Equações de Navier-Stokes: o problema de um milhão de dólares sob o ponto de vista da continuação de soluções

Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa

Equações de Navier-Stokes: o problema de um milhão de dólares sob o ponto de vista da continuação de soluções

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

USP – São Carlos
Setembro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S725e Sousa, Alexandre do Nascimento Oliveira
Equações de Navier-Stokes: o problema de um milhão de
dólares sob o ponto de vista da continuação de soluções
/ Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa; orientador
Alexandre Nolasco de Carvalho. -- São Carlos -- SP,
2017.
133 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Navier-Stokes. 2. boa colocação local e global.
3. continuação. 4. crescimento crítico. I. Carvalho,
Alexandre Nolasco de, orient. II. Título.

Alexandre do Nascimento Oliveira Sousa

**Navier-Stokes equations: the one million dollar problem
from the point of view of continuation of solutions**

Master dissertation submitted to the Instituto de
Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-
USP, in partial fulfillment of the requirements for the
degree of the Master Program in Mathematics. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Nolasco de Carvalho

**USP – São Carlos
September 2017**

*Este trabalho é dedicado à mulher que mais admiro, sem ela nada disso seria possível,
minha querida mãe Barbara.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço...

primeiramente à minha mãe, Bárbara, que desde que me entendo por gente me apoiou, me ensinou a ser um ser humano melhor e lutar pelos meus objetivos e aqui estou eu concluindo um deles.

à minha família, espalhada por todo o país, sou bastante grato pelo apoio e pelo carinho mesmo a quilômetros de distância.

ao meu orientador e xará professor Alexandre Nolasco que me passou os problemas belíssimos que se encontram nesse texto. Mesmo nos momentos mais sombrios o professor Alexandre consegue com sua paixão pela Matemática e entusiasmo fazer as coisas clarear. Sou muito grato por todo aprendizado que pude “sugar” dele durante estes dois anos de trabalho.

à todos meu amigos desse Brasil afora, da Matemática ou não, os quais sempre pude contar apesar da distância, falta de tempo e/ou outras peculiaridades da vida.

à Vitória, minha comparsa, por sua paciência, compreensão e principalmente por ser excelente companheira.

aos meus colegas de graduação e mestrado com os quais aprendi muito, não só em como estudar, mas como me expressar, como pensar e também contar piadas ruins sobre Matemática.

aos professores da UnB por terem tido papel fundamental na minha formação. Em especial, a Simone Mazzini, Célius Magalhães e Luciana Àvila os quais tive oportunidade de trabalhar com atividades acadêmicas diversas durante minha graduação.

aos professores e funcionários do ICMC por tornarem esse trabalho possível.

ao programa de pós graduação do ICMC-USP.

ao CNPQ pelo apoio financeiro.

à todos muito obrigado, graças a vocês consegui concluir este trabalho.

*“A Matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade,
mas também suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura.”*
(Bertrand Russell)

RESUMO

SOUSA, A. N. O.. **Equações de Navier-Stokes: o problema de um milhão de dólares sob o ponto de vista da continuação de soluções.** 2017. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Neste trabalho consideramos o problema de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u - \nabla \pi + f(t) - (u \cdot \nabla)u, \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x),\end{aligned}\tag{1}$$

onde $u_0 \in L^N(\Omega)^N$ e Ω é um subconjunto aberto, limitado e suave de $\mathbb{R}^N$. Provamos que o problema acima é localmente bem colocado e fornecemos condições para obter que estas soluções existem para todo $t \geq 0$. Utilizamos técnicas de equações parabólicas semilineares considerando não linearidades com crescimento crítico desenvolvidas em ([ARRIETA; CARVALHO, 1999](#)).

Palavras-chave: Navier-Stokes, boa colocação local e global, continuação, crescimento crítico.

ABSTRACT

SOUSA, A. N. O. **Navier-Stokes equations: the one million dollar problem from the point of view of continuation of solutions.** 2017. 133 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

In this work we consider the Navier-Stokes problem on $\mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u - \nabla \pi + f(t) - (u \cdot \nabla)u, \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x),\end{aligned}\tag{2}$$

where $u_0 \in L^N(\Omega)^N$ and Ω is an open, bounded and smooth subset of $\mathbb{R}^N$. We prove that the above problem is locally well posed and give conditions to obtain that these solutions exist for all $t \geq 0$. We used techniques of semilinear parabolic equations considering nonlinearities with critical growth developed in ([ARRIETA; CARVALHO, 1999](#)).

Keywords: Navier-Stokes, local and global well posedness, continuation, critical growth.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Equações de Navier-Stokes	17
1.2	Problema de Cauchy semilinear	18
1.3	Por que problema “crítico”?	18
1.4	Descrição do conteúdo da dissertação	21
2	PRELIMINARES	23
2.1	Análise espectral	23
2.1.1	<i>Operadores fechados</i>	23
2.1.2	<i>Operadores duais</i>	24
2.1.3	<i>Operadores auto-adjuntos</i>	25
2.2	Semigrupos e seus geradores	26
2.2.1	<i>Definições e resultados básicos</i>	26
2.2.2	<i>O Teorema de Hille-Yosida</i>	27
2.2.3	<i>Operadores dissipativos e a imagem numérica</i>	28
2.2.4	<i>Operadores setoriais e semigrupos analíticos</i>	30
3	INTERPOLAÇÃO COMPLEXA	33
3.1	Conceitos preliminares	33
3.2	Definição dos métodos de interpolação complexa	34
3.3	Propriedades simples dos espaços $\tilde{E}_{[\theta]}$	41
3.4	O Teorema de equivalência	45
3.5	O Teorema de dualidade	48
3.6	O Teorema de reiteração	51
3.7	Aplicações	52
4	ESCALAS DE ESPAÇOS DE BANACH	57
4.1	Escalas de espaços de Banach	57
4.2	Escalas de potência	62
4.3	Espaços de extrapolação	65
4.4	Escalas duais	69
4.5	Escalas de interpolação-extrapolação	74
4.6	Semigrupos em escalas de interpolação-extrapolação	77

5	PROBLEMAS PARABÓLICOS SEMILINEARES COM CRESCIMENTO CRÍTICO	89
5.1	Boa colocação local no caso crítico	89
5.2	Teorema de boa colocação para o caso crítico	92
5.3	Continuação de soluções	102
5.4	Regularização de soluções	106
5.5	Caso autônomo	109
6	EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	113
6.1	Projeção de Leray	114
6.2	Operador de Stokes	118
6.3	Formulação “muito fraca” para a equação de Navier-Stokes	123
6.4	Existência e Suavidade para as Equações de Navier-Stokes	128
	REFERÊNCIAS	131
	Índice	133

INTRODUÇÃO

1.1 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido num subconjunto Ω de $\mathbb{R}^N$, onde N pode ser considerado como 2 ou 3. Dados uma posição $x \in \Omega$ e um tempo t positivo queremos encontrar um campo velocidade do fluido $u(x, t) \in \mathbb{R}^N$ e uma função pressão $\pi(x, t) \in \mathbb{R}$ satisfazendo o sistema

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \nabla \pi + f(t) - (u \cdot \nabla)u, \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1.1}$$

O problema acima é chamado de equações de Navier-Stokes e o objetivo deste trabalho é provar um resultado de boa colocação local e dar condições para se obter que a solução é globalmente definida, ou seja, é definida para todo $t \geq 0$. Faremos isto utilizando técnicas de equações parabólicas semilineares no caso em que a não linearidade apresenta “crescimento crítico”, conceito que introduziremos na seção seguintes.

Além das equações de Navier-Stokes, problemas como as equações do calor, das ondas fortemente amortecidas, de Cahn-Hilliard, de FitzHugh-Nagumo, de Ginzburg-Landau, entre outros, podem ser escritos como um “problema de Cauchy Semilinear”, o qual iremos descrever na seção seguinte. Por isso, mesmo que o objetivo deste texto seja trabalhar com o problema (1.1), vamos também estudar um método geral para resolver problemas parabólicos abstratos e fica a cargo do leitor aplicar no seu problema.

1.2 Problema de Cauchy semilinear

Vamos estudar equações diferenciais semilineares com termos não lineares que apresentam crescimento crítico. Para fixar ideias considere um problema de valor inicial do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t, x), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0 \in E, \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é o gerador de um semigrupo analítico em um espaço de Banach E .

As questões relacionadas a (1.2) que constituem esta dissertação são:

1. O problema (1.2) é localmente bem colocado? Os resultados que estudaremos são a existência local, a unicidade, a continuidade relativamente a dados iniciais e a continuação de soluções. Para nós estes estudos estão relacionados ao caso em que o termo não linear f apresenta *crescimento crítico*.

Aqui a técnica que será utilizada é a identificação dos espaços de ordem fracionárias (em geral, obtidos via interpolação) e o estudo das propriedades de ε -regularidade de f (conceito introduzido em (ARRIETA; CARVALHO, 1999)).

2. É natural questionar sob que condições (ótimas) as soluções do problema (1.2) podem ser **continuadas**. Nesse caso, busca-se obter condições que assegurem que as soluções não explodem em tempo finito. Para não-linearidades críticas esta condição é muito mais delicada e, em muitos casos, ainda esta em aberto.

Este trabalho cobre, para uma classe ampla, as questões mais fundamentais das equações diferenciais. Pretendemos aplicar as técnicas desenvolvidas aqui às equações de Navier-Stokes.

1.3 Por que problema “crítico”?

Consideremos novamente o problema de valor inicial (1.2), onde o operador linear $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é gerador de um semigrupo analítico $\{e^{At}; t \geq 0\}$ em um espaço de Banach E_0 e $(E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$, $0 \leq \alpha$, os espaços obtidos através das potências do operador A e o método de interpolação complexa, ver Capítulo 4. Assumimos, sem perda de generalidade, que

$$\begin{aligned} \|e^{At}x\|_\alpha &\leq M\|x\|_\alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad t \geq 0 \\ \|e^{At}x\|_\alpha &\leq Mt^{-\alpha}\|x\|_0, \quad \alpha \geq 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Por simplicidade assuma que em (1.2) f é independente do tempo.

Veremos que se $f : E_1 \rightarrow E_\alpha$, $\alpha > 0$, é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de E_1 então o problema (1.2) é localmente bem colocado em E_1 . A ideia da prova segue abaixo.

Neste caso, para cada $x_0 \in E_1$ procuramos por pontos fixos de T no espaço

$$K(\tau, \mu) = \{x(t) \in C([0, \tau], E_1); x(0) = x_0, \|x(t)\|_{L^\infty([0, \tau], E_1)} \leq \|x_0\|_1 + \mu\},$$

onde T é dado por

$$(Tx)(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(x(s))ds. \quad (1.4)$$

Os cálculos,

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t)\|_1 &\leq \|e^{At}x_0\|_1 + M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|f(x(s))\|_\alpha ds \\ &\leq \|e^{At}x_0\|_1 + CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds + CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds \sup_{0 \leq s \leq t} \{\|x(s)\|_1\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\|_1 &\leq M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|f(x(s)) - f(y(s))\|_\alpha ds \\ &\leq CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|x(s) - y(s)\|_1 ds \\ &\leq (CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds) \sup_{0 \leq s \leq t} \{\|x(s) - y(s)\|_1\} \end{aligned}$$

juntamente com o fato que $\|e^{At}x_0\|_1 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \|x_0\|_1$, $\int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds = t^\alpha \int_0^1 (1-s)^{-1+\alpha} ds \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, sugerem que para $\mu > 0$ fixo podemos escolher $\tau > 0$ suficientemente pequeno tal que $T : K(\tau, \mu) \rightarrow K(\tau, \mu)$ e que T é uma contração estrita em $K(\tau, \mu)$. Uma vez que isto é conseguido, o Teorema do Ponto Fixo de Banach se encarrega da existência e unicidade de solução para a equação integral.

Com algum esforço extra podemos mostrar que a solução encontrada é uma solução da equação diferencial (1.2), ver por exemplo (HENRY, 1985).

Na análise acima, a convergência da integral imprópria $\int_0^1 (1-s)^{-1+\alpha} ds$, que é equivalente ao fato que $\alpha > 0$, é essencial e todo o argumento cai por terra quando $\alpha = 0$. Também vale notar que como $A : E_1 \rightarrow E_0$, o fato que $f : E_1 \rightarrow E_\alpha$ com $\alpha > 0$ significa que as soluções do problema (1.2) podem ser obtidas como perturbações do problema linear $\dot{x} = Ax$.

Estamos interessados na resolubilidade local do problema (1.2), quando $\alpha = 0$, ou seja, no caso em que $f : E_1 \rightarrow E_0$. Neste caso, se a única hipótese sobre f é que $f : E_1 \rightarrow E_0$ seja localmente Lipschitz, será impossível mostrar que o problema (1.2) é localmente bem colocado. Sendo A um gerador de semigrupo analítico, quando tomamos por exemplo

$f = -2A$, obtemos a equação $\dot{x} = Ax + f(x) = -Ax$ o qual é não é bem colocado para operadores ilimitados, o que veremos no Lema 5.1.1 no Capítulo 5.

Sendo assim, quando falamos em “crescimento crítico” estamos pensando no caso $\alpha = 0$, ou seja, em que a não linearidade f , apresenta mesmo tipo de crescimento que o operador linear fechado A . Portanto, alguma **condição extra** deve ser imposta sobre f para garantir a existência das soluções do problema acima.

Para lidar com o caso $\alpha = 0$ adaptamos os conceitos de ε -regularidade que são introduzidos em (ARRIETA; CARVALHO, 1999) utilizando potências fracionárias, para o contexto de escalas de Banach, como vemos abaixo.

Definição 1.3.1. Para $\varepsilon \geq 0$, diremos que a transformação g , é uma aplicação ε -regular relativamente ao par (E_1, E_0) , se existem $\rho > 1$, $\gamma(\varepsilon)$ com $\rho\varepsilon \leq \gamma(\varepsilon) < 1$ e uma constante c , tal que $g : E_{1+\varepsilon} \rightarrow E_{\gamma(\varepsilon)}$ e

$$\|g(x) - g(y)\|_{\gamma(\varepsilon)} \leq c\|x - y\|_{1+\varepsilon}(\|x\|_{1+\varepsilon}^{\rho-1} + \|y\|_{1+\varepsilon}^{\rho-1} + 1) \quad \forall x, y \in E_{1+\varepsilon}. \quad (1.5)$$

E veremos também num teorema do Capítulo 5, um dos principais Teoremas deste trabalho, o qual também está baseado em (ARRIETA; CARVALHO, 1999), que quando a não linearidade é ε -regular obtemos uma única solução, que regulariza de forma instantânea no sentido da definição abaixo.

Definição 1.3.2. Dizemos que $x : [0, \tau] \rightarrow E_1$ é uma solução fraca ε -regular para (1.2) relativo ao par (E_1, E_0) se $x \in C([0, \tau], E_1) \cap C((0, \tau], E_{1+\varepsilon})$, e $x(t)$ satisfaz para todo $t \in [0, \tau]$

$$x(t) = e^{A(t)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s, x(s))ds. \quad (1.6)$$

Isto significa que quando lidamos com existência e unicidade para uma equação particular no caso de não linearidades críticas, devemos nos concentrar nos dois pontos seguintes:

(i). Entender as escalas dos espaços associada a parte linear A , especialmente as suas imersões em espaços conhecidos como os espaços L^p .

(ii). Estudar as propriedades de ε -regularidade da não-linearidade f nesta escala de espaços. Isto é conseguido, em geral, aplicando-se as imersões de Sobolev e as desigualdades de Hölder.

Uma vez que (i) e (ii) foram entendidos, podemos aplicar os resultados de (ARRIETA; CARVALHO, 1999) para obter a existência local. Alguns resultados obtidos nesta linha de pesquisa podem ser encontrados em (ARRIETA; CARVALHO, 1999) (ARRIETA; CARVALHO; RODRIGUEZ-BERNAL, 1999) (ARRIETA; CARVALHO; HALE, 1999)(CARVALHO; CHOLEWA, 2002a) (CARVALHO; CHOLEWA, 2002b)(CARVALHO; CHOLEWA, 2005)(CARVALHO; CHOLEWA, 2009).

1.4 Descrição do conteúdo da dissertação

No **Capítulo 2** iremos apresentar alguns resultados básicos de Análise Espectral de operadores lineares e Teoria de Semigrupos que são fundamentais para resolver problemas parabólicos abstratos.

No **Capítulo 3** veremos de maneira sucinta o conceito dos espaços de interpolação e como construí-los através de dois espaços de Banach dados. Isto é, para dados dois espaços de Banach “encaixados” $X \hookrightarrow Y$ a ideia é obter um espaço de Banach E “intermediário”

$$X \hookrightarrow E \hookrightarrow Y$$

de modo que se “comporte bem” com transformações lineares limitadas entre os espaços dados. Construiremos estes espaços utilizando o método de interpolação complexa, que foi introduzido em (CALDERÓN, 1964).

Introduziremos o conceito de escala de Banach no **Capítulo 4**, que é basicamente uma família a um parâmetro de espaços de Banach oportunamente imersos. Daremos um modo de construir uma escala partindo de um operador fechado definido num espaço de Banach utilizando um método de interpolação (neste trabalho utilizaremos o método complexo que será abordado no **Capítulo 3**). Utilizaremos os espaços obtidos neste capítulo para definir os conceitos de ε -regularidade. Na seção final, iremos tratar de semigrupos em escalas de Banach, obtendo resultados semelhantes aos que já se conhecem para “potências fracionárias” e também fundamentam argumentos de “bootstrapping” para obter soluções clássicas.

No **Capítulo 5** iremos cumprir a promessa de dar as condições necessárias de boa colocação do problema (1.2), incluindo condições para “continuar” e “regularizar” a solução obtida. Apresentaremos esses resultados de boa colocação no contexto das escalas de Banach.

Por fim, no **Capítulo 6** aplicaremos nosso estudo do problema abstrato para as equações de Navier-Stokes

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \nabla p + f(t) - (u \cdot \nabla)u, \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Observe que o problema acima, a princípio, não possui o formato do problema inicial (1.2), por este motivo introduziremos uma ferramenta muito útil, introduzida no contexto dos espaços L^p em (FUJIWARA; MORIMOTO, 1977), para escrever (1.7) como um problema de Cauchy semilinear. Finalizaremos este trabalho, dando em termos de continuação de

soluções em problemas críticos, uma interpretação do problema de um milhão de dólares do **Clay Mathematics Institute** para a equação de Navier-Stokes.

Portanto, para estudar o problema (1.7), estudamos o problema de Cauchy abstrato no caso de crescimento crítico, faremos isto nos espaços obtidos no Capítulo 4 e utilizaremos esta teoria para “transladar” o problema abstrato para outras escalas. Para construir uma escala de Banach “contínua” será necessário a utilização de um método de interpolação, aqui utilizaremos o método de interpolação complexa, mas isto pode ser feito via qualquer método de interpolação satisfazendo certas propriedades.

PRELIMINARES

Neste capítulo, temos como objetivo recordar alguns conceitos e resultados básicos de Análise Espectral de operadores lineares e também da Teoria de Semigrupos. Para o leitor que está habituado com esses assuntos sugerimos que comece a leitura dessa dissertação a partir do Capítulo 3. Como esse capítulo possui apenas a função de recordar essas teorias, omitiremos a maioria das provas dos resultados apresentados, as quais podem ser encontradas em (PAZY, 1983), (DAVIES, 1980) e (KATO, 1976).

2.1 Análise espectral

Nos problemas parabólicos em geral utilizamos operadores “fechados” e suas propriedades espectrais, algumas delas serão apresentadas nesta seção. Também recordaremos os conceitos de operadores “duais” e “auto-adjuntos” como classes de exemplos de operadores fechados e terão sua utilidade no decorrer do texto.

2.1.1 Operadores fechados

Os operadores fechados aparecem naturalmente no contexto de geração de semigrupos, como veremos em na Seção 2.2.2. Nesta subseção relembremos sua definição e algumas propriedades relacionadas a este conceito.

Antes de começarmos introduzimos um vocabulário bastante útil.

Definição 2.1.1. *Sejam A e B dois operadores lineares de E em F . Diremos que A é uma **extensão** de B a $D(A)$, e escrevemos $A \supset B$, ou que B é uma **restrição** de A a $D(B)$, e escrevemos $B \subset A$, quando $D(B) \subset D(A)$ e $Ax = Bx$, para todo $x \in D(B)$.*

Agora relembremos alguns conceitos sobre operadores fechados.

Definição 2.1.2.

- Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear e E espaço de Banach. Diremos que A é **operador fechado** quando seu gráfico $G(A)$ é um subconjunto fechado em $E \times E$. Denotaremos o conjunto dos operadores fechados em E como $\mathcal{U}(E)$.
- Nas condições do item anterior, dizemos que A é **fechável** se existe um operador $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ linear tal que $\overline{G(A)} = G(B)$. Em particular, B é um operador fechado chamado de **fecho** de A e escrevemos $B = \bar{A}$.

A seguir o conceito de conjunto resolvente, bastante útil para o que se segue.

Definição 2.1.3. Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear. O **conjunto resolvente de A** é o subconjunto $\rho(A)$ de todos os λ em $\mathbb{C}$ tais que $\lambda - A$ é injetor, $\overline{R(\lambda - A)} = E$ e $(\lambda - A)^{-1} : R(\lambda - A) \subset E \rightarrow E$ é limitado. Para $\lambda \in \rho(A)$, o operador $(\lambda - A)^{-1}$ é chamado operador resolvente. O espectro do operador A é definido por $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Lema 2.1.4. Se $A_0 : D(A_0) \subset E \rightarrow E$ é um operador fechável e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é o seu fecho, então $\rho(A_0) = \rho(A)$.

Note que se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é fechado e $\lambda \in \rho(A)$, então $R(\lambda - A) = E$. Ainda, se $\lambda - A : D(A) \rightarrow E$ é bijetor, segue do Teorema do Gráfico Fechado que $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. Com isto, a definição de conjunto resolvente pode ser reformulada da seguinte maneira.

Definição 2.1.5. Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado. O conjunto resolvente de A é o subconjunto $\rho(A)$ de todos os λ em $\mathbb{C}$ tais que $\lambda - A$ é bijetor.

2.1.2 Operadores duais

A seguir recordamos a definição de operadores duais. Sejam E e Y espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) com duais E^* e Y^* . Se $x^* \in E^*$ ($y^* \in Y^*$) denotaremos o seu valor em um vetor $x \in E$ ($y \in Y$) por $\langle x, x^* \rangle$ ($\langle y, y^* \rangle$). Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow Y$ um operador linear com domínio denso. O dual $A^* : D(A^*) \subset Y^* \rightarrow E^*$ de A é o operador linear definido por: $D(A^*)$ é o conjunto dos $y^* \in Y^*$ para os quais existe $z^* \in E^*$ satisfazendo

$$\langle Ax, y^* \rangle = \langle x, z^* \rangle, \quad \forall x \in D(A). \quad (2.1)$$

Se $y^* \in D(A^*)$ definimos $A^*y^* := z^*$ onde z^* é o (único) elemento de E^* satisfazendo (2.1).

Observação 1. Se E é um espaço de Banach e $A : D(A) \subset E \rightarrow Y$ é um operador linear densamente definido, então $A^* : D(A^*) \subset Y^* \rightarrow E^*$ é um operador linear fechado.

Teorema 2.1.6. Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear densamente definido. Então

$$\rho(A) = \rho(A^*) \text{ e } ((\lambda - A)^{-1})^* = (\lambda - A^*)^{-1}, \forall \lambda \in \rho(A)$$

Observação 2. O teorema anterior e o Lema 2.1.4 são muito importantes, pois mostram certa “estabilidade” do conjunto resolvente sobre certas operações, como considerar o “dual” e “fechar”.

2.1.3 Operadores auto-adjuntos

Nesta subseção fixe H como sendo um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_H : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é um operador linear densamente definido.

Definição 2.1.7. O adjunto $A^\bullet$ de A é definido por

$$D(A^\bullet) = \{u \in H : v \mapsto \langle Av, u \rangle_H : D(A) \rightarrow \mathbb{C} \text{ é limitado}\}$$

e, se $u \in D(A^\bullet)$, $A^\bullet u$ é o único elemento de H tal que

$$\langle v, A^\bullet u \rangle_H = \langle Av, u \rangle_H, \forall v \in D(A).$$

Observação 3. Se H é um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$, $E : H \rightarrow H^*$ definido por $Eu(v) = \langle v, u \rangle$, é uma isometria linear-conjugada entre H e H^* . A identificação entre H e H^* consiste em identificar u com Eu . Se $A^* : D(A^*) \subset H^* \rightarrow H^*$ é o dual de A , então $A^\bullet = E^{-1} \circ A^* \circ E$. Note ainda que, embora E e E^{-1} sejam operadores lineares-conjugados, $E^{-1} \circ A^* \circ E$ é um operador linear por dupla conjugação. Chamaremos ambos $A^\bullet$ e A^* de adjunto de A e denotaremos ambos por A^* mas é importante observar que, se $A = \alpha B$ então $A^\bullet = \bar{\alpha} B^*$ enquanto que $A^* = \alpha B^*$. Desta forma, $(\lambda I - A)^* = \bar{\lambda} I - A^\bullet$ enquanto que $(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$.

