Equações parciais elípticas com crescimento exponencial

Yony Raúl Santaria Leuyacc

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:________________________

Equações parciais elípticas com crescimento exponencial

Yony Raúl Santaria Leuyacc

Orientador: **Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Março de 2014

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Leuyacc, Yony Raúl Santaria
L652e Equações parciais elípticas com crescimento exponencial / Yony Raúl Santaria Leuyacc; orientador Sérgio Henrique Monari Soares. -- São Carlos, 2014.
108 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2014.

1. Desigualdades de Trudinger-Moser. 2. Equações diferenciais parciais elípticas. 3. Crescimento exponencial. 4. Métodos variacionais. I. Soares, Sérgio Henrique Monari, orient. II. Título.

A minha família.

Agradecimentos

Agradeço especialmente ao professor Dr. Sérgio Monari a orientação, amizade e apoio. Agradeço-lhe os conhecimentos ensinados e a minha introdução ao fascinante mundo das EDPs elípticas.

Agradeço à Jackeline as palavras de motivação e o apoio constante para que continuasse meu trabalho com sucesso e para superar-me cada dia.

Agradeço aos meus amigos e professores da Universidad Nacional de San Marcos, em especial ao professor Agripino Garcia, principal incentivador para fazer o mestrado.

Agradeço ao povo brasileiro a calorosa receptividade em acolher-me de braços abertos neste lindo país.

Agradeço à Universidade de São Paulo, em particular ao Instituto de Matemáticas e Computação, que contribuiu para minha formação acadêmica.

Agradeço aos amigos que fiz nesta cidade, pela ajuda e por me fazer mais grato em minha estância.

Agradeço à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior o apoio financeiro e à coordenação da Pós Graduação em Matemática da USP.

The greatest enemy of knowledge is not ignorance, it is the illusion of knowledge.

Stephen Hawking

Resumo

Neste trabalho estudamos existência, multiplicidade e não existência de soluções não triviais para o seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um conjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ com fronteira suave e a função f possui crescimento exponencial. Para a existência de soluções são aplicados métodos variacionais combinados com as desigualdades de Trudinger-Moser. O resultado de não-existência é restrito ao caso de soluções radiais positivas e $\Omega = B_1(0)$. A prova usa técnicas de equações diferenciais ordinárias.

Palavras-chave: Espaços de Orlicz, Desigualdades de Trudinger-Moser, Equações parciais elípticas, Crescimento exponencial, Métodos variacionais.

Abstract

In this work we study the existence, multiplicity and non-existence of non-trivial solutions to the following elliptic problem:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded and smooth domain in $\mathbb{R}^2$ and f possesses exponential growth. The existence results are proved by using variational methods and the Trudinger-Moser inequalities. The non-existence result is restricted to the case of positive radial solutions and $\Omega = B_1(0)$. The proof uses techniques of the theory of ordinary differential equations.

Keywords: Orlicz spaces, Trudinger-Moser inequalities, Partial elliptic equations, Exponential growth, Variational methods.

Sumário

Introdução

Equações diferencias parciais elípticas com crescimento exponencial surgem naturalmente em processos físicos na forma de modelos matemáticos associados a problemas de reação de combustão. Em geometria Riemanniana, equações elípticas com crescimento exponencial estão presentes no estudo do problema de Yamabe a respeito da existência de uma métrica sobre uma variedade compacta de dimensão dois cuja curvatura é constante.

O objetivo deste trabalho é estudar existência, multiplicidade e não-existência de soluções para uma classe de problemas elípticos

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave e a $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função satisfazendo a condição de crescimento: existe $\alpha_0 \geq 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(x,s)|}{\exp(\alpha s^2)} = \begin{cases} 0, & \text{uniformemente em } \overline{\Omega}, \quad \forall\, \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \text{uniformemente em } \overline{\Omega}, \quad \forall\, \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

Na literatura [2, 8, 7], diz-se que $f(x,s)$ tem crescimento *subcrítico* ou *crítico* quando $\alpha_0 = 0$ ou $\alpha_0 > 0$, respectivamente.

Para motivar essa noção de criticalidade, observamos inicialmente que em dimensão dois, o teorema de imersão de Sobolev não fornece um crescimento crítico, pois $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ para qualquer $q \geq 1$, mas $H_0^1(\Omega) \not\subseteq L^\infty(\Omega)$. Existe, porém, um crescimento crítico que é dado pelas desigualdades de Trudinger-Moser [11, 13], as quais estabelecem que para $0 \leq \alpha \leq 4\pi$ existe uma constante $C > 0$ independente de α tal que

$$\int_\Omega e^{\alpha u^2}\, dx \leq C|\Omega|. \tag{1}$$

Além disso, Moser observou que a limitação $\alpha \leq 4\pi$ é necessária e é a melhor possível (veja Capítulos 1 e 2 a seguir).

Em [6], Carleson e Chang provaram que a desigualdade em (1) é atingido no caso em que Ω é uma bola unitária do $\mathbb{R}^2$. Isto assegura a existência de uma constante $\lambda > 0$ tal que a equação

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda 8\pi u e^{4\pi u^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

possui uma solução positiva. Portanto, escrevendo a equação (2) na forma

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

o termo $f(u)$ satisfaz

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f(s)|}{\exp(\alpha s^2)} = \begin{cases} 0, & \forall\, \alpha > 4\pi, \\ +\infty, & \forall\, \alpha < 4\pi. \end{cases}$$

Observamos que pela positividade da solução extremal, podemos escrever (2) na forma

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda 8\pi e^{4\pi u^2 + \ln u}, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

ou seja, o termo $\ln u$ corresponde a uma perturbação de ordem inferior do termo u^2. Deste modo, ao considerar a equação mais geral

$$(P_1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = e^{\alpha_0 u^2 + \ln h(u)}, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Em [3] Adimurthi e Yadava mostraram que uma condição suficiente, além de outras, para a existência de uma solução de (P_1) é dado por:

$$\lim_{|r|\to+\infty} h(r)r = +\infty.$$

Utilizando métodos variacionais, argumentos do tipo Passo da Montanha e a desigualdade de Trudinger-Moser, Figueiredo, Miyagaki e Ruf [7] obtiveram resultados de existência e de multiplicidade para o problema do tipo

$$(P_2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = h(u,x)e^{\alpha_0 u^2}, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Onde termo h corresponde a uma perturbação de ordem inferior do termo u^2. Eles provaram a existência de solução para (P_2) no caso crítico supondo que a existência de uma constante $K_1 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to+\infty} h(t,x)t > K_1 = \frac{2}{\alpha_0 d^2},$$

onde d é o raio da maior bola contida em Ω. Estes resultados são apresentados no Capítulo 3.

Em [8], usando técnicas de equações diferenciais ordinárias, De Figueiredo e Ruf provaram que para $\Omega = B_1(0)$ e $\alpha_0 = 1$, existe de uma constante $K_0 > 0$ tal que se

$$h(r) = \frac{K}{r} \text{ para } r \text{ suficientemente grande e } 0 < K < K_0$$

e h satisfazendo algumas condições na origem, então a equação (P_1) não possui solução radial positiva. Note que por [9], qualquer solução positiva de (P_1) em $B_1(0)$ é radial; isto implica a não existência de solução positiva nestas condições. Este resultado é apresentado no Capítulo 4.

Notações

1. $\mathbb{R}^N$ denota o Espaço euclidiano N-dimensional. $N \geq 2$.
2. $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ denota a derivada parcial da função u em relação a i-ésima coordenada.
3. $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ denota o gradiente de u.
4. $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, denota o Laplaciano de u.
5. $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ denota o limite inferior da sequência f_n quando $n \longrightarrow \infty$.
6. $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um conjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^N$.
7. $B_r(x_0)$ denota bola aberta em $\mathbb{R}^N$, de centro x_0 e raio r.
8. S^{N-1} denota a esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.
9. ω_N é a medida $(N-1)$-dimensional de S^{N-1}.
10. $\{f < g\}$ denota o conjunto $\{x \in \Omega : f(x) < g(x)\}$ analogamente se define os conjuntos $\{f \leq g\}$, $\{f > g\}$ e $\{f \geq g\}$.
11. $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em Ω.
12. $f(x) = O(g(x))$ denota que, existem $C > 0$ e $x_0 > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para todo $x \geq x_0$.
13. $f(x) = O_+(g(x))$ denota que, existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq Cg(x)$, para todo x no domínio .

Capítulo

1

Imersões nos Espaços de Orlicz

Neste capítulo introduzimos definições, conceitos e propriedades básicas dos espaços de Orlicz, os quais são uma generalização dos espaços L^p. Esta teoria foi proposta por Wladyslaw Orlicz em 1931. A ideia principal é substituir a função $\phi(t) = |t|^p$ por outra positiva, convexa e crescente. Seguindo [13], apresentamos também os espaços de Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$ que permitem a construção dos espaços $W^{k,p,\lambda}(\Omega)$, em particular $W^{k,p,N}(\Omega) = W^{k,p}(\Omega)$. Os resultados principais deste capítulo são relativos às imersões dos espaços $W^{k,p,\lambda}(\Omega)$ em certos espaços de Orlicz, onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ satisfazendo a condição de cone. Por último, mostramos que estas imersões são em um certo sentido ótimas.

1.1 Classes e espaços de Orlicz

Definição 1.1. *Diz-se que uma função $u \in L^p(\Omega)$ pertence ao espaço de Morrey $L^{p,\lambda}(\Omega)$ se existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\int_{\Omega\cap B} |u(x)|^p dx \leq K|B|^{1-\frac{\lambda}{N}}, \tag{1.1}$$

para qualquer bola B, onde $|B|$ denota a medida N-dimensional de B.

O espaço $L^{p,\lambda}(\Omega)$ é um espaço de Banach munido com a seguinte norma.

$$||u||_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \left(\sup_B |B|^{1-\frac{\lambda}{N}} \int_{\Omega\cap B} |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em particular, temos

$$L^{p,\lambda}(\Omega) = \begin{cases} \{0\}, & \lambda < 0, \\ L^{\infty}(\Omega), & \lambda = 0, \\ L^{p}(\Omega), & \lambda = N. \end{cases}$$

Definição 1.2. *Definimos os seguintes espaços :*

$$W^{k,p,\lambda}(\Omega) := \{u \in W^{k,p}(\Omega); D^{\alpha}(u) \in L^{p,\lambda}(\Omega),\ \textit{para todo}\ \alpha \in \mathbb{N}^N\ \textit{tal que}\ |\alpha| = k\},$$

e

$$W_0^{k,p,\lambda}(\Omega) := W_0^{k,p}(\Omega) \cap W^{k,p,\lambda}(\Omega),$$

com a norma $\|u\|_{W^{k,p,\lambda}(\Omega)} := \|u\|_{W^{k-1,p}(\Omega)} + \sum\limits_{|\alpha|=k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$.

Definição 1.3. *Uma função* $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua, convexa e par satisfazendo*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \to \infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty,$$

será chamada de N-função.

Exemplo 1.4. *Como exemplo de N-função podemos citar*

$$\phi(t) = |t|^p,\ p > 1, \quad \psi(t) = e^{|t|} - |t| - 1, \quad \theta(t) = e^{|t|^p} - 1,\ p > 1.$$

Definição 1.5. *Dada uma N-função* ϕ*, a Classe de Orlicz* $L^{\phi}(\Omega)$ *é definido como o conjunto de todas as funções* u *tais que*

$$\int_{\Omega} \phi\big(u(x)\big)\, dx < +\infty.$$

Definição 1.6. *Dada uma N-função* ϕ *, o Espaço de Orlicz* $L^{\phi^*}(\Omega)$ *é definido como o espaço (das classes de equivalência) gerado por* $L^{\phi}(\Omega)$ *com a norma de Luxembourg*

$$\|u\|_{L^{\phi^*}(\Omega)} := \inf\{k > 0; \int_{\Omega} \phi(\frac{u}{k})\, dx \leq 1\}, \tag{1.2}$$

onde u *é equivalente a* v *se, e só se* $u = v$ *q.t.p. em* Ω.

Quando o conjunto Ω estiver subentendido, denotaremos a norma $\|\cdot\|_{L^{\phi^*}(\Omega)}$ simplesmente por $\|\cdot\|_{L^{\phi^*}}$.

Sejam ϕ e ψ N-funções. Se para todo $\lambda > 0$ ocorrer

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\phi(\lambda t)}{\psi(t)} = +\infty,$$

escrevemos $\psi \prec \phi$, note que neste caso, temos $L^{\phi^*}(\Omega) \subsetneq L^{\psi^*}(\Omega)$.

Lema 1.7. *Para cada* $u \in L^{\phi^*}(\Omega)$, *tem-se*

$$\int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{\|u\|_{L^{\phi^*}}})\, dx \leq 1.$$

Demonstração. Seja $\{k_n\}$ uma sequência minimizante para $\|u\|_{L^{\phi^*}}$, isto é,

$$\int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{k_n})\, dx \leq 1, \text{ para cada } n \geq 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} k_n = \|u\|_{L^{\phi^*}}.$$

Como ϕ é uma função contínua, temos

$$\lim_{n\to\infty} \phi(\frac{u(x)}{k_n}) = \phi(\frac{u(x)}{\|u\|_{L^{\phi^*}}}), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{\|u\|_{L^{\phi^*}}})\, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{k_n})\, dx \leq 1.$$

■

Teorema 1.8. *Se* ϕ *é uma N-função, então* $\|\cdot\|_{L^{\phi^*}(\Omega)}$ *define uma noma. Além disso, o espaço* $L^{\phi^*}(\Omega)$ *munido com esta norma é um espaço de Banach.*

Demonstração. Verificaremos que se satisfazem as condições de norma.

(i) Seja u, tal que $\|u\|_{L^{\phi^*}} = 0$, logo para cada $k > 0$, existe $\tilde{k}$ satisfazendo

$$0 < \tilde{k} < k \quad \text{e} \quad \int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{\tilde{k}})\, dx \leq 1.$$

Como ϕ é par é crescente em $[0, \infty)$, temos $\int_\Omega \phi(\frac{|u(x)|}{k})\, dx \leq \int_\Omega \phi(\frac{|u(x)|}{\tilde{k}})\, dx \leq 1.$ Logo,

$$\int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{k})\, dx \leq 1, \quad \text{para todo } k > 0. \tag{1.3}$$

Suponha que existem $\epsilon > 0$ e um conjunto $E \subset \Omega$ mensurável de medida positiva tais que $|u(x)| > \epsilon$, para todo $x \in E$. Logo

$$\int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{k})\, dx \geq \int_E \phi(\frac{u(x)}{k})\, dx \geq \int_E \phi(\frac{\epsilon}{k})\, dx = |E|\phi(\frac{\epsilon}{k}).$$

Sendo ϕ uma N-função, temos $\lim_{k\to 0+} \phi(\frac{\epsilon}{k}) = +\infty$. Portanto, temos uma contradição com (1.3), consequentemente $u = 0$, q.t.p. em Ω.

Por outro lado, se $u = 0$, q.t.p. em Ω, se satisfaz (1.3), logo, $\|u\|_{L^{\phi^*}} = 0$.

(ii) Seja $\alpha > 0$, usando o Lema 1.7

$$\int_\Omega \phi(\frac{(\alpha u)(x)}{\alpha\|u\|_{L^{\phi^*}}})\,dx = \int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{\|u\|_{L^{\phi^*}}})\,dx \leq 1.$$

Portanto, $\|\alpha u\|_{L^{\phi^*}} \leq \alpha\|u\|_{L^{\phi^*}}$.

Pelo Lema 1.7

$$\int_\Omega \phi(\frac{\alpha u(x)}{\|\alpha u\|_{L^{\phi^*}}})\,dx \leq 1.$$

Assim, $\|u\|_{L^{\phi^*}} \leq \dfrac{\|\alpha u\|_{L^{\phi^*}}}{\alpha}$. Donde temos $\|\alpha u\|_{L^{\phi^*}} = \alpha\|u\|_{L^{\phi^*}}$, o caso $\alpha < 0$ é análogo e o caso $\alpha = 0$ é imediato.

(iii) Dados u e v, tais que $\|u\|_{L^{\phi^*}}$ e $\|v\|_{L^{\phi^*}}$ são finitos. Seja

$$\gamma = \|u\|_{L^{\phi^*}} + \|v\|_{L^{\phi^*}}; \quad \alpha = \frac{\|u\|_{L^{\phi^*}}}{\gamma}; \quad \beta = \frac{\|v\|_{L^{\phi^*}}}{\gamma}.$$

Note que, $\alpha + \beta = 1$. Usando a convexidade de ϕ e o Lema 1.7, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \phi(\frac{u(x)+v(x)}{\gamma})\,dx &= \int_\Omega \phi(\frac{\alpha u(x)}{\|u\|_{L^{\phi^*}}} + \frac{\beta v(x)}{\|v\|_{L^{\phi^*}}})\,dx \\ &\leq \alpha\int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{\|u\|_{L^{\phi^*}}})\,dx + \beta\int_\Omega \phi(\frac{v(x)}{\|v\|_{L^{\phi^*}}})\,dx \leq \alpha+\beta = 1.\end{aligned}$$

Donde, $\|u+v\|_{L^{\phi^*}} \leq \gamma = \|u\|_{L^{\phi^*}} + \|v\|_{L^{\phi^*}}$.

Consequentemente, $\|\cdot\|_{L^{\phi^*}(\Omega)}$ define uma norma em $L^{\phi^*}(\Omega)$.

Para ver que L^{ϕ^*} é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{L^{\phi^*}(\Omega)}$ veja [10].

■

Definição 1.9. *Diz-se que uma sequência $\{u_n\} \subset L^\phi(\Omega)$ converge em $L^\phi(\Omega)$ para $u \in L^{\phi^*}(\Omega)$ se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \phi\big(u_n(x) - u(x)\big)\,dx = 0.$$

Observe que, para a N-função $\phi(t) = |t|^p$, com $p \geq 1$, tem-se a convergência em $L^p(\Omega)$.

Definição 1.10. *Denotemos por $E^{\phi}(\Omega)$ o conjunto $E^{\phi}(\Omega) := \overline{L^{\infty}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^{\phi^*}}}$.*

Lema 1.11. *A seguinte inclusão $E^{\phi}(\Omega) \subseteq L^{\phi}(\Omega)$ é valida para cada N-função ϕ.*

Demonstração. Seja $u \in E^{\phi}(\Omega)$, então existe $v \in L^{\infty}(\Omega)$, tal que $\|u-v\|_{L^{\phi^*}} \leq \dfrac{1}{2}$. Usando que ϕ é crescente no intervalo $[0, +\infty)$ e o Lema 1.7, temos

$$\int_{\Omega} \phi(2|u-v|)\, dx \leq \int_{\Omega} \phi\Big(\frac{|u-v|}{\|u-v\|_{L^{\phi^*}}}\Big)\, dx \leq 1.$$

Sendo ϕ é uma função par, então $2u - 2v \in L^{\phi}(\Omega)$. Pela convexidade da função ϕ, temos

$$\int_{\Omega} \phi(u)\, dx = \int_{\Omega} \phi\big(\frac{1}{2}(2u-2v) + \frac{1}{2}(2v)\big)\, dx \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} \phi(2u-2v)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} \phi(2v)\, dx < +\infty,$$

pois,

$$\int_{\Omega} \phi(2v)\, dx \leq \sup_{0 \leq t \leq 2\|v\|_{L^{\infty}}} \phi(t)|\Omega| < +\infty.$$

E, portanto, $u \in L^{\phi}(\Omega)$. ■

Definição 1.12. *Diz-se que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ satisfaz a condição do cone se existe um cone fixo k_{Ω} em $\mathbb{R}^N$ tal que cada ponto $x \in \Omega$ é o vértice de um cone $k_{\Omega}(x)$ congruente a k_{Ω} e contido em Ω.*

Lema 1.13. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado satisfazendo a condição do cone e $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Então,*

$$|u(x)| \leq C(N, k_{\Omega})\Big(\int_{\Omega} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi + ||u||_{L^1(\Omega)}\Big), \quad \textit{q.t.p. em } \Omega,$$

onde $C(N, k_{\Omega})$ é uma constante que só depende de N e k_{Ω}.

Demonstração. Consideremos primeiramente o caso em que $u \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$. Fize $x \in \Omega$ e para cada $y \in k_{\Omega}(x)$ considere a função $f(t) = u\big(y + t(x-y)\big)$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos, $f(1) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\, dt$, isto é,

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \nabla u\big(y + t(x-y)\big) \cdot \big(x-y\big)\, dt, \quad \text{para todo } y \in k_{\Omega}(x).$$

Logo,

$$|u(x)| \leq |u(y)| + \int_0^1 |\nabla u(y + t(x-y))||(x-y)|\, dt, \quad \text{para todo } y \in k_{\Omega}(x). \tag{1.4}$$

Denotando por $k_{\Omega,r}(x) := k_\Omega(x) \cap B_r(x)$, onde $0 < r \leq r_\Omega := diam\big(k_\Omega(x)\big)$. Integrando (1.4) em relação a $y \in k_{\Omega,r}(x)$, temos

$$
\begin{aligned}
|k_{\Omega,r}(x)||u(x)| &\leq \int_{k_{\Omega,r}(x)} |u(y)|\,dy + \int_{k_{\Omega,r}(x)} \int_0^1 |\nabla u\big(y+t(x-y)\big)||(x-y)|\,dtdy \qquad (1.5)\\
&\leq ||u||_{L^1(\Omega)} + \int_0^1 \int_{K_{\Omega,r}(x)} |\nabla u\big(y+t(x-y)\big)||(x-y)|\,dydt.
\end{aligned}
$$

Da mudança de variável $\xi = y + t(x-y)$, temos $d\xi = (1-t)^N dy$ e $|x-y| = \dfrac{|\xi - x|}{(1-t)}$. Além disso, note que $y \in k_{\Omega,r}(x)$ se, e só se $\xi \in k_{\Omega,(1-t)r}(x)$. Assim

$$
\int_0^1 \int_{k_{\Omega,r}(x)} |\nabla u\big(y+t(x-y)\big)||(x-y)|\,dydt = \int_0^1 \int_{k_{\Omega,(1-t)r}(x)} \frac{|\nabla u(\xi))||x-\xi|}{(1-t)^{N+1}}\,d\xi dt. \qquad (1.6)
$$

Usando o Teorema de Fubini na integral a direita em (1.6) e notando que

$$
\{(\xi,t); \xi \in k_{\Omega,\,(1-t)r}(x),\ 0 \leq t \leq 1\} = \{(\xi,t); 0 \leq t \leq 1 - \frac{\xi - x}{r},\ \xi \in k_{\Omega,r}(x)\},
$$

temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{k_{\Omega,(1-t)r}(x)} \frac{|\nabla u(\xi)||x-\xi|}{(1-t)^{N+1}}\,d\xi dt &= \int_{k_{\Omega,r}(x)} |\nabla u(\xi)||x-\xi| \int_0^{1-\frac{\xi-x}{r}} \frac{1}{(1-t)^{N+1}}\,dtd\xi\\
&= \int_{k_{\Omega,r}(x)} |\nabla u(\xi)||x-\xi| \Big(\frac{\frac{r^N}{|\xi-x|^N} - 1}{N}\Big)\,d\xi \qquad (1.7)\\
&\leq \int_{k_{\Omega,r}(x)} |\nabla u(\xi)||x-\xi| \Big(\frac{r^N}{N|\xi-x|^N}\Big)\,d\xi\\
&= \frac{r^N}{N} \int_{k_{\Omega,r}(x)} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Usando (1.6) e (1.7) em (1.5), resulta

$$
\begin{aligned}
|k_{\Omega,r}(x)||u(x)| &\leq ||u||_{L^1(\Omega)} + \frac{r^N}{N} \int_{k_{\Omega,r}(x)} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi\\
&\leq ||u||_{L^1(\Omega)} + \frac{{r_\Omega}^N}{N} \int_{K_\Omega(x)} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}} d\xi.
\end{aligned}
$$

Fazendo agora $r \to r_\Omega$ e lembrando que $|k_{\Omega,r_\Omega}(x)| = |k_\Omega(x)| = |k_\Omega|$, para cada $x \in \Omega$,

temos
$$|k_\Omega||u(x)| \leq ||u||_{L^1(\Omega)} + \frac{{r_\Omega}^N}{N}\int_{K_\Omega(x)} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi.$$
E, portanto,
$$|u(x)| \leq C(N,k_\Omega)\Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi + ||u||_{L^1(\Omega)}\Big), \quad \text{para todo } x\in\Omega,$$

onde $C(N,k_\Omega) = \max\{\frac{1}{|k_\Omega|}, \frac{{r_\Omega}^N}{N|k_\Omega|}\}$.

No caso geral, dada $u \in W^{1,1}(\Omega)$, existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ em $W^{1,1}(\Omega)$, sem perda de generalidade podemos supor que:
$$\nabla u_n \to \nabla u, \text{ em } L^1(\Omega), \quad u_n \to u, \text{ em } L^1(\Omega), \quad u_n(x) \to u(x), \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{1.8}$$
Pela primeira parte da demonstração para funções em $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, temos para todo $n \geq 1$
$$|u_n(x)| \leq C(N,k_\Omega)\Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi + ||u_n||_{L^1(\Omega)}\Big), \quad \text{para todo } x\in\Omega. \tag{1.9}$$
De (1.8) e do Lema B.2 logo, podemos assumir que
$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi \to \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$
Logo, tomando o limite quando $n\to\infty$ em (1.9) e usando (1.8) , temos
$$|u(x)| \leq C(N,k_\Omega)\Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi + \|u\|_{L^1(\Omega)}\Big), \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

■

Lema 1.14. *Seja $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e ilimitado, então*
$$|u(x)| \leq \frac{1}{N\omega_N}\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração. Considere o caso tal que $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Dado $w \in S^{N-1}$, temos
$$u(x) = -\int_0^\infty \frac{d\big(u(x+rw)\big)}{dr}\,dr = -\int_0^\infty \nabla u(x+rw)\cdot w\,dr.$$

Logo, $|u(x)| \leq \int_0^\infty |\nabla u(x+rw)|\, dr$. Agora integrando em relação a $w \in S^{N-1}$, obtemos

$$N\omega_N |u(x)| \leq \int_{S^{N-1}} \int_0^\infty |\nabla u(x+rw)|\, drdw = \int_{S^{N-1}} \int_0^\infty \frac{|\nabla u(x+rw)|}{|x-(x+rw)|^{N-1}} r^{N-1}\, drdw.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = x + rw$ e usando coordenadas radiais na última integral, temos

$$|u(x)| \leq \frac{1}{N\omega_N} \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi, \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Para o caso geral, dado $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$, existe uma sequência $\{u_n\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,1}(\Omega)$, e faça a prova neste caso como na prova do Lema 1.13. ■

Lema 1.15. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado e convexo e $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Defina*

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\, dx.$$

Então

$$||u - u_\Omega||_{L^1(\Omega)} \leq C(N)|\Omega|^{\frac{1}{N}} \frac{diam(\Omega)^N}{|\Omega|} ||\nabla u||_{L^1(\Omega)}.$$

Demonstração. Pela densidade, basta provar para $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Fixe $x \in \Omega$ e considere $y \in \Omega$ um ponto qualquer. Pela convexidade de Ω, temos

$$u(x) - u(y) = \int_0^1 \nabla u\big(y + t(x-y)\big) \cdot \big(x-y\big)\, dt.$$

Integrando em relação a $y \in \Omega$, temos

$$|\Omega| u(x) - \int_\Omega u(y) dy = \int_\Omega \int_0^1 \nabla u\big(y + t(x-y)\big) \cdot \big(x-y\big)\, dtdy,$$

isto é,

$$|\Omega|\big(u(x) - u_\Omega\big) = \int_\Omega \int_0^1 \nabla u\big(y + t(x-y)\big) \cdot \big(x-y\big)\, dtdy.$$

Fazendo como na prova do Lema 1.13, temos

$$\int_\Omega \int_0^1 \nabla u\big(y + t(x-y)\big) \cdot \big(x-y\big)\, dtdy \leq \frac{diam(\Omega)^N}{N} \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi.$$

Logo,

$$|u(x) - u_\Omega| \leq \frac{diam(\Omega)^N}{N|\Omega|} \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi, \quad \text{se } x \in \Omega. \tag{1.10}$$

Integrando em relação a $x \in \Omega$ e usando o Lema B.1, temos

$$\begin{aligned} ||u - u_\Omega||_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x) - u_\Omega|\, dx &\leq \frac{diam(\Omega)^N}{N|\Omega|} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi dx \\ &\leq \frac{diam(\Omega)^N}{N|\Omega|} \int_\Omega |\nabla u(\xi)| \int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}}\, dx d\xi \\ &\leq \frac{diam(\Omega)^N}{N|\Omega|} C_0(N)|\Omega|^{1/N} \int_\Omega |\nabla u(\xi)|\, d\xi \\ &\leq C(N)|\Omega|^{1/n} \frac{diam(\Omega)^n}{|\Omega|} ||\nabla u||_{L^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde $C(N) = \dfrac{C_0(N)}{N}$. ■

1.2 Teoremas de imersão nos espaços de Orlicz

Teorema 1.16. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado satisfazendo a condição do cone. Então o espaço $W^{1,1,1}(\Omega)$ está imerso continuamente no espaço de Orlicz $L^{\phi^*}(\Omega)$, onde $\phi(t) = e^{|t|} - |t| - 1$.*
Além disso, para cada $u \in W^{1,1,1}(\Omega)$, temos

$$\|u\|_{L_{\phi^*(\Omega)}} \leq C\big(N, k_\Omega, diam(\Omega)\big)\|u\|_{W^{1,1,1}(\Omega)}.$$

Demonstração. Seja $u \in W^{1,1,1}(\Omega)$, denotamos

$$K = \|u\|_{W^{1,1,1}(\Omega)}; \quad d = diam(\Omega); \quad b = \frac{1}{KC},$$

onde $C > 0$ é uma constante apropriada a ser determinada. Considere $f \in L^p(\Omega)$, com $p > 1$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pelo Lema 1.13 existe uma constante $C_1 = C_1(N, k_\Omega)$, tal que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)u(x)|\, dx &\leq \int_\Omega |f(x)| \Big(C_1 \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|\xi - x|^{N-1}}\, d\xi + \|u\|_{L^1(\Omega)} \Big) \Big)\, dx \\ &\leq C_1 \Big(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x)\nabla(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi dx + K \int_\Omega |f(x)|\, dx \Big) \qquad (1.11) \\ &= C_1 \Big(\int_\Omega \int_\Omega \Big(\frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}} \Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{|f(x)|^p |\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1-\frac{1}{q}}} \Big)^{\frac{1}{p}}\, d\xi dx + K \int_\Omega |f(x)|\, dx \Big) \end{aligned}$$

$$\leq C_1\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\,d\xi dx\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)|^p|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1-\frac{1}{q}}}\,d\xi dx\Big)^{\frac{1}{p}}+$$
$$+\,C_1K\int_\Omega |f(x)|\,dx.$$

Vamos agora estimar cada uma dessas integrais em (1.11).

