X K_{1/2}(x, u) \overline{K_{1/2}(x, v)} d\nu(x) = K(v, u), \quad u, v \in X. \quad (5.1.1)$$

O teorema abaixo descreve uma condição de suavidade para funções da imagem de $\mathcal{K}^{1/2}$ quando a fórmula de recuperação acima vale.

Proposição 5.1.3. *Suponha que K seja recuperável de $K_{1/2}$ via (5.1.1). Se K possui a propriedade da média- $Lip_A^{\alpha,m}(X, \nu)$ com A constante, então a imagem de $\mathcal{K}^{1/2}$ possui apenas funções $\alpha/2$ -Lipschitzianas.*

Demonstração: Sejam $f \in L^2(X, \nu)$ e $x, z \in X$. Suponha que K possui a propriedade da média- $Lip_A^{\alpha,m}(X, \nu)$ com A constante. Aplicando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}^{1/2}(f)(x) - \mathcal{K}^{1/2}(f)(z)| &\leq \int_X |K_{1/2}(x, y) - K_{1/2}(z, y)| |f(y)| d\nu(y) \\ &\leq \left(\int_X |K_{1/2}(x, y) - K_{1/2}(z, y)|^2 d\nu(y) \right)^{1/2} \|f\|_2. \end{aligned}$$

Usando a Fórmula de reprodução (5.1.1), a integral I acima pode ser majorada da seguinte forma

$$\begin{aligned} I &= \int_X (K_{1/2}(x, y) - K_{1/2}(z, y)) (\overline{K_{1/2}(x, y)} - \overline{K_{1/2}(z, y)}) d\nu(y) \\ &= K(x, x) - K(x, z) - K(z, x) + K(z, z) \\ &\leq 2 \left| \frac{K(x, x) + K(y, y)}{2} - K(x, y) \right| \\ &\leq 2A |x - z|^\alpha, \end{aligned}$$

contanto que $|x - z| < \delta$, conforme a Definição 4.2.12. O resultado segue. $\square$

5.2 Núcleos diferenciáveis

Nesta seção buscamos informações sobre a diferenciabilidade das funções da imagem de $\mathcal{K}$, agora supondo condições de diferenciabilidade plenas no núcleo K . Estudamos também a positividade definida de certas derivadas de K e descrevemos alguns resultados técnicos necessários à frente.

De agora em diante, vamos denotar por $C^s(X)$ o conjunto das funções definidas em X que possuem derivadas parciais contínuas até a ordem s . Escrevemos ainda $C^\infty(X) := \cap_{s=1}^\infty C^s(X)$.

Vamos introduzir derivadas fracas e espaço de Sobolev seguindo a nomenclatura de [1, 31]. Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^m$ e uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ integrável em compactos, a derivada fraca de ordem α de f , quando existe, é a função $D_w^\alpha f$ satisfazendo a igualdade

$$\int_X D_w^\alpha f(x) g(x) d\nu(x) = (-1)^{|\alpha|} \int_X f(x) D^\alpha g(x) d\nu(x), \quad g \in C_0^\infty(X),$$

onde

$$C_0^\infty(X) = \{g \in C^\infty(X) : \text{supp}(g) \subset X\},$$

e D^α denota a derivação parcial usual, ou seja,

$$D^\alpha g := \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial^\alpha x} = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_m} x_m}.$$

Aqui, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ e $D^\alpha f := f$ quando $|\alpha| = 0$. Usando integração por partes várias vezes verifica-se que vale a fórmula

$$D_w^\alpha f = D^\alpha f, \quad |\alpha| \leq s,$$

sempre que $f \in C^s(X)$. Se s é um inteiro não negativo, o espaço de Sobolev usual é

$$H^s := \{f \in L^2(X, \nu) : D_w^\alpha f \in L^2(X, \nu), |\alpha| \leq s\}.$$

Se definirmos em H^s o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{2,s} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \langle D_w^\alpha f, D_w^\alpha g \rangle_2,$$

então $(H^s, \langle \cdot, \cdot \rangle_{2,s})$ é um espaço de Hilbert e $\{f \in C^s(X) : D^\alpha f \in L^2(X, \nu), |\alpha| \leq s\}$ é um subespaço denso.

O resultado que segue é técnico. O símbolo $D_x^\alpha K$ denota a derivada parcial de ordem α de K em relação a primeira variável x .

Proposição 5.2.1. *Seja s um inteiro positivo. Se $D_x^\alpha K$ é contínua e pertence ao espaço $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$, para $0 \leq |\alpha| \leq s$, então a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de H^s e $\mathcal{K} : L^2(X, \nu) \rightarrow H^s$ tem norma no máximo*

$$\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|D_x^\alpha K\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

Demonstração: Já sabemos que a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $L^2(X, \nu)$. Seja $f \in L^2(X, \nu)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, com $|\alpha| \leq s$. Usando o conceito de derivada fraca (integração por partes) e o Teorema de Fubini para manipular a integral

$$I := \int_X \left(\int_X K(x, y) f(y) d\nu(y) \right) D^\alpha g(x) d\nu(x),$$

quando $g \in C_0^\infty(X)$, obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_X \left(\int_X K(x, y) D^\alpha g(x) d\nu(x) \right) f(y) d\nu(y) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_X \left(\int_X D_x^\alpha K(x, y) g(x) d\nu(x) \right) f(y) d\nu(y) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_X \left(\int_X D_x^\alpha K(x, y) f(y) d\nu(y) \right) g(x) d\nu(x). \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$D_w^\alpha \mathcal{K}(f)(x) = \int_X D_x^\alpha K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in X.$$

Quanto à norma de $\mathcal{K}(f)$ em H^s ,

$$\|\mathcal{K}(f)\|_{2,s}^2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \left\| \int_X D_x^\alpha K(\cdot, y) f(y) d\nu(y) \right\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \|D_x^\alpha K\|_2^2.$$

A proposição segue. □

Uma observação pertinente neste momento é que, quando $D_x^\alpha K$, $|\alpha| \leq s$, existe e é contínua em X , uma aplicação da regra de Leibnitz ([44, p.324]) garante que

$$D^\alpha \mathcal{K}(f)(x) = \int_X D_x^\alpha K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad f \in C_0^\infty(X), \quad x \in X,$$

é contínua. Este fato motiva o lema a seguir.

Escrevemos $C_B(X \times X)$ para denotar o subconjunto de $C(X \times X)$ formado por funções limitadas. O símbolo $K'_x(x_0, y_0)$ denota a derivada de K em relação a x no ponto (x_0, y_0) . Logo, a atuação de tal derivada pode ser descrita na forma

$$K'_x(x_0, y_0) \cdot h = \sum_{i=1}^m D_x^{e_i} K(x_0, y_0) h_i, \quad x_0, y_0 \in X,$$

onde $\{e_i\}_{i=1}^m$ é a base canônica de $\mathbb{R}^m$ e $h = (h_1, h_2, \dots, h_m) \in \mathbb{R}^m$.