Daqui em diante usaremos a notação A^* para denotar os operadores dual e adjunto, indistintamente. Nos referiremos a ambos como operador adjunto.

Definição 2.1.8. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diremos que um operador $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é **simétrico** (também chamado Hermitiano quando $\mathbb{C}$) se $\overline{D(A)} = H$ e $A \subset A^*$; isto é, $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ para todo $x, y \in D(A)$. Diremos que A é auto-adjunto se $A = A^*$.

Será bastante útil ter condições para mostrar quando um operador é auto-adjunto, o teorema abaixo garante algumas delas.

Teorema 2.1.9. Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ é um operador simétrico e sobrejetor, então A é auto-adjunto.

2.2 Semigrupos e seus geradores

Neste seção apresentamos os fatos básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares e contínuos indispensáveis ao entendimento das técnicas de solução de problemas parabólicos semilineares. Começamos com uma revisão da teoria básica mas com o objetivo principal de apresentar a teoria de semigrupos fortemente contínuos e semigrupos analíticos.

2.2.1 Definições e resultados básicos

A definição abaixo, aparece de maneira natural na tentativa de generalizar a exponencial de um operador linear limitado, a qual sabemos é representa o operador solução de um problema de Cauchy linear.

Definição 2.2.1. *Um semigrupo de operadores lineares em E é uma família $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ tal que*

$$(i) \quad T(0) = I_E,$$

$$(ii) \quad T(t+s) = T(t)T(s), \text{ para todo } t, s \geq 0.$$

Além disso, se tivermos $\|T(t)x - x\|_E \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$, para cada $x \in E$, diremos que o semigrupo é fortemente contínuo.

Também é interessante saber quem são os geradores de semigrupos fortemente contínuos.

Definição 2.2.2. *Se $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares, seu gerador infinitesimal é o operador definido por $A : D(A) \subset E \rightarrow E$, onde*

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$$

Todo semigrupo fortemente contínuo possui uma limitação exponencial que é dada no teorema a seguir.

Teorema 2.2.3. *Suponha que $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ é um semigrupo fortemente contínuo. Então, existe $M \geq 1$ e β tais que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\beta t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Para qualquer $\ell > 0$ podemos escolher $\beta \geq \frac{1}{\ell} \log \|T(\ell)\|_{\mathcal{L}(E)}$ e então escolher M .

As seguintes propriedades são fundamentais e bastante utilizadas nos próximos tópicos deste trabalho.

Teorema 2.2.4. *Suponha que $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ seja um semigrupo fortemente contínuo.*

1. *Para qualquer $x \in E$, $t \rightarrow T(t)x$ é contínuo para $t \geq 0$.*
2. *$t \rightarrow \|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)}$ é semicontínua inferiormente e portanto mensurável.*
3. *Seja A o gerador infinitesimal de $T(t)$; então, A é densamente definido e fechado. Para $x \in D(A)$, $t \mapsto T(t)x$ é continuamente diferenciável e*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax, \quad t > 0.$$

4. *$\cap_{m \geq 1} D(A^m)$ é denso em E .*

5. *Para $\operatorname{Re} \lambda > \beta$ e β dado no Teorema 2.2.3, λ está no resolvente $\rho(A)$ de A e*

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad \forall x \in E$$

2.2.2 O Teorema de Hille-Yosida

O teorema abaixo é de extrema importância pois ele caracteriza os geradores infinitesimais de um semigrupo fortemente contínuo. Além disso, é ferramenta base para provar os resultados que utilizamos com mais frequência da Teoria de Semigrupos, como veremos nas próximas subseções.

Teorema 2.2.5 (Hille-Yosida). *Suponha que $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear. Então os fatos seguintes são equivalentes*

- (i) *A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ tal que*

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0;$$

- (ii) *A é um operador linear fechado, densamente definido cujo conjunto resolvente contém (ω, ∞) e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \forall \lambda > \omega.$$

2.2.3 Operadores dissipativos e a imagem numérica

Neste subseção apresentaremos resultados extremamente importantes na prática, quando estamos lidando com um operador linear e gostaríamos de concluir propriedades espectrais e a respeito de geração de semigrupos.

Definição 2.2.6. *Seja E um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$). A aplicação dualidade $J : E \rightarrow 2^{E^*}$ é uma função multívoca definida por*

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}.$$

$J(x) \neq \emptyset$, pelo Teorema de Hahn-Banach.

Um operador linear $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é **dissipativo** se para cada $x \in D(A)$ existe $x^* \in J(x)$ tal que $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.

Teorema 2.2.7 (G. Lumer). *Suponha que A é um operador linear em um espaço de Banach E . Se A é dissipativo e $R(\lambda_0 - A) = E$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é fechado, $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e*

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1, \forall \lambda > 0.$$

Teorema 2.2.8 (Lumer-Phillips). *Suponha que $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é um operador linear em um espaço de Banach E .*

- (i) *Se A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações, então A é fechado, densamente definido, dissipativo (veja Definição 2.2.6) e $R(\lambda - A) = E$ para todo $\lambda > 0$. De fato, $\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0$ para todo $x^* \in J(x)$.*
- (ii) *Se A é dissipativo, $\overline{D(A)} = E$ e $R(\lambda_0 - A) = E$ para algum $\lambda_0 > 0$, então A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

Corolário 2.2.9. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se ambos A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo de contrações em E .*

Em muitos exemplos, a técnica utilizada para obter estimativas para o operador resolvente de um operador dado, bem como localizar o seu espectro, é a determinação de sua **imagem numérica**, ferramenta que será definida a seguir.

Se A é um operador linear em um espaço de Banach complexo E a sua imagem numérica $W(A)$ é o conjunto

$$W(A) := \{\langle Ax, x^* \rangle : x \in D(A), x^* \in E^*, \|x\| = \|x^*\| = \langle x, x^* \rangle = 1\}. \quad (2.2)$$

No caso em que E é um espaço de Hilbert

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : x \in D(A), \|x\| = 1\}.$$

Teorema 2.2.10. *Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador fechado densamente definido. Seja $W(A)$ a imagem numérica de A .*

1. *Se $\lambda \notin \overline{W(A)}$ então $\lambda - A$ é injetora e tem imagem fechada e satisfaz*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq d(\lambda, W(A))\|x\|. \quad (2.3)$$

onde $d(\lambda, W(A))$ é a distância de λ a $W(A)$. Além disso, se $\lambda \in \rho(A)$,

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{d(\lambda, W(A))}. \quad (2.4)$$

2. *Se Σ é um subconjunto aberto e conexo em $\mathbb{C} \setminus W(A)$ e $\rho(A) \cap \Sigma \neq \emptyset$, então $\rho(A) \supset \Sigma$ e (2.4) está satisfeita para todo $\lambda \in \Sigma$.*

Como consequência simples, porém muito importante obtemos.

Corolário 2.2.11. *Seja H um espaço de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador auto-adjunto. Segue que A é fechado e densamente definido. Se A é limitado superiormente; isto é, $\langle Au, u \rangle \leq a\langle u, u \rangle$ para algum $a \in \mathbb{R}$, então $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a] \subset \rho(A)$, e*

$$\|(A - \lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para alguma constante $M \geq 1$ dependendo somente de φ e para todo $\lambda \in \Sigma_{a, \varphi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| < \varphi\}$, $\varphi < \pi$.

Nesta linha de raciocínio, temos.

Teorema 2.2.12. *Seja H um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ um operador auto-adjunto (consequentemente, A é fechado e densamente definido). Suponha que A seja limitado superiormente. Então $\mathbb{C} \setminus (-\infty, a] \subset \rho(A)$, e existe uma constante $M \geq 1$ dependendo somente de φ tal que*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|},$$

para todo $\lambda \in \Sigma_a = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \varphi\}$, $\varphi < \pi$. Segue que A é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisfazendo

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq e^{at}.$$

Na verdade $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo analítico como mostraremos posteriormente.

Demonstração. Note que $A - aI = A^* - aI$ são dissipativos e portanto, do Corolário 2.2.9, $A - aI$ gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações. Do corolário 2.2.11, segue que

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{1}{d(\lambda, (-\infty, a])} \leq \frac{1}{\sin \phi} \frac{1}{|\lambda - a|}, \forall \lambda \in \Sigma_a,$$

e o resultado segue. $\square$

Este último teorema nós dá condições para mostrar quando um operador gera um semigrupo “análítico”. De fato, utilizaremos deste teorema para provar que o “Operador de Sokes”, Seção 6.2, gera esse tipo de semigrupo.

2.2.4 Operadores setoriais e semigrupos analíticos

Agora veremos uma classe de operadores muito importante para o contexto das equações parabólicas. O negativo desses operadores geram semigrupos que possuem ótimas propriedades, são provavelmente o mais próximo que se poderia definir uma exponencial de um operador ilimitado, inclusive por este motivo utiliza-se a notação e^{At} ao invés de $T(t)$.

Definição 2.2.13. *Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear fechado, densamente definido. Dizemos que $-A$ é um operador setorial se existem constantes a, C tais que $\phi \in (\pi/2, \pi)$, $\Sigma_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - a)| \leq \phi\} \subset \rho(A)$ e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{|\lambda - a|} \quad \text{em } \Sigma_{a,\phi}.$$

Agora, apresentamos um teorema fundamental para teoria de Equações de Evolução, pois fornece excelentes propriedades do operador definido anteriormente.

Teorema 2.2.14. *Suponha que $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ seja um operador linear fechado e densamente definido tal que $-A$ seja setorial. Então, A gera um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t), t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(E)$ com*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_a} e^{\lambda t} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0,$$

onde Γ_a é a fronteira de $\Sigma_{a,\phi} \setminus \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a| \leq r\}$, r pequeno, orientada no sentido da parte imaginária crescente.

Além disso, $t \mapsto T(t)$ se estende a uma função analítica de $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \phi - \pi/2\}$ em $\mathcal{L}(E)$ (ou a complexificação de E , se E é um espaço de Banach real) e para algum $K > 0$

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K e^{at}, \quad \|AT(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq K t^{-1} e^{at},$$

para todo $t > 0$. Note que

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$$

é um operador limitado para qualquer $t > 0$ e que $(0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{L}(E)$ é contínua.

No contexto do teorema acima, vemos que o operador A gera um semigrupo “analítico”, conceito introduzido a seguir.

Definição 2.2.15. *Sejam $\Sigma \doteq \{z \in \mathbb{C}; \varphi_1 \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0, \varphi_2\}$ um setor no plano complexo contendo a semirreta positiva, $[0, \infty)$ e E um espaço de Banach. Um **semigrupo analítico** é uma família a um parâmetro*

$$\{T(z); z \in \Sigma\} \subset \mathcal{L}(E)$$

que satisfaz

1. A aplicação $\Sigma \ni z \mapsto T(z)$ tomando valores em E é analítica;
2. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todo par $z_1, z_2 \in \Sigma$;
3. Para todo $x \in E$ temos que

$$T(0)x = x \text{ e } \lim_{\Sigma \ni z \rightarrow 0} T(z)x = x.$$

Observação 4. *Note que, o semigrupo gerado por A acima, possui muitas propriedades próximas a exponencial de um operador. Por isso, a partir de agora quando $-A$ for setorial, denotaremos o semigrupo analítico gerador por A como $\{e^{At}; t \geq 0\}$.*

INTERPOLAÇÃO COMPLEXA

Neste capítulo vamos introduzir dois métodos de interpolação que possuem como motivação o Teorema de Riesz-Thorin que por sua vez foi motivado pelo Lema das três linhas. Por meio da interpolação complexa, definiremos espaços intermediários, os quais serão utilizados para construir uma “escala de Banach” (Capítulo 4) contínua e nesta escala resolveremos o “problema parabólico no caso crítico” (Capítulo 5).

Mostraremos também algumas aplicações, as quais se mostrarão úteis para os propósitos deste texto, como por exemplo teoremas de imersão para espaços obtidos por meio da interpolação complexa entre espaços conhecidos, como espaços L^p e espaços de Sobolev $W^{m,p}$.

3.1 Conceitos preliminares

Antes de definir nosso objeto principal de estudo, precisaremos apresentar um vocabulário que será utilizado no decorrer deste capítulo. Nesta seção, tentamos não “aprofundar” no que diz respeito a Teoria de Interpolação, mas apenas introduzir uma linguagem simples para lidarmos com Teoria de Interpolação. Um estudo mais detalhado pode ser encontrado em (BERGH; LOFSTROM, 1976), (TRIEBEL, 1978) ou (CALDERÓN, 1964).

Definição 3.1.1.

- Sejam F, G espaços de Banach com $F \subset G$. Dizemos que F está **imerso** em G e escrevemos $F \hookrightarrow G$, quando a aplicação inclusão $i : F \rightarrow G$ for contínua, ou seja, se para todo $x \in F$, tem-se

$$\|x\|_G \leq \|i\|_{\mathcal{L}(F,G)} \|x\|_F.$$

Se $F \hookrightarrow G$ e F for subconjunto denso de G , dizemos que F está **densamente imerso** em G e escrevemos $F \xhookrightarrow{d} G$.

- Seja $\bar{E} = (E_0, E_1)$ um par de espaços de Banach, dizemos que $\bar{E}$ é um **par de espaços compatíveis** se $E_1 \hookrightarrow E_0$ ou $E_0 \hookrightarrow E_1$.

Neste capítulo, a menos que seja dito o contrário, sempre que escrevermos o par (E_0, E_1) sendo compatível, estaremos considerando $E_1 \hookrightarrow E_0$.

- Seja $\bar{E}$ um par compatível de espaços de Banach, então dizemos que G é um **espaço intermediário** quando

$$E_1 \hookrightarrow G \hookrightarrow E_0.$$

- Sejam $\bar{E}$ e $\bar{F}$ pares de espaços de Banach compatíveis e T uma aplicação linear limitada definida em E_0 e tomando valores em F_0 tal que sua restrição a E_1 , toma valores em F_1 também sendo limitada, mais precisamente, para todo $j = 0, 1$ tem-se

$$\|Tx_j\| \leq M_j \|x_j\| \quad \forall x_j \in E_j.$$

Se X e Y são espaços intermediários para $\bar{E}$ e $\bar{F}$, respectivamente, dizemos que X e Y são **espaços de interpolação de expoente $\theta \in [0, 1]$** se para cada operador linear T como dado acima está em $\mathcal{L}(X, Y)$, com norma M satisfazendo

$$M \leq CM_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

onde $C \geq 1$ é independente de T . Dizemos que os espaços X e Y são espaços de interpolação **exata** no caso em que $C = 1$. No caso especial em que $\bar{E} = \bar{F}$ e $X = Y$, dizemos que X é **espaço de interpolação** com relação a $\bar{E}$.

Observação 5. Na definição acima tomando $\bar{E} = \bar{F}$ e T como o operador identidade, então $C = 1$ e vemos que não é possível obter $C < 1$.

3.2 Definição dos métodos de interpolação complexa

Nesta seção introduzimos dois métodos de interpolação $[\cdot, \cdot]_\theta$ e $[\cdot, \cdot]^\theta$ usando a teoria de funções analíticas a valores vetoriais.

Definição 3.2.1. Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e E um espaço de Banach complexo. Diremos que uma aplicação $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow E$ é **holomorfa**, ou **análitica**, se para todo $z_0 \in U$, existir o limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

e denotaremos este limite por $f'(z)$.

Observação 6. Fixaremos $S \subset \mathbb{C}$ para denotar a faixa $\{z \in \mathbb{C}; 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ e S_0 para denotar seu interior, ou seja, $S_0 = \{z \in \mathbb{C}; 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$.

O lema a seguir, ou também Lema das três linhas, nos fornece as ferramentas básicas para definir os métodos de interpolação.

Lema 3.2.2 (O Lema das três linhas). *Sejam E um espaço de Banach complexo e $f: S \rightarrow E$ uma função holomorfa na faixa aberta $0 < \operatorname{Re} z < 1$ que é limitada e contínua na faixa fechada $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$. Se para todo t real temos*

$$\|f(it)\|_E \leq M_0, \quad \|f(1+it)\|_E \leq M_1,$$

então, para qualquer $\theta \in [0, 1]$ vale a seguinte estimativa

$$\|f(\theta + it)\|_E \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Provemos primeiramente o caso em que $E = \mathbb{C}$. Com efeito, seja $\varepsilon > 0$ e ponha

$$f_\varepsilon(z) = \frac{e^{\varepsilon z(z-1)} f(z)}{M_0^{1-z} M_1^z}.$$

Deste modo, fazendo $\operatorname{Im} z = y$ e $\operatorname{Re} z = x$, do cálculo

$$|f_\varepsilon(z)| = \frac{e^{\varepsilon(x^2-x-y^2)} |f(z)|}{M_0^{1-x} M_1^x} \quad (3.1)$$

vemos que f_ε satisfaz as mesmas condições do lema que f , porém agora com constantes $M_0 = M_1 = 1$, isto é, f_ε é holomorfa no interior da faixa, contínua e limitada em S e

$$|f_\varepsilon(it)| \leq 1, \quad |f_\varepsilon(1+it)| \leq 1.$$

Ainda pela equação (3.1) e usando o fato de que f é limitada em S temos que

$$f_\varepsilon(z) \rightarrow 0, \quad \text{quando } \operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty.$$

Sendo assim, existe $K > 0$ de modo que $|f_\varepsilon(z)| \leq 1$ sempre que $|\operatorname{Im} z| \geq K$.

Logo, $|f_\varepsilon(z)| \leq 1$ para todo z no bordo de um limitado e assim utilizando o Teorema do Módulo Máximo, ver por exemplo (CONWAY, 2012) capítulo VI, obtemos para todo $z \in S$ que $|f_\varepsilon(z)| \leq 1$, ou seja, $|f(z)| \leq |e^{-\varepsilon z(z-1)} M_0^{1-z} M_1^z|$. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ concluímos que

$$|f(\theta + it)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

para qualquer $\theta \in [0, 1]$ e $t \in \mathbb{R}$ como queríamos demonstrar.

Suponha agora que f é uma aplicação que toma valores em um espaço de Banach complexo E e considere $x^* \in E^*$ um funcional linear de E . Neste caso, temos que $\langle x^*, f(\cdot) \rangle = x^* \circ f$ é uma função analítica que satisfaz as condições do lema para o caso anterior, em especial para todo $t \in \mathbb{R}$ temos

$$|\langle x^*, f(it) \rangle| \leq K_0, \quad |\langle x^*, f(1+it) \rangle| \leq K_1,$$

onde $K_j = \|x^*\|_{E^*} M_j$. Agora, utilizando o Teorema de Hahn-Banach segue que

$$\|f(\theta + it)\|_E = \sup_{\|x^*\|_{E^*} \leq 1} \langle x^*, f(\theta + it) \rangle \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

e o resultado está provado. $\square$

Definição 3.2.3. Dado um par $\bar{E}$ compatível com $E_1 \hookrightarrow E_0$, fixamos o espaço $\mathfrak{F}(\bar{E})$ como o conjunto de todas as funções contínuas e limitadas de S com valores em E_0 , tais que

1. $f|_{S_0}$ é holomorfa;
2. Para cada $t \in \mathbb{R}$ temos que $f(1 + it) \in E_1$;
3. Para cada $j = 0, 1$ as funções $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(j + it)$ são contínuas em E_j e tendem para zero quando $|t| \rightarrow \infty$, $\forall j = 0, 1$.

Quando o par estiver implícito, escrevemos apenas $\mathfrak{F}$, ao invés de $\mathfrak{F}(\bar{E})$

Observação 7. Pode-se definir esta família de funções sem a necessidade do par de espaços ser compatível, ver por exemplo (BERGH; LOFSTROM, 1976).

Observação 8. Observamos que $\mathfrak{F}(\bar{E})$ é um espaço vetorial. Para toda função $f \in \mathfrak{F}$ definimos

$$\|f\|_{\mathfrak{F}} \doteq \max \left\{ \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(it)\|_{E_0}, \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{E_1} \right\}.$$

Observação 9. Seja $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$. Então existe $c > 0$ de modo que para todo $z \in S$ temos que

$$\|f(z)\|_{E_0} \leq c \|f\|_{\mathfrak{F}}. \quad (3.2)$$

Lema 3.2.4. Suponha que E é um espaço vetorial normado. Então E é completo se e só se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_E < \infty$ implica que existe um elemento $x \in E$ tal que $\|x - \sum_{n=1}^N x_n\|_E \rightarrow 0$ quando $N \rightarrow \infty$.

Demonstração. Ver por exemplo em (FOLLAND, 1999) página 152. $\square$

Lema 3.2.5. O espaço $\mathfrak{F}(\bar{E})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Primeiramente note que $\|\cdot\|_{\mathfrak{F}}$ define uma norma em $\mathfrak{F}(\bar{E})$. Isto segue do fato de $\|\cdot\|_{E_j}$ ser uma norma e da Observação 9.

Agora, provemos que $\mathfrak{F}$ é um espaço de Banach. Com efeito, suponha que $\sum_n \|f_n\|_{\mathfrak{F}} < \infty$, vamos mostrar que $\sum_n f_n$ converge em $\mathfrak{F}$ e do Lema 3.2.4 seguirá que o espaço é completo. graças a estimativa feita em (3.2) temos para todo $z \in S$

$$\|f_n(z)\|_{E_0} \leq c \|f_n\|_{\mathfrak{F}}. \quad (3.3)$$

Sabemos que E_0 é um espaço de Banach, deste modo, segue que $\sum_n f_n$ converge uniformemente em S para uma função f tomando valores em E_0 . Portanto f é limitada e contínua em S e como consequência do Teorema de Morera¹, (CONWAY, 2012) Capítulo VII, também concluímos que é analítica em S_0 . Note também que, para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se $\|f_n(1+it)\|_{E_1} \leq \|f_n\|_{\mathfrak{F}}$, desta desigualdade juntamente com o fato de E_1 ser um espaço de Banach que $\sum_n f_n(1+it)$ converge uniformemente em t para um limite em E_1 , o qual deve coincidir com o limite em E_0 . Portanto, $f(1+it) \in E_1$ e $\sum_n f_n(1+it)$ converge uniformemente para $f(1+it)$ em E_1 . Logo, para ver que $f \in \mathfrak{F}$, resta provar que para $j = 0, 1$ $\|f(j+it)\| \rightarrow 0$, quando $|t| \rightarrow \infty$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, independente de t , suficientemente grande de modo que

$$\|f(j+it)\|_{E_j} = \left\| \sum_n f_n(j+it) \right\|_{E_j} \leq \sum_{n=1}^{n_0} \|f_n(j+it)\|_{E_j} + \varepsilon.$$

Agora, fazendo $|t| \rightarrow \infty$ vemos que o lado direito fica limitado por ε , como ε é arbitrário segue que $f \in \mathfrak{F}$ e o lema está provado. $\square$

Definição 3.2.6. Para cada $0 \leq \theta \leq 1$ fixado, o espaço $\bar{E}_{[\theta]} = [E_0, E_1]_{\theta}$ consiste de todos os $x \in E_0$ tais que $x = f(\theta)$ para algum $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$. Definimos para cada $x \in \bar{E}_{[\theta]}$ o número real

$$\|x\|_{[\theta]} = \inf\{\|f\|_{\mathfrak{F}} : f(\theta) = x, f \in \mathfrak{F}\}.$$

Observação 10. O teorema a seguir prova que a aplicação $\|\cdot\|_{[\theta]} \rightarrow \mathbb{R}$ é de fato uma norma e que $\bar{E}_{[\theta]}$ é espaço vetorial completo dotado desta norma.

Teorema 3.2.7. O espaço $\bar{E}_{[\theta]}$ é um espaço de Banach e um espaço intermediário com relação ao par $\bar{E}$.