- Estimativa para $\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\,d\xi dx$

Pelo Lema B.1, podemos encontrar uma constante $C_2 = C_2(N)$, tal que

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\,dx \leq C_2 q|\Omega|^{\frac{1}{qN}}. \tag{1.12}$$

Por outro lado, como $u\in W^{1,1,1}(\Omega)$, $|\nabla u|\in L^{1,1}(\Omega)$, de (1.1), para a bola $B = B_d(x_o)$, com x_0 fixo em Ω, resulta

$$\int_{\Omega\cap B_d(x_o)} |\nabla u(\xi)|d\xi \leq \|\nabla u\|_{L^{1,1}(\Omega)}|B_d(y_o)|^{1-\frac{1}{N}} \leq K|B_d(x_o)|^{1-\frac{1}{N}}. \tag{1.13}$$

Como $\Omega\subseteq B_d(x_o)$, $|\Omega|\leq|B_d(x_o)| = C_3 d^N$, com $C_3 = \omega_N$. Logo, de (1.12) e (1.13), tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\,d\xi dx &= \int_\Omega |\nabla u(\xi)|\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\,d\xi dx\\ &\leq qC_2|\Omega|^{\frac{1}{qN}}\int_\Omega |\nabla u(\xi)|d\xi\\ &\leq KqC_2|\Omega|^{\frac{1}{qN}}|B_d(x_o)|^{1-\frac{1}{N}}\\ &\leq KqC_2(C_3d^N)^{\frac{1}{qN}}(C_3d^N)^{1-\frac{1}{N}} = C_4Kqd^{N-1+\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

onde $C_4 = C_4(N)$.

- Estimativa para $\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)|^p|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1-\frac{1}{q}}}\,d\xi dx$

Para cada $x\in\Omega$ e $\rho>0$, defina a função $v_x(\rho) = \displaystyle\int_{\Omega\cap B_\rho(x)} |\nabla u(\xi)|\,d\xi$. Logo, de (1.1),

$$v_x(\rho) = \int_{\Omega\cap B_\rho(x)} |\nabla u(\xi)|\,d\xi \leq K|B_\rho(x)|^{1-\frac{1}{N}} = K(C_3\rho^N)^{1-\frac{1}{N}} \leq KC_5\rho^{N-1}, \tag{1.14}$$

onde $C_5 = C_5(N)$. Por outro lado, $v_x'(\rho) = \displaystyle\int_{\Omega\cap S_\rho(x)} |\nabla u(\xi)|d\xi$.

E, portanto,

$$\frac{v_x'(\rho)}{\rho^{N-1-\frac{1}{q}}} = \frac{1}{\rho^{N-1-\frac{1}{q}}} \int_{\Omega\cap S_\rho(x)} |\nabla u(\xi)|\, d\xi = \int_{\Omega\cap S_\rho(x)} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1-\frac{1}{q}}}\, d\xi.$$

Por conseguinte, desta última igualdade e de (1.14), temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{N-1-\frac{1}{q}}}\, dy &\le \int_0^d \int_{\Omega\cap S_{\rho(x)}} \frac{|\nabla u(\xi)|}{|\xi - x|^{N-1-\frac{1}{q}}}\, d\xi d\rho = \int_0^d \frac{v_x'(\rho)}{\rho^{N-1-\frac{1}{q}}}\, d\rho \\
&= \lim_{t\to 0} \int_t^d \frac{v_x'(\rho)}{\rho^{N-1-\frac{1}{q}}}\, d\rho = \lim_{t\to 0} \frac{v_x(\rho)}{\rho^{N-1-\frac{1}{q}}}\Big|_{\rho=t}^{\rho=d} \\
&\quad - (-N+1+\frac{1}{q}) \int_0^d \frac{v_x(\rho)}{\rho^{N-\frac{1}{q}}}\, d\rho \\
&\le \frac{v_x(d)}{d^{N-1-\frac{1}{q}}} - \lim_{\rho\to 0} \frac{v_x(\rho)}{\rho^{N-1-\frac{1}{q}}} + (N-1) \int_0^d \frac{v_x(\rho)}{\rho^{N-\frac{1}{q}}}\, d\rho \\
&\le \frac{KC_5 d^{N-1}}{d^{N-1-\frac{1}{q}}} + (N-1) \int_0^d \frac{KC_5 \rho^{N-1}}{\rho^{N-\frac{1}{q}}}\, d\rho \\
&\le KC_5 d^{\frac{1}{q}} \big(1 + q(N-1)\big),
\end{aligned}$$

onde, usamos (1.14), para ter $\lim_{\rho\to 0} \frac{v_x(\rho)}{\rho^{N-1-\frac{1}{q}}} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \int_\Omega \frac{|f(x)|^p |\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1-\frac{1}{q}}}\, d\xi dx &= \int_\Omega |f(x)|^p \int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1-\frac{1}{q}}}\, d\xi dx \\
&\le KC_5 d^{\frac{1}{q}} \big(1 + q(N-1)\big) \|f\|^p_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

E, portanto, das estimativas das integrais em (1.11), segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)u(x)|\, dx &\le C_1 \Big(C_4 K q d^{N-1+\frac{1}{q}}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(KC_5 d^{\frac{1}{q}} \big(1+q(N-1)\big) \|f\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}} + C_1 K \int_\Omega |f(x)|\, dx \\
&= C_1 C_4^{\frac{1}{q}} C_5^{\frac{1}{q}} K d^{\frac{N}{q}} (Nq - q + 1)^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^p(\Omega)} + C_1 K \int_\Omega |f(x)|\, dx \\
&\le C_7 K d^{\frac{N}{q}} q \|f\|_{L^p(\Omega)} + C_1 K \|f\|_{L^1(\Omega)}, \quad \text{onde } C_7 = C_7(N, k_\Omega).
\end{aligned}$$

Logo, para cada $q > 1$ e $p > 1$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \sup_{f \in L^p(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |f(x)u(x)|\, dx}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{f \in L^p(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{C_7 K d^{\frac{N}{q}} q \|f\|_{L^p(\Omega)} + C_1 K \|f\|_{L^1(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \\
&\leq \sup_{f \in L^p(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{C_7 K d^{\frac{N}{q}} q \|f\|_{L^p(\Omega)} + C_1 K \|f\|_{L^p(\Omega)} \|1\|_{L^q(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \\
&= C_7 K d^{\frac{N}{q}} q + C_1 K |\Omega|^{\frac{1}{q}} \leq C_7 K d^{\frac{N}{q}} q + C_1 K C_3^{\frac{1}{q}} d^{\frac{N}{q}} \\
&\leq C_8 K q d^{\frac{N}{q}}, \quad \text{onde } C_8 = C_8(N, k_\Omega).
\end{aligned}
$$

Logo, para qualquer $b > 0$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{j=2}^{m} \frac{(b|u|)^j}{j!}\, dx &= \sum_{j=2}^{m} \frac{b^j}{j!} \int_\Omega |u|^j\, dx = \sum_{j=2}^{m} \frac{b^j}{j!} \|u\|^j_{L^j(\Omega)} \\
&\leq \sum_{j=2}^{m} \frac{b^j}{j!} \Big(C_8 K j d^{\frac{N}{j}} \Big)^j = d^N \sum_{j=2}^{m} \frac{(C_8 K b j)^j}{j!}.
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

Pelo Teste da Razão, $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(aj)^j}{j!}$ converge se $|a| < \dfrac{1}{e}$. Portanto, escolhendo C suficientemente grande de modo que

$$
0 < b < \frac{1}{eC_8 K}; \quad \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(C_8 K b j)^j}{j!} \leq \frac{1}{d^N}.
$$

Concluímos que,

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \big(e^{b|u|} - b|u| - 1 \big)\, dx &= \int_\Omega \lim_{m\to\infty} \sum_{j=2}^{m} \frac{(b|u|)^j}{j!}\, dx \\
&= \lim_{m\to\infty} d^N \sum_{j=2}^{m} \frac{(C_8 K b j)^j}{j!} \leq 1.
\end{aligned}
$$

Logo, da definição de ϕ e b, temos

$$
\int_\Omega \phi\Big(\frac{u}{C\|u\|_{W^{1,1,1}(\Omega)}}\Big)\, dx \leq 1.
$$

E, portanto,

$$
\|u\|_{L^{\phi^*}} \leq C(N, k_\Omega, diam(\Omega)) \|u\|_{W^{1,1,1}(\Omega)}.
$$

■

Corolário 1.17. *Seja Ω um conjunto convexo limitado e suponha que $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e*

$|\nabla u| \in L^{1,1}(\Omega)$, *então existem constastes positivas* A *e* B, *que só dependem de* N *e* Ω, *tais que*

$$\int_\Omega \left(e^{A\frac{|u(x)-u_\Omega|}{K}} - 1\right) dx \le B, \quad \textit{onde } K = \|\nabla u\|_{L^{1,1}(\Omega)}.$$

Demonstração. Defina $v(x) = u(x) - u_\Omega$, para $x \in \Omega$. Então $v \in W^{1,1}(\Omega)$ e $\nabla v = \nabla u$. De (1.10), existe uma constante $C_1 = C_1(N, \Omega)$ tal que

$$|v(x)| \le C_1 \int_\Omega \frac{|\nabla v(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Note que, usando a desigualdade acima e $K = \|\nabla u\|_{L^{1,1}(\Omega)}$ como na demonstração do Teorema 1.16, existe uma constante $C = C(N, \Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \phi(\frac{v(x)}{CK})\, dx \le 1.$$

Isto é,

$$\int_\Omega \left(e^{\frac{|u(x)-u_\Omega|}{CK}} - \frac{|u(x)-u_\Omega|}{K} - 1\right) dx \le 1.$$

Além disso, pelo Lema 1.15, existe $C_2 = C_2(N, \Omega)$ tal que $\|u(x) - u_\Omega\|_{L^1(\Omega)} \le C_2 K$.
E, portanto,

$$\int_\Omega \left(e^{\frac{|u(x)-u_\Omega|}{CK}} - 1\right) dx \le 1 + C_2.$$

Logo, para concluir a demonstração, basta tomar $A = \dfrac{1}{C}$ e $B = 1 + C_2$. ■

Lema 1.18. *Seja* Ω *um domínio aberto limitado regular em* $\mathbb{R}^N$, *então a seguinte imersão é contínua*

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,N}(\Omega), \quad \textit{se } N = kp.$$

Demonstração. Temos a seguintes imersões continuas :
Por (ii) do Teorema A.7, temos que

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^N(\Omega).$$

Por (i) do Teorema A.7, temos que

$$W^{k-1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^N(\Omega), \quad \text{pois } N = \frac{Np}{N-(k-1)p}.$$

Assim, dada $u \in W^{k,p}(\Omega) \subset L^N(\Omega)$, tem-se $|\nabla u| \in W^{k-1,p}(\Omega) \subset L^N(\Omega)$. Portanto, $u \in L^N(\Omega)$ e $\nabla u \in L^N(\Omega)$. Ou seja $u \in W^{1,N}(\Omega)$.

■

Agora estamos prontos para enunciar o resultado principal deste capítulo.

Teorema 1.19. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um conjunto limitado satisfazendo a condição de cone, então o espaço $W^{k,p}(\Omega)$, onde $N = kp$, está imerso continuamente no Espaço de Orlicz $L^{\phi^*}(\Omega)$, onde*

$$\phi(t) = e^{|t|^{\frac{N}{N-1}}} - 1.$$

Além disso, $W^{k,p}(\Omega)$ está imerso continuamente no sentido na convergência $L^{\psi}(\Omega)$ em qualquer classe de Orlicz $L^{\psi}(\Omega)$, onde $\psi(t) \leq \phi(\lambda t)$, para algum $\lambda > 0$.

Demonstração. Considere $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$ e q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Pelo Lema 1.13 e a desigualdade de Hölder, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(x)u(x)|\, dx &\leq \int_\Omega |f(x)|\Big(C(N,k_\Omega)\big(\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|}{|\xi - x|^{N-1}}\, d\xi + \|u\|_{L^1(\Omega)}\big)\Big)\, dx \\
&\leq C\left(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)\nabla(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi dx + \|u\|_{L^1(\Omega)}\int_\Omega |f(x)|\, dx\right) \qquad (1.16)\\
&= C\left(\int_\Omega\int_\Omega \Big(\frac{|f(x)|}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\Big)^{1-\frac{1}{N}}\Big(\frac{|\nabla u(\xi)|^N}{|x-\xi|^{\frac{N-1}{q}}}\Big)^{\frac{1}{N}}\, d\xi dx + \|u\|_{L^1(\Omega)}\int_\Omega |f(x)|\, dx\right)\\
&\leq C\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)|}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\, d\xi dx\Big)^{1-\frac{1}{N}}\Big(\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|^N|f(x)|}{|x-\xi|^{\frac{N-1}{q}}}\, d\xi dx\Big)^{\frac{1}{N}} + \\
&\quad + C|u\|_{L^1(\Omega)}\int_\Omega |f(x)|\, dx.
\end{aligned}$$

Agora estimemos as integrais acima.

• Estimativa para $\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)|}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\, d\xi dx.$

Pelo Lema B.1, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(x)|}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\, d\xi dx &= \int_\Omega |f(x)|\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^{N-\frac{1}{q}}}\, d\xi dx \leq C_1 q|\Omega|^{\frac{1}{qN}}\int_\Omega |f(x)|\, dx\\
&\leq C_1 q|\Omega|^{\frac{1}{qN}}\|f\|_{L^p(\Omega)}\|1\|_{L^q(\Omega)} = C_1 q|\Omega|^{\frac{1}{qN}(\frac{1}{N}+1)}\|f\|_{L^p(\Omega)}.
\end{aligned}$$

• Estimativa para $\displaystyle\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|^N|f(x)|}{|x-\xi|^{\frac{N-1}{q}}}\, d\xi dx.$

Pelo Teorema de Fubini e o Lema B.1, temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\nabla u(\xi)|^N|f(x)|}{|x-\xi|^{\frac{N-1}{q}}}\,d\xi dx &= \int_\Omega |\nabla u(\xi)|^N \int_\Omega \frac{|f(x)|}{|x-\xi|^{\frac{N-1}{q}}}\,d\xi dx\\ &\leq \int_\Omega |\nabla u(\xi)|^N \|f\|_{L^p(\Omega)}\Big(\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}}\,d\xi\Big)^{\frac{1}{q}}\,dx\\ &\leq C_2|\Omega|^{\frac{1}{qN}}\|f\|_{L^p(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{qN}}\int_\Omega |\nabla u(\xi)|^N\,dx\\ &= C_2|\Omega|^{\frac{1}{qN}}\|f\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla u\|^N_{L^N(\Omega)}.\end{aligned}$$

Logo, substituindo as estimativas das integrais em (1.16), resulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)u(x)|\,dx &\leq C\Big(C_1 q|\Omega|^{\frac{1}{qN}(\frac{1}{N}+1)}\|f\|_{L^p(\Omega)}\Big)^{1-\frac{1}{N}}\Big(C_2|\Omega|^{\frac{1}{qN}}\|f\|_{L^p(\Omega)}\|\nabla u\|^N_{L^N(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{N}}\\ &\quad + C\|u\|_{L^1(\Omega)}\|f\|_{L^P(\Omega)}\|1\|_{L^q(\Omega)}\\ &= C\|f\|_{L^p(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{q}}\Big(C_3 q^{\frac{N-1}{N}}\|\nabla u\|_{L^N(\Omega)} + \|u\|_{L^1(\Omega)}\Big)\\ &\leq C_4\|f\|_{L^p(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{q}}q^{\frac{N-1}{N}}\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}, \quad \text{onde } C_4 = C_4(N,\Omega,k_\Omega).\end{aligned}$$

Portanto, para cada $q > 1$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^q(\Omega)} &= \sup_{f\in L^p(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |f(x)u(x)|dx}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\\ &\leq \sup_{f\in L^p(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{C_4\|f\|_{L^p(\Omega)}|\Omega|^{\frac{1}{q}}q^{\frac{N-1}{N}}\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\\ &= C_4|\Omega|^{\frac{1}{q}}q^{\frac{N-1}{N}}\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}.\end{aligned}\tag{1.17}$$

Usando (1.17) para $q = \frac{Nj}{N-1}$, com $j \geq 1$,

$$\Big(\int_\Omega |u|^{\frac{Nj}{N-1}}\,dx\Big)^{\frac{N-1}{Nj}} \leq C_4|\Omega|^{\frac{N-1}{Nj}}\Big(\frac{Nj}{N-1}\Big)^{\frac{N-1}{N}}\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}.$$

E, portanto, para cada $j \geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{\frac{Nj}{N-1}}\,dx &\leq C_4|\Omega|\Big(\frac{Nj}{N-1}\Big)^j\big(\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}\big)^{\frac{Nj}{N-1}}\\ &= |\Omega|\Big(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}}\Big)^j\Big(C_5 e\Big(\frac{N}{N-1}\Big)^{\frac{N-1}{N}}\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}\Big)^{\frac{Nj}{N-1}}.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Note que, a serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!}(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}})^j$ é convergente pois $\frac{1}{e^{\frac{N}{N-1}}} < \frac{1}{e}$, logo podemos supor que

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!}(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}})^j = C_6 = C_6(N).$$

Seja $C_7 = \max\{1, C_6|\Omega|\}$ e $C_8 = eC_5C_7(\frac{N}{N-1})^{\frac{N-1}{N}} \|u\|_{W^{1,N}(\Omega)} = C_9\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}$, onde $C_9 = C_9(N, \Omega, k_\Omega)$. De (1.18), temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\frac{u}{C_8}|^{\frac{Nj}{N-1}}\, dx &\leq (\frac{1}{C_8})^{\frac{Nj}{N-1}} |\Omega|(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}})^j \Big(C_5 e(\frac{N}{N-1})^{\frac{N-1}{N}} \|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}\Big)^{\frac{Nj}{N-1}} \\
&= \frac{|\Omega|(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}})^j \Big(C_5 e(\frac{N}{N-1})^{\frac{N-1}{N}} \|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}\Big)^{\frac{Nj}{N-1}}}{\Big(eC_5C_7(\frac{N}{N-1})^{\frac{N-1}{N}} \|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}\Big)^{\frac{Nj}{N-1}}} \\
&= |\Omega|(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}})^j \frac{1}{C_7^{\frac{Nj}{N-1}}} \leq |\Omega|(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}})^j \frac{1}{C_7}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \phi(\frac{u}{C_8})\, dx &= \int_\Omega \big(e^{|\frac{u}{C_8}|^{\frac{N}{N-1}}} - 1\big)\, dx = \int_\Omega \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} |\frac{u}{C_8}|^{\frac{Nj}{N-1}}\, dx \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} \int_\Omega |\frac{u}{C_8}|^{\frac{Nj}{N-1}}\, dx \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j!} |\Omega|(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}})^j \frac{1}{C_7} \\
&\leq |\Omega| \frac{1}{C_7} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!}(\frac{j}{e^{\frac{N}{N-1}}})^j \leq \frac{|\Omega| C_6}{C_7} \leq 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^{\phi^*}} \leq C_8 = C_9\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)}, \quad \text{com } C_9 = C_9(N, \Omega, k_\Omega).$$

Pelo Lema 1.18, existe uma constante $\tilde{C} > 0$, tal que $\|u\|_{W^{1,N}(\Omega)} \leq \tilde{C}\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$. Consequentemente,

$$\|u\|_{L^{\phi^*}} \leq C_{10}\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad \text{com} \quad C_{10} = C_{10}(N, \Omega, k_\Omega).$$

Para mostrar segunda parte do teorema, provaremos primeiro duas afirmações:

Afirmação 1: Se $\psi(t) \leq \phi(\lambda t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, com $\lambda > 0$. Então a seguinte imersão

$L^{\phi^*}(\Omega) \subset L^{\psi^*}(\Omega)$ é contínua.

De fato, pela hipótese,

$$\psi(\frac{u(x)}{\lambda\|u\|_{L^{\phi^*}}}) \leq \phi(\frac{u(x)}{\|u\|_{L^{\phi^*}}}), \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Integrando em relação a $x \in \Omega$ e do Lema 1.7

$$\int_\Omega \psi(\frac{u(x)}{\lambda\|u\|_{L_{\phi^*}}})\, dx \leq \int_\Omega \phi(\frac{u(x)}{\|u\|_{L_{\phi^*}}})\, dx \leq 1.$$

Donde $\|u\|_{L^{\psi^*}} \leq \lambda\|u\|_{L^{\phi^*}}$.

Afirmação 2: Sejam $\{u_n\} \subset L^{\psi^*}(\Omega)$, $u \in L^{\psi^*}(\Omega)$ tais que $\|u_n - u\|_{L^{\psi^*}} < 1$, para todo $n \geq n_0$.

Então

$$\int_\Omega \psi(u_n - u)\, dx \leq \|u_n - u\|_{L^{\psi^*}}, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

De fato, como ϕ é uma função convexa então $\alpha\phi(t) < \phi(\alpha t)$, para cada $\alpha > 1$ logo, tomando $\alpha_n = \dfrac{1}{\|u_n - u\|_{L_{\phi^*}}}$ para cada $n \geq n_0$, temos

$$\int_\Omega \frac{\phi(u_n - u)}{\|u_n - u\|_{L^{\phi^*}}}\, dx \leq \int_\Omega \phi(\frac{u_n - u}{\|u_n - u\|_{L^{\phi^*}}})\, dx \leq 1.$$

Donde segue a afirmação.

Agora provemos a segunda parte do teorema. Seja $u \in W^{k,p}(\Omega)$, então existe $\{u_n\} \subset L^\infty(\Omega)$, tal que $\|u_n - u\|_{W^{k,p}} \to 0$, pela imersão do Teorema 1.19, tem-se $\|u_n - u\|_{L^{\phi^*}} \to 0$ portanto, $u \in E^\phi(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^{\phi^*}}}$. Pelo Lema 1.11, $u \in L^\phi(\Omega) \subset L^{\phi^*}(\Omega)$. Pela Afirmação 1, $u \in L^{\psi^*}$ e $\|u_n - u\|_{L^{\psi^*}} \to 0$ e finalmente pela Afirmação 2, temos

$$\int_\Omega \psi(u_n - u)\, dx \to 0, \quad \text{se } n \to \infty.$$

E, portanto, $W^{k,p}(\Omega)$ está imerso continuamente no sentido na convergência $L^\psi(\Omega)$, em qualquer classe de Orlicz $L^\psi(\Omega)$, onde $\psi(t) \leq \phi(\lambda t)$, com $\lambda > 0$. ■

1.3 Otimalidade das imersões nos espaços de Orlicz

As imersões citadas nos Teoremas 1.16 e 1.19 são ainda válidas se consideramos os espaços $W_0^{1,1,1}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega), N = kp$ no lugar dos espaços $W^{1,1,1}(\Omega)$ e $W^{k,p}(\Omega), N = kp$ respectivamente, sem precisar supor que e Ω seja limitado e satisfaça a condição do cone . Para ver isto, é suficiente usar o Lema 1.14 no lugar do Lema 1.13 nas demonstrações.

Mostremos que as imersão dos teoremas são ótimas. Consideramos a seguinte função $u : B_1(0) \to \mathbb{R}$ definida como $u(x) = \ln \dfrac{1}{|x|}$. Logo,

$$\int_{B_1(0)} \ln \frac{1}{|x|}\, dx = -\omega_N \int_0^1 r^{N-1} \ln r\, dx = \frac{\omega_N}{N^2}$$

e

$$\int_{B_1(0)} \frac{1}{|x|}\, dx = \omega_N \int_0^1 r^{N-2}\, dr = \frac{\omega_N}{N-1}$$

assim $u \in W^{1,1}\big(B_1(0)\big)$. Por outro lado, seja $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^N$ uma bola de raio R

$$\begin{aligned}\int_{B_1(0)\cap B_R(x_0)} |\nabla u|\, dx &= \int_{B_1(0)\cap B_R(x_0)} \frac{1}{|x|}\, dx \le \int_{B_R(x_0)} \frac{1}{|x|}\, dx \\ &\le \int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|}\, dx = \omega_N \int_0^R R^{N-2}\, dr = \frac{\omega_N R^{N-1}}{N-1} \\ &= \frac{\omega_N^{\frac{1}{N}}}{N-1} (\omega_N R^N)^{1-\frac{1}{N}} = \frac{\omega_N^{\frac{1}{N}}}{N-1} |B_R(x_0)|^{1-\frac{1}{N}}.\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla u \in L^{1,1}\big(B_1(0)\big)$, donde $u \in W^{1,1,1}\big(B_1(0)\big)$. Porém $u \notin L^{\phi}\big(B_1(0)\big)$, para a N-função $\phi(t) = e^{b|t|} - b|t| - 1$, com $b > N$, pois

$$\int_{B_1(0)} e^{b \ln \frac{1}{|x|}}\, dx = \omega_N \int_0^1 r^{N-1-b}\, dr = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^{N-b}}{N-b} = +\infty$$

como $\displaystyle\int_{B_1(0)} \ln \frac{1}{|x|}\, dx = \frac{\omega_N}{N^2}$ e $\displaystyle\int_{B_1(0)} 1\, dx = \omega_N$, temos

$$\int_{B_1(0)} \big(e^{b \ln \frac{1}{|x|}} - b \ln \frac{1}{|x|} - 1\big)\, dx = +\infty$$

Isto mostra que $W^{1,1,1}(\Omega)$, não pode ser imerso em $L^{\phi}(\Omega)$, onde $\phi(t) = e^{b|t|} - b|t| - 1$, $b > N$. Consequentemente, é necessário considerar o espaço $L^{\phi^*}(\Omega)$ no Teorema 1.16.

Por outro lado, a constante $N/(N-1)$ da imersão do Teorema 1.19, é ótima, isto é que o espaço $W^{1,N}(\Omega)$, não pode ser imerso no espaço de Orlicz $L^{\phi^*}(\Omega)$, onde

$$\phi(t) = e^{|t|^{\gamma}} - 1, \quad \text{e} \quad \gamma > \frac{N}{N-1}.$$

Para mostrar isto, consideremos a seguinte função radial u definida em $B_1(0) \subset \mathbb{R}^N$

$$u(x) = (\ln \frac{1}{|x|})^{\gamma'}, \quad \text{onde } \frac{N-1}{N} > \gamma' > \frac{1}{\gamma}.$$

Logo, para cada $k > 0$ e cada $n \geq 1$, temos

$$\int_{B_1(0)} e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln \frac{1}{|x|})^{\gamma'\gamma}}\, dx = \omega_N \int_0^1 r^{N-1} e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln \frac{1}{r})^{\gamma'\gamma}}\, dr \geq \omega_N \int_0^{\frac{1}{n}} r^{N-1} e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln \frac{1}{r})^{\gamma'\gamma}}\, dr. \quad (1.20)$$

Note que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a função $h(r) = r^{N-1} e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln \frac{1}{r})^{\gamma'\gamma}}$ é decrescente em $[0, \frac{1}{n_0}]$. Logo, para cada $n \geq n_0$ em (1.20), temos

$$\int_{B_1(0)} e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln \frac{1}{|x|})^{\gamma'\gamma}}\, dx \geq \omega_N \int_0^{\frac{1}{n}} r^{N-1} e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln \frac{1}{r})^{\gamma'\gamma}}\, dr \geq \omega_N \frac{e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln n)^{\gamma'\gamma}}}{n^{N-1}} \frac{1}{n}.$$

Como $\gamma'\gamma > 1$, tem-se $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln n)^{\gamma'\gamma}}}{n^{N-2}} = +\infty$, portanto $\int_{B_1(0)} e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln \frac{1}{|x|})^{\gamma'\gamma}}\, dx = +\infty$. Deste modo, para cada $k > 0$

$$\int_{B_1(0)} \phi(\frac{u(x)}{k})\, dx = \int_{B_1(0)} \big(e^{\frac{1}{k^\gamma}(\ln \frac{1}{|x|})^{\gamma'\gamma}} - 1\big)\, dx = +\infty,$$

assim $u \notin L^{\phi^*}\big(B_1(0)\big)$, mas $u \in W^{1,N}(\Omega)$, pois

$$\int_{B_1(0)} |\nabla u|^N\, dx = \omega_N \int_0^1 |(\ln \frac{1}{r})^{\gamma'-1} \frac{1}{r}|^N r^{N-1}\, dr = \omega_N \int_0^1 \frac{dr}{r(\ln \frac{1}{r})^{-N(\gamma'-1)}} < +\infty,$$

onde a última integral é finita, pois $-N(\gamma'-1) > 1$.

Capítulo 2

A desigualdade de Trudinger-Moser

O principal objetivo deste capítulo é provar uma desigualdade chamada de Trudinger-Moser em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, que estabelece a existência de uma constante $C = C(N) > 0$ tal que para $\alpha \leq \alpha_N$.

$$\int_\Omega e^{\alpha u^{\frac{N}{N-1}}}\, dx \leq C|\Omega|, \quad \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega), \text{ com } \|\nabla u\|_{L^N} \leq 1,$$

onde ω_{N-1} é a medida da esfera unitária $(N-1)$-dimensional e $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}-1}$. Além disso, a constante α_N é ótima isto é, se $\alpha > \alpha_N$, a integral acima pode ser arbitrariamente grande, para alguma função apropriada u. A prova deste resultado faz uso da simetrização de Schwarz, o qual reduz o problema N-dimensional a um problema unidimensional. Este capítulo é baseada no artigo [11] de Moser.

