Teoria Espectral para Fluxos *Skew-Product* Lineares em Espaços de Banach

Karina Schiabel

Orientador: *Prof. José Gaspar Ruas Filho*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Ciências — Área: Matemática.

**USP — São Carlos
Janeiro de 2002**

*Aos meus pais, José e Ana,
e à minha irmã, Daniela.*

Agradecimentos¹

Agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho. Dentre estes, desejo destacar os colegas de curso, os professores do ICMC-USP e, ainda, Alexandre Calixto, Ariane di Tullio, Daniel Mancini, Érica Filletti e Gizele Martins, que figuram entre os meus melhores amigos.

De modo especial, ao Prof. José Gaspar Ruas Filho, pela prontidão, paciência e incentivo sempre demonstrados em sua orientação, apresento sinceramente minha gratidão e meu apreço.

¹Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP.

Resumo

Nesta dissertação estudaremos o espectro dinâmico para fluxos *skew-product* $\pi = (\Phi, \sigma)$ em um fibrado de Banach $\mathcal{E} = X \times \Theta$. Apresentaremos uma caracterização para a existência de dicotomia exponencial para tais fluxos e provaremos que esta não é destruída sob pequenas perturbações. A dicotomia discreta será uma ferramenta muito útil nesta análise.

Abstract

In this dissertation we study the dynamical spectrum for linear skew-product flow $\pi = (\Phi, \sigma)$ in a Banach bundle $\mathcal{E} = X \times \Theta$. We present a characterization for the existence of an exponential dichotomy for this flow and prove that the exponential dichotomy is not destroyed by small perturbation. The discrete dichotomy is a useful tool for this analysis.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Introdução	1
1 Preliminares	3
2 Dicotomias Discretas	11
2.1 Sistema Evolucionário Linear Discreto	11
2.2 Estabilidade Estrutural para Dicotomia Discreta	27
3 Dicotomias Exponenciais	35
3.1 Relação entre Dicotomia Discreta e Exponencial	35
3.2 Estabilidade Estrutural	42
4 Teoria Espectral	45
4.1 O Espectro Dinâmico	45
Referências Bibliográficas	57

Introdução

Nesta dissertação estudaremos o espectro de sistemas dinâmicos lineares em espaços de Banach que englobam vários tipos de equações diferenciais.

Para estudar tais equações de maneira unificada, consideramos fluxos lineares do tipo *skew-product* $\pi : \mathcal{E} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, onde $\mathcal{E} = X \times \Theta$, X é um espaço de Banach, Θ é um espaço topológico de Hausdorff compacto e π é dado por

$$\pi(x, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)x, \theta \cdot t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in X, \quad \theta \in \Theta.$$

Uma das primeiras e principais aplicações de fluxos *skew-product* lineares é o estudo de equações diferenciais lineares

$$\dot{x} = A(t)x,$$

onde $t \mapsto A(t) : \mathbb{R} \rightarrow L(X)$ é contínua na topologia forte de operadores em $L(X)$ e satisfaz certas condições para gerar um operador de evolução $T(t, s)$. Neste caso, $\Theta = \overline{\{A_\tau, \tau \in \mathbb{R}\}}$ e $\pi(x, \tilde{A}, \tau) = (\Phi(\tilde{A}, \tau)x, \sigma(\tilde{A}, \tau))$, onde $\Phi(\tilde{A}, \tau)x$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \tilde{A}(t)x \\ x(0) &= x \end{aligned}$$

no instante τ , e $\sigma : \Theta \times \mathbb{R} \rightarrow \Theta$ é definido como $\sigma(A, \tau) = A_\tau$, com $A_\tau = A(\tau + t)$. Dois casos particulares muito importantes são o caso periódico e o caso quase-periódico.

Nos últimos trinta anos, a teoria de dicotomias exponenciais, que caracteriza a separação hiperbólica de fluxos *skew-product* ou fluxo em fibrados vetoriais que preservam as fibras, tem tido um papel muito importante no estudo da dinâmica das equações diferenciais ordinárias autônomas e não-autônomas. Esta teoria tem sido aplicada, por exemplo, no estudo de fenômenos quase-periódicos, comportamento homoclínico, linearização, variedades invariantes, teoria de perturbação, teoria espectral e bifurcação. O problema da caracterização de dicotomias exponenciais em dimensão finita foi bastante estudado nos anos 70.

Recentemente, a teoria foi estendida para sistemas dinâmicos de dimensão infinita.

O conceito de dicotomia exponencial que utilizamos é uma extensão do conceito usado por Henry em [4] para operadores de evolução. Estabelecemos condições necessárias e suficientes para a existência de dicotomias exponenciais, sem impor a condição de que os espaços instáveis tenham dimensão finita. Uma das principais propriedades da dicotomia exponencial é que esta não é destruída sob pequenas perturbações do fluxo.

Nossa principal ferramenta nesse contexto será a dicotomia discreta. Os resultados obtidos no caso discreto, além de muito interessantes, uma vez que se aplicam a equações de diferença, simplificam de modo considerável a demonstração dos resultados para o caso da dicotomia exponencial, especialmente no que se refere ao problema de estabilidade estrutural.

No Capítulo 1 apresentamos algumas definições, notações e resultados referentes a um fluxo *skew-product* linear (ou sistema evolucionário linear, como chamamos neste trabalho), e também introduzimos o conceito de dicotomia exponencial.

O caso discreto é abordado no Capítulo 2. Um fluxo *skew-product* linear discreto $\hat{\pi}$ da forma

$$\hat{\pi}(x, \theta, n) = (\Phi_n(\theta)x, \theta \cdot n), \quad (x, \theta) \in \mathcal{E}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

aparece naturalmente quando discretizamos o fluxo no tempo.

No Capítulo 3, ocupamo-nos de relacionar dicotomias discreta e exponencial, ponto em que lançamos mão dos resultados obtidos no capítulo precedente.

Finalmente, no Capítulo 4, apresentamos uma caracterização do espectro dinâmico. Esta caracterização, dada por Chow e Leiva em [2], é uma extensão daquela dada por Sacker e Sell em [8].

Capítulo 1

Preliminares

Seja $\mathcal{E} = X \times \Theta$, onde X é um espaço de Banach e Θ é um espaço de Hausdorff compacto. Seja ainda $\sigma(\theta, t) = \theta \cdot t$ um fluxo em Θ (isto é, a aplicação $(\theta, t) \rightarrow \theta \cdot t$ é contínua, $\theta \cdot 0 = \theta$ e $\theta \cdot (s + t) = (\theta \cdot s) \cdot t$, quaisquer que sejam $t, s \in \mathbb{R}$). Um *sistema evolucionário linear* π em $\mathcal{E}$ é um semifluxo da forma

$$\pi(x, \theta, t) = (\Phi(\theta, t)x, \theta \cdot t), \quad t \geq 0,$$

que satisfaz

1. $\Phi(\theta, 0) = I$, o operador identidade, para todo $\theta \in \Theta$.
2. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(\theta, t)x = x$, uniformemente em $\theta \in \Theta$.
3. Para cada $t \in \mathbb{R}$ e cada $\theta \in \Theta$, $\Phi(\theta, t)$ é uma transformação linear contínua que satisfaz

$$\Phi(\theta, t + s) = \Phi(\theta \cdot t, s)\Phi(\theta, t),$$

para $\theta \in \Theta$ e $s, t \geq 0$.

4. Para cada $t \geq 0$, a aplicação $(\theta, x) \mapsto \Phi(\theta, t)x$ de $\mathcal{E}$ em X é contínua.

Seja $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ um subconjunto qualquer. A *fibra* $\mathcal{F}(\theta)$ é dada por

$$\mathcal{F}(\theta) \doteq \{x \in X : (x, \theta) \in \mathcal{F}\}, \quad \theta \in \Theta.$$

Desta forma, temos $\mathcal{E}(\theta) = X \times \{\theta\}$, $\theta \in \Theta$. Além disso, se $U \subset \Theta$, definimos

$$\mathcal{F}(U) \doteq \bigcup_{\theta \in U} \mathcal{F}(\theta)$$

e ainda

$$\mathcal{E}_0 = \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : x = 0\}$$

como sendo a seção nula.

Proposição 1.1. *Seja $\pi = (\Phi, \sigma)$ um sistema evolucionário linear em $\mathcal{E}$. Então existem constantes $M \geq 1$, $a > 0$ de maneira que*

$$\|\Phi(\theta, t)\| \leq Me^{at}, \quad \theta \in \Theta, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Demonstração. Mostraremos inicialmente que existe $\alpha > 0$ de forma que

$$M \doteq \sup \{ \|\Phi(\theta, t)\| : \theta \in \Theta, 0 \leq t \leq \alpha \} < \infty.$$

Para tanto, suporemos que este fato não é verdadeiro. Então existem seqüências $(\theta_n) \in \Theta$ e $(t_n) > 0$, tais que $t_n \rightarrow 0$ e $\|\Phi(\theta_n, t_n)\| \geq n$. Do Princípio da Limitação Uniforme segue que existe $x \in X$ tal que $\|\Phi(\theta_n, t_n)x\|$ é ilimitado, contradizendo o fato de que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi(\theta, t)x = x,$$

uniformemente em θ . Logo, $M < \infty$. Como $\|\Phi(\theta, 0)\| = 1$, resulta que $M \geq 1$.

Seja $a = \alpha^{-1} \log M \geq 0$. Dado $t \geq 0$, podemos escrever $t = n\alpha + \delta$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq \delta < \alpha$. Então

$$\begin{aligned} \|\Phi(\theta, t)\| &= \|\Phi(\theta, n\alpha + \delta)\| \\ &= \|\Phi(\theta \cdot n\alpha, \delta)\Phi(\theta \cdot (n-1)\alpha, \alpha) \dots \Phi(\theta, \alpha)\| \\ &\leq M^{n+1} \\ &\leq MM^{\frac{t}{\alpha}} \\ &\leq Me^{at}. \end{aligned}$$

□

Uma aplicação $\mathbf{P} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ é um *projedor* se $\mathbf{P}$ é contínua e é da forma $\mathbf{P}(x, \theta) = (P(\theta)x, \theta)$, onde $P(\theta)$ é uma projeção linear limitada na fibra $\mathcal{E}(\theta)$. Para todo projedor $\mathbf{P}$, a *imagem* e o *núcleo* de $\mathbf{P}$ são definidos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \mathcal{R}(\mathbf{P}) = \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : P(\theta)x = x\} \\ \mathcal{N} &= \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : P(\theta)x = 0\}. \end{aligned}$$

É interessante ressaltar que, sendo $\mathbf{P}$ contínua, as fibras $\mathcal{R}(\theta)$ e $\mathcal{N}(\theta)$ variam continuamente em θ , o que significa que $P(\theta)$ é fortemente contínua em θ .

Lema 1.2. *Seja $\mathbf{P}$ um projedor definido em $\mathcal{E}$. Então $\mathcal{R}$ e $\mathcal{N}$ são subconjuntos fechados de $\mathcal{E}$. Além disso, temos*

$$\mathcal{R}(\theta) \cap \mathcal{N}(\theta) = \{0\} \quad e \quad \mathcal{R}(\theta) + \mathcal{N}(\theta) = \mathcal{E}(\theta),$$

qualquer que seja $\theta \in \Theta$.

Um subconjunto $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$ é um *subfibrado de $\mathcal{E}$* se existe um projetor $\mathbf{P}$ em $\mathcal{E}$ satisfazendo $\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{V}$. Sendo assim, o subconjunto $\mathcal{W} = \mathcal{N}(\mathbf{P})$ é um subfibrado complementar, ou seja, $\mathcal{E} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

O lema a seguir apresenta condições suficientes para que um subconjunto $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$ seja um subfibrado de $\mathcal{E}$. A demonstração deste lema pode ser encontrada em [9].

Lema 1.3. *Seja $\mathcal{V} \subset \mathcal{E}$ com as seguintes propriedades:*

1. $\mathcal{V}$ é fechado.
2. $\mathcal{V}(\theta)$ é um subespaço linear de $\mathcal{E}(\theta)$, para todo $\theta \in \Theta$.
3. $\text{codim } \mathcal{V}(\theta)$ é finita, para todo $\theta \in \Theta$.
4. $\text{codim } \mathcal{V}(\theta)$ é localmente constante em Θ .

Então $\mathcal{V}$ é um subfibrado de $\mathcal{E}$.

É fato que algumas, mas nem todas as soluções de um sistema evolucionário linear têm extensões definidas para $t \leq 0$. Além disso, quando uma tal extensão existe, ela pode não ser única. Dizemos que um ponto $(x, \theta) \in \mathcal{E}$ tem uma *continuação negativa* com relação a π se existe uma função contínua $\phi : (-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{E}$ que satisfaz as propriedades seguintes:

1. $\phi(t) = (\varphi^x(t), \theta \cdot t)$, onde $\varphi^x : (-\infty, 0] \rightarrow X$.
2. $\phi(0) = (x, \theta)$.
3. $\phi(s) \in \mathcal{E}(\theta \cdot s)$, para cada $s \leq 0$.
4. $\pi(\phi(s), t) = \phi(s + t)$, quaisquer que sejam $s \leq 0$, e $0 \leq t \leq -s$.

A função ϕ definida anteriormente é chamada uma *continuação negativa* do ponto (x, θ) . Para toda continuação negativa ϕ , e todo $\tau \leq 0$, definimos $\phi_\tau(t) = \phi(t + \tau)$, para $-\infty < t \leq -\tau$. Neste caso, se ϕ é uma continuação negativa do ponto (x, θ) , então ϕ_τ é uma continuação negativa do ponto $\phi(\tau)$.

Estamos agora aptos a definir os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{M} \doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : (x, \theta) \text{ tem uma continuação negativa } \phi\}.$$

$\mathcal{U} \doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{M} : \text{existe uma continuação negativa } \phi \text{ de } (x, \theta) \text{ satisfazendo } \|\varphi^x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}.$

$$\mathcal{B}^+ \doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : \sup_{t \geq 0} \|\Phi(\theta, t)x\| < \infty\}.$$

$\mathcal{B}_u^- \doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{M} : (x, \theta) \text{ tem uma \acute{u}nica continua\c{c}\~ao negativa limitada } \phi\}.$

$\mathcal{B}^- \doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{M} : \text{existe uma continua\c{c}\~ao negativa } \phi \text{ de } (x, \theta), \text{ com } \sup_{t \leq 0} \|\varphi^x(t)\| < \infty\}.$

$\mathcal{S} \doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : \|\Phi(\theta, t)x\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty\}.$

$\mathcal{B} \doteq \mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^-.$

Os conjuntos $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{B}$ definidos acima s\~ao chamados, respectivamente, de *conjunto inst\~avel*, *conjunto est\~avel* e *conjunto limitado inicial*.

Observa\c{c}\~oes:

1. Para todo $(x, \theta) \in \mathcal{B}_u^-$, denotaremos a \acute{u}nica continua\c{c}\~ao negativa limitada deste ponto por $\Phi(\theta, t)x$, $t \leq 0$, que define uma extens\~ao da aplica\c{c}\~ao Φ .
2. Para cada $\theta \in \Theta$, a fibra $\mathcal{B}_u^-(\theta)$ \e um subespa\c{o linear de $\mathcal{E}(\theta)$, e $\Phi(\theta, t)x$ \e linear em x para cada $t \leq 0$, ou seja, $\Phi(\theta, t)$ \e uma aplica\c~ao linear de $\mathcal{B}_u^-(\theta)$ em $\mathcal{B}_u^-(\theta \cdot t)$, para $t \leq 0$.
3. Para todo ponto $(x, \theta) \in \mathcal{B}_u^-$, e quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$, vale

$$\Phi(\theta, s+t)x = \Phi(\theta \cdot t, s)\Phi(\theta \cdot t)x. \quad (1.1)$$

A seguir, apresentamos o conceito de dicotomia exponencial para um sistema evolucion\~ario linear em um espa\c{o de Banach de dimens\~ao infinita. Este \e uma extens\~ao do conceito usado por Henry em [4].

Um projetor $\mathbf{P}$ em $\mathcal{E}$ \e *invariante* se

$$P(\theta \cdot t)\Phi(\theta, t) = \Phi(\theta \cdot t)P(\theta), \quad t \geq 0, \quad \theta \in \Theta. \quad (1.2)$$

Um sistema evolucion\~ario linear π tem *dicotomia exponencial sobre um conjunto invariante* $\hat{\Theta}$, $\hat{\Theta} \subset \Theta$, se existem um projetor invariante $\mathbf{P}$ em $\mathcal{E}(\hat{\Theta})$ e constantes $K \geq 1, \beta > 0$ de maneira que, para todo $\theta \in \hat{\Theta}$, estejam satisfeitas as seguintes condi\c{c}\~oes:

1. $\Phi(\theta, t) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot t))$, $t \geq 0$, \e um isomorfismo com inversa

$$\Phi(\theta \cdot t, -t) : \mathcal{N}(P(\theta \cdot t)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta)), \quad t \geq 0.$$

2. $\|\Phi(\theta, t)P(\theta)\| \leq K \cdot e^{-\beta t}$, $t \geq 0$.

3. $\|\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]\| \leq K \cdot e^{\beta t}$, $t \leq 0$,

onde $\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]$ est\~a bem definido para $t \leq 0$, pois $\mathcal{N}(P(\theta)) = \mathcal{R}(I - P(\theta))$.

Em termos de dicotomia exponencial, podemos determinar quando os conjuntos est\~avel $\mathcal{S}$ e inst\~avel $\mathcal{U}$ s\~ao subfibrados complementares de $\mathcal{E}$.