Lema 5.2.2. *Suponha que X é limitado e que $D_x^\alpha K$ pertence a $C_B(X \times X)$ para todo $|\alpha| \leq s$. Então a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $C^s(X)$ e*

$$D^\alpha \mathcal{K}(f)(x) = \int_X D_x^\alpha K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in X, \quad |\alpha| \leq s.$$

Demonstração: Provamos tão somente o caso $s = 1$, já que os demais seguem recursivamente. Seja $x_0 \in X$ e $f \in L^2(X, \nu)$. Observamos que a função f pertence a $L^1(X, \nu)$. Sabendo que ([40, p.1])

$$K(x_0 + h, y) - K(x_0, y) = K'_x(x_0, y) \cdot h + r(h, y),$$

com

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{r(h, y)}{|h|} = 0,$$

para $y, x_0 + h \in X$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(f)(x_0 + h) - \mathcal{K}(f)(x_0) &= \int_X [K(x_0 + h, y) - K(x_0, y)] f(y) d\nu(y) \\ &= \int_X [K'_x(x_0, y) \cdot h + r(h, y)] f(y) d\nu(y). \end{aligned}$$

Vamos separar a integral em duas partes. Como $\nu(X) < \infty$ e cada $D_x^{e_i} K$ é limitada, as funções

$$y \in X \rightarrow D_x^{e_i} K(x_0, y) f(y), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

são integráveis. Em particular, como

$$\begin{aligned} \int_X [K'_x(x_0, y) \cdot h] f(y) d\nu(y) &= \int_X \sum_{i=1}^d D_x^{e_i} K(x_0, y) f(y) h_i d\nu(y) \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\int_X D_x^{e_i} K(x_0, y) f(y) d\nu(y) \right) h_i, \end{aligned}$$

a função

$$y \in X \rightarrow K'_x(x_0, y) \cdot h$$

é integrável quando $|h|$ é suficientemente pequeno. Um argumento similar, usando o limite que aparece no início da prova, revela que

$$y \in X \rightarrow r(h, y) f(y)$$

é integrável para $|h|$ pequeno. Logo, podemos escrever

$$\mathcal{K}(f)(x_0 + h) - \mathcal{K}(f)(x_0) = \sum_{i=1}^d \left(\int_X D_x^{e_i} K(x_0, y) f(y) d\nu(y) \right) h_i + \int_X r(h, y) f(y) d\nu(y),$$

sempre que $y \in X$ e $|h|$ é suficientemente pequeno. Ainda, como

$$\left| \frac{r(h, y)}{|h|} f(y) \right| \leq |f(y)|, \quad y \in X,$$

para $|h|$ pequeno, o Teorema Convergência Dominada pode ser aplicado para concluir que

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} \int_X r(h, y) f(y) d\nu(y) = \int_X \left(\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{r(h, y)}{|h|} \right) f(y) d\nu(y) = 0.$$

Segue então que $\mathcal{K}(f)$ é diferenciável em x_0 e que a ação da derivada é dada por

$$[\mathcal{K}(f)]'(x_0) \cdot h = \sum_{i=1}^d \left(\int_X D_x^{e_i} K(x_0, y) f(y) d\nu(y) \right) h_i, \quad h \in \mathbb{R}^m.$$

Com isso, a fórmula do enunciado segue. A continuidade das derivadas parciais segue da expressão que as define e da aplicação do Teorema da Convergência Dominada. $\square$

Finalizamos a seção analisando a positividade definida de certas derivadas de K . Denotamos por $D_{xy}^{\alpha\beta} K$ a derivada parcial de ordem β de $D_x^\alpha K$ em relação a variável y .

Proposição 5.2.3. *Seja K um núcleo L^2 -positivo definido. Seja $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tal que $D_x^\alpha K$ é contínua e $D_{xy}^{\alpha\alpha} K$ pertence a $L^2(X \times X, \nu \times \nu) \cap C(X \times X)$. Então $D_{xy}^{\alpha\alpha} K$ é L^2 -positivo definido.*

Demonstração: Basta verificar que

$$\int_X \left(\int_X D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, y) f(y) d\nu(y) \right) f(x) d\nu(x) \geq 0, \quad f \in C_0^\infty(X),$$

e usar um argumento de densidade. Chamemos de I a integral acima. Usando integração por partes e o Teorema de Fubini chegamos a

$$\begin{aligned} I &= (-1)^{|\alpha|} \int_X \left(\int_X D_x^\alpha K(x, y) D^\alpha f(y) d\nu(y) \right) f(x) d\nu(x) \\ &= \int_X \left(\int_X K(x, y) D^\alpha f(y) d\nu(y) \right) D^\alpha f(x) d\nu(x), \quad f \in C_0^\infty(X). \end{aligned}$$

Como K é L^2 -positivo definido temos que $I \geq 0$. $\square$

5.3 Derivação termo a termo

Seja K um núcleo L^2 -positivo definido, contínuo e pertencente a $L^2(X \times X, \nu \times \nu)$. Sabemos então que K é um núcleo de Mercer e, sendo assim, K e o operador $\mathcal{K}$ são

representados por séries, como descrito na Seção 2.2. Se a derivada parcial $D_x^\alpha K$ é contínua e a derivada parcial $D_{xy}^{\alpha\alpha} K$ é um elemento de $L^2(X \times X, \nu \times \nu) \cap C(X \times X)$, então a função $D_{xy}^{\alpha\alpha} K$ é também um núcleo de Mercer. Em particular, este núcleo e o operador integral $\mathcal{K}_\alpha$ associado são representados por séries envolvendo os autovalores e as autofunções deste último. Sendo assim, uma pergunta que surge é a seguinte: existe alguma relação entre os autovalores e as autofunções dos operadores $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_\alpha$? Acreditamos que o estudo desenvolvido neste capítulo pode ser usado para uma análise desta e de outras questões.

Basicamente, analisamos a derivação termo a termo da série de Mercer do núcleo K aplicando uma adaptação de métodos usados por Buescu em [10, 11, 12] e por Kadota em [37], para o caso em que X é um intervalo. Os resultados serão usados, na Seção 5.5, para o estudo de propriedades de suavidade das funções de $\mathcal{H}_K$ com base em resultados de [64]. O primeiro resultado está relacionado com a representação em série de certas derivadas de K , comparável ao resultado provado no Corolário 3.8 em [12]. Um estudo semelhante foi feito em [14, 42] para o caso em que X é a esfera euclidiana unitária.