2.1 Simetrização de Schwarz

Definição 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função simples positiva, isto é*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

onde χ é a função característica, os A_j são conjuntos mensuráveis em Ω para cada$1 \leq j \leq n$ e $0 \leq a_n < a_{n-1} <, \ldots, < a_1$.

Definimos $\varphi^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$, *a simetrização de Schwarz de* φ *como*

$$\varphi^* = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\{R_{j-1} \leq |x| < R_j\}},$$

onde $\Omega^* = B_R(0)$, *com* $R > 0$ *tal que* $|B_R(0)| = |\Omega|$, $R_0 = 0$ *e os* R_j *são números positivos tais que satisfazem a condição* $|\{R_{j-1} \leq |x| < R_j\}| = |A_j|$, *para cada* $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 2.2. *Seja a função simples* $\varphi : [2, 16] \to \mathbb{R}$, *definida por*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2, & 2 \leq x < 4, \\ 9, & 4 \leq x < 8, \\ 4, & 8 \leq x < 14, \\ 5, & 14 \leq x \leq 16. \end{cases}$$

Então, a simetrização de Schwarz de φ *é dado por* $\varphi^* : (-7, 7) \mapsto \mathbb{R}$, *onde*

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 9, & 0 \leq |x| < 2, \\ 5, & 2 \leq |x| < 3, \\ 4, & 3 \leq |x| < 6, \\ 2, & 6 \leq |x| < 7. \end{cases}$$

Veja as figuras

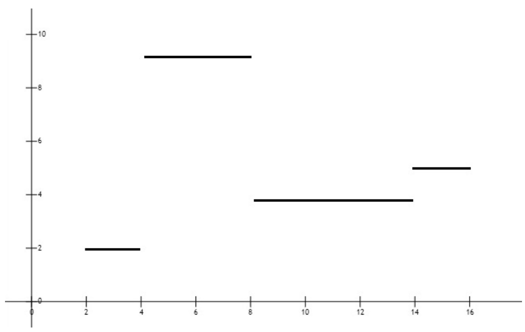

Figura 2.1: função φ

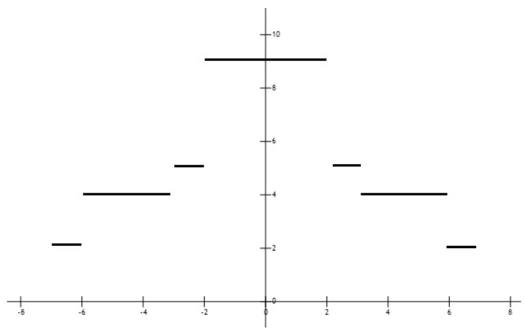

Figura 2.2: função φ^*

Observação 2.3. *A simetrização de Schwarz* φ^* *satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) φ^* é uma função positiva, radialmente simétrica (i.e. $\varphi^*(x) = \varphi^*(y)$, se $|x| = |y|$.) e radialmente não crescente (i.e. $\varphi^*(x) \leq \varphi^*(y)$, se $|y| \leq |x|$).

(ii) Se $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2$, então $0 \leq \varphi_1^* \leq \varphi_2^*$.

Definição 2.4. *Seja f uma função positiva. Defina f^* a simetrização de Schwarz de f como $f^* = \lim_{n\to\infty} f_n^*$, onde $\{f_n\}$ é uma sequência de funções simples, positivas e crescentes tal que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.*

Note que se f é uma função positiva, então f^* satisfaz também as propriedades da Observação 2.3.

Proposição 2.5. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função positiva. Então*

a) Seja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função contínua, positiva é crescente, tal que $G(f) \in L^1(\Omega)$, então $G(f^*) \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega G(f(x))\,dx = \int_{\Omega^*} G(f^*(x))\,dx.$$

b) A seguinte desigualdade é valida ***(Desigualdade de Pólya−Szegö):***

$$\int_{\Omega^*} |\nabla f^*(x)|^N\,dx \leq \int_\Omega |\nabla f^(x)|^N\,dx.$$

Demonstração.

a) Seja $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j} : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função simples, então

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi(x)\,dx &= \sum_{j=1}^{n} a_j|A_j| = \sum_{j=1}^{n} a_j|\chi_{\{R_{j-1}\leq|x|<R_j\}}| \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_j \int_{B_R(0)} \chi_{\{R_{j-1}\leq|x|<R_j\}}\,dx = \int_{\Omega^*} \varphi^*(x)\,dx.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Seja $f = \lim_{n\to\infty} f_n$, onde $\{f_n\}$ uma sequência de funções simples positivas e crescentes. Pela Observação 2.3, $\{f_n^*\}$ é uma sequência de funções simples positivas e crescentes com $\lim_{n\to\infty} f_n^* = f^*$. Logo, como G é contínua positiva e crescentes, temos $\{G(f_n)\}$ e $\{G(f_n^*)\}$ são sequencias simples positivas e crescentes com

$$G(f) = \lim_{n\to\infty} G(f_n) \quad \text{e} \quad G(f^*) = \lim_{n\to\infty} G(f_n^*).$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona e de (2.1), temos

$$\int_\Omega G(f(x))\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega G(f_n(x))\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega^*} G(f_n^*(x))\,dx = \int_{\Omega^*} G(f^*(x))\,dx.$$

b) Uma prova de $b)$ pode ser encontrada em [12].

■

2.2 Lemas

Agora vamos a provar os lemas necessários para a demonstração da desigualdade de Trundiger-Moser.

Lema 2.6. *Seja $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, uma função satisfazendo*

$$y(0) = 0, \int_0^\infty y'(s)^N \, ds \leq 1, y'(s) \geq 0 \textit{ para } s \geq 0 \textit{ e } \frac{y(s)^N}{s^{N-1}} \leq 1 - \delta = y_1^N.$$

Então

$$(N-1)y_1^{N-2} \int_0^1 (y'(s) - y_1)^2 \, ds + \int_0^\infty y'(s)^N \, ds \leq \delta, \tag{2.2}$$

onde $y_1 := y(1)$.

Demonstração. Pela desigualdade (i) do Lema B.3, para cada $s \geq 0$, com $a = y_1$ e $b = y'(s) - y_1$, temos

$$y_1^N + N y_1^{N-1}(y'(s) - y_1) + (N-1)y_1^{N-2}(y' - y_1)^2 \leq y'(s)^N, \quad \text{se } s \geq 0.$$

Integrando na variável s em $[0, 1]$.

$$y_1^N + N y_1^{N-1} \int_0^1 (y'(s) - y_1) \, ds + (N-1)y_1^{N-2} \int_0^1 (y' - y_1)^2 \, ds \leq \int_0^1 y'(s)^N \, ds. \tag{2.3}$$

Note que,

$$\int_0^1 (y'(s) - y_1) \, ds = y(1) - y(0) - y_1 = 0,$$

e

$$\int_0^1 y'(s)^N ds = \int_0^\infty y'(s)^N ds - \int_1^\infty y'(s)^N ds \leq 1 - \int_1^\infty y'(s)^N ds = \delta + y_1^N - \int_1^\infty y'(s)^N ds.$$

Logo, substituindo em (2.3), temos

$$y_1^N + (N-1)y_1^{N-2} \int_0^1 (y' - y_1)^2 \, ds \leq \int_0^1 y'(s)^N \, ds \leq \delta + y_1^N - \int_1^\infty y'(s)^N \, ds.$$

Donde concluímos a demonstração do lema. ■

Lema 2.7. *Seja* $y : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *uma função satisfazendo (2.2) e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{N} = 1$. *Então para cada* $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$, *temos* $y(s) \leq z(s)$, *para todo* $s \geq 0$, *onde*

$$z(s) = \begin{cases} s + min\{(2\delta)^{\frac{1}{N}} s^{\frac{1}{p}}, C_3\big(\delta(1-\delta)\big)^{\frac{1}{2}}\}, & 0 \leq s \leq 1, \\ 1 + \delta^{\frac{1}{N}}(s-1)^{\frac{1}{p}}, & 1 < s, \end{cases} \qquad C_3 = C_3(N). \tag{2.4}$$

Demonstração. De (2.2), temos

$$\int_0^\infty y'(s)^N \, ds \leq \delta, \quad \int_0^1 (y'(s) - y_1)^2 \, ds \leq \frac{\delta}{y_1^{N-2}(N-1)}. \tag{2.5}$$

- Se $s > 1$

$$y(s) - y(1) = \int_1^s y'(w) \, dw \leq \|1\|_{L^p([1,s])} \|y'\|_{L^N([1,s])} = \Big(\int_1^s dw\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_1^s y'(w)^N \, dw\Big)^{\frac{1}{N}}$$
$$\leq (s-1)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_1^\infty y'(s)^N \, ds\Big)^{\frac{1}{N}} \leq (s-1)^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{1}{N}}.$$

E, portanto,

$$y(s) \leq 1 + (s-1)^{\frac{1}{p}} \delta^{\frac{1}{N}}, \quad \text{se } s > 1. \tag{2.6}$$

- Se $0 \leq s \leq 1$

Note que

$$\int_s^1 \big(y_1 - y'(w)\big) \, dw = y_1 - y(1) - y_1 s + y(s) = y(s) - y_1 s.$$

E, por conseguinte, usando a desigualdade de Schwarz e (2.5), temos

$$y(s) - y_1 s = \int_s^1 y_1 - y'(w) \, dw \leq \int_s^1 |y'(w) - y_1 s| \, dw$$
$$\leq \Big(\int_s^1 dw\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_s^1 (y'(w) - y_1)^2 \, dw\Big)^{\frac{1}{2}} \leq (1-s)^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{\delta}{y_1^{N-2}(N-1)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$= C_3(N)(\delta(1-s))^{\frac{1}{2}}.$$

Como $y_1 \leq 1$, temos

$$y(s) \leq s + C_3(\delta(1-s))^{\frac{1}{2}}, \text{ se } 0 \leq s \leq 1. \tag{2.7}$$

Seja $0 < \sigma < 1$ fixado, achemos o máximo de $y(\sigma)$, para todas as funções y

satisfazendo (2.7) e as seguinte condições

$$y(0) = 0, \quad y(1) = y_1, \quad \int_0^1 y'(s)^N \, ds \leq 1. \tag{2.8}$$

Seja y^* tal máximo que é atingido por uma função que é um segmento de reta passando por $(0, 0)$ e (σ, y^*) junto com outro segmento de reta unindo (σ, y^*) com $(1, y_1)$. Da condição $\displaystyle\int_0^1 y'(s)^N \, ds \leq 1$, temos

$$\int_0^1 y'(s)^N \, ds = \int_0^\sigma (\frac{y^*}{\sigma})^N \, ds + \int_\sigma^1 |\frac{y_1 - y^*}{1 - \sigma}|^N \, ds \leq 1.$$

E, portanto,

$$(\frac{y^*}{\sigma})^N \sigma + |\frac{y_1 - y^*}{1 - \sigma}|^N (1 - \sigma) \leq 1.$$

Como $\dfrac{y^*}{\sigma} \geq y_1$, então $y^* = y_1(\sigma + \rho)$ com $\rho \geq 0$ logo, substituindo na equação anterior

$$y_1^N (1 + \frac{\rho}{\sigma})^N \sigma + y_1^N |1 - \frac{\rho}{1 - \sigma}|^N (1 - \sigma) \leq 1.$$

E, portanto,

$$(1 + \frac{\rho}{\sigma})^N \sigma + |1 - \frac{\rho}{1 - \sigma}|^N (1 - \sigma) \leq \frac{1}{y_1^N} = \frac{1}{1 - \delta}. \tag{2.9}$$

Pela desigualdade (i) do Lema B.3, temos $1 + N\dfrac{\rho}{\sigma} + (\dfrac{\rho}{\sigma})^N \leq (1 + \dfrac{\rho}{\sigma})^N$.
Observe que como $1 - Nx \leq |1 - x|^N$ para cada $x \in \mathbb{R}$, temos

$$1 - N\frac{\rho}{1 - \sigma} \leq |1 - \frac{\rho}{1 - \sigma}|^N.$$

Substituindo as últimas desigualdades em (2.9), temos

$$\big(1 + N\frac{\rho}{\sigma} + (\frac{\rho}{\sigma})^N\big)\sigma + \big(1 - N\frac{\rho}{1 - \sigma}\big)(1 - \sigma) \leq \frac{1}{1 - \delta}.$$

Simplificando

$$\frac{\rho^N}{\sigma^{N-1}} + 1 \leq \frac{1}{1 - \delta}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{\rho^N}{\sigma^{N-1}} \leq \frac{\delta}{1 - \delta}.$$

Note que $\dfrac{1}{1 - \delta} < 2$, pois $0 < \delta < \dfrac{1}{2}$ e, por conseguinte,

$$\rho^N \leq 2\delta\sigma^{N-1} \quad \text{e, portanto,} \quad \rho \leq (2\delta)^{\frac{1}{N}} \sigma^{\frac{1}{p}}.$$

Então, para cada y satisfazendo (2.8), temos

$$y(\sigma) \leq y^* = y_1(\sigma + \rho) \leq \sigma + \rho \leq \sigma + (2\delta)^{\frac{1}{N}} \sigma^{\frac{1}{p}}$$

Como σ foi arbitrário em $(0, 1)$

$$y(s) \leq s + (2\delta)^{\frac{1}{N}} s^{\frac{1}{p}}, \quad \text{se } 0 \leq s \leq 1. \tag{2.10}$$

Portanto, de (2.7) e (2.10), resulta

$$y(s) \leq \min\{C_3\big(\delta(1-s)\big)^{\frac{1}{2}}, s + (2\delta)^{\frac{1}{N}} s^{\frac{1}{p}}\}, \quad \text{se } 0 \leq s \leq 1$$

■

Lema 2.8. *Seja $z : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ a função definida em (2.4).*
Defina a função :

$$\varphi(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq \dfrac{1}{2}, \\ |s-1|, & \dfrac{1}{2} < s. \end{cases} \tag{2.11}$$

Então existe $0 < \delta_0 < \dfrac{1}{2}$ e constantes $C_4 = C_4(N); C_5 = C_5(N)$, tal que para cada $0 < \delta < \delta_0$

$$z(s)^p - s \leq -\frac{\varphi(s)}{C_5}, \quad \textit{se } s \notin \Delta := \{s \in \mathbb{R}^+ : |s-1| < C_4\delta\}. \tag{2.12}$$

Demonstração. Seja $0 < s < \dfrac{1}{2}$, pela segunda parte da desigualdade (ii) do Lema B.3

$$\begin{aligned} z(s)^p &\leq \big(s + (2\delta)^{\frac{1}{N}} s^{\frac{1}{p}}\big)^p \leq s^p + C_7\big(s^{p-1}(2\delta)^{\frac{1}{N}} s^{\frac{1}{p}} + (2\delta)^{\frac{p}{N}} s\big) \\ &= s^p + C_7\big(s^{p+\frac{1}{p}-1}(2\delta)^{\frac{1}{N}} + s(2\delta)^{\frac{1}{N-1}}\big). \end{aligned}$$

Como $s^{p+\frac{1}{p}-1} \leq s$ e $(2\delta)^{\frac{1}{N-1}} < (2\delta)^{\frac{1}{N}}$, temos

$$z(s)^p - s \leq s^p - s + 2C_7 s(2\delta)^{\frac{1}{N}} = s\big(s^{p-1} - 1 + 2C_7(2\delta)^{\frac{1}{N}}\big).$$

Além disso, como $s^{p-1} < (\dfrac{1}{2})^{p-1} < (\dfrac{1}{2})^{\frac{p-1}{2}}$. Então existe $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que para $0 < \delta < \delta_0$, tem-se $s^{p-1} + 2C_7(2\delta)^{\frac{1}{2}} < (\dfrac{1}{2})^{\frac{p-1}{2}}$ e, portanto,

$$z(s)^p - s \leq s\big((\frac{1}{2})^{\frac{p-1}{2}} - 1\big) = -\varphi(s)(1 - (\frac{1}{2})^{\frac{p-1}{2}}), \quad \text{se } 0 \leq s < \frac{1}{2}. \tag{2.13}$$

Para $\frac{1}{2} \leq s < 1$, considere $\sigma = 1 - s$, logo de (2.4) e a segunda desigualdade de (ii) do Lema B.3

$$z(s)^p - s \leq \big(s + C_3(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}}\big)^p - s \leq s^p + C_7 C_3 s^{p-1}(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}} + C_7\big(C_3(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}}\big)^p - s$$

Como $s^{p-1} < 1$ e $(\delta\sigma)^{\frac{p}{2}} < (\delta\sigma)^{\frac{1}{2}}$, então

$$\begin{aligned} z(s)^p - s &\leq s(s^{p-1} - 1) + C_7 C_3 (\delta\sigma)^{\frac{1}{2}} + C_7 C_3^p (\delta\sigma)^{\frac{1}{2}} = s(s^{p-1} - 1) + C_8(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}} \\ &= s\big((1-\sigma)^{p-1} - 1\big) + C_8(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}} \leq -s(p-1)\sigma + C_8(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq -\frac{(p-1)\sigma}{2} + C_8(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, para $(\frac{4C_8}{p-1})^2\delta < 1 - s = \sigma$, temos $C_8 < (\frac{\sigma}{\delta})^{\frac{1}{2}}\frac{(p-1)}{4}$; logo

$$\begin{aligned} z(s)^p - s &\leq -\frac{(p-1)\sigma}{2} + C_8(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}} \leq -\frac{(p-1)\sigma}{2} + (\frac{\sigma}{\delta})^{\frac{1}{2}}\frac{(p-1)}{4}(\delta\sigma)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{(p-1)\sigma}{4} = -\frac{(p-1)(1-s)}{2}. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$z(s)^p - s \leq -\frac{(p-1)}{4}\varphi(s) \quad \text{se} \quad (\frac{4C_8}{p-1})^2\delta < 1 - s. \tag{2.14}$$

Para $s > 1$, de (2.4) e segunda parte da desigualdade (ii) do Lema B.3

$$\begin{aligned} z(s)^p - s &\leq \big(1 + \delta^{\frac{1}{N}}(s-1)^{\frac{1}{p}}\big)^p - s \leq 1 + C_7\big(\delta^{\frac{1}{N}}(s-1)^{\frac{1}{p}} + C_7\delta^{\frac{p}{N}}(s-1)\big) - s \\ &= (s-1)\big(-1 + C_7(\frac{\delta}{s-1})^{\frac{1}{N}} + C_7\delta^{\frac{p}{N}}\big). \end{aligned}$$

Considerando $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $C_7\delta_0^{p/N} < \frac{1}{2}$. Logo, se $0 < \delta < \delta_0$, temos

$$z(s)^p - s \leq (s-1)\big(-\frac{1}{2} + C_7(\frac{\delta}{s-1})^{\frac{1}{N}}\big).$$

Além disso, para $(s-1) > (4C_7)^N\delta$, temos $C_7(\frac{\delta}{s-1})^{\frac{1}{N}} < \frac{1}{4}$.
Portanto, para $0 < \delta < \delta_0$, resulta

$$z(s)^p - s \leq (s-1)(-1 + \frac{1}{4}) \leq -\frac{1}{4}(s-1).$$

Consequentemente,

$$z(s)^p - s \leq -\frac{1}{4}\varphi(s) \quad \text{se} \quad (4C_7)^N\delta < s - 1. \tag{2.15}$$

Tomando

$$C_4 = (\frac{4C_8}{p-1})^2\delta + (4C_7)^N, \quad C_5 = \left(1 - 2^{\frac{1-p}{p}}\right)^{-1} + \frac{4}{p-1}, \quad \delta_0 < \min\{(\frac{1}{2C_7})^{\frac{N}{p}}, \frac{1}{2C_4}\}.$$

Logo, usando (2.13), (2.14) e (2.15) para $0 < \delta < \delta_0$, temos

$$z(s)^p - s \leq -\frac{\varphi(s)}{C_5}, \quad \text{se } s \notin \Delta := \{s \in \mathbb{R}^+ : |s-1| < C_4\delta\}.$$

■

2.3 A desigualdade de Trudinger-Moser

Teorema 2.9. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 2$, um domínio limitado e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^N \, dx \leq 1. \tag{2.16}$$

Então existe uma constante $C = C(N)$, tal que

$$\int_\Omega e^{\alpha u^p} \, dx \leq C|\Omega|, \tag{2.17}$$

onde

$$p = \frac{N}{N-1}, \quad \alpha \leq \alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N}-1}$$

e ω_{N-1} é a medida da esfera unitária $(N-1)-dimensional$. Além disso, se $\alpha > \alpha_N$, a integral em (2.17) pode ser arbitrariamente grande, para uma função apropriada u.

Demonstração. Note que basta provar para $u \geq 0$, pois como $|\nabla u| = \nabla|u|$, podemos substituir u por $|u|$ sem alterar (2.16), e sendo válido (2.17) para a função $|u|$ também seria válido para a função u.

Seja u^* a simetrização de Schwarz de u, usando a Proposição 2.5 para a função $G(t) = e^{\alpha t^p}$ temos

$$\int_\Omega e^{\alpha u^p} \, dx = \int_{\Omega^*} e^{\alpha u^{*p}} \, dx. \tag{2.18}$$

Dado que u^* é uma função radial podemos escrever $u^*(x) = v(r)$, onde $r = |x|$. Defina a função

$$\begin{array}{rcl} w\ :[0,+\infty) & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & w(t)=n^{N-\frac{1}{N}}\omega_N^{\frac{1}{N}}v(r), \quad r=Re^{-\frac{t}{N}}. \end{array}$$

Como v é função não crescente, então w é uma função não decrescente. Além disso,

(i) $\displaystyle\int_{\Omega^*}|\nabla u^*(x)|\,dx=\int_0^\infty w'(t)^N\,dt.$

(ii) $\displaystyle\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega^*}e^{\alpha u^{*p}}\,dx=\int_0^\infty e^{\beta w^p-t}\,dt$, onde $\beta=\dfrac{\alpha}{\alpha_N}$.

De fato, verificaremos (i) primeiramente. Como $u^*(x)=v(|x|)$, então $\nabla u^*(x)=v'(|x|)\dfrac{x}{|x|}$, logo, $|\nabla u^*(x)|^N=|v'(r)|^N$. Além disso,

$$w'(t)=n^{N-\frac{1}{N}}\omega_N^{\frac{1}{N}}v'(r)\frac{dr}{dt}, \quad dr=-\frac{r}{N}dt, \quad |v'(r)|^N=\frac{N}{r^N\omega_{N-1}}w'(t)^N.$$

Fazendo a mudança de variáveis e usando coordenadas radiais

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*}|\nabla u^*(x)|^N\,dx&=\int_{B_R(0)}|\nabla u^*(x)|^N\,dx=\omega_{N-1}\int_0^R|v'(r)|^N r^{N-1}\,dr\\&=\omega_{N-1}\int_\infty^0\frac{N}{r^N\omega_{N-1}}w'(t)^N r^{N-1}(-\frac{r}{N})\,dt=\int_0^\infty w'(t)^N\,dt.\end{aligned}$$

Para verificar (ii), note que $w(t)^p=\left(n^{N-\frac{1}{N}}\omega_N^{\frac{1}{N}}\right)^{\frac{N}{N-1}}v(r)^p=\alpha_N v(r)^p$. Como $r=Re^{-\frac{t}{N}}$, então $r^{N-1}\,dr=r^{N-1}(-\dfrac{r}{N}\,dt)=-\dfrac{r^N}{N}\,dt=-\dfrac{R^Ne^{-t}}{N}\,dt$. Logo, fazendo a mudança de variáveis e usando coordenadas radiais

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^*}e^{\alpha u^{*p}}\,dx&=\omega_{N-1}\int_0^R e^{\alpha v(r)^p}r^{N-1}\,dr=-\frac{\omega_{N-1}R^N}{N}\int_\infty^0 e^{\frac{\alpha}{\alpha_N}w(t)^p}e^{-t}\,dt\\&=\frac{\omega_{N-1}R^N}{N}\int_0^\infty e^{\beta w(t)^p-t}\,dt.\end{aligned}$$

Finalmente, observe que $|\Omega|=|B_R(0)|=\dfrac{\omega_{N-1}R^N}{N}$. Portanto, de (2.18) e das identidades (i) e (ii), para obter o teorema é suficiente demonstrar que:

Sejam $w\in\mathcal{C}^\infty\big([0,+\infty)\big)$ e $N\geq 2$, tais que

$$w(0)=0, \quad w'\geq 0, \quad \int_0^\infty w'(t)^N\,dt\leq 1, \tag{2.19}$$

então

$$\int_0^\infty e^{\beta w^p - t}\, dt \le C, \text{ se } \beta \le 1, \text{onde } \frac{1}{p} + \frac{1}{N} = 1, \tag{2.20}$$

onde C é uma constante positiva que só depende de N.

O primeiro passo será provar que a integral em (2.20) é finita para cada valor de $\beta \le 1$, e pode ser ilimitada para alguma função w se $\beta > 1$.

- Caso $\beta < 1$

  Como $w(0) = 0$ e $w' \ge 0$, então para cada $t > 0$ temos

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_0^t w'(s)\, ds = \|w'\|_{L^1([0,t])} \le \|1\|_{L^p([0,t])} \|w'\|_{L^N([0,t])} \\ &= \Big(\int_0^t 1\, ds\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^t w'(s)^N\, ds\Big)^{\frac{1}{N}} \\ &\le t^{\frac{1}{p}} \Big(\int_0^\infty w'(s)^N\, ds\Big)^{\frac{1}{N}} \le t^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

  Logo, $w(t)^p \le t$, para cada $t \ge 0$, e assim

$$\int_0^\infty e^{\beta w^p - t}\, dt \le \int_0^\infty e^{\beta t - t}\, dt = \frac{e^{(\beta-1)t}}{\beta - 1}\Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{1-\beta}.$$

- Caso $\beta = 1$ Como $\displaystyle\int_0^\infty w'(t)^N\, dt \le 1$, então para cada $\epsilon > 0$ existe $0 < T = T(\epsilon)$, tal que

$$\int_T^\infty w'(t)^N\, dt < \epsilon$$

  Logo, se $t > T$

$$\begin{aligned} w(t) - w(T) &= \int_T^t w'(s)\, ds = \|w'\|_{L^1([T,t])} \le \|1\|_{L^p([T,t])} \|w'\|_{L^N([T,t])} \\ &= \Big(\int_T^t 1\, ds\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_T^t w'(s)^N\, ds\Big)^{\frac{1}{N}} \\ &\le (t-T)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_T^\infty w'(s)^N\, ds\Big)^{\frac{1}{N}} \le (t-T)^{\frac{1}{p}} \epsilon^{\frac{1}{N}}. \end{aligned}$$

  Assim, para $t > T$, temos $\dfrac{w(t)}{t^{\frac{1}{p}}} \le \dfrac{w(T)}{t^{\frac{1}{p}}} + \Big(1 - \dfrac{T}{t}\Big)^{\frac{1}{p}} \epsilon^{\frac{1}{N}}$. E, portanto, como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{t^{\frac{1}{p}}} = 0, \quad \text{e, portanto,} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{w(t)^p}{t} = 0.$$

Por conseguinte, existe $t_0 > 0$, tal que $w(t)^p < \frac{t}{2}$, para todo $t \geq t_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{w^p - t}\, dt &\leq \int_0^{t_0} e^{w^p - t}\, dt + \int_{t_0}^\infty e^{\frac{t}{2} - t}\, dt = \int_0^{t_0} e^{w^p - t}\, dt - 2e^{-\frac{t}{2}}\Big|_{t=t_0}^{t=\infty} \\ &\leq \int_0^{t_0} e^{w^p - t}\, dt + 2 < \infty. \end{aligned}$$

- Caso $\beta > 1$

  Defina $\eta = \min\{1, s\}$ e para $k > 0$ considere a função

$$w(t) = k^{1/p}\eta(\frac{t}{k}) = \begin{cases} \dfrac{t}{k^{1/N}}, & 0 \leq t \leq k, \\ k^{1/p}, & k < t. \end{cases}$$

  Logo, $w(0) = 0$, $w' \geq 0$ e $\int_0^\infty w'(t)^N\, dt = \int_0^k (\frac{1}{k^{\frac{1}{N}}})^N\, dt = \frac{1}{k}\int_0^k dt = 1$ E, portanto, para todo $k > 0$ a função w satisfaz as condições (2.19). Mas

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{\beta w^p - t}\, dt &\geq \int_k^\infty e^{\beta w^p - t}\, dt = \int_k^\infty e^{\beta k - t}\, dt \\ &= e^{\beta k}\int_k^\infty e^{-t}\, dt = e^{\beta k}(-e^{-t})\Big|_{t=k}^{t=\infty} = e^{(\beta-1)k}. \end{aligned}$$

  Logo, se $k \to \infty$, tem-se $\int_0^\infty e^{\beta w^p - t}\, dt \to \infty$ portanto, a integral em (2.20) pode ser arbitrariamente grande desde que se tome w com k suficientemente grande.