Proposição 1.4. *Se o sistema evolucionário linear $\pi = (\Phi, \sigma)$ em $\mathcal{E}$ tem dicotomia exponencial sobre Θ , então $\mathcal{B} = \mathcal{E}_0$ e o correspondente projetor $\mathbf{P}$ é tal que*

$$\mathcal{R} = \mathcal{S}(\theta), \quad \mathcal{N} = \mathcal{U}(\theta)$$

e também

$$\mathcal{E} = \mathcal{R}(\mathbf{P}) + \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{S}(\theta) + \mathcal{U}(\theta).$$

Demonstração. Seja $\mathbf{P}$ o projetor correspondente, e consideremos $(x, \theta) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}^+ \cap \mathcal{B}^-$. Neste caso, existe uma continuação negativa ϕ_x do ponto (x, θ) , $\phi_x = (\varphi^x(t), \theta \cdot t)$, tal que $\sup_{t \leq 0} \|\varphi^x(t)\| < \infty$. Além disso, ϕ_x tem as seguintes propriedades:

- (a) $\varphi^x(0) = x$.
- (b) $\varphi^x(s+t) = \Phi(\theta \cdot s, t) \varphi^x(s), \quad 0 \leq t \leq -s$.
- (c) $\Phi(\theta \cdot s, t) \varphi^x(s) = \Phi(\theta, t+s)x, \quad 0 \leq -s \leq t$.

Definamos $y = P(\theta)x$ e $z = [I - P(\theta)]x$. Então (y, θ) e (z, θ) têm continuações negativas, definidas respectivamente por $\phi_y(s) = (P(\theta \cdot s) \varphi^x(s), \theta \cdot s)$ e $\phi_z(s) = ([I - P(\theta \cdot s)] \varphi^x(s), \theta \cdot s)$, para todo $s \leq 0$.

Mostraremos que ϕ_y é de fato uma continuação negativa de (y, θ) . Segue imediatamente da definição de ϕ_y que $\varphi^y(0) = (y, \theta)$, e que $\phi_y(s) \in \mathcal{E}(\theta \cdot s)$, para todo $s \leq 0$. Ainda, temos

$$\begin{aligned} \pi(\phi_y(s), t) &= \pi(\varphi^y(s), \theta \cdot s, t) \\ &= (\Phi(\theta \cdot s, t) P(\theta \cdot s) \varphi^x(s), \theta \cdot (s+t)) \\ &= (P(\theta \cdot (s+t)) \Phi(\theta \cdot s, t) \varphi^x(s), \theta \cdot (s+t)) \\ &= (P(\theta \cdot (s+t)) \varphi^x(s+t), \theta \cdot (s+t)) \\ &= \phi_y(s+t), \quad s \leq 0, \quad 0 \leq t \leq -s. \end{aligned}$$

De maneira inteiramente análoga, podemos mostrar que ϕ_z é uma continuação negativa do ponto (z, θ) .

Observemos agora que se $t \leq 0$, então $w = \Phi(\theta \cdot t, -t) \varphi^w(t)$, para $w = x, y, z$ e, como o projetor $\mathbf{P}$ é invariante, temos

$$y = P(\theta)x = P((\theta \cdot t) \cdot (-t)) \Phi(\theta \cdot t, -t) \varphi^x(t) = \Phi(\theta \cdot t, -t) P(\theta \cdot t) \varphi^x(t),$$

de onde segue que

$$\|y\| \leq K e^{\beta t} \|\varphi^x\|, \quad \text{para todo } t \leq 0.$$

Como $\beta > 0$ e $\varphi^x(t)$ é limitada para $t \leq 0$, resulta que $y = 0$.

Além disso, como $\Phi(\theta, t) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot t))$ é um isomorfismo para $t \geq 0$, e $z = [I - P(\theta)]x \in \mathcal{N}(P(\theta))$, podemos escrever

$$\begin{aligned} z &= \Phi(\theta \cdot t, -t)\Phi(\theta, t)z \\ &= \Phi(\theta \cdot t, -t)\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]x \\ &= \Phi(\theta \cdot t, -t)[I - P(\theta \cdot t)]\Phi(\theta, t)x, \end{aligned}$$

e então

$$\|z\| \leq Ke^{-\beta t}\|\Phi(\theta, t)x\|,$$

de onde concluímos que $z = 0$.

Deste modo, $\varphi^x(0) = \varphi^y(0) + \varphi^z(0)$ implica que $x = y + z = 0$, de maneira que $\mathcal{B} = \mathcal{E}_0$. Finalmente, como $\pi = (\Phi, \sigma)$ tem dicotomia exponencial, segue que

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) \subset \mathcal{S}, \quad \mathcal{N}(\mathbf{P}) \subset \mathcal{U}.$$

Além disso,

$$\mathcal{E} = X \times \Theta = \mathcal{R}(\mathbf{P}) + \mathcal{N}(\mathbf{P}),$$

de onde resulta que

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{S} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{U}.$$

□

Corolário 1.5. *O projetor P associado à dicotomia exponencial de um sistema evolucionário linear $\pi = (\Phi, \sigma)$ é unicamente determinado.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathbf{Q}$ seja outro projetor associado à dicotomia exponencial de $\pi = (\Phi, \sigma)$. Então $\mathbf{Q}(x, \theta) = (Q(\theta)x, \theta)$, onde $Q(\theta)$ é uma projeção linear limitada em X . Segue da Proposição 1.4 que

$$\mathcal{R}(P(\theta)) = \mathcal{R}(Q(\theta)) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(P(\theta)) = \mathcal{N}(Q(\theta)), \quad \theta \in \Theta.$$

Deste modo, $P(\theta) = Q(\theta)$, $\theta \in \Theta$, isto é, $\mathbf{P}(x, \theta) = \mathbf{Q}(x, \theta)$, para todo $(x, \theta) \in \mathcal{E}$. □

No lema a seguir, introduzimos a função de Green associada a um sistema evolucionário linear $\pi = (\Phi, \sigma)$. A demonstração deste resultado segue imediatamente da definição de dicotomia exponencial.

Lema 1.6. *Seja $\pi = (\Phi, \sigma)$ um sistema evolucionário linear com dicotomia exponencial sobre Θ , com constantes K e β , e correspondente projetor P . Valem as seguintes afirmações:*

1. $\|P(\theta)\| \leq K, \theta \in \Theta$.
2. Definindo a função de Green como

$$G(\theta, t, s) = \begin{cases} \Phi(\theta \cdot s, t - s)P(\theta \cdot s), & t \geq s \\ -\Phi(\theta \cdot s, t - s)[I - P(\theta \cdot s)], & t < s, \end{cases} \quad (1.3)$$

tem-se

$$\|G(\theta, t, s)\| \leq Ke^{-\beta|t-s|}, \quad \theta \in \Theta, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 2

Dicotomias Discretas

Este capítulo tem por objetivo apresentar alguns resultados relativos à dicotomia discreta, analisando principalmente o problema de estabilidade estrutural para este tipo de dicotomia. A introdução do conceito de sistema evolucionário linear discreto, juntamente com estes resultados, visam simplificar o estudo de dicotomias exponenciais no Capítulo 3.

2.1 Sistema Evolucionário Linear Discreto

Seja $\sigma(\theta, t) = \theta \cdot t$, $t \in \mathbb{R}$, um fluxo em Θ . Um *sistema evolucionário linear discreto* é uma aplicação $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ da forma

$$\hat{\pi}(x, \theta, n) = (\Phi_n(\theta)x, \theta \cdot n), \quad (x, \theta) \in \mathcal{E}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, a aplicação de $\mathcal{E}$ a X dada por $(x, \theta) \rightarrow \Phi_n(\theta)x$ é contínua.

Dizemos que um sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}$ tem *dicotomia discreta pontual sobre* Θ se, para cada $\theta \in \Theta$, existem M_θ , $\alpha_\theta < 1$, e uma família de projeções $\{P_n(\theta)\}$ em X , de tal maneira que

1. $\Phi_n(\theta)P_n(\theta) = P_{n+1}(\theta)\Phi_n(\theta)$, $n \in \mathbb{Z}$.
2. $\Phi_n(\theta) : \mathcal{N}(P_n(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P_{n+1}(\theta))$, $n \in \mathbb{Z}$, é um isomorfismo com inversa

$$\Phi_n(\theta)^{-1} : \mathcal{N}(P_{n+1}(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P_n(\theta)).$$

3. Definindo $\Phi_{n,m}(\theta) \doteq \Phi_{n-1}(\theta)\Phi_{n-2}(\theta) \cdots \Phi_m(\theta)$, e $\Phi_{m,m}(\theta) \doteq I$, $n > m$, então

$$\| \Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x \| \leq M_\theta \alpha_\theta^{n-m} \| x \|, \quad n \geq m; \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

4. $\| \Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x \| \leq M_\theta \alpha_\theta^{m-n} \| x \|$, $n < m$; $n, m \in \mathbb{Z}$,

onde $\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]$ está bem definido, pois $\mathcal{R}(I - P_m(\theta)) = \mathcal{N}(P_m(\theta))$.

A dicotomia discreta de $\hat{\pi}$ é *uniforme sobre* Θ se M_θ e α_θ independem de $\theta \in \Theta$.

As propriedades abaixo são válidas para quaisquer $n, m, k \in \mathbb{Z}$, $n > m \geq k$, e todo $\theta \in \Theta$. Tais propriedades serão repetidas vezes empregadas daqui em diante, e podem ser verificadas sem nenhuma dificuldade.

$$(i) \quad \Phi_{n,m}(\theta)\Phi_{m,k}(\theta) = \Phi_{n,k}(\theta).$$

$$(ii) \quad \Phi_n(\theta)\Phi_{n,m}(\theta) = \Phi_{n+1,m}(\theta).$$

$$(iii) \quad \Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta) = P_n(\theta)\Phi_{n,m}(\theta).$$

$$(iv) \quad \Phi_{n,n-1}(\theta) = \Phi_{n-1}(\theta).$$

$$(v) \quad \Phi_{n,m}(\theta)\Phi_{m-1}(\theta) = \Phi_{n,m-1}(\theta).$$

Os três próximos resultados ocupam-se da demonstração do seguinte fato: se $\hat{\pi}$ tem dicotomia discreta pontual e $(y_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, então existe uma única solução limitada da equação de diferença $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + y_n$.

Lema 2.1. *Seja $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ um sistema evolucionário linear discreto. Se para uma seqüência $y = (y_n)$ em X temos*

$$x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

então

$$x_n = \Phi_{n,m}(\theta)x_m + \sum_{k=m}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)y_k. \quad (2.2)$$

Demonstração. No caso em que $m = n - 1$, é suficiente reescrevermos a equação de forma conveniente. De fato,

$$x_n = \Phi_{n-1}(\theta)x_{n-1} + y_{n-1} = \Phi_{n,n-1}(\theta)x_{n-1} + \sum_{k=n-1}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)y_k.$$

Prosseguiremos agora por indução. Suponhamos que a Equação (2.2) seja verdadeira para $m = r < n$, e verifiquemos sua validade para $m = r - 1$. Admitindo

$$x_n = \Phi_{n,r}(\theta)x_r + \sum_{k=r}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)y_k \quad \text{e} \quad x_r = \Phi_{r-1}(\theta)x_{r-1} + y_{r-1},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 x_n &= \Phi_{n,r}(\theta)[\Phi_{r-1}(\theta)x_{r-1} + y_{r-1}] + \sum_{k=r}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)y_k \\
 &= \Phi_{n,r}(\theta)\Phi_{r-1}(\theta)x_{r-1} + \Phi_{n,r}(\theta)y_{r-1} + \sum_{k=r}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)y_k \\
 &= \Phi_{n,r-1}(\theta)x_{r-1} + \sum_{k=r-1}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)y_k,
 \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Lema 2.2. *Seja $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ um sistema evolucionário linear discreto com dicotomia discreta pontual sobre Θ , com constantes M_θ e α_θ , e família de projeções $\{P_n(\theta)\}$. Valem as seguintes afirmações:*

1. $\|P_n(\theta)\| \leq M_\theta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \theta \in \Theta.$
2. Definindo a função discreta de Green como

$$G_{n,m}(\theta) = \begin{cases} \Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta), & n \geq m \\ -\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)], & n < m, \end{cases} \quad (2.3)$$

tem-se

$$\|G_{n,m}(\theta)\| \leq M_\theta \alpha_\theta^{|n-m|}, \quad \theta \in \Theta, \quad n, m \in \mathbb{Z}.$$

Lema 2.3. *Seja $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ um sistema evolucionário linear discreto com dicotomia discreta pontual sobre Θ . Consideremos $\theta \in \Theta$ e $y = (y_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Então existe uma única solução $(x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ de*

$$x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e tal solução é dada por

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)y_k.$$

Demonstração. Inicialmente, mostraremos que se (x_n) é solução limitada de $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + y_n$, então $x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)y_k$. De fato, segue do Lema 2.1 que

$$x_n = \Phi_{n,m}(\theta)x_m + \sum_{k=m}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)y_k, \quad n \geq m.$$

Partindo desta equação, obtemos

$$\begin{aligned} P_n(\theta)x_n &= P_n(\theta)\Phi_{n,m}(\theta)x_m + \sum_{k=m}^{n-1} P_n(\theta)\Phi_{n,k+1}(\theta)y_k \\ &= \Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x_m + \sum_{k=m}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)P_{k+1}(\theta)y_k, \quad n \geq m. \end{aligned}$$

Observemos agora que

$$\sum_{k=m}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)P_{k+1}(\theta)y_k \leq M_\theta \|y\| \sum_{k=m}^{n-1} \alpha_\theta^{|n-(k+1)|},$$

isto é, a série acima converge. Além disso, $\|\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x_m\| \leq M_\theta \alpha_\theta^{n-m} \|x_m\|$ e, como (x_n) é limitada, resulta que

$$P_n(\theta)x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)P_{k+1}(\theta)y_k. \quad (2.4)$$

Para $m \geq n$, temos

$$\begin{aligned} [I - P_m(\theta)]x_m &= [I - P_m(\theta)]\Phi_{m,n}(\theta)x_n + \sum_{k=n}^{m-1} [I - P_m(\theta)]\Phi_{m,k+1}(\theta)y_k \\ &= \Phi_{m,n}(\theta)[I - P_n(\theta)]x_n + \sum_{k=n}^{m-1} \Phi_{m,k+1}(\theta)[I - P_{k+1}(\theta)]y_k. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x_m = [I - P_n(\theta)]x_n + \sum_{k=n}^{m-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)[I - P_{k+1}(\theta)]y_k.$$

Pelo mesmo argumento usado anteriormente, temos

$$[I - P_n(\theta)]x_n = - \sum_{k=n}^{\infty} \Phi_{n,k+1}(\theta)[I - P_{k+1}(\theta)]y_k. \quad (2.5)$$

Somando agora as expressões obtidas em (2.4) e (2.5), resulta que

$$x_n = P_n(\theta)x_n + [I - P_n(\theta)]x_n = \sum_{k=-\infty}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)P_{k+1}(\theta)y_k - \sum_{k=n}^{\infty} \Phi_{n,k+1}(\theta)[I - P_{k+1}(\theta)]y_k,$$

ou seja,

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)y_k.$$

Veremos agora que $x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)y_k$ é uma solução limitada de $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + y_n$.

Como $x_{n+1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n+1,k+1}(\theta)y_k$, então

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{k=-\infty}^n \Phi_{n+1,k+1}(\theta)P_{k+1}(\theta)y_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \Phi_{n+1,k+1}(\theta)[I - P_{k+1}(\theta)]y_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n-1} \Phi_{n+1,k+1}(\theta)P_{k+1}(\theta)y_k - \sum_{k=n}^{\infty} \Phi_{n+1,k+1}(\theta)[I - P_{k+1}(\theta)]y_k + y_n \\ &= \Phi_n(\theta) \left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} \Phi_{n,k+1}(\theta)P_{k+1}(\theta)y_k - \sum_{k=n}^{\infty} \Phi_{n,k+1}(\theta)[I - P_{k+1}(\theta)]y_k \right) + y_n \\ &= \Phi_n(\theta)x_n + y_n. \end{aligned}$$

Vejamos que esta solução é limitada.

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq \sum_{k=-\infty}^{n-1} \|\Phi_{n,k+1}(\theta)P_{k+1}(\theta)y_k\| + \sum_{k=n}^{\infty} \|\Phi_{n,k+1}(\theta)[I - P_{k+1}(\theta)]y_k\| \\ &\leq M_{\theta} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \alpha_{\theta}^{|n-k-1|} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\| + M_{\theta} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{\theta}^{|k+1-n|} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|x_n\| \leq M_{\theta} \frac{1 + \alpha_{\theta}}{1 - \alpha_{\theta}} \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|y_n\|,$$

e isto completa a demonstração. $\square$

O próximo teorema fornece condições necessárias e suficientes para que um sistema evolucionário linear discreto tenha dicotomia discreta pontual.

Teorema 2.4. *Seja $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ um sistema evolucionário linear discreto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\hat{\pi}$ tem dicotomia discreta pontual sobre Θ .
2. Para $f = (f_n) \in \ell_{\infty}(\mathbb{Z}, X)$ e $\theta \in \Theta$, existe uma única solução limitada $\hat{x} = (x_n)$ da equação

$$x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n.$$

Para facilitar a leitura, fracionaremos a demonstração deste teorema em diversos lemas.

Lema 2.5. *Consideremos a aplicação linear*

$$\begin{aligned} S_{\theta} : D(S_{\theta}) \subset \ell_{\infty}(\mathbb{Z}, X) &\rightarrow \ell_{\infty}(\mathbb{Z}, X) \\ (x_n) &\mapsto (x_{n+1} - \Phi_n(\theta)x_n), \end{aligned}$$

onde

$$D(S_\theta) = \{x \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) : S_\theta x \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)\}.$$

Valem as seguintes afirmações:

(i) A aplicação $G_\theta = S_\theta^{-1}$ é limitada.

(ii) Se (f_k) é uma seqüência quase nula, então $(G_\theta f)_n = \sum_{-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta) f_k$, $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. (i) Seja $(f_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ a única solução limitada de $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Então

$$S_\theta^{-1}((f_n)) = (x_n),$$

ou seja, S_θ^{-1} existe e está definida, para toda $f = (f_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$.

A fim de verificarmos que a aplicação S_θ^{-1} é limitada, mostraremos que S_θ é uma aplicação fechada, e então lançaremos mão do Teorema do Gráfico Fechado.

Seja $\hat{v}_k = (x_n^k) \in D(S_\theta)$ tal que $\hat{v}_k \rightarrow \hat{v} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ e $S_\theta \hat{v}_k \rightarrow \hat{w} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$. Nosso objetivo é mostrar que $\hat{v} = (x_n) \in D(S_\theta)$ e que $\hat{w} = (x_{n+1} - \Phi_n(\theta)x_n)$.