Precisamos do seguinte resultado técnico sobre derivação de funções de várias variáveis, adaptado de [40, p.41].

Lema 5.3.1. *Seja $\{f_j\}$ uma sequência de funções em $C^s(X)$ pontualmente convergente para a função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Se cada sequência $\{D^\alpha f_j\}$, $0 < |\alpha| \leq s$, converge uniformemente em subconjuntos compactos de X então f pertence a $C^s(X)$ e*

$$D^\alpha f = \lim_{j \rightarrow \infty} D^\alpha f_j, \quad 0 < |\alpha| \leq s.$$

A seguir, denotamos por $C^{2s}(X \times X)$ o conjunto das funções complexas definidas em $X \times X$ e continuamente diferenciáveis até a ordem $2s$ em relação a x e a y .

Proposição 5.3.2. *Seja X um conjunto limitado e $K \in C^{2s}(X \times X)$ com derivadas parciais limitadas. Então*

$$D_{xy}^{\alpha\beta} K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) D^\alpha \phi_n(x) \overline{D^\beta \phi_n(y)}, \quad x, y \in X, \quad |\alpha|, |\beta| \leq s,$$

com convergência absoluta e uniforme em subconjuntos compactos de $X \times X$.

Demonstração: É fácil ver que o núcleo

$$K_j(x, y) := K(x, y) - \sum_{n=1}^j \lambda_n(\mathcal{K}) \phi_n(x) \overline{\phi_n(y)}, \quad x, y \in X,$$

é um núcleo de Mercer. O Lema 5.2.2 garante que $\lambda_n(\mathcal{K})\phi_n \in C^s(X)$, $n = 1, 2, \dots$. Portanto, para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^m$ e $|\alpha|, |\beta| \leq s$, a Proposição 5.2.3 revela que o núcleo

$$D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, y) - \sum_{n=1}^j \lambda_n(\mathcal{K}) D^\alpha \phi_n(x) \overline{D^\alpha \phi_n(y)}, \quad x, y \in X,$$

também é um núcleo de Mercer e segue que $D_{xy}^{\alpha\alpha} K_j$ é positivo definido. Em particular,

$$D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x) - \sum_{n=1}^j \lambda_n(\mathcal{K}) |D^\alpha \phi_n(x)|^2 \geq 0, \quad x \in X.$$

Aplicando o Teorema de Dini concluímos que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |D^\alpha \phi_n(x)|^2, \quad x \in X,$$

é uniformemente convergente em subconjuntos compactos de X . A desigualdade de Cauchy-Schwarz garante que

$$\left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) D^\alpha \phi_n(x) \overline{D^\beta \phi_n(y)} \right|^2 \leq \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |D^\alpha \phi_n(x)|^2 \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) |D^\beta \phi_n(y)|^2,$$

para $x, y \in X$. Sendo assim, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) D^\alpha \phi_n(x) \overline{D^\beta \phi_n(y)}, \quad x, y \in X,$$

converge uniformemente em subconjuntos compactos de $X \times X$. Como $K_j \rightarrow 0$, $j \rightarrow \infty$, uma versão $2m$ -dimensional do Lema 5.3.1 justifica a igualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) D^\alpha \phi_n(x) \overline{D^\beta \phi_n(y)} = D_{xy}^{\alpha\beta} K(x, y), \quad x, y \in X,$$

com a convergência mencionada. □

O resultado seguinte, além de estender o Teorema 2.3 em [10], o Teorema 3.8 em [11] e o Teorema 2.6 em [12] e possuir uma prova mais elegante, ainda apresenta condições menos restritivas. Nestes artigos, os autores utilizam, por exemplo, a integrabilidade de κ quando X é um intervalo.

Teorema 5.3.3. *Se K pertence a $C^{2s}(X \times X)$ então*

$$D_{xy}^{\alpha\beta} K(x, y) = \overline{D_{xy}^{\beta\alpha} K(y, x)}, \quad x, y \in X,$$

e

$$|D_{xy}^{\alpha\beta} K(x, y)|^2 \leq D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x) D_{xy}^{\beta\beta} K(y, y), \quad |\alpha|, |\beta| \leq s, \quad x, y \in X. \quad (5.3.1)$$

Demonstração: Dados dois pontos x, y em X , existe um subconjunto aberto e limitado X_1 contendo ambos e com fecho contido em X . O resultado segue da aplicação do Proposição 5.3.2 à restrição de K a $X_1 \times X_1$ e da desigualdade de Cauchy-Schwarz. $\square$

É importante notar que este resultado vale quando K é positivo definido, mesmo não associado a um operador integral limitado.

Faremos agora uma análise da diferenciabilidade dos elementos da imagem de $\mathcal{K}$ sem a limitação do conjunto X que foi utilizada em argumentos importantes da prova do Lema 5.2.2. O preço que pagamos para isso é a exigência da integrabilidade de κ em X . O próximo lema é técnico.

Lema 5.3.4. *Existem duas decomposições para X da forma $X = \cup_{j=1}^{\infty} X_j = \cup_{j=1}^{\infty} Y_j$ e uma sequência de funções $\{g_j\}$ tais que:*

- (i) $X_{j-1} \subset Y_j \subset X_j$, $j = 2, 3, \dots$;
- (ii) Cada X_j é o suporte compacto da função $g_j \in C_0^{\infty}(X)$;
- (iii) Cada Y_j é o fecho de seu interior;
- (iv) $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = 1$;
- (v) A restrição de g_j a Y_j é 1;
- (vi) $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j f = f$, $f \in L^2(X, \nu)$.

Demonstração: Basta usar argumentos clássicos envolvendo partições da unidade ([44, p.139], [41, p.197]). $\square$

Proposição 5.3.5. *Seja K em $C^{2s}(X \times X) \cap \mathcal{A}_2(X, \nu)$. A imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $C^s(X)$ e*

$$D^{\alpha} \mathcal{K}(f)(x) = \int_X D_x^{\alpha} K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in X, \quad |\alpha| \leq s.$$

Demonstração: Seja $f \in L^2(X, \nu)$ e considere as decomposições dadas pelo lema anterior. Lembrando do Lema 5.3.4-(ii) e repetindo os argumentos usados na prova do Lema 5.2.2, verificamos que $\mathcal{K}(fg_j)$ possui derivadas parciais contínuas e dadas pela fórmula

$$D^{\alpha} \mathcal{K}(fg_j)(x) = \int_{X_j} D_x^{\alpha} K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in X, \quad |\alpha| \leq s.$$