Demonstração. Para cada $\theta \in [0, 1]$ fixado, defina a aplicação $T_{\theta} : \mathfrak{F}(\bar{E}) \rightarrow E_0$, por $T_{\theta}(f) = f(\theta)$. Note que, a Observação 9 implica que a transformação linear T_{θ} é contínua, já que $\|T_{\theta}(f)\|_{E_0} = \|f(\theta)\|_{E_0} \leq c\|f\|_{\mathfrak{F}}$. Logo, o núcleo de T_{θ} , o qual será denotado por $\mathcal{N}_{\theta} = \{f : f \in \mathfrak{F}(\bar{E}), f(\theta) = 0\}$, é subconjunto fechado de $\mathfrak{F}$. Desta forma, $E_{[\theta]} = T_{\theta}(\mathfrak{F})$ é isomorfo ao espaço quociente $\mathfrak{F}/\mathcal{N}_{\theta}$ e ainda este isomorfismo é uma isometria. Para ver que é uma isometria tome $[f] \in \mathfrak{F}/\mathcal{N}_{\theta}$ para alguma $f \in \mathfrak{F}$ tal que $f(\theta) \in \bar{E}_{\theta}$ pela definição de norma no espaço quociente temos

$$\begin{aligned} \|[f]\|_{\mathfrak{F}/\mathcal{N}_{\theta}} &= \inf\{\|f-h\| : h \in \mathcal{N}_{\theta}\} \\ &= \inf\{\|f-h\| : h(\theta) = 0\} \\ &= \inf\{\|g\| : g(\theta) = f(\theta)\} \\ &= \|f(\theta)\|_{[\theta]}. \end{aligned}$$

¹ Com este teorema é possível provar que analiticidade fraca implica em analiticidade.

Agora, pelo Lema 3.2.5 temos que $\mathfrak{F}$ é espaço de Banach e como $\mathcal{N}_\theta$ é fechado, segue que $\bar{E}_{[\theta]}$ é um espaço de Banach.

Por fim, mostremos que $\bar{E}_{[\theta]}$ é espaço intermediário. Ora, se $x \in \bar{E}_{[\theta]}$, então $\|x\|_{E_0} = \|f(\theta)\|_{E_0} \leq c\|f\|_{\mathfrak{F}}$, para qualquer $f \in \mathfrak{F}$ tal que $f(\theta) = x$ e assim obtemos que $E_{[\theta]} \hookrightarrow E_0$. Agora para $x \in E_1$ e ponha $f(z) = e^{\delta(z-\theta)^2}x$, para $\delta > 0$. Note que $f \in \mathfrak{F}$ e que $f(\theta) = x$, daí seguirá que $E_1 \hookrightarrow \bar{E}_{[\theta]}$. Portanto, $E_{[\theta]}$ é um espaço intermediário relativamente ao par $\bar{E}$. $\square$

Teorema 3.2.8. *Os espaços $\bar{E}_{[\theta]}$ e $\bar{F}_{[\theta]}$ são espaços de interpolação exatos de expoente θ com relação aos pares $\bar{E}$ e $\bar{F}$, respectivamente.*

Demonstração. Seja T transformação linear tal que $T \in \mathcal{L}(E_j, F_j)$ com norma M_j , para $j = 0, 1$. Dado $x \in E_{[\theta]}$ e $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$, tal que $f(\theta) = x$ e $\|f\|_{\mathfrak{F}} \leq \|x\|_{[\theta]} + \varepsilon'$, onde $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M_0^{1-\theta}M_1^\theta}$. Deste modo, defina para cada $z \in S$, $g(z) = M_0^{z-1}M_1^{-z}T(f(z))$. Temos que g toma valores em F_0 e da linearidade de T tem-se que g é contínua e limitada em S e analítica em S_0 . Além disso, estamos assumindo que $g(1+it)$ toma valores em F_1 e para $j = 0, 1$

$$\|g(j+it)\|_{F_j} \leq M_0^{j-1}M_1^{-j}\|T(f(j+it))\|_{F_j} \leq \|f(j+it)\|_{E_j}, \quad (3.4)$$

onde na última desigualdade foi utilizado que a norma de T é M_j . Deste modo, obtemos que a função g pertence a $\mathfrak{F}(\bar{F})$. Adicionalmente, de (3.4) obtemos que $\|g\|_{\mathfrak{F}} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}} \leq \|x\|_{[\theta]} + \varepsilon'$ e como $g(\theta) = M_0^{\theta-1}M_1^{-\theta}T(x)$ concluímos que $\|T(x)\|_{\bar{F}_{[\theta]}} \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|x\|_{\bar{E}_{[\theta]}} + \varepsilon$. Isto completa a prova. $\square$

Agora introduzimos um segundo método de interpolação complexo. Este é baseado no espaço $\mathfrak{G}(\bar{E})$ de funções analíticas, definido da seguinte forma.

Definição 3.2.9. *Seja $\bar{E}$ um par compatível com $E_1 \hookrightarrow E_0$. As funções $g \in \mathfrak{G}(\bar{E})$ são as funções definidas na faixa S tomando valores em E_0 que satisfazem das seguintes propriedades:*

- (i) $\|g(z)\|_{E_0} \leq c(1+|z|)$, para todo $z \in S$;
- (ii) g é contínua em S e analítica em S_0 ;
- (iii) A diferença, $g(1+it_1) - g(1+it_2)$, toma valores em E_1 para todos $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e o valor de

$$\|g\|_{\mathfrak{G}} \doteq \max \left\{ \sup_{t_1, t_2} \left\| \frac{g(it_1) - g(it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{E_0}, \sup_{t_1, t_2} \left\| \frac{g(1+it_1) - g(1+it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{E_1} \right\}$$

é finito.

Da mesma forma que anteriormente, escrevemos por simplicidade apenas $\mathfrak{G}$, quando o par de espaços estiver implícito.

Observação 11. Defina em $\mathfrak{G}(\bar{E})$ a seguinte relação de equivalência

$$g \sim h \iff g - h = \text{constante}$$

e considere o espaço quociente $\mathfrak{G}(\bar{E})/\sim$. A seguir provaremos que este será um espaço de Banach, dotado com a norma $\|\bar{g}\|_{\mathfrak{G}/\sim} \doteq \|g\|_{\mathfrak{G}}$.

Lema 3.2.10. O espaço $\mathfrak{G}(\bar{E})$ reduzido módulo funções constantes, denotado por $\mathfrak{G}(\bar{E})/\sim$, com a norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{G}}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $g \in \mathfrak{G}$ e $h \in \mathbb{R}$ não nulo e considere a função $\frac{g(z+ih)-g(z)}{h}$. De modo análogo à (3.2) obtemos

$$\left\| \frac{g(z+ih)-g(z)}{ih} \right\|_{E_0} \leq c \|g\|_{\mathfrak{G}}.$$

Donde obtemos

$$\|g'(z)\|_{E_0} \leq c \|g\|_{\mathfrak{G}} \quad (z \in S).$$

Portanto, vemos que se $\|g\|_{\mathfrak{G}} = 0$ então g é constante, desde que S é conexo. Isto implica se considerarmos $\mathfrak{G}$ como o quociente de $\mathfrak{G}$ pela relação $\sim$ com a norma $\|\cdot\|_{\mathfrak{G}}$, obtemos um espaço vetorial normado. Semelhantemente ao que foi feito acima temos que para $z \in S_0$ vale

$$\left\| \frac{g(z)-g(0)}{z} \right\|_{E_0} \leq c \|g\|_{\mathfrak{G}}. \quad (3.5)$$

Seguindo as mesmas ideias do Lema 3.2.5, suponha que $\sum_n \|g_n\|_{\mathfrak{G}} < \infty$. Então por (3.5) segue que $\sum_n (g_n(z) - g_n(0))$ converge uniformemente em todo subconjunto compacto de S_0 . O limite $g(\cdot)$ satisfaz (i) e (ii) utilizando argumentos análogos aos do Lema 3.2.5. Além disso, como para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ temos $g_n(j+it_1) - g_n(j+it_2) \in E_j$ e E_j é espaço de Banach a série $\sum_n (g_n(j+it_1) - g_n(j+it_2))$ converge em E_j para $g(j+it_1) - g(j+it_2)$ para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Agora, como $\|(g(j+it_1) - g(j+it_2))\|_{E_j} \leq 2c \sum_n \|g_n\|_{\mathfrak{G}} < \infty$, vemos que $\sum_n g_n - g_n(0)$ converge para $g \in \mathfrak{G}$, mas $g_n - g_n(0)$ e g_n definem o mesmo elemento em $\mathfrak{G}$, desde que este espaço é reduzido módulo funções constantes. Assim, concluímos que $\mathfrak{G}$ é completo. $\square$

Observação 12. Reforçamos aqui que após este teorema, **sempre que escrevermos $\mathfrak{G}$, estaremos considerando o quociente $\mathfrak{G}/\sim$, pois desta forma obtemos um espaço de Banach.**

Definição 3.2.11. Para um dado $0 < \theta < 1$, o espaço $\bar{E}^{[\theta]} = [E_0, E_1]^\theta$, consiste de todos os $x \in E_0$ tal que $x = g'(\theta)$ para algum $g \in \mathfrak{G}(\bar{E})$. E definimos em $\bar{E}^{[\theta]}$ a aplicação

$$\|x\|^{[\theta]} = \inf \{ \|g\|_{\mathfrak{G}} : g'(\theta) = x, g \in \mathfrak{G} \}.$$

Observação 13. Como no caso do primeiro método de interpolação, veremos que neste caso também obtemos um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|^{[\theta]}$.

Teorema 3.2.12. *O espaço $\bar{E}^{[\theta]}$ é um espaço de Banach intermediário com respeito a $\bar{E}$.*

Demonstração. Esta prova segue as mesmas ideias e argumentos utilizadas na prova de 3.2.7 e por isso alguns detalhes serão omitidos. Já vimos anteriormente que $\|g'(\theta)\|_{E_0} \leq c\|g\|_{\mathfrak{G}}$ e dessa forma vemos que a transformação linear $g \mapsto g'(\theta)$ de $\mathfrak{G}$ em E_0 é contínua e também que $\bar{E}^{[\theta]} \hookrightarrow E_0$. O núcleo $\mathcal{N}^\theta$ desta transformação é fechado e a imagem é $\bar{E}^{[\theta]}$. De maneira análoga a 3.2.7, observamos que a norma em $\bar{E}^{[\theta]}$ é a norma do espaço quociente $\mathfrak{G}/\mathcal{N}^\theta$. Portanto, $\bar{E}^{[\theta]} = \mathfrak{G}/\mathcal{N}^\theta$ é um espaço de Banach. Por fim, se $x \in E_1$ tomamos $g(z) = zx$, então $g \in \mathfrak{G}$ e vemos que $E_1 \hookrightarrow \bar{E}^{[\theta]}$. $\square$

Teorema 3.2.13. *Os espaços de Banach $\bar{E}^{[\theta]}$ e $\bar{F}^{[\theta]}$ são espaços de interpolação exatos de expoente θ com relação aos pares $\bar{E}$ e $\bar{F}$.*

Demonstração. Com efeito, assumimos que $T : E_j \rightarrow F_j$ com norma M_j para $j = 0, 1$. Então escolhemos uma função $g \in \mathfrak{G}(\bar{E})$ tal que $g'(\theta) = x$, $\|g\|_{\mathfrak{G}} \leq \|x\|^{[\theta]} + \varepsilon$. Note que, escrevendo $M_0^{1-z} M_1^z = M_0^{-1} (M_0/M_1)^z$ e assim

$$\frac{d}{dz} \frac{T(g(z))}{M_0^{1-z} M_1^z} = \frac{T(g'(z))}{M_0} \left(\frac{M_0}{M_1} \right)^z + \frac{T(g(z))}{M_0} \log M_0/M_1 \left(\frac{M_0}{M_1} \right)^z.$$

Agora, considere a função

$$h(z) = [M_0^{\eta-1} M_1^{-\eta} T(g(\eta))]_{\eta=0}^{\eta=z} - \int_0^z (\log(M_0/M_1)) M_0^{\eta-1} M_1^{-\eta} T(g(\eta)) d\eta,$$

onde a integral é tomada ao longo de qualquer curva em S que conecta 0 a z , já que o integrando é analítico. Desta forma, obtemos que $h'(z) = T(g'(z))/(M_0^{1-z} M_1^z)$, e agora provemos que $h \in \mathfrak{G}$. Se a curva tem todos os seus pontos em S exceto 0 e possivelmente z podemos integrar por partes. De fato, se $\eta \in S_0$ temos que $d(T(g(\eta))) = T(g'(\eta))d\eta$ e $g'(\eta)$ é limitada e contínua em S_0 . Portanto $d(T(g(\eta)))/d\eta$ é contínua em S_0 e tem norma limitada em E_0 . Portanto podemos integrar por partes, e obtemos, para qualquer curva em S ,

$$h(z) = \int_0^z M_0^{\eta-1} M_1^{-\eta} T(dg(\eta)),$$

onde em geral a integral é interpretada como uma integral de Stieltjes a valores vetoriais. Segue que

$$\|h(z)\|_{F_0} \leq c|z|.$$

A seguir note que $t \mapsto T(g(j+it))$ é Lipschitz contínua em F_j e que $T(dg(j+it))$ tem seus valores em F_j e satisfazendo $\|Tdg(j+it)\|_{F_j} \leq M_j \|g\|_{\mathfrak{G}(\bar{E})}$. De fato,

$$\|T(dg(j+it))\|_{F_j} \leq \|T(g(j+it_1) - T(g(j+it_2)))\|_{F_j} \leq M_j \|g\|_{\bar{E}}. \quad (3.6)$$

Assim, se $t_1 < t_2$ temos que

$$\|h(j+it_1) - h(j+it_2)\|_{F_j} \leq M_j^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \|T(dg(j+it))\|_{F_j}.$$

Mas o lado direito é limitado por

$$\int_{t_1}^{t_2} \|dg(j+it)\|_{E_j} \leq (t_2 - t_1) \|g\|_{\mathfrak{G}(\bar{E})}.$$

Deste modo, obtemos

$$\|h\|_{\mathfrak{G}(\bar{F})} \leq \|a\|^{[\theta]} + \varepsilon.$$

Agora

$$h'(\theta) = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} \left(\frac{d}{d\eta} T(g(\eta)) \right)_{\eta=\theta} = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} T(a).$$

Isto prova que $T(x) = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} h'(\theta) \in \bar{E}^{[\theta]}$, e que

$$\|T(x)\|_{[\theta]} \leq M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} \|x\|^{[\theta]} + \varepsilon'.$$

Terminando assim a demonstração. □

Observação 14. Em geral, os dois espaços $\bar{E}_{[\theta]}$ e $\bar{E}^{[\theta]}$ não são iguais. A questão da relação entre estes dois espaços será discutida na Seção 3.4. Consideraremos os espaços $\bar{E}^{[\theta]}$ como uma ferramenta.

Note também que o método $[\cdot, \cdot]^\theta$ não está definido para $\theta = 0, 1$, enquanto $\bar{E}_{[0]}$ e $\bar{E}_{[1]}$ são espaços bem definidos.

3.3 Propriedades simples dos espaços $\bar{E}_{[\theta]}$

Provaremos dois resultados simples relacionados a inclusões e propriedades de densidade dos espaços $[E_0, E_1]_\theta$.

Teorema 3.3.1.

$$(a) [E_0, E_1]_\theta = [E_1, E_0]_{1-\theta} \quad (\text{com normas iguais}),$$

$$(b) \bar{E}_{[\theta_1]} \hookrightarrow \bar{E}_{[\theta_0]} \quad \text{se} \quad \theta_0 < \theta_1 \quad \text{e} \quad E_1 \hookrightarrow E_0.$$

$$(c) [E, E]_\theta = E \quad \text{se} \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Demonstração. Para provar (c) basta notar que para todo $\theta \in [0, 1]$ tem-se que $(E, E)_{[\theta]}$ é um espaço intermediário do par (E, E) .

Para provar (a), note que $f(\cdot) \in \mathcal{F}(E_0, E_1)$ se, e somente se, $h(\cdot) = f(1 - \cdot) \in \mathfrak{F}(E_1, E_0)$.

Afirmamos que se $E_0 \hookrightarrow E_1$ implica que $[E_0, E_1]_\theta \hookrightarrow [E_0, E_1]_{\tilde{\theta}}$ quando $\theta < \tilde{\theta}$, então o item (b) é válido. De fato, sejam $\theta_1 > \theta_0$, logo $1 - \theta_1 < 1 - \theta_0$. Pelo item (a) e da nossa suposição temos

$$[E_0, E_1]_{\theta_1} = [E_1, E_0]_{1-\theta_1} \hookrightarrow [E_1, E_0]_{1-\theta_0} = [E_0, E_1]_{\theta_0},$$

de onde a afirmação segue. Sendo assim, provemos que a hipótese da afirmação anterior é verdadeira. Com efeito, sejam $\theta < \tilde{\theta}$ e considere $E_0 \hookrightarrow E_1$. Se $a \in [E_0, E_1]_\theta$ podemos escolher $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$ tal que $f(\theta) = a$, $\|f\|_{\mathfrak{F}} \leq \|a\|_{[\theta]} + \varepsilon$. Tome $0 \leq \lambda \leq 1$ de modo que $\theta = \lambda \tilde{\theta}$ e defina $\varphi(z) = f(\tilde{\theta}z)e^{\varepsilon(z^2 - \lambda^2)}$. Denote $B_1 \doteq [E_0, E_1]_{\tilde{\theta}}$, dessa forma, resta provar que $[E_0, E_1]_\theta \hookrightarrow B_1$. Ora, sabemos que $\|f(\tilde{\theta} + it)\|_{B_1} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\bar{E})}$ e também que $\varphi(it) = f(it\tilde{\theta}) \in E_0$ com

$$\|\varphi(it)\|_{E_0} \leq \|f(it\tilde{\theta})\|_{E_0} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\bar{E})}.$$

Ainda, como $\varphi(1 + it) = f(\tilde{\theta}(1 + it)) \in B_1$ e

$$\|\varphi(1 + it)\|_{B_1} \leq e^\varepsilon \|f(\tilde{\theta}(1 + it))\|_{[\tilde{\theta}]},$$

Assim,

$$\|\varphi\|_{\mathfrak{F}(E_0, B_1)} \leq e^\varepsilon \|f\|_{\mathfrak{F}(E_0, E_1)} \leq e^\varepsilon (\|a\|_{[\theta]} + \varepsilon). \quad (3.7)$$

Por outro lado, como $\varphi(\lambda) = f(\theta) = a \in [E_0, B_1]_\lambda$, o qual por construção está imerso em B_1 . Logo,

$$\|a\|_{\tilde{\theta}} = \|\varphi(\lambda)\|_{B_1} \leq c \|\varphi(\lambda)\|_{[E_0, B_1]_\lambda} \leq c \|\varphi\|_{\mathfrak{F}(E_0, B_1)}.$$

Assim, juntamente com (3.7) temos

$$\|a\|_{[\tilde{\theta}]} \leq c e^\varepsilon (\varepsilon + \|a\|), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

De onde segue que $\|a\|_{[\tilde{\theta}]} \leq c \|a\|_{[\theta]}$ para qualquer $a \in \bar{E}_{[\theta]}$, ou seja, $\bar{E}_{[\theta]} \hookrightarrow \bar{E}_{[\tilde{\theta}]}$ e o teorema está provado. $\square$

Observação 15. Lembre-se que para um par compatível (E_0, E_1) devemos ter $E_0 \hookrightarrow E_1$ ou $E_1 \hookrightarrow E_0$. Dessa forma, quando escrevermos $E_1 \cap E_0$ estamos nos referindo ao menor espaço dotado sua respectiva norma, como faremos nos próximos resultados abaixo.

Lema 3.3.2. Seja $\mathfrak{F}_0(\bar{E})$ o espaço que contém todas as combinações lineares de funções da forma

$$e^{\delta z^2} \sum_{n=1}^N x_n e^{\lambda_n z}$$

onde $x_n \in E_1 \cap E_0$, λ_n real e $\delta > 0$. Então $\mathfrak{F}_0(\bar{E})$ é denso em $\mathfrak{F}(\bar{E})$.

Demonstração. Como $\|e^{\delta z^2} f(z) - f(z)\|_{\mathfrak{F}} \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$ ($\delta > 0$) para todo $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$, é suficiente mostrar que todas as funções $g(z) = e^{\delta z^2} f(z)$ com $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$ pode ser aproximada por funções em $\mathfrak{F}_0(\bar{E})$. Faça

$$g_n(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(z + 2\pi i k n), \quad (n \geq 1).$$

Claramente g_n é analítica em S_0 , contínua em S com valores em $\Sigma(\tilde{E})$. Adicionalmente, g_n é periódica com período $2\pi in$ e $g_n(j+it) \in E_j$ para $j = 0, 1$. Além disso,

$$\|g_n(j+it) - g(j+it)\|_{E_j} \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$ uniformemente para t em compactos e $\|g_n(j+it)\|_{E_j}$ é limitada como função de n e t . Segue que, para $s > 0$, temos que $e^{sz^2}g_n(z)$ está no espaço $\mathfrak{F}(\tilde{E})$. Portanto, podemos encontrar s e n tais que

$$\|e^{sz^2}g_n(z) - g(z)\|_{\mathfrak{F}} < \varepsilon$$

Mas agora $g_n(z)$ pode ser representado por uma série de Fourier

$$g_n(s+it) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_{kn}(s)e^{itk/n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{kn}(s)e^{kz/n}, \quad (3.8)$$

onde

$$a_{kn}(s) = e^{-sk/n}b_{kn}(s).$$

Deste modo, podemos escrever

$$g_n(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{kn}e^{kz/n}, \quad z = s+it, \quad (3.9)$$

com

$$a_{kn} = (2\pi nm)^{-1} \int_{-\pi nm}^{\pi nm} g_n(s+it)e^{-k(s+it)/n} dt. \quad (3.10)$$

Note que a integral (3.10) é independente de m , desde que $g_n(s+it)$ tem período $2\pi n$ na variável t . A integral é também independente de s . De fato, o integrando é analítico e limitado em E_0 . Portanto os valores da integral para dois valores de s diferem muito pouco se m é escolhido grande, devido a presença do fator $1/m$. Mas a integral é independente de m . Portanto a integral tem o mesmo valor para dois valores dados de s . Segue que

$$a_{kn} = (2\pi n)^{-1} \int_{-\pi n}^{\pi n} g_n(j+it)e^{-(j+it)k/n} dt, \quad j = 0, 1.$$

Logo, $a_{kn} \in E_1 \cap E_0$. Agora consideramos as $(C, 1)$ -médias da soma (3.9), ver (FOLLAND, 1999) página 262, isto é consideramos

$$\sigma_m g_n(z) = \sum_{|k| \leq m} \left(1 - \frac{|k|}{m+1}\right) a_{kn} e^{kz/n}.$$

Então, da teoria de séries de Fourier sabemos que $\|\sigma_m g_n(j+it) - g_n(j+it)\|_{E_j} \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, uniformemente em n . Portanto $\|e^{sz^2}(\sigma_m g_n - g_n)\|_{\mathfrak{F}} \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ e assim

$$\|e^{sz^2}\sigma_m g_n - g\|_{\mathfrak{F}} \leq 2\varepsilon.$$

Dessa forma obtemos que $e^{sz^2}\sigma_m g_n$ em $\mathfrak{F}_0(\tilde{E})$ aproxima g em $\mathfrak{F}(\tilde{E})$. Isto prova o lema. $\square$

O teorema a seguir nós diz que a interpolação complexa entre espaços de Banach compatíveis depende de maneira fundamental do “menor” espaço.

Teorema 3.3.3. *Seja $0 \leq \theta \leq 1$. Então*

- (a) $E_1 \cap E_0$ é denso em $\bar{E}_{[\theta]}$;
- (b) Para $j = 0, 1$, vale $E_j = \bar{E}_{[j]}$, com normas coincidindo.

Demonstração. Para **(a)** e **(b)** suponha sem perda de generalidade que $E_1 \hookrightarrow E_0$.

(a) Assumindo a afirmação acima iremos provar que E_1 é denso nos espaços de interpolação. Seja $x \in \bar{E}_{[\theta]}$, então existe uma função $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$, tal que $f(\theta) = x$. Pelo Lema 3.3.2 temos que para dado $\varepsilon > 0$ existe $g_\varepsilon \in \mathfrak{F}_0(\bar{E})$, tal que $\|f - g_\varepsilon\|_{\mathfrak{F}} < \varepsilon$. Portanto, $\|x - g_\varepsilon(\theta)\|_{[\theta]} < \varepsilon$ e como $g(\theta) \in E_1$ o primeiro item segue.