Para tanto, notemos que

$$\hat{v}_k = (x_n^k) \rightarrow (x_n) = \hat{v}, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

$$S_\theta(\hat{v}_k) = (x_{n+1}^k - \Phi_n(\theta)x_n^k) \rightarrow \hat{w}, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Logo,

$$(\Phi_n(\theta)x_n^k) \rightarrow -\hat{w} + (x_{n+1}), \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

Agora, da continuidade da aplicação $\Phi_n(\theta)$, segue que

$$(\Phi_n(\theta)x_n^k) \rightarrow (\Phi_n(\theta)x_n),$$

e, da unicidade do limite, obtemos

$$\hat{w} = (x_{n+1} - \Phi_n(\theta)x_n),$$

de onde concluímos que $S_\theta \hat{v} \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, $\hat{v} \in D(S_\theta)$ e $\hat{w} = S_\theta \hat{v}$.

(ii) Denotemos $G_\theta = S_\theta^{-1}$, e consideremos a seqüência $f = (\dots, 0, x, 0, \dots)$, onde x é a $(m-1)$ -ésima componente de f . Definindo o operador

$$G_{n,m}(\theta) = (G_\theta f)_n, \quad \text{onde } G_\theta f = \{(G_\theta f)_n : n \in \mathbb{Z}\},$$

temos que se $f = (\dots, 0, x_1, x_2, 0 \dots)$, com x_1 na $(m-1)$ -ésima componente de f , então

$$(G_\theta f)_n = (G_\theta f_1)_n + (G_\theta f_2)_n = G_{n,m}(\theta)x_1 + G_{n,m+1}(\theta)x_2,$$

onde $f_1 = (\dots, 0, x_1, 0, \dots)$ e $f_2 = f - f_1$.

Deste modo, se $(f_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ é uma seqüência quase nula, segue que

$$(G_\theta f)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)f_k, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Notemos ainda que $G_{n,m}(\theta) \in L(X)$ e, além disso, se $f = (\dots, 0, x, 0, \dots)$, com x na $(m-1)$ -ésima posição, então

$$(G_\theta f)_n = G_{n,m}(\theta)x$$

e

$$\|G_{n,m}x\|_X = \|(G_\theta f)_n\|_X \leq \|G_\theta f\|_{\ell_\infty(\mathbb{Z}, X)} \leq \|G_\theta\|_{L(\ell_\infty(\mathbb{Z}, X))}\|f\|_{\ell_\infty(\mathbb{Z}, X)} = \|G_\theta\|_{L(\ell_\infty(\mathbb{Z}, X))}\|x\|_X.$$

Portanto,

$$\|G_{n,m}\|_{L(X)} \leq \|G_\theta\|_{L(\ell_\infty(\mathbb{Z}, X))}.$$

□

Lema 2.6. *Valem as seguintes relações sobre a aplicação $G_{n,m}(\theta)$:*

$$(i) \quad G_{n+1,m}(\theta) - \Phi_n(\theta)G_{n,m}(\theta) = 0, \quad \text{se } n \neq m-1.$$

$$(ii) \quad G_{m,m}(\theta) - \Phi_{m-1}(\theta)G_{m-1,m}(\theta) = I.$$

$$(iii) \quad G_{n,m}(\theta) = \Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta), \quad \text{se } n \geq m.$$

$$(iv) \quad \Phi_{m,n}(\theta)G_{n,m}(\theta) = -[I - P_m(\theta)], \quad \text{se } n < m,$$

onde $P_m(\theta) \doteq G_{m,m}(\theta)$.

Demonstração. Sejam $\hat{x} = (x_n)$ e $f = (f_n)$ em $\ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ de maneira que $G_\theta f = \hat{x}$. Da definição da aplicação G_θ , temos

$$x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n.$$

Agora, se $f = (\dots, 0, x, 0, \dots)$, com x na $(m-1)$ -ésima posição, obtemos

$$G_{n+1,m}(\theta)x = \Phi_n(\theta)G_{n,m}(\theta)x + f_n,$$

de onde seguem facilmente as relações (i) e (ii).

Se $n = m$, então a relação (iii) é verdadeira. Admitamos que ela seja verdadeira também para $k > m$, e verifiquemos sua validade para $k + 1$. Sendo $k > m$, então $k \neq m - 1$. Logo, de (i) e da hipótese de indução segue que

$$\begin{aligned} G_{k+1,m}(\theta) &= \Phi_k(\theta)G_{k,m}(\theta) \\ &= \Phi_k(\theta)\Phi_{k,m}(\theta)P_m(\theta) \\ &= \Phi_{k+1,m}(\theta)P_m(\theta). \end{aligned}$$

Para mostrarmos (iv), vamos supor inicialmente que $n = m - 1$. Nesse caso, segue de (ii) que

$$G_{m,m}(\theta) = \Phi_{m-1}(\theta)G_{m-1,m}(\theta) + I,$$

ou seja, $\Phi_{m,m-1}(\theta)G_{m-1,m}(\theta) = -[I - P_m(\theta)]$. Suponhamos agora que esta relação seja válida para $k < m$, isto é, vamos assumir que $\Phi_{m,k}(\theta)G_{k,m}(\theta) = -[I - P_m(\theta)]$. Como $k - 1 \neq m - 1$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_{m,k-1}(\theta)G_{k-1,m}(\theta) &= \Phi_{m,k}(\theta)\Phi_{k-1}(\theta)G_{k-1,m}(\theta) \\ &= \Phi_{m,k}G_{k,m}(\theta) \\ &= -[I - P_m(\theta)]. \end{aligned}$$

□

Lema 2.7. Se $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n$, $n \geq m$, define uma seqüência limitada, então $[I - P_m(\theta)]x_m = 0$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que $x_n = 0$, para todo $n < m$. Nesse caso, temos

$$\begin{cases} x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n & \text{se } n \neq m - 1, \\ x_m - \Phi_{m-1}(\theta)x_{m-1} = x_m, \end{cases}$$

o que mostra que x_n é uma solução limitada de $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n$, onde $f = (\dots, 0, x_m, 0, \dots)$, e x_m é a $(m - 1)$ -ésima componente de f . Por outro lado,

$$y_n = G_{n,m}(\theta)x_m$$

também é solução de $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n$. Da unicidade da solução, decorre que

$$x_n = G_{n,m}(\theta)x_m.$$

Em particular,

$$x_m = G_{m,m}(\theta)x_m = P_m(\theta)x_m,$$

isto é, $[I - P_m(\theta)]x_m = 0$.

□

Lema 2.8. $P_m(\theta)$ define uma projeção em X , para cada $m \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Sejam $x \in X$ e $x_n = G_{n,m}(\theta)x$. Então $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n$, se $n \geq m$ e $\|x_n\| \leq \|G_\theta\| \|x\|$. Do Lema 2.7, segue que

$$[I - P_m(\theta)]G_{m,m}(\theta)x = [I - P_m(\theta)]P_m(\theta)x = 0,$$

e portanto $P_m(\theta)x = P_m^2(\theta)x$, qualquer que seja $x \in X$. $\square$

Lema 2.9. Suponhamos que $[I - P_m(\theta)]x = 0$. Então $\Phi_m(\theta)P_m(\theta)x = P_{m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)x$.

Demonstração. Realmente, se $[I - P_m(\theta)]x = 0$, então $x = P_m(\theta)x = G_{m,m}(\theta)x = x_m$. Se consideramos $x_n = G_{n,m}(\theta)x$, então

$$x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n, \quad \text{se } n \geq m$$

e (x_n) é limitada. Isso nos garante que

$$\begin{aligned} 0 &= [I - P_{m+1}(\theta)]x_{m+1} \\ &= [I - P_{m+1}(\theta)]\Phi_m(\theta)x \\ &= \Phi_m(\theta)[I - P_m(\theta)]x_m \\ &= \Phi_m(\theta)[I - P_m(\theta)]x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Phi_m(\theta)P_m(\theta)x = P_{m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)x. \quad (2.6)$$

$\square$

Lema 2.10. A aplicação

$$\Phi_m(\theta) : \mathcal{N}(P_m(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P_{m+1}(\theta))$$

é um isomorfismo, para todo $\theta \in \Theta$.

Demonstração. Iniciemos assumindo que $\{x_n : n \leq m\}$ é limitado e $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n$, para todo $n < m$. Fazendo $x_n = 0$ para $n > m$, temos que (x_n) é solução de $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n$, onde $f = (\dots, 0, -\Phi_m(\theta)x_m, 0, \dots)$, com $-\Phi_m(\theta)x_m$ na m -ésima posição. Assim,

$$x_n = -G_{n,m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)x_m.$$

Em particular,

$$0 = x_{m+1} = -G_{m+1,m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)x_m = -P_{m+1}(\theta)x_m,$$

o que nos mostra que $\Phi_m(\theta)x_m \in \mathcal{N}(P_{m+1}(\theta))$.

Suponhamos agora que $x \in \mathcal{N}(P_m(\theta))$ e seja $y_n = G_{n,m}(\theta)x$. Então (y_n) é limitada e

$$y_{n+1} = \Phi_n(\theta)y_n \quad \text{se } n \neq m-1,$$

$$y_{m-1} = \Phi_{m-2}(\theta)y_{m-2},$$

$$y_m = \Phi_{m-1}(\theta)y_{m-1} + x.$$

Logo, o conjunto $\{y_n : n \leq m-2\}$ é limitado e

$$y_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n, \quad \text{para } n < m-2.$$

Fazendo $y_n = 0$ para $n > m-2$, segue que (y_n) é solução de

$$y_{n+1} = \Phi_n(\theta)y_n + f_n,$$

com $f = (\dots, 0, -\Phi_{m-2}(\theta)y_{m-2}, 0, \dots)$, onde $-\Phi_{m-2}(\theta)y_{m-2}$ está na $(m-2)$ -ésima posição.

Como anteriormente, temos

$$0 = y_{m-1} = -G_{m-1,m-1}(\theta)\Phi_{m-2}(\theta)y_{m-2},$$

de onde resulta que

$$y_{m-1} = \Phi_{m-2}(\theta)y_{m-2} \in \mathcal{N}(P_{m-1}(\theta)).$$

Como $x \in \mathcal{N}(P_m(\theta))$, obtemos

$$y_m = G_{m,m}(\theta)x = P_m(\theta)x = 0$$

e

$$\begin{aligned} -x &= -[I - P_m(\theta)]x \\ &= y_m - x \\ &= [G_{m,m}(\theta) - I]x \\ &= \Phi_{m-1}(\theta)G_{m-1,m}(\theta)x \\ &= \Phi_{m-1}(\theta)y_{m-1}. \end{aligned}$$

Desta forma, $x \in \Phi_{m-1}(\theta)\mathcal{N}(P_{m-1}(\theta))$, ou seja,

$$\mathcal{N}(P_m(\theta)) \subseteq \Phi_{m-1}(\theta)\mathcal{N}(P_{m-1}(\theta)). \quad (2.7)$$

Consideremos agora

$$\bar{y}_n = y_n = G_{n,m}(\theta)x, \quad \text{para } n < m - 1$$

e

$$\bar{y}_{n+1} = y_n = \Phi_n(\theta)\bar{y}_n, \quad \text{para } n \geq m - 2.$$

Então

$$\bar{y}_{m-1} = \Phi_{m-2}(\theta)\bar{y}_{m-2} = \Phi_{m-2}(\theta)y_{m-2} = y_{m-1}$$

e

$$\bar{y}_m = \Phi_{m-1}(\theta)\bar{y}_{m-1} = \Phi_{m-1}(\theta)y_{m-1} = -x.$$

Deste modo, $\{y_n : n \leq m\}$ é limitado e

$$\bar{y}_{n+1} = \Phi_n(\theta)\bar{y}_n, \quad \text{para } n < m.$$

E mais uma vez, obtemos

$$0 = -P_{m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)\bar{y}_m = -P_{m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)(-x).$$

Portanto, $\Phi_m x \in \mathcal{N}(P_{m+1}(\theta))$, ou seja,

$$\Phi_m(\theta)\mathcal{N}(P_m(\theta)) \subseteq \mathcal{N}(P_{m+1}(\theta)). \quad (2.8)$$

Das expressões em (2.7) e (2.8), concluímos que

$$\Phi_m(\theta) : \mathcal{N}(P_m(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P_{m+1}(\theta))$$

é uma aplicação sobrejetora, para todo $\theta \in \Theta$. Provemos agora que esta aplicação é injetora.

Seja $x \in \mathcal{N}(P_m(\theta))$ de tal modo que $\Phi_m(\theta)x = 0$. Então

$$\bar{y}_{m+1} = \Phi_m(\theta)\bar{y}_m = -\Phi_m(\theta)x = 0.$$

Este fato nos mostra que $\bar{y}_n = 0$, para todo $n > m$. Então $(\bar{y}_n)$ é limitada para $n \geq m$ e $\bar{y}_{n+1} = \Phi_n(\theta)\bar{y}_n$, para $n \leq m$.

Do Lema 2.7, segue que

$$0 = [I - P_m(\theta)]\bar{y}_m = [I - P_m(\theta)](-x) = 0.$$

Isto implica que $x = x - P_m(\theta)x = 0$. □

Demonstração do Teorema 2.4. (1) $\Rightarrow$ (2). Assumindo a hipótese em (1), podemos usar o Lema 2.3 com

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta) f_k,$$

para concluir que

$$\|x_n\| \leq M_\theta \frac{1 + \alpha_\theta}{1 - \alpha_\theta} \|f\|_\infty, \quad n \in \mathbb{Z},$$

verificando assim (2).

(2) $\Rightarrow$ (1). Provaremos inicialmente que se $P_m(\theta)x = 0$, então $\Phi_m(\theta)P_m(\theta)x = P_{m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)x$. De fato, seja $x \in \mathcal{N}(P_m(\theta))$. Então $\Phi_m(\theta)P_m(\theta)x = 0$ e $\Phi_m(\theta)x \in \mathcal{N}(P_{m+1}(\theta))$, ou seja, vale também que $P_{m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)x = 0$.

Combinando este fato com o Lema 2.9, podemos concluir que, para todo $x \in X$, temos

$$\Phi_m(\theta)P_m(\theta)x = P_{m+1}(\theta)\Phi_m(\theta)x, \quad \theta \in \Theta, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

O Lema 2.10 garante que

$$\Phi_m(\theta) : \mathcal{N}(P_m(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P_{m+1}(\theta))$$

é um isomorfismo, para todo $\theta \in \Theta$.

Para finalizarmos a demonstração, resta-nos provar que existem constantes M_θ e α_θ tais que

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x\| &\leq M_\theta \alpha_\theta^{n-m} \|x\|, \quad n \geq m, \\ \|\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\| &\leq M_\theta \alpha_\theta^{m-n} \|x\|, \quad n < m. \end{aligned}$$

Para tanto, mostraremos que, para todo $\theta \in \Theta$ e $n \geq m$, temos

$$\|\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x\| \leq \|G_\theta\|^2 (1 - \|G_\theta\|^{-1})^{n-m}.$$

Notemos que se $\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x = 0$, para algum $n \geq m$, então $\Phi_{l,m}(\theta)P_m(\theta)x = 0$, para todo $l \geq n$, já que $\Phi_{n+1,m}(\theta)x = \Phi_n(\theta)\Phi_{n,m}(\theta)x$.

Vamos então assumir que $\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x \neq 0$. Desta forma, podemos definir

$$\varphi_k^{-1}(\theta) \doteq \|\Phi_{k,m}(\theta)P_m(\theta)x\| > 0, \quad m \leq k \leq n.$$

Então, como

$$G_{n,k}(\theta) = \Phi_{n,k}(\theta)P_k(\theta),$$

se definimos

$$V_k(\theta) \doteq \Phi_{k,m}(\theta)P_m(\theta)x \varphi_k(\theta),$$

temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m}^n G_{n,k}(\theta) V_k(\theta) &= \sum_{k=m}^n \Phi_{n,k}(\theta) P_k(\theta) \Phi_{k,m}(\theta) P_m(\theta) \times \varphi_k(\theta) \\
 &= \sum_{k=m}^n \Phi_{n,k}(\theta) \Phi_{k,m}(\theta) P_m(\theta) P_m(\theta) \times \varphi_k(\theta) \\
 &= \sum_{k=m}^n \Phi_{n,m}(\theta) P_m(\theta) \times \varphi_k(\theta) \\
 &= \Phi_{n,m}(\theta) P_m(\theta) \times \sum_{k=m}^n \varphi_k(\theta).
 \end{aligned}$$

Seja $f = (\dots, 0, V_m(\theta), \dots, V_n(\theta), 0, \dots)$, com $V_m(\theta)$ na $(m-1)$ -ésima posição. Então

$$\|f\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|f_k\| = \sup_{m \leq k \leq n} \|V_k(\theta)\| = 1$$

e

$$\left\| \sum_{k=m}^n G_{n,k}(\theta) V_k(\theta) \right\| = \left\| \sum_{k=m}^n G_{n,k}(\theta) f_k \right\| = \|G_\theta\| \|f\| = \|G_\theta\|.$$

Desta forma, temos

$$\frac{-1}{\varphi_n^{-1}(\theta) \cdot \sum_{k=m}^n \varphi_k(\theta)} \leq -\|G_\theta\|^{-1} \quad \text{e} \quad \|G_\theta\| > 1.$$

Definamos $\Gamma_n(\theta) \doteq \sum_{k=m}^n \varphi_k(\theta)$. Então

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{n-1}(\theta) &= \sum_{k=m}^{n-1} \varphi_k(\theta) \\
 &= \sum_{k=m}^n \varphi_k(\theta) - \varphi_n(\theta) \\
 &= \Gamma_n(\theta) \left(1 - \frac{-1}{\varphi_n^{-1}(\theta) \cdot \Gamma_n(\theta)} \right) \\
 &\leq \Gamma_n(\theta) (1 - \|G_\theta\|^{-1}).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Gamma_n(\theta) - \Gamma_{n-1}(\theta) \geq \Gamma_n(\theta) \|G_\theta\|^{-1},$$

ou ainda,

$$\varphi_n(\theta) \geq \|G_\theta\|^{-1} (1 - \|G_\theta\|^{-1}) \Gamma_{n-1}(\theta).$$

Em geral,

$$\begin{aligned}\varphi_n(\theta) &\geq \|G_\theta\|^{-1}(1 - \|G_\theta\|^{-1})^{-(n-m)}\Gamma_m(\theta) \\ &= \|G_\theta\|^{-1}(1 - \|G_\theta\|^{-1})^{-(n-m)}\varphi_m(\theta),\end{aligned}$$

isto é,

$$\varphi_n^{-1}(\theta) \leq \|G_\theta\|(1 - \|G_\theta\|^{-1})^{n-m}\varphi_m^{-1}(\theta).$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\|\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x\| &\leq \|G_\theta\|(1 - \|G_\theta\|^{-1})^{n-m}\|P_m(\theta)x\| \\ &= \|G_\theta\|(1 - \|G_\theta\|^{-1})^{n-m}\|G_{m,m}(\theta)x\| \\ &\leq \|G_\theta\|^2(1 - \|G_\theta\|^{-1})^{n-m}\|x\|, \quad n \geq m.\end{aligned}$$

Usando um argumento análogo, provaremos que, para todo $\theta \in \Theta$ e $n < m$, vale

$$\|\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\| \leq (1 + \|G_\theta\|)^2 \left(\frac{\|G_\theta\|}{1 + \|G_\theta\|} \right)^{m-n} \|x\|.$$

Novamente, observemos que se $\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x = 0$, para algum $n < m$, então $\Phi_{r,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x = 0$, para todo $r \leq n$, pois $\Phi_{n-1,m}(\theta)x = \Phi_{n-2}(\theta)\Phi_{n,m}(\theta)x$.