Como g_j tem suporte compacto X_j e é identicamente 1 em Y_j , com $X_{j-1} \subset Y_j \subset X_j$ e $\lim_{j \rightarrow \infty} fg_j = f$, segue que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} D^{\alpha} \mathcal{K}(fg_j)(x) = \int_X D_x^{\alpha} K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in X, \quad |\alpha| \leq s.$$

Incluimos abaixo uma justificativa para tal afirmação, a qual também mostra que a convergência é uniforme em subconjuntos compactos de X . Pelo Teorema 5.3.3,

$$\left| \int_X D_x^\alpha K(x, y) f(y) d\nu(y) \right|^2 \leq D_{xy}^{\alpha\alpha}(x, x) \int_X \kappa(y) d\nu(y) \|f\|_2^2, \quad x \in X, \quad |\alpha| \leq s.$$

Ainda,

$$M_j(x) := \left| D^\alpha \mathcal{K}(fg_j)(x) - \int_X D_x^\alpha K(x, y) f(y) d\nu(y) \right|, \quad x \in X,$$

pode ser limitado por

$$\begin{aligned} M_j(x) &\leq \int_X |D_x^\alpha K(x, y)| |f(y)g_j(y) - f(y)| d\nu(y) \\ &\leq \left(\int_X |D_x^\alpha K(x, y)|^2 d\nu(y) \right)^{1/2} \|fg_j - f\|_2, \quad x \in X, \end{aligned}$$

e segue que

$$M_j(x) \leq (D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x))^{1/2} \left(\int_X \kappa(y) d\nu(y) \right)^{1/2} \|fg_j - f\|_2, \quad x \in X.$$

Como a sequência $\{\|fg_j - f\|\}$ é não crescente, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona para concluir que $\lim_{j \rightarrow \infty} \|fg_j - f\|_2 = 0$. Segue que M_j converge uniformemente para 0 em subconjuntos compactos de X . $\square$

Apresentamos agora uma versão diferenciável do Teorema de Mercer.

Teorema 5.3.6 (Teorema de Mercer IV). *Seja K um elemento de $C^{2s}(X \times X) \cap \mathcal{A}_2(X, \nu)$. Então*

$$D_{xy}^{\alpha\beta} K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) D^\alpha \phi_n(x) \overline{D^\beta \phi_n(y)}, \quad x, y \in X, \quad |\alpha|, |\beta| \leq s, \quad (5.3.2)$$

com convergência absoluta e uniforme em compactos de $X \times X$.

Demonstração: Basta repetir os argumentos da prova da Proposição 5.3.2, trocando o Lema 5.2.2 pela Proposição 5.3.5. $\square$

Quando condições adequadas são impostas, é possível obter informações sobre o operador $\mathcal{K}_\alpha$, gerado pelo núcleo $D_{xy}^{\alpha\alpha} K$, através de propriedades do operador $\mathcal{K}$, estendendo por exemplo resultados de [10, 11, 12] para o caso multidimensional. Não faremos este tipo de análise aqui, mas comentamos um resultado que pode ser obtido. Nas condições do Teorema 5.3.6, que é uma destas extensões, verifica-se que o traço $tr(\mathcal{K}_\alpha)$ de $\mathcal{K}_\alpha$ pode ser calculado pela fórmula

$$tr(\mathcal{K}_\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}_\alpha) = \int_X D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x) d\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \|D^\alpha \phi_n\|_2^2,$$

contanto que a função

$$x \in X \rightarrow D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x),$$

pertença a $L^1(X, \nu)$.

5.4 Propriedades de reprodução

Faremos agora um estudo de propriedades de suavidade e de reprodução das funções de $\mathcal{H}_K$. Os resultados finais do capítulo, contidos nesta e na seção seguinte, podem ser vistos como extensões do Teorema 1 em [64]. Destacamos que o trabalho desenvolvido no artigo citado foi motivado por um problema de aplicação na Teoria do Aprendizado e que, por isso, o contexto considerado foi aquele em que X é limitado e o núcleo K possui uma extensão diferenciável ao fecho de X . O método utilizado aqui é bem diferente e não exige a limitação de X na maioria dos casos. Usamos a derivada parcial $D_y^\alpha K$ de K em relação a segunda variável y .

Teorema 5.4.1. *Seja K um núcleo em $C^{2s}(X \times X) \cap \mathcal{A}_2(X, \nu)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tal que $|\alpha| \leq s$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *Se $r \geq 1/2$ então a série*

$$D^\alpha \mathcal{K}^r(f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \langle f, \phi_n \rangle_2 D^\alpha \phi_n(x), \quad f \in L^2(X, \nu), \quad x \in X,$$

é absoluta e uniformemente convergente em subconjuntos compactos de X ;

(ii) $\mathcal{H}_K \subset C^s(X)$;

(iii) *Se $f \in \mathcal{H}_K$ então*

$$|D^\alpha f(x)| \leq (D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x))^{1/2} \|f\|_K, \quad x \in X;$$

(iv) *A inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow H^s$ possui norma no máximo*

$$\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq s} \int_X D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x) d\nu(x) \right)^{1/2},$$

contanto que esta soma seja finita;

(v) *Cada derivada $D_y^\alpha K(\cdot, x)$ pertence a $\mathcal{H}_K$ e vale a seguinte propriedade de reprodução*

$$D^\alpha f(x) = \langle f, D_y^\alpha K(\cdot, x) \rangle_K, \quad x \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

Demonstração: Suponha as condições enunciadas e tome $r \geq 1/2$. Podemos aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o Teorema 5.3.6 e a desigualdade de Bessel para

obter as desigualdades

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^r \langle f, \phi_n \rangle_2 D^\alpha \phi_n(x) \right|^2 &\leq \sum_{n=j}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle_2|^2 \sum_{n=j}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{2r} |D^\alpha \phi_n(x)|^2 \\ &\leq \lambda_1(\mathcal{K})^{2r-1} D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x) \|f\|_2^2, \quad x \in X, \end{aligned}$$

para $f \in L^2(X, \nu)$ e $j \geq 1$. Isto e o Teorema 5.3.6 provam o item (i). Para deduzir o item (ii), tome $f \in \mathcal{H}_k$. Usando a representação para $\mathcal{H}_k$ dada pelo Teorema 3.3.3, podemos escrever

$$f(x) = \mathcal{K}^{1/2}(g)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \langle g, \phi_n \rangle_2 \phi_n(x), \quad x \in X,$$

para alguma função $g \in L^2(X, \nu)$ com $\|f\|_K = \|g\|_2$. Fica claro então que o item (i) e o Lema 5.3.1 implicam que $f \in C^s(X)$. Como