Seja w satisfazendo (2.19), pela desigualdade em (2.21), temos

$$w(t) \leq t^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{2.22}$$

Suponha que existe um ponto onde se satisfaz a desigualdade acima, isto é $w(t_1) = t_1^{1/p}$, para algum ponto $t_1 > 0$. Logo, usando (2.21) todos os termos são iguais , isto é

$$w(t_1) = \int_0^{t_1} w'(t)\, dt = t_1^{1/p}\Big(\int_0^{t_1} w'(t)^N\, dt\Big)^{\frac{1}{N}} = t_1^{1/p}.$$

Donde obtemos que:

$$\int_0^{t_1} w'(t)\,dt = t_1^{1/p}, \quad \int_0^{t_1} w'(t)^N\,dt = 1, \quad w'(t) = 0, \text{ para } t > t_1.$$

Disto, segue-se que $w(t) = t_1^{1/p}\eta(\frac{t}{t_1})$. Agora suponha que não se tem a igualdade (2.22) em algum punto. Como w tem suporte compacto, existe $t_1 > 0$, tal que

$$\max_{t>0} \frac{w(t)}{t^{1/p}} = \frac{w(t_1)}{t_1^{1/p}} < 1.$$

E, portanto, sua N-ésima potência, satisfaz

$$\max_{t>0} \frac{w(t)^N}{t^{N-1}} = \frac{w(t_1)^N}{t_1^{N-1}} = 1 - \delta, \quad \text{para algum } 0 < \delta \leq 1.$$

Agora, façamos as mudança de variáveis $t = t_1 s$ e $y(s) = \dfrac{w(t)}{t_1^{1/p}}$. Como

$$y(0) = 0, \quad y'(s) = w'(t)t_1^{1/N} \geq 0, \quad \text{para todo } s \geq 0,$$

então,

$$\int_0^\infty y'(s)^N\,ds = \int_0^\infty w'(t)^N t_1 \frac{dt}{t_1} = \int_0^\infty w'(t)^N\,dt \leq 1.$$

Além disso,

$$\frac{y(s)^N}{s^{N-1}} = \frac{w(t_1 s)^N}{(t_1 s)^{N-1}} = \frac{w(t)^N}{t^{N-1}} \leq 1 - \delta = \big(\frac{w(t_1)}{t_1^p}\big)^N, \text{ para todo } s \geq 0.$$

Resumindo,

$$y(0) = 0, \quad \int_0^\infty y'(s)^N\,ds \leq 1,$$

e para cada $s \geq 0$,

$$y'(s) \geq 0, \quad \frac{y(s)^N}{s^{N-1}} \leq 1 - \delta = y_1^N,$$

onde $y_1 = y(1)$.

Prova do Teorema 2.9 Elevando ao $\dfrac{1}{N-1}$ a desigualdade $\dfrac{w(t)^N}{t^{N-1}} \leq 1 - \delta$, tem-se

$$w(t)^p \leq (1-\delta)^{p-1}t, \quad \text{para todo } t \geq 0, \text{ com } p = \frac{N}{N-1}. \tag{2.23}$$

Note que, se $0 < \lambda < 1$, a função $h(m) = (1-m)^{\lambda} + \lambda m$ definida no intervalo $[0,1]$, possui um máximo no ponto 0. Tomando em particular $\lambda = p-1$ e $m = \delta$, temos

$$(1-\delta)^{p-1} + (p-1)\delta \leq 1.$$

Por conseguinte,

$$(1-\delta)^{p-1}t - t \leq -(p-1)\delta t, \quad \text{para todo } t \geq 0. \tag{2.24}$$

Tome $0 < \delta < \min\{\delta_0, \dfrac{1}{2C_4}\}$ e considere $\Delta_1 = \Delta t_1 = \{t \in \mathbb{R}^+ : |t - t_1| < C_4 t_1 \delta\}$.
Deste modo, $\dfrac{t_1}{2} < t_1 - C_4\delta t_1$ e para cada $t \in \Delta_1$, temos $t_1 - C_4\delta t_1 < t$.
E, portanto,

$$\frac{t_1}{2} < t, \text{ para cada } t \in \Delta_1. \tag{2.25}$$

Usando (2.23) e (2.24), temos

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_1} e^{w(t)^p - t}\, dt &\leq \int_{\Delta_1} e^{(1-\delta)^{p-1}t - t}\, dt \leq \int_{\Delta_1} e^{-(p-1)\delta t}\, dt \\ &= 2C_4\delta t_1 \max_{t\in\Delta_1}\{e^{-(p-1)\delta t}\}.\end{aligned}$$

Usando (2.25), temos $\max_{t\in\Delta_1}\{e^{-(p-1)\delta t}\} \leq e^{\frac{-(p-1)\delta t_1}{2}}$. E, portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_1} e^{w(t)^p - t}\, dt &\leq 2C_4\delta t_1 e^{\frac{-(p-1)\delta t_1}{2}} \\ &= \frac{4C_4}{p-1}\Big(\frac{(p-1)\delta t_1}{2}\Big)e^{-\left(\frac{(p-1)\delta t_1}{2}\right)} \\ &\leq e^{\frac{-(p-1)\delta t_1}{2}} e^{-1},\end{aligned} \tag{2.26}$$

onde usamos que $xe^{-x} \leq e^{-1}$ para todo $x \geq 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}t_1\int_0^{\infty} e^{-\frac{t_1\varphi(s)}{C_5}}\, ds &= t_1\Big(\int_0^{1/2} e^{-\frac{t_1\varphi(s)}{C_5}}\, ds + \int_{1/2}^{1} e^{-\frac{t_1\varphi(s)}{C_5}}\, ds + \int_1^{\infty} e^{-\frac{t_1\varphi(s)}{C_5}}\, ds\Big) \\ &= t_1\Big(\int_0^{1/2} e^{-\frac{t_1 s}{C_5}}\, ds + \int_{1/2}^{1} e^{-\frac{t_1(1-s)}{C_5}}\, ds + \int_1^{\infty} e^{-\frac{t_1(s-1)}{C_5}}\, ds\Big) \\ &= t_1\Big(\Big[-\frac{C_5}{t_1}e^{-\frac{t_1 s}{c_5}}\Big]_0^{\frac{1}{2}} + \Big[\frac{C_5}{t_1}e^{-\frac{t_1(1-s)}{C_5}}\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} + \Big[-\frac{C_5}{t_1}e^{-\frac{t_1(s-1)}{C_5}}\Big]_1^{\infty}\Big) \\ &= 3C_5 - 2C_5 e^{-\frac{t_1}{2C_5}} \leq 3C_5.\end{aligned} \tag{2.27}$$

Observe que $t \notin \Delta_1$ se, e só se, $s \notin \Delta$. Logo pelo Lema 2.7 e o Lema 2.8, temos

$$w(t)^p - t = t_1 y(s)^p - t_1 s = t_1(y(s)^p - s) \leq t_1(z(s)^p - s) \leq -t_1 \frac{\varphi(s)}{C_5}. \tag{2.28}$$

Logo, por (2.27),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^+\setminus\Delta_1} e^{w(t)^p - t}\, dt &\leq \int_{\mathbb{R}^+\setminus\Delta_1} e^{-\frac{t-1\varphi(s)}{C_5}}\, dt = t_1 \int_{\mathbb{R}^+\setminus\Delta} e^{-\frac{t_1\varphi(s)}{C_5}}\, ds \\ &\leq t_1 \int_0^\infty e^{-\frac{t_1\varphi(s)}{C_5}}\, ds \leq 3C_5. \end{aligned} \tag{2.29}$$

E, portanto, se $0 < \delta < \delta_0$ de (2.26) e (2.29)

$$\int_0^\infty e^{w(t)^p - t}\, dt = \int_{\Delta_1} e^{w(t)^p - t}\, dt + \int_{\mathbb{R}^+\setminus\Delta_1} e^{w(t)^p - t}\, dt \leq 3C_5 + \frac{4C_4 e^{-1}}{p-1} = C_6. \tag{2.30}$$

Se $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ usando (2.23) e a relação $w(t)^p - t \leq -(p-1)\delta t$, temos que

$$\int_0^\infty e^{w(t)^p - t}\, dt \leq \int_0^\infty e^{-t(p-1)\delta t}\, dt = -\frac{e^{-(p-1)\delta t}}{(p-1)\delta}\Big|_0^\infty = \frac{1}{(p-1)\delta} \leq \frac{1}{(p-1)\delta_0}. \tag{2.31}$$

Portanto, para qualquer $0 < \delta \leq 1$

$$\int_0^\infty e^{w(t)^p - t}\, dt \leq C,$$

onde $C = C_6 + \dfrac{1}{(p-1)\delta_0}$ e, portanto, $C = C(N)$. ■

Capítulo

3

Equações elípticas com crescimento crítico e subcrítico

Neste capitulo, seguindo [7], estudaremos a existência de soluções não triviais do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ e a função $f(x,s)$ possui crescimento maximal na variável s que permite o uso de métodos variacionais. Dividiremos o estudo da existência de soluções em termos da noção de criticalidade dada a seguir.

Definição 3.1. *Dizemos que $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui*

a) crescimento subcrítico, se

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} = 0, \quad \textit{uniformemente em } \Omega, \quad \forall \alpha > 0.$$

b) crescimento crítico, se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\alpha t^2}} = \begin{cases} 0, & \textit{uniformemente em } \Omega, \ \alpha_0 < \alpha, \\ +\infty, & \textit{uniformemente em } \Omega, \ 0 < \alpha < \alpha_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Admitiremos algumas condições na função f que serão utilizadas neste capítulo:

(H1) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(x,0) = 0$.

(H2) Existem $t_0 > 0$ e $M > 0$ tais que

$$0 < F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\,ds \leq M|f(x,t)|,\ \forall |t| \geq t_0,\ \forall x \in \Omega.$$

(H3) $0 < F(x,t) \leq \dfrac{1}{2} f(x,t)t,\ \forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \forall x \in \Omega.$

Denotemos por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$, a sequência de autovalores do operador $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ com condição de Dirichlet.

Teorema 3.2. ***(Caso Subcrítico, mínimo local em 0)*** *Suponha (H1), (H2), (H3) e que f possui crescimento subcrítico. Além disso, suponha que*

(H4) $$\limsup_{t \to 0} \frac{2F(x,t)}{t^2} < \lambda_1, \quad \textit{unif. em } (x,t).$$

Então, o problema (3.1) possui uma solução não trivial. Além disso, se $f(x,t)$ é uma função ímpar em t, então o problema possui infinitas soluções.

Teorema 3.3. ***(Caso Subcrítico, ponto sela em 0)*** *Suponha (H1), (H2), (H3) e que f possui crescimento subcrítico. Além disso, suponha que*

(H5) $$\exists \delta > 0, \exists \lambda_k \leq \mu < \lambda_{k+1},\ \textit{tal que } F(x,t) \leq \frac{1}{2}\mu t^2, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall |t| \leq \delta,$$

(H6) $$F(x,t) \geq \frac{1}{2}\lambda_k t^2, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então o problema (3.1) possui uma solução não trivial. Além disso, se ao invés de (H6) supormos que $f(x,t)$ seja uma função impar em t, então o problema possui infinitas soluções.

Teorema 3.4. ***(Caso crítico, minimo local em 0)*** *Suponha (H1), (H2), (H3) e que f possui crescimento crítico, com constante de criticalidade $\alpha_0 > 0$. Além disso suponha (H4) e*

(H7) $$\lim_{t \to \infty} \frac{f(x,t)t}{e^{\alpha_0 t^2}} \geq \beta, \quad \textit{com } \beta > \frac{2}{\alpha_0 d^2},$$

onde d é o raio da maior bola contida em Ω. Então o problema (3.1) possui uma solução não trivial.

Exemplo 3.5. *Uma função satisfazendo as hipóteses do Teorema 3.4 é dada pela função $f(x,t) = 2g(x)te^{t^2}$, onde $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, tal que $\sup\limits_{x \in \overline{\Omega}} g(x) < \dfrac{\lambda_1}{2}$. Neste caso, $F(x,t) = g(x)\big(e^{t^2} - 1\big)$.*

3.1 A formulação variacional

Nesta seção, consideraremos a seguinte condição

$$\text{Existem contantes } C > 0 \text{ e } \beta > 0 \text{ tais que } |f(x,t)| \leq Ce^{\beta t^2}, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Afirmação 3.6. *Suponha que a função f satisfaz a condição (H1). Então*

(i) se possui crescimento crítico com constante de criticalidade α_0, a condição (3.3) é satisfeita para $\beta > \alpha_0$.

(ii) se possui crescimento subcrítico, a condição (3.3) é satisfeita para $\beta > 0$.

Demonstração.

(i) Seja $\beta > \alpha_0$, como f possui crescimento crítico com constante de criticalidade α_0, então

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\beta t^2}} = 0, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Logo, dado $\epsilon = 1$, existe $M > 0$ tal que $\dfrac{|f(x,t)|}{e^{\beta t^2}} \leq 1,\ \forall x \in \overline{\Omega}, |t| \geq M$. Seja $C_1 = \max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[-M,M]} \dfrac{|f(x,t)|}{e^{\beta t^2}}$ e considerando $C = \max\{1, C_1\}$, temos

$$\frac{|f(x,t)|}{e^{\beta t^2}} \leq C, \quad \forall \in \Omega,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Neste caso, pelo crescimento subcrítico, para cada $\beta > 0$.

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|f(x,t)|}{e^{\beta t^2}} = 0, \text{ uniformemente em } \overline{\Omega}.$$

Logo, basta fazer como na parte (i).

■

Pelo Teorema 1.19, ou Teorema 2.9, temos

$$e^{\alpha v^2} \in L^1(\Omega), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ \forall \alpha > 0. \tag{3.4}$$

Logo,

$$\int_\Omega |f(x,u)|\, dx \leq C \int_\Omega e^{\beta u^2}\, dx < +\infty, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.5}$$

Lema 3.7. *Seja Ω um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ e $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ que converge a u em $H_0^1(\Omega)$, então existem uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e v em $H_0^1(\Omega)$ tais que*

$$|u_{n_k}(x)| \leq v(x), \text{ q.t.p. em } \Omega \quad \text{e} \quad u_{n_k}(x) \to u(x), \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Demonstração. Considerando uma subsequência se for necessário, podermos supor que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω, logo para cada $k \geq 1$ escolha $w_k = u_{n_k}$ de $\{u_n\}$ tal que

$$\|w_{k+1} - w_k\|_{H_0^1} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Defina para cada $n \geq 1$,

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |w_{k+1}(x) - w_k(x)|.$$

Então, tem-se $g_n \in H_0^1(\Omega)$ e que $\|g_n\|_{H_0^1} \leq 1$, para cada $n \geq 1$. Por conseguinte, $\|g_n\|_{L^2} \leq 1$ e $\|\nabla g_n\|_{L^2} \leq 1$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, temos $g_n \to q$ q.t.p. em Ω, com $g \in L^2(\Omega)$. Além disso, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos $\|g_n - g\|_{L^2} \to 0$ e usando o fato que $\{|\nabla g_n|\}$ é limitada em $L^2(\Omega)$, temos $g \in H_0^1(\Omega)$ (veja [5, Remark 4, Chapter 9]). Logo, para $l > k \geq 2$.

$$|w_l(x) - w_k(x)| \leq |w_l(x) - w_{l-1}(x)| + \cdots + |w_{k+1}(x) - w_k(x)| \leq g(x) - g_{k-1}(x) \leq g(x).$$

Logo, fazendo $l \to +\infty$, tem-se $|u(x) - w_k(x)| \leq g(x)$ q.t.p. em Ω. Por conseguinte, $|u_{n_k}(x)| = |w_k(x)| \leq v(x)$ q.t.p. em Ω, com $v = g + |u| \in H_0^1(\Omega)$. ■

Proposição 3.8. *Suponha (H1), (H2) e (3.3). Então o funcional*

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : H_0^1(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \phi(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx - \int_\Omega F(x,u) \, dx, \end{array}$$

é uma aplicação de classe $\mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$ e

$$\langle \phi'(u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \int_\Omega f(x,u) v \, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega)$$

Demonstração. Considere em $H_0^1(\Omega)$ a norma $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{1/2}$, além disso $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle u, v \rangle = \left(\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right)^{1/2}$ para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Seja a aplicação $\gamma(u) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = \|u\|^2$. Logo, γ é Gâteaux-diferenciável $H_0^1(\Omega)$. De fato, sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Então

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(u+tv)-\gamma(u)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\|u+tv\|^2 - \|u\|^2}{t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0} \frac{\langle u+tv, u+tv\rangle - \langle u, u\rangle}{t} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}[2\langle u, v\rangle + t\langle v, v\rangle] \\
&= \langle u, v\rangle.
\end{aligned}$$

Asim,

$$\gamma'(u)v = \langle u, v\rangle = \int_B \nabla u \cdot \nabla v\, dx, \quad \forall\, u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Para provar que γ' é continua, note que

$$\begin{array}{ccccccc}
\gamma' & : & H_0^1(\Omega) & \to & [H_0^1(\Omega)]^* & & \\
& & u & \mapsto & \gamma' u & : & H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \\
& & & & & & v \mapsto \langle \gamma' u, v\rangle = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \langle u, v\rangle.
\end{array}$$

Pelo teorema da Representação de Riesz, γ' é isomorfismo isométrico, assim γ' é contínua. Portanto, usando a Proposição A.11, tem-se $\gamma \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$.
Agora provemos que o seguinte funcional $\psi(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx$ é de classe $\mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ e que

$$\langle \psi'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u)v\, dx, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Vejamos primeiro que a função ψ está bem definida. Pela desigualdade de Young, temos

$$|F(x,t)| = |\int_0^t f(x,s)\, ds| \leq C\int_0^{|t|} e^{\beta s^2}\, ds \leq Ce^{\beta t^2}|t| \leq \frac{C}{2}(e^{2\beta t^2} + t^2).$$

E, portanto, usando (3.4) e a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$

$$|\psi(u)| \leq |\int_\Omega |F(x,u)|\, dx \leq \frac{C}{2}\int_\Omega \left(|u|^2 + e^{2\beta u^2}\right) dx < +\infty, \quad \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega).$$

Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$ e $0 < |t| < 1$, pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\frac{F(x, u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x, u+\theta tv)v, \quad \text{com } 0 < \theta < 1. \tag{3.7}$$

Pela continuidade de f

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}=f(x,u)v.$$

Além disso, usando (3.3) em (3.7)

$$\begin{aligned}|\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}| &= |f(x,u+\theta tv)v|\leq Ce^{\beta|u+t\theta v|^2}|v|\leq Ce^{\beta(|u|+|v|)^2}|v|\\ &\leq \frac{C}{2}(e^{2\beta(|u|+|v|)^2}+|v|^2)\ \in L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned}\psi'(u)v &= \lim_{t\to 0}\frac{\psi(u+tv)-\psi(u)}{t}=\lim_{t\to 0}\int_\Omega\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\,dx\\ &= \int_\Omega\lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+tv)-F(x,u)}{t}\,dx=\int_\Omega f(x,u)v\,dx.\end{aligned}$$

E, portanto, ψ possui derivada de Gâteaux e $\psi'(u)v=\displaystyle\int_\Omega f(x,u)v\,dx,$ para todo $u,v\in H_0^1(\Omega)$. Mostraremos agora a continuidade da derivada de Gâteaux. Seja $\{u_n\}$ uma sequência em $H_0^1(\Omega)$ tal que $u_n\to u$ em $H_0^1(\Omega)$, quando $n\to\infty$. Pelo Lema 3.7 existem uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ e $v\in H_0^1(\Omega)$ tais que

$$|u_{n_k}(x)|\leq v(x)\quad\text{e}\quad u_{n_k}(x)\to u(x),\ \text{q.t.p. em }\Omega.$$

E, portanto,

$$|f(x,u_{n_k})-f(x,u)|^2\leq C(e^{\beta v^2}+e^{\beta u^2})^2\leq 2C(e^{2\beta v^2}+e^{2\beta u^2})\quad\in L^1(\Omega).$$

Pela continuidade de f, temos $\big(f(x,u_{n_k})-f(x,u)\big)^2\to 0$, q.t.p. em Ω. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\|f(\cdot,u_{n_k})-f(\cdot,u)\|_{L^2}^2=\int_\Omega|f(x,u_{n_k})-f(x,u)|^2\,dx\to 0,\quad\text{se } k\to+\infty.$$

Pela desigualdade de Schwarz, temos

$$|\langle\psi'(u_{n_k})-\psi'(u),v\rangle|\leq\int_\Omega|\big(f(x,u_{n_k})-f(x,u)\big).v|\,dx\leq\|f(\cdot,u_{n_k})-f(\cdot,u)\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

Então,

$$\|\psi'(u_{n_k}) - \psi'(u\| = \sup_{\|v\|_{L^2}\leq 1} | < \psi'(u_{n_k}) - \psi'(u), v > | \leq \|f(\cdot, u_{n_k}) - f(\cdot, u)\|_{L^2} \to 0.$$

Por conseguinte, qualquer subsequência de $\{\psi'(u_n)\}$ converge a $\psi'(u)$. O que prova que ψ' é contínua. Logo, pela Proposição A.11, tem-se $\psi \in \mathcal{C}^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$, Deste modo, $\phi = \gamma - \psi \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$. ■

Lema 3.9. *Suponha que f satisfaz (H1)-(H3). Então*

(a) Existe uma constante $C_0 > 0$ *tal que* $F(x,t) \geq C_0 e^{|t|/M}, \ \forall |t| \geq t_0$.

(b) Dado $\epsilon > 0$ *existe* $t_\epsilon > 0$ *tal que*

$$F(x,t) \leq \epsilon f(x,t)t, \quad \forall x \in \Omega, \forall |t| \geq t_\epsilon.$$

(c) Existe $\overline{M} > 0$ *tal que* $F(x,t) \leq \overline{M}|f(x,t)|, \ \forall x \in \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Para provar (a) analisemos separadamente os casos $t \geq t_0$ e $t \leq -t_0$.

- Caso $t \geq t_0$.
  Por (H3) $f(x,s) > 0$, para todo $s \geq t_0$. Além disso, por (H2), temos

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{M}\, ds \leq \int_{t_0}^{t} \frac{|f(x,s)|}{F(x,s)}\, ds = \int_{t_0}^{t} \frac{f(x,s)}{F(x,s)}\, ds.$$

  Logo,

$$\frac{1}{M}(t - t_0) \leq \ln\big(\frac{F(x,t)}{F(x,t_0)}\big).$$

  Assim,

$$\frac{F(x,t_0)}{e^{t_0/M}} e^{t/M} \leq F(x,t).$$

  Como F é contínua e positiva em $\overline{\Omega} \times \{t_0\}$ então $0 < C_1 = \inf_{x\in\overline{\Omega}} \dfrac{F(x,t_0)}{e^{t_0/M}}$. Por conseguinte,

$$C_1 e^{t/M} \leq F(x,t), \quad \text{para todo } t \geq t_0.$$

- Caso $t \leq -t_0$.
  Neste caso, temos $f(x,s) < 0$, para todo $\leq -t_0$, por (H2), temos

$$\int_{t}^{-t_0} \frac{1}{M}\, ds \leq \int_{t}^{-t_0} \frac{|f(x,s)|}{F(x,s)}\, ds = -\int_{t}^{-t_0} \frac{f(x,s)}{F(x,s)}\, ds.$$

E, portanto,

$$C_2 e^{-t/M} \leq F(x,t), \quad \text{para todo } t \leq -t_0,$$

onde, $0 < C_2 = \inf_{x \in \overline{\Omega}} \dfrac{e^{-t_0/M}}{F(x,-t_0)}$.

Para concluir a prova basta tomar $C_0 = \min\{C_1, C_2\}$.

Provemos (b). Dado $\epsilon > 0$, considere $t_\epsilon = \max\{t_0, \dfrac{M}{\epsilon}\}$, usando (H2) para $|t| \geq t_\epsilon$, temos

$$\left|\frac{F(x,t)}{f(x,t)t}\right| \leq \frac{M|f(x,t)|}{|f(x,t)t|} = \frac{M}{|t|} \leq \frac{M}{t_\epsilon} \leq \epsilon.$$

Logo,

$$F(x,t) \leq \epsilon f(x,t)t, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall |t| \geq t_\epsilon.$$

Pois de (H3) $F(x,t) > 0$ e $f(x,t)t > 0, \ \forall t \neq 0$.

Por fim provemos (c) . Note que de (H3),

$$F(x,t) \leq \frac{1}{2} f(x,t)t \leq \frac{t_0}{2}|f(x,t)|, \quad \forall |t| \leq t_0.$$

Então usando (H2), basta tomar $\overline{M} = \max\{M, \dfrac{t_0}{2}\}$. ■

Lema 3.10. ***(Lema de Lions)*** *Sejam* $\{v_n\}$ *uma sequência em* $H_0^1(\Omega)$, $v \in H_0^1(\Omega)$, *com* $\|v\| < 1$, $\|v_n\| = 1$ *para todo* $n \geq 1$ *e* $v_n \rightharpoonup v$ *em* $H_0^1(\Omega)$, *então*

$$\sup_{n \geq 1} \int_\Omega e^{4\pi p v_n^2}\, dx < \infty, \quad \text{se} \quad p < \frac{1}{1 - \|v\|^2}.$$

Demonstração. Sejam $p_1 > p$ e $\epsilon > 0$ tais que $p < p_1(1 + \dfrac{1}{\epsilon}) < \dfrac{1}{1 - \|v\|^2}$. Das hipóteses, temos

$$\|v_n - v\|^2 = \|v_n\|^2 - 2\int_\Omega \nabla v_n \nabla v\, dx + \|v\|^2 \to 1 - \|v\|^2, \quad \text{se } n \to \infty.$$

Logo,

$$p_1(1 + \frac{1}{\epsilon}) < \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\|v_n - v\|^2}.$$

E, portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $p_1(1 + \dfrac{1}{\epsilon}) < \dfrac{1}{\|v_n - v\|^2}$, para todo $n \geq n_0$. Pelo

Teorema 2.9, existe uma constante $C > 0$ tal que todo $n \geq n_0$

$$\int_\Omega e^{4\pi p_1(1+\frac{1}{\epsilon})(v_n-v)^2}\,dx \leq \int_\Omega e^{4\pi(\frac{v_n-v}{\|v_n-v\|})^2}\,dx \leq C. \tag{3.8}$$

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se $a^2 \leq (1+\dfrac{1}{\epsilon})(a-b)^2 + (1+\epsilon)b^2$. Logo, tomando para cada $n \geq 1$, $a = v_n(x)$ e $b = v(x)$, temos

$$v_n^2 \leq (1+\frac{1}{\epsilon})(v_n - v) + (1+\epsilon)v^2, \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{3.9}$$

Como $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{p_1}$, seja $p_2 > 0$ tal que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$. Pela desigualdade de Hölder e de (3.9)

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{4\pi p v_n^2}\,dx &\leq \int_\Omega e^{4\pi p\left((1+\frac{1}{\epsilon})(v_n-v)+(1+\epsilon)v^2\right)}\,dx = \int_\Omega e^{4\pi p(1+\frac{1}{\epsilon})(v_n-v)} e^{4\pi p(1+\epsilon)v^2}\,dx \\ &\leq \Big(\int_\Omega e^{4\pi p_1(1+\frac{1}{\epsilon})(v_n-v)}\,dx\Big)^{p/p_1}\Big(\int_\Omega e^{4\pi p_2(1+\epsilon)v^2}\,dx\Big)^{p/p_2}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Logo, usando (3.4) e(3.8), temos

$$\int_\Omega e^{4\pi p v_n^2}\,dx \leq C^{p/p_1}\Big(\int_\Omega e^{4\pi p_2(1+\epsilon)v^2}\,dx\Big)^{p/p_2} < \infty, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

■

Proposição 3.11. *Suponha (H1), (H2) e (3.3), então o funcional ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ para $c < \dfrac{2\pi}{\beta}$.*

Demonstração. Seja $c < \dfrac{2\pi}{\beta}$ e $\{u_n\}$ uma sequência tal que

$$\phi(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|\phi'(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u_n)\,dx \to c. \tag{3.11}$$

$$|\int_\Omega \nabla u_n \nabla v - f(x,u_n)v\,dx| \leq \epsilon_n\|v\|, \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.12}$$

onde $\epsilon_n = \|\phi'(u_n)\|_{H^{-1}} \to 0, \quad$ quando $n \to \infty$.

De (3.11), para $0 < \epsilon < \dfrac{1}{2}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\epsilon_n < 1$, para todo $n \geq n_0$ e

$$|\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u_n)\,dx - c| \leq \epsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Logo, usando a parte (b) do Lema 3.9 para cada $n \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_n\|^2 &\leq \epsilon + c + \int_\Omega F(x,u_n)\,dx = \epsilon + c + \int_{\{|u_n|<t_\epsilon\}} F(x,u_n)\,dx + \int_{\{|u_n|\geq t_\epsilon\}} F(x,u_n)\,dx \\
&\leq \epsilon + c + \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,t_\epsilon]} |F(x,t)| \int_{\{|u_n|<t_\epsilon\}} dx + \epsilon \int_{\{|u_n|\geq t_\epsilon\}} f(x,u_n)u_n\,dx \\
&\leq \epsilon + c + \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,t_\epsilon]} |F(x,t)||\Omega| + \epsilon \int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx \\
&= c_\epsilon + \epsilon \int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Tomando $v = u_n$ para cada $n \geq n_0$ em (3.12), temos

$$|\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - f(x,u_n)u_n\,dx| \leq \epsilon_n\|u_n\|.$$

Disto e por (H3), temos

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx \leq \epsilon_n\|u_n\| + \|u_n\|^2, \quad n \geq n_0. \tag{3.14}$$

Combinando (3.13) e (3.14), temos

$$\frac{\|u_n\|^2}{2} \leq c_\epsilon + \epsilon\epsilon_n\|u_n\| + \epsilon\|u_n\|^2, \quad n \geq n_0.$$

Como $\epsilon_n < 1$, para todo $n \geq n_0$,

$$(\frac{1}{2} - \epsilon)\|u_n\|^2 \leq c_\epsilon + \epsilon\|u_n\|, \quad \text{para todo } n \geq n_0. \tag{3.15}$$

Suponha que $\{\|u_n\|\}_{n\geq n_0}$ não seja limitada em $\mathbb{R}$, então existe uma subsequência $\{\|u_{n_k}\|\}$ de $\{\|u_n\|\}_{n\geq n_0}$ tal que $\|u_{n_k}\| \to \infty$, quando $k \to \infty$. E, portanto, de (3.15)

$$(\frac{1}{2} - \epsilon) \leq \frac{c_\epsilon}{\|u_{n_k}\|^2} + \frac{\epsilon}{\|u_{n_k}\|} \to 0, \quad \text{quando } k \to +\infty.$$

Contradizendo o fato que $\epsilon < \dfrac{1}{2}$, então $\{u_n\}_{n\geq n_0}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$ e, portanto, $\{u_n\}$ é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, note que de (3.11) a sequência $\{\dfrac{\|u_n\|^2}{2} - \displaystyle\int_\Omega F(x,u_n)\,dx\}$ é limitada, e por conseguinte $\{\displaystyle\int_\Omega F(x,u_n)dx\}$ é uma sequência limitada, também de (3.14), tem-se que a sequência $\{\displaystyle\int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx\}$ é limitada. Então existe $C_0 > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq C_0, \quad 0 \leq \int_\Omega f(x,u_n)u_n \leq C_0, \quad 0 \leq \int_\Omega F(x,u_n) \leq C_0, \tag{3.16}$$

onde as integrais são positivas pela condição (H3). Sendo $\{u_n\}$ uma sequência limitada no espaço reflexivo $H_0^1(\Omega)$ e da imersão compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$, tomando uma subsequência se for necessário, podemos supor que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } H_0^1(\Omega), \quad u_n \to u \text{ em } L^q(\Omega), \text{ para todo } q \geq 1, \quad \text{e } u_n \to u \text{ q.t.p. em } \Omega. \tag{3.17}$$

Pelo Lema B.4, temos

$$f(x,u_n) \to f(x,u) \quad \text{em } L^1(\Omega)$$

Da continuidade de F e da parte (c) do Lema 3.9

$$F(x,u_n) \to F(x,u), \text{ q.t.p. em } \Omega, \quad \text{e} \quad |F(x,u_n)| \leq \overline{M}|f(x,u_n)|, \; \forall x \in \Omega, \forall n \geq 1.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada generalizada, temos

$$F(x,u_n) \to F(x,u), \quad \text{em } L^1(\Omega), \quad \text{se } n \to \infty. \tag{3.18}$$

Logo, de (3.11) e (3.18), quando $n \to \infty$, temos

$$\frac{\|u_n\|^2}{2} = \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^2}{2}\,dx - \int_\Omega F(x,u_n)\,dx\Big) + \int_\Omega F(x,u_n)\,dx \to c + \int_\Omega F(x,u)\,dx,$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = 2\big(c + \int_\Omega F(x,u)\,dx\big). \tag{3.19}$$

Usando (3.12) com $v = u_n$ e o fato de que $\{\|u_n\|\}$ é limitada, resulta

$$|\int_\Omega |\nabla u_n|^2 - f(x,u_n)u_n\,dx| \leq \epsilon_n\|u_n\| \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty,$$

e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx. \tag{3.20}$$

Da condição (H3), temos

$$0 \le \int_\Omega F(x,u_n)\,dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,u_n)u_n\,dx \qquad \forall n \ge 1$$

Logo, tomando o limite quando $n \to \infty$ e usando (3.18) , (3.19) e (3.20)

$$0 \le \int_\Omega F(x,u)\,dx \le c + \int_\Omega F(x,u)\,dx.$$

Donde concluímos que $c \ge 0$, isto quer dizer que não existem sequências de Palais-Smale para valores negativos.