Assumiremos deste modo que $\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x \neq 0$. Definimos então

$$\rho_k^{-1}(\theta) \doteq \|\Phi_{k,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\| > 0, \quad m \leq k \leq n.$$

Como

$$G_{n,k}(\theta) = -\Phi_{n,k}(\theta)[I - P_k(\theta)],$$

se definimos

$$W_k(\theta) \doteq -\Phi_{k,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\rho_k(\theta),$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^m G_{n,k}(\theta)W_k(\theta) &= \sum_{k=n+1}^m \Phi_{n,k}(\theta)[I - P_k(\theta)]\Phi_{k,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\rho_k(\theta) \\ &= \sum_{k=n+1}^m \Phi_{n,k}(\theta)\Phi_{k,m}(\theta)[I - P_m(\theta)][I - P_m(\theta)]x\rho_k(\theta) \\ &= \sum_{k=n+1}^m \Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\rho_k(\theta) \\ &= \Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x \sum_{k=n+1}^m \rho_k(\theta).\end{aligned}$$

Seja $f = (\dots, 0, W_{n+1}(\theta), \dots, W_m(\theta), 0, \dots)$, com $W_{n+1}(\theta)$ na n -ésima posição. Então

$$\|f\| = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|f_k\| = \sup_{n+1 \leq k \leq m} \|W_k(\theta)\| = 1$$

e

$$\left\| \sum_{k=n+1}^m G_{n,k}(\theta) W_k(\theta) \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m G_{n,k}(\theta) f_k \right\| = \|G_\theta\| \|f\| = \|G_\theta\|.$$

Assim, resulta que

$$\frac{1}{\rho_n^{-1}(\theta) \cdot \sum_{k=n+1}^m \rho_k(\theta)} \geq \|G_\theta\|^{-1} \quad \text{e} \quad \|G_\theta\| > 1.$$

Definindo agora $\Upsilon_n(\theta) \doteq \sum_{k=n+1}^m \rho_k(\theta)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Upsilon_{n-1}(\theta) &= \sum_{k=n}^m \rho_k(\theta) \\ &= \sum_{k=n+1}^m \rho_k(\theta) + \rho_n(\theta) \\ &= \Upsilon_n(\theta) \left(1 + \frac{1}{\rho_n^{-1}(\theta) \cdot \Upsilon_n(\theta)} \right) \\ &\geq \Upsilon_n(\theta) (1 + \|G_\theta\|^{-1}). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\Upsilon_{n-1}(\theta) - \Upsilon_n(\theta) \geq \Upsilon_n(\theta) \|G_\theta\|^{-1},$$

isto é,

$$\rho_n(\theta) \geq \|G_\theta\|^{-1} (1 + \|G_\theta\|^{-1}) \Upsilon_{n+1}(\theta).$$

Em geral, podemos escrever

$$\begin{aligned} \rho_n(\theta) &\geq \|G_\theta\|^{-1} (1 + \|G_\theta\|^{-1})^{-(n-m+1)} \Upsilon_{m-1}(\theta) \\ &= \|G_\theta\|^{-1} (1 + \|G_\theta\|^{-1})^{-(n-m+1)} \rho_m(\theta), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho_n^{-1}(\theta) \leq \|G_\theta\| (1 + \|G_\theta\|^{-1})^{n-m+1} \rho_m^{-1}(\theta).$$

Logo, obtemos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\| &\leq \|G_\theta\| (1 + \|G_\theta\|^{-1})^{n-m+1} \|[I - P_m(\theta)]x\| \\ &= \|G_\theta\| (1 + \|G_\theta\|^{-1})^{n-m+1} \|[I - G_{m,m}(\theta)]x\| \\ &\leq (1 + \|G_\theta\|)^2 \left(\frac{\|G_\theta\|}{1 + \|G_\theta\|} \right)^{m-n} \|x\|, \quad n \geq m. \end{aligned}$$

Finalmente, definindo M_θ e α_θ por

$$M_\theta \doteq (1 + \|G_\theta\|)^2 > \|G_\theta\|^2$$

e

$$\alpha_\theta \doteq \frac{\|G_\theta\|}{1 + \|G_\theta\|} \geq 1 - \|G_\theta\|^{-1},$$

para todo $\theta \in \Theta$, concluímos que $\hat{\pi}$ tem dicotomia discreta pontual sobre Θ , com as constantes M_θ e α_θ definidas acima. $\square$

Corolário 2.11. *Se $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ tem dicotomia discreta pontual sobre Θ , então a família de projeções $\{P_n(\theta)\}$ associada à dicotomia discreta pontual de $\hat{\pi}$ é única.*

Demonstração. Suponhamos que $\{Q_n(\theta)\}$ seja outra família de projeções associada à dicotomia discreta pontual de $\hat{\pi}$. Seja $\tilde{G}_{n,k+1}(\theta)$ a função discreta de Green associada a esta família de projeções.

Seja $x \in X$ e consideremos a seqüência $f = (f_n)$, tal que $f_{m-1} = x$ e $f_n = 0$, para $n \neq m-1$. Consideremos ainda, para cada $\theta \in \Theta$, a única solução limitada (x_n) de

$$x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n.$$

Segue do Teorema 2.4 que tal solução é dada por

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)f_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{n,k+1}(\theta)f_k.$$

Então

$$G_{n,m}(\theta)x = \tilde{G}_{n,m}(\theta)x,$$

ou seja,

$$P_m(\theta)x = G_{m,m}(\theta)x = \tilde{G}_{m,m}(\theta)x = Q_m(\theta)x.$$

Logo, $P_m(\theta) = Q_m(\theta)$, $\theta \in \Theta$, $m \in \mathbb{Z}$, como queríamos. $\square$

Corolário 2.12. *Consideremos, para $\gamma > 0$,*

$$S_\gamma = \left\{ \hat{x} = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) : \sup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma^n \|x_n\| \right\}.$$

Suponhamos, para cada $\theta \in \Theta$, que $0 < \alpha_\theta < 1$, $\alpha_\theta \leq \gamma \leq \left(\frac{1}{\alpha_\theta}\right)$, e que para cada $f \in S_\gamma$, exista uma única solução $(x_n) \in S_\gamma$ de

$$x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n.$$

Então o sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}(x, \theta, n) = (\gamma\Phi_n(\theta), \sigma(\theta, n))$ tem dicotomia discreta pontual sobre Θ . Além disso, se $\tilde{G}_{n,m}(\theta)$ é a correspondente função de Green, então

$$\|\tilde{G}_{n,m}(\theta)\| \leq M_\theta \alpha_\theta^{|n-m|}.$$

Demonstração. Sejam $x = (x_n)$, $f = (f_n) \in S_\gamma$ de forma que $x_{n+1} = \Phi_n(\theta)x_n + f_n$. Se

$$y_n = \gamma^n x_n \quad \text{e} \quad g_n = \gamma^n f_n,$$

então $y, g \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ e

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \gamma^{n+1} x_{n+1} \\ &= \gamma(\gamma^n \Phi_n(\theta)x_n + \gamma^n f_n) \\ &= \gamma(\Phi_n(\theta)y_n + g_n). \end{aligned}$$

Segue da hipótese que para toda $(\gamma g_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, a equação $y_{n+1} = \gamma\Phi_n(\theta)x_n + \gamma g_n$ possui uma única solução limitada $(\gamma^n x_n)$, o que garante a dicotomia discreta pontual de $\hat{\pi}$. A função de Green correspondente é então dada por $\gamma^{n-m}G_{n,m}(\theta)$ e

$$\|\tilde{G}_{n,m}(\theta)\| \leq \|G_{n,m}(\theta)\| \gamma^{n-m}.$$

Fazendo $\gamma = \alpha_\theta$ e $\gamma = \frac{1}{\alpha_\theta}$, segue que

$$\|\tilde{G}_{n,m}(\theta)\| \leq M_\theta \alpha_\theta^{|n-m|}.$$

□

2.2 Estabilidade Estrutural para Dicotomia Discreta

A dicotomia discreta de um sistema evolucionário linear discreto é preservada sob pequenas perturbações no fluxo. Este problema de estabilidade estrutural para dicotomia discreta será abordado nesta seção.

Lema 2.13. Sejam $a \geq 0$, $b \geq 0$, $0 < r < r_1$, $b < \frac{1-rr_1}{r+r_1}$ e (g_n) uma seqüência não negativa de números reais, com $g_n = O(r_1^{|n|})$ quando $|n| \rightarrow \infty$. Se

$$g_n \leq ar_1^n + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|n-k-1|} g_k, \quad n \in \mathbb{Z},$$

então

$$g_n \leq \frac{ar_1^{|n|}}{1 - b \left(\frac{r+r_1}{1-rr_1} \right)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Consideremos a sequência $f_n = \frac{g_n}{r_1^{|n|}}$. Então, por hipótese, temos

$$\begin{aligned} f_n &\leq a + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|n-k-1|} r_1^{-|n|} r_1^{|k|} f_k \\ &\leq a + b \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|n-k-1|} r_1^{|k|-|n|} \|f\|_{\infty} \\ &\leq a + b \left(\sum_{k=-\infty}^{n-1} r^{n-k-1} r_1^{|k|-|n|} + \sum_{k=n}^{\infty} r^{-n+k+1} r_1^{|k|-|n|} \right) \|f\|_{\infty}, \end{aligned}$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$. Fazendo uso de séries geométricas e trabalhando separadamente os casos $n < 0$ e $n \geq 0$, podemos garantir que

$$\|f\|_{\infty} \leq a + b \left(\frac{r + r_1}{1 - rr_1} \right) \|f\|_{\infty},$$

ou seja,

$$\|f\|_{\infty} \leq \frac{a}{1 - b \left(\frac{r+r_1}{1-rr_1} \right)}.$$

Mas

$$f_n = \frac{g_n}{r_1^{|n|}} \leq \|f\|_{\infty} \leq \frac{a}{1 - b \left(\frac{r+r_1}{1-rr_1} \right)},$$

e então

$$g_n \leq \frac{a}{1 - b \left(\frac{r+r_1}{1-rr_1} \right)} r_1^{|n|}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

□

Teorema 2.14. *Suponhamos que o sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$, $\hat{\pi} = (\Phi_n(\theta), \sigma)$, tenha dicotomia discreta pontual sobre Θ com constantes M_{θ} e $\alpha_{\theta} < 1$. Se $\tilde{M}_{\theta} > M_{\theta}$ e $\alpha_{\theta} < \tilde{\alpha}_{\theta} < 1$, então existe $\varepsilon_{\theta} > 0$ de forma que todo sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}_1 = (\psi_n(\theta), \sigma)$ em $\mathcal{E}$ que satisfaz*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\Phi_n(\theta) - \psi_n(\theta)\| < \varepsilon_{\theta} \quad \text{para todo } \theta \in \Theta,$$

tem dicotomia discreta pontual sobre Θ , com constantes $\tilde{M}_{\theta}$ e $\tilde{\alpha}_{\theta}$.

Demonstração. Primeiramente, observemos que, para cada $\theta \in \Theta$ e $f \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, a equação

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \psi_n(\theta)x_n + f_n \\ &= \Phi_n(\theta)x_n + [\psi_n(\theta) - \Phi_n(\theta)]x_n + f_n \end{aligned}$$

possui uma única solução $x \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$ se, e somente se,

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)[(\psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta))x_k + f_k] \quad (2.9)$$

e também é limitada para cada $f \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$.

Definamos, para cada $x = (x_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$, a seguinte aplicação:

$$(H_\theta x)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)[(\psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta))x_k].$$

Então a Equação (2.9) pode ser reescrita como

$$(I - H_\theta)x = G_\theta f,$$

onde $(G_\theta f)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)f_k$.

Notemos agora que

$$G_\theta : \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$$

é limitada e

$$H_\theta : \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) \rightarrow \ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$$

satisfaz

$$\|H_\theta\|_{L(\ell_\infty(\mathbb{Z}, X))} \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G_{n,k+1}(\theta)(\psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta))\| \leq \varepsilon_\theta M_\theta \frac{1 + \alpha_\theta}{1 - \alpha_\theta} < 1,$$

escolhendo-se ε_θ de maneira que

$$\varepsilon_\theta M_\theta < \frac{1 - \alpha_\theta}{1 + \alpha_\theta}. \quad (2.10)$$

Assim, segue que $(I - H_\theta)$ tem inversa limitada, e a solução procurada é

$$x = (I - H_\theta)^{-1} G_\theta f \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X).$$

Em resumo, obtivemos uma única solução limitada de $x_{n+1} = \psi_n(\theta)x_n + f_n$, para cada f limitada. Segue do Teorema 2.4 que $\hat{\pi}_1$ tem dicotomia discreta sobre Θ , com constantes $\bar{M}_\theta$ e $\bar{\alpha}_\theta$.

A fim de obtermos a dicotomia discreta com as constantes desejadas, consideremos a função de Green $\tilde{G}_{n,m}(\theta)$ associada ao sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}_1$. Então, para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{G}_{n,m}(\theta) = G_{n,m}(\theta) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)(\psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta))\tilde{G}_{k,m}(\theta).$$

De fato, se $f = (\dots, x, \dots)$, com x na $(m-1)$ -ésima componente, temos

$$x_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{n,k+1}(\theta)f_k = \tilde{G}_{n,m}(\theta)x$$

e

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)[(\psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta))x_k] + f_k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)(\psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta))\tilde{G}_{k,m}(\theta)x + G_{n,m}(\theta)x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)[(\psi_k(\theta) - \Phi_k(t))x_k + f_k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)(\psi_k(\theta) - \Phi_k(t))\tilde{G}_{k,m}(\theta)x + G_{n,m}(\theta)x. \end{aligned}$$

Resulta então que $(\tilde{G}_{n,m}(\theta))$ é um ponto fixo de

$$T((\tilde{G}_{n,m}(\theta))) = (G_{n,m}(\theta)) + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta)(\psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta))\tilde{G}_{k,m}(\theta) \right).$$

Notemos ainda que

$$T((\tilde{G}_{n,m}(\theta)) - (\hat{G}_{n,m}(\theta))) \leq M_\theta \varepsilon_\theta \frac{1 + \alpha_\theta}{1 - \alpha_\theta} \|(\tilde{G}_{n,m}(\theta)) - (\hat{G}_{n,m}(\theta))\|,$$

ou seja, a aplicação T é uma contração. Com efeito, basta escolhermos ε_θ como fizemos em (2.10).

Do Teorema do Ponto Fixo de Banach segue que a aplicação T possui um único ponto fixo em $\ell_\infty(\mathbb{Z}, X)$.

Consideremos agora o espaço

$$\mathcal{B} = \left\{ g = (g_n) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) : h = \left(\frac{g_n}{\tilde{\alpha}_\theta} \right) \in \ell_\infty(\mathbb{Z}, X) \right\}$$

munido da norma $\|g\|_{\mathcal{B}} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\|g_n\|}{\tilde{\alpha}_\theta^{|n|}}$. Mostraremos que a aplicação $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ está bem definida e é uma contração neste espaço. Como $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach, deste fato seguirá que $(\tilde{G}_{n,m}(\theta)) \in \mathcal{B}$.

Seja $(g_n) \in \mathcal{B}$. Então

$$T(g_n) = (G_{n,m}(\theta)) + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta) (\psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta)) g_k \right)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\|(T(g_n))\|}{\tilde{\alpha}_\theta^{|n|}} &\leq \frac{M_\theta \alpha_\theta^{|n-m|}}{\tilde{\alpha}_\theta^{|n|}} + M_\theta \alpha_\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_\theta^{|n-k-1|} \cdot \|g_k\| \cdot \tilde{\alpha}_\theta^{-|n|} \cdot \frac{\tilde{\alpha}_\theta^{|k|}}{\tilde{\alpha}_\theta^{|k|}} \\ &\leq M_\theta \alpha_\theta^{-|m|} + M_\theta \varepsilon_\theta \cdot \frac{\alpha_\theta + \tilde{\alpha}_\theta}{1 - \alpha_\theta \tilde{\alpha}_\theta} \cdot \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\|g_k\|}{\tilde{\alpha}_\theta^{|k|}} = K < \infty, \end{aligned}$$

o que mostra que $T(g_n) \in \mathcal{B}$.

O fato de que T é uma contração no espaço $\mathcal{B}$ segue imediatamente da escolha de ε_θ .

Logo, T possui um único ponto fixo em $\mathcal{B}$, que é $(\tilde{G}_{n,m}(\theta))$, ou seja, $(\tilde{G}_{n,m}(\theta)) \in \mathcal{B}$.