(b) Ora, $E_{[0]}$ é espaço intermediário e assim, em particular $\bar{E}_{[0]} \hookrightarrow E_0$, ou seja,

$$\|x\|_{E_0} \leq \|x\|_{[0]}, \quad \forall x \in \bar{E}_{[0]}.$$

Logo, para ver que a norma em $\bar{E}_{[0]}$ coincide com a norma de E_0 em $E_{[0]}$ façamos da seguinte maneira. Tome $x \in \bar{E}_{[0]}$ e $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x_\varepsilon \in E_1$, tal que

$$\|x - x_\varepsilon\|_{[0]} < \varepsilon.$$

Defina agora para cada $n \in \mathbb{N}$ $f_n(z) = x_\varepsilon e^{z^2 - nz}$, temos que f_n toma valores em E_1 , $f_n(0) = x_\varepsilon$ e

$$\|f_n(j + it)\|_{E_j} \leq e^{j^2 - nj} \|x_\varepsilon\|_{E_j}.$$

Desta forma obtemos $f_n \in \mathfrak{F}(\bar{E})$, com

$$\|f_n\|_{\mathfrak{F}} \leq \|x_\varepsilon\|_{E_0} + e^{1-n} \|x_\varepsilon\|_{E_1}.$$

Ainda, por definição temos $\|x_\varepsilon\|_{[0]} \leq \|f_n\|_{\mathfrak{F}}$ para todo n . Assim, $\|x_\varepsilon\|_{[0]} \leq \|x_\varepsilon\|_{E_0}$. Mas $\bar{E}_{[0]} \hookrightarrow E_0$ e $x - x_\varepsilon \in \bar{E}_{[0]}$ o que implica que

$$\|x - x_\varepsilon\|_{E_0} \leq \|x - x_\varepsilon\|_{[0]} < \varepsilon.$$

Daí segue que

$$\|x\|_{[0]} \leq \varepsilon + \|x_\varepsilon\|_{[0]} \leq 2\varepsilon + \|x\|_{E_0},$$

logo, $\|x\|_{[0]} \leq \|x\|_{E_0}$, sempre que $x \in \bar{E}_{[0]}$. Deste modo, foi provado que para $x \in \bar{E}_{[0]}$ temos que $\|x\|_{[0]} = \|x\|_{E_0}$. Agora, como as normas coincidem em $E_{[0]}$ o resultado segue do item **(a)** que E_1 é denso em E_0 e em $E_{[0]}$, desde que

$$E_{[0]} = \overline{E_1}^{\|\cdot\|_{[0]}} = \overline{E_1}^{\|\cdot\|_{E_0}} = E_0.$$

Uma prova semelhante nos leva a $E_1 = E_{[1]}$. □

3.4 O Teorema de equivalência

Estudaremos agora a relação entre os dois métodos de interpolação complexa $[\cdot, \cdot]_\theta$ e $[\cdot, \cdot]^\theta$. Provaremos que eles são equivalentes quando aplicados a certos pares.

Antes de provar o resultado principal desta seção precisaremos de alguns resultados técnicos, os quais veremos a seguir.

Definição 3.4.1. Definimos o **núcleo de Poisson** na faixa S por

$$P_j(s + it, \tau) \doteq \frac{e^{-\pi(\tau-t)} \sin(\pi s)}{\sin^2(\pi s) + (\cos(\pi s) - e^{\pi j i - \pi(\tau-t)})^2}, \quad j = 0, 1.$$

Observação 16. Em (TRIEBEL, 1978) página 64, pode-se encontrar sua construção a partir do núcleo de Poisson no disco unitário.

Lema 3.4.2. Seja $f \in \mathfrak{F}$, então para $0 < \theta < 1$ são válidas

1.

$$\log \|f(\theta)\|_{[\theta]} \leq \sum_{j=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \log \|f(j + i\tau)\|_{E_j} P_j(\theta, \tau) d\tau;$$

2.

$$\|f(\theta)\|_{[\theta]} \leq \sum_{j=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \|f(j + i\tau)\|_{E_j} P_j(\theta, \tau) d\tau;$$

3.

$$\|f(\theta)\|_{[\theta]} \leq \left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|f(i\tau)\|_{E_0} P_0(\theta, \tau) d\tau \right)^{1-\theta} \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|f(1 + i\tau)\|_{E_1} P_1(\theta, \tau) d\tau \right)^{\theta}.$$

Demonstração. Note primeiramente que do item 1, utilizando a convexidade da função exponencial e a desigualdade de Jensen, obtemos o item 2. Novamente do item 1, utilizando a propriedade da exponencial de transformar soma em produto e desigualdades de Hölder podemos concluir o item 3. Sendo assim, basta provar o item 1. Com efeito, sejam $\phi_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, limitadas tais que

$$\phi_j(t) \geq \log \|f(j + it)\|_{E_j},$$

para todo $j \in \{0, 1\}$. Seja $\Phi(\cdot)$ uma função holomorfa em S_0 , contínua em S tal que sua parte real $\text{Re}\Phi$ é a solução do problema de Laplace

$$\Delta u = 0, \text{ em } S_0$$

$$u(it) = \phi_0(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$u(1 + it) = \phi_1(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\operatorname{Re}\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}} \phi_0(\tau) P_0(z, \tau) d\tau + \int_{\mathbb{R}} \phi_1(\tau) P_1(z, \tau) d\tau,$$

com $\operatorname{Re}\Phi(j+it) = \phi_j(it)$. Afirmamos que $e^{-\Phi(\cdot)} f(\cdot) \in \mathfrak{F}(\bar{E})$. De fato, como Φ é contínua e limitada em S

$$\|e^{-\Phi(j+it)} f(j+it)\|_{E_j} \leq e^{-\operatorname{Re}\Phi(j+it)} \|f(j+it)\|_{E_j} \leq e^{-\phi_j(t)} \|f(j+it)\|_{E_j} \leq 1.$$

Portanto, $\|e^{-\phi} f\|_{\mathfrak{F}} \leq 1$ e concluímos que para todo $1 \leq \theta \leq 1$ que $\|e^{-\phi(\theta)} f(\theta)\|_{[\theta]} \leq 1$, ou equivalentemente,

$$\log \|f(\theta)\|_{[\theta]} \leq \operatorname{Re}\Phi(\theta) \leq \sum_{j=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \|\phi_j(\tau)\|_{E_j} P_j(\theta, \tau) d\tau, \quad (3.11)$$

Agora, basta tomar o ínfimo sobre as funções ϕ_j no lado direito da relação acima e obtemos a desigualdade desejada. $\square$

Lema 3.4.3. Se $f \in \mathfrak{G}(\bar{E})$ e

$$\frac{1}{h} [f(it+ih) - f(it)], \quad (3.12)$$

converge em E_0 , quando $h \rightarrow 0$, para todo $t \in U$, onde U é algum subconjunto de $\mathbb{R}$ com medida positiva. Então, $f'(\theta) \in \bar{E}_{[\theta]}$ para todo $0 < \theta < 1$.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $z \in S$ defina

$$f_n(z) = \frac{n}{i} [f(z+i/n) - f(z)].$$

A hipótese (3.12), implica que para cada $t \in \mathbb{R}$ a sequência $\{f_n(it)\}$ é de Cauchy em E_0 . Além disso, se $g_n(z) = e^{\varepsilon z^2} f_n(z)$ para todo $\varepsilon > 0$, então $g_n \in \mathfrak{F}$ e pelo Lema 3.4.2 temos que

$$\log \|g_n(\theta) - g_m(\theta)\|_{[\theta]} \leq \sum_{j=0}^1 \int_{-\infty}^{\infty} \log \|g_n(j+i\tau) - g_m(j+i\tau)\|_{E_j} P_j(\theta, \tau) d\tau.$$

Agora, como $\|f_n(j+it) - f_m(j+it)\|_{E_j} \leq 2\|f\|_{\mathfrak{G}}$ e $\|f_n(it) - f_m(it)\|_{E_0} \rightarrow 0$, para todo $t \in U$, vemos que o lado direito de (3.4) tende para $-\infty$, quando $m, n \rightarrow \infty$.

Deste modo, quando $m, n \rightarrow \infty$ temos $\log \|g_n(\theta) - g_m(\theta)\|_{[\theta]} \rightarrow -\infty$, e portanto

$$\|e^{\varepsilon\theta^2} [f_n(\theta) - f_m(\theta)]\|_{[\theta]} = \|g_n(\theta) - g_m(\theta)\|_{[\theta]} \rightarrow 0, \text{ quando } m, n \rightarrow +\infty.$$

Portanto, $\|f_n(\theta) - f_m(\theta)\|_{[\theta]} \rightarrow 0$, ou seja, a sequência $\{f_n(\theta)\}$ é de Cauchy em $\bar{E}_{[\theta]}$ e com este espaço é completo temos que esta sequência é convergente nele mesmo. Agora, como $\theta \in S_0$ e f é analítica em S_0 limite de $f_n(\theta)$ é $f'(\theta)$ que está em $\bar{E}_{[\theta]}$ e o resultado segue. $\square$

O resultado a seguir tem papel fundamental juntamente com Teorema de dualidade para as aplicações que temos em mente.

Teorema 3.4.4 (O Teorema de Equivalência). *Para qualquer par $\bar{E} = (E_0, E_1)$ e $0 < \theta < 1$, temos*

$$\bar{E}_{[\theta]} \hookrightarrow \bar{E}^{[\theta]} \quad e \quad \|x\|^{[\theta]} \leq \|x\|_{[\theta]} \quad \forall x \in \bar{E}_{[\theta]}.$$

Se pelo menos um dos espaços E_0 e E_1 for reflexivo, então

$$\bar{E}_{[\theta]} = \bar{E}^{[\theta]} \quad e \quad \|x\|^{[\theta]} = \|x\|_{[\theta]} \quad \forall x \in \bar{E}^{[\theta]}.$$

Demonstração. Seja $x \in \bar{E}_{[\theta]}$ e escolha $f \in \mathfrak{F}(\bar{A})$ tal que $f(\theta) = x$ e $\|f\|_{\mathfrak{F}} \leq \|x\|_{[\theta]} + \varepsilon$. Então, faça $g(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi$. Afirmamos que $g \in \mathfrak{G}(\bar{E})$ e que $\|g\|_{\mathfrak{G}} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}}$. De fato, para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ e $j \in 0, 1$ temos que $f(j + it) \in E_j$ e assim de

$$\frac{\|g(j + it_1) - g(j + it_2)\|_{E_j}}{|t_1 - t_2|} \leq \|f(j + it)\|_{E_j}$$

obtemos as propriedades necessárias para g estar em $\mathfrak{G}$. Adicionalmente, como $g'(\theta) = f(\theta) = x$, temos que $\|x\|^{[\theta]} \leq \|g\|_{\mathfrak{G}} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}} \leq \|x\|_{[\theta]} + \varepsilon$, provando a primeira parte do teorema.

Para a segunda parte, graças ao Teorema 3.3.1 item (a) temos que

$$[E_0, E_1]_{\theta} = [E_1, E_0]_{1-\theta},$$

e assim podemos supor sem perda de generalidade que E_0 é reflexivo. Seja $f \in \mathfrak{G}(\bar{E})$ temos que $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(it) - f(0)$ é contínua e sua imagem está contido num subespaço separável V de E_0 . Defina para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(z) = \frac{n}{i} [f(z + i/n) - f(z)] \quad (3.13)$$

e $K_m(t)$ o fecho fraco do conjunto $\{f_n(it) : n \geq m\}$, isto é, $K_m(t) = \overline{\{f_n(it) : n \geq m\}}^{\sigma(E_0, E_0^*)}$ e $K(t) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} K_m(t)$. Como $f \in \mathfrak{G}$, $K_m(t)$ é um conjunto limitado em E_0 , para todo $t \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Como E_0 é reflexivo, $K_m(t)$ é fracamente compacto e ainda define uma sequência decrescente de compactos na topologia fraca. Pela propriedade de intercessão finita $K(t)$ é não vazio e como a topologia fraca é de Hausdorff temos que $K(t)$ é compacto. Desta forma, para cada $t \in \mathbb{R}$ existe $g(t) \in K(t)$ e assim $K(t) \subset V$ e portanto a imagem de g é separável.

Agora mostremos que

$$f(it) - f(0) = i \int_0^t g(s) ds. \quad (3.14)$$

Observe que a expressão acima implica que $f(it)$ é derivável para quase todo $t \in \mathbb{R}$. Para provar (3.14) tome $L \in E_0^*$ e defina $\phi(t) = -iL(f(it) - f(0))$. logo, ϕ está bem definida provaremos que é Lipschitz contínua. De fato, sejam $t, s \in \mathbb{R}$, temos

$$\phi(t) - \phi(s) = -iL(f(it) - f(0)) + iL(f(is) - f(0)) = \phi(t) - iL(f(it) - f(is)).$$

Agora, como $f \in \mathfrak{G}$

$$|\phi(t) - \phi(s)| \leq \|L\|_{E_0^*} \|f(it) - f(is)\|_{E_0} \leq \|L\|_{E_0^*} \|f\|_{\mathfrak{G}} |t - s|.$$

Daí segue a afirmação e portanto ϕ derivável quase sempre.

Note também que

$$L(f_n(it)) = -in(L(f(i(t+1/n)) - f(0)) - L(f(it) - f(0))) = n(\phi(t+1/n) - \phi(t))$$

$L(f_n(it)) = n(\phi(t+1/n) - \phi(t))$ e dessa forma sendo L contínua temos que

$$LK_m(t) \subset \overline{\{n(\phi(t-1/n) - \phi(t)); n \geq m\}}^{\sigma(E_0, E_0^*)}.$$

Logo, $LK(t) \subset LK_m(t)$ e como ϕ é diferenciável quase sempre, existe $U \subset \mathbb{R}$ conjunto mensurável tal que seu complementar tem medida nula e para cada $t \in U$ obtemos que $LK(t)$ deve conter um único elemento $\phi'(t)$ e consequentemente $L(g(t)) = \phi'(t)$ e é mensurável. Como a imagem de g é separável, temos que g é fortemente mensurável. Deste modo, sendo $K(t)$ é um conjunto limitado, segue $g(\cdot)$ é também limitada e assim

$$L(f(it - f(0))) = i\phi(t) = i\phi(0) + i \int_0^t \phi'(s) ds = i \int_0^t L(g(s)) ds,$$

e (3.14) segue pelo Teorema de Hahn-Banach. Logo, como $L \in E_0^*$ é qualquer e $f(it)$ é derivável em quase todo $t \in \mathbb{R}$ e pelo Lema 3.4.3, obtemos $f'(\theta) \in \bar{A}_{[\theta]}$.

Por fim, para $x \in \bar{E}^{[\theta]}$, sabemos que existe $f \in \mathfrak{G}$, com $f'(\theta) = x$ $\|f\|_{\mathfrak{G}} \leq \|x\|^{[\theta]} + \varepsilon$. Pelo que foi mostrado acima, devemos ter $x = f'(\theta) \in \bar{E}_{[\theta]}$. Resta provar que a inclusão natural de $\bar{E}^{[\theta]}$ em $\bar{E}_{[\theta]}$ é contínua, para isso, defina $h_n(z) = e^{\varepsilon z^2} f_n(z)$, onde f_n é dada em (3.13). Logo, $h_n \in \mathfrak{F}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e ainda como

$$\|h_n(j+it)\|_{E_j} \leq e^{\varepsilon j} n \|f(j+i(t+1/n)) - f(j+it)\|_{E_j} \leq e^{\varepsilon} \|f\|_{\mathfrak{G}},$$

e assim, $\|h_n\|_{\mathfrak{F}} \leq e^{\varepsilon} \|f\|_{\mathfrak{G}}$. Note também que $\|h_n(\theta) - e^{\varepsilon \theta^2} x\|_{[\theta]} \rightarrow 0$, desde que $\lim_n f_n(\theta) \rightarrow f'(\theta) = x$. Deste modo,

$$\|x\|_{[\theta]} \leq e^{-\varepsilon \theta^2} [\|h_n(\theta) - e^{\varepsilon \theta^2} x\|_{[\theta]} + \|h_n(\theta)\|_{[\theta]}] \leq \|h_n(\theta) - e^{\varepsilon \theta^2} x\|_{[\theta]} + e^{\varepsilon} \|f\|_{\mathfrak{G}},$$

e agora tomando $n \rightarrow +\infty$, obtemos para todo $\varepsilon > 0$ que

$$\|x\|_{[\theta]} \leq e^{\varepsilon} (\|x\|^{[\theta]} + \varepsilon).$$

e o Teorema está provado, já que $\varepsilon > 0$ é arbitrário. □

3.5 O Teorema de dualidade

Para a prova do teorema principal dessa seção precisaremos resultado sobre interpolação bilinear como veremos a seguir.

Teorema 3.5.1 (Teorema de interpolação bilinear). *Sejam $\bar{E}$ e $\bar{F}$ pares de Banach compatíveis e $T : E_0 \times F_1 \rightarrow B_0$ aplicação bilinear satisfazendo para $j = 0, 1$*

$$\|T(x, y)\|_{B_j} \leq M_j \|x\|_{E_j} \|y\|_{F_j},$$

para todo $x \in E_j$ e $y \in F_j$. Nestas condições, para todo $\theta \in (0, 1)$, T pode ser estendida de maneira única para uma aplicação bilinear, $T_\theta : \bar{E}^{[\theta]} \times \bar{F}_{[\theta]} \rightarrow \bar{B}^{[\theta]}$ com norma no máximo $M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

Demonstração. Primeiramente fixe $0 < \theta < 1$. Sejam $x \in \bar{E}^{[\theta]}$, $y \in F_1 \subset \bar{F}_{[\theta]}$ e $\varepsilon > 0$. Dessa forma, existem $g \in \mathfrak{G}(\bar{E})$ e $f \in \mathfrak{F}(\bar{F})$ de modo que $g'(\theta) = x$ e $f(\theta) = y$ com $\|f\|_{\mathfrak{F}} \leq \|x\|^{[\theta]} + \varepsilon$ e $\|g\|_{\mathfrak{G}} \leq \|y\|_{[\theta]} + \varepsilon$. Agora, para $f_0 \in \mathfrak{F}_0$ e $g \in \mathfrak{G}$ defina

$$h(z) = \int_0^z M_0^{\eta-1} M_1^{-\eta} T(g'(\eta), f_0(\eta)) d\eta.$$

Seguindo mesmas ideias utilizadas na prova do Teorema 3.2.12 vemos que h está bem definida. Ainda por este teorema, vemos que a expressão acima fica

$$h(z) = \int_0^z M_0^{\eta-1} M_1^{-\eta} T(dg(\eta), f_0(\eta)).$$

Provemos que $h \in \mathfrak{G}(\bar{B})$. Ora, se $t_1 < t_2$ e $j = 0, 1$ temos

$$\|h(j + it_1) - h(j + it_2)\|_{B_j} \leq M_j^{-1} \int_{t_1}^{t_2} \|dg(j + it)\|_{E_j} \|f(j + it)\|_{F_j} dt \leq (t_2 - t_1) \|g\|_{\mathfrak{G}} \|f\|_{\mathfrak{F}}.$$

Donde segue que, $\|h\|_{\mathfrak{G}(\bar{B})} \leq \|g\|_{\mathfrak{G}} \|f\|_{\mathfrak{F}}$ e assim obtemos

$$\|h'(\theta)\|^{[\theta]} \leq \|x\|^{[\theta]} \|y\|_{[\theta]},$$

como queríamos demonstrar. □

Agora caracterizaremos o dual $\overline{E_{[\theta]}^*}$ do espaço de interpolação $\bar{E}_{[\theta]}$.

Teorema 3.5.2 (O Teorema de dualidade). *Assuma que $\bar{E} = (E_0, E_1)$ é um par de espaços de Banach, com $E_1 \xrightarrow{d} E_0$. Então*

$$[E_0, E_1]_\theta^* = [E_0^*, E_1^*]^\theta, .$$

com normas iguais para todo $0 < \theta < 1$.

Demonstração. Com efeito, por hipótese $E_1 \hookrightarrow E_0$, logo $E_0^* \hookrightarrow E_1^*$ e assim vemos que o par (E_0^*, E_1^*) é compatível. Agora, defina a aplicação $T : E_1^* \times E_1 \rightarrow \mathbb{R}$, por $T(x^*, x) = \langle x^*, x \rangle$. Logo, T é bilinear e da definição tem-se para quaisquer $x^* \in E_1^*$ e $x \in E_1$ que $|T(x^*, x)| \leq \|x^*\|_{E_1^*} \|x\|_{E_1}$. Agora, para $x \in E_1 \subset E_0$ e $x^* \in E_0^*$ obtemos uma desigualdade semelhante a anterior, como $E_1 \xrightarrow{d} E_0$ temos $x^*|_{E_1} \in E_1^*$ com $\|x^*\|_{E_0^*} = \|x^*|_{E_1}\|_{E_1^*}$. Desta maneira, estamos

aptos a utilizar o Teorema de interpolação bilinear 3.5.1, e assim estender T a $[E_0^*, E_1^*]^\theta \times [E_0, E_1]_\theta$ satisfazendo para $x^* \in [E_0^*, E_1^*]^\theta$ e $x \in [E_0, E_1]_\theta$ a relação

$$|T(x^*, x)| \leq \|x^*\|_{[E_0^*, E_1^*]^\theta} \|x\|_{\bar{E}_{[\theta]}}.$$

Daí, vemos que se $x^* \in [E_0^*, E_1^*]^\theta$, então $x^* \in \bar{E}_{[\theta]}^*$ e podemos escrever $\langle x^*, x \rangle_{\bar{E}_{[\theta]}^*, \bar{E}_{[\theta]}} \doteq T(x^*, x)$. Além disso, da relação acima temos que $\|x^*\|_{\bar{E}_{[\theta]}^*} \leq \|x^*\|_{[E_0^*, E_1^*]^\theta}$, ou seja, $[E_0^*, E_1^*]^\theta \hookrightarrow [E_0, E_1]_\theta^*$.

Para a prova de $[E_0, E_1]_\theta^* \hookrightarrow [E_0^*, E_1^*]^\theta$ nós referimos a (BERGH; LOFSTROM, 1976) página 98. $\square$

Corolário 3.5.3. *Assuma, adicionalmente, que pelo menos um dos espaços E_0 e E_1 é reflexivo. Então*

$$[E_0, E_1]_\theta^* = [E_0^*, E_1^*]_\theta \quad (\text{normas iguais; } 0 < \theta < 1).$$

Demonstração. O corolário segue dos teoremas de equivalência e dualidade. $\square$

Corolário 3.5.4. *Se (E_0, E_1) é um par compatível e ambos os espaços são reflexivos, então $\bar{E}_{[\theta]}$ também é reflexivo.*

Demonstração. Provemos que para todo $\theta \in (0, 1)$, a aplicação canônica $J_\theta : \bar{E}_{[\theta]} \rightarrow \bar{E}_{[\theta]}^{**}$ é sobrejetiva. Seja J_j a aplicação canônica associada a E_j , $j = 0, 1$. Observe que, $J_1 = J_0|_{E_1}$ e $J_\theta = J_0|_{\bar{E}_{[\theta]}}$.

Como E_0 e E_1 são reflexivos temos que

$$\begin{aligned} I_{E_0} : E_0 &\xrightarrow{J_0} E_0^{**} \xrightarrow{J_0^{-1}} E_0 \\ I_{E_1} : E_1 &\xrightarrow{J_1} E_1^{**} \xrightarrow{J_1^{-1}} E_1. \end{aligned}$$

Interpolando cada aplicação acima obtemos

$$I_{\bar{E}_{[\theta]}} : \bar{E}_{[\theta]} \xrightarrow{J_\theta} [E_0^{**}, E_1^{**}]_\theta \xrightarrow{K_\theta} \bar{E}_{[\theta]}.$$

Ora, graças ao Teorema de dualidade 3.5.2 temos que

$$[E_0^{**}, E_1^{**}]_\theta = [E_0^*, E_1^*]_\theta^* = [E_0, E_1]_\theta^{**}.$$

Deste modo, vemos que J_θ possui inversa a direita K_θ o que implica em sua sobrejetividade como queríamos. $\square$

3.6 O Teorema de reiteração

Aqui mostramos que o método de interpolação complexo é estável pelo uso repetido no sentido do teorema abaixo. Para sua prova, vamos utilizar o Teorema de dualidade.

Teorema 3.6.1 (O Teorema de reiteração). *Seja $\bar{E}$ um par compatível de espaços de Banach e faça*

$$X_j = \bar{E}_{\theta_j} \quad (0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 1; j = 0, 1).$$

Então

$$\bar{X}_{[\eta]} = \bar{E}_{[\theta]} \quad (0 \leq \eta \leq 1),$$

com normas iguais e $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$.

Demonstração. Note que, do Teorema 3.3.3, o par (X_0, X_1) é compatível. Sendo assim, mostremos que $\|x\|_{\bar{X}_{[\eta]}} \leq \|x\|_{\bar{E}_{[\theta]}}$ para todo $x \in \bar{E}_{[\theta]}$. Com efeito, tome $x \in \bar{E}_{[\theta]}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário, então existe uma função $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$ tal que $f(\theta) = x$ e $\|f\|_{\mathfrak{F}} \leq \|x\|_{\bar{E}_{[\theta]}} + \varepsilon$. Defina, para todo $z \in S$, $f_1(z) = f((1 - z)\theta_0 + z\theta_1)$. Então $f_1(\eta) = x$ e

$$\begin{aligned} f_1(j + it) &= f((1 - j)\theta_0 + it(\theta_1 - \theta_0)) \\ &= f(\theta_j + it(\theta_1 - \theta_0)) \in \bar{E}_{[\theta_j]} = X_j. \end{aligned}$$

Assim, como $\theta_0 \neq \theta_1$ para $j = 0, 1$, temos $f_1(j + it) \rightarrow 0$, $|t| \rightarrow \infty$ e também

$$\sup_{\tau} \|f_1(j + i\tau)\|_{X_j} = \sup_t \|f(\theta_j + it)\|_{\bar{E}_{\theta_j}} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\bar{E})}, \quad (3.15)$$

o que implica que

$$\|f_1\|_{\mathfrak{F}(\bar{X})} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}(\bar{E})} \leq \|x\|_{\bar{E}_{[\theta]}} + \varepsilon. \quad (3.16)$$

Deste modo, obtemos $\|x\|_{\bar{X}_{[\eta]}} \leq \|x\|_{\bar{E}_{[\theta]}}$, ou seja, $\bar{E}_{\theta} \hookrightarrow \bar{X}_{[\eta]}$.