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x)|^2 &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \langle g, \phi_n \rangle_2 D^\alpha \phi_n(x) \right|^2 \\ &\leq D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x) \|g\|_2^2 \\ &= D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x) \|f\|_K^2, \quad x \in X, \end{aligned}$$

as afirmações (iii) e (iv) seguem. A fórmula

$$D_y^\alpha K(\cdot, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \overline{D^\alpha \phi_n(x)} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \phi_n, \quad x \in X,$$

segue do Teorema 5.3.6 enquanto que o Teorema 3.3.3 garante que $D_y^\alpha K(\cdot, x) \in \mathcal{H}_K$, $x \in X$, com

$$\langle D_y^\alpha K(\cdot, x), D_y^\alpha K(\cdot, y) \rangle_K = D_{xy}^{\alpha\alpha} K(y, x), \quad x, y \in X. \quad (5.4.1)$$

Logo, se $f = \mathcal{K}^{1/2}(g)$, para alguma função $g \in L^2(X, \nu)$, então

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{K}^{1/2}(g), D_y^\alpha K(\cdot, x) \rangle_K &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \langle g, \phi_n \rangle_2 \phi_n, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K}) \overline{D^\alpha \phi_n(x)} \phi_n \right\rangle_K \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})^{1/2} \langle g, \phi_n \rangle_2 D^\alpha \phi_n(x) \\ &= D^\alpha \mathcal{K}^{1/2}(g)(x), \quad x \in X, \end{aligned}$$

e a propriedade de reprodução (v) segue. A prova está completa. $\square$

O último teorema da seção está relacionado com propriedades do operador inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C^s(X)$. Os dois lemas seguintes são auxiliares.

De acordo com a notação usada em [1, p.10], vamos denotar por $C^s(\overline{X})$ o espaço vetorial formado pelas funções em $C^s(X)$ cujas derivadas parciais podem ser estendidas continuamente a $\overline{X}$. Denotamos ainda por $C_B^s(\overline{X})$ o subespaço vetorial das funções de $C^s(\overline{X})$ cujas derivadas parciais são limitadas. Este último espaço torna-se um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|g\| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq s} \sup_{x \in X} |D^\alpha g(x)|, \quad g \in C_B^s(\overline{X}).$$

Lema 5.4.2. *Seja K um núcleo em $C^{2s}(X \times X) \cap \mathcal{A}_2(X, \nu)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^m$ tal que $|\alpha| \leq s$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_K$ e Y é um subconjunto compacto de X então existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ e uma função $f \in \mathcal{H}_K$ tais que $\{D^\alpha f_{n_j}\}$ converge uniformemente para $D^\alpha f$ em Y .*

Demonstração: Seja $\{f_n\}$ uma sequência limitada em $\mathcal{H}_K$. Usando o Teorema 5.4.1-(v) e a Equação (5.4.1) chegamos a

$$\begin{aligned} |D^\alpha f_n(x) - D^\alpha f_n(y)|^2 &= \left| \langle f_n, D_y^\alpha K(\cdot, x) - D_y^\alpha K(\cdot, y) \rangle_K \right|^2 \\ &\leq \|D_y^\alpha K(\cdot, x) - D_y^\alpha K(\cdot, y)\|_K^2 \sup_n \|f_n\|_K^2, \\ &= [D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x) + D_{xy}^{\alpha\alpha} K(y, y) - D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, y) - D_{xy}^{\alpha\alpha} K(y, x)] \\ &\quad \times \sup_j \|f_j\|_K^2, \quad x, y \in \overline{Y}, \end{aligned}$$

quando Y é um aberto limitado de X . Sendo assim, lembrando que o núcleo $D_{xy}^{\alpha\alpha} K$ é uniformemente contínuo em subconjuntos compactos de $X \times X$, uma aplicação do Teorema de Arzelà-Ascoli revela que a restrição de uma subsequência $\{D^\alpha f_{n_j}\}$ a $\overline{Y}$ converge uniformemente para $D^\alpha f_Y$, para alguma função f_Y em $C^s(\overline{Y}) = C_B^s(\overline{Y})$. Para ver que f_Y é a restrição de uma função de $\mathcal{H}_K$ a Y , usamos a compacidade fraca de bolas fechadas em $\mathcal{H}_K$ (veja o Teorema de Alaoglu em [31, p.169]) para encontrar uma subsequência $\{f_{n_{j_l}}\}$ de $\{f_{n_j}\}$, fracamente convergente para uma função f em $\mathcal{H}_K$. Como

$$D^\alpha f_{n_{j_l}}(x) - D^\alpha f_{n_{j_l}}(x) = \langle f_{n_{j_l}} - f_{n_{j_l}}, D_y^\alpha K(\cdot, x) \rangle_K, \quad x \in X, \quad l \geq i,$$

podemos concluir que $D^\alpha f_{n_{j_l}}$ converge pontualmente para $D^\alpha f$. Segue então que f_Y é a restrição de f a $\overline{Y}$. Isto completa a prova do lema. $\square$

A prova do próximo lema segue diretamente do lema anterior.

Lema 5.4.3. *Seja K um núcleo em $C^{2s}(X \times X) \cap \mathcal{A}_2(X, \nu)$. Tome $\{f_n\}$ uma sequência limitada em $\mathcal{H}_K$ e suponha que $X = \bigcup_{j=1}^\infty Y_j$, onde cada Y_j é compacto e $Y_j \subset Y_{j+1}$,*

$j = 1, 2, \dots$. Para cada j existe uma subsequência $\{f_n^j\}$ de $\{f_n\}$ e $f^j \in \mathcal{H}_K$ tais que $\{D^\alpha f_n^j\}$ converge uniformemente para $D^\alpha f^j$ em Y_j , para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$ com $|\alpha| \leq s$. As subsequências podem ser tomadas de tal forma que $\{f_n^{j+1}\} \subset \{f_n^j\}$, $j = 1, 2, \dots$. Ainda, as restrições de f^{j+1} e f^j a Y_j coincidem, para cada j e cada $l \geq 1$.