Afirmação 1. $\phi(u) \ge 0$.
De fato, dada $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\int_\Omega \big(\nabla u \nabla \psi - f(x,u)\psi\big)\,dx = \int_\Omega \big(\nabla u \nabla \psi - \nabla u_n \nabla \psi\big)\,dx + \int_\Omega \big(\nabla u_n \nabla \psi - f(x,u_n)\psi\big)\,dx + \\ + \int_\Omega \big(f(x,u_n) - f(x,u)\big)\psi\,dx.$$

Mostremos que cada integral do lado direito tem limite igual a zero, e portanto a integral do lado esquerdo é zero. Como $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, temos $\int_\Omega \big(\nabla u \nabla \psi - \nabla u_n \nabla \psi\big)\,dx \to 0$, quando $n \to \infty$. Pelo Lema B.4, temos

$$\int_\Omega \big(f(x,u_n) - f(x,u)\big)\psi\,dx| \le \|f(x,u_n) - f(x,u)\|_{L^1}\|\psi\|_{L^\infty} \to 0, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Combinando isto com (3.12), para $v = \psi$, temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \psi = \int_\Omega f(x,u)\psi\,dx\ , \quad \text{para todo } \psi \in C_0^\infty(\Omega),$$

Pela densidade de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, temos $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega f(x,u)u\,dx$.
Além disso, de (H3), temos

$$\int_\Omega F(x,u)\,dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega f(x,u)u\,dx = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2}\,dx,$$

assim
$$\phi(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u)\,dx \geq 0.$$

Agora para provar a existência de uma subsequência convergente, analisaremos os seguintes casos:

- *Caso 1.* $c = 0$.
  Usando que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e (3.19), obtemos
  $$\|u\|^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = 2\int_\Omega F(x,u)\,dx.$$
  Logo,
  $$0 \leq \phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u)\,dx \leq \int_\Omega F(x,u)\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx = 0.$$
  E, portanto , $\phi(u) = 0$ e de (3.19), tem-se
  $$\|u\|^2 = 2\int_\Omega F(x,u)\,dx = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2.$$
  Como temos $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, concluímos
  $$u_n \to u, \quad \text{em } H_0^1(\Omega),$$
  é a condição $(PS)_c$ é satisfeita.

- *Caso 2.* $c \neq 0,\ u = 0$.

  Primeiro provaremos a seguinte afirmação.

  Afirmação 2. Existem $q > 1, C_1 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que
  $$\int_\Omega |f(x,u_n)|^q \leq C_1, \quad \forall n \geq n_0.$$

  De fato, como $c < \dfrac{2\pi}{\beta}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $2c + \epsilon < \dfrac{4\pi}{\beta}$ e seja $q > 1$ tal que

$q(2c+\epsilon) < \dfrac{4\pi}{\beta}$. Como $u=0$, então $F(x,0)=0$ e assim

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = 2\big(c + \int_\Omega F(x,0)\, dx\big) = 2c.$$

Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\|u_n\|^2 < 2c+\epsilon,$ para todo $n \geq n_0$. Logo

$$q\beta\|u_n\|^2 \leq q\beta(2c+\epsilon) < 4\pi, \quad \text{para todo} n \geq n_0.$$

Pelo Teorema 2.9, existe C_0 tal que para todo $n \geq n_0$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u_n)|^q \leq C\int_\Omega e^{q\beta u_n^2}\, dx = C\int_\Omega e^{q\beta u_n^2(\frac{u_n}{\|u_n\|})^2}\, dx \\ \leq C\int_\Omega e^{q\beta(2c+\epsilon)(\frac{u_n}{\|u_n\|})^2}\, dx \leq CC_0 = C_1.\end{aligned}$$

Logo, tomando $v = u_n$ para todo $n \geq 1$ em (3.12) e de (3.16), obtemos

$$\big|\|u_n\|^2 - \int_\Omega f(x,u_n)u_n\, dx\big| \leq \epsilon_n\|u_n\| \leq C_0\epsilon_n,$$

então

$$\|u_n\|^2 \leq C_0\epsilon_n + \int_\Omega f(x,u_n)u_n\, dx, \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{3.21}$$

Pela afirmação 2 para todo $n \geq n_0,\ f(\cdot,u_n) \in L^q(\Omega)$ e por (3.17) $u_n \to u = 0$ em $L^{q'}(\Omega)$. Pela desigualdad de Hölder, tem-se

$$\begin{aligned}0 \leq \int_\Omega f(x,u_n)u_n\, dx \leq \Big(\int_\Omega |f(x,u_n)|^q\, dx\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega |u_n|^{q'}\, dx\Big)^{1/q'} \\ \leq C_1^{1/p}\|u_n\|_{L^{q'}} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Usando isto em (3.21), temos $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\| = 0$ e de (3.19), temos

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\| = 2\big(c + \int_\Omega F(x,0)\, dx\big) = 2c,$$

donde temos uma contradição, pois estamos supondo que $c \neq 0$, logo, o caso 2 não é possível.

- *Caso 3* $c \neq 0$, $u \neq 0$.

Pela convergência fraca de $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$0 \leq \phi(u) = \frac{\|u\|^2}{2} - \int_\Omega F(x,u)\,dx \leq \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 - \int_\Omega F(x,u)\,dx = c, \qquad (3.22)$$

então $0 \leq \phi(u) \leq c$.

Se $\phi(u) = c$, de (3.22), temos que $\|u\| = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|$ e usando o fato que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$, resulta

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \quad \text{em } H_0^1(\Omega),$$

e condição $(PS)_c$ é satisfeita.

Para $0 \leq \phi(u) < c$ precisamos da seguinte afirmação.

Afirmação 3. Existem $q > 1, C_2 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$, tais que

$$\int_\Omega |f(x,u_n)|^q \leq C_2, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

De fato, como $0 < c - \phi(u) < \dfrac{2\pi}{\beta}$, logo, $\beta < \dfrac{2\pi}{c-\phi(u)}$, além disso $0 < \dfrac{2\pi}{c + \displaystyle\int_\Omega F(x,u)\,dx}$, logo existe $p > 0$ tal que

$$\beta < p\,\frac{2\pi}{c + \int_\Omega F(x,u)\,dx} < \frac{2\pi}{c - \phi(u)}.$$

Usando (3.19), tem-se

$$\beta \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 = 2\beta\big(c + \int_\Omega F(x,u)\,dx\big) < 4\pi p < 4\pi\,\frac{c + \int_\Omega F(x,u)\,dx}{c - \phi(u)}.$$

Seja $q > 1$, tal que

$$q\beta \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 < 4\pi p < 4\pi\,\frac{c + \int_\Omega F(x,u)\,dx}{c - \phi(u)}.$$

Por conseguinte, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$q\beta\|u_n\|^2 \leq 4\pi p < 4\pi\,\frac{c + \int_\Omega F(x,u)\,dx}{c - \phi(u)}, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Dado que $\lim_{n\to\infty}\|u_n\| \neq 0$, podemos supor que $\|u_n\| \neq 0,$ para todo $n \geq n_0$.

Definindo

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}, \quad v = \frac{u}{\sqrt{2\big(c + \int_\Omega F(x,u)\,dx\big)}}.$$

Note que,

$$\|v\| < 1, \quad \|v_n\| = 1, \text{ para todo } n \geq n_0, \quad \text{e} \quad \frac{c + \int_\Omega F(x,u)\,dx}{c - \phi(u)} = \frac{1}{1 - \|v\|^2}.$$

Também, como temos que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e $\|u_n\| \to \sqrt{2\big(c + \int_\Omega F(x,u)\,dx\big)}$, então $v_n \rightharpoonup v$ em $H_0^1(\Omega)$. Portanto,

$$q\beta\|u_n\|^2 \leq 4\pi p, \text{ para todo } n \geq n_0, \text{ com } p < \frac{1}{1 - \|v\|^2}.$$

Usando o Lema 3.10, existe $C_2 > 0$, tal que para todo $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x,u_n)|^q\,dx \leq C\int_\Omega e^{q\beta u_n^2}\,dx = C\int_\Omega e^{q\beta\|u_n\|^2 v_n^2}\,dx \\ \leq C\int_\Omega e^{4\pi p v_n^2}\,dx \leq C_2.\end{aligned}$$

o que verifica a Afirmação 3.

Usando (3.12), para cada $v = u_n - u$ com $n \geq n_0$, temos

$$|\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,dx - \int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)\,dx| \leq \epsilon_n\|u_n - u\|.$$

Pela desigualdade de Hölder e da Afirmação 3, para todo $n \geq n_0$, tem-se

$$\begin{aligned}|\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,dx &\leq \int_\Omega |f(x,u_n)(u_n - u)|\,dx + \epsilon_n\|u_n - u\| \\ &\leq \Big(\int_\Omega |f(x,u_n)|^q\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega |u_n - u|^{q'}\,dx\Big)^{1/q'} + \epsilon_n\|u_n - u\| \\ &\leq C_2^{1/p}\|u_n - u\|_{L^{q'}} + \epsilon_n\|u_n - u\|.\end{aligned}$$

Como $\{\|u_n - u\|\}$ é uma sequência limitada , $\epsilon_n \to 0$ e $u_n \to u$ em $L^p(\Omega),$ para todo $p \geq 1$, então

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \nabla u_n \nabla(u_n - u)\,dx = 0. \tag{3.23}$$

Logo,

$$\|u_n - u\|^2 = \int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla(u_n - u)\, dx = \int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla u_n\, dx - \int_\Omega \nabla(u_n - u)\nabla u\, dx.$$

De $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ e de (3.23), temos

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u, \quad \text{em } H_0^1(\Omega).$$

Usando (3.19), temos que $\phi(u) = c$, o qual é uma contradição com o suposto e, portanto, $0 \leq \phi(u) < c$ não é possível.

■

Corolário 3.12. *Suponha (H1), (H2) e (H3), então*

a) Se f possui crescimento subcrítico, então ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ para cada $c \in \mathbb{R}$.

b) Se f possui crescimento crítico, então ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ para cada $c \in (-\infty, \frac{2\pi}{\alpha_0})$

Demonstração.

a) Dado $c \in \mathbb{R}$, escolha $\beta > 0$ tal que $c < \frac{2\pi}{\beta}$, logo, pela Afirmação 3.6, (3.3) é satisfeito. Portanto, pela Proposição 3.11 se satisfaz a condição $(PS)_c$.

b) Dado $c < \frac{2\pi}{\alpha_0}$, escolha $\beta > 0$ tal que $c < \frac{2\pi}{\beta} < \frac{2\pi}{\alpha_0}$, como $\beta > \alpha_0$, pela Afirmação 3.6, (3.3) é satisfeito. Portanto, pela Proposição 3.11 se satisfaz a condição $(PS)_c$

■

Proposição 3.13. *Assuma (H1) e (H2), Seja Z um subespaço de dimensão finita em $H_0^1(\Omega)$. Então ϕ é limitada superiormente em Z, além disso, dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que*

$$\phi(u) \leq -M, \quad \textit{para todo } u \in Z, \textit{ com } \|u\| \geq R$$

Demonstração.

Seja $u_0 \in Z$, tal que $\|u_0\| = 1$, defina a função

$$\xi(t) = \phi(tu_0) = \frac{t^2}{2} - \int_\Omega F(x, tu_0)\, dx, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.24}$$

Pela parte (b) do Lema 3.9 com $\epsilon = \dfrac{1}{p}$ e $p > 2$, existe $t_\epsilon > 0$, tal que

$$0 < pF(x,t) \leq f(x,t), \quad \forall x \in \Omega,\ \forall |t| \geq t_\epsilon.$$

Isto é, a condição de Ambrosetti-Rabinowitz é satisfeita por f. Portanto, existem $C_1, C_2 > 0$, tais que

$$F(x,t) \geq C_1|t|^p - C_2, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Substituindo em (3.24), obtemos

$$\begin{aligned}\xi(t) &= \frac{t^2}{2} - \int_\Omega F(x, tu_0)\,dx \leq \frac{t^2}{2} - \int_\Omega C_1|tu_0|^p - C_2\,dx \\ &= \frac{t^2}{2} - C_1|t|^p\|u_0\|^p_{L^P}\,dx + C_2|\Omega|.\end{aligned}$$

Como Z é um espaço de dimensão finita, todas as nomas em Z são equivalentes , então existe $a > 0$, tal que

$$a\|u\| \leq \|u\|_{L^p}, \quad \forall u \in Z.$$

Então isto e observando que $\|u_0\| = 1$, segue que

$$\xi(t) = \frac{t^2}{2} - C_1|t|^p\|u_0\|^p_{L^P}\,dx + C_2|\Omega| \leq \frac{t^2}{2} - C_1a^p|t|^p + C_2|\Omega|.$$

E, portanto, ξ é limitada superiormente e $\lim\limits_{|t|\to+\infty} \xi(t) = -\infty$, isto é, existem $K, R > 0$, tais que

$$\xi(t) \leq K,\ \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \xi(t) \leq -M,\ \forall |t| \geq R.$$

Note que, K e R não dependem de u_0. Por conseguinte, para todo $u \in Z\backslash 0$, temos $u = tu_1$ com $t \in \mathbb{R}$ e $\|u_1\| = 1$, logo

$$\phi(u) = \phi(tu_1) = \xi(t) \leq K.$$

Isto é, ϕ é limitado superiormente em Z.

Por outro lado, se $u \in Z$ com $\|u\| \geq R$, temos que $u = tu_1$ com $\|u_1\| = 1$ e $|t| \geq R$ e, portanto,

$$\phi(u) = \phi(tu_1) = \xi(t) \leq -M.$$

■

Proposição 3.14. *Suponha (H1), (H2), (H4) e a condição (3.3). Então existem $a > 0$ e $\rho > 0$,* *tais que*

$$\phi(u) \geq a, \quad \textit{se } \|u\| = \rho.$$

Demonstração. De (H4), podemos escolher $\mu > 0$, tal que

$$\limsup_{t\to 0} \frac{2F(x,t)}{t^2} < \mu < \lambda_1, \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

Então existe $\delta > 0$, tal que

$$F(x,t) \leq \frac{\mu t^2}{2}, \quad \text{se } |t| < \delta. \tag{3.25}$$

Logo, da parte (c) do Lema 3.9 e a condição (3.3)

$$F(x,t) \leq \hat{M}|f(x,t)| \leq C\hat{M}e^{\beta t^2}, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observe que se $|t| \geq \delta$, então $1 \leq \dfrac{|t|^q}{\delta^q}$ e, portanto,

$$F(x,t) \leq \frac{C\hat{M}}{\delta^q} e^{\beta t^2}|t|^q = C_1 e^{\beta t^2}|t|^q, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall |t| \geq \delta. \tag{3.26}$$

Logo, de (3.25) e (3.26), obtemos

$$F(x,t) \leq C_1 e^{\beta t^2}|t|^q + \frac{\mu t^2}{2}, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

Pela definição de λ_1, (3.27) e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \frac{1}{2}\|u\|^2 \int_\Omega F(x,u)\,dx \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_\Omega C_1 e^{\beta u^2}|u|^q + \frac{\mu |u|^2}{2}\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\mu}{2}\|u\|^2_{L^2} - C_1\Big(\int_\Omega e^{p\beta u^2}\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega |u|^{p'q}\,dx\Big)^{1/p'} \\
&\geq \frac{1}{2}(1 - \frac{u}{\lambda_1})\|u\|^2 - C_1\|u\|^q_{L^{pq'}}\Big(\int_\Omega e^{p\beta u^2}\,dx\Big)^{1/p}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Seja $0 < \delta_0$, tal que $\beta p \delta_0^2 < 4\pi$, pelo Teorema 2.9, existe $C > 0$ tal que

$$\Big(\int_\Omega e^{p\beta u^2}\,dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_\Omega e^{p\beta \|u\|^2 (\frac{u}{\|u\|})^2}\,dx\Big)^{1/p} \leq C \quad \text{se } \|u\| \leq \delta_0.$$

Usando também a imersão $L^{q'p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ em (3.28), existe $C_2 > 0$ tal que

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{u}{\lambda_1})\|u\|^2 - C_2\|u\|^q, \quad \text{se } \|u\| \leq \delta_0.$$

Escolhendo $0 < \rho \leq \min\{\delta_0, \Big(\frac{1}{4C_2}(1 - \frac{\mu}{\lambda_1})\Big)^{1/q-2}\}$ e $a = \frac{1}{2}(1 - \frac{u}{\lambda_1})\rho^2$, temos

$$\phi(u) \geq a, \quad \text{se } \|u\| = \rho.$$

■

Denote por V o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelas autofunções φ_j de $\big(-\Delta, H_0^1(\Omega)\big)$, correspondentes aos autovalores λ_j, para $j = 1, \ldots, k$. Denote também $W = V^\perp$. Observe que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ e φ_j são ortogonais em $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Observação 3.15. *Usando as notações como acima. Tem-se*

a) Se $u \in V$, então $\|u\|^2 \leq \lambda_k\|u\|^2_{L^2}$.

b) Se $u \in W$, então $\|u\|^2\lambda_{k+1} \geq \|u\|^2_{L^2}$.

Demonstração.

a) Seja $u \in V$, então $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\varphi_j$ com $\alpha_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, k$, logo, usando o fato de ortogonalidade e o fato de que $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ são crescentes, obtemos

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2\|\varphi_j\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 \int_\Omega |\nabla\varphi_j|^2\, dx = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2\lambda_j \int_\Omega |\varphi_j|^2\, dx. \\ &\leq \lambda_k \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2 \int_\Omega |\varphi_j|^2\, dx = \lambda_k \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^2\|\varphi_j\|^2_{L^2} = \lambda_k\|u\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

b) Seja $u \in W$, então $u = \displaystyle\sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j\varphi_j$, com $\alpha_j \in \mathbb{R},\ j \geq k+1$, logo,

$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2\|\varphi_j\|^2 = \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2 \int_\Omega |\nabla\varphi_j|^2\, dx = \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2\lambda_j \int_\Omega |\varphi_j|^2\, dx \\ &\geq \lambda_{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2 \int_\Omega |\varphi_j|^2\, dx = \lambda_{k+1} \sum_{j=k+1}^{\infty} \alpha_j^2\|\varphi_j\|^2_{L^2} = \lambda_{k+1}\|u\|^2_{L^2}.\end{aligned}$$

■

Proposição 3.16. *Assuma (H1), (H2), (H5) e a condição (3.3). Então existem $a > 0$ e $\rho > 0$, tais que*

$$\phi(u) \geq a, \quad se \quad \|u\| = \rho.$$

Demonstração. Pelo (H5) $F(x,t) \leq \frac{1}{2}\mu t^2$, se $|t| \leq \delta$, com $\mu < \lambda_{k+1}$. Logo, usando a parte (b) da Observação 3.15 e procedendo como na Proposição 3.14, temos que existe $\delta_0 > 0$, tal que

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu}{\lambda_{k+1}})\|u\|^2 - C_2\|u\|^q, \quad \text{se } u \in W, \text{ com } \|u\| \leq \delta_0.$$

Logo, existem $\rho > 0$ e $a > 0$, tais que

$$\phi(u) \geq a, \quad \text{se } u \in W, \text{ com } \|u\| \leq \delta_0.$$

■

3.2 Demonstrações dos Teoremas

3.2.1 O caso subcrítico

Demonstração do Teorema 3.2. Para provar a existência de solução usaremos o Teorema do Passo da Montanha (ver Apêndice A, Teorema A.13). Para isso verifiquemos as hipóteses do teorema. Seja $X = H_0^1(\Omega)$, pela Proposição 3.8 $\phi \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$, pelo Corolário 3.12 ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, da definição de ϕ, temos $\phi(0) = 0$. Além disso, vejamos que se satisfaz as condições $i)$ e $ii)$ do Teorema A.13

i) É satisfeito pela Proposição 3.14.

ii) Seja $0 \neq u_0 \in H_0^1(\Omega)$ e considere $Z = \{tu_0 : t \in \mathbb{R}\}$, então $\dim(Z) < +\infty$, pela Proposição 3.13, existe $e \in Z$, tal que $\phi(e) \leq 0$ com $\|e\| > \rho$.

Então pelo Teorema A.13, ϕ possui um ponto crítico $c \geq a > 0$. Consequentemente, o problema possui uma solução não trivial.

Para provar que o problema tem infinitas soluções verificaremos as hipóteses do Teorema A.14 do Apêndice A.

Sejam $V = 0$ e $W = H_0^1(\Omega)$, pela hipótese $f(x,t)$ é uma função ímpar em t, então $F(x,t) = \displaystyle\int_0^t f(x,s)\, ds$ é uma função par em t , logo,

$$\phi(-u) = \frac{1}{2}\|-u\|^2 - \int_\Omega F(x,-u)\, ds = \phi(u).$$

Isto é, ϕ é uma função par. Além disso, se satisfazem as condições $i')$ e $ii')$ pois :

i') É satisfeito pela proposição 3.14.

ii') É satisfeito pela proposição 3.13.

■

Demonstração do Teorema 3.3. Para provar a existência de solução usaremos o Teorema do Passo da Montanha generalizado (ver Apêndice A, Teorema A.15). Considere $X = H_0^1(\Omega)$, o espaço V gerado por as autofunções φ_j com $j = 1, \ldots, k$ e $W = V^{\perp}$, pela Proposição 3.8, $\phi \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\big)$, pelo Corolário 3.12 ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Além disso, se satisfazem as condições $i)$ e $ii)$ do Teorema A.14, pois :

i) É satisfeito pela Proposição 3.14.

ii) Seja $e = \varphi_{k+1}$, onde φ_{k+1} é o autovalor normalizado associado ao autovalor λ_{k+1}, deste modo $\|e\| = 1$, considerando o subespaço $Z = V \oplus V_{\lambda_{k+1}}$, onde $V_{\lambda_{k+1}}$ é o subespaço gerado por φ_{k+1}, então $\dim(Z) < +\infty$, pela Proposição 3.13, existe $R_1 > 0$, tal que $\phi(u) \leq 0$, se $u \in Z$ com $\|u\| \geq R_1$. Tome $R > \max\{R_1, \rho\}$, logo

$$\phi(u) \leq 0, \quad \text{para todo } u \in Z, \text{ com } \|u\| \geq R, \tag{3.29}$$

e considerando

$$Q = \big(\overline{B_R} \cap V\big) \oplus \{r\varphi_{k+1} : 0 < r < R\}.$$

Vejamos que $\phi(u) \leq 0$, para todo $u \in \partial Q$.
Se $u \in \partial Q$, tem-se os seguintes casos:

a) $u = v + R\varphi_{k+1},\ v \in \overline{B_R} \cap V.$

b) $u = v,\ v \in \overline{B_R} \cap V.$

c) $u = v + r\varphi_{k+1},\ \|v\| = R,\ 0 < r < R.$

Caso a: Como $\|u\|^2 = \|v\|^2 + \|R\varphi_{k+1}\|^2 = \|v\|^2 + R^2$, então $\|u\| \geq R$, além disso $u \in Z$, logo, de (3.29), $\phi(u) \leq 0$.

Caso b: Note que $u \in V$, então pela parte $a)$ da Observação 3.15, temos $\|u\|^2 \leq \lambda_k \|u\|^2_{L^p}$. Da condição (H6), temos $F(x,t) \geq \dfrac{1}{2}\lambda_k t^2,\ \forall x \in \Omega,$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\Omega} F(x,u)\,dx \leq \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda_k}{2}\|u\|^2_{L^p} \leq 0$$

Caso c: Note que, $\|u\| \geq R$, então por (3.29), $\phi(u) \leq 0$.

Consequentemente, $\phi(u) \leq 0$, para todo $u \in \partial Q$.

Logo, pelo Teorema A.15, existe um valor crítico $c \geq a > 0$, e por conseguinte, o problema possui uma solução não trivial.

Para provar que o problema tem infinitas soluções, basta verificar as hipóteses do Teorema A.14, de maneira análoga como foi feita no Teorema 3.2. ■

3.2.2 O caso crítico

Pela parte $b)$ do Corolário 3.12, a condição $(PS)_c$ no caso crítico só é satisfeita se $c < \dfrac{2\pi}{\alpha_0}$, onde α_0 é o índice de criticalidade. O seguinte Lema mostra que o nível minimax do passo da montanha é menor que $\dfrac{2\pi}{\alpha_0}$.

Lema 3.17. *Com as hipóteses do Teorema 3.4, existe $\omega \in H_0^1(\Omega)$ com $\|\omega\| = 1$, tal que*

$$\max\{\phi(t\omega) : t \geq 0\} < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Demonstração. Começamos definindo as seguintes funções

$$\overline{\omega}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\ln n}, & 0 \leq |x| < \dfrac{1}{n}, \\ \dfrac{\ln \dfrac{1}{|x|}}{\sqrt{\ln n}}, & \dfrac{1}{n} \leq |x| < 1, \\ 0, & 1 \leq |x|. \end{cases}$$

Então

$$\nabla\overline{\omega}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} 0, & 0 \leq |x| < \dfrac{1}{n} \text{ ou } |x| \geq 1, \\ -\dfrac{x}{|x|^2\sqrt{\ln n}}, & \dfrac{1}{n} \leq |x| < 1. \end{cases}$$

Note que,

$$\|\overline{\omega}_n\|^2_{B_1(0)} = \int_{B_1(0)} |\nabla\overline{\omega}_n(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi \ln n} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{r}{r^2} \, dr = 1.$$

Por conseguinte, $\overline{\omega}_n \in H_0^1\big(B_1(0)\big)$ e $\|\overline{\omega}_n\| = 1$, para todo $n \geq 1$. Como d é o raio interno de Ω, existe $x_0 \in \Omega$, tal que $B_d(x_0) \subset \Omega$. Defina

$$\omega_n = \overline{\omega}_n(\frac{x - x_0}{d}), \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Então

$$\omega_n \in H_0^1(\Omega), \quad supp(\omega_n) \subset B_d(x_0), \text{ para cada } n \geq 1.$$

Afirmação. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\max\{\phi(t\omega_{n_0}) : t \geq 0\} < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

De fato, suponha por contradição, que isso não ocorre, ou seja

$$\max\{\phi(t\omega_n) : t \geq 0\} \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Pelas Proposições 3.13 e 3.14, para cada $n \geq 1$ existe $t_n > 0$, tal que

$$\phi(t_n\omega_n) = \max\{\phi(t\omega_n) : t \geq 0\}, \tag{3.30}$$

ou seja

$$\phi(t_n\omega_n) = \frac{t_n^2}{2}\|w_n\| - \int_\Omega F(x, t_n w_n) \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Como $\|w_n\| = 1$, para cada $n \geq 1$ e da condição (H3) a integral é positiva e, portanto,

$$t_n^2 \geq \frac{2\pi}{\alpha_0}, \quad \text{para todo} n \geq 1. \tag{3.31}$$

Por outro lado, de (3.30), para todo $n \geq 1$, temos

$$\frac{d\phi(t\omega_n)}{dt} = 0, \quad \text{em } t = t_n.$$

Então,

$$t_n - \int_\Omega f(x, t_n\omega_n)\omega_n \, dx = 0.$$

Logo,

$$t_n^2 = \int_\Omega f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \, dx \geq \int_{B_{\frac{d}{n}}(x_0)} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n \, dx, \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{3.32}$$

Dado $\epsilon > 0$, de (H7), existe $s_\epsilon > 0$, tal que

$$f(x,s)s \geq (\beta - \epsilon)e^{\alpha_0 s^2}, \quad \text{para cada } \; s \geq s_\epsilon \tag{3.33}$$

Como $\omega_n(x) = \sqrt{\ln n}$, para cada $x \in B_{\frac{d}{n}}(x_0)$ e $\{t_n\}$ é uma sequência limitada inferiormente, então existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que

$$t_n\omega_n(x) \geq s_\epsilon, \quad \text{em} \quad B_{\frac{d}{n}}(x_0), \quad \text{se } n \geq n_1,$$

logo, de (3.32), (3.33) e usando a definição de ω_n, temos para cada $n \geq n_1$,

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq (\beta - \epsilon)\int_{B_{\frac{d}{n}}(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2(x)}\,dx = (\beta-\epsilon)e^{\alpha_0 t_n^2 \frac{\ln n}{2\pi}}\int_{B_{\frac{d}{n}}(x_0)} dx \\ &= (\beta-\epsilon)e^{\alpha_0 t_n^2 \frac{\ln n}{2\pi}}\pi\frac{d^2}{n^2} = (\beta-\epsilon)\pi d^2 e^{2\ln n(\frac{\alpha_0 t_n^2}{4\pi}-1)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Suponha que exista uma subsequência $\{t_{k_n}\}$ de $\{t_n\}$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_{k_n} = +\infty$, então usando (3.34),

$$0 = \lim_{n\to\infty}\frac{t_{k_n}^2}{e^{2\ln k_n(\frac{\alpha_0 t_{k_n}^2}{4\pi}-1)}} \geq (\beta-\epsilon)\pi d^2, \tag{3.35}$$

donde temos uma contradição e, portanto, $\{t_n\}$ é uma sequência limitada.