Assim,

$$\|\tilde{G}_{n,m}(\theta)\| \leq M_\theta \tilde{\alpha}_\theta^{|n-m|} + M_\theta \varepsilon_\theta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_\theta^{|n-k-1|} \|\tilde{G}_{k,m}\|,$$

isto é, estamos nas hipóteses do Lema 2.13, que nos garante que

$$\|\tilde{G}_{n,m}(\theta)\| \leq \frac{M_\theta \tilde{\alpha}_\theta^{|n-m|}}{1 - M_\theta \varepsilon_\theta \frac{\alpha_\theta + \tilde{\alpha}_\theta}{1 - \alpha_\theta \tilde{\alpha}_\theta}}.$$

Portanto, escolhendo ε_θ satisfazendo (2.10) e também

$$\tilde{M}_\theta \left(1 - \frac{\varepsilon_\theta M_\theta (\alpha_\theta + \tilde{\alpha}_\theta)}{1 - \alpha_\theta \tilde{\alpha}_\theta} \right) \geq M_\theta, \quad \theta \in \Theta,$$

obtemos

$$\|\tilde{G}_{n,m}(\theta)\| \leq \frac{M_\theta \tilde{\alpha}_\theta^{|n-m|}}{1 - M_\theta \varepsilon_\theta \frac{\alpha_\theta + \tilde{\alpha}_\theta}{1 - \alpha_\theta \tilde{\alpha}_\theta}} \leq \tilde{M}_\theta \tilde{\alpha}_\theta^{|n-m|},$$

o que mostra que $\hat{\pi}_1$ tem dicotomia discreta sobre Θ , com constantes $\tilde{M}_\theta$ e $\tilde{\alpha}_\theta$. $\square$

Corolário 2.15. *Suponhamos que o sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ tenha dicotomia discreta uniforme sobre Θ com constantes M , $\alpha < 1$. Então existe $\varepsilon > 0$ de forma que todo sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}_1 = (\psi_n(\theta), \sigma)$ em $\mathcal{E}$ que satisfaz*

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\Phi_n(\theta) - \psi_n(\theta)\| < \varepsilon, \quad \text{para todo } \theta \in \Theta,$$

tem dicotomia discreta uniforme sobre Θ .

O lema seguinte tem como propósito demonstrar que um sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}$ com dicotomia discreta definido em $\mathcal{E} \times \mathbb{Z}_+$ pode ser estendido a $\mathcal{E} \times \mathbb{Z}$, de modo que a extensão tenha dicotomia discreta com preservação das constantes. Este resultado será utilizado no Teorema 2.17, um caso particular do Teorema 2.14 quando o fluxo $\hat{\pi}$ está definido apenas em $\mathcal{E} \times \mathbb{Z}_+$.

Lema 2.16. *Suponhamos que $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{E}$ tenha dicotomia discreta pontual sobre Θ , com constantes M_θ e $\alpha_\theta < 1$. Seja $G_{n,m}(\theta)$ a correspondente função de Green. Definamos a extensão de $\hat{\pi}$ a $\mathcal{E} \times \mathbb{Z}$ como segue:*

$$P_n(\theta) = P_0(\theta) \quad e \quad \Phi_n(\theta) \doteq \alpha_\theta [I - P_0(\theta)] + \alpha_\theta^{-1} P_0(\theta),$$

para todo $\theta \in \Theta$ e todo $n < 0$. Então $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{E}$ tem dicotomia discreta pontual sobre Θ , com constantes M_θ e $\alpha_\theta < 1$.

Demonstração. Segue da hipótese que

1. $\Phi_n(\theta)P_n(\theta) = P_{n+1}(\theta)\Phi_n(\theta)$, para todo $n \geq 0$, $\theta \in \Theta$.
2. $\Phi_n(\theta) : \mathcal{N}(P_n(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P_{n+1}(\theta))$ é um isomorfismo, $n \geq 0$.
3. $\|\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x\| \leq M_\theta \alpha_\theta^{n-m} \|x\|$, $n, m \geq 0$.
4. $\|\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\| \leq M_\theta \alpha_\theta^{m-n} \|x\|$, $m > n \geq 0$.

Devemos então averiguar a validade destas relações apenas para $n, m < 0$.

Para $n < 0$, temos

$$\begin{aligned} \Phi_n(\theta)P_n(\theta) &= (\alpha_\theta [I - P_0(\theta)] + \alpha_\theta^{-1} P_0(\theta)) P_0(\theta) \\ &= P_0(\theta) (\alpha_\theta [I - P_0(\theta)] + \alpha_\theta^{-1} P_0(\theta)) \\ &= P_{n+1}(\theta)\Phi_n(\theta). \end{aligned}$$

Ainda, se $x \in \mathcal{N}(P_n(\theta)) = \mathcal{N}(P_0(\theta))$, então

$$\Phi_n(\theta)x = \alpha_\theta [I - P_0(\theta)]x = \alpha_\theta x,$$

que define um isomorfismo sobre $\mathcal{N}(P_n(\theta))$.

Suponhamos agora que $n \geq 0 > m$. Então

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta) &= \Phi_{n,0}(\theta)\Phi_{0,m}(\theta)P_0(\theta) \\ &= \Phi_{n,0}(\theta)\Phi_{-1}(\theta)\Phi_{-2}(\theta) \dots \Phi_m(\theta)P_0(\theta) \\ &= \Phi_{n,0}(\theta)\Phi_{-1}(\theta)\Phi_{-2}(\theta) \dots \Phi_{m-1}(\theta)\alpha_\theta^{-1}P_0(\theta) \\ &= \Phi_{n,0}(\theta)\alpha_\theta^{-m}P_0(\theta), \end{aligned}$$

e segue que

$$\|\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x\| = \|\Phi_{n,0}(\theta)\alpha_\theta^{-m}P_0(\theta)x\| \leq M_\theta\alpha_\theta^{n-m}\|x\|.$$

De maneira análoga, se $0 > n \geq m$, podemos concluir que

$$\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x = \alpha_\theta^{n-m}P_0(\theta)x.$$

Em ambos os casos, resulta

$$\|\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)x\| \leq M_\theta\alpha_\theta^{n-m}\|x\|,$$

o que verifica (3) para $n, m < 0$.

Para mostrarmos a última propriedade, suponhamos inicialmente que $m \geq 0 > n$. Então

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x &= \Phi_{n,0}(\theta)\Phi_{0,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x \\ &= \Phi_{0,n}(\theta)_{|\mathcal{N}(P_0(\theta))}^{-1} \Phi_{0,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x \\ &= \alpha_\theta^{-n}\Phi_{0,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x \end{aligned}$$

e obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\| &\leq \alpha_\theta^{-n}\|\Phi_{0,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\| \\ &\leq M_\theta\alpha_\theta^{m-n}\|x\|. \end{aligned}$$

Ainda, se $0 > m > n$, então

$$\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x = \alpha_\theta^{m-n}[I - P_0(\theta)]x$$

e

$$\|\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]x\| \leq M_\theta\alpha_\theta^{m-n}\|x\|.$$

□

Teorema 2.17. *Suponhamos que $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathcal{E}$ tenha dicotomia discreta pontual com constantes $M_\theta, \alpha_\theta < 1$. Se $\tilde{M}_\theta > M_\theta$ e $\alpha_\theta < \tilde{\alpha}_\theta < 1$, então existe $\varepsilon_\theta > 0$ tal que todo sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}_1 = (\Psi_n(\theta), \sigma)$ em $\mathcal{E}$ que satisfaz*

$$\sup_{n>0} \|\Phi_n(\theta) - \psi_n(\theta)\| < \varepsilon_\theta, \quad \text{para todo } \theta \in \Theta,$$

tem dicotomia discreta pontual sobre Θ .

Demonstração. Como no Lema 2.16, estendemos $\hat{\pi}$ a $\mathcal{E} \times \mathbb{Z}$, e posteriormente estendemos $\hat{\pi}_1$ como $\psi_n(\theta) = \Phi_n(\theta)$, para $n < 0$. Segue do Teorema 2.14 que $\hat{\pi}_1$ tem dicotomia discreta com constantes $\tilde{M}_\theta$ e $\tilde{\alpha}_\theta < 1$ sempre que

$$0 \leq \frac{M_\theta}{1 - M_\theta \varepsilon_\theta^{\frac{1+\alpha_\theta \tilde{\alpha}_\theta}{\tilde{\alpha}_\theta - \alpha_\theta}}} \leq 1.$$

Em particular, $\hat{\pi}_1$ tem dicotomia discreta pontual com constantes $\tilde{M}_\theta$ e $\tilde{\alpha}_\theta < 1$. □

Capítulo 3

Dicotomias Exponenciais

Este capítulo compõe-se de duas seções. Na primeira delas estabelecemos a relação entre dicotomia discreta e exponencial. Na segunda seção, utilizamos os resultados de preservação do caso discreto obtidos no capítulo precedente para concluir a preservação da dicotomia exponencial sob pequenas perturbações do fluxo.

3.1 Relação entre Dicotomia Discreta e Exponencial

Se $\pi = (\Phi, \sigma)$ é um sistema evolucionário linear em $\mathcal{E}$, então a aplicação $\hat{\pi} : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ dada por

$$\hat{\pi}(x, \theta, n) \doteq (\Phi_n(\theta)x, \theta \cdot n),$$

onde

$$\Phi_n(\theta) = \Phi(\theta \cdot n, 1),$$

é um sistema evolucionário linear discreto. De fato, basta notarmos que a aplicação $(x, \theta) \mapsto \Phi_n(\theta)x$ é contínua, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Além disso, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $\theta \in \Theta$, existem $M \geq 1, a > 0$, tais que

$$\|\Phi_n(\theta)\| = \|\Phi(\theta \cdot n, 1)\| \leq Me^a,$$

ou seja, a seqüência $(\Phi_n(\theta))_n$ é uniformemente limitada.

Os próximos dois resultados relacionam dicotomia discreta e exponencial.

Lema 3.1. *Seja $\pi = (\Phi, \sigma)$ um sistema evolucionário linear em $\mathcal{E}$. Suponhamos que π tenha dicotomia exponencial sobre Θ com constante K e expoente β . Então o sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}$, dado por $\hat{\pi}(x, \theta, n) = (\Phi_n(\theta)x, \theta \cdot n)$, tem dicotomia discreta com constantes $M = K$ e $\alpha = e^{-\beta}$.*

Demonstração. Seja $\mathbf{P}$ o projetor associado à dicotomia exponencial de π sobre Θ , e definamos a família de projeções $\{P_n(\theta)\}$ como

$$P_n(\theta) = P(\theta \cdot n), \quad \theta \in \Theta, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Verifiquemos agora as condições de dicotomia discreta. Inicialmente, notemos que

$$\begin{aligned} \Phi_n(\theta)P_n(\theta) &= \Phi(\theta \cdot n, 1)P(\theta \cdot n) \\ &= P(\theta \cdot n \cdot 1)\Phi(\theta \cdot n, 1) \\ &= P(\theta \cdot (n+1))\Phi_n(\theta) \\ &= P_{n+1}(\theta)\Phi_n(\theta), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \theta \in \Theta. \end{aligned}$$

Segue da hipótese que $\Phi(\theta \cdot n, 1) : \mathcal{N}(P(\theta \cdot n)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot (n+1)))$ é um isomorfismo. Mas isto equivale a dizer que $\Phi_n(\theta) : \mathcal{N}(P_n(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P_{n+1}(\theta))$ é um isomorfismo.

Agora, fazendo $\Phi_{n,m}(\theta) = \Phi_{n-1}(\theta) \dots \Phi_m(\theta)$, $n > m$ e $\Phi_{m,m} \doteq I$, $\theta \in \theta$, temos

$$\begin{aligned} \|\Phi_{n,m}(\theta)P_m(\theta)\| &= \|\Phi(\theta \cdot (n-1), 1) \dots \Phi(\theta \cdot m, 1)P(\theta \cdot m)\| \\ &= \|\Phi(\theta \cdot m, n-m)P(\theta \cdot m)\| \\ &\leq M e^{-\beta(n-m)} \\ &= M \alpha^{n-m}, \quad \theta \in \theta, \quad n \geq m. \end{aligned}$$

De maneira análoga podemos concluir que

$$\|\Phi_{n,m}(\theta)[I - P_m(\theta)]\| \leq M \alpha^{m-n}, \quad \theta \in \Theta, \quad m > n.$$

□

Teorema 3.2. *Suponhamos que $\pi = (\Phi, \sigma)$ seja um sistema evolucionário linear em $\mathcal{E}$ e que M, α sejam constantes positivas tais que $\alpha = e^{-\beta} < 1$. Consideremos*

$$L \doteq \sup \{ \|\Phi(\theta, t)\| : 0 \leq t \leq 1, \theta \in \Theta \} < \infty.$$

Se o sistema evolucionário linear discreto $\hat{\pi}$, dado por $\hat{\pi}(x, \theta, n) = (\Phi_n(\theta)x, \theta \cdot n)$, tem dicotomia discreta com constantes M e α , então $\pi = (\Phi, \sigma)$ tem dicotomia exponencial com expoente β e constante KM , onde

$$K \doteq \sup \{ \|\Phi(\theta, t)\| e^{\beta t} : 0 \leq t \leq 1, \theta \in \Theta \}.$$

Demonstração. Seja $\{P_n(\theta)\}$ a família de projeções associada à dicotomia discreta uniforme de $\hat{\pi} = (\Phi_n, \sigma)$, e definamos o projetor $\mathbf{P} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ como

$$\mathbf{P}(x, \theta) \doteq (P(\theta)x, \theta); \quad P(\theta) \doteq P_0(\theta).$$

Observemos que a sequência $\hat{\pi}_k : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$ dada por

$$\hat{\pi}_k(x, \theta, n) \doteq (\Phi_n(\theta \cdot k), \theta \cdot n)$$

tem dicotomia discreta uniforme com correspondente família de projeções $\{P_n(\theta \cdot k)\}$. Por outro lado, $\Phi_n(\theta \cdot k) = \Phi_{n+k}(\theta)$, o que implica que $\hat{\pi}_k$ tem dicotomia discreta uniforme com correspondente família de projeções $\{P_{n+k}(\theta)\}$. Como a família de projeções associada à dicotomia discreta de um sistema evolucionário linear discreto é única, segue que $P_{n+k}(\theta) = P_n(\theta \cdot k)$. Em particular, $P_k(\theta) = P_0(\theta \cdot k) = P(\theta \cdot k)$, para todo $\theta \in \Theta$ e todo $k \in \mathbb{Z}$.

Disto, e do fato que $P_n(\theta)\Phi_{n,k}(\theta) = \Phi_{n,k}(\theta)P_k(\theta)$, segue que $P(\theta \cdot n)\Phi(\theta \cdot k, n - k) = \Phi(\theta \cdot k, n - k)P(\theta \cdot k)$, para todo $n \geq k$ e todo $\theta \in \Theta$.

Veremos agora que

$$\|\Phi(\theta, t)P(\theta)\| \leq KMe^{-\beta t}, \quad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e todo } \theta \in \Theta.$$

De fato, se $n \in \mathbb{Z}_+$ é escolhido de forma que $n \leq t \leq n + 1$, temos

$$\begin{aligned} \|\Phi(\theta, t)P(\theta)\| &= \|\Phi(\theta, t + n - n)P(\theta)\| \\ &= \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\Phi(\theta, n)P(\theta)\| \\ &\leq \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\|M\alpha^n \\ &\leq \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\|Me^{-\beta n} \\ &\leq \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\|e^{\beta(t-n)}Me^{-\beta t} \\ &\leq KMe^{-\beta t}. \end{aligned}$$

Observando que $\Phi(\theta, n) = \Phi_{n,0}(\theta) = \Phi_{n-1}(\theta) \cdots \Phi_0(\theta)$, tomemos $x \in \mathcal{N}(P_n(\theta))$, $t \leq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$ de maneira que $n \leq t < n + 1$, e definamos:

$$\Phi(\theta, t)x \doteq \Phi(\theta \cdot n, t - n)\Phi(\theta, n)x,$$

onde

$$\Phi(\theta, n) = \Phi_{n,0}(\theta) = [\Phi_{0,n}(\theta)]^{-1}$$

e

$$\Phi_{0,n}(\theta) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot n))$$

é um isomorfismo.

Nosso fim é mostrar que

$$\|\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]x\| \leq KMe^{\beta t}\|x\|, \quad t \geq 0.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]x\| &\leq \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\| \|\Phi(\theta, n)[I - P(\theta)]x\| \\ &\leq \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\| M\alpha^{-n}\|x\| \\ &= \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\| Me^{\beta n}\|x\| \\ &= \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\| e^{\beta n - \beta t} e^{\beta t}\|x\| \\ &\leq \|\Phi(\theta \cdot n, t - n)\| e^{\beta(t-n)} e^{\beta t}\|x\| \\ &\leq KMe^{\beta t}\|x\|. \end{aligned}$$

Veremos agora que $\mathcal{R}(P(\theta)) = \mathcal{B}^+(\theta)$, para todo $\theta \in \Theta$.

Recordemos que $\mathcal{B}^+(\theta) = \{x \in X : \sup_{t \geq 0} \|\Phi(\theta, t)x\| < \infty\}$.

Suponhamos inicialmente que $x \in \mathcal{R}(P(\theta))$. Então $P(\theta)x = x$ e, do que já demonstramos anteriormente, segue que

$$\|\Phi(\theta, t)x\| = \|\Phi(\theta, t)P(\theta)x\| \leq KMe^{-\beta t}.$$

Logo, $\Phi(\theta, t)x$ é limitado para $t \geq 0$, ou seja, $\mathcal{R}(P(\theta)) \subset \mathcal{B}^+(\theta)$, para todo $\theta \in \Theta$. Para verificarmos a inclusão oposta, suponhamos que $x \notin \mathcal{R}(P(\theta))$. Então

$$\Phi(\theta, t)x = \Phi(\theta, t)P(\theta)x + \Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]x.$$

Como $\Phi(\theta, \cdot)P(\theta)x$ é limitado para $t \geq 0$, basta provarmos que $\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]x$ é ilimitado para $t \geq 0$.