Para provar a desigualdade recíproca, observamos primeiro que, se $y \in \bar{E}^{[\theta]}$, e $Y_j = \bar{E}^{[\theta_j]}$, temos $\|y\|_{\bar{Y}_{[\eta]}} \leq \|y\|_{\bar{E}^{[\theta]}}$, para $j = 0, 1$. Para ver isto, escolha $g \in \mathfrak{G}(\bar{E})$ tal que $g'(\theta) = y$ e $\|g\|_{\mathfrak{G}} \leq \|y\|_{\bar{E}^{[\theta]}} + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é arbitrário. Fazendo $g_1(z) = (\theta_1 - \theta_0)^{-1} f((1 - z)\theta_0 + z\theta_1)$. Daí já segue que $g'_1(\eta) = y$ e prosseguindo com o argumento análogo usado em (3.15) e (3.16) vemos que $g_1 \in \mathfrak{G}(\bar{Y})$, e $\|g_1\|_{\mathfrak{G}(\bar{Y})} \leq \|g\|_{\mathfrak{G}(\bar{E})} \leq \|y\|_{\bar{E}^{[\theta]}} + \varepsilon$. Portanto segue que $\|y\|_{\bar{Y}_{[\eta]}} \leq \|y\|_{\bar{E}^{[\theta]}}$, isto é, $\bar{E}^{\theta} \hookrightarrow \bar{Y}^{[\eta]}$.

Em segundo lugar, afirmamos que $\bar{X}_{[\eta]}^* \hookrightarrow \bar{E}_{[\theta]}^*$, ou seja, se $\ell \in \bar{E}_{[\theta]}^*$, então $\|\ell\|_{\bar{E}_{[\theta]}^*} \geq \|\ell\|_{\bar{X}_{[\eta]}^*}$. De fato, pelo Teorema de dualidade 3.5.2 temos para $0 < \eta, \theta < 1$

$$\|\ell\|_{\bar{E}_{[\theta]}^*} = \|\ell\|_{(\bar{E}^*)^{[\theta]}}$$

e

$$\|\ell\|_{(\bar{X}^*)^{[\eta]}} = \|\ell\|_{\bar{X}_{[\eta]}^*},$$

sempre que $\ell \in \bar{E}_{[\theta]}^*$. Agora, graças a afirmação anterior obtemos que

$$\|\ell\|_{(\bar{X}^*)_{[\eta]}} = \|\ell\|_{[(\bar{E}^*)_{[\theta_0]}, (\bar{E}^*)_{[\theta_1]}]_{\eta}} \leq \|\ell\|_{(\bar{E}^*)^{\theta}}.$$

Portanto,

$$\|\ell\|_{\bar{E}_{[\theta]}^*} \leq \|\ell\|_{\bar{X}_{[\eta]}^*}.$$

Deste modo, se $x \in \bar{E}_{[\theta]}$, pelo Teorema de Hahn-Banach e da desigualdade acima obtemos

$$\|x\|_{\bar{E}_{[\theta]}} = \sup_{\|l\|_{\bar{E}_{[\theta]}^*} \leq 1} \langle l, x \rangle_{\bar{E}_{[\theta]}^*, \bar{E}_{[\theta]}} \leq \sup_{\|l\|_{\bar{X}_{[\eta]}^*} \leq 1} \langle l, x \rangle_{\bar{X}_{[\eta]}^*, \bar{X}_{[\eta]}} = \|x\|_{\bar{X}_{[\eta]}}. \quad (3.17)$$

Logo, pela primeira parte da prova e por (3.17) segue que as normas em $\bar{E}_{[\theta]}$ e $\bar{X}_{[\eta]}$ são coincidem em $\bar{E}_{[\theta]}$.

Por fim, vamos mostrar que $\bar{E}_{[\theta]}$ contém $\bar{X}_{[\eta]}$ e a prova do teorema estará concluída. Com efeito, temos do Teorema 3.3.3 item (a) que $X_1 \xrightarrow{d} \bar{X}_{[\eta]}$ e que $E_1 \xrightarrow{d} \bar{E}_{\theta_1} = X_1$ segue que da propriedade transitiva das imersões densas que E_1 é denso em $\bar{X}_{[\eta]}$. Agora, segue do fato das normas $\|\cdot\|_{[\eta]}$ e $\|\cdot\|_{[\theta]}$ coincidirem em $\bar{E}_{[\theta]}$ e de E_1 ser denso em $\bar{E}_{[\theta]}$ que devemos ter $\bar{X}_{[\eta]} = \bar{E}_{[\theta]}$ com normas iguais. $\square$

3.7 Aplicações

Provaremos aqui teoremas de interpolação para espaços conhecidos como os espaços L^p e Sobolev $W^{m,p}$, incluindo uma prova simples do Teorema de Riesz-Thorin.

Também faremos um resultado a respeito de interpolação complexa para produto cartesiano finito de espaços de Banach.

Teorema 3.7.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e $1 < p_0 < p_1$. Então,*

$$[L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)]_{\theta} = L^r(\Omega),$$

onde,

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Demonstração. Seja Λ o conjunto das funções simples que se anulam fora de medida finita. Vamos provar que

$$\|a\|_{[\theta]} = \|a\|_r, \quad \forall a \in \Lambda.$$

Com efeito, primeiramente fixe $a \in \Lambda$ com $\|a\|_r = 1$ e defina $1/p(z) = (1-z)/p_0 + z/p_1$, em particular para $z = \theta$, temos $1/p(\theta) = 1/r$. Ponha, para cada $z \in S$

$$f(z) = e^{\varepsilon(z^2 - \theta^2)} |a(\cdot)|^{\frac{r}{p(z)}} \frac{a(\cdot)}{|a(\cdot)|}.$$

Deste modo, f é função inteira e toma valores em $L^{p_1}(\Omega)$, para $j = 0, 1$ temos $f(j + it) \in L^{p_j}(\Omega)$ e ainda

$$\|f(j + it)\|_{p_j} \leq e^{(\varepsilon - t^2)} \left(\int_{\Omega} |a(x)|^{r \operatorname{Re} \frac{p_j}{p(j+it)}} dx \right)^{1/p_j} \leq e^{\varepsilon} \|a\|_r^{r/p_j} = e^{\varepsilon},$$

onde foi usado o fato que $\operatorname{Re}(p_j/p(j+it)) = 1$. Segue que $f \in \mathfrak{F}$ e $\|f\|_{\mathfrak{F}} \leq e^{\varepsilon}$, desta forma $\|a\|_{\theta} \leq e^{\varepsilon} \|a\|_{\theta}$ para todo $\varepsilon > 0$ e assim

$$\|a\|_{\theta} \leq \|a\|_r \quad (3.18)$$

Agora, se $a \in \Lambda$ não nulo, tome $\tilde{a} = a/\|a\|_r$ e utilizando (3.18) para $\tilde{a}$ obtemos esta mesma desigualdade para qualquer $a \in \Lambda$.

Para provar a desigualdade recíproca usaremos a seguinte relação, a qual decorre dos Teoremas de Riesz, Hahn-Banach e Lema de Fatou,

$$\|a\|_r = \sup\{|\langle a, b \rangle|; \|b\|_{r'} = 1, b \in \Lambda\}.$$

Defina agora, para $b \in \Lambda$ fixado com $\|b\|_{r'} = 1$ e $z \in S$

$$g(z) = e^{\varepsilon(z^2 - \theta^2)} |b(\cdot)|^{\frac{r'}{p'(z)}} \frac{b(\cdot)}{|b(\cdot)|}.$$

onde $1/p'(z) = (1-z)/p'_0 + z/p'_1$. Note que $p'(z)$ é de fato o expoente conjugado de $p(z)$. Agora, com a intenção de utilizar do Lema das Três Linhas fazemos

$$F(z) = \langle f(z), g(z) \rangle.$$

Fixando a com $\|a\|_{[\theta]} = 1$ com cálculos semelhantes utilizados na primeira parte, obtemos $|F(it)| \leq e^{\varepsilon}$ e $|F(1+it)| \leq e^{2\varepsilon}$. Assim, $\langle a, b \rangle = |F(\theta)| \leq e^{\varepsilon}$. Logo,

$$\|a\|_r = |\langle a, b \rangle| \leq 1 = \|a\|_{\theta}.$$

Para $a \in \Lambda$ qualquer prossiga de forma análoga feita na primeira parte da prova e assim obtemos a igualdade desejada em Λ . Por fim, basta notar que Λ é denso em $L^{p_0}(\Omega)$ e este é denso em $[L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega)]_{\theta}$ e também Λ é denso em $L^r(\Omega)$, com suas respectivas normas que o resultado seguirá. $\square$

Como corolário do teorema anterior obtemos o Teorema de **Riesz-Thorin**:

Teorema 3.7.2 (Riesz-Thorin). *Assuma que $p_0 \leq p_1$, $q_0 \leq q_1$ e que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado. Então, se*

$$T : L^{p_0}(\Omega) \rightarrow L^{q_0}(\Omega)$$

é limitada com norma M_0 e

$$T : L^{p_1}(\Omega) \rightarrow L^{q_1}(\Omega)$$

é também limitada com norma M_1 . Então,

$$T : L^{p\theta}(\Omega) \rightarrow L^{q\theta}(\Omega)$$

com norma

$$M \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \quad (3.19)$$

contanto que $0 < \theta < 1$ e

$$\frac{1}{p\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (3.20)$$

Demonstração. Este resultado segue do teorema anterior 3.7.1, desde que $L^{p\theta}(\Omega)$ e $L^{q\theta}(\Omega)$ são espaços de interpolação exatos com relação aos pares $(L^{p_0}(\Omega), L^{p_1}(\Omega))$ e $(L^{q_0}(\Omega), L^{q_1}(\Omega))$, respectivamente. $\square$

Lema 3.7.3. Se $p \geq q$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é limitado, então $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Demonstração. Segue da desigualdade de Hölder. $\square$

Definição 3.7.4. Seja $s \geq 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, definimos o **espaço de Bessel de potência s** como $H^{s,p}(\Omega) \doteq [L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)]_\theta$, onde $m \in \mathbb{N}$ o menor inteiro maior que s e $\theta = s/m$.

Teorema 3.7.5. Sejam Ω limitado com fronteira suave e $s > 0$. Nestas condições, se m é o menor inteiro maior do que s com $N - mp > 0$ e $r = \frac{Np}{N-sp}$, então vale a seguinte imersão

$$H^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall p \leq q \leq r. \quad (3.21)$$

Demonstração. Primeiramente note que se $q \in [p, r]$ e o resultado do teorema é válido para r , então o teorema é válido também para q neste intervalo, desde que Ω é limitado e podemos utilizar o Lema 3.7.3. Por esse motivo provaremos (3.21) apenas para r definido no enunciado. Com efeito, graças ao Teorema das Imersões de Sobolev temos que $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, para $p^* = \frac{Np}{N-mp}$, onde $m \in \mathbb{N}$ é o menor inteiro maior que s . Como $p^* \geq p$ e Ω é limitado, temos que $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ e por definição do espaço de Sobolev temos também que $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$. Pelos Teorema de interpolação entre espaços 3.7.1 e da definição dos espaços de Bessel temos que $L^r(\Omega)$ e $H^{s,p}(\Omega)$ são espaços de interpolação relativos aos pares $(L^p(\Omega), L^{p^*}(\Omega))$ e $(L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega))$, respectivamente. Sendo assim, $1/r = (1-\theta)/p + \theta/p^*$ donde concluímos que $r = \frac{Np}{N-sp}$ e a aplicação identidade em $L^p(\Omega)$ I_p sendo contínua e quando restrita a $W^{m,p}(\Omega)$ fazendo o papel da inclusão deste espaço em $L^{p^*}(\Omega)$, temos que

$$I_{H^{s,p}(\Omega)} : [L^p(\Omega), W^{m,p}(\Omega)]_{s/m} \rightarrow [L^p(\Omega), L^{p^*}(\Omega)]_{s/m} = L^r(\Omega)$$

é aplicação limitada, isto é equivalente dizer que vale (3.21) para $r = \frac{Np}{N-sp}$ e daí segue o resultado. $\square$

Observação 17. Sejam $X_1, \dots, X_N$ espaços de Banach, então o produto cartesiano finito é definido por

$$\prod_{i=1}^N X_i = \{(x_1, \dots, x_N); x_i \in X_i, \forall i\},$$

e o dotamos com a norma do máximo, isto é, para $x \in \prod_{i=1}^N X_i$ define

$$\|x\|_{\prod_{i=1}^N X_i} = \max_{1 \leq i \leq N} \|x_i\|_{X_i}.$$

Teorema 3.7.6. Sejam $\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^N$ pares compatíveis de espaços de Banach. Fixe

$$E_0 = \prod_{i=1}^N X_0^i \quad e \quad E_1 = \prod_{i=1}^N X_1^i.$$

Então, valem

$$\mathfrak{F}(E_0, E_1) = \prod_{i=1}^N \mathfrak{F}(X_0^i, X_1^i), \quad (\text{com normas iguais}). \quad (3.22)$$

e

$$[\prod_{i=1}^N X_0^i, \prod_{i=1}^N X_1^i]_{\theta} = \prod_{i=1}^N [X_0^i, X_1^i]_{\theta} \quad (3.23)$$

Demonstração. Sejam $f : S \rightarrow \prod_{i=1}^N X_0^i$ e $f_i : S \rightarrow X_0^i$ suas funções coordenadas para $i = 1, \dots, N$.

Logo, f é contínua, limitada em S e analítica em S_0 se, e somente se, f_i são contínuas e limitadas em S e analíticas em S_0 , para cada i . Além disso, para $j = 0, 1$

$$\|f(j+it)\|_{E_j} \rightarrow 0 \iff \|f(j+it)\|_{X_j^i} \rightarrow 0, \quad \forall i = 1, \dots, N$$

quando $|t| \rightarrow \infty$.

Por fim,

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathfrak{F}} &= \max_{j=0,1} \left(\sup_t \|f(j+it)\|_{E_j} \right) \\ &= \max_{j=0,1} \left(\sup_t \left(\max_{1 \leq i \leq N} \|f_i(j+it)\|_{X_j^i} \right) \right) \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} \left(\max_{j=0,1} \left(\sup_t \|f_i(j+it)\|_{X_j^i} \right) \right) \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} \|f_i\|_{\mathfrak{F}_i}. \end{aligned}$$

E assim obtemos a primeira identificação (3.22).

Provemos a segunda afirmativa. Com efeito, tome $x \in \bar{E}_{\theta}$, e $f \in \mathfrak{F}(\bar{E})$ tal que $x = f(\theta) = f_1(\theta), \dots, f_N(\theta)$, pela primeira parte da prova vemos que $x \in \prod_{i=1}^N X_{[\theta]}^i$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|x\|_{\prod_{i=1}^N \bar{X}_{\theta}^i} &= \max_{1 \leq i \leq N} \|f_i(\theta)\|_{\bar{X}_{[\theta]}^i} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \|f_i\|_{\mathfrak{F}(\bar{X}^i)} \\ &= \|f\|_{\mathfrak{F}(\bar{E})}. \end{aligned}$$

Agora, da definição da norma $\|\cdot\|_{[\theta]}$ temos que $\|x\|_{\prod_{i=1}^N \bar{X}_\theta} \leq \|x\|_{[\theta]}$, de onde vem que,

$$[E_0, E_1]_\theta \hookrightarrow \prod_{i=1}^N [X_0^i, X_1^i]_\theta.$$

Reciprocamente, seja $x \in \prod_{i=1}^N \bar{X}_{[\theta]}^i$, logo existem $f_i \in \mathfrak{F}(\bar{X}^i)$ tais que $x_i = f_i(\theta)$ e $\|f_i\|_{\mathfrak{F}(\bar{X}^i)} \leq \|x_i\|_{[\theta]} + \varepsilon$. Assim, tomando $f(\cdot) = (f_1(\cdot), \dots, f_N(\cdot))$, obtemos que $x = f(\theta)$ e portanto da primeira parte da prova $x \in \bar{E}_{[\theta]}$.

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \|x\|_{[\theta]} &\leq \|f\|_{\mathfrak{F}} \\ &= \max_{1 \leq i \leq N} \|f_i\|_{\mathfrak{F}_i} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq N} (\|x_i\|_{[\theta]} + \varepsilon) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq N} (\|x_i\|_{[\theta]}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

e como vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que $\bar{E}_{[\theta]} \hookrightarrow \prod_{i=1}^N \bar{X}_{[\theta]}^i$ e o teorema está provado. $\square$

Como vamos trabalhar com campos vetoriais em L^p precisaremos o seguinte Teorema de imersão, o qual obtemos como corolário do Teorema de Imersão em dimensão um, juntamente com o resultado do teorema anterior.

Corolário 3.7.7. *Dado $s > 0$ e considere m o menor inteiro menor ou igual que s .*

$$[L^p(\Omega)^N, W^{m,p}(\Omega)^N]_{s/m} = H^{s,p}(\Omega)^N.$$

Adicionalmente, para $\leq p \leq q \leq r = Np/(N - sp)$, tem-se

$$H^{s,p}(\Omega)^N \hookrightarrow L^r(\Omega)^N. \quad (3.24)$$

Demonstração. A primeira afirmativa segue o teorema anterior, provemos a segunda. Com efeito, seja $u \in H^{s,p}(\Omega)^N$, assim $u_i \in H^{s,p}(\Omega)$ para cada $i = 1, \dots, N$. Deste modo, pelo Teorema de imersão 3.7.5, temos que $u_i \in L^r(\Omega)$ com

$$\|u_i\|_r \leq \|u_i\|_{s,p}, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Logo, $u \in L^r(\Omega)^N$ e

$$\|u\|_{L^r(\Omega)^N} = \max_{0 \leq i \leq 1} \|u_i\|_r \leq \max_{0 \leq i \leq 1} \|u_i\|_{s,p} = \|u\|_{H^{s,p}(\Omega)^N}.$$

E o teorema está provado. $\square$

ESCALAS DE ESPAÇOS DE BANACH

4.1 Escalas de espaços de Banach

Nesta seção discutiremos em detalhes o conceito de **escalas de espaços de Banach** que são simplesmente uma família a um parâmetro de espaços de Banach oportunamente imersos, por uma estrutura adicional expressa em termos de operadores lineares. Em particular, será mostrado como escalas de espaços de Banach podem ser construídas a partir de um espaço de Banach E e um operador fechado densamente definido em E com resolvente não vazio. É muito importante que sejamos capazes de construir espaços “extrapolados” de E e possamos caracterizá-los em termos de teoremas simples de dualidade. Esses espaços terão papel fundamental para o Capítulo 6, no qual estudaremos a boa colocação local e global da equação de Navier-Stokes.

Antes de introduzir o conceito de escalas de espaços de Banach provamos um resultado técnico simples relacionado a restrições maximais de operadores lineares.

Definição 4.1.1. *Sejam $B : D(B) \subset G \rightarrow G$ um operador linear e $F \subset G$. Definimos B_F como a **F -parte de B** (ou a **parte de B em F**), como a aplicação definida em*

$$D(B_F) = \{x \in D(B) \cap F : Bx \in F\} \quad \text{pondo} \quad B_F x = Bx, \quad \forall x \in D(B_F).$$

Quando não houver possibilidade de confusão escreveremos B ao invés de B_F .

Lembre-se, quando escrevemos $A \in \mathcal{U}(G)$, estamos nos referindo a operadores fechados no espaço de Banach G , ver Subseção 2.1.1.

Observação 18. *Se $B \in \mathcal{U}(G)$ e $F \hookrightarrow G$, então $B_F \in \mathcal{U}(F)$.*

Lema 4.1.2. *Sejam F e G espaços de Banach com $F \hookrightarrow G$ e seja $B \in \mathcal{U}(G)$. Suponha que para algum $\mu \in \rho(B)$ tem-se que $(\mu - B)^{-1}(F) \subset F$. Então $\mu \in \rho(B_F)$ e*

$$(\mu - B_F)^{-1} = (\mu - B)^{-1}|_F. \quad (4.1)$$

Além disso, se $D(B) \subset F$ então $\rho(B) = \rho(B_F)$ e (4.1) vale para cada $\mu \in \rho(B)$.

Demonstração. Como B é operador fechado em G e $F \hookrightarrow G$ da Observação 18 segue que B_F é fechado em F . Deste modo, para provar a primeira afirmativa, basta mostrar que $\mu - B_F$ é uma bijeção de $D(B_F)$ em F com inversa $(\mu - B)^{-1}|_F$. Com efeito, dado $y \in F$ como $\mu \in \rho(B)$ temos que $\mu - B : D(B) \rightarrow G$ é uma bijeção e assim existe um único $x \in D(B)$ tal que $(\mu - B)x = y$. Ora, $x = (\mu - B)^{-1}(y)$ o qual está contido em F por hipótese, donde segue que $x \in D(B_F)$. Assim, provamos que $\mu - B$ é sobrejetor com inversa a esquerda igual a $(\mu - B)^{-1}$. Ainda graças a unicidade de $x \in D(B_F)$ obtemos a injetividade deste operador. Logo, a inversa a direita coincide com a inversa a esquerda e segue que $\mu \in \rho(B)$. Agora, assumamos que $D(B) \subset F$, daí segue que $(\lambda - B)^{-1}(G) \subset F$ para cada $\lambda \in \rho(B)$ e podemos utilizar a primeira parte para concluir que $\rho(B) \subset \rho(B_F)$ e

$$(\lambda - B_F)^{-1} = (\lambda - B)^{-1}|_F, \quad \lambda \in \rho(B).$$

Reciprocamente, dado $\lambda \in \rho(B_F)$ afirmamos que $\lambda - B$ é uma bijeção e daí concluimos que $\lambda \in \rho(B)$. De fato, se $y \in G$ é qualquer, definindo

$$x = (\mu - B)^{-1}y + (\mu - \lambda)(\lambda - B_F)^{-1}(\mu - B)^{-1}y,$$

vemos que $x \in D(B)$ e $(\lambda - B)x = y$. Basta provar que o operador em questão é injetivo, para isto, tome $x \in D(B)$ tal que $(\lambda - B)x = 0$, como $D(B) \subset F$ obtemos $x \in D(B_F)$. Consequentemente, $(\lambda - B_F)x = 0$ e como $(\lambda - B_F)$ é injetivo segue que $x = 0$. e também que $\lambda \in \rho(B)$. Portanto, como $B \in \mathcal{U}(G)$ temos que $\lambda \in \rho(B)$ e o resultado está provado. $\square$

Definição 4.1.3. *Sejam E e G espaços de Banach. Seja*

$$\mathcal{L}is(E, G) = \{T : E \rightarrow G; T \in \mathcal{L}(E, G) \text{ e } T \text{ é isomorfismo}\},$$

o conjunto dos isomorfismos lineares de E em G .

A seguinte observação é bastante útil para o restante desse capítulo.

Observação 19. *Como aplicação do Teorema da Aplicação Aberta, obtemos que se $T \in \mathcal{L}is(E, G)$, então $T^{-1} \in \mathcal{L}is(G, E)$.*

Observação 20. *Se $F \xrightarrow{d} G$ e $G \xrightarrow{d} H$, então $F \xrightarrow{d} H$.*

Denote por Λ um subconjunto dos naturais, dos inteiros, dos reais maiores ou iguais a zero ou dos reais.

Definição 4.1.4. Seja, para cada $\alpha \in \Lambda$, um espaço de Banach $E_\alpha \doteq (E_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ e um operador $A_\alpha \in \mathcal{L}is(E_{\alpha+1}, E_\alpha)$ tal que para cada par $\alpha, \beta \in \Lambda$ com $\alpha > \beta$

$$E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$$

e o diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_{\alpha+1} & \xrightarrow{i_1} & E_{\beta+1} \\ A_\alpha \downarrow & & \downarrow A_\beta \\ E_\alpha & \xrightarrow{i_0} & E_\beta \end{array}$$

é comutativo, onde i_1 e i_0 são as inclusões naturais entre os espaços. Então

$$\{(E_\alpha, A_\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$$

é uma **escala de espaços de Banach** sobre o conjunto de índices Λ . A escala é dita **unilateral** se Λ é o conjunto dos números naturais ou o conjunto dos números reais maiores ou iguais a zero e **bilateral** em caso contrário. É **discreta** se Λ está nos naturais ou nos inteiros e **contínua** caso contrário. A escala de espaços de Banach $[(E_\alpha, A_\alpha) : \alpha \in \Lambda]$ é **densamente imersa** se $E_\alpha \xrightarrow{d} E_\beta$, para $\alpha > \beta$.