Teorema 5.4.4. *Seja K um núcleo em $C^{2s}(X \times X) \cap \mathcal{A}_2(X, \nu)$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_K$ então existe uma subsequência $\{f_{n_j}\}$ de $\{f_n\}$ e $f \in \mathcal{H}_K$ tais que $\{D^\alpha f_{n_j}\}$ converge uniformemente para $D^\alpha f$ em subconjuntos compactos de X , para todo $\alpha \in \mathbb{N}^m$ com $|\alpha| \leq s$.*

Demonstração: Considere uma decomposição $X = \cup_{j=1}^\infty Y_j$ tal que: cada Y_j é compacto, $Y_j \subset Y_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$, e o fecho do interior de Y_j é o próprio Y_j . Se $\{f_n\}$ é uma sequência limitada em $\mathcal{H}_K$, considere as subsequências $\{f_n^j\}$ resultantes da aplicação do lema anterior e defina $f(x) = f^l(x)$, $x \in Y_l$. Claramente f está bem definida, pertence a $C^s(X)$ e a sequência $\{f_n^j\}$ converge uniformemente para f em subconjuntos compactos de X . Repetindo os argumentos do final da prova do Lema 5.4.2 verificamos que $\{f_n^j\}$ possui uma subsequência fracamente convergente para f em $\mathcal{H}_K$. Isto garante que f é um elemento de $\mathcal{H}_K$. $\square$

Observação 5.4.5. O teorema anterior é semelhante a uma versão do Teorema de Arzelà-Ascoli para certos espaços topológicos não compactos ([31, p.137]). Entretanto, ele não segue diretamente desta versão.

5.5 Resultados finais

Nesta última seção do trabalho, explicamos como os resultados da seção anterior podem ser adaptados para cobrir o caso em que as funções de $\mathcal{H}_K$ possuem extensões ao fecho $\overline{X}$ de X . A notação usada nas demais seções continua aqui, lembrando que X denota um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$.

Teorema 5.5.1. *Seja K um núcleo em $C^{2s}(\overline{X} \times \overline{X}) \cap \mathcal{A}_2(\overline{X}, \nu)$. As expressões (5.3.1) e (5.3.2) são verdadeiras para $x, y \in \overline{X}$. Além disso, a imagem de $\mathcal{K}$ está em $C^s(\overline{X})$.*

Demonstração: Ainda denotando por K a restrição de K a $X \times X$, as condições do Teorema 5.3.3 valem. Usando a continuidade de K , concluímos que a Desigualdade (5.3.1) é verdadeira para $x, y \in \overline{X}$. Lembrando da Proposição 5.3.5 e observando que $\nu(\overline{X} \setminus X) = 0$, verificamos que

$$D^\alpha \mathcal{K}(f)(x) = \int_{\overline{X}} D_x^\alpha K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X, \nu), \quad |\alpha| \leq s.$$

Sendo assim, podemos usar um processo limite para estender estas funções até a fronteira X . Resta mostrar a continuidade de $D^\alpha \mathcal{K}(f)$ em $\overline{X}$. Mas, se $\{x_n\}$ é uma sequência em X , convergente para $x \in \overline{X}$, a desigualdade

$$\begin{aligned} |D^\alpha \mathcal{K}(f)(x) - D^\alpha \mathcal{K}(f)(x_n)| &= \left| \int_{\overline{X}} [D_x^\alpha K(x, y) - D_x^\alpha K(x_n, y)] f(y) d\nu(y) \right| \\ &\leq \left(\int_{\overline{X}} |D_x^\alpha K(x, y) - D_x^\alpha K(x_n, y)|^2 d\nu(y) \right)^{1/2} \|f\|_2, \end{aligned}$$

garante este fato. Para ver isso, note que as desigualdades triangular e (5.3.1) garantem que

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha K(x, y) - D_x^\alpha K(x_n, y)|^2 &= |D_x^\alpha K(x, y)|^2 + |D_x^\alpha K(x_n, y)|^2 + \\ &\quad 2 |D_x^\alpha K(x, y)| |D_x^\alpha K(x_n, y)| \\ &\leq 4\kappa(y) \sup_{n \in \mathbb{N}} \{D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x_n, x_n)\}, \quad y \in \overline{X}, \end{aligned}$$

enquanto que o Teorema da Convergência Dominada implica em

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\overline{X}} |D_x^\alpha K(x, y) - D_x^\alpha K(x_n, y)|^2 d\nu(y) = 0.$$

Logo, procedendo como no início da prova, a nova versão para a Expressão (5.3.2) segue por um argumento de continuidade. A prova está completa. $\square$

Antes da formalização do último resultado do trabalho precisamos fazer alguns comentários pertinentes. Seja K_1 a extensão contínua do núcleo $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ a $\overline{X} \times \overline{X}$ e $\mathcal{H}_{K_1}$ o espaço de Hilbert de reprodução correspondente. Lembramos que os resultados apresentados nos capítulos 2, 3 e 4 aplicam-se a K_1 . Sendo assim, é fácil ver que K é um núcleo de Mercer se, e somente se, K_1 for um núcleo deste tipo. Os autovalores de $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}_1$ coincidem enquanto que as autofunções do segundo são extensões das autofunções do primeiro, seguindo a ordenação usada. Sendo assim, denotamos pela mesma letra os autovalores de $\mathcal{K}$ e de $\mathcal{K}_1$ e identificamos as respectivas autofunções. Com isso verificamos que os espaços $\mathcal{H}_K$ e $\mathcal{H}_{K_1}$ são de fato isométricos e concluimos, usando o Teorema 5.5.1, que os resultados da Seção 5.4 são ainda verdadeiros para este contexto. Chamaremos tais resultados de versões estendidas em algumas passagens da prova do teorema a seguir.

Teorema 5.5.2. *Seja K_1 um núcleo em $C^{2s}(\overline{X} \times \overline{X}) \cap \mathcal{A}_2(\overline{X}, \nu)$. Suponha que as funções*

$$x \in \overline{X} \rightarrow D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x), \quad |\alpha| \leq s,$$

são limitadas. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) As inclusões $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C_B^s(X)$ e $i_1 : \mathcal{H}_{K_1} \hookrightarrow C_B^s(\overline{X})$ possuem norma no máximo

$$\max_{0 \leq |\alpha| \leq s} \sup_{x \in X} (D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x))^{1/2};$$

(ii) A imagem de um conjunto fechado e limitado em $\mathcal{H}_{K_1}$ é fechado em $C_B^s(\overline{X})$. Em particular, se X é limitado ou $\lim_{\substack{x \in X \\ |x| \rightarrow \infty}} \kappa(x) = 0$ então a inclusão i_1 é compacta.