Por outro lado, suponha que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^2 \neq \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$, como $t_n^2 \geq \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$, então existe uma subsequência $\{t_{k_n}\}$ de $\{t_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} t_{k_n}^2 = t_0^2 > \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$, logo como em (3.35), temos uma contradição, por conseguinte,

$$\lim_{n\to\infty} t_n^2 = \frac{4\pi}{\alpha_0}.$$

Defina, para cada $n \geq 1$,

$$A_n = \{x \in B_d(x_0) : t_n\omega_n(x) \geq s_\epsilon\}, \quad B_n = B_d(x_0)\backslash A_n.$$

Provemos a seguinte afirmação
Afirmação. Com as definições acima, tem-se as seguintes convergências.

$$t_n\omega_n(x) \to 0, \text{ q.t.p. em } B_d(x_0) \quad \text{e} \quad \chi_{B_n} \to 1, \text{ q.t.p. em } B_d(x_0). \tag{3.36}$$

De fato, seja $x \in B_d(x_0)\backslash\{x_0\}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\dfrac{d}{n_0} < |x - x_0|$ deste modo,

$x \in B_d(x_0)\backslash B_{\frac{d}{n}}(x_0)$, para todo $n \geq n_0$. Logo,

$$t_n\omega_n(x) = \frac{t_n \ln \dfrac{d}{|x-x_0|}}{\sqrt{\ln n}} \leq C_2 \frac{\ln n_0}{\ln n}, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

onde $C_2 > 0$ é uma cota superior de $\{t_n\}$. E, portanto,

$$t_n\omega_n(x) \to 0, \text{ q.t.p. em } B_d(x_0).$$

Logo, para $x \in B_d(x_0)\backslash\{x_0\}$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que $t_n\omega_n(x) < s_\epsilon$ para cada $n \geq n_1$, ou seja, $\chi_{B_n} = 1$, para cada $n \geq n_1$. Assim

$$\chi_{B_n} \to 1, \quad \text{q.t.p. em } B_d(x_0).$$

Como em (3.32), temos

$$\begin{aligned} t_n^2 &\geq \int_{B_d(x_0)} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n\,dx = \int_{B_n} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n\,dx + \int_{B_d(x_0)\backslash B_n} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n\,dx \\ &\geq \int_{B_n} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n\,dx + (\beta-\epsilon)\int_{B_d(x_0)\backslash B_n} e^{\alpha_0 t_n^2 w_n^2}\,dx \\ &= \int_{B_n} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n\,dx + (\beta-\epsilon)\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2}\,dx - (\beta-\epsilon)\int_{B_n} e^{\alpha_0 t_n^2\omega_n^2}\,dx. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Analisaremos cada integral por separadamente . Note que,

$$\int_{B_n} |f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n|\,dx \leq C_3 \int_{B_n} |t_n\omega_n|\,dx = C_3 \int_{B_d(x_0)} |t_n\omega_n|\chi_{B_n}\,dx,$$

onde $C_3 = \sup\limits_{(x,s)\in\overline{\Omega}\times[0,s_\epsilon]} |f(x,s)|$. Logo, por (3.36), temos

$$|t_n\omega_n|\chi_{B_n} \to 0, \quad \text{q.t.p. em } B_d(x_0).$$

Além disso,

$$|t_n\omega_n\chi_{B_n}| \leq s_\epsilon, \quad \text{com } s_\epsilon \in L^2\big(B_d(x_0)\big).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesque, temos

$$\int_{B_n} f(x, t_n\omega_n)t_n\omega_n\,dx \to 0, \quad \text{se } n \to \infty.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \dfrac{x - x_0}{d}$ e do fato que $t_n^2 \geq \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2(x)}\, dx &\geq \int_{B_d(x_0)} e^{4\pi\omega_n^2(x)}\, dx = d^2 \int_{B_1(0)} e^{4\pi\overline{\omega}_n^2(y)}\, dy \\ &= d^2 \int_0^{2\pi} \Big\{ \int_0^{\frac{1}{n}} e^{4\pi\frac{\ln n}{2\pi}} r\, dr + \int_{\frac{1}{n}}^1 e^{4\pi\frac{(\ln\frac{1}{r})^2}{2\pi\ln n}} r\, dr \Big\}\, d\theta \\ &= 2\pi d^2 \big(\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{n}}^1 e^{2\frac{(\ln\frac{1}{r})^2}{\ln n}} r\, dr\big).\end{aligned}$$

Fazendo na última integral a mudança de variável, $s = \frac{(\ln\frac{1}{r})^2}{\ln n}$, obtemos

$$\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2(x)}\, dx \geq 2\pi d^2 \big(\frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{n}}^1 e^{2\frac{(\ln\frac{1}{r})^2}{\ln n}} r\, dr\big) = 2\pi d^2 \big(\frac{1}{2} + \frac{2\ln n \int_0^1 e^{2\ln n(s^2 - s)}\, ds}{2}\big). \tag{3.38}$$

Do Lema B.5 , temos $\lim_{m\to\infty} m \displaystyle\int_0^1 e^{m(s^2-s)}\, ds = 2$, então tomando limite em (3.38), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2(x)}\, dx \geq 3\pi d^2.$$

Agora,

$$\int_{B_n} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2}\, dx = \int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2} \chi_{B_n}\, dx.$$

Por (3.36), temos

$$e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2} \chi_{B_n} \to 1, \quad \text{q.t.p. em } B_d(x_0).$$

Além disso,

$$|e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2} \chi_{B_n}| \leq e^{\alpha_0 s_\epsilon^2}, \quad \text{com } e^{\alpha_0 s_\epsilon^2} \in L^2\big(B_d(x_0)\big).$$

Pelo Teorema da Convergência Cominada de Lebesque, temos

$$\int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2(x)}\, dx \to \int_{B_d(x_0)} 1\, dx = \pi d^2, \quad \text{se } n \to \infty.$$

Fazendo $n \to \infty$ em (3.37), encontramos

$$\lim_{n\to\infty} t_n^2 \geq \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f(x, t_n\omega_n) t_n \omega_n dx + (\beta - \epsilon) \lim_{n\to\infty} \int_{B_d(x_0)} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2} dx - (\beta - \epsilon) \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} e^{\alpha_0 t_n^2 \omega_n^2} dx,$$

donde

$$\frac{4\pi}{\alpha_0} \geq 2\pi(\beta - \epsilon) d^2.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, tem-se que $\beta \leq \dfrac{2}{\alpha_0 d^2}$, o qual é uma contradição. ■

Demonstração do Teorema 3.4.

Para provar a existência de solução verificaremos que se satisfazem hipóteses do Teorema A.13.

Seja $X = H_0^1(\Omega)$, pela proposição 3.15, $\phi \in \mathcal{C}^1\big(H_0^1(\Omega, \mathbb{R})\big)$. Vejamos que se satisfazem as condições $i)$ e $ii)$

i) Pela Proposição 3.14, existem $a > 0$ e $\rho > 0$, tal que

$$\phi(u) \geq a, \quad \text{se } \|u\| = \rho,\ u \in W.$$

ii) Pelo Lema 3.17, existe $\omega_0 \in H_0^1(\Omega)$, tal que

$$\max\{\phi(t\omega_0) : t \geq 0\} < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Pela Proposição 3.13, com $Z = \{t\omega_0 : t \in \mathbb{R}\}$ existe $R > 0$, tal que para todo $u \in Z$ e $\|u\| \geq R$, tem-se $\phi(u) \leq 0$, logo, tomando $t_0 > \rho$, e considerando $e = t_0\omega_0 \in H_0^1(\Omega)$, como $\|\omega_0\| = 1$, temos $\|e\| > \rho$ e $e \in Z$ assim, $\phi(e) \leq 0$.

Resta verificar que ϕ satisfaz a condição $(PS)_c$, com $c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}\phi(\gamma(t))$, onde

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}\big([0,1], H_0^1(\Omega)\big) : \gamma(0) = 0 \ \ e \ \ \gamma(1) = e\}.$$

De fato, defina

$$\begin{array}{rccl} \gamma_0 & : [0,1] & \to & H_0^1(\Omega) \\ & t & \mapsto & \gamma_0(t) = tt_0\omega_0 \end{array}$$

então $\gamma_0 \in \Gamma$, além disso

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}\phi(\gamma(t)) \leq \sup_{t\in[0,1]}\phi(\gamma_0(t)) = \sup_{t\in[0,1]}\phi(tt_0\omega_0) \leq \sup_{t\geq 0}\phi(t\omega_0) < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Logo, pelo Corolário 3.12, a condição $(PS)_c$ é satisfeita. Então, pelo Teorema A.13, ϕ possui um ponto crítico $c \geq a > 0$. E, portanto, o problema possui uma solução não trivial.

■

Capítulo

4

Existência e não existência de soluções radiais

Neste capítulo estudaremos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), & \text{em} \quad B_1(0), \\ u = 0, & \text{sobre} \quad \partial B_1(0), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $B_1(0)$ é a bola unitária em $\mathbb{R}^2$ e a função f possui crescimento crítico exponencial da forma $f(r) = e^{\alpha_0 r^2} h(r)$, para algum $\alpha_0 > 0$ e $h \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ possui crescimento subcrítico, ou seja

$$\lim_{|r| \to +\infty} \frac{|h(r)|}{e^{\alpha r^2}} = 0, \quad \text{para todo } \alpha > 0,$$

ou equivalentemente, $\displaystyle\lim_{|r| \to +\infty} \frac{\ln |h(r)|}{r^2} = 0$. Deste modo podemos escrever a equação (4.1), no caso onde f possui crescimento crítico como:

$$\begin{cases} -\Delta u = sgn(h(u)) e^{\alpha_0 u^2 + \ln |h(u)|} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.2}$$

O interesse desde capítulo é determinar a existência e a não existência do problema (4.1) em termos de h. Este capítulo é baseada no artigo [8] de De Figueiredo e Ruf.

4.1 Formulação do problema

Consideramos somente soluções radiais e positivas do seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) \quad \text{em} \quad B_1(0), \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_1(0). \end{cases} \tag{4.3}$$

Sendo u uma função radial podemos escrever $u(x_1, x_2) = U(r)$, para todo $(x_1, x_2) \in B_1(0)$, onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Logo

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u = U'(r) \frac{\partial}{\partial x_i} r = U'(r) \frac{x_i}{r}, \text{ para } i = 1, 2.$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = U''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + U'(r)(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}), \text{ para } i = 1, 2.$$

E, portanto,

$$-\nabla u = -\big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u\big) = U''(r) + \frac{1}{r} U'(r).$$

Também, como $u = 0$ em $\partial B_1(0)$, temos $U(1) = 0$. Além disso, como U é radial, temos $U(h) = u(h, 0) = u(-h, 0)$, para todo $h \in \mathbb{R}$. Logo,

$$U'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{U(h) - U(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(h, 0) - u(0, 0)}{h} = \frac{\partial}{\partial x_1} u(0, 0).$$

Por outro lado,

$$U'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{U(h) - U(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(-h, 0) - u(0, 0)}{h} = -\frac{\partial}{\partial x_1} u(0, 0).$$

Donde concluímos que $U'(0) = 0$. Deste modo, reduzimos a equação (4.1) para a equação radial

$$\begin{gathered} U''(r) + \frac{1}{r} U'(r) + f(U) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ U(1) = 0,\ U'(0) = 0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Para encontrar soluções do problema (4.4), usamos o método de "shotting", ou seja consideraremos para cada $\gamma > 0$ o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{gathered} U''(r) + \frac{1}{r} U'(r) + f(U) = 0, \quad 0 < r < 1, \\ U(0) = \gamma,\ U'(0) = 0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Denotaremos por U_γ, a solução do problema (4.5) e por $R(\gamma)$ o primeiro zero positivo tal que $U_\gamma\big(R(\gamma)\big) = 0$. Logo, se existe $\gamma_0 > 0$ tal que $R(\gamma_0) = 1$, então U_{γ_0} será uma solução do problema (4.4), por outro lado, se $R(\gamma) \neq 1,\ \forall\gamma > 0$, então o problema (4.1) não tem solução, pois não existe uma solução que satisfaça a condição $U(1) = 0$. Deste modo, encontrar soluções do problema (4.3) se reduz a estudar o comportamento de $R(\gamma)$. Fazendo as mudanças de variáveis $t = -2\ln(\frac{r}{2})$, $y(t) = U(r)$ e considerando o caso que f seja uma função positiva convertemos a equação (4.5), em

$$\begin{aligned} -y'' &= f(y)e^{-t} = e^{g(y)-t}, \quad t > 2\ln 2 \\ y(+\infty) &= \gamma,\ y'(+\infty) = 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Note que, como f possui crescimento crítico tem-se: $f(r) = e^{\alpha_0 r^2 + \ln h(r)}$, desse modo, $g(r) = \alpha_0 r^2 + \ln h(r)$, mostraremos depois que podemos supor que $\alpha_0 = 1$. Assim é suficiente estudar o problema

$$\begin{aligned} -y'' &= e^{y^2+\ln h(y)-t}, \quad t > 2\ln 2 \\ y(+\infty) &= \gamma,\ y'(+\infty) = 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Com h satisfazendo as seguintes hipóteses:

- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^2$, e suponha que existem $r_1 > 0$ e $\sigma > 0$ tais que para certas constantes $K > 0$ e $c > 0$.

  (A_1) $h(r) = \dfrac{K}{r^a}$, para $r \geq r_1,\ a > 0$

  (A_2) $0 \leq h(r) \leq cKr^{1+\sigma}$, para $0 \leq r \leq r_1$.

Mostraremos que a solubilidade de (4.7) depende do parâmetro $a > 0$ em h. Para provar os resultados, analisaremos a dependência de $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} T(\gamma)$ sobre o exponente $a > 0$ em h, onde $T(\gamma)$ é o primeiro zero (desde $+\infty$) da solução y_γ de (4.7). Observe que para calcular o limite somente precisamos considerar valores de γ suficientemente grandes.

4.2 Estimativas

Nesta seção estimaremos o comportamento das soluções da equação (4.6), com $g(U) = \ln f(U)$ da forma $g(U) = \alpha U^2 + \ln h(U)$. Note que, fazendo a mudança $y(t) = \sqrt{\alpha}U(t)$ na equação (4.6), temos a equação $-y''(t) = \sqrt{\alpha}h(\frac{y}{\sqrt{\alpha}})e^{y^2-t}$. Desde que $h(\frac{r}{\sqrt{\alpha}}) = \alpha^{a/2}\frac{K}{r^a}$, para $r \geq \sqrt{\alpha}r_1$, podemos restringir a funções $g(U)$ da forma $g(U) = U^2 + \ln h(U)$, com a correspondente mudança de K a $\alpha^{(1+a)/2}K$ em os termos de h e, portanto, é suficiente considerar a equação (4.7).

Lema 4.1. *Dado qualquer numero $\gamma > 0$, existe exatamente uma solução U_γ de (4.5). Além disso, se $R(\gamma)$ denota o primeiro valor de r tal que $U_\gamma(r) = 0$; então $R(\gamma)$ depende continuamente de γ.*

Demonstração. (Veja [3]). ■

Denotamos por $T_1 = T_1(\gamma)$ o valor tal que $U_\gamma(T_1) = r_1$.

Lema 4.2. *Suponha que $g \in \mathcal{C}^2\big([r_1, +\infty)\big), g'(t) > 0$ e $g''(t) \geq 0$ em $[r_1, +\infty)$, então para cada $T_1 \leq t < +\infty$, tem-se*

(i) $y(t,\gamma) \leq \gamma - \dfrac{2}{g'(\gamma)} \ln\big(1 + \dfrac{1}{2}g'(\gamma)e^{g(\gamma)-t}\big)$.

(ii) $g\big(y(t,\gamma)\big) \geq g(\gamma) - 2\ln\big(1 + \dfrac{1}{2}g'(\gamma)e^{g(\gamma)-t}\big)$.

Demonstração. Denotemos por $y(t)$ (ou y) a $y(t,\gamma)$. Usando a equação (4.6), temos

$$-\int_t^{+\infty} y''(s)\,ds = \int_t^{+\infty} e^{g(y(s))-s}\,ds.$$

Logo, como $y'(+\infty) = 0$, obtemos

$$y'(t) = \int_t^{+\infty} e^{g(y(s))-s}\,ds.$$

Note que, da hipótese e da equação anterior que g e y têm derivadas positivas, portanto $g(y(\cdot))$ é uma função crescente. Logo

$$\int_t^{+\infty} e^{g(y(t))-s}\,ds \leq \int_t^{+\infty} e^{g(y(s))-s}\,ds \leq \int_t^{+\infty} e^{g(y(+\infty))-s},\ ds$$

Assim,

$$e^{g(y(t))}\int_t^{+\infty} e^{-s}\,ds \leq y'(s) \leq e^{g(\gamma)}\int_t^{+\infty} e^{-s}\,ds.$$

Logo,

$$e^{g(y(t))-t} \leq y'(t) \leq e^{g(\gamma)-t}.$$

Logo, tomando logaritmo e somando t, temos

$$g(y(t)) \leq \ln y'(t) + t =\leq g(\gamma).$$

Como g é uma função contínua e $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \gamma$, resulta

$$\lim_{t\to+\infty} \ln y'(t) + t = g(\gamma). \tag{4.8}$$

Por outro lado, defina

$$E(t) = y'(t) - \frac{1}{2}y'(t)^2 g'\big(y(t)\big) - e^{g(y(t))-t}.$$

Usando (4.6), temos

$$E'(t) = -\frac{1}{2}y'(t)^3 g''\big(y(t)\big). \tag{4.9}$$

Como $y'' \geq 0$ e $g'' \geq 0$, então $E' \leq 0$ isto é, E é uma função decrescente.

Além disso, temos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} E(t) &= y'(+\infty) - \frac{1}{2}y'(+\infty)^2 g'\big(y(+\infty)\big) - e^{g(y(+\infty))}\lim_{t\to+\infty} e^{-t}\\ &= 0 - \frac{1}{2}(0)^2 g'(\gamma) - e^{g(\gamma)}(0) = 0\end{aligned} \tag{4.10}$$

e

$$0 \leq \frac{E(t)}{y'(t)} = 1 - \frac{1}{2}y'(t)g'\big(y(t)\big) - \frac{e^{g(y(t))-t}}{y'(t)}.$$

Como $-y''(t) = e^{g(y(t))-t}$, então

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2}y'(t)g'\big(y(t)\big) + \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{E(t)}{y'(t)}.$$

Usando (4.10), temos $E(t) = -\displaystyle\int_t^{+\infty} E'(s)\, ds$, logo de (4.9),

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2}y'(t)g'\big(y(t)\big) + \frac{y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{2y'(t)}\int_t^{+\infty} y'(s)^3 g''(y(s))\, ds. \tag{4.11}$$

Note que, como $y'' \leq 0$, y' é decrescente; logo

$$\begin{aligned}\int_t^{+\infty} y'(s)^3 g''(y(s))\, ds &\leq y'(t)^2 \int_t^{+\infty} g''(y(s))y'(s)\, ds\\ &= y'(t)^2\big(g'(\gamma) - g'(y(t))\big).\end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade acima em (4.11), temos

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2}y'(t)g'\big(y(t)\big) + \frac{y''(t)}{y'(t)} \leq \frac{1}{2}y'(t)\big(g'(\gamma) - g'(y(t))\big). \tag{4.12}$$

Integrando a primeira desigualdade de (4.12), obtemos

$$\begin{aligned}0 \leq \int_t^{+\infty} \big(1 - \frac{1}{2}y'(s)g'\big(y(s)\big) + \frac{y''(s)}{y'(s)}\big)\, ds &= \int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}\big(s - \frac{g(y(s))}{2} + \ln y'(s)\big)\, ds\\ &= s - \frac{g(y(s))}{2} + \ln y'(s)\Big|_t^{+\infty}\\ &= \lim_{s\to+\infty} \big(s + \ln y'(s) - \frac{g(y(s))}{2}\big) + \frac{g(y(t))}{2}\\ &\quad - t - \ln y'(t)\\ &= \frac{g(\gamma) + g(y(t))}{2} - t - \ln y'(t).\end{aligned}$$

Logo,

$$\ln y'(t) \leq \frac{g(\gamma) + g(y(t))}{2} - t.$$

E, portanto,

$$y'(t) \leq e^{\frac{g(\gamma)+g(y(t))}{2} - t}.$$

Assim,

$$y'(t)e^{-\frac{g(y(t))}{2}} \leq e^{\frac{g(\gamma)}{2} - t}.$$

Sendo g' e y funções crescentes, temos que $g'(y(t)) \leq g'(\gamma)$, multiplicando isto na desigualdade acima, tem-se

$$g'(y(t))y'(t)e^{-\frac{g(y(t))}{2}} \leq g'(\gamma)e^{\frac{g(\gamma)}{2} - t}.$$

Integrando

$$-2\int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}\big(e^{-\frac{g(y(s))}{2}}\big)\, ds \leq -g'(\gamma)\int_t^{+\infty} \frac{d}{ds}\big(e^{\frac{g(\gamma)}{2} - s}\big)\, ds.$$

Logo,

$$-2\lim_{s\to+\infty} e^{-\frac{g(y(s))}{2}} + 2e^{-\frac{g(y(t))}{2}} \leq -g'(\gamma)\big(\lim_{s\to\infty} e^{\frac{g(\gamma)}{2} - s} - e^{\frac{g(\gamma)}{2} - t}\big).$$

Assim,

$$e^{-\frac{g(y(t))}{2}} - e^{-\frac{g(\gamma)}{2}} \leq \frac{1}{2}g'(\gamma)e^{\frac{g(\gamma)}{2} - t}.$$

Multiplicando por $e^{\frac{g(\gamma)}{2}}$,

$$e^{-\frac{g(\gamma)-g(y(t))}{2}} - 1 \leq \frac{1}{2}g'(\gamma)e^{g(\gamma)-t}.$$

Logo,

$$\frac{g(\gamma) - g(y(t))}{2} \leq \ln\big(1 + \frac{1}{2}g'(\gamma)e^{g(\gamma)-t}\big).$$

Donde temos a desigualdade (ii):

$$g(\gamma) - 2\ln\big(1 + \frac{1}{2}g'(\gamma)e^{g(\gamma)-t}\big) \leq g(y(t)).$$

Agora, integrando as duas últimas desigualdades de (4.12), obtemos

$$\int_t^{+\infty}\big(1 - \frac{1}{2}y'(s)g'\big(y(s)\big) + \frac{y''(s)}{y'(s)}\big)\,ds \leq \frac{1}{2}\int_t^{+\infty} y'(s)\big(g'(\gamma) - g'(y(s))\big)\,ds.$$

Então

$$\begin{aligned}\frac{g(\gamma)+g(y(t))}{2} - t - \ln y'(t) &\leq \frac{1}{2}\big(g'(\gamma)y(s) - g(y(s))\big)\big|_t^{+\infty}\\ &= \frac{1}{2}\big(\gamma g'(\gamma) - g(\gamma) + g(y(t)) - y(t)g'(\gamma)\big).\end{aligned}$$

Simplificando

$$g(\gamma) - t \leq \ln y'(t) + \frac{1}{2}\big(\gamma - y(t)\big)g'(\gamma).$$

Assim,

$$e^{g(\gamma)-t} \leq y'(t)e^{\frac{(\gamma-y(t))g'(\gamma)}{2}}.$$

Integrando

$$-\int_t^{+\infty}\frac{d}{ds}(e^{g(\gamma)-s}) \leq -\frac{2}{g'(\gamma)}\int_t^{+\infty}\frac{d}{ds}(e^{\frac{(\gamma-y(s))g'(\gamma)}{2}}).$$

Donde,

$$e^{g(\gamma)-t} \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\big(e^{\frac{(\gamma-y(t))g'(\gamma)}{2}} - 1\big).$$

Logo,

$$1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t} \leq e^{\frac{(\gamma-y(t))g'(\gamma)}{2}}.$$

E, portanto,

$$\ln\big(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\big) \leq \frac{(\gamma - y(t))g'(\gamma)}{2}.$$

Finalmente obtemos a desigualdade (i):

$$y(t) \leq \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)}\ln\big(1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}\big).$$

■

Note que, a função $g(r) = r^2 + \ln(\frac{K}{r^a})$ com K e a números positivos satisfazem as condições do Lema 4.2. no intervalo $[\sqrt{a/2}, +\infty)$.

Definimos $T_5 = g(\gamma) - 4\ln(\frac{g'(\gamma)}{2})$ e consideramos a função $G(t) = 1 + \frac{g'(\gamma)}{2}e^{g(\gamma)-t}$.