Definição 4.1.5. Duas escalas de Banach $[(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \in \Lambda]$ e $[(F_\alpha, B_\alpha); \alpha \in \Lambda]$ sobre o mesmo conjunto de índices Λ são **isomorfas** se existe $I_\alpha \in \mathcal{L}is(E_\alpha, F_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, tal que, dados $\alpha, \beta \in \Lambda$ com $\alpha > \beta$, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & E_{\alpha+1} & \xrightarrow{\quad} & F_{\alpha+1} & \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ E_{\beta+1} & \xrightarrow{\quad} & F_{\beta+1} & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & E_\alpha & \xrightarrow{\quad} & F_\alpha & \\ \swarrow & & \swarrow & & \\ E_\beta & \xrightarrow{\quad} & F_\beta & & \end{array}$$

é comutativo. Se cada I_α é também uma isometria, as duas escalas são **isométricamente isomorfas**. Duas escalas de Banach são **equivalentes** se elas são isomorfas e se $E_\alpha = F_\alpha$ para $\alpha \in \Lambda$, ou seja, se os espaços são os mesmos com normas equivalentes.

Definição 4.1.6. *Seja $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ um operador linear. Para todo $x \in D(A)$ definimos a **norma do gráfico** de A , como*

$$\|x\|_{G(A)} = \|x\|_E + \|Ax\|_E.$$

Proposição 4.1.7. *Seja $[(E_\alpha, A_\alpha) : \alpha \in \Lambda]$ uma escala de espaços de Banach sobre Λ . Então, são válidas as propriedades a seguir.*

(a) Para todo $\alpha \in \Lambda$, temos que $A_\alpha \in \mathcal{U}(E_\alpha)$. Adicionalmente, se adotamos em $D(A_\alpha)$ a norma do gráfico, temos $D(A_\alpha) = E_{\alpha+1}$, com normas equivalentes.

(b) Se $\alpha > \beta$, então $A_\beta \supset A_\alpha$. Além disso, A_α considerado como um operador linear em E_α é fechável em E_β e seu fecho é igual a restrição de A_β a

$$E_{\alpha+1, \beta+1} \doteq \text{fecho de } E_{\alpha+1} \text{ em } E_{\beta+1},$$

considerado como um operador linear em E_β .

(c) Se $\alpha > \beta$, então A_α é a E_α -realização de A_β .

(d) Se a escala é densamente imersa, os operadores A_α são completamente determinados por A_0 (ou por A_{α_0} para qualquer $\alpha_0 \in \Lambda$).

(e) Para quaisquer $\alpha, \beta \in \Lambda$, tem-se $\rho(A_\alpha) = \rho(A_\beta)$.

(f) Se para $\alpha \in \Lambda$ e j inteiro positivo, $(A_\alpha)^j \in \mathcal{L}is(E_{\alpha+j}, E_\alpha)$, onde A_α é considerado como um operador linear em E_α com domínio $E_{\alpha+1}$.

(g) Se a escala é discreta, ela é densamente imersa se e somente se $E_{\alpha+1} \xrightarrow{d} E_\alpha$ para $\alpha \in \Lambda$.

Demonstração. (a) De fato, seja $x \in D(A_\alpha)$. Seja i a inclusão natural de $E_{\alpha+1}$ em E_α temos para $x \in D(A_\alpha)$ que $A_\alpha x \in E_\alpha$ e assim $x = A_\alpha^{-1} A_\alpha x \in E_{\alpha+1}$ e ainda

$$\|x\|_{G(A_\alpha)} = \|x\|_\alpha + \|A_\alpha x\|_\alpha \leq (\|i\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} + \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)}) \|x\|_{\alpha+1},$$

Logo, $D(A_\alpha) \subset E_{\alpha+1}$ e $\|x\|_{G(A_\alpha)} \leq c_1 \|x\|_{\alpha+1}$. Por outro lado, se $x \in E_{\alpha+1}$, existe um único $y \in E_\alpha$ tal que $x = A_\alpha^{-1} y$. Daí segue que $x \in D(A_\alpha)$ e além disso

$$\|x\|_{\alpha+1} = \|A_\alpha^{-1} y\|_\alpha \leq \|A_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+1})} \|y\|_\alpha = \|A_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+1})} \|A_\alpha x\|_\alpha$$

e o último termo da desigualdade acima é dominado por $\|A_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+1})} \|x\|_{G(A_\alpha)}$. Deste modo, obtemos que $E_{\alpha+1} \subset D(A_\alpha)$ e que a norma do gráfico e a norma de $E_{\alpha+1}$ são equivalentes.

(b) Provemos que A_α é fechável. Para isto, tome $\{x_n\} \subset D(A_\alpha)$ de maneira que $x_n \xrightarrow{\beta} 0$ e $A_\alpha x_n \xrightarrow{\beta} y$. Como $D(A_\alpha) = E_{\alpha+1}$ e $A_\alpha \subset A_\beta$ temos que $A_\alpha x_n = A_\beta x_n$ e como

$A_\beta \in C(A_\beta)$ devemos ter $y = A_\beta 0 = 0$. Portanto, A_α é fechável em E_β e denote por $\bar{A}_\alpha^\beta$ seu fecho.

Vamos mostrar que $D(\bar{A}_\alpha^\beta) = E_{\alpha+1, \beta+1}$ e que $\bar{A}_\alpha^\beta x = A_\beta x$ para todo $x \in D(\bar{A}_\alpha^\beta)$. Com efeito, seja $x \in E_{\alpha+1, \beta+1}$, deste modo, existe $\{x_n\} \subset E_{\alpha+1}$ tal que $x_n \xrightarrow{\beta+1} x$. Pelo item (a) e do fato de $x \in E_{\beta+1}$ segue que

$$\|x_n - x\|_\beta + \|A_\beta x_n - A_\beta x\|_\beta \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Agora, como $A_\beta \in C(E_\beta)$ obtemos da equação acima que $x \in E_{\beta+1}$ e como $\bar{A}_\alpha^\beta$ é o fecho de A_α em E_β e $x_n \in E_{\alpha+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ segue que $\bar{A}_\alpha^\beta x_n \xrightarrow{\beta} \bar{A}_\alpha^\beta x$ e assim da unicidade do limite $\bar{A}_\alpha^\beta x = A_\beta x$. Reciprocamente, seja $x \in D(\bar{A}_\alpha^\beta)$, logo existe $\{x_n\} \subset E_{\alpha+1}$ tal que

$$\|x_n - x\|_\beta + \|A_\alpha x_n - \bar{A}_\alpha^\beta x\|_\beta \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Ora, pelo item (a) tem-se $A_\alpha x_n = A_\beta x_n$ e como $A_\beta \in C(E_{\beta+1})$ a equação (4.2) garante que $x \in E_{\beta+1}$ e $A_\beta x = \bar{A}_\alpha^\beta x$, como queríamos demonstrar.

(c) Denote por T_α^β a E_α -parte de A_β . Por definição, temos que $D(T_\alpha^\beta) = \{x \in E_{\beta+1} \cap E_\alpha; A_\beta x \in E_\alpha\}$ e para $x \in D(T_\alpha^\beta)$, $T_\alpha^\beta x = A_\beta x$. Assim, para mostrar o resultado verifiquemos que $D(T_\alpha^\beta) = E_{\alpha+1}$ e que $T_\alpha^\beta x = A_\alpha x$. Para isto, seja $x \in E_{\alpha+1}$, como $\alpha + 1 > \max \beta + 1, \alpha$, já segue que $x \in E_{\beta+1} \cap E_\alpha$ e do item a $A_\beta x = A_\alpha x \in E_\alpha$ e daí vemos que $x \in D(T_\alpha^\beta)$.

Reciprocamente, tome $x \in D(T_\alpha^\beta)$, deste modo $A_\beta x \in E_\alpha$ e como A_α é sobrejetor, existe $z \in E_{\alpha+1}$ tal que $A_\alpha z = A_\beta x$ e como $A_\alpha \subset A_\beta$ e A_α é injetivo, segue que $x = z$ e que está em $E_{\alpha+1}$, assim $A_\alpha x = A_\beta x = T_\alpha^\beta x$ e $D(T_\alpha^\beta) \subset E_{\alpha+1}$ como queríamos demonstrar.

(d) De fato, se $\alpha_0 \in \Lambda$ é qualquer, dado $\alpha \in \Lambda$ distinto de α_0 temos dois casos. Se $\alpha > \alpha_0$, então do item c A_α é a E_α -parte de A_{α_0} . Note que, no item anterior não utilizamos que a escala é densamente imersa. Agora, se $\alpha < \alpha_0$ como a escala é densamente imersa, temos $E_{\alpha_0+1, \alpha+1} = E_{\alpha+1}$ e agora do item (b) vemos que A_α é determinado como o fecho de A_{α_0} em E_α e o resultado segue.

(e) Para podermos utilizar o Lema 4.1.2 nesta prova, note que do item a e da definição que $0 \in \rho(A_\alpha)$. Note primeiramente que, do item c $A_{\alpha+1}$ é a $E_{\alpha+1}$ -parte de A_α . E ainda, como $D(A_\alpha) = E_{\alpha+1}$ segue do Lema 4.1.2 que $\rho(A_\alpha) = \rho(A_{\alpha+1})$. Pelo princípio de indução, segue que $\rho(A_\alpha) = \rho(A_{\alpha+n})$.

Em segundo lugar, dados $\alpha, \beta \in \Lambda$ tais que $\beta + 1 \geq \alpha > \beta$, assim A_α é a parte de A_β em E_α e $D(A_\beta) = E_{\beta+1} \subset E_\alpha$ e novamente do Lema 4.1.2 segue que $\rho(A_\alpha) = \rho(A_\beta)$.

Por fim, sejam $\alpha, \beta \in \Lambda$ arbitrários. Suponha sem perda de generalidade que $\alpha > \beta$ e tome $n \in \mathbb{N}$ de maneira que $\beta + n \geq \alpha > \beta + n - 1$. Agora, dos primeiros passos obtemos $\rho(A_\alpha) = \rho(A_{\beta+n-1}) = \rho(A_\beta)$ como queríamos.

(f) Basta provar para o caso $j = 2$ e o caso geral segue análogo por indução. Observe que, $A_\alpha^2 = A_\alpha \circ A_{\alpha+1} |_{E_{\alpha+2}}$ e como é composição de bijeções limitadas, segue que é isomorfismo de $E_{\alpha+2}$ sobre E_α limitado com

$$\|A_\alpha^2\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+2}, E_\alpha)} \leq \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} \|A_{\alpha+1}\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+2}, E_{\alpha+1})}.$$

(g) A condição necessária decorre diretamente da definição. Iremos provar a condição suficiente. Com efeito, dados $\alpha, \beta \in \Lambda$ suponha sem perda de generalidade que $\alpha > \beta$, como a escala é discreta tome $n \in \mathbb{N}$ de maneira que $\beta + n = \alpha$. Da suposição temos

$$E_\alpha \xrightarrow{d} E_{\beta+n-1} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} E_\beta$$

e o item segue da propriedade transitiva das imersões densas. $\square$

4.2 Escalas de potência

Nesta seção exibiremos uma técnica geral simples para construir uma escala de espaços de Banach a partir de um operador fechado num espaço de Banach. A partir de agora e nas próximas seções, fixaremos

E um espaço de Banach e $A \in \mathcal{U}(E)$ densamente definido com $0 \in \rho(A)$.

É conhecido que

$$A^j \in \mathcal{U}(E) \text{ e } 0 \in \rho(A^j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

onde $A^0 = I_E$.

Definição 4.2.1. Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos o **espaço de potência j relativo ao operador A** , pondo

$$E_j \doteq (E_j, \|\cdot\|_j) \doteq E_j(A) \doteq (D(A^j), \|\cdot\|_{G(A^j)}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

e $E_0 = E$.

Lema 4.2.2. Para todo $j \in \mathbb{N}$ temos que E_j é um espaço de Banach e a norma do gráfico é equivalente à norma $\|A^j \cdot\|$. Adicionalmente, $E_j \hookrightarrow E_k$ sempre que $j > k$.

Demonstração. Primeiramente, provaremos a segunda afirmativa. Com efeito, seja $x \in E_j$. Temos por definição da norma do gráfico

$$\|A^j x\|_E \leq \|x\|_{G(A^j)}.$$

Por outro lado, como $0 \in \rho(A^j)$ temos para $x \in E_j$

$$\|x\|_{G(A^j)} \leq (\|A^{-j}\|_{\mathcal{L}(E, E_j)} + 1)\|A^j x\|_E,$$

como queríamos.

Agora, mostremos agora a primeira afirmativa, seja $\{x_n\} \subset E_j$ uma sequência de Cauchy. Logo, $\{x_n\}$ e $\{A^j x_n\}$ são sequências de Cauchy em E e da completude deste espaço existem $x, y \in E$ que são limite de $\{x_n\}$ e $\{A^j x_n\}$, respectivamente. Assim, resta provar que A^j é um operador fechado e concluímos que $x \in D(A^j) = E_j$.

Por fim, sejam $j > k$ inteiros positivos. Para $x \in E_j$ podemos escrever $A^k x = A^{k-j} A^j x$. Agora, como A^{k-j} é operador limitado temos

$$\|x\|_k \leq \|A^{k-j}\|_{\mathcal{L}(E)} \|x\|_j,$$

de onde segue a imersão desejada. □

Observação 21. *A partir do teorema anterior sempre que mencionarmos de E_j estamos considerando $(D(A^j), \|A^j \cdot\|)$.*

Teorema 4.2.3. *Seja E um espaço de Banach e assuma que $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ é fechado com $0 \in \rho(A)$ e defina $A_j \doteq E_j$ -parte de A para $j = 1, 2, \dots$. Então*

$$\{(E_j, A_j); j = 0, 1, 2, \dots\}$$

é uma escala de Banach. Ela é densamente definida se, e somente se A é densamente definida.

Demonstração. Do Lema 4.2.2 já obtemos que E_j é espaço de Banach para todo $j = 0, 1, \dots$ e também que se $j > k$, temos $E_j \hookrightarrow E_k$. Agora, note que o operador $A_j \in \mathcal{L}is(E_{j+1}, E_j)$ e este isomorfismo é isométrico. Ainda, se $j > k$, o diagrama abaixo comuta diretamente da definição de A_j

$$\begin{array}{ccc} E_{j+1} & \xrightarrow{i_1} & E_{k+1} \\ A_j \downarrow & & \downarrow A_k \\ E_j & \xrightarrow{i_0} & E_k \end{array}$$

daí decorre a primeira afirmativa.

Por fim, suponha que A é densamente definida, isto é, $E_1 \xrightarrow{d} E$. Tendo em vista o item (g) da Proposição 4.1.7 basta provar que para todo $j = 0, 1, 2, \dots$ que $E_{j+1} \xrightarrow{d} E_j$.

Com efeito, seja $x \in E_j$, logo $A^j x \in E$ e por suposição existe $\{z_n\} \subset E_1$ de modo que $\|z_n - A^j x\|_0 \rightarrow 0$, ou equivalentemente,

$$\|A^{-j} z_n - x\|_j \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

Ora, $x_n = A^{-j} z_n \in E_{j+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ de modo que $x_n \rightarrow x$ em E_j e o resultado está provado. $\square$

Definição 4.2.4. A escala de Banach obtida no teorema acima é chamada de **escala de potência gerada por** (E, A) .

A observação a seguir nós dá uma maneira mais simples de verificar quando uma escala unilateral discreta é gerada por um par de (espaço, operador) dado.

Observação 22.

- **(i)** Toda escala unilateral discreta $\{F_j, B_j; j = 0, 1, \dots\}$ é de fato uma escala de potências de algum operador fechado.
- **(ii)** Para verificar que uma escala de Banach $\{F_j, B_j; j = 0, 1, \dots\}$ é gerada por (E, A) , basta provar que $(F_0, B_0) = (E, A)$.

Demonstração.

(i) Graças a Proposição 4.1.7 temos: do item **(a)** que $B_0 \in \mathcal{U}(F_0)$ e do item **(c)** se $j \in \mathbb{N}$ então $j > 0$ e portanto B_j é a F_j -parte de B_0 novamente do item **(a)** $D(B_{j-1}) = F_j$ o qual por sua vez é $D(B^j)$ o que implica que (F_0, B_0) determinam toda a escala e que esta escala é de fato obtida pelas potências do B_0 .

(ii) Com efeito, Provemos que para todo $j = 0, 1, 2, \dots$, temos $E_j = F_j$ e $B_j = A_j$. De fato, $E_j = D(A^j) = D(B_0^j) = F_j$ e também Se $x \in D(B_j) = E_{j+1} = D(A_j)$, temos

$$B_j x = Bx = Ax = A_j x$$

e segue a afirmação. $\square$

Proposição 4.2.5. Fixe m um inteiro positivo e faça $(F_j, B_j) \doteq (E_{j+m}, A_{j+m})$ para $j = 0, 1, 2, \dots$. Então

$$\{(F_j, B_j); j = 0, 1, 2, \dots\} \quad (4.5)$$

é a escala de potência gerada por (E_m, A_m) . Além disso, é isometricamente isomorfa a escala de potências gerada por (E, A) .

Demonstração. De fato, como (E, A) gera uma escala de Banach já sabemos que para todo $j = 0, 1, 2, \dots$ F_j é espaço de Banach e que

$$B_j = E_{j+m} \in \mathcal{L}is(E_{j+m+1}, E_{j+m}) = \mathcal{L}is(F_{j+1}, F_j).$$

e também pelo item (c) da Proposição 4.1.7 vemos que B_j é a F_j -parte de A_m e portanto se $k > j$ então $k + m > j + m$ o que implica que $F_k \hookrightarrow E_j$ e por fim a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_{j+1} & \xrightarrow{i_1} & F_{k+1} \\ A_j \downarrow & & \downarrow A_k \\ F_j & \xrightarrow{i_0} & F_k \end{array}$$

segue da comutatividade do diagrama da Proposição 4.5. o que concluí que (4.5) é uma escala de Banach e está prova nós diz que é de fato uma escala que herda as propriedades da escala gerada por (E, A) .

Note que, novamente do Teorema 4.2.3 temos que, E_m é Banach e $A_m \in \mathcal{U}(E_m)$ é operador fechado com $0 \in \rho(A_m)$. Sendo assim, como $F_0 = E_m$ e $B_0 = B_m$ vemos da observação 22 que a escala $\{(F_j, B_j); j = 0, 1, 2, \dots\}$ é gerada por (E_m, B_m) .

Por fim, defina $I_\alpha \doteq (A_\alpha)^{-m}$ para $\alpha = 0, 1, 2, \dots$ a Proposição 4.1.7(f) implica que $I_\alpha \in \mathcal{L}is(E_j, F_j)$ e que o diagrama (4.1.5) é comutativo. Além disso, se $x \in E_j$ temos

$$\|I_j x\|_{F_j} = \|(A_j)^{-m} x\|_{m+j} = \|(A_j)^m (A_j)^{-m} x\|_j = \|x\|_j$$

Logo, dos argumentos acima segue que I_j é um isomorfismo isométrico para todo $j = 0, 1, \dots$ e o resultado segue. $\square$

4.3 Espaços de extrapolação

Nesta seção apresentaremos como obter uma escala com índices negativos ainda a partir do par (E, A) .

Seja F um espaço vetorial normado. Recorde que o completamento $(\tilde{F}, \tilde{j})$ de F consiste do espaço de Banach $\tilde{F}$ e um isomorfismo isométrico $\tilde{j}$ de F sobre um subespaço denso de $\tilde{F}$.

Defina em E $\|\cdot\|_{-1} = \|A^{-1} \cdot\|_E$. Vemos que é uma norma em E de modo que

$$\|x\|_{-1} = \|A^{-1} x\|_E \leq \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_1)} \|x\|_E, \quad (4.6)$$

ou seja, está norma é mais fraca que $\|\cdot\|_E$. Desse modo, considere o completamento do espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|_{-1})$

$$(E_{-1}, \|\cdot\|_{-1}) \doteq E_{-1}(A) \doteq (E, \|A^{-1} \cdot\|_E)^\sim.$$

Logo, $(E_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$ é um espaço de Banach bem definido e da definição de completamento também temos

$$E \xrightarrow{d} E_{-1}, \quad (4.7)$$

onde, na verdade, estamos identificando E com sua imagem densa por um isomorfismo isométrico.

Definição 4.3.1. *O espaço $(E_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$ é dito um **espaço de extrapolação de E gerado por A** .*

Observação 23. *Relembre que do Teorema de completamento ([LIMA, 1977](#)), este espaço é único a menos de isometria.*

Proposição 4.3.2. *São válidas as seguintes afirmações.*

- (i) *A é fechável em E_{-1} e denotaremos seu fecho por A_{-1} .*
- (ii) *$A_{-1} \in \mathcal{L}is(E, E_{-1}) \cap \mathcal{U}(E_{-1})$ e este isomorfismo é isométrico.*
- (iii) *$\rho(A_{-1}) = \rho(A)$.*

Demonstração. (i) Com efeito, seja $\{x_n\} \subset D(A)$ de modo que $\|x_n\|_{-1} \rightarrow 0$ e $\|Ax_n - y\|_{-1} \rightarrow 0$. Da segunda convergência temos que $\{A^{-1}Ax_n\}$ é de Cauchy em E_0 , como E_0 é completo existe $z \in E_0$ tal que $\|x_n - z\|_0 \rightarrow 0$ e ainda como a norma $\|\cdot\|_{-1}$ é mais fraca que a norma de E_0 essa convergência ocorre em E_{-1} donde vemos que $z = 0$. Assim, $\|Ax_n\|_{-1} = \|x_n\|_0 \rightarrow 0$ e segue que $y = 0$ e portanto A é fechável em E e por definição, $A_{-1} \in \mathcal{U}(E_{-1})$

(ii) Primeiramente mostraremos que $(D(A_{-1}), \|\cdot\|) = (E_0, \|\cdot\|_E)$ com normas equivalentes. De fato, seja $x \in D(A_{-1})$, logo $(x, A_{-1}x) \in G(A_{-1})$ e como A_{-1} é fecho de A em E_{-1} , existe $\{x_n\} \subset E_1$ de modo que

$$\|x_n - x\|_{-1} + \|A_{-1}x_n - A_{-1}x\|_{-1} \rightarrow 0.$$

Segue que $\{x_n\}$ é de Cauchy em E , logo existe $z \in E$ de modo que $x_n \rightarrow z$ em E . Assim, com $E \xrightarrow{d} E_{-1}$, também temos $x_n \rightarrow z$ em E_{-1} e desta maneira vemos que $x = z \in E$ o que implica que $D(A_{-1}) \subset E$. Reciprocamente, tome $x \in E$, como $E_1 \xrightarrow{d} E$, existe $\{x_n\} \subset E_1$ com $x_n \rightarrow x$ em E . Adicionalmente, como

$$\|A_{-1}x_n - A_{-1}x_m\|_{-1} = \|Ax_n - Ax_m\|_{-1} = \|x_n - x_m\|_E,$$

obtemos que $\{A_{-1}x_n\}$ é sequência de Cauchy em E_{-1} , logo existe $z \in E_{-1}$ tal que $\|z - A_{-1}x_n\|_{-1} \rightarrow 0$. Graças a $E \hookrightarrow E_{-1}$, também obtemos $\|x_n - x_m\|_{-1} \rightarrow 0$.

Portanto, $(x, z) \in G(A_{-1})$, o que implica em $x \in D(A_{-1})$ e $z = A_{-1}x$. Logo, se $x \in E$ é qualquer obtemos

$$\|x\|_E = \lim \|x_n\|_E = \lim \|Ax_n\|_{-1} = \|A_{-1}x\|_{-1}.$$

Portanto, $E \subset D(A_{-1})$ e $A_{-1} \in \mathcal{L}(E_0, E_{-1})$ é isomorfismo isométrico.

Logo, para concluir que $A_{-1} \in \mathcal{L}is(E_0, E_{-1})$ basta mostrar a sobrejetividade. Dado $y \in E_{-1}$ existe $\{y_n\} \subset E_0$ de maneira que $\|y_n - y\|_{-1} \rightarrow 0$, desde que $E \xrightarrow{d} E_{-1}$. Ora, $A \in \mathcal{L}is(E_1, E_0)$ donde segue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E_1$ de modo que $Ax_n = y_n$. Como $\{y_n\}$ é de Cauchy em E_{-1} também conseguimos provar $\{x_n\}$ é de Cauchy em E_0 . Seja $x \in E_0$ seu limite em E_0 , como $E \hookrightarrow E_{-1}$ é também seu limite em E_{-1} . Agora, como $A_{-1} \in \mathcal{U}(E_{-1})$ e $A_{-1}x_n = Ax_n = y_n \rightarrow y$ vemos que $A_{-1}x = y$, como queríamos demonstrar.