Demonstração: Suponha a limitação de $x \in X \rightarrow D_{xy}^{\alpha\alpha} K(x, x)$, $|\alpha| \leq s$. Do Teorema 5.5.1 e dos comentários anteriores segue que $\mathcal{H}_{K_1}$ é um subconjunto de $C^s(\overline{X})$. A versão estendida do Teorema 5.4.1 garante que

$$|D^\alpha g(x)| \leq \sup_{y \in X} (D_{xy}^{\alpha\alpha} K(y, y))^{1/2} \|g\|_K, \quad x \in \overline{X}, \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

Segue então que $\mathcal{H}_{K_1}$ é um subconjunto de $C_B^s(\overline{X})$ e o item (i) segue. Para finalizar, seja B um conjunto fechado e limitado de $\mathcal{H}_{K_1}$. Se $\{f_n\}$ é uma sequência em B , convergente para f na norma de $C_B^s(\overline{X})$, a versão estendida do Teorema 5.4.4 garante que f pertence a $\mathcal{H}_{K_1}$. Como B é fracamente compacto, a sequência dada possui uma subsequência fracamente (pontualmente) convergente para f e segue que f pertence a B . Assim, B é fechado em $C_B^s(\overline{X})$. Agora, se X é limitado, também pela versão estendida do Teorema 5.4.4, toda sequência em B possui subsequência convergente em $C_B^s(\overline{X})$ e segue que B é compacto. Quando $\lim_{\substack{x \in X \\ |x| \rightarrow \infty}} k(x) = 0$, o núcleo K é uniformemente contínuo em $\overline{X} \times \overline{X}$, podemos então usar a compactação de um ponto de $\overline{X}$ ([31, p.132]) e proceder da mesma forma. $\square$

Acreditamos que este último resultado do trabalho, em conjunto com o Corolário 3.2.5, pode contribuir nos estudos dos números de recobrimento (covering numbers) como descrito na seção 3.5 em [19, p.40].

Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F., *Sobolev spaces*, Second edition, Pure and Applied Mathematics, 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [2] Aronszajn, N., *Theory of Reproducing Kernels*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), no. 3, 337–404.
- [3] Berg, C.; Christensen, J. P. R.; Ressel, P., *Harmonic analysis on semigroups: Theory of positive definite and related functions*, Springer-Verlag, 1984.
- [4] Berlinet, A.; Thomas-Agnan, C., *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics*, With a preface by Persi Diaconis, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.
- [5] Buescu, J., Positive integral operators in unbounded domains, *J. Math. Anal. Appl.* 296 (2004), no. 1, 244–255.
- [6] Buescu, J.; Paixão, A. C., Eigenvalue distribution of Mercer-like kernels, *Math. Nachr.* 280 (2007), no. 9–10, 984–995.
- [7] Buescu, J.; Paixão, A. C., Eigenvalue distribution of positive definite kernels on unbounded domains, *Integral Equations Operator Theory*, 57 (2007), no. 1, 19–41.
- [8] Buescu, J.; Paixão, A. C., Eigenvalues of positive definite integral operators in unbounded intervals, *Positivity*, 10 (2006), 627–646.
- [9] Buescu, J.; Paixão, A. C.; Garcia, F.; Lourtie, I., Positive-definiteness, integral equations and Fourier transforms, *J. Integral Equations Appl.*, 16 (2004), no. 1, 33–52.
- [10] Buescu, J.; Paixão, A. C., Inequalities for differentiable reproducing kernels and an application to positive integral operators, *J. Inequal. Appl.*, 2006 (2006), 1–9.

- [11] Buescu, J.; Paixão, A. C., Positive definite matrices and differentiable reproducing kernel inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, 320 (2006), 279–292.
- [12] Buescu, J.; Paixão, A. C., Positive definite matrices and integral equations on unbounded domains, *Differential Integral Equations*, 19 (2006), no. 2, 189–210.
- [13] Carmeli, C.; De Vito, E.; Toigo, A., Vector valued reproducing kernel Hilbert spaces of integrable functions and Mercer theorem, *Anal. Appl. (Singap.)*, 4 (2006), no. 4, 377–408.
- [14] Castro, M. H.; Menegatto, V. A.; Oliveira, C. P., Laplace-Beltrami differentiability of positive definite kernels on spheres, submitted for publication.
- [15] Chang, C.; Ha, C., Eigenvalues of differentiable positive definite kernels, *SIAM J. Math. Anal.*, 17 (1986), no. 2, 415–419.
- [16] Chang, C.; Ha, C., On eigenvalues of differentiable positive definite kernels, *Integral Equations Operator Theory*, 33 (1999), 1–7.
- [17] Cobos, F.; Kühn, T., Eigenvalues of integral operators with positive definite kernels satisfying integrated Hölder conditions over metric compacta, *J. Approx. Theory*, 63 (1990), 39–55.
- [18] Cochran, J. A.; Lukas, M. A., Differentiable positive definite kernels and Lipschitz continuity, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 104 (1988), 361–369.
- [19] Cucker, F.; Smale, S., On the mathematical foundations of learning, *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)*, 39 (2001), no. 1, 1–49.
- [20] Dikmen, C. M.; Reade, J. B., Factorisation of positive definite operators, *Arch. Math. (Basel)*, 91 (2008), no. 4, 339–343.
- [21] Dostanić, M. R.; Bilinear expansions of the kernels of some nonselfadjoint integral operators, *Mat. Vesnik*, 53 (2001), 117–121.
- [22] Dostanić, M. R.; Generalization of Mercer theorem for a class of nonselfadjoint operators, *Mat. Vesnik*, 41 (1989), 22–29.
- [23] Dostanić, M. R.; Generalization of Mercer theorem, *Publ. de l’Inst. Math., Nouv. series*, 54(68) (1993), 63–70.
- [24] Ferreira, J. C., *Decaimento dos autovalores de operadores integrais gerados por núcleos positivos definidos*, Dissertação de mestrado, ICMC-USP, 2008 [<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-01042008-091207/>].

- [25] Ferreira, J. C.; Menegatto V. A., Eigenvalues of certain integral operators defined by smooth positive definite kernels, submetido para publicação.
- [26] Ferreira, J. C.; Menegatto V. A., Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels, *Integral Equations Operator Theory*, 64 (2009), no. 1, 61–81.
- [27] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A.; Oliveira, C. P., On the nuclearity of integral operators, *Positivity*, 13 (2009), no. 3, 519–541.
- [28] Ferreira, J. C.; Menegatto, V. A.; Peron, A. P., Integral operators on the sphere generated by positive definite smooth kernels, *J. Complexity*, 24 (2008), no. 5-6, 632–647.
- [29] Ferreira, J. C.; Menegatto V. A., Reproducing kernel Hilbert spaces associated with kernels on topological spaces, submetido para publicação.
- [30] Ferreira, J. C.; Menegatto V. A., Reproducing properties of differentiable Mercer-like kernels, submetido para publicação.
- [31] Folland, G. B., *Real analysis: Modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, 1999.
- [32] Gohberg, I.; Gohberg, S.; Krupnik, N., *Traces and determinants of linear operators*, Operator Theory: Advances and Applications, 116, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.
- [33] Guillemin, V.; Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, 1974.
- [34] Horn, R. A.; Johnson C. R., *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [35] Han, Yan Bin, Eigenvalues of higher-dimensional positive definite kernels (*Chinese*), *Acta Math. Sinica*, 36 (1993) 188–194.
- [36] Jordão, T.; Menegatto, V. A., Integral operators generated by multi-scale kernels, *J. Complexity*, 26 (2010), 187–199.
- [37] Kadota, T. T., Term by term differentiability of Mercer’s expansion, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18 (1967), 69–72.
- [38] Kühn, T., Eigenvalues of integral operators generated by positive definite Hölder continuous kernels on metric compacta, *Indag. Math.*, 49 (1987), no. 1, 51–61.