Lema 4.3. *Suponha que $g(r) = r^2 + \ln(\frac{K}{r^a})$, com $a > 0$, para $r \geq r_1$. Então a solução de (4.6) satisfaz para $t \geq T_5$*

$$g(\gamma) - 2\ln G(t) \leq g(y(t)) \leq g(\gamma) - 2\ln G(t) + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^3}).$$

Demonstração. Como y é uma função crescente para $t \geq T_5 \geq T_1$, temos $y(t) \geq y(T_1) = r_1$. Aplicando g^{-1} na desigualdade (ii) do Lema 4.2 e observando que g^{-1} é uma função crescente, temos

$$y(t) \geq g^{-1}\big(g(\gamma) - 2\ln G(t)\big).$$

Usando o Polinômio de Taylor do segundo grau, obtemos

$$g^{-1}(b_1 + b_2) = g^{-1}(b_1) + b_2(g^{-1})'(b_1) + b_2^2\frac{1}{2}(g^{-1})''(\tilde{g}),$$

com $b_1 + b_2 < \tilde{g} < b_1$, onde $b_1 = g(\gamma)$ e $b_2 = -2\ln G(t)$. Assim, existe $\tilde{g}$ com $g(\gamma) - 2\ln G(t) < \tilde{g} < g(\gamma)$ e

$$y(t) \geq \gamma - 2\ln G(t)(g^{-1})'(g(\gamma)) + 2\ln^2 G(t)(g^{-1})''(\tilde{g}). \tag{4.13}$$

Sendo g uma função contínua crescente existe um único valor $\tilde{\gamma}$, tal que $\tilde{g} = g(\tilde{\gamma})$. Como $g(\tilde{\gamma}) = \tilde{g} < g(\gamma)$ e g função crescente então $\tilde{\gamma} < \gamma$, além disso, como $G(t)$ é uma função decrescente, temos

$$g(\gamma) - 2\ln G(t) \leq g(\gamma) - 2\ln G(T_5) \leq g(\tilde{\gamma}). \tag{4.14}$$

Agora, faremos uma estimativa da segunda derivada de g^{-1} em $\tilde{g}$ a qual é dada por

$$(g^{-1})''(\tilde{g}) = -\frac{g''(\tilde{\gamma})}{g'(\gamma)^3}. \tag{4.15}$$

A partir das expressões de g' e g, obtemos

$$g'(r) \geq \frac{2}{r}g(r), \text{ se } r \geq e^{1/2}K^{1/a}.$$

Note que, como estamos supondo γ grande, temos $\tilde{\gamma}$ é grande, logo, usando (4.14) e $\gamma > \tilde{\gamma}$, obtemos

$$g'(\tilde{\gamma}) \geq \frac{2}{\tilde{\gamma}}g(\tilde{\gamma}) \geq \frac{2}{\gamma}\big(g(\gamma) - 2\ln G(t)\big). \tag{4.16}$$

Por outro lado, como G é uma função decrescente, temos $G(t) \leq G(T_5)$ se $T_5 \leq t$, logo para γ suficientemente grande, temos

$$G(t) \leq G(T_5) = 1 + \frac{g'(\gamma)}{2} e^{g(\gamma)-T_5} = 1 + (\frac{g'(\gamma)}{2})^5 = 1 + (\gamma - \frac{a}{2\gamma})^5 < \gamma^6.$$

Assim $\ln G(t) \leq 6 \ln \gamma$, usando isto em (4.16), obtemos

$$\begin{aligned} g'(\tilde{\gamma}) &\geq \frac{2}{\gamma}\big(\gamma^2 + \ln(\frac{K}{\gamma^a}) - 12\ln\gamma\big) \\ &= \frac{2}{\gamma}\big(\gamma^2 + \ln K - a\ln\gamma - 12\ln\gamma\big) \\ &= 2\gamma - \frac{\ln\gamma}{\gamma}(24+2a) + O(\frac{1}{\gamma}) \\ &= 2\gamma\big(1 - \frac{\ln\gamma}{\gamma^2}(12+a) + O(\frac{1}{\gamma^2})\big). \end{aligned}$$

Usando o fato $(1-x)^n \geq 1 - nx$, para $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} g'(\tilde{\gamma})^3 &\geq 8\gamma^3\big(1 - \frac{\ln\gamma}{\gamma^2}(12+a) + O(\frac{1}{\gamma^2})\big)^3 \\ &\geq 8\gamma^3\big(1 - 3\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}(12+a) + O(\frac{1}{\gamma^2})\big). \end{aligned}$$

Note que, $g''(\tilde{\gamma}) = 2 + \frac{2}{\tilde{\gamma}^2} = 2 + O(\frac{1}{\gamma^2})$ e, portanto,

$$\frac{2 + O(\frac{1}{\gamma^2})}{8\gamma^3\big(1 - 3\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}(12+a) + O(\frac{1}{\gamma^2})\big)} \geq \frac{g''(\tilde{\gamma})}{g'(\tilde{\gamma})^3}.$$

Substituindo em (4.15), temos

$$(g^{-1})''(\tilde{g}) \geq -\frac{1 + O(\frac{1}{\gamma^2})}{4\gamma^3\big(1 - 3\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}(12+a) + O(\frac{1}{\gamma^2})\big)}$$

Agora, usando o fato $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$, para $x = 3\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}(12+a) + O(\frac{1}{\gamma^2})$ e notando que para as potências maiores que 2 tem ordem menor que $O(\frac{1}{\gamma^2})$, resulta

$$(g^{-1})''(\tilde{g}) \geq -\frac{1+O(\frac{1}{\gamma^2})}{4\gamma^3}\big(1+3\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}(12+a)+O(\frac{1}{\gamma^2})\big). \tag{4.17}$$

Usando (4.17) em (4.13), temos

$$\begin{aligned} y(t) &\geq \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)}\ln G(t) - \frac{\ln^2 G(t)}{2\gamma^3}\big(1+O(\frac{1}{\gamma^2})\big)\big(1+3\frac{\ln\gamma}{\gamma^2}(12+a)+O(\frac{1}{\gamma^2})\big) \\ &= \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)}\ln G(t) - \frac{\ln^2 G(t)}{2\gamma^3} - \frac{3\ln\gamma}{2\gamma^5}(12+a)\ln^2 G(t) + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^5}) \\ &= \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)}\ln G(t) - \frac{1}{2\gamma^3}\ln^2 G(t) + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Note também que

$$\begin{aligned} \frac{1}{g'(\gamma)} = \frac{1}{2\gamma - \frac{a}{\gamma}} &= \frac{1}{2\gamma(1-\frac{a}{2\gamma^2})} \\ &= \frac{1}{2\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2}+(\frac{a}{2\gamma^2})^2+(\frac{a}{2\gamma^2})^3+\cdots) \\ &= \frac{1}{2\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2})+O(\frac{1}{\gamma^5}). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Usando (4.19) em (4.26), temos

$$\begin{aligned} y(t) &\geq \gamma - 2\ln G(t)\big(\frac{1}{2\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2})+O(\frac{1}{\gamma^5})\big) - \frac{1}{2\gamma^3}\ln^2 G(t) + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}) \\ &= \gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma} - \frac{a\ln G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5}) - \frac{1}{2\gamma^3}\ln^2 G(t) + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}). \end{aligned}$$

Como

$$O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5}) + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}) = O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}),$$

resulta

$$y(t) \geq \gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma} - \frac{a\ln G(t)+\ln^2 G(t)}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^4}). \tag{4.20}$$

Por outro lado, pelo item (i) do Lema 4.2 e por (4.19), temos

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \gamma - 2\ln G(t)\big(\frac{1}{2\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{1}{\gamma^5})\big) \\ &= \gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5}). \end{aligned}$$

Aplicando a função g, temos

$$\begin{aligned} g(y(t)) &\leq \big(\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5})\big)^2 + \ln K \\ &\quad - a\ln\big(\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5})\big) \\ &= \gamma^2 + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2}(1+\frac{a}{2\gamma^2})^2 - 2\ln G(t)(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^4}) \\ &\quad + \ln K - a\ln\big(\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5})\big). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Usando a identidade $\ln(x+z) = \ln x + \frac{z}{x} - \frac{1}{2}(\frac{z}{x})^2 + \frac{1}{3}(\frac{z}{x})^3 + \cdots$, com $x = \gamma$ e $z = -\frac{\ln G(t)}{\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5})$, obtemos

$$\begin{aligned} \ln\big(\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma}(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^5})\big) &= \ln\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma^2} - \frac{a\ln G(t)}{4\gamma^4} + \cdots \\ &= \ln\gamma - \frac{\ln G(t)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^4}). \end{aligned}$$

Substituindo em (4.21), encontramos

$$\begin{aligned} g(y(t)) &\leq \gamma^2 + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2}(1+\frac{a}{2\gamma^2})^2 - 2\ln G(t)(1+\frac{a}{2\gamma^2}) + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^4}) \\ &\quad + \ln K - a\ln\gamma + a\frac{\ln G(t)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^4}) \\ &= \gamma^2 + \ln K - a\ln\gamma - 2\ln G(t) + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^4}) \\ &= g(\gamma) - 2\ln G(t) + \frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln G(t)}{\gamma^4}). \end{aligned}$$

Portanto, usando a desigualdade acima e a parte (ii) do Lema 4.2 concluímos a prova do lema. ∎

Lema 4.4. *Suponha que g é como no Lema 4.3. Então*

$$\begin{aligned}\frac{2}{g'(\gamma)} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2\gamma^3} + O(\frac{1}{\gamma^4}) \leq y'(t) \leq \frac{1}{\gamma} + \frac{5}{2\gamma^3} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^4})\\ = \frac{2}{g'(\gamma)} + \frac{2}{\gamma^3} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^4}),\end{aligned}$$

para $T_1 \leq t \leq T_5$, onde T_1 é tal que $y(T_1) = r_1$.

Demonstração. Usando o Lema 4.3, para $t \geq T_5$, temos

$$\int_t^{+\infty} e^{g(\gamma)-2\ln G(s)-s}\, ds \leq \int_t^{+\infty} e^{g(y(s))-s}\, ds \leq \int_t^{+\infty} e^{g(\gamma)-2\ln G(s)-s+\frac{\ln^2 G(s)}{\gamma^2}+O(\frac{\ln G(s)}{\gamma^3})}\, ds.$$

Como $y'(t) = \displaystyle\int_t^{+\infty} e^{g(y(s))-s}\, ds$, temos

$$\int_t^{+\infty} e^{g(\gamma)-2\ln G(s)-s}\, ds \leq y'(t) \leq \int_t^{+\infty} e^{g(\gamma)-2\ln G(s)-s+\frac{\ln^2 G(s)}{\gamma^2}+O(\frac{\ln G(s)}{\gamma^3})}\, ds.$$

Fazendo $x = \dfrac{1}{2}g'(\gamma)e^{g(\gamma)-s}$ na desigualdade , obtemos

$$\frac{2}{g'(\gamma)}\int_0^{\frac{1}{2}g(\gamma)e^{g(\gamma)-t}} \frac{1}{1+x^2}\, dx \leq y'(t) \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\int_0^{\frac{1}{2}g(\gamma)e^{g(\gamma)-t}} \frac{e^{\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2}+O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3})}}{(1+x)^2}\, dx. \qquad (4.22)$$

Agora para $t = T_5$ e fazendo a seguinte estimativa da exponencial

$$\begin{aligned}e^{\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2}+O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3})} &= 1 + \frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3}) + \frac{1}{2!}\big(\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3})\big)^2\\ &\quad + \frac{1}{3!}\big(\frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3})\big)^3 + \cdots\\ &= 1 + \frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln(1+x)}{\gamma^3})\\ &= 1 + \frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2} + O(\frac{\ln(\gamma)}{\gamma^3}),\end{aligned}$$

no qual foi usado o fato $\ln G(t) \leq 6\ln\gamma$, para $t = T_5$ e γ suficientemente grande, assim $O(\dfrac{\ln(1+x)}{\gamma^3}) = O(\dfrac{\ln(\gamma)}{\gamma^3})$. Logo, em (4.22), tem-se

$$\frac{2}{g'(\gamma)}\int_0^{(\frac{g'(\gamma)}{2})^5} \frac{1}{1+x^2}\, dx \leq y'(T_5) \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\int_0^{(\frac{g'(\gamma)}{2})^5} \frac{1+O(\frac{\ln\gamma}{\gamma^3})}{1+x}^2 + \frac{\ln^2(1+x)}{\gamma^2(1+x^2)}\, dx. \quad (4.23)$$

As integrais da desigualdade acima podem ser calculadas e estimadas para valores suficientemente grande de $z = (\dfrac{g'(\gamma)}{2})^5$. Assim temos:

a) $\displaystyle\int_0^z \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{z}{1+z} = 1 + O(\frac{1}{z})$.

b) $\displaystyle\int_0^z \frac{\ln^2(1+x)}{(1+x)^2}\,dx = \frac{2z}{1+z} - \frac{2\ln(1+z)}{1+z} - \frac{2\ln^2(1+z)}{1+z} = 2 + O(\frac{\ln^2 z}{z})$.

Lembrando que $g'(\gamma) = \gamma + O(\dfrac{1}{\gamma})$ e usando as estimativas em (4.23), obtemos

$$\frac{2}{g'(\gamma)}\big(1 + O(\frac{1}{\gamma^5})\big) \leq y'(T_5) \leq \frac{2}{g'(\gamma)}\big(1 + \frac{2}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\big). \tag{4.24}$$

Agora estenderemos a estimativa para valores em $T_1 \leq t \leq T_5$. Integrando (4.6) no intervalo $[t, T_5]$, obtemos

$$y'(t) = y'(T_5) + \int_t^{T_5} e^{g(y(s))-s}\,ds. \tag{4.25}$$

Da parte (i) do Lema 3.4, tem-se

$$\ln\big(1 + \frac{1}{2}g'(\gamma)e^{g(\gamma)-t}\big) \leq \frac{1}{2}g'(\gamma)(\gamma - y(t)).$$

Logo,

$$\ln\big(\frac{1 + \frac{1}{2}g'(\gamma)e^{g(\gamma)-t}}{\frac{1}{e^{g(\gamma)-t}} + \frac{1}{2}g'(\gamma)}\big) \leq \frac{1}{2}g'(\gamma)(\gamma - y(t)) - \ln\big(\frac{1}{e^{g(\gamma)-t}} + \frac{1}{2}g'(\gamma)\big).$$

E, portanto,

$$g(y(t)) - t \leq \frac{1}{2}g'(\gamma)(\gamma - y(t)) - \ln\big(\frac{1}{2}g'(\gamma)\big).$$

Defina

$$\psi(y) := \frac{1}{2}g'(\gamma)(\gamma - y(t)) - \ln\big(\frac{1}{2}g'(\gamma)\big).$$

Como $\psi'(y) = g''(y) \geq 0$, temos que ψ é uma função concava entre $y(T_1)$ e $y(T_5)$ e, portanto,

$$\psi(t) \leq \max\{\psi(y(T_1)), \psi(y(T_5))\}, \quad \text{para } T_1 \leq t \leq T_5.$$

Logo,

$$g(y(t)) - t \leq \max\{\psi(y(T_1)), \psi(y(T_5))\}, \quad \text{para } T_1 \leq t \leq T_5. \tag{4.26}$$

Note que,

$$\begin{aligned}\psi(y(T_1)) = \psi(r_1) &= g(r_1) - \frac{r_1}{2}(2\gamma - \frac{a}{\gamma}) - \big(\gamma^2 + \ln(\frac{K}{\gamma^a}) - \frac{\gamma}{2}(2\gamma - \frac{a}{\gamma})\big) - \ln\big(\frac{1}{2}(2\gamma + \frac{a}{\gamma})\big) \\ &= g(r_1) - \frac{r_1}{2}(2\gamma - \frac{a}{\gamma}) - \ln(\frac{K}{\gamma^a}) - \frac{a}{2} - \ln\gamma + O(\frac{1}{\gamma^2}).\end{aligned} \tag{4.27}$$

Por outro lado, pelo Lema 4.3, temos

$$g(y(t)) = g(\gamma) - 2\ln G(t) + O(\frac{ln^2 G(t)}{\gamma^2}). \tag{4.28}$$

Também usando a parte $i)$ do Lema 4.2 e (4.18), temos

$$y(t) = \gamma - \frac{2}{g'(\gamma)}\ln G(t) + O(\frac{\ln^2 G(t)}{\gamma^2}). \tag{4.29}$$

Usando (4.28) e (4.29), resulta

$$\begin{aligned}\psi(y(T_5)) &= g(y(T_5)) - \frac{y(T_5)}{2}(2\gamma - \frac{a}{\gamma}) - \big(\gamma^2 + \ln(\frac{K}{\gamma^a}) - \frac{\gamma}{2}(2\gamma - \frac{a}{\gamma})\big) - \ln\big(\frac{1}{2}(2\gamma + \frac{a}{\gamma})\big) \\ &= g(\gamma) - 2\ln G(T_5) + O(\frac{\ln^2 G(T_5)}{\gamma^2}) - \frac{1}{2}\big(\gamma - \frac{2}{g'(\gamma)}\ln G(T_5) \\ &\quad + O(\frac{\ln^2 G(T_5)}{\gamma^2})\big)(2\gamma - \frac{a}{\gamma}) - \ln(\frac{K}{\gamma^a}) - \frac{a}{2} - \ln\gamma + O(\frac{1}{\gamma^2}) \\ &= -\ln\gamma - \ln\big(1 + (\frac{g'(\gamma)}{2})^5\big) + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}).\end{aligned} \tag{4.30}$$

Portanto para γ suficientemente grande, de (4.27) e (4.30), temos

$$\psi(y(T_1)) \leq \psi(y(T_5)).$$

Usando (4.26), obtemos

$$\begin{aligned}\int_t^{T_5} e^{g(y(s))-s}\,ds \leq e^{\psi(y(T_5))}(T_5 - t) &= e^{-\ln\gamma - \ln\left(1+(\frac{g'(\gamma)}{2})^5\right) + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2})}(T_5 - t) \\ &= e^{-\ln(\gamma(1+\frac{1}{2}(2\gamma-\frac{a}{\gamma})^5)) + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2})}(T_5 - t) \\ &= e^{-c\gamma^6}(T_5 - t) = \frac{c}{\gamma^6}(T_5 - t) \leq \frac{c}{\gamma^6}(T_5 - T_1).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Pelo Teorema do valor médio, existe θ com $T_1 \leq \theta \leq T_5$, e usando o fato que y' é decrescente, temos

$$\frac{T_5 - T_1}{y(T_5) - y(T_1)} = \frac{1}{y'(\theta)} \leq \frac{1}{y'(T_5)}.$$

Como $y(T_1) \geq 0$,

$$T_5 - T_1 \leq \frac{y(T_5) - y(T_1)}{y'(T_5)} \leq \frac{y(T_5)}{y'(T_5)} \leq \frac{\gamma}{y'(T_5)}.$$

Usando a primeira desigualdade de (4.24), temos

$$T_5 - T_1 \leq \frac{\gamma}{y'(T_5)} \leq \frac{g'(\gamma)\gamma}{2(1 + O(\frac{1}{\gamma^5}))} = \frac{2\gamma^2 - a}{2(1 + O(\frac{1}{\gamma^5}))} = O(\gamma^2).$$

E, portanto, substituindo em (4.31) e logo usando (4.24), temos

$$y'(T_5) \leq y'(t) \leq y'(T_5) + O(\frac{1}{\gamma^4}), \quad \text{para } T_1 \leq t \leq T_5.$$

Combinando a desigualdade anterior e (4.24), concluímos a prova do lema. ∎

Lema 4.5. *Seja g como no Lema 4.3. Então*

$$T_1 = r_1\gamma + [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma}),$$

onde $[b, c]$ denota uma estimativa superior é inferior, isto é $w = [a, b] \Leftrightarrow a \leq w \leq b$.

Demonstração. Existe θ tal que $T_1 \leq \theta \leq T_5$, satisfaz

$$T_1 = T_5 - \frac{y(T_5) - y(T_1)}{y'(\theta)}. \tag{4.32}$$

Do Lema 4.4, temos a seguinte estimativa

$$y'(\theta) = \frac{1}{\gamma}\big(1 + \frac{1}{\gamma^2}[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}] + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\big).$$

Também

$$\begin{aligned} y'(T_5) &= \gamma - \frac{1}{\gamma}\big(1 + \frac{a}{2\gamma^2} + O(\frac{1}{\gamma^5})\big)\ln G(1 + (\frac{g'(\gamma)}{2})^5) + O(\frac{\ln 1 + (\frac{g'(\gamma)}{2})^5}{\gamma^3}) \\ &= \gamma - \frac{1}{\gamma}\ln(\frac{g'(\gamma)}{2})^5 + O(\frac{\ln(\frac{g'(\gamma)}{2})^5}{\gamma^3}). \end{aligned}$$

Substituindo em (4.32), temos

$$
\begin{aligned}
T_1 &= g(\gamma) - 4\ln\frac{g'(\gamma)}{2} - \frac{\gamma - \frac{1}{\gamma}\ln(\frac{g'(\gamma)}{2})^5 + O(\frac{\ln(\frac{g'(\gamma)}{2})^5}{\gamma^3}) - r_1}{\frac{1}{\gamma}\big(1+\frac{1}{\gamma^2}[\frac{1}{2},\frac{5}{2}] + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\big)} \\
&= g(\gamma) - 4\ln\frac{g'(\gamma)}{2} - \gamma\Big(\gamma - \frac{5}{\gamma}\ln(\frac{g'(\gamma)}{2}) + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3}) - r_1\Big) \\
&\times\Big(1 - \frac{[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]}{\gamma^2} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^3})\Big) \\
&= g(\gamma) - \gamma^2 + \ln(\frac{g'\gamma)}{2} + r_1\gamma + [\frac{1}{2},\frac{5}{2}] + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma}) \\
&= r_1\gamma + [\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma}).
\end{aligned}
$$

■

4.3 Demonstrações dos Teoremas

Teorema 4.6. *Suponha que $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisfaz as condições (A_1) e (A_2). Então o primeiro zero $T(\gamma)$ (desde $+\infty$) da solução y_γ de (4.7) satisfaz:*

i) Se $a>1$, então $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) = -\infty$.

ii) Se $a=1$, então $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) \in [\frac{1}{2}+\ln K, \frac{5}{2}+\ln K]$.

iii) Se $a<1$, então $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) = +\infty$.

Demonstração. Escrevemos $O_+(1) = f_0$ se a função f_0 for limitada superiormente por uma constante positiva. Note que $f(y)$ é limitada superiormente em qualquer intervalo da forma $[0,y_0]$, pois basta considerar $O_+(1) = \sup_{0\le s\le y_0}|f(s)|$. Assim integrando a equação (4.6), no intervalo $[t,t_3]$ com t_3 tal que $y(t_3)\le y_0\le r_1$, temos

$$-\big(y'(t_3)-y'(t)\big) = -O_+(1)\big(e^{-t_3}-e^{-t}\big). \tag{4.33}$$

Em particular para $t=t_2$, com $t_2<t_3$,

$$-\big(y'(t_3)-y'(t_2)\big) = -O_+(1)\big(e^{-t_3}-e^{-t_2}\big). \tag{4.34}$$

Integrando a (4.33) com relação a t em $[t_2,t_3]$, temos

$$y'(t_3)(t_3-t_2) - (y(t_3)-y(t_2)) = O_+(1)\big(e^{-t_3}(t_3-t_2)+e^{-t_3}-e^{-t_2}\big).$$

Então

$$y(t_3) - y(t_2) = y'(t_3)(t_3 - t_2) + O_+(1)\big(e^{-t_2} - e^{-t_3}(1 + t_3 - t_2)\big).$$

Note que,

$$O_+(1)\big(e^{-t_2} - e^{-t_3}(1 + t_3 - t_2)\big) = O_+(1)e^{-t_2}\big(1 - e^{t_2 - t_3}(1 + t_3 - t_2)\big) = O_+(1)e^{-t_2},$$

pois $1 - e^{t_2 - t_3}(1 + t_3 - t_2) \leq 1$. Logo,

$$y(t_3) - y(t_2) = y'(t_3)(t_3 - t_2) + O_+(1)e^{-t_2}. \tag{4.35}$$

Note que, esta estimativa pode ser melhorada usando a condição (A_2), pois

$$f(s) = h(s)e^{s^2} \leq cKe^{r_1^2}s^{1+\sigma}, \quad \text{se } 0 \leq s \leq r_1.$$

Desse modo, podemos considerar $O_+(1) = O(y_0^{1+\sigma})$. E, portanto,

$$y(t_3) - y(t_2) = y'(t_3)(t_3 - t_2) + O(y_0^{1+\sigma})e^{-t_2}. \tag{4.36}$$

Usando (4.35), com $t_2 = T(\gamma)$ e $t_3 = T_1$, temos

$$y(T_1) - y(T(\gamma)) = y'(T_1)\big(T_1 - T(\gamma)\big) + O_+(1)e^{-T(\gamma)}. \tag{4.37}$$

Lembrando que, $y(T_1) = r_1$ e $y(T(\gamma)) = 0$. Além disso, pelo Lema 4.4, temos $y'(T_1) = \dfrac{1}{\gamma} + O(\dfrac{1}{\gamma^3})$ e pelo Lema 4.5, temos $T_1 = r_1\gamma - (a-1)\ln\gamma + O(1)$. Substituindo em (4.37), temos

$$\begin{aligned}
r_1 &= \big(\frac{1}{\gamma} - O(\frac{1}{\gamma^3})\big)\big(r_1\gamma - (a-1)\ln\gamma + O(1) - T(\gamma)\big) + O_+(1)e^{-T(\gamma)} \\
&= r_1 - (a-1)\frac{\ln\gamma}{\gamma} - \frac{T(\gamma)}{\gamma} + \frac{O(1)}{\gamma} + O_+(1)e^{-T(\gamma)} + r_1 O(\frac{1}{\gamma}) \\
&\quad - (a-1)\ln\gamma O(\frac{1}{\gamma^3}) + O(\frac{1}{\gamma^3}) - T(\gamma)O(\frac{1}{\gamma^3}) \\
&= r_1 - (a-1)\frac{\ln\gamma}{\gamma} - \frac{T(\gamma)}{\gamma} + \frac{O(1)}{\gamma} + O_+(1)e^{-T(\gamma)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{T(\gamma)}{\gamma} = -(a-1)\frac{\ln\gamma}{\gamma} + \frac{O(1)}{\gamma} + O_+(1)e^{-T(\gamma)}.$$

Portanto,

$$T(\gamma) = -(a-1)\ln\gamma + O(1) + O_+(1)\gamma e^{-T(\gamma)}. \tag{4.38}$$

Prova de iii) Suponha que $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) \neq +\infty$, então existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que $T(\gamma) \leq c_1,$ para todo $\gamma > 0.$
Logo, usando (4.38), temos

$$-(a-1)\ln\gamma + O(1) + O_{+}(1)\gamma e^{-T(\gamma)} \leq c_1.$$

Como $e^{-c_1} \leq e^{-T(\gamma)}$, temos

$$-(a-1)\ln\gamma + O(1) + O_{+}(1)\gamma e^{-c_1} \leq c_1.$$

Fazendo $\gamma \to +\infty$ na desigualdade acima e dado que $a < 1$, temos que $+\infty \leq c_1$, o qual é uma contradição. Portanto, se $a < 1$, temos que $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) = +\infty.$

Para provar $i)$ e $ii)$ precisaremos das seguintes afirmações.
Afirmação 1: Existe γ_0 tal que

$$T(\gamma) < 4\ln\gamma, \text{ se } \gamma \geq \gamma_0,$$

além disso, se $a = 1$, existe $c_2 > 0$, tal que $-c_2 \leq T(\gamma)$, para todo $\gamma \geq \gamma_0$.
De fato, suponha por contradição que $4\ln\gamma \leq T(\gamma),$ para todo $\gamma \in \mathbb{R}.$ Portanto, $e^{-T(\gamma)} \leq e^{-4\ln\gamma} = \dfrac{1}{\gamma^4}$ e , portanto, substituindo em (4.38), temos

$$4\ln\gamma \leq T(\gamma) \leq -(a-1)\ln\gamma + O(1) + O_{+}(1)\frac{1}{\gamma^3}.$$

Fazendo $\gamma \to +\infty$ e usando o fato que $a \geq 1$, temos uma contradição.
Portando, existe γ_0 tal que $T(\gamma) < 4\ln\gamma,$ para todo $\gamma \geq \gamma_0,$

No caso que $a = 1$ em (4.38), temos

$$T(\gamma) = O(1) + O_{+}(1)\gamma e^{-T(\gamma)}.$$

Usando a primeira parte da Afirmação 1, temos $e^{-T(\gamma)} \geq e^{-4\ln\gamma} = \dfrac{1}{\gamma^4}$, e assim

$$T(\gamma) \geq O(1) + O_{+}(1)\frac{1}{\gamma},$$

donde concluímos a prova.
Afirmação 2:

$$y'(4\ln\gamma) = y'(T_1) + O(\frac{1}{\gamma^4}).$$

De fato, pelo Lema 4.5, $T_1 = r_1\gamma - (a-1)\gamma + O(1)$. Logo, para γ suficientemente grande, temos

$$4\ln\gamma < T_1 = r_1\gamma - (a-1)\gamma + O(1).$$

Usando (4.34), com $t_3 = T_1$ e $t_2 = 4\ln\gamma$, temos

$$y'(T_1) - y'(4\ln\gamma) = O_+(1)\big(e^{-T_1} - e^{-4\ln\gamma}\big).$$

Logo,

$$y'(T_1) = y'(4\ln\gamma) + O_+(1)e^{-r_1\gamma+(a-1)\gamma+O(1)} + O(\frac{1}{\gamma^4}).$$

donde concluímos a prova, notando que $O_+(1)e^{-r_1\gamma+(a-1)\gamma+O(1)} = O(\frac{1}{\gamma^4})$.

Afirmação 3:

$$y(4\ln\gamma) = \frac{4\ln\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\big([\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K\big) + O(\frac{\ln^2}{\gamma^2\gamma}).$$

De fato, usando (4.35) com $t_3 = T_1$ e $t_2 = 4\ln\gamma$, temos

$$y(T_1) - y(4\ln\gamma) = y'(T_1)\big(T_1 - 4\ln\gamma\big) + O_+(1)e^{-4\ln\gamma}.$$

Usando as estimativas dos Lemas 4.4 e 4.5, obtemos

$$\begin{aligned} r_1 - y(4\ln\gamma) &= \big(\frac{1}{\gamma} + O(\frac{1}{\gamma^3})\big)\big([\frac{1}{2},\frac{5}{2}] + r_1\gamma - (a-1)\ln\gamma + \ln K + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma}) - 4\ln\gamma\big) \\ &\quad + O(1)\frac{1}{\gamma^4} \\ &= r_1 + \frac{1}{\gamma}\big([\frac{1}{2},\frac{5}{2}] - (a-1)\ln\gamma + \ln K\big) - \frac{4\ln\gamma}{\gamma} + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma^2}). \end{aligned}$$

Donde concluímos a prova da afirmação.

Usando (4.36) com $t_3 = 4\ln\gamma$ e $t_2 = T(\gamma)$, temos

$$y(4\ln\gamma) - y(T(\gamma)) = y'(4\ln\gamma)\big(4\ln\gamma - T(\gamma)\big) + O\big((\frac{\ln\gamma}{\gamma})^{1+\gamma}\big)e^{-T(\gamma)}$$

Usando as Afirmações 2 e 3, temos

$$\frac{4\ln\gamma}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}\big([\frac{1}{2},\frac{5}{2}] + r_1\gamma - (a-1)\ln\gamma + \ln K\big) + O(\frac{\ln^2\gamma}{\gamma})$$

$$= \big(\frac{1}{\gamma}+O(\frac{1}{\gamma^3})\big)\big(4\ln\gamma - T(\gamma)\big) + O\big((\frac{\ln\gamma}{\gamma})^{1+\sigma}\big)e^{-T(\gamma)}.$$

Portanto,

$$T(\gamma)\big(1+O(\frac{1}{\gamma^2})\big) = [\frac{1}{2},\frac{5}{2}] + r_1\gamma - (a-1)\ln\gamma + \ln K + O(\frac{\ln^{1+\sigma}\gamma}{\gamma^\sigma})e^{-T(\gamma)}. \tag{4.39}$$

Prova de i) Suponha que $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) \neq -\infty$, então existe uma constante $c_3 > 0$ tal que $T(\gamma) \geq -c_3$, para todo $\gamma \in \mathbb{R}$, logo, $e^{-T(\gamma)} \leq e^{c_3}$. Usando (4.39), temos

$$T(\gamma)\big(1+O(\frac{1}{\gamma^2})\big) \leq O(1) - (a-1)\ln\gamma + O(\frac{\ln^{1+\sigma}\gamma}{\gamma^\sigma})e^{c_3}.$$

Fazendo $\gamma \to +\infty$ e usando o fato que $a > 1$ temos que $-c_3 \leq -\infty$, o qual é uma contradição.
Prova de ii) Usando (4.39), para $a = 1$, temos

$$T(\gamma)\big(1+O(\frac{1}{\gamma^2})\big) = [\frac{1}{2},\frac{5}{2}] + r_1\gamma + \ln K + O(\frac{\ln^{1+\sigma}\gamma}{\gamma^\sigma})e^{-T(\gamma)}.$$

Da Afirmação 1, temos que $T(\gamma) \geq -c_2$ assim, $e^{-T(\gamma)} \leq e^{c_2}$.
Então fazendo $\gamma \to +\infty$, temos

$$T(\gamma) = [\frac{1}{2}+\ln K, \frac{5}{2}+\ln K].$$

■

Finalmente , provaremos o resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.7. *Suponha que $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ satisfaz as condições (A_1) e (A_2), $\Omega = B_1(0)$ e $\alpha_0 = 1$ na equação (4.2). Então:*

1) *Se $a < 1$, então a equação (4.2) possui uma solução radial positiva.*

2) *Se $a = 1$, então a equação (4.2) possui uma solução radial positiva para $K > K_1 = \dfrac{4}{e^{1/2}}$, e existe uma constante K_0 com $0 < K_0 \leq K_1$ tal que a equação (4.2) não possui solução radial para $0 < K < K_0$*

3) *Se $a > 1$, existe K_2 tal que se $0 < K \leq K_2$ então a equação (4.2) não possui solução radial e se $K > K_2$ então a equação (4.2) possui duas soluções radiais.*

Demonstração. Iniciamos a prova do teorema com a seguinte afirmação.