De fato, para todo $n \geq 0$, temos

$$\|\Phi(\theta \cdot n, -n)[I - P(\theta \cdot n)]v\| \leq Me^{-\beta n}\|v\|,$$

onde $\Phi(\theta, n) = \Phi_{n,0}(\theta) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot n))$ é um isomorfismo com inversa

$$\Phi(\theta \cdot n, -n) \doteq \Phi_{0,n}(\theta) : \mathcal{N}(P(\theta \cdot n)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta)).$$

Tomemos $v = \Phi(\theta, n)[I - P(\theta)]x$. Então

$$\begin{aligned} \|[I - P(\theta)]x\| &= \|\Phi(\theta \cdot n, -n)[I - P(\theta \cdot n)]\Phi(\theta, n)[I - P(\theta)]x\| \\ &\leq Me^{-\beta n}\|\Phi(\theta, n)[I - P(\theta)]x\|, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|\Phi(\theta, n)[I - P(\theta)]x\| \geq M^{-1}e^{\beta n}\|[I - P(\theta)]x\|.$$

Como $[I - P(\theta)]x \neq 0$, então $\|\Phi(\theta, n)[I - P(\theta)]x\| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, o que implica que $x \notin \mathcal{B}^+(\theta)$.

A partir de agora, teremos como propósito provar que a aplicação

$$\Phi(\theta, t) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot t))$$

é um isomorfismo, para $t \geq 0$.

Iniciaremos demonstrando que $\Phi(\theta, t)\mathcal{N}(P(\theta)) \subseteq \mathcal{N}(P(\theta \cdot t))$, para $t \geq 0$. Para tanto, mostraremos que $\Phi(\theta, t)\mathcal{R}(P(\theta)) \subseteq \mathcal{R}(P(\theta \cdot t))$, para $t \geq 0$.

Seja $x \in \mathcal{R}(P(\theta))$. Nesse caso, $\Phi(\theta, t)x$ é limitado para $t \geq 0$ e

$$\Phi(\theta, s)x = \Phi(\theta \cdot t, s - t)\Phi(\theta, t)x, \quad s \geq t \geq 0.$$

Fazendo $r = s - t \geq 0$ e $z = \Phi(\theta, t)x$, segue que $\Phi(\theta \cdot t, r)z$ é limitado para $r \geq 0$, isto é, $z \in \mathcal{B}^+(\theta \cdot t)$. É consequência imediata do que vimos anteriormente que $\Phi(\theta, t)x \in \mathcal{R}(P(\theta \cdot t))$.

Seja agora $x \in \mathcal{N}(P(\theta))$ de tal forma que $\Phi(\theta, t)x = 0$. Então

$$\Phi(\theta, n)x = \Phi(\theta \cdot t, n - t)\Phi(\theta, t)x = 0.$$

Do fato de $\Phi(\theta, n) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot n))$ ser isomorfismo, segue que $x = 0$. Concluimos deste modo que a aplicação

$$\Phi(\theta, t) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot t))$$

é injetora, para $t \geq 0$.

Notemos também que $\Phi(\theta \cdot t, s - t)\Phi(\theta, t)\mathcal{N}(P(\theta)) \subseteq \mathcal{N}(P(\theta \cdot s))$, pois se $x \in \mathcal{N}(P(\theta))$, então $y = \Phi(\theta, t)x \in \mathcal{N}(P(\theta \cdot t))$ e $\Phi(\theta \cdot t, s - t)y \in \mathcal{N}(P(\theta \cdot t(s - t))) = \mathcal{N}(P(\theta \cdot s))$.

Sejam $x \in X$ e $t_1 < 0$. Se existe um único $y \in X$ de forma que $\Phi(\theta \cdot t_1, -t_1)y = x$, nós definimos

$$\Phi(\theta, t_1)x \doteq y.$$

Em particular, se $x \in \mathcal{N}(P(\theta))$ e $t \leq 0$, temos

$$\Phi(\theta, t)x \doteq \Phi(\theta \cdot n, t - n)\Phi(\theta, n)x,$$

onde $0 \leq t - n < 1$ e $\Phi(\theta \cdot n) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot n))$ é um isomorfismo. Com efeito,

$$\begin{aligned} \Phi(\theta \cdot t, -t)y &= \Phi(\theta \cdot t, -t)\Phi(\theta \cdot n, t - n)\Phi(\theta, n)x \\ &= \Phi(\theta \cdot n \cdot (t - n), -t)\Phi(\theta \cdot n, t - n)\Phi(\theta, n)x \\ &= \Phi(\theta \cdot n, t - n - t)\Phi(\theta, n)x \\ &= \Phi(\theta \cdot n, -n)\Phi(\theta, n)x = x. \end{aligned}$$

Para verificarmos a sobrejetividade de

$$\Phi(\theta, t) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot t))$$

para $t \geq 0$, usaremos o fato de que $\mathcal{N}(P(\theta)) = \mathcal{B}_u^-(\theta)$, que mostraremos agora.

Recordemos que $\mathcal{B}_u^-(\theta) = \{x \in X : \Phi(\theta, t)x \text{ está bem definida e é limitada para } t \leq 0\}$. Vamos supor inicialmente que $x \in \mathcal{N}(P(\theta))$. Então

$$\Phi(\theta, t)x = \Phi(\theta \cdot n, t - n)\Phi(\theta, n)[I - P(\theta)]x,$$

o que nos fornece

$$\|\Phi(\theta, t)x\| \leq KMe^{\beta t}\|x\|, \quad t \leq 0,$$

ou seja, $\Phi(\theta, t)x$ está bem definida e é limitada para $t \leq 0$. Para verificarmos a outra inclusão, suporemos que $x \notin \mathcal{N}(P(\theta))$. Deste modo, tomando $0 \neq y = P(\theta)x$ e $z = [I - P(\theta)]x$, distinguimos dois casos:

- (i) se $\Phi(\theta, t)x$ não está bem definida, então $x \notin \mathcal{B}_u^-(\theta)$;
- (ii) se $\Phi(\theta, t)x$ está bem definida, então o fato de $\Phi(\theta, t)z$ também estar bem definida implica que $\Phi(\theta, t)y$ está bem definida para $t \leq 0$. Por essa razão, podemos escrever

$$\Phi(\theta, t)x = \Phi(\theta, t)z + \Phi(\theta, t)y.$$

A fim de provarmos que $x \notin \mathcal{B}_u^-(\theta)$, vamos mostrar que $\Phi(\theta, t)y = \Phi(\theta, t)P(\theta)x$ é ilimitado para $t \leq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} P(\theta)x &= \Phi(\theta \cdot n, -n)\Phi(\theta, n)P(\theta)x \\ &= \Phi(\theta \cdot n, -n)P(\theta \cdot n)\Phi(\theta, n)P(\theta)x, \quad n \leq 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|P(\theta)x\| \leq KMe^{\beta n}\|\Phi(\theta, n)P(\theta)x\|,$$

e

$$\|\Phi(\theta, n)P(\theta)x\| \geq (KM)^{-1}\|P(\theta)x\|e^{-\beta n} \rightarrow \infty \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Como $\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]x = \Phi(\theta, t)z$ é limitado, segue que $\Phi(\theta, t)x$ é ilimitado, isto é, $x \notin \mathcal{B}_u^-(\theta)$.

Notemos agora que se $x \in \mathcal{N}(P(\theta)) = \mathcal{B}_u^-(\theta)$ e $s \leq t \leq 0$, temos

$$\Phi(\theta, s)x = \Phi(\theta \cdot t, s - t)\Phi(\theta, t)x,$$

do que segue que $\Phi(\theta \cdot t, s - t)\Phi(\theta, t)x$ é limitado para $s \leq t$. Desta forma, podemos concluir que $\Phi(\theta, t)x \in \mathcal{B}_u^-(\theta \cdot t) = \mathcal{N}(P(\theta \cdot t))$, isto é,

$$\Phi(\theta, t)\mathcal{N}(P(\theta)) \subset \mathcal{N}(P(\theta \cdot t)), \quad t \leq 0.$$

Finalmente, estudaremos a sobrejetividade da aplicação

$$\Phi(\theta, t) : \mathcal{N}(P(\theta)) \rightarrow \mathcal{N}(P(\theta \cdot t)), \quad t \geq 0.$$

Afirmamos que $y = \Phi(\theta \cdot t, -t)x$ é tal que $y \in \mathcal{N}(P(\theta))$ e $\Phi(\theta, t)y = x$. De fato, seja $x \in \mathcal{B}_u^-(\theta \cdot t)$. Então

$$\Phi(\theta \cdot t, r + s)x = \Phi(\theta \cdot t \cdot r, s)\Phi(\theta \cdot t, r)x,$$

quaisquer que sejam $r, s \in \mathbb{R}$. Em particular, se $s = t$ e $r = -t$, obtemos

$$\begin{aligned} x &= \Phi(\theta \cdot t, 0)x \\ &= \Phi(\theta, t)\Phi(\theta \cdot t, -t)x \\ &= \Phi(\theta, t)y. \end{aligned}$$

Além disso, $P(\theta)y = \Phi(\theta \cdot t, -t)P(\theta \cdot t)x = 0$.

A última etapa desta demonstração consiste em mostrar que

$$\Phi(\theta, t)P(\theta) = P(\theta, t)\Phi(\theta, t),$$

para todo $\theta \in \Theta$ e todo $t \geq 0$. Notamos sem dificuldade que

$$\Phi(\theta, t)P(\theta)x = P(\theta, t)\Phi(\theta, t)x, \quad x \in \mathcal{N}(P(\theta)),$$

ou seja,

$$\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]x = (I - P(\theta, t))\Phi(\theta, t)x, \quad x \in \mathcal{R}(P(\theta)).$$

Deste modo,

$$\Phi(\theta, t)P(\theta)x = P(\theta, t)\Phi(\theta, t)x, \quad x \in \mathcal{R}(P(\theta)).$$

□

3.2 Estabilidade Estrutural

Nesta seção, apresentamos o teorema que trata do problema de estabilidade estrutural para a dicotomia exponencial de um sistema evolucionário linear, ou seja, o resultado que garante que a dicotomia não é destruída sob pequenas perturbações.

Teorema 3.3. *Suponhamos que o sistema evolucionário linear $\pi = (\Phi, \sigma)$ tenha dicotomia exponencial sobre Θ , com constante M e expoente β . Se*

$$L \doteq \sup\{\|\Phi(\theta, t)\| : 0 \leq t \leq 1, \theta \in \Theta\}$$

e $Me^{-\beta} < e^{-\beta_1}$, $M_1 > M$, então existe $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \beta_1, M, M_1, L) > 0$ tal que todo sistema evolucionário linear $\pi_1 = (\Psi, \sigma)$ em $\mathcal{E}$ que satisfaz

$$\sup\{\|\Phi(\theta, t) - \Psi(\theta, t)\| : 0 \leq t \leq 1, \theta \in \Theta\} \leq \varepsilon$$

tem dicotomia exponencial sobre Θ , com constante M_1 e expoente β_1 .

Demonstração. Consideremos os sistemas evolucionários lineares discretos $\hat{\pi}, \hat{\pi}_1 : \mathcal{E} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$, dados por

$$\hat{\pi}(x, \theta, n) \doteq (\Phi_n(\theta)x, \theta \cdot n) \quad \text{e} \quad \hat{\pi}_1(x, \theta, n) \doteq (\Psi_n(\theta)x, \theta \cdot n),$$

onde

$$\Phi_n(\theta) \doteq (\Phi(\theta \cdot n), 1) \quad \text{e} \quad \Psi_n(\theta) \doteq (\Psi(\theta \cdot n), 1).$$

É imediato que $\hat{\pi}$ tem dicotomia discreta uniforme, com constantes M e $\alpha = e^{-\beta}$. Além disso, segue da hipótese que

$$\|\Phi(\theta, t) - \Psi(\theta, t)\| \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

qualquer que seja $\theta \in \Theta$. Em particular,

$$\|\Phi(\theta \cdot n, 1) - \Psi(\theta \cdot n, 1)\| \leq \varepsilon,$$

para todo $\theta \in \Theta$, isto é,

$$\|\Phi_n(\theta) - \Psi_n(\theta)\| \leq \varepsilon,$$

para todo $\theta \in \Theta$.

Como $M_1 > M$ e $1 > \alpha_1 = e^{-\beta_1} > e^{-\beta} = \alpha$, segue do Teorema 2.14 que $\hat{\pi}_1$ tem dicotomia discreta uniforme sobre Θ , com constantes M_1 e α_1 , para oportuna escolha de ε . Ainda, de

acordo com o Teorema 3.2, $\pi_1 = (\Psi, \sigma)$ tem dicotomia exponencial, com constante KM_1 e expoente β_1 . Desta forma, se $\tilde{G}(\theta, t, s)$ é a função de Green associada, podemos afirmar que

$$\|\tilde{G}(\theta, t, s)\| \leq M_1 e^{-\beta_1|t-s|},$$

sempre que $k = s - t \in \mathbb{Z}$.

Consideremos agora a função de Green $G(\theta, t, s)$ associada a π , e notemos que

$$\tilde{G}_{n,m}(\theta) - G_{n,m}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{n,k+1}(\theta) [\Psi_k(\theta) - \Phi_k(\theta)] \tilde{G}_{k,m}(\theta).$$

Assim sendo, resulta que

$$\|\tilde{G}_{n,m}(\theta) - G_{n,m}(\theta)\| \leq C_1 \cdot \varepsilon,$$

para alguma constante $C - 1$, ou ainda,

$$\|\tilde{G}(\theta, t, s) - G(\theta, t, s)\| \leq C_1 \cdot \varepsilon,$$

quando $k = t - s \in \mathbb{Z}$.

Consideremos $t - s \geq 0$. Então, escolhendo $r \in \mathbb{Z}$ de maneira que $s \leq r \leq t$, $0 \leq t - r \leq 1$ e $r - s \in \mathbb{Z}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(\theta, t, s) - G(\theta, t, s)\| &= \|\Psi(\theta \cdot (r - s), t - r) \tilde{G}(\theta, r, s) - \Phi(\theta \cdot (r - s), t - r) G(\theta, r, s) \\ &\quad + \Phi(\theta \cdot (r - s), t - r) \tilde{G}(\theta, r, s) - \Phi(\theta \cdot (r - s), t - r) \tilde{G}(\theta, r, s)\| \\ &= \|[\Psi(\theta \cdot (r - s), t - r) - \Phi(\theta \cdot (r - s), t - r)] \tilde{G}(\theta, r, s) \\ &\quad + \Phi(\theta \cdot (r - s), t - r) [\tilde{G}(\theta, r, s) - G(\theta, r, s)]\| \\ &\leq \varepsilon \cdot M_1 + L \cdot C_1 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Usando argumento inteiramente análogo quando $t - s \leq 0$, escolhemos $r \in \mathbb{Z}$ de forma que $0 \leq r - s \leq 1$ e $r - t \in \mathbb{Z}$, e então

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(\theta, t, s) - G(\theta, t, s)\| &= \|[\tilde{G}(\theta, t, r) - G(\theta, t, r)] \Phi(\theta \cdot s, r - s) [I - P(\theta \cdot s)] \\ &\quad - \tilde{G}(\theta, t, r) (\Phi(\theta \cdot s, r - s) - \Psi(\theta \cdot s, r - s) [I - P(\theta \cdot s)])\| \\ &\leq \sup_{0 \leq r-s \leq 1} \{ \Phi(\theta \cdot s, r - s) [I - P(\theta \cdot s)], \theta \in \Theta \} \cdot C_1 \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot M_1. \end{aligned}$$

Logo, se ε é escolhido suficientemente pequeno, e $0 \leq |t - s| \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} e^{\beta_1|t-s|} \|\tilde{G}(\theta, t, s)\| &\leq e^{\beta_1|t-s|} \|G(\theta, t, s)\| + e^{\beta_1|t-s|} \|\tilde{G}(\theta, t, s) - G(\theta, t, s)\| \\ &\leq M e^{-(\beta-\beta_1)|t-s|} + e^{\beta_1} \cdot C_2 \cdot \varepsilon \\ &\leq M_1. \end{aligned}$$

Em particular, se $|t - s| = 1$,

$$e^{\beta_1} \|\tilde{G}(\theta, t, s)\| \leq M e^{-(\beta - \beta_1)} + e^{\beta_1} \cdot C_2 \cdot \varepsilon \leq 1.$$

Escolhendo-se ε suficientemente pequeno, obtemos

$$\|\tilde{G}(\theta, t, s)\| \leq e^{-\beta_1}.$$

Finalmente, sejam t, s quaisquer, e consideremos r entre t e s satisfazendo $|t - r| \leq 1$ e $r - s = m + 1, m \in \mathbb{Z}$. Segue então que

$$\tilde{G}(\theta, t, s) = \tilde{G}(\theta, t, r) \tilde{G}(\theta, r, r \pm 1) \tilde{G}(\theta, r \pm 1, r \pm 2) \dots \tilde{G}(\theta, r \pm m, s),$$

e portanto

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(\theta, t, s)\| &\leq \|\tilde{G}(\theta, t, r)\| e^{-\beta_1 |m+1|} \\ &\leq M_1 e^{-\beta_1 |t-r|} e^{-\beta_1 |r-s|} \\ &\leq M_1 e^{-\beta_1 |t-s|}. \end{aligned}$$

Segue deste fato que π_1 tem dicotomia exponencial com constante M_1 e expoente β_1 . $\square$

Capítulo 4

Teoria Espectral

Ocupamo-nos neste capítulo do estudo do espectro dinâmico para sistemas evolucionários lineares $\pi = (\Phi, \sigma)$ em um fibrado de Banach $\mathcal{E} = X \times \Theta$, globalmente definidos em $\mathbb{R}$. Neste caso, as desigualdades da definição de dicotomia exponencial podem ser escritas, equivalentemente, como

$$\begin{aligned}\|\Phi(\theta, t)P(\theta)\Phi^{-1}(\theta, s)x\| &\leq Ke^{-\beta(t-s)}\|x\|, & t \geq s, \\ \|\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]\Phi^{-1}(\theta, s)x\| &\leq Ke^{\beta(t-s)}\|x\|, & t \leq s.\end{aligned}$$

Seja $\pi = (\Phi, \sigma)$ um sistema evolucionário linear definido em $\mathcal{E} = X \times \Theta$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o *fluxo deslocado* por $\pi_\lambda = (\Phi_\lambda, \sigma)$, onde

$$\Phi_\lambda(\theta, t) = e^{-\lambda t}\Phi(\theta, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta.$$

Definimos a seguir os conjuntos estável, instável e limitado inicial, correspondentes ao fluxo deslocado π_λ . Tais conjuntos são respectivamente dados por

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\lambda &\doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : \|e^{-\lambda t}\Phi(\theta, t)x\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty\}, \\ \mathcal{U}_\lambda &\doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : \|e^{-\lambda t}\Phi(\theta, t)x\| \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty\}, \\ \mathcal{B}_\lambda &\doteq \{(x, \theta) \in \mathcal{E} : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|e^{-\lambda t}\Phi(\theta, t)x\| < \infty\}.\end{aligned}$$

Quando $\lambda = 0$, denotaremos $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0$ e $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0$.