(iii) Basta notar que A é a E_0 -parte de A_{-1} utilizar o Lema 4.1.2 e o item (ii) para concluir o resultado. $\square$

Como $A_{-1} \in \mathcal{U}(E_{-1})$ e $0 \in \rho(A_{-1})$, podemos definir também

$E_{-2} \doteq E_{-1}(A_{-1})$, o espaço de extrapolação de E_{-1} gerado por A_{-1} , e A_{-2} como o fecho de A_{-1} em E_{-2} .

Segue da Proposição 4.3.2

$$A_{-2} \in \mathcal{L}is(E_{-1}, E_{-2}) \cap \mathcal{U}(E_{-2})$$

que este isomorfismo é isométrico, ou seja, se $x \in E_{-1}$ $\|A_{-2}x\|_{-2} = \|x\|_{-1}$.

Contudo, estas relações devem ser interpretadas com cuidado. Para ser mais preciso sejam (E_{-1}, j_{-1}) e (E_{-2}, j_{-2}) os complementos de $(E, \|A^{-1}\|_E)$ e $(E_{-1}, \|(A_{-1})^{-1}\|_{E_{-1}})$, respectivamente. Temos

$$E \xrightarrow{j_{-1}} E_{-1} \xrightarrow{j_{-2}} E_{-2},$$

onde j_{-1} e j_{-2} são isometrias lineares com imagem densa sobre subespaços de E_{-1} e E_{-2} , respectivamente. Pela construção não conseguimos garantir diretamente que estes espaços estão densamente encaixados, isto é, que vale

$$E \xrightarrow{d} E_{-1} \xrightarrow{d} E_{-2}, \quad (4.8)$$

Sendo assim, devemos prosseguir da seguinte maneira. Como $j_{-1}(E)$ é denso em E_{-1} , para obter inclusão densa identificamos E por $j_{-1}(E)$ (que é o que basicamente foi feito quando dizemos que $E \xrightarrow{d} E_{-1}$ em (4.7)) e assim podemos dizer $E \xrightarrow{d} E_{-1}$. Agora, seguindo raciocínio análogo, identificamos E_{-1} com sua imagem por j_{-2} , isto é,

$$E_{-1} \equiv j_{-2}(E_{-1}) \xrightarrow{d} E_{-2},$$

porém está identificação nos obriga a trocar o espaço já obtido E_{-1} por uma imagem isometricamente isomorfa $j_{-2}(j_{-1}(E))$ e deste modo obtemos as inclusões densas desejadas em (4.8).

Dessa forma para obter uma escala de Banach com índices negativos densamente imersa, devemos fixar um $m \in \mathbb{N}$ e definir E_{-k} e A_{-k} para $1 \leq k \leq m$ indutivamente por

$$E_{-k} \doteq (E_{-k}, \|\cdot\|_{-k}) \doteq (E_{-k-1}, \|(A_{-k+1})^{-1} \cdot\|_E)^\sim.$$

onde E_{-k+1} é identificado como $j_{-m}(\dots(j_{-k}(E_{-k+1})))$. Definimos por fim

$$A_{-k} \doteq \text{fecho de } A_{-k+1} \text{ em } E_{-k}.$$

Proposição 4.3.3. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ fixado, então para todo $1 \leq k \leq m$ tem-se*

- $A_{-k} \in \mathcal{L}(E_{-k+1}, E_{-k}) \cap \mathcal{U}(E_{-k});$
- $\rho(A) = \rho(A_{-k}).$

Demonstração. Segue da Proposição 4.3.2 e das observações anteriores □

Reunindo toda a análise feita anteriormente, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.3.4. *Suponha que $A \in \mathcal{U}(E)$ é densamente definido com $0 \in \rho(A)$ e fixe $m = 1, 2, \dots$. Sejam E_{-k} e A_{-k} para $1 \leq k \leq m$ como acima. Fazendo*

$$(F_j, B_j) \doteq (E_{j-m}, A_{j-m}), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

Então, $\{(F_j, B_j); j = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma escala de Banach densamente imersa. De fato, é a escala de potência gerada por (E_{-m}, A_{-m}) . Adicionalmente, esta escala é isometricamente isomorfa à escala de potências gerada por (E, A) .

Demonstração. As considerações acima implicam que os pares (E_{-k}, A_{-k}) são bem definidos para $1 \leq k \leq m$. Agora, a prova de que (4.9) é de fato uma escala é consequência da Proposição 4.3.3 e juntamente do fato dos operadores obtidos de índice negativo serem uma extensão do operador anterior o que implica que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} E_{-k+1} & \xrightarrow{i_1} & E_{-j+1} \\ A_j \downarrow & & \downarrow A_k \\ E_{-k} & \xrightarrow{i_0} & E_{-j} \end{array}$$

quando $j > k$.

Note que $F_0 = E_{-m}$ é espaço de Banach e $B_0 = A_{-m}$ é fechado neste espaço e que a escala (4.9) é unilateral discreta, segundo a Observação 22 esta escala é a gerada por (E_{-m}, A_{-m}) .

Agora, basta encontrar $I_j \in \mathcal{L}is(F_j, E_j + m)$. para todo $j \geq m$, defina $I_j = (A_{j-m})^m \in \mathcal{L}is(E_j, E_{j-m})$ e prossiga de maneira análoga ao que foi feito na Proposição 4.5.

Por fim, como o operador A é densamente definido $E_j \xrightarrow{d} E_{j-1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e da construção dos espaços E_{-k} para $1 \leq k \leq m$ também temos para estes k que $E_{-k+1} \hookrightarrow E_{-k}$, logo do item (g) da Proposição 4.1.7 segue que a escala de Banach (4.9) é densamente imersa. $\square$

Definição 4.3.5. *Suponha que A seja densamente definido e que m seja um inteiro positivo. Então $\{(E_{j-m}, A_{j-m}); j = 0, 1, 2, \dots\}$ é dita uma **escala extrapolada de potências de ordem m , gerada por (E, A)** e também denotamos por*

$$\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}.$$

4.4 Escalas duais

Por toda esta seção assumimos que E é um espaço de Banach reflexivo e $A \in \mathcal{U}(E)$ com domínio denso e $0 \in \rho(A)$. Dessa forma, já vimos que fixando $m = 1, 2, 3, \dots$, podemos considerar a escala de potências extrapolada de ordem m gerada por (E, A)

$$\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}.$$

Sendo assim, como A é densamente definido, podemos considerar seu operador dual A^* , o qual sabemos que é fechado. Como E é reflexivo também obtemos que A^* é densamente definido e por fim que $0 \in \rho(A) = \rho(A^*)$. Para evitar abusos de notação, fixemos

$$E^\# \doteq E^*, \quad A^\# \doteq A^*,$$

Deste modo, obtemos $A^\# \in \mathcal{U}(E^\#)$ satisfazendo as condições necessárias para podermos definir:

Definição 4.4.1. *A escala de Banach extrapolada de ordem m gerada por $(E^\#, A^\#)$*

$$\{(E_j^\#, A_j^\#); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}, \quad (4.10)$$

*será chamada de **escala dual** da escala de Banach gerada por (E, A) .*

A seguir, estabelecemos um teorema de dualidade para o qual precisamos de alguma preparação. Daqui em diante denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_E \doteq \langle \cdot, \cdot \rangle$ o par de dualidade entre $E^\#$ e E .

Lema 4.4.2. *Dado k inteiro com $1 \leq k \leq m$ fazemos*

$$\langle x^\#, x \rangle_k \doteq \langle (A_{-k}^\#)^{-k} x^\#, A^k x \rangle, \quad x \in E_k, \quad x^\# \in E_{-k}^\#.$$

Então

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_k = E_{-k}^\# \times E_k \rightarrow \mathbb{R}$$

define uma forma bilinear contínua de norma 1.

Demonstração. Já sabemos que $A^k \in \mathcal{L}is(E_k, E)$ bem como $(A_{-k}^\#)^{-k} \in \mathcal{L}is(E_{-k}^\#, E^\#)$ do item (f) da Proposição 4.1.7 e além disso estes isomorfismos são isométricos. Desta forma,

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|_{E_k}=1} |\langle x^\#, x \rangle_k| &= \sup_{\|x\|_{E_k}=1} |\langle (A_{-k}^\#)^{-k} x^\#, A^k x \rangle| \\ &= \sup_{\|A^k x\|_E=1} |\langle (A_{-k}^\#)^{-k} x^\#, A^k x \rangle| \\ &= \|(A_{-k}^\#)^{-k} x^\#\|_{E^\#} = \|x^\#\|_{E_{-k}^\#}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Agora, considere a escala gerada por (E, A) como foi feito na Seção 4.4. Para cada inteiro $k \geq -m$, como $D(A_k) = E_{k+1}$ é denso em E_k , podemos definir segundo o par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ o operador dual $(A_k)^*$.

Aqui e em situações similares consideramos $(A_k)^* \in \mathcal{U}((E_k)^*)$, isto é, como um operador linear fechado em $(E_k)^*$.

Observação 24. O objetivo principal desta seção é de estabelecer uma relação entre os pares $(E_k^\#, A_k^\#)$ da escala gerada por $(E^\#, A^\#)$ e os pares $((E_k)^*, (A_k)^*)$ para todo $k \in [-m, m] \cup \mathbb{Z}$.

Lembre-se sempre que os espaços $E_k^\#$ a princípio não tem nenhuma relação com $(E_k)^*$, desde que os primeiros são obtidos conforme a seção 4.2 através do par $(E^\#, A^\#)$ e os outros tomando os duais dos espaços E_k .

Lema 4.4.3. Sejam E e F espaços vetoriais e B e C operadores lineares com domínios em E e imagem em F tal que $B \supset C$. Se B é injetora e C é sobrejetora então $B = C$.

Demonstração. Seja $x \in D(B)$, logo $Bx \in E$ e como C é sobrejetivo, existe $z \in D(C)$ tal que $Cz = Bx$. Porém $B \supset C$ o que implica em $Bz = Bx$, e da injetividade de B segue que $x = z$ e portanto $x \in D(C)$. Portanto, $D(B) \subset D(C)$ provando a afirmativa. $\square$

Proposição 4.4.4. Seja $m \in \mathbb{N}$ fixado e suponha que k é um inteiro com $1 \leq k \leq m$. Então

$$(E_k)^* = E_{-k}^\# \text{ e } (A_k)^* = A_{-k}^\#. \quad (4.11)$$

relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$.

Demonstração. Defina $\psi: E_{-k}^{\#} \rightarrow E_k^*$, pondo para cada $x^{\#} \in E_{-k}^{\#}$, $\psi(x^{\#}) \cdot = \langle x^{\#}, \cdot \rangle$. Note do Lema 4.4.2 que

$$\|\psi(x^{\#})\|_{E_k^*} = \sup_{\|x\|_{E_k}=1} |\langle x^{\#}, x \rangle| = \|x^{\#}\|_{E_{-k}^{\#}},$$

e portanto ψ define uma isometria linear de $E_{-k}^{\#}$ em $(E_k)^*$. Daí também já obtemos a injetividade de ψ .

Deste modo, para demonstrar a primeira identificação de (4.11) basta mostrar a sobrejetividade de ψ . Com efeito, dado $f^* \in (E_k)^*$ como $A^{-k} \in \mathcal{L}is(E, E_k)$ fazendo $f^{\#} \doteq f^* \circ A^{-k}$, obtemos um elemento de $E^{\#}$

$$\begin{array}{ccc} E_k & \xrightarrow{f^*} & \mathbb{K} \\ \uparrow A^{-k} & \nearrow f^{\#} & \\ E_0 & & \end{array}$$

e como $(A_{-k}^{\#})^k \in \mathcal{L}is(E^{\#}, E_{-k}^{\#})$ podemos definir em $E_{-k}^{\#}$ $x^{\#} = (A_{-k}^{\#})^{-k} f^{\#}$. Assim, para qualquer $x \in E_k$ temos

$$\psi(x^{\#})x = \langle x^{\#}, x \rangle_k = \langle f^{\#}, A^k x \rangle = \langle f^* \circ A^{-k}, A^k x \rangle = \langle f^*, x \rangle_{(E_k)^* \otimes E_k},$$

o que prova que $\psi(x^{\#}) = f^*$, donde segue a sobrejetividade, concluindo a prova da primeira relação, ou seja, de que $(E_k)^* = E_{-k}^{\#}$ é válida.

Para a segunda parte, provemos primeiramente que $A_{-k}^{\#} \subset (A_k)^*$. Com efeito, seja $x^{\#} \in D(A_{-k}^{\#}) = E_{-k+1}^{\#}$ e $x \in E_{k+1} = D(A_k)$, temos que A_k é uma restrição de A e $A_{-k}^{\#}$ é uma extensão de $A^{\#}$, assim

$$\begin{aligned} \langle x^{\#}, A_k x \rangle_k &= \langle (A_{-k}^{\#})^{-k} x^{\#}, A^k A x \rangle \\ &= \langle A^{\#} (A_{-k}^{\#})^{-k} x^{\#}, A^k x \rangle \\ &= \langle (A_{-k}^{\#})^{-k} A_{-k}^{\#} x^{\#}, A^k x \rangle \\ &= \langle A_{-k}^{\#} x^{\#}, x \rangle_k, \end{aligned}$$

Assim, $\langle x^{\#}, A_k x \rangle_k = \langle A_{-k}^{\#} x^{\#}, x \rangle_k$ e por definição de $(A_k)^*$ temos que $A_{-k}^{\#} x^{\#} = (A_k)^* x^{\#}$, para $x^{\#}$ qualquer em $D(A_{-k}^{\#})$ como queríamos mostrar. Agora, basta lembrar que $0 \in \rho(A_k) = \rho((A_k)^*)$ e que do item (e) da Proposição 4.1.7 temos $0 \in \rho(A_{-k}^{\#})$, desde que $\rho(A^{\#}) = \rho(A_{-k}^{\#})$ e assim seguem que ambas as aplicações são bijeções e o deste modo o Lema 4.4.3 implica que $(A_k)^* = A_{-k}^{\#}$ $\square$

Corolário 4.4.5. *Seja $m \in \mathbb{N}$, para cada $0 \leq \ell < k \leq m$ inteiros fixados*

$$\langle x^{\#}, x \rangle_k = \langle x^{\#}, x \rangle_{\ell}, \quad x \in E_k, \quad x^{\#} \in E_{-\ell}^{\#}. \quad (4.12)$$

Em especial, se $\ell = 0$ para $x \in E_k$, $x^\# \in E^\#$ tem-se

$$\langle x^\#, x \rangle_k = \langle x^\#, x \rangle.$$

Demonstração. Provemos (4.12) para $x^\# \in E^\#$ e o caso geral segue do fato, $E^\# \xrightarrow{d} E_{-\ell}^\#$. De fato, como $A^\# \subset A_{-\ell}^\# \subset A_{-k}^\#$ e $A_\ell \subset A$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle x^\#, x \rangle_k &= \langle (A^\#)^{-k} x^\#, A^k A^{-\ell} A^\ell x \rangle \\ &= \langle (A^\#)^\ell (A^\#)^{-k} (A^\#)^{-\ell} x^\#, A^k A^{-\ell} A^\ell x \rangle \\ &= \langle (A^\#)^k (A^\#)^{-k} (A^\#)^{-\ell} x^\#, A^\ell A^{-\ell} A^\ell x \rangle \\ &= \langle (A_{-\ell}^\#)^{-\ell} x^\#, A^\ell x \rangle \\ &= \langle x^\#, x \rangle_\ell, \end{aligned}$$

e corolário está provado. $\square$

Observação 25. Para $x^\# \in E^\#$ e $x \in E_k$, segue do corolário que $\langle x^\#, x \rangle_k = \langle x^\#, x \rangle$ para todo $0 < k \leq m$. Deste modo, como $E^\# \xrightarrow{d} E_{-k}^\#$ a aplicação de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ é completamente determinada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Por este motivo, no que se segue iremos abusar da notação e escrever apenas $\langle \cdot, \cdot \rangle$, para denotar $\langle \cdot, \cdot \rangle_k$ para todo $0 < k \leq m$.

Observação 26.

- (a) Observe que tudo o que foi dito acima permanece válido se E não é reflexivo mas A^* é densamente definido.
- (b) Se E não é reflexivo e A^* não é densamente definido ainda é verdade que $A^* \in \mathcal{U}(E^*)$ e $0 \in \rho(A^*)$. Portanto, fazendo $E^\# \doteq E^*$ e $A^\# \doteq A^*$ a escala dual de potências $\{(E_j^\#, A_j^\#); j = 0, 1, 2, \dots\}$ está ainda bem definida.

Lema 4.4.6. Sejam E e F espaços vetoriais normados. Se existe $T \in \mathcal{L}is(E, F)$ e F reflexivo, então E é reflexivo.

Demonstração. Sejam $\sigma(E, E^*)$ e $\sigma(F, F^*)$ as topologias fracas de E e F , respectivamente. Afirmamos primeiramente que

$$T : (E, \sigma(E, E^*)) \rightarrow (F, \sigma(F, F^*)) \quad (4.13)$$

é um homeomorfismo. De fato, como T é bijeção com inversa limitada basta verificarmos que se T é contínua na topologia forte então é $(\sigma(E, E^*), \sigma(F, F^*))$ -contínua. Seja $V = f^{-1}(U)$ um aberto sub-básico de $\sigma(F, F^*)$. Ora, $T^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ T)^{-1}(U)$ e $f \circ T \in E^*$, logo $T^{-1}(V)$ é um aberto sub-básico de $\sigma(E, E^*)$ e a afirmação segue.

Agora, considere a bola unitária fechada em E , a qual denotaremos por $B^E = \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$. Como T é homeomorfismo linear forte $T(B^E)$ é fechada forte em F

e convexo. Deste modo, o conjunto $T(B^E)$ é fracamente fechado em F . Ainda, como T é limitada, $T(B^E)$ é limitado e agora pela reflexividade de F concluímos que $T(B^E)$ é fracamente compacto e da primeira afirmação segue que B^E é compacto fraco em E e portanto E é reflexivo. $\square$

Como uma consequência simples da Proposição 4.4.4 provamos agora o seguinte teorema fundamental cujo corolário contém a caracterização mais importante dos espaços de extrapolação E_{-k} para $1 \leq k \leq m$.

Teorema 4.4.7. *Com as mesmas hipóteses anteriores, ao fixarmos $m \in \mathbb{N}$, obtemos para todo k inteiro $k \geq -m$ que E_k e $E_k^\#$ são reflexivos. Adicionalmente, relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$, são válidas as identificações*

$$(E_k)^* = E_{-k}^\#, \quad (A_k)^* = A_{-k}^\#, \quad -m \leq k \leq m. \quad (4.14)$$

Demonstração. Recorde primeiramente que se E é reflexivo, então $E^\#$ também é reflexivo e também, que $(A_{-k}^\#)^k \in \mathcal{L}is(E^\#, E_{-k})$ e $(A_k)^k \in \mathcal{L}is(E_k, E)$. Agora, graças ao Lema 4.4.6 obtemos que E_{-k} e E_k são reflexivos.

Para a segunda parte, não há o que fazer para o caso $k = 0$, pois este segue da definição. Adicionalmente, para $1 \leq k \leq m$ o resultado já está provado na Proposição 4.4.4, restando provar apenas no caso $-m \leq k \leq -1$, o qual prosseguiremos da seguinte forma. Escreva para todo $-m \leq \ell \leq m$,

$$(F_\ell, B_\ell) = (E_\ell^\#, A_\ell^\#).$$

Desta maneira, podemos aplicar a Proposição 4.4.4 para $1 \leq \ell \leq m$ e obtendo assim

$$(E_\ell^\#)^* = (F_\ell)^* = F_{-\ell}^\# = (E_{-\ell}^\#)^\#.$$

Agora, como $E_{-\ell}$ é reflexivo, obtemos da equação acima

$$(E_\ell^\#)^* = E_{-\ell},$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 4.4.8. *Se $1 \leq k \leq m$ então $E_{-k} = (E_k^\#)^*$ e $A_{-k} = (A_k^\#)^*$ relativamente ao par de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

Demonstração. Segue da segunda parte da prova do teorema anterior. $\square$

Observação 27. *Em outras palavras, este corolário nós da uma outra maneira de obter os espaços E_{-k} para $1 \leq k \leq m$. Basta considerar a escala dual $\{(E_j^\#, A_j^\#); j = 0, 1, \dots, m\}$ gerado por $(E^\#, A^\#)$ e definir para $1 \leq k \leq m$, o espaço E_{-k} como sendo o dual topológico de $E_k^\#$. Adicionalmente, como $D(A_k^\#) = E_{k+1}^\# \xrightarrow{d} E_k^\#$ podemos definir também A_{-k} como o operador dual de $A_k^\#$. Desta forma obtemos a escala finita de índices negativos $\{(E_{-k}, A_{-k}); k = 0, 1, \dots, m\}$.*

Para ilustrar melhor o que o Teorema 4.4.7, considere o caso $m = 2$.

Sabemos das construções anteriores que

$$E_2 \hookrightarrow E_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow E_{-1} \hookrightarrow E_{-2}.$$

Logo, tomando os duais obtemos

$$(E_{-2})^* \hookrightarrow (E_{-1})^* \hookrightarrow E^* \hookrightarrow (E_1)^* \hookrightarrow (E_2)^*.$$

O Teorema nos diz que está relação acima é equivalente a

$$E_2^\# \hookrightarrow E_1^\# \hookrightarrow E^\# \hookrightarrow E_{-1}^\# \hookrightarrow E_{-2}^\#.$$

4.5 Escalas de interpolação-extrapolação

Seja E um espaço de Banach e suponha que $A \in \mathcal{U}(E)$ é densamente definido com $0 \in \rho(A)$. Então, fixado $m = 0, 1, 2, \dots$, consideramos a escala de potências extrapolada

$$\{(E_j, A_j); j = -m, -m+1, -m+2, \dots\}$$

de ordem m gerada por (E, A) é uma escala de Banach. Deste modo, utilizando o método de interpolação introduzido no Capítulo 2, $[\cdot, \cdot]_\theta$ para cada $\theta \in [0, 1]$, definimos para cada $\alpha \in (j, j+1)$ o espaço de Banach

$$E_\alpha \doteq [E_j, E_{j+1}]_{\alpha-j}, \quad A_\alpha \doteq E_\alpha\text{-realização de } A_j$$

para todo $j = -m, -m+1, -m+2, \dots$.

Observação 28. Note que, como estamos trabalhando com a interpolação complexa, temos a seguinte propriedade

$$E_j = [E_j, E_{j+1}]_0 \quad e \quad E_{j+1} = [E_j, E_{j+1}]_1.$$

Teorema 4.5.1. Nas condições anteriores $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \geq -m\}$ é uma escala de Banach densamente imersa.

Demonstração. Se $\alpha \geq -m$ é inteiro, já sabemos que E_α é Banach e segue do método de interpolação $[\cdot, \cdot]_{[\theta]}$ que E_α é espaço de Banach para todo $\alpha \geq -m$ não inteiro.

Afirmção 1: Sejam $\alpha, \beta \in [-m, \infty]$ com $\alpha > \beta$. Então

$$E_\alpha \xhookrightarrow{d} E_\beta,$$

De fato, caso $\alpha, \beta \in (j, j+1)$, segue do item (b) do Teorema 3.3.1 que $E_\alpha \hookrightarrow E_\beta$. Agora, como $E_j \xhookrightarrow{d} E_\beta$ e $E_j \subset E_\alpha$ segue a validade da afirmativa neste caso.

Sejam ℓ o menor inteiro maior do que β e k o maior inteiro menor do que ℓ , logo $\alpha > k \geq l > \beta$. Semelhante ao caso anterior, como $E_{\ell+1} \xrightarrow{d} E_\ell$ e $E_{\ell+1} \subset E_\beta$, segue que $E_\beta \xrightarrow{d} E_\ell$ e já sabemos também que $E_\ell \xrightarrow{d} E_k$ e por último graças ao item (a) do Teorema 3.3.3 que $E_k \xrightarrow{d} E_\alpha$. Sendo assim, a afirmação 1 segue da propriedade transitiva das imersões densas.