Afirmação I.

$$\lim_{\gamma\to 0^+} T(\gamma) = -\infty.$$

De fato, usando (4.36) para $t_2 = T(\gamma)$, $t_3 = +\infty$ e $y_0 = \gamma$ com $\gamma \leq r_1$, temos

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) - y(T(\gamma)) = \lim_{t\to+\infty} y'(t)(t - T(\gamma)) + O(\gamma^{1+\sigma})e^{T(\gamma)}.$$

Portanto, $\gamma = \lim_{t\to+\infty} y'(t)t + O(\gamma^{1+\sigma})e^{T(\gamma)}$, logo usando a relações $t = -2\ln\frac{r}{2}$, $y(t) = U(r)$, $U(1) = 0$ e $U'(0) = 0$, tem-se $\lim_{t\to+\infty} y'(t)t = 0$, portanto $\gamma = O(\gamma^{1+\sigma})e^{-T(\gamma)}$, então $e^{T(\gamma)} = O(\gamma^\sigma)$. Logo $\lim_{\gamma\to 0^+} e^{T(\gamma)} = \lim_{\gamma\to 0^+} O(\gamma^\sigma) = 0$, donde temos a afirmação.

Como $t = -2\ln(\frac{r}{2})$ e $U(r) = y(t,\gamma)$, então $R(\gamma) = 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}}$, logo pela Afirmação I, tem-se

$$\lim_{\gamma\to 0^+} R(\gamma) = +\infty. \tag{4.40}$$

a) Pela parte $iii)$ do Teorema 4.6 temos que $\lim_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) = +\infty$. Portanto

$$\lim_{\gamma\to+\infty} R(\gamma) = \lim_{\gamma\to+\infty} 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}} = 0$$

De (4.40) e do Lema 4.1, existe $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ tal que $R(\gamma_0) = 1$. Portanto, $U(r,\gamma_0)$ é solução radial de (4.2).

b) Pelo Lema 4.1 para que exista solução do problema (4.2) é suficiente que

$$\lim_{\gamma\to+\infty} R(\gamma) = \lim_{\gamma\to+\infty} 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}} < 1.$$

Isto quer dizer, que é necessário

$$\lim_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) > \ln 4.$$

Logo, pela parte $ii)$ do Teorema 4.6 , temos que é suficiente que $e^{1/2}K > 4$ e, portanto, existira solução do problema (4.2) se $K > K_1 = \frac{4}{e^{1/2}}$.

Por outro lado, pela parte $ii)$ do Teorema 4.6, temos que $\lim_{\gamma\to+\infty} T(\gamma) \leq \frac{5}{2} + \ln K$, logo, existe uma constante $c > 0$ tal que $T(\gamma) \leq c$, para todo $\gamma > 0$ e, por tanto,

$$R(\gamma) = 2e^{-\frac{T(\gamma)}{2}} \geq 2e^{-\frac{c}{2}}, \quad \text{para todo } \gamma > 0. \tag{4.41}$$

Note que, como R depende também da constante K nas condições (A_1) e

(A_2) (assumindo que as demais constantes continuam fixas) Portanto, podemos escrever $R = R(\gamma, K)$.
Afirmação II.

$$R(\gamma, \frac{K}{d}) = \sqrt{d}R(\gamma, K), \quad \forall \gamma > 0. \tag{4.42}$$

De fato, fazendo a mudança de variável $s = t - \ln d$ e seja $w(s) = u(t)$, temos

$$-w''(s) = -y''(t) = h(y)e^{y^2-t} = h(w)e^{w^2-(s+\ln d)}.$$

Assim,

$$-w'' = \frac{1}{d}h(w)e^{w^2-s}.$$

Seja $S(\gamma)$ o primeiro zero (desde $+\infty$) de $w(s)$ logo, $S(\gamma) = T(\gamma) - \ln d,\ \forall \gamma > 0$, além disso $\dfrac{h(r)}{d}$ satisfaz as condições (A_1) e (A_2) com $\tilde{K} = \dfrac{K}{d}$ e, portanto,

$$R(\gamma, \frac{K}{d}) = 2e^{-\frac{S(\gamma)}{2}} = 2e^{-\frac{T(\gamma)-\ln d}{2}} = \sqrt{d}R(\gamma, K).$$

Escolha $d_0 > \dfrac{e^c}{4}$ logo, de (4.41) e (4.42), temos

$$R(\gamma, \frac{K}{d_0}) = \sqrt{d_0}R(\gamma, K) > (\frac{e^{c/2}}{2})(\frac{2}{e^{c/2}}) = 1.$$

Note que, para $d_1 > d_2$,

$$R(\gamma, \frac{K}{d_1}) = \sqrt{d_1}R(\gamma, K) > \sqrt{d_2}R(\gamma, K) = R(\gamma, \frac{K}{d_2}).$$

Em particular, temos que R é uma função decrescente na segunda variável.

Logo, para cada $\tilde{K}$ tal que $0 < \tilde{K} \leq K_0 = \dfrac{K}{d_0}$, temos

$$R(\gamma, \tilde{K}) > 1.$$

Isto, é que o primeiro zero de $U(r)$ é maior que 1 para todo $\gamma > 0$, donde temos que não existe solução radial de (4.2) se $0 < \tilde{K} \leq K_0 = \dfrac{K}{d_0}$.

c) Neste caso, pela parte $i)$ do Teorema 4.6, temos $\lim\limits_{\gamma \to +\infty} T(\gamma) = -\infty$. Logo, para qualquer $K > 0$ fixado, existe $c > 0$, tal que $T(\gamma) \leq c$, para todo $\gamma > 0$.

Considere $K = 1$ e seja $c_1 = \sup\limits_{\gamma > 0} T(\gamma)$, logo como na parte $b)$ existe $d_1 = \dfrac{e^{c_1}}{4}$ tal

que
$$R(\gamma, \frac{1}{d_1}) \geq 1, \quad \forall \gamma > 0.$$
Seja $K_2 = \dfrac{1}{d_1}$, como R é decrescente na segunda variável, então
$$R(\gamma, K) > 1, \quad \text{para todo } \gamma > 0, \quad \text{se } 0 < K < K_2.$$
Portanto, não existe solução radial de (4.2).

Por outro lado, como $c_1 = \sup_{\gamma>0} T(\gamma, 1)$ e $R(\gamma, K) = 2e^{-\frac{T(\gamma,K)}{2}}$, temos
$$\min_{\gamma>0} R(\gamma, 1) = \frac{2}{e^{c_1/2}} = \frac{1}{\sqrt{d_1}} = \sqrt{K_2}.$$
Logo, se $K > K_2$
$$\min_{\gamma>0} R(\gamma, K) = \min_{\gamma>0} R(\gamma, 1)\frac{1}{\sqrt{K}} = \sqrt{\frac{K_2}{K}} < 1.$$
Seja $\gamma_0 > 0$ tal que $R(\gamma_0, K) < 1$. Além disso de (4.40) e $\lim\limits_{\gamma\to+\infty} R(\gamma) = +\infty$, existem $\gamma_1 < \gamma_0 < \gamma_2$ tais que $R(\gamma_1, K) > 1$ e $R(\gamma_2, K) > 1$, usando o Lema 4.1, existem $\gamma_3 < \gamma_0 < \gamma_4$ tais que
$$R(\gamma_3, K) = R(\gamma_4, K) = 1.$$
Isto é, temos duas soluções radias para o problema (4.2).

■

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados Básicos

Neste apêndice são apresentados resultados básicos que são utilizados no desenvolvimento deste trabalho. Embora sejam omitidas as demonstração desses resultados, são citadas referências que as contém.

Teorema A.1. ***(Desigualdade de Hölder)*** *[5, Theorem 4.6] Sejam* Ω *um domínio de* $\mathbb{R}^N$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $1 \leq q \leq \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Se* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$*, então*

$$fg \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema A.2. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *[5, Theorem 4.2] Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(\Omega)$ *que satisfaz:*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *q.t.p. em* Ω*,*

(ii) Existe uma função $h \in L^1(\Omega)$*, tal que para todo* $n \geq 1$*, verifica-se* $|f_n(x)| \leq h(x)$ *q.t.p. em* Ω*.*

Então,

$$f \in L^1(\Omega) \quad e \quad \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Teorema A.3. *[5, Theorem 4.9] Sejam* $1 \leq p \leq \infty$*,* $\{u_n\}$ *uma sequência em* $L^p(\Omega)$ *e* $u \in L^p(\Omega)$*, tais que* $u_n \longrightarrow u$ *em* $L^p(\Omega)$*. Então, existe uma subsequência* $\{u_{n_k}\} \subseteq \{u_n\}$ *, satisfazendo:* $u_{n_k}(x) \longrightarrow u(x)$ *q.t.p. em* Ω*,*

A.1 Os Espaços de Sobolev

Definição A.4. *Sejam $u, v \in L^1_{Loc}(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Dizemos que v é α-derivada fraca de u e escrevemos $D^\alpha u = v$, desde que*

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi \, dx, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

com $D^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$

Definição A.5. *Sejam $p \in [1, \infty]$, k um inteiro positivo e Ω um aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ com } |\alpha| \leq k\}.$$

Observe que na definição de $W^{k,p}(\Omega)$ a derivada considerada é a derivada fraca. Assim, dizer que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ significa que existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u = v_\alpha$ no sentido fraco.

Definição A.6. *Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definimos sua norma como sendo*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty \\ \displaystyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & , \quad p = \infty. \end{cases}$$

Se $p = 2$ e $k = 1$ escreveremos

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Teorema A.7. ***(Desigualdade geral de Sobolev)*** *[1, Theorem 4.12] Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto limitado regular. Então as imersões abaixo são contínuas:*

(i) Se $kp < N$ então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q \leq \frac{pN}{N-kp}$.

(ii) Se $kp = N$ e $p > 1$ então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para todo $1 \leq q < \infty$.

Teorema A.8. ***(Imersões Compactas: Rellich-Kondrachov)*** *[1, Theorem 6.3] Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ um aberto limitado regular. Então, as seguintes imersões são compactas:*

(i) Se $kp < N$ então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \frac{pN}{N-kp}$.

(ii) Se $kp = N$ e $p > 1$ então $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $1 \leq q < \infty$.

A.2 O Teorema do Passo da Montanha

Uma das principais ferramentas empregadas para estudar a existência de soluções de problemas elípticos semilineares é a teoria de pontos críticos. Um dos resultados principais desta teoria é o Teorema do Passo da Montanha de Ambrosetti e Rabinowitz. Este teorema garante, sob hipóteses adequadas, a existência de pontos críticos minimax para funcionais $\phi : X \to \mathbb{R}$ onde X é um espaço de Banach real. O Teorema do Passo da Montanha envolve uma condição técnica, a condição de Palais-Smale.

Definição A.9. *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$ onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X e $u \in U$. Dizemos que φ é Gâteaux-diferenciável em u se existe $A \in X^*$, tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi(u+tv) - \varphi(u)}{t} = Av, \quad \forall\, v \in X.$$

O operador A é chamado a derivada de Gâteaux de φ em u e é denotado por $\varphi'(u)$.

Definição A.10. *Seja $\varphi : U \to \mathbb{R}$ onde U é um subconjunto aberto de um espaço de Banach X e $u \in U$. Dizemos que φ é Fréchet-diferenciável em u se existe $A \in X^*$, tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\varphi(u+h) - \varphi(u) - Ah|}{\|h\|} = 0.$$

O operador A é chamado a derivada de Fréchet de φ em u e é denotado por $D\varphi(u)$.

Observação: operador adjunto. Sejam E e F espaços normados e $T : E \to F$ um operador linear contínuo. O operador adjunto de T, representado por T^* é o operador $T^* : F^* \to E^*$ definido por $T^*\phi := \phi \circ T$ para $\phi \in F^*$. Tem-se então que T^* é também um operador linear contínuo.

Proposição A.11. *[14, Proposition 1.3] Suponha que $\varphi : U \to \mathbb{R}$ tenha derivada de Gâteaux em todo ponto de U e que $\varphi' : U \to X^*$ seja contínua (isto é, φ tem derivada de Gâteaux contínua em U). Então φ é Fréchet-diferenciável em U e $D\varphi = \varphi'$. Em particular, $D\varphi : U \to X^*$ é contínua, isto é, φ tem derivada de Fréchet contínua em U (o que é denotado $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$).*

Definição A.12. *Seja X um espaço de Banach real e $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional. Diz-se que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ (denotada por $(PS)_c$) se toda sequência $(u_n) \subseteq X$ para a qual $\phi(u_n) \longrightarrow c$ e $\phi'(u_n) \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$, possui uma subsequência convergente. Diz-se que ϕ satisfaz a condição (PS) quando ϕ satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Teorema A.13. *(**Teorema do Passo da Montanha**) [4] Sejam X um espaço de Banach e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ um funcional. Suponha que ϕ satisfaz a condição (PS), $\phi(0) = 0$ e*

i) existem $a > 0$ e $\rho > 0$, tais que

$$\phi(u) \geq a, \quad \text{se } \|u\| = \rho, \ u \in W,$$

ii) existe $e \in X$, $\|e\| > \rho$, tal que $\phi(e) \leq 0$.

Então ϕ possui um valor crítico $c \geq a$ que pode ser caracterizado como

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \phi(\gamma(t))$$

onde,

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X); \gamma(0) = 0 \ \ e \ \ \gamma(1) = e\}.$$

Teorema A.14. *[4] Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita com $X = V \oplus W$, $\dim(V) < +\infty$ e $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ é um funcional par, $\phi(0) = 0$ e satisfaz a condição (PS). Além disso, suponha que ϕ satisfaz*

i') existem $a > 0$ e $\rho > 0$ tais que:

$$\phi(u) \geq a, \quad \text{se } u \in W \text{ e } \|u\| = \rho,$$

ii') para cada subespaço $\tilde{X}$ de X de dimensão finita, existe $R = R(\tilde{X}) > 0$ tal que $\phi(u) \leq 0$ se $\|u\| > R$ e $u \in \tilde{X}$.

Então ϕ possui uma infinidade de valores críticos.

Teorema A.15. *(**Teorema do Passo da Montanha Generalizado**) [4] Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita, com $X = V \oplus W$, $\dim(V) < +\infty$. Suponha $\phi \in \mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição (PS) e*

i) existem $a > 0$ e $\rho > 0$ tais que $\phi(u) \geq a, \quad$ se $\|u\| = \rho, \ u \in W$,

ii) existe $e \in W$, $\|e\| = 1$, e existe $R > \rho$, tal que se

$$Q = \left(\overline{B_R} \cap V\right) \oplus \{re : 0 < r < R\}.$$

Então,

$$\phi(u) \leq 0, \quad \forall u \in \partial Q.$$

Então ϕ *possui um valor crítico em* $c \geq a$*, com*

$$c = \inf_{h \in \Gamma} \sup_{u \in \overline{Q}} \phi(h(u))$$

onde,

$$\Gamma = \{h \in \mathcal{C}(\overline{Q}, X); h = Id, \ \textit{em } \partial Q\}.$$

Apêndice

$\mathcal{B}$

Resultados técnicos

Nesta parte do apêndice estão apresentados alguns resultados técnicos utilizados nesta dissertação.

Lema B.1. *Sejam $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tais que $|\Omega| < \infty$. Se $0 \leq k < N$, então*

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^k}\, dx \leq C(k,N)\frac{|\Omega|^{1-\frac{k}{N}}}{N-k}.$$

Demonstração. Seja $B_r(\xi) \subset \mathbb{R}^N$ a bola tal que $|B_r(\xi)| = |\Omega|$. Note que, para cada $x \in \Omega \backslash B_r(\xi)$ e $y \in B_r(\xi)\backslash\Omega$, temos $\dfrac{1}{|x-\xi|^k} \leq \dfrac{1}{|y-\xi|^k}$ e como $|\Omega\backslash B_r(\xi)| = |B_r(\xi)\backslash\Omega|$, segue-se que

$$\int_{\Omega\backslash B_r(\xi)} \frac{1}{|x-\xi|^k}\, dx \leq \int_{B_r(\xi)\backslash\Omega} \frac{1}{|y-\xi|^k}\, dy.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^k}\, dx &= \int_{\Omega\cap B_r(\xi)} \frac{1}{|x-\xi|^k}\, dx + \int_{\Omega\backslash B_r(\xi)} \frac{1}{|x-\xi|^k}\, dx \\ &\leq \int_{\Omega\cap B_r(\xi)} \frac{1}{|y-\xi|^k}\, dy + \int_{B_r(\xi)\backslash\Omega} \frac{1}{|y-\xi|^k}\, dy \\ &= \int_{B_r(\xi)} \frac{1}{|y-\xi|^k}\, dy = \frac{\omega_N r^{N-k}}{N-k}.\end{aligned}$$

Onde ω_N é a medida da bola unitária dimensional. Como $\omega_N r^N = |B_r(\xi)| = |\Omega|$. E, portanto,

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^k}\, dx \leq \omega_N^{k/N}\frac{|\Omega|^{1-k/N}}{N-k}.$$

■

Lema B.2. *A aplicação:*

$$\begin{array}{rcl}\gamma \ : L^1(\Omega) & \to & L^1(\Omega)\\ f & \mapsto & \gamma(f)(x) = \displaystyle\int_\Omega \frac{|f(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi,\end{array}$$

é lipschitziana e, portanto, contínua.

Demonstração. Do Lema B.1, existe uma constante $C_0 > 0$, tal que para todo $\xi \in \Omega$, tem-se

$$\int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}}\, dx \leq C_0|\Omega|^{\frac{1}{N}}.$$

Dados $f, g \in L^1(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}\|\gamma(f)-\gamma(g)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \int_\Omega\int_\Omega \frac{|f(\xi)-g(\xi)|}{|x-\xi|^{N-1}}\, d\xi dx = \int_\Omega |f(\xi)-g(\xi)| \int_\Omega \frac{1}{|x-\xi|^{N-1}}\, dx d\xi\\ &\leq C_0|\Omega|^{\frac{1}{N}} \int_\Omega |f(\xi)-g(\xi)|\, d\xi = C_0|\Omega|^{\frac{1}{N}}\|f-g\|_{L^1(\Omega)},\end{aligned}$$

de onde segue o lema. ■

Lema B.3. *Dado $n \geq 2$, tem-se as seguintes desigualdades*

(i) $(a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b + (n-1)a^{n-2}b^2$, *se* $a \geq 0, a+b \geq 0$.

(ii) $a^n + na^{n-1}b + b^n \leq (a+b)^n \leq a^n + C_7(a^{n-1}b + b^n)$, *se* $a, b \geq 0,\ C_7 = C_7(n)$.

Demonstração. Usando a identidade $F(1) = F(0) + F'(0) + \displaystyle\int_0^1 F'(x)(1-x)\, dx$, para $F(x) = (a+bx)^n$, temos

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)b^2 \int_0^1 (a+bx)^{n-2}(1-x)\, dx. \tag{B.1}$$

(i) Note que, se $a+b \geq 0$ e $0 \leq x \leq 1$, então $a + xb = (1-x)a + x(a+b) \geq (1-x)a$, como $a \geq 0$, temos

$$\int_0^1 (a+bx)^{n-2}(1-x)\, dx \geq a^{n-2}\int_0^1 (1-x)^{n-1}\, dx \geq \frac{a^{n-2}}{n} \geq 0.$$

Substituindo em (B.1) temos a desigualdade (i).

(ii) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a + xb \geq 0$, logo

$$\int_0^1 (a+bx)^{n-2}(1-x)\,dx \geq b^{n-2}\int_0^1 x^{n-2}(1-x)\,dx = \frac{b^{n-2}}{n(n-1)}.$$

Substituindo em (B.1) temos a primeira desigualdade de (ii).

Note que, a segunda desigualdade de (ii) é valida para $a = 0$, por outro lado, para cada $z > 0$

$$\frac{(1+z)^n - 1}{z + z^n} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{z^j}{z+z^n} \leq \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} = 2^n - 1 = C_7(n).$$

E, portanto, $(1+z)^n \leq 1 + C_7(z + z^n)$, para todo $z > 0$, então basta tomar $z = \dfrac{b}{a}$, no caso $a \neq 0$ para obter a segunda desigualdade de (ii).

■

Lema B.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitado e $\{u_n\}$ uma sequência em $L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$ e suponha que as sequências $\{f(x,u_n)\}$ e $\{f(x,u)\}$ estão em $L^1(\Omega)$ para a função contínua $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Além disso, suponha que existe $C > 0$ tal que $\displaystyle\int_\Omega |f(x,u_n)u_n|\,dx \leq C$. Então $f(x,u_n) \to f(x,u), \quad$ em $L^1(\Omega)$.*

Demonstração. Tome $\epsilon > 0$ arbitrário, como $f(x,u) \in L^1(\Omega)$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\int_A |f(x,u)|\,dx < \epsilon, \quad \text{se } |A| < \delta, \tag{B.2}$$

para qualquer conjunto A mensurável em Ω.
Defina $\Omega_n = \{x \in \Omega : |u(x)| \geq n\}$, como $u \in L^1(\Omega)$, então

$$n|\Omega_n| = \int_{\Omega_n} n\,dx \leq \int_{\Omega_n} |u(x)|\,dx \leq \int_\Omega |u(x)|\,dx < +\infty.$$

Donde $\lim\limits_{n\to\infty} |\Omega_n| = 0$, então existe $M_1 > 0$ tal que

$$|\{x \in \Omega : |u(x)| > M_1\}| < \delta.$$

Logo, para $M = \max\{M_1, \dfrac{C}{\epsilon}\}$

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega |f(x,u_n)| - |f(x,u)|\,dx\Big| &= \Big|\int_{\{|u_n|\geq M\}} |f(x,u_n)|\,dx + \int_{\{|u_n|<M\}} |f(x,u_n)|\,dx \\ &\quad - \int_{\{|u|\geq M\}} |f(x,u)|\,dx - \int_{\{|u|<M\}} |f(x,u)|\,dx\Big| \\ &\leq \int_{\{|u_n|\geq M\}} |f(x,u_n)|\,dx + \int_{\{|u|\geq M\}} |f(x,u)|\,dx \\ &\quad + \Big|\int_{\{|u_n|<M\}} |f(x,u_n)|\,dx - \int_{\{|u|<M\}} |f(x,u)|\,dx\Big|.\end{aligned}$$

Analisaremos cada termo do lado direito

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_n|\geq M\}} |f(x,u_n)|\,dx = \int_{\{|u_n|\geq M\}} \frac{|f(x,u_n)u_n|}{|u_n|}\,dx &\leq \frac{1}{M}\int_{\{|u_n|\geq M\}} |f(x,u_n)u_n|\,dx \\ &\leq \frac{1}{M}\int_\Omega |f(x,u_n)u_n|\,dx \leq \frac{C}{M} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Dado que $\big|\{x\in\Omega : |u(x)| \geq M\}\big| = \big|\{x\in\Omega : |u(x)| \geq M\}\big| < \delta$, então por (B.2), temos

$$\int_{\{|u|\geq M\}} |f(x,u)|\,dx < \epsilon.$$

Seja $I_n = \Big|\int_{\{|u|<M\}} |f(x,u_n)|\,dx - \int_{\{|u|<M\}} |f(x,u)|\,dx\Big|$. Logo,

$$\begin{aligned}I_n &= \Big|\int_\Omega \big(|f(x,u_n)| - |f(x,u)|\big)\chi_{\{|u_n|<M\}}\,dx \\ &\quad + \int_\Omega |f(x,u)|\big(\chi_{\{|u_n|<M\}} - \chi_{\{|u|<M\}}\big)\,dx\Big| \\ &\leq \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)|\chi_{\{|u_n|<M\}}\,dx + \int_\Omega |f(x,u)|\chi_{\{|u|>M\}}\,dx.\end{aligned}$$

Agora estimemos essas duas últimas integrais. Seja $h_n(x) = |f(x,u_n) - f(x,u)|\chi_{\{|u_n|<M\}}$. Observe que

$$h_n(x) \to 0, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Também,

$$|h_n(x)| \leq |f(x,u_n)|\chi_{\{|u_n|<M\}} + |f(x,u)|\chi_{\{|u_n|<M\}} \leq \overline{C} + |f(x,u)| \in L^1(\Omega),$$

onde $\overline{C} = \sup\{f(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,M]\}$. Pelo Teorema da Convergência Dominada, temos $\displaystyle\int_\Omega h_n(x)\,dx \to 0$ se $n \to \infty$, assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \displaystyle\int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)|\chi_{\{|u_n|<M\}}\,dx < \epsilon$, para todo $n \geq n_0$ e de (B.2), temos $\displaystyle\int_{\{|u|>M\}} |f(x,u)|\,dx < \epsilon$. E, portanto,

$$\left|\int_{\{|u_n|<M\}} |f(x,u_n)|\,dx - \int_{\{|u|<M\}} |f(x,u)|\,dx\right| < 2\epsilon \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

Logo,

$$\left|\int_\Omega |f(x,u_n)| - |f(x,u)|\,dx\right| < 4\epsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

E, por conseguinte,

$$\int_\Omega |f(x,u_n)|\,dx \to \int_\Omega |f(x,u)|\,dx, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

■

Lema B.5. $\displaystyle\lim_{m\to\infty} m\int_0^1 e^{(s^2-s)m}\,ds = 2.$

Demonstração. Primeiramente provemos as seguintes afirmações

Afirmação 1. Para todo $0 < b \leq \dfrac{1}{2}$

$$\int_0^b e^{m(s^2-s)}\,ds = \int_{1-b}^1 e^{m(s^2-s)}\,ds.$$

De fato, basta considerar a mudança de variável $t = 1 - s$.

Afirmação 2. Para todo $0 < a < \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{m\to\infty} m\int_a^{1-a} e^{(s^2-s)m}\,ds = 0.$$

De fato, observe que para $a \leq s \leq 1-a$ tem-se, $s^2 - s \leq a^2 - a < 0$, logo,

$$\lim_{m\to\infty} m\int_a^{1-a} e^{(s^2-s)m}\,ds \leq \lim_{m\to\infty} me^{(a^2-a)m}(1-2a) = 0.$$

Afirmação 3. Para todo $0 < b < 1$

$$\limsup_{m\to\infty} \int_b^1 me^{m(s^2-s)} \leq \frac{1}{b}.$$

De fato, como $b \leq s \leq 1$, então $s(s-1) \leq b(s-1)$, logo

$$m\int_b^1 e^{m(s^2-s)}\,ds \leq m\int_b^1 e^{mb(s-1)}\,ds = \frac{1}{b}e^{mb(s-1)}\Big|_b^1 = \frac{1}{b} - \frac{e^{m(b^2-b)}}{b}.$$

Então tomando limite superior tem-se a afirmação.

Note que, como $0 \leq s \leq 1$, então $s^2 - s = s(s-1) \geq s-1$, pela Afirmação 1, com $b = \dfrac{1}{2}$

$$m\int_0^1 e^{m(s^2-s)}\,ds = 2m\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{m(s^2-s)}\,ds \geq 2m\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{m(s-1)}\,ds = 2e^{m(s-1)}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = 2 - 2e^{-\frac{m}{2}}.$$

Logo, tomando limite inferior, temos

$$\liminf_{m\to\infty} m\int_0^1 e^{(s^2-s)m}\,ds \geq 2. \tag{B.3}$$

Por outro lado, seja $a = \dfrac{1}{n}$ e $b = 1-a$, pela Afirmação 1, tem-se

$$m\int_0^1 e^{m(s^2-s)}\,ds = m\int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} e^{m(s^2-s)}\,ds + 2m\int_{1-\frac{1}{n}}^1 e^{m(s^2-s)}\,ds.$$

Agora, tomando limite superior e usando a afirmações 2 e 3

$$\limsup_{m\to\infty}\int_0^1 me^{m(s^2-s)}\,ds \leq \frac{2}{1-\frac{1}{n}}.$$

Logo, tomando o limite, quando $n \to \infty$, temos

$$\limsup_{m\to\infty} m\int_0^1 e^{m(s^2-s)}\,ds \leq 2. \tag{B.4}$$

A proposição segue-se de (B.3) e (B.4). ■

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A., FOURNIER, J. J. F. **Sobolev spaces**. Amsterdam: Academic Press, 2005.

[2] ADIMURTHI. Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problems with critical growth for the N-Laplacian. **Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa**, 17, p. 393-413, 1990.

[3] ADIMURTHI, SRIKANTH, P.N., YADAVA, S.L. Phenomena of critical exponent in $\mathbb{R}^2$. **Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A**, 119, p. 19-25, 1991.

[4] AMBROSETTI, A., RABINOWITZ, P.H. Dual variational methods in critical point theory and applications. **J. Funct. Anal.**, 14, p. 349-381, 1973.

[5] BREZIS. H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New Yorh: Springer, 2010. (Série Universitext).

[6] CARLESON, L.; CHANG, A. On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser. **Bull. Sc. Math.**, 110, p. 113-127, 1986.

[7] DE FIGUEIREDO, G.; MIYAGAKI, O.H.; RUF, B. Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, 3, p. 139-153, 1995.

[8] DE FIGUEIREDO, G.; RUF, B. On the existence and non-existence of solutions for elliptic equations with critical growth in $\mathbb{R}^2$. **Comm. Pure Appl. Math.**, 48, p. 640-655, 1995.

[9] GIDAS, B.; NI, W.M.; NIRENBERG, L. Symmetry and related properties via maximum principle. **Comm. Math. Phys.**, 68, p. 209-243, 1979.

[10] KRASNOSELSKI, M . A., RUTICKII, Y. B. **Convex functions and Orlicz Spaces**. Groningen: P. Noord- hoff LTD., 1961.

[11] MOSER, J. A sharp form of an inequality by N. Trudinger. **Indiana Univ. Math. J.**, 20, p. 1077-1092, 1971.

[12] PÓLYA, G.; SZEGÖ, G. **Isoperimetric Inequalities in Mathematics Physics**. Princeton: University Press, 1951.

[13] TRUDINGER, N. On embedding into Orlicz spaces and some applications. **J. Math. Mech.**, 17, p. 473-484, 1967.

[14] WILLEM, M. **Minimax Theorems**. Boston: Birhauser, 1996.