4.1 O Espectro Dinâmico

Seja $\hat{\Theta}$ um subconjunto invariante de Θ para o fluxo σ . O *resolvente* $\rho(\hat{\Theta})$ de $\hat{\Theta}$ com respeito ao sistema evolucionário linear π é o conjunto

$$\rho(\hat{\Theta}) \doteq \{\lambda \in \mathbb{R} : \pi_\lambda \text{ admite dicotomia exponencial sobre } \hat{\Theta}\}.$$

O espectro $\Sigma(\hat{\Theta})$ de $\hat{\Theta}$ com respeito a π é definido como

$$\Sigma(\hat{\Theta}) = \mathbb{R} \setminus \rho(\hat{\Theta}).$$

O principal resultado deste capítulo é o teorema que apresentamos a seguir.

Teorema 4.1. *Sejam $\pi = (\Phi, \sigma)$ um sistema evolucionário linear em $\mathcal{E}$ e $\hat{\Theta}$ um subconjunto conexo, compacto e invariante de Θ . Valem as seguintes afirmações:*

1. *Existe $a > 0$ de tal forma que*

$$\|\Phi(\theta, t)\| \leq M e^{a|t|},$$

para todo $\theta \in \Theta$ e todo $t \in \mathbb{R}$, e $\Sigma(\hat{\Theta}) \neq \emptyset$, $\Sigma(\hat{\Theta}) \subset [-a, a]$.

2. *Para cada conjunto $\{\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m\} \subset \rho(\hat{\Theta})$, com $\lambda_0 < -a$, $a < \lambda_m$ e $\Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i) \neq \emptyset$, os conjuntos*

$$\mathcal{V}_i \doteq \mathcal{V}_i(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_i}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{U}_{\lambda_{i-1}}(\hat{\Theta}), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

são subfibrados invariantes de $\mathcal{E}(\hat{\Theta})$.

3. *Sejam π_i a restrição de π a $\mathcal{V}_i$ e $\Sigma_i(\hat{\Theta})$ o espectro de $(\mathcal{V}_i, \pi_i)$ sobre $\hat{\Theta}$. Então*

$$(a) \quad \Sigma_i(\hat{\Theta}) = \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$(b) \quad \Sigma(\hat{\Theta}) = \bigcup_{i=1}^m \Sigma_i(\hat{\Theta}).$$

$$(c) \quad \mathcal{V}_i(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{V}_j(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta}), \quad i \neq j.$$

$$(d) \quad \mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{V}_1(\hat{\Theta}) + \mathcal{V}_2(\hat{\Theta}) + \dots + \mathcal{V}_m(\hat{\Theta}).$$

Para facilitar a demonstração do teorema precedente, verificaremos inicialmente algumas propriedades dos conjuntos $\rho(\hat{\Theta})$ e $\Sigma(\hat{\Theta})$.

Lema 4.2. *Sejam $\hat{\Theta}$ um conjunto compacto invariante em Θ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes afirmações:*

1. *se $\|\Phi_\lambda(\theta, t)\| \rightarrow 0$, para cada $\theta \in \hat{\Theta}$, quando $t \rightarrow \infty$, então $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, $\Sigma(\hat{\Theta}) \subseteq (-\infty, \lambda)$, e $\mathcal{S}_\mu(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$, para todo $\mu \geq \lambda$.*

2. *se $\|\Phi_\lambda(\theta, t)\| \rightarrow 0$, para cada $\theta \in \hat{\Theta}$, quando $t \rightarrow -\infty$, então $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, $\Sigma(\hat{\Theta}) \subseteq (\lambda, \infty)$, e $\mathcal{U}_\mu(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$, para todo $\mu \leq \lambda$.*

Demonstração. Demonstraremos (1). A demonstração de (2) pode ser feita de modo análogo. Para cada $\theta \in \hat{\Theta}$, existe $T(\theta) > 0$ tal que $\|\Phi_\lambda(\theta, t)\| < \frac{1}{2}$, para todo $t \geq T(\theta)$. Em particular, $\|\Phi_\lambda(\theta, T(\theta))\| < \frac{1}{2}$. Fixemos $x \in X$, com $\|x\| = 1$. Da continuidade de Φ_λ com relação a θ , segue que existe uma vizinhança $N_x(\theta)$ de θ , tal que $\|\Phi_\lambda(\tilde{\theta}, T(\theta))x\| < \frac{1}{2}$, para todo $\tilde{\theta} \in N_x(\theta)$. Como $\hat{\Theta}$ é compacto, podemos escolher um número finito de pontos $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$, de maneira que

$$\hat{\Theta} \subset \bigcup_{i=1}^m N_x(\theta_i).$$

Denotemos $T_j = T(\theta_j)$ e assumamos que os θ_j 's estejam ordenados de modo que

$$T(\theta_1) \leq T(\theta_2) \leq \dots \leq T(\theta_m).$$

Definamos

$$K \doteq \sup \{ \|\Phi_\lambda(\theta, t)\| : \theta \in \hat{\Theta}, 0 \leq t \leq T_m \}.$$

Afirmamos que $K < \infty$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $K = \infty$. Neste caso, existem seqüências $(\theta_n) \subset \hat{\Theta}$, $(t_n) \subset [0, T_m]$ tais que

$$\|\Phi_\lambda(\theta_n, t_n)\| > n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Como $\hat{\Theta}$ e $[0, T_m]$ são conjuntos compactos, existem $\theta_0 \in \hat{\Theta}$ e $t^* \in [0, T_m]$ tais que $\theta_n \rightarrow \theta_0$ e $t_n \rightarrow t^*$. Segue do Princípio da Limitação Uniforme que existe $x_0 \in X$ de tal forma que o conjunto

$$\{ \|\Phi_\lambda(\theta_n, t_n)x_0\| : n = 1, 2, 3, \dots \}$$

é ilimitado, uma contradição, já que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_\lambda(\theta_n, t_n)x_0\| = \|\Phi_\lambda(\theta_0, t^*)x_0\|.$$

Fixemos agora $t \geq 0$, e seja $\theta \in \hat{\Theta}$. Então $\theta \in N_x(\theta_{j_1})$, para algum j_1 , e $\|\Phi_\lambda(\theta, T_{j_1})x\| < \frac{1}{2}$. Da mesma forma, $\theta \cdot T_{j_1} \in N_x(\theta_{j_2})$, para algum j_2 , e

$$\|\Phi_\lambda(\theta, T_{j_1} + T_{j_2})x\| = \|\Phi_\lambda(\theta \cdot T_{j_1}, T_{j_2})\Phi_\lambda(\theta, T_{j_1})x\| < \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Seja $\tau = T_{j_1} + \dots + T_{j_l}$, e escolhamos t tal que

$$\tau = T_{j_1} + \dots + T_{j_l} \leq t \leq \tau + T_{j_{l+1}} \quad \text{e} \quad \|\Phi_\lambda(\theta, \tau)x\| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^l.$$

Como $lT_1 \leq \tau \leq t$ e $0 \leq t - \tau \leq T_m$, obtemos

$$\|\Phi_\lambda(\theta, t)x\| = \|\Phi_\lambda(\theta \cdot \tau, t - \tau)\Phi_\lambda(\theta, \tau)x\| \leq K \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_1} = Ke^{-\alpha t},$$

onde $\alpha = -T_1^{-1} \ln \left(\frac{1}{2} \right) > 0$.

Como K e α independem de x , resulta que

$$\|\Phi_\lambda(\theta, t)\| \leq K e^{-\alpha t}, \quad \theta \in \hat{\Theta}, \quad t \geq 0.$$

Desta forma, concluímos que π_λ tem dicotomia exponencial sobre $\hat{\Theta}$, cujo projetor $\mathbf{P}$ é o operador identidade I . Isto mostra que $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$. Além disso, se $\mu \geq \lambda$, temos

$$\|\Phi_\mu(\theta, t)\| = e^{(\lambda-\mu)t} \|\Phi_\lambda(\theta, t)\| \leq K e^{-\alpha t}, \quad \theta \in \hat{\Theta}, \quad t \geq 0.$$

Portanto, $\mu \in \rho(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_\mu(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$. □

Lema 4.3. *Seja $\hat{\Theta}$ um conjunto compacto invariante em Θ . Então o resolvente $\rho(\hat{\Theta})$ é um conjunto aberto. Além disso,*

$$\text{se } \lambda \in \rho(\hat{\Theta}), \quad \text{então } \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{S}_\mu \quad \text{e} \quad \mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U}_\mu,$$

qualquer que seja μ numa vizinhança de λ .

Demonstração. Consideremos $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$. Então π_λ admite dicotomia exponencial sobre $\hat{\Theta}$, ou seja, existem constantes positivas K e α e um projetor invariante $\mathbf{P} : \mathcal{E}(\hat{\Theta}) \rightarrow \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ de maneira que, para todo $\theta \in \hat{\Theta}$, temos

$$\begin{aligned} \|\Phi_\lambda(\theta, t) P(\theta) \Phi_\lambda^{-1}(\theta, s)\| &\leq K e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|\Phi_\lambda(\theta, t) [I - P(\theta)] \Phi_\lambda^{-1}(\theta, s)\| &\leq K e^{\alpha(t-s)}, \quad t \leq s. \end{aligned}$$

Assim, se μ satisfaz $|\lambda - \mu| < \beta$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$, então

$$\begin{aligned} \|\Phi_\mu(\theta, t) P(\theta) \Phi_\mu^{-1}(\theta, s)\| &\leq K e^{-\beta(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|\Phi_\mu(\theta, t) [I - P(\theta)] \Phi_\mu^{-1}(\theta, s)\| &\leq K e^{\beta(t-s)}, \quad t \leq s, \quad \theta \in \hat{\Theta}, \end{aligned}$$

de onde resulta que $\mu \in \rho(\hat{\Theta})$.

Finalmente, como as dicotomias exponenciais de π_λ e π_μ envolvem o mesmo projetor $\mathbf{P}$, então $\mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_\mu(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_\mu(\hat{\Theta})$, sempre que $|\lambda - \mu| < \beta$. □

Lema 4.4. *Seja $\hat{\Theta}$ um conjunto compacto invariante em Θ . Então o espectro $\Sigma(\hat{\Theta})$ é um conjunto compacto. Mais especificamente, existe $a > 0$ de maneira que, se $\lambda > a$, então $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{S}_\lambda = \mathcal{E}$; se $\lambda < -a$, então $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{U}_\lambda = \mathcal{E}$.*

Demonstração. É consequência imediata do Lema 4.3 que o espectro $\Sigma(\hat{\Theta})$ é um conjunto fechado, o que reduz nosso trabalho a mostrar que $\Sigma(\hat{\Theta})$ é um conjunto limitado. Da Proposição 1.1 segue que existem $k \geq 1$ e $a > 0$ de maneira que

$$\|\Phi(\theta, t)\| \leq ke^{a|t|}, \quad \theta \in \Theta, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, se $\lambda > a$, obtemos

$$\|\Phi_\lambda(\theta, t)\| \leq ke^{(a-\lambda)|t|},$$

sendo que o lado direito da expressão tende a zero quando $t \rightarrow \infty$. Nesse caso, o Lema 4.2 garante que $(a, \infty) \subset \rho(\hat{\Theta})$, ou seja, $\Sigma(\hat{\Theta}) \subset (-\infty, a]$.

Usando uma vez mais o Lema 4.2, concluímos que, se $\lambda < -a$, então $(-\infty, -a) \subset \rho(\hat{\Theta})$, ou melhor, $\Sigma(\hat{\Theta}) \subset [-a, \infty)$.

Combinando os resultados obtidos, chegamos à conclusão de que $\Sigma(\hat{\Theta}) \subset [-a, a]$. $\square$

Lema 4.5. *Seja $\hat{\Theta}$ um subconjunto não vazio de Θ , e assuma que $\dim \mathcal{E} \geq 1$. Então o espectro $\Sigma(\hat{\Theta})$ é um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\theta_0 \in \hat{\Theta}$ e consideremos o conjunto

$$H(\theta_0) = \overline{\{\theta_0 \cdot t : t \in \mathbb{R}\}}.$$

É imediato que $H(\theta_0)$ é um conjunto compacto invariante e também que $\Sigma(H(\theta_0)) \subset \Sigma(\hat{\Theta})$, de forma que será suficiente mostrarmos que $\Sigma(H(\theta_0))$ é não vazio.

Segue da Proposição 1.1 que existem $M \geq 1$ e $a > 0$ satisfazendo

$$\|\Phi(\theta \cdot t)\| \leq Me^{a|t|}, \quad \theta \in \hat{\Theta}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a partir do Lema 4.2, podemos afirmar que:

- (i) se $\lambda > a$, então $\lambda \in \rho(H(\theta_0))$, $\mathcal{S}_\lambda(H(\theta_0)) = \mathcal{E}(H(\theta_0))$ e $\mathcal{U}_\lambda(H(\theta_0)) = \mathcal{E}_0(H(\theta_0))$.
- (ii) se $\lambda < -a$, então $\lambda \in \rho(H(\theta_0))$, $\mathcal{U}_\lambda(H(\theta_0)) = \mathcal{E}(H(\theta_0))$ e $\mathcal{S}_\lambda(H(\theta_0)) = \mathcal{E}_0(H(\theta_0))$.

Conciliando (i) e (ii), concluímos que $\Sigma(H(\theta_0)) \subset [-a, a]$.

Definamos agora

$$\lambda_0 \doteq \inf\{\lambda \in \rho : \mathcal{S}_\lambda(H(\theta_0)) = \mathcal{E}(H(\theta_0))\}.$$

Então $-a \leq \lambda_0 \leq a$, já que $\mathcal{S}_\lambda(H(\theta_0)) = \mathcal{E}_0(H(\theta_0)) \neq \mathcal{E}(H(\theta_0))$ para $\lambda < -a$.

Suponhamos, com o propósito de chegar a uma contradição, que $\lambda_0 \in \rho(H(\theta_0))$. Distinguímos dois casos:

$$(a) \mathcal{S}_{\lambda_0}(H(\theta_0)) = \mathcal{E}(H(\theta_0));$$

$$(b) \mathcal{S}_{\lambda_0}(H(\theta_0)) \neq \mathcal{E}(H(\theta_0)).$$

No caso (a), usamos o Lema 4.3 para garantir que $\mathcal{S}_\lambda(H(\theta_0)) = \mathcal{E}(H(\theta_0))$, para λ numa vizinhança de λ_0 , contradizendo a definição de λ_0 .

No caso (b), devemos ter $\mathcal{U}_{\lambda_0}(H(\theta_0)) \neq \mathcal{E}_0(H(\theta_0))$, uma vez que

$$\mathcal{E}(\theta) = \mathcal{U}_{\lambda_0}(\theta) + \mathcal{S}_{\lambda_0}(\theta), \quad \text{para todo } \theta \in H(\theta_0).$$

Deste modo, usando novamente o Lema 4.3, concluimos que $\mathcal{U}_\lambda(H(\theta_0)) \neq \mathcal{E}_0(H(\theta_0))$, para λ numa vizinhança de λ_0 . Entretanto, para $\lambda > \lambda_0$, a definição de λ_0 implica que isto contradiz o fato de $\mathcal{U}_\lambda(H(\theta_0)) = \mathcal{E}_0(H(\theta_0))$.

Portanto, $\lambda_0 \in \Sigma(H(\theta_0))$. □

Lema 4.6. *Seja $\hat{\Theta}$ um conjunto compacto invariante em Θ . Consideremos $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$, com $\lambda_1 < \lambda_2$. Suponhamos que*

$$\mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) \quad e \quad \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}).$$

Então $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \rho(\hat{\Theta})$ e

$$\mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \quad e \quad \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}), \quad \text{para todo } \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2].$$

Demonstração. Uma vez que $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$, existem projetores $\mathbf{P}_{\lambda_1}$ e $\mathbf{P}_{\lambda_2}$, e constantes positivas K e α de tal forma que

$$\|\Phi_\lambda(\theta, t)P_\lambda(\theta)\Phi_\lambda^{-1}(\theta, s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s,$$

$$\|\Phi_\lambda(\theta, t)[I - P_\lambda(\theta)]\Phi_\lambda^{-1}(\theta, s)\| \leq Ke^{\alpha(t-s)}, \quad t \leq s,$$

qualquer que seja $\theta \in \hat{\Theta}$, para $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$.

Como $\mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$, temos necessariamente $\mathbf{P}_{\lambda_1} = \mathbf{P}_{\lambda_2}$. Denotando $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\lambda$, podemos reescrever

$$e^{-\lambda(t-s)}\|\Phi(\theta, t)P(\theta)\Phi^{-1}(\theta, s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s, \quad (4.1)$$

$$e^{-\lambda(t-s)}\|\Phi(\theta, t)[I - P(\theta)]\Phi^{-1}(\theta, s)\| \leq Ke^{\alpha(t-s)}, \quad t \leq s, \quad (4.2)$$

qualquer que seja $\theta \in \hat{\Theta}$, para $\lambda = \lambda_1$ ou $\lambda = \lambda_2$.