-
- [39] Kühn, T., Eigenvalues of integral operators with smooth positive definite kernels, *Arch. Math. (Basel)*, 49 (1987), no. 6, 525–534.
- [40] Lima, E. L., *Análise no espaço R^n* , Editora Universidade de Brasília, 1970.
- [41] Lima, E. L., *Variedades diferenciáveis*, IMPA, 2007.
- [42] Menegatto, V. A.; Peron, A. P.; Oliveira, C. P., Differentiable of positive definite kernels on spheres, *J. Appl. Anal.*, 15 (2009), no. 1, 101–117.
- [43] Mercer, J., Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A*, 209 (1909), 415–446.
- [44] Munkres, J. R., *Analysis on manifolds*, Addison-Wesley, 1990.
- [45] Munkres, J. R., *Topology, a first course*, Prentice-Hall, 1975.
- [46] Novitskiĭ, I. M., Representation of kernels of integral operators by bilinear series (Russian), *Sibirsk. Mat. Zh.*, 25 (1984), no. 5, 114–118.
- [47] Novitskiĭ, I. M.; Romanov, M. A., An extension of Mercer’s theorem to unbounded operators (Russian), *Dalnevostochnii Matematicheskii Sbornik*, 7 (1999), 123–132.
- [48] Oliveira, C. R., *Introdução à análise funcional*, IMPA, 2007.
- [49] Reade, J., Eigenvalues of positive definite kernels, *SIAM J. Math. Anal.*, 14 (1983), no. 1, 135–140.
- [50] Reade, J., Eigenvalues of positive definite kernels II, *SIAM J. Math. Anal.*, 15 (1984), no. 1, 137–142.
- [51] Reade, J., On the sharpness of Weyl’s estimate for eigenvalues of smooth kernels, *SIAM J. Math. Anal.*, 16 (1985), no. 3, 137–142.
- [52] Reade, J., On the sharpness of Weyl’s estimate for eigenvalues of smooth kernels II, *SIAM J. Math. Anal.*, 19 (1988), no. 3, 137–142.
- [53] Reimer, M., *Multivariate polynomial approximation*, Vol. 144, Birkhäuser, Berlin, 2003.
- [54] Royden, L. H., *Real Analysis*, Second edition, The Macmillan Company, 1968.
- [55] Sadovnichii, A. A., *Theory of operators*, Consultants Bureau, New York and London, 1991.

-
- [56] Saitoh, S., *Integral transforms, reproducing kernels and their applications*, Longman, Gunna University, Japan, 1997.
- [57] Schaback, R., A unified theory of radial basis functions. Native Hilbert spaces for radial basis functions II, *Numerical analysis in the 20th century, vol. I, Approximation theory*. J. Comput. and Appl. Math., 121 (2000), no.1-2, 165–177.
- [58] Schaback, R., Native Hilbert spaces for radial basis functions I, *New developments in approximation theory* (Dortmund, 1998), 255–282, Internat. Ser. Numer. Math., 132, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [59] Smale, S.; Zhou, Ding-Xuan, Learning theory estimates via integral operators and their approximations, *Constr. Approx.*, 26 (2007), 153–172.
- [60] Sun, Hongwei, Mercer theorem for RKHS on noncompact sets, *J. Complexity*, 21 (2005), no. 3, 337–349.
- [61] Sun, Hongwei; Wu, Qiang, Application of integral operator for regularized least-square regression, *Math. Comput Modelling*, 49 (2009), 276–285.
- [62] Sun, Hongwei; Zhou, Ding-Xuan, Reproducing kernel Hilbert spaces associated with analytic translation-invariant Mercer kernel, *J. Fourier Anal. Appl. Math.*, 14 (2008), 89–101.
- [63] Young, N., *An introduction to Hilbert space*. Cambridge University Press, 1988.
- [64] Zhou, Ding-Xuan, Derivative reproducing properties for kernel methods in learning theory, *J. Comput. Appl. Math.*, 220 (2008), 456–463.

Índice Remissivo

- (q, t) -compacto, 62
- $C(X)$, o conjunto das funções contínuas de X em $\mathbb{C}$, 2
- K^x , 42
- K_x , 25
- $L^2PD(X, \nu)$, 19
- $PD(X)$, 20
- $T \geq 0$, operador positivo, 10
- T^* , operador adjunto de T , 10
- $T^{1/n}$, 11
- $\mathcal{A}_p(X, \nu)$, 33
- $\mathcal{K}$, operador integral com núcleo K , 15
- κ , 21
- $\lambda_n(T)$, autovalor de T , 12
- $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$, 42, 54
- $\mathcal{H}$, espaço de Hilbert, 8
- $\mathcal{H}_K$, espaço de Hilbert de reprodução, 42
- $\mathcal{K}^r$, 34
- $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\mathcal{L}(X)$, 9
- V_K , 41
- $|T|$, 11
- $\| \cdot \|_{\mathcal{X}}$, norma do espaço vetorial $\mathcal{X}$, 8
- $\| \cdot \|_{tr}$, norma traço, 12
- $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, 5
- $s_n(T)$, autovalores do operador $|T|$, 13
- $tr(T)$, traço do operador T , 12
- classe $Lip^{\alpha, s}(X, \nu)$, 66
- conjunto gerador de K , 25
- Desigualdade
 - de Bessel, 8
 - de Cauchy-Schwarz, 8
 - de Hölder, 6
- Identidade de Parseval, 8
- Lema da raiz n -ésima, 11
- medida estritamente positiva, 22
- núcleo
 - L^2 -positivo definido, 19
 - de Mercer, 25
 - hermitiano, 17
 - positivo definido, 20
- operadores
 - autoadjuntos, 10
 - compactos, 10
 - normais, 10
 - nucleares, 12
 - positivos, 10
- propriedade
 - da média- α , 67
 - da média- $Lip^{\alpha, s}(X, \nu)$, 68

série de Mercer, 25

Teorema

da Convergência Dominada, 7

da Convergência Monótona, 6

de Arzelà-Ascoli, 2, 45

de Dini, 1

de Fubini, 7

de Hilbert-Schmidt, 13

de Mercer I, 28

de Mercer II, 46

de Mercer III, 52

de Mercer IV, 89