Observemos agora que se $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$, temos

$$\begin{aligned} e^{-\lambda(t-s)} \|\Phi(\theta, t)P(\theta)\Phi^{-1}(\theta, s)\| &\leq e^{-\lambda_1(t-s)} \|\Phi(\theta, t)P(\theta)\Phi^{-1}(\theta, s)\| \\ &\leq Ke^{-\alpha(t-s)}, \quad t-s \geq 0, \\ e^{-\lambda(t-s)} \|\Phi(\theta, t)[I-P(\theta)]\Phi^{-1}(\theta, s)\| &\leq e^{-\lambda_2(t-s)} \|\Phi(\theta, t)[I-P(\theta)]\Phi^{-1}(\theta, s)\| \\ &\leq Ke^{\alpha(t-s)}, \quad t-s \leq 0, \end{aligned}$$

ou seja, as desigualdades em (4.1) e (4.2) estão satisfeitas para todo $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, encerrando a demonstração. $\square$

Proposição 4.7. *Sejam A, B e C subespaços de X . Se $C \subseteq A$, então*

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C).$$

Proposição 4.8. *Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$ e $\lambda_1 < \lambda_2$, então*

$$\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}).$$

Demonstração. Como $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$, temos $\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta})$, bem como $\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$. Além disso, sendo $\lambda_1 < \lambda_2$, segue que $\mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) \subset \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta})$. Nesse caso, usando a Proposição 4.7, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\hat{\Theta}) &= \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap (\mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})) + \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \\ &= \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}). \end{aligned}$$

$\square$

Lema 4.9. *Seja $\hat{\Theta}$ um conjunto compacto invariante em Θ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$, com $\lambda_1 < \lambda_2$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \Sigma(\hat{\Theta}) \neq \emptyset$.
2. $\mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) \neq \mathcal{E}_0(\Theta)$.

Além disso, $\mathcal{F} = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$ é um subfibrado invariante de $\mathcal{E}$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Suponhamos, com o propósito de obter uma contradição, que $\mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$. Neste caso, usando a Proposição 4.8, obtemos

$$\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}).$$

Por outro lado,

$$\mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}),$$

já que $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$. Agora, como $\lambda_1 < \lambda_2$, então $\mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) \subseteq \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \subseteq \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$, o que nos fornece $\mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$. É consequência imediata do Lema 4.6 que

$$\mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda}(\hat{\Theta}) \quad \text{e} \quad \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda}(\hat{\Theta}),$$

qualquer que seja $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, e também que $[\lambda_1, \lambda_2] \subset \rho(\hat{\Theta})$.

Este fato nos mostra que $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \Sigma(\hat{\Theta}) = \emptyset$, contrariando a hipótese em (1).

(2) $\Rightarrow$ (1). Vamos definir

$$\mu \doteq \inf\{\lambda \in \rho(\hat{\Theta}) : \mathcal{S}_{\lambda}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})\}.$$

Afirmamos que $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$ e que $\mu \in \Sigma(\hat{\Theta})$.

Realmente, o Lema 4.3 garante que $\mu < \lambda_2$.

Vejamos agora que $\mu \in \Sigma(\hat{\Theta})$, supondo, por absurdo, que $\mu \in \rho(\hat{\Theta})$. Nesse caso, existe uma vizinhança V_{μ} de μ de maneira que $\mathcal{S}_{\lambda}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\mu}(\hat{\Theta})$, qualquer que seja $\lambda \in V_{\mu}$, uma contradição.

Verifiquemos que $\mu > \lambda_1$, procedendo novamente por redução ao absurdo. Se $\mu \leq \lambda_1$, então

$$\mathcal{S}_{\mu}(\hat{\Theta}) \subseteq \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \subseteq \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}).$$

Usando novamente o Lema 4.3, bem como a definição de μ , obtemos $\mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$. Considerando agora a hipótese em (2), temos $\mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \neq \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$, contradizendo o fato de $\lambda_1 \in \rho(\hat{\Theta})$. Em resumo, $\mu \in (\lambda_1, \lambda_2)$.

Por fim, o fato de $\mathcal{F} = \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$ ser um subfibrado invariante segue justamente de $\mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$ serem subfibrados invariantes. $\square$

Lema 4.10. *Seja $\hat{\Theta}$ um conjunto compacto invariante em Θ , e considere $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$ satisfazendo $(\lambda_1, \lambda_2) \cap \Sigma(\hat{\Theta}) \neq \emptyset$. Sejam ainda*

$$\mathcal{F} \doteq \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}),$$

$\hat{\pi}$ a restrição π a $\mathcal{F}$, e $\Sigma_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) \doteq \Sigma(\mathcal{F})$ o espectro de $(\mathcal{F}, \hat{\pi})$ sobre Θ . Então

$$\Sigma_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) = \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_1, \lambda_2).$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, e definamos

$$\mathcal{F}_s(\lambda) \doteq \mathcal{F} \cap \mathcal{S}_{\lambda}(\hat{\Theta}) \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_u(\lambda) \doteq \mathcal{F} \cap \mathcal{U}_{\lambda}(\hat{\Theta}).$$

Mostraremos que $\mathcal{F}_s(\lambda)$ e $\mathcal{F}_u(\lambda)$ são subfibrados invariantes e

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s(\lambda) + \mathcal{F}_u(\lambda).$$

Daqui em diante, quando julgarmos não haver risco de equívocos, omitiremos o argumento $\hat{\Theta}$, apenas para simplificar a notação. Consideraremos inicialmente o caso em que $\lambda < \lambda_1$. Deste modo, temos

$$\mathcal{F}_s(\lambda) = \mathcal{F} \cap \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} \cap \mathcal{S}_\lambda = \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathcal{F}_0,$$

e também

$$\mathcal{F}_u(\lambda) = \mathcal{F} \cap \mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} \cap \mathcal{U}_\lambda = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathcal{F},$$

de modo que

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_s(\lambda) + \mathcal{F}_u(\lambda).$$

Procedendo de maneira similar no caso em que $\lambda > \lambda_2$, temos

$$\mathcal{F}_s(\lambda) = \mathcal{F} \quad \text{e} \quad \mathcal{F}_u(\lambda) = \mathcal{F}_0.$$

Ocuparemos-nos agora do caso em que $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Para tanto, lançaremos mão da Proposição 4.8, e também do fato que $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(\hat{\Theta})$. Obtemos assim

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\lambda_1} &= \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap (\mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_2}) = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{F} \\ \mathcal{U}_{\lambda_1} &= \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap (\mathcal{U}_\lambda + \mathcal{S}_\lambda) = \mathcal{U}_\lambda + \mathcal{F}_s(\lambda) \\ \mathcal{U}_\lambda &= \mathcal{U}_\lambda \cap (\mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_2}) = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{F}_u(\lambda). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{F} = \mathcal{U}_{\lambda_1} = \mathcal{U}_\lambda + \mathcal{F}_s(\lambda) = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{F}_u(\lambda) + \mathcal{F}_s(\lambda),$$

e, como $\mathcal{F}_u(\lambda) + \mathcal{F}_s(\lambda) \subseteq \mathcal{F}$, concluímos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_u(\lambda) + \mathcal{F}_s(\lambda)$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $\rho(\hat{\Theta}) \subseteq \rho_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta})$. Com efeito, se $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, então existem constantes positivas K e β e um projetor invariante $\mathbf{P} : \mathcal{E}(\hat{\Theta}) \rightarrow \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ de tal forma que

$$\begin{aligned} \|\Phi_\lambda(\theta, t)P(\theta)\Phi_\lambda^{-1}(\theta, s)x\| &\leq Ke^{-\beta(t-s)}\|x\|, \quad t \geq s, \\ \|\Phi_\lambda(\theta, t)[I - P(\theta)]\Phi_\lambda^{-1}(\theta, s)x\| &\leq Ke^{\beta(t-s)}\|x\|, \quad t \leq s, \end{aligned}$$

para todo $\theta \in \hat{\Theta}$, com $\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{S}_\lambda(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{U}_\lambda(\hat{\Theta})$. Seja $\hat{\mathbf{P}}$ a restrição de $\mathbf{P}$ a $\mathcal{F}$. Então

$$\mathcal{R}(\hat{\mathbf{P}}) = \mathcal{F}_s(\lambda), \quad \mathcal{N}(\hat{\mathbf{P}}) = \mathcal{F}_u(\lambda), \quad \mathcal{F} = \mathcal{R}(\hat{\mathbf{P}}) + \mathcal{N}(\hat{\mathbf{P}}),$$

e restringindo as desigualdades acima a todo $(x, \theta) \in \mathcal{F}$, segue que

$$\begin{aligned}\|\hat{\Phi}_\lambda(\theta, t)\hat{P}(\theta)\hat{\Phi}_\lambda^{-1}(\theta, s)x\| &\leq Ke^{-\beta(t-s)}\|x\|, \quad t \geq s, \\ \|\hat{\Phi}_\lambda(\theta, t)[I - \hat{P}(\theta)]\hat{\Phi}_\lambda^{-1}(\theta, s)x\| &\leq Ke^{\beta(t-s)}\|x\|, \quad t \leq s.\end{aligned}$$

Isto mostra que $\lambda \in \rho_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta})$, ou seja, $\Sigma_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) \subset \Sigma(\hat{\Theta})$. Além disso, como $\mathcal{F} \subset \mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})$, então

$$\|\hat{\Phi}_{\lambda_2}(\theta, t)x\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow \infty,$$

para todo $(x, \theta) \in \mathcal{F}$, uniformemente em x . Segue do Lema 4.2 que $\Sigma_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) \subseteq (-\infty, \lambda_2)$ e $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}(\lambda) = \mathcal{F}$, para todo $\lambda \geq \lambda_2$. Do mesmo modo, $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}_{\lambda_1}$ implica que

$$\|\hat{\Phi}_{\lambda_1}(\theta, t)x\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow -\infty,$$

e então $\Sigma_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) \subseteq (\lambda_1, \infty)$ e $\mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\lambda) = \mathcal{F}$. Portanto,

$$\Sigma_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) \subseteq (\lambda_1, \lambda_2) \cap \Sigma(\hat{\Theta}).$$

Para verificarmos a outra inclusão, será suficiente mostrarmos que

$$\rho_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_1, \lambda_2) \subset \rho(\hat{\Theta}),$$

uma vez que isto implica em

$$\rho^c(\hat{\Theta}) \subset \rho_{\mathcal{F}}^c(\hat{\Theta}) \cup (-\infty, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \infty),$$

ou seja,

$$\Sigma(\hat{\Theta}) \subset \Sigma_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) \cup (-\infty, \lambda_1] \cup [\lambda_2, \infty).$$

Seja então $\lambda \in \rho_{\mathcal{F}}(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_1, \lambda_2)$. Neste caso, existem constantes positivas K e β , e um projetor invariante $\mathbf{Q}$ tais que

$$\|\hat{\Phi}_\lambda(\theta, t)\mathbf{Q}(\theta)\hat{\Phi}_\lambda^{-1}(\theta, s)x\| \leq Ke^{-\beta(t-s)}\|x\|, \quad t \geq s, \quad (4.3)$$

$$\|\hat{\Phi}_\lambda(\theta, t)[I - \mathbf{Q}(\theta)]\hat{\Phi}_\lambda^{-1}(\theta, s)x\| \leq Ke^{\beta(t-s)}\|x\|, \quad t \leq s, \quad (4.4)$$

qualquer que seja $\theta \in \hat{\Theta}$, com $\mathcal{R}(\mathbf{Q}) = \hat{\mathcal{S}}_\lambda$ e $\mathcal{N}(\mathbf{Q}) = \hat{\mathcal{U}}_\lambda$.

Consideremos agora os projetores

$$\mathbf{P}_1, \mathbf{P} : \mathcal{E}(\hat{\Theta}) \rightarrow \mathcal{E}(\hat{\Theta}),$$

com

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_1) = \mathcal{S}_{\lambda_1}, \quad \mathcal{N}(\mathbf{P}_1) = \mathcal{U}_{\lambda_1}$$

e

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}) = \mathcal{F} = \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2}, \quad \mathcal{N}(\mathbf{P}) = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_1}.$$

Segue da Proposição 4.8 que

$$\mathcal{E} = \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_1} + \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} = \mathcal{R}(\mathbf{P}) + \mathcal{N}(\mathbf{P}).$$

Nosso propósito será agora mostrar que $\mathbf{P}_\lambda = \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{P}$ é um projetor em $\mathcal{E}$. Para tanto, notemos que $\mathbf{P}_1\mathbf{Q}\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{P}_1 = 0$, e $\mathbf{P}\mathbf{Q} = \mathbf{P}$, uma vez que $\mathcal{R}(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{N}(\mathbf{P}_1)$, $\mathcal{R}(\mathbf{P}_1) \subset \mathcal{N}(\mathbf{P})$ e $\mathcal{R}(\mathbf{Q}) \subset \mathcal{R}(\mathbf{P})$, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda^2 &= \mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_1\mathbf{Q}\mathbf{P} + \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{P} \\ &= \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Além disso, como $\mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}\mathbf{P} = 0$, o núcleo do projetor $\mathbf{P}_\lambda$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathbf{P}_\lambda) &= \mathcal{N}(\mathbf{P}_1) \cap \mathcal{N}(\mathbf{Q}\mathbf{P}) \\ &= \hat{\mathcal{U}}_\lambda + \mathcal{U}_{\lambda_2}. \end{aligned}$$

Da Proposição 4.8 segue que a imagem de $\mathbf{P}_\lambda$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{P}_\lambda) &= \mathcal{U}_{\lambda_1} \cap \mathcal{S}_{\lambda_2} + \mathcal{U}_{\lambda_2} + \mathcal{S}_{\lambda_1} - \hat{\mathcal{U}}_\lambda - \mathcal{U}_{\lambda_2} \\ &= \mathcal{F} + \mathcal{S}_{\lambda_1} - \hat{\mathcal{U}}_\lambda \\ &= \hat{\mathcal{S}}_\lambda + \mathcal{S}_{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Finalmente, como no Lema 4.6, podemos mostrar que existem constantes L e α tais que

$$\begin{aligned} \|\Phi_\lambda(\theta, t)P_\lambda(\theta)\Phi_\lambda(\theta, s)\| &\leq Le^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s, \\ \|\Phi_\lambda(\theta, t)[I - P_\lambda(\theta)]\Phi_\lambda(\theta, s)\| &\leq Le^{\alpha(t-s)}, \quad t \leq s, \end{aligned}$$

para todo $\theta \in \hat{\Theta}$. □

Encerrados os lemas auxiliares, podemos agora retornar à demonstração do resultado central deste capítulo.

Demonstração do Teorema 4.1. A afirmação (1) segue imediatamente da Proposição 1.1 e dos Lemas 4.4 e 4.5; (2) segue do Lema 4.9. Na afirmação (3), (a) é consequência do Lema 4.10.

Para provar (b), notemos que, como $\Sigma(\hat{\Theta}) \subset [-a, a]$, então

$$\begin{aligned}\Sigma(\hat{\Theta}) &= \Sigma(\hat{\Theta}) \cap \left(\bigcup_{i=1}^m (\lambda_{i-1}, \lambda_i) \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \Sigma(\hat{\Theta}) \cap (\lambda_{i-1}, \lambda_i) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \Sigma_i(\hat{\Theta}).\end{aligned}$$

Para a demonstração de (c), assumiremos que $i+1 \leq j$. Como $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{S}_{\lambda_i}$, $\mathcal{V}_j = \mathcal{S}_{\lambda_j} \cap \mathcal{U}_{\lambda_{j-1}} \subset \mathcal{U}_{\lambda_i}$, e $\mathcal{S}_{\lambda_i} \cap \mathcal{U}_{\lambda_i} = \mathcal{E}_0$, segue que $\mathcal{V}_i(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{V}_j(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$.

Resta-nos apenas verificar a afirmação (d). Para tanto, recordemos do Lema 4.4 que se $\lambda > a$, então $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, $\mathcal{S}_{\lambda}(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{U}_{\lambda}(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$. Do mesmo modo, se $\lambda < -a$, então $\lambda \in \rho(\hat{\Theta})$, $\mathcal{U}_{\lambda}(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}(\hat{\Theta})$ e $\mathcal{S}_{\lambda}(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$. Além disso, como $\lambda_i \in \rho(\hat{\Theta})$, segue que $\mathcal{E}(\hat{\Theta}) = \mathcal{S}_{\lambda_i}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_i}(\hat{\Theta})$. Deste modo, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\hat{\Theta}) &= \mathcal{U}_{\lambda_0}(\hat{\Theta}) = \mathcal{U}_{\lambda_0}(\hat{\Theta}) \cap (\mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta})) \\ &= \mathcal{U}_{\lambda_0}(\hat{\Theta}) \cap \mathcal{S}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \\ &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \\ &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{U}_{\lambda_1}(\hat{\Theta}) \cap (\mathcal{S}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) + \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta})) \\ &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{U}_{\lambda_2}(\hat{\Theta}) \\ &\vdots \\ &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m + \mathcal{U}_{\lambda_m}(\hat{\Theta}) \\ &= \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \dots + \mathcal{V}_m,\end{aligned}$$

já que $\mathcal{U}_{\lambda_m}(\hat{\Theta}) = \mathcal{E}_0(\hat{\Theta})$. □

Referências Bibliográficas

- [1] A. CARVALHO, "Dicotomias discretas e aplicações", *ICMC-USP*, Dissertação de Mestrado, 1987.
- [2] S. N. CHOW AND H. LEIVA, Dynamical spectrum for skew product flow in Banach spaces, *World Sci. Publishing*, River Edge, **NJ** (1995), 85-105.
- [3] S. N. CHOW AND H. LEIVA, Existence and Roughness of the exponential dichotomy for skew product semiflow in Banach Spaces, *Journal of Differential Equations*, **120** (1995), 429-477.
- [4] D. HENRY, "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Springer, New York, 1981.
- [5] R. J. SACKER AND G. R. SELL, Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems I, *Journal of Differential Equations*, **15** (1974), 429-458.
- [6] R. J. SACKER AND G. R. SELL, Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems II, *Journal of Differential Equations*, **22** (1976), 478-496.
- [7] R. J. SACKER AND G. R. SELL, Existence of dichotomies and invariant splitting for linear differential systems III, *Journal of Differential Equations*, **22** (1976), 497-522.
- [8] R. J. SACKER AND G. R. SELL, A spectral theory for linear differential systems, *Journal of Differential Equations*, **27** (1978), 320-358.
- [9] R. J. SACKER AND G. R. SELL, Dichotomies for Linear Evolutionary Equations in Banach Spaces, *Journal of Differential Equations*, **113** (1994), 17-67.