Afirmação 2: Se $\alpha \geq -m$, então

$$A_\alpha \in \mathcal{L}is(E_{\alpha+1}, E_\alpha).$$

Com efeito, dado $j \in [-m, \infty) \cap \mathbb{Z}$ fixado basta verificar a afirmação para $\alpha \in (j, j+1)$. Note que, $E_{\alpha+1}$ e E_α são espaços de interpolação relativos ao pares (E_{j+2}, E_{j+1}) e (E_{j+1}, E_j) , respectivamente. Por outro lado como

$$A_{j+k} \in \mathcal{L}is(E_{j+1+k}, E_{j+k}), \quad \forall k = 0, 1.$$

e A_{j+1} é uma restrição de A_j , a afirmação segue do Teorema 3.2.7. A comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_{\alpha+1} & \xrightarrow{i_1} & E_{\beta+1} \\ A_j \downarrow & & \downarrow A_k \\ E_\alpha & \xrightarrow{i_0} & E_\beta \end{array}$$

é análoga ao do Teorema 4.2.3, desde que a escala é densamente imersa e A_α é completamente determinado por A , isto é, todos os operadores que aparecem são extensões ou restrições de A . $\square$

A partir deste teorema podemos definir a seguinte escala.

Definição 4.5.2. A escala de Banach

$$\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \geq -m\}$$

será chamada de **escala de interpolação-extrapolação de ordem m gerada por (E, A)** .

Observação 29. Pode-se construir outras escalas de interpolação-extrapolação utilizando outros métodos de interpolação, como pode ser encontrado em (AMANN, 1995).

Aqui utilizamos apenas a interpolação complexa, pois será conveniente para lidarmos com a equação de Navier-Stokes (6.2) nesta escala de interpolação-extrapolação.

O próximo teorema estende de maneira análoga ao que foi feito para escalas de potência, o Teorema 4.4.7.

Teorema 4.5.3. *Seja E espaço de Banach reflexivo, e suponha que $A \in \mathcal{U}(E)$ é densamente definido com $0 \in \rho(A)$. Então $(E_\alpha)^* = E_{-\alpha}^\#$ e $(A_\alpha)^* = A_{-\alpha}^\#$ para $\alpha \in [-m, m]$ relativamente ao par de dualidade induzido por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Adicionalmente, E_α é reflexivo para $\alpha \in [-m, m]$.*

Demonstração. Note primeiramente que, graças ao Teorema 4.4.7 sabemos que E_j é reflexivo para cada $j \in [-m, m] \cup \mathbb{Z}$. Portanto, do Corolário 3.5.4 segue que E_α é reflexivo. Novamente do Teorema 4.4.7, vemos que basta provar o resultado para o caso $\alpha \in (j, j+1)$. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} (E_\alpha)^* &= [E_j, E_{j+1}]_{\alpha-j}^* \\ &= [E_j^*, E_{j+1}^*]_{\alpha-j} \\ &= [E_{-j}^\#, E_{-j-1}^\#]_{\alpha-j} \\ &= [E_{-j-1}^\#, E_{-j}^\#]_{1-\alpha+j} \\ &= [E_{-j}^\#, E_{-j-1}^\#]_{-\alpha-(j+1)} \\ &= E_{-\alpha}^\#, \end{aligned}$$

Assim segue a primeira parte.

Agora, provemos primeiramente que $(A_\alpha)^* \supset A_{-\alpha}^\#$. Sabemos do Teorema 4.4.7 que se $x^\# \in E_{-j+1}^\#$, então $A_{-j}^\# x^\# = (A_j)^* x^\#$. Deste modo, para $x \in E_{\alpha+1}$ e $x^\# \in E_{-j+1}^\#$, temos $A_j \supset A_\alpha$ e $A_{-\alpha}^\# \supset A_{-j}^\#$ e ainda

$$\begin{aligned} \langle x^\#, A_\alpha x \rangle &= \langle x^\#, A_j x \rangle \\ &= \langle A_j^* x^\#, x \rangle \\ &= \langle A_{-j}^\# x^\#, A^k x \rangle \\ &= \langle A_{-\alpha}^\# x^\#, x \rangle, \end{aligned}$$

Portanto, $A_{-\alpha}^\# x^\# = (A_\alpha)^* x^\#$, para todo $x^\# \in E_{-j+1}^\#$ e agora como $E_{-j+1}^\# \hookrightarrow E_{-\alpha+1}^\#$, vemos que, $(A_\alpha)^* \supset A_{-\alpha}^\#$. Por fim, como $0 \in \rho(A_\alpha^*) = \rho(A_\alpha)$ e $A_{-\alpha}^\# \in \mathcal{L}is(E_{-\alpha+1}, E_{-\alpha}^\#)$ e segue do Lema 4.4.3 que $(A_\alpha)^* = A_{-\alpha}^\#$.

□

Observação 30. *É possível construir a escala acima com parâmetros variando em toda a reta real, ver (AMANN, 1995).*

4.6 Semigrupos em escalas de interpolação-extrapolação

Uma vez que estabelecemos a teoria de interpolação-extrapolação, nos voltamos ao estudo do comportamento de semigrupos de operadores lineares nestas escalas. Mostraremos que, falando informalmente, podemos transladar uma equação de evolução ao longo da escala para obter um contínuo de problemas relacionados. De particular importância é o fato que podemos desenvolver uma boa teoria de dualidade. Isto conduz a interpretações das soluções para problemas de Cauchy extrapolados como definidos naturalmente como soluções fracas.

Nesta seção estudamos em particular o comportamento de semigrupos em escalas interpolação-extrapolação. Estas investigações são a base abstrata para a teoria fraca de sistemas parabólicos lineares e semilineares.

No Capítulo 6 mostraremos como o que foi dito acima se aplica a equação de Navier-Stokes para se obter soluções “muito fracas”.

Observação 31. Denotaremos nesta seção o conjunto $\mathcal{G}(E)$ como sendo o conjunto dos geradores infinitesimais de um $\mathcal{C}_0$ -semigrupo. Sabemos também se $A \in \mathcal{G}(E)$, então existem $M \geq 1$ e $\sigma \geq 0$ tais que

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq Me^{\sigma t},$$

neste caso, escrevemos $A \in \mathcal{G}(E, M, \sigma)$.

Definição 4.6.1. Seja $A \in \mathcal{G}(E)$, definimos o **tipo** do operador A como o número real

$$\text{tipo}(A) = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}; \exists M \geq 1 | A \in \mathcal{G}(E, M, \sigma)\}.$$

A seguir será importante sabermos se os operadores com os quais estamos trabalhando comutam entre si.

Seja E um espaço de Banach. Dados operadores lineares $A, B : E \rightarrow E$ o seu **comutador** é definido por

$$[A, B] \doteq AB - BA.$$

Portanto A e B comutam se e somente se $[A, B] = 0$. Se $A : D(A) \subset E \rightarrow E$ e $B : E \rightarrow E$ são lineares então A e B **comutam** se $AB \supset BA$. Note que isto significa que $B(D(A)) \subset D(A)$ e $ABx = BAx$ para $x \in D(A)$.

Lema 4.6.2. Suponha que $A \in \mathcal{U}(E)$. Então

- $A(\lambda - A)^{-1} \supset (\lambda - A)^{-1}A$, $\lambda \in \rho(A)$.
- Se $B \in \mathcal{L}(E)$ então

$$AB \supset BA \iff [(\lambda - A)^{-1}, B] = 0 \text{ para algum } \lambda \in \rho(A)$$

$$\iff [(\lambda - A)^{-1}, B] = 0 \text{ para todo } \lambda \in \rho(A)$$

- Se $A, B \in \mathcal{G}(E)$ então

$$Ae^{Bt} \supset e^{Bt}A, \quad t \geq 0,$$

$$\iff A(\mu - B)^{-1} \supset (\mu - B)^{-1}A, \quad \mu > \text{tipo}(B),$$

$$\iff [(\lambda - A)^{-1}, (\mu - B)^{-1}] = 0, \quad \lambda > \text{tipo}(A), \quad \mu > \text{tipo}(B)$$

$$\iff [(\lambda - A)^{-1}, e^{Bt}] = 0, \quad \lambda > \text{tipo}(A), \quad t \geq 0,$$

$$\iff [e^{sA}, e^{tB}] = 0, \quad s, t \geq 0.$$

Adicionalmente, as afirmativas envolvendo $\lambda > \text{tipo}(A)$ ou $\mu > \text{tipo}(B)$ já são verdade se elas valem para algum $\lambda > \text{tipo}(A)$ ou pelo menos um $\mu > \text{tipo}(B)$, respectivamente.

Demonstração. (i) Note que, para $\lambda \in \rho(A)$

$$A(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - (\lambda - A))(\lambda - A)^{-1} = \lambda(\lambda - A)^{-1} - I$$

Por outro lado, se $x \in D(A)$, temos

$$\begin{aligned} (\lambda - A)^{-1}Ax &= -(\lambda - A)^{-1}(\lambda - A - \lambda)x \\ &= -[I - \lambda(\lambda - A)^{-1}]x \\ &= A(\lambda - A)^{-1}x. \end{aligned}$$

E o item (i) está provado.

(ii) Se $AB \supset BA$ então $(\lambda - A)B \supset B(\lambda - A)$. Portanto, se $\lambda \in \rho(A)$ segue que

$$B \supset (\lambda - A)^{-1}B(\lambda - A)$$

logo $B(\lambda - A)^{-1} \supset (\lambda - A)^{-1}B$ e daí seguirá a afirmativa.

(iii) Segue do item (ii) das fórmulas de representação

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{At} dt, \quad x \in E, \quad \text{Re } \lambda > \beta,$$

onde β é dado no Teorema 2.2.3 e

$$e^{At}x = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{k}A\right)^{-k} x, \quad t \geq 0, \quad x \in E.$$

□

Lema 4.6.3. *Seja E e F dois espaços de Banach e suponha que existe um espaço de Banach G tal que $E \hookrightarrow G$ e $F \hookrightarrow G$. Se E é um subespaço vetorial de F então $E \hookrightarrow F$.*

Demonstração. Provemos que a inclusão natural $i : E \rightarrow F$ é contínua, para isto provemos que o gráfico de i é fechado. Com efeito, seja $\{x_j\}$ uma sequência em E tal que $x_j \rightarrow x$ em E e $i(x_j) \rightarrow y$ em F . Desde que $E \hookrightarrow G$ e $F \hookrightarrow G$ vemos que $x_j \rightarrow x$ em G e $x_j = i(x_j) \rightarrow y$ em G . Portanto $x = y$, isto é, $i(x) = y$, ou seja, o gráfico de i é fechado em $E \times F$. Agora a afirmativa segue do teorema do gráfico fechado. $\square$

Definição 4.6.4. *Seja $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ operador fechado e $\mathcal{D}$ um subespaço de $D(B)$. Dizemos que $\mathcal{D}$ é um **core** para o operador B se é subespaço denso de $(D(B), \|\cdot\|_{G(B)})$, onde $\|\cdot\|_{G(B)}$ é a norma do gráfico.*

Observação 32. *Seja $B : D(B) \subset E \rightarrow E$ operador fechado. Para $\mathcal{D} \subset D(B)$ ser um core de B é necessário e suficiente que B seja completamente determinado pelo fecho de sua restrição a $\mathcal{D}$, isto é, $B = \overline{B|_{\mathcal{D}}}$.*

Demonstração. Provemos a condição necessária. Com efeito, como B é operador fechado em E , obtemos que $B|_E$ é fechável em E e ainda que $B \supset \overline{B|_{\mathcal{D}}}$. Seja agora $x \in D(B)$, por hipótese $\mathcal{D}$ é core para B logo existe $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$ tal que $\|x_n - x\|_{G(B)} \rightarrow 0$ e daí segue que $(x, Bx) \in G(\overline{B|_{\mathcal{D}}})$, donde segue que $Bx = \overline{B|_{\mathcal{D}}}x$ e a primeira parte está provada. Reciprocamente, assuma que $\overline{B|_{\mathcal{D}}} = B$, e mostremos que $\mathcal{D}$ é um core. De fato, se $x \in D(B)$, então $(x, Bx) \in G(\overline{B|_{\mathcal{D}}})$ e portanto, existe $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$ tal que

$$\|x_n - x\|_E + \|Bx_n - Bx\|_E \rightarrow 0,$$

o que é equivalente a dizer que $\mathcal{D}$ é subespaço denso em $D(B)$ dotado com a norma do gráfico como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 4.6.5. *Seja $B \in \mathcal{G}(E)$. Se $\mathcal{D} \subset D(B)$ for subespaço vetorial denso em E e invariante sob o semigrupo $\{e^{Bt}; t \geq 0\}$, então $\mathcal{D}$ é um core para B .*

Demonstração. Denote por $\overline{\mathcal{D}}$ o fecho de $\mathcal{D}$ em $(D(B), \|\cdot\|_{G(B)})$. Como $D(B)$ é Banach com a norma do gráfico e $\mathcal{D}$ é subconjunto deste, já obtemos a inclusão $\overline{\mathcal{D}} \subset D(B)$.

Mostremos que $D(B) \subset \overline{\mathcal{D}}$. Com efeito, dado $x \in D(B)$ graças a densidade de $\mathcal{D}$ em E , obtemos $\{x_n\} \subset \mathcal{D}$ tal que $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Afirmamos que para todo $k, n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$k \int_0^{1/k} e^{sB} x_n ds, k \int_0^{1/k} e^{sB} x ds \in \overline{\mathcal{D}}.$$

De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\|k \int_0^{1/k} e^{sB} x_n ds - x_n\|_{G(B)} = \|k \int_0^{1/k} e^{sB} x_n ds - x_n\|_E + \|k(e^{B/k} x_n - x_n) - Bx_n\|_E \quad (4.15)$$

o que tende a zero quando $k \rightarrow \infty$, desde que B é gerador do semigrupo, o que implica em $k \int_0^{1/k} e^{sB} x_n ds \in \overline{\mathcal{D}}$. Sendo assim, para $k \in \mathbb{N}$ fixado

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{1/k} e^{sB} x_n ds - \int_0^{1/k} e^{sB} x ds \right\|_{G(B)} &= \left\| \int_0^{1/k} e^{sB} (x_n - x) ds \right\|_E + \left\| B \int_0^{1/k} e^{sB} (x_n - x) ds \right\|_E \\ &\leq \frac{1}{k} \sup_{0 \leq s \leq 1/k} \|e^{sB}\|_{\mathcal{L}(E)} \|x_n - x\| + \|e^{tB} (x_n - x) - (x_n - x)\|_E \\ &\leq \|x_n - x\|_E \left(\frac{1}{k} \sup_{0 \leq s \leq 1/k} \|e^{sB}\|_{\mathcal{L}(E)} + \|e^{tB}\|_{\mathcal{L}(E)} + 1 \right), \end{aligned}$$

o qual tende a zero, quando $n \rightarrow \infty$ e portanto $k \int_0^{1/k} e^{sB} x ds \in \overline{\overline{\mathcal{D}}} = \overline{\mathcal{D}}$ e a afirmação segue.

Agora, de maneira análoga a (4.15) vemos que $k \int_0^{1/k} e^{sB} x ds$ aproxima x com a norma do gráfico quando $k \rightarrow \infty$, donde segue que $x \in \overline{\mathcal{D}}$ como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 4.6.6. *Seja $A : E_1 \subset E_0 \rightarrow E_0$ operador tal que $-A$ é setorial com $\rho(A) \supset [0, \infty)$. Então para todo $\alpha \geq 0$ temos $R(e^{At}) \subset E_\alpha$.*

Demonstração. Graças ao Teorema 2.2.14 temos $R(e^{tA}) \subset E_1$, logo se $m \in \mathbb{N}$ é qualquer e $x \in E_0$ escrevendo $e^{At} = (e^{At/m})^m = e^{At/m} \circ \dots \circ e^{At/m}$, vemos que $e^{At}x \in E_m$. Por fim, se α não é inteiro, o resultado vem do fato de E_α ser espaço intermediário. $\square$

Observação 33. *O lema anterior nos diz uma das ótimas propriedades de um operador setorial, dizendo que o semigrupo gerado pelo seu negativo “regulariza”, isto é, que não importa quão ruim é seu dado inicial, o semigrupo analítico o coloca num espaço melhor. A propriedade ficará mais clara no capítulo seguinte.*

O próximo lema possui papel fundamental na demonstração do principal teorema dessa seção.

Lema 4.6.7. *Sejam F e G espaços de Banach com $F \hookrightarrow G$. Suponha que $B \in \mathcal{G}(G)$ com $D(B) \overset{d}{\subset} F$ que o semigrupo $\{e^{Bt}; t \geq 0\}$ deixa F invariante e que $\|e^{Bt}\|_{\mathcal{L}(F)} \leq c$ para $0 \leq t \leq 1$. Então $B_F \in \mathcal{G}(F)$ e $e^{B_F t} = e^{Bt}|_F$ para $t \geq 0$.*

Demonstração. Defina $G_1 \doteq D(B)$ dotado com a norma $\|(\omega + B) \cdot\|_F$ para algum $\omega \in \rho(B)$. Graças ao Lema 4.6.2 temos que $(\omega - B)e^{Bt} \supset e^{Bt}(\omega - B)$. Isto implica que se $x \in G_1$,

$$e^{Bt}x = (\omega - B)^{-1}e^{Bt}(\omega - B)x.$$

Assim, definindo $U_1(t) = e^{Bt}|_{G_1}$, temos que o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{e^{Bt}} & G_1 \\ \omega + B \downarrow & & \downarrow \omega + B \\ G & \xrightarrow{U_1(t)} & G \end{array}$$

Afirmamos que $U_1(\cdot)$ é C_0 -semigrupo em G_1 . De fato, já satisfaz a propriedade de semigrupo pois é restrição de um, ainda $U_1(0) = e^{0B} |_{G_1} = I_{G_1}$ e por fim

$$\|U_1(t)x - x\|_{G_1} = \|e^{Bt}(\omega - B)x - (\omega - B)x\|_G \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0$, desde que $\{e^{Bt}; t \geq 0\}$ é fortemente contínuo. Disto vemos que $\{U_1(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo sobre G_1 .

Seja $U_F(t) = e^{Bt} |_F$, para todo $t \geq 0$, como F é invariante $\{U_F(t); t \geq 0\}$ define um semigrupo sobre F . Adicionalmente, para $t \geq 0$, temos $U_1(t) \subset U_F(t)$, desde que $G_1 \subset F$ e deste modo dado $x \in G_1$, vemos que $U_F(t)x = U_1(t)x \rightarrow x \in G_1$ em G_1 quando $t \rightarrow 0$. Agora, como $\omega \in \rho(B)$ temos $G_1 \hookrightarrow G$, por hipótese $F \hookrightarrow G$ e G_1 é subespaço de F . Pelo Lema 4.6.3 concluímos que $G_1 \hookrightarrow F$. Desta maneira, para todo $x \in G_1$ obtemos

$$\|U_F(t)x - x\|_F \leq \|U_1(t)x - x\|_{G_1} \rightarrow 0. \quad (4.16)$$

Ora, G_1 é denso em F , sendo assim dado $x \in F$ existe $\{x_n\} \subset G_1$ tal que $x_n \rightarrow x$ em F . Logo, para n suficientemente grande fixado de modo que $\|x_n - x\|_F < \varepsilon/2(c+1)$ obtemos

$$\begin{aligned} \|U_F(t)x - x\|_F &\leq \|U_F(t)x - U_F(t)x_n\|_F + \|U_F(t)x_n - x_n\|_F \\ &\quad + \|x_n - x\|_F. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\|U_F(t)\|_{\mathcal{L}(F)} \leq c$, uniformemente para $0 < t < 1$ e portanto

$$\begin{aligned} \|U_F(t)x - x\|_F &\leq (c+1)\|x_n - x\|_F + \|U_F x_n - x_n\|_F \\ &< \varepsilon/2 + \|U_F x_n - x_n\|_F. \end{aligned}$$

Agora, como n está fixado de (4.16), podemos tomar $t \geq 0$ suficientemente pequeno de forma que $\|U_F(t)x_n - x_n\|_F < \varepsilon/2$, donde segue que $\|U_F(t)x - x\|_F < \varepsilon$ e portanto $U_F(\cdot)$ é um semigrupo uniformemente contínuo.

Seja A o gerador infinitesimal deste semigrupo, dado $\lambda > \max\{\text{tipo}(A), \text{tipo}(B)\}$ e $x \in F$ da representação resolvente temos que

$$(\lambda - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_F(t)x dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{Bt} x dt = (\lambda - B)^{-1}x,$$

donde segue que $(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - B)^{-1} |_F$ e graças ao Lema (4.1.2), $(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - B_F)^{-1}$ o que implica $A = B_F$ e o resultado segue. $\square$

A seguir o teorema mais importante deste capítulo.

Teorema 4.6.8. *Suponha que $A \in \mathcal{G}(E, M, \omega)$ e $\mu \in \rho(A)$ e defina $B \doteq B(\mu) \doteq \mu - A$.*

Sendo assim, considere

$$\{(E_\alpha, B_\alpha); \alpha \geq -m\}$$

a escala de interpolação-extrapolação gerada por (E, B) e o método de interpolação $[\cdot, \cdot]_\theta$. Nestas condições, $A_\alpha \in \mathcal{G}(E_\alpha, M, \omega)$ e $\rho(A_\alpha) = \rho(A)$ para todo $\alpha \geq -m$, com

$$\|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(E_{\alpha+1}, E_\alpha)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E)}. \quad (4.17)$$

Adicionalmente, os diagramas

$$\begin{array}{ccc} E_\alpha & \xrightarrow{e^{A_\alpha t}} & E_\alpha \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ E_\beta & \xrightarrow{e^{A_\beta t}} & E_\beta \end{array}$$

são comutativos para $-m \leq \beta \leq \alpha \leq m$ e $t \geq 0$.

Além disso, se $m \geq 1$,

$$\lambda + A_\alpha \in \mathcal{L}is(E_{\alpha+1}, E_\alpha), \quad \lambda \in \rho(A), \quad -m \leq \alpha \leq m-1.$$

e

$$\|(\lambda - A_\alpha)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{\alpha+j})} \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_j)} \quad (4.18)$$

para $\lambda \in \rho(A)$, $j = 0, 1$, e $-m \leq \alpha \leq m-1$.

Adicionalmente, se $-A : E_1 \subset \rightarrow E_0$ é setorial, então $-A - \alpha : E_{\alpha+1} \subset E_\alpha \rightarrow E_\alpha$ é também setorial para todo $-m \leq \alpha \leq m-1$. Além disso,

$$\|e^{A_\beta t}\|_{\mathcal{L}(E_\beta, E_\alpha)} \leq ct^{\beta-\alpha} e^{\sigma t}, \quad t > 0, \quad (4.19)$$

para $-m \leq \beta \leq \alpha \leq m$, onde c depende de α e β .

Demonstração. Para melhor organização, vamos dividir a prova deste teorema em quatro passos.

Passo 1: O caso $\alpha = 0$ é imediato, faremos então o caso $\alpha = k \in \mathbb{N} \cap (0, m]$. O Lema 4.6.2 implica que para todo k inteiro não negativo vale

$$B^k e^{At} \supset e^{At} B^k, \quad t \geq 0, \quad (4.20)$$

logo, $E_k = D(B^k)$ é invariante sob $\{e^{At}, t \geq 0\}$. Ainda, se $x \in E_k$, temos que

$$\|e^{At} x\|_{E_k} = \|e^{At} B^k x\|_E \leq \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(E)} \|x\|_{E_k}, \quad t > 0,$$

de onde vemos que para $0 \leq t \leq 1$

$$\|e^{At}\|_{\mathcal{L}(E_k)} \leq \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M. \quad (4.21)$$

Sendo assim, como $D(A) = E_1 \hookrightarrow E$ podemos utilizar o Lema 4.6.7 e obtemos que $A_1 = (A)_{E_1}$, a E_1 -parte de A , é gerador de $\{e^{At} |_{E_1}, t \geq 0\}$, ou seja, $A_1 \in \mathcal{G}(E_1, M, \omega)$ com $e^{A_1 t} = e^{At} |_{E_1}$. Além disso, como $D(A) = E_1$ do Lema 4.1.2 obtemos que $\rho(A_1) = \rho(A)$.

Da mesma forma, de (4.20) vemos que $D(A_1) = E_2$ é invariante para o semigrupo $\{e^{A_1 t}; t \geq 0\}$ e adicionalmente de (4.21) para este semigrupo, vemos que estamos novamente nas hipóteses dos Lemas 4.6.7 e 4.1.2 donde concluímos que $A_2 = (A_1)_{E_2} = (A)_{E_2} \in \mathcal{G}(E_2, M, \omega)$, $e^{A_2 t} = e^{A_1 t} |_{E_2}$ e $\rho(A_2) = \rho(A_1)$.

Seguindo esse processo indutivamente até $m-1$, concluímos para todo $k = 1, 2, \dots, n$ que $A_k = (A)_{E_k}$, é gerador de $\{e^{At} |_{E_k}, t \geq 0\}$, com $\rho(A_k) = \rho(A)$.

Seja $k \in (0, m]$ inteiro fixado, para ver (4.17) tome $x \in E_{k+1} = D(A_k)$ e assim do Lema 4.20 e do fato de A_k ser restrição de A , temos

$$\|A_k x\|_k = \|B^k A_k x\|_E = \|B^k A x\|_E = \|A B^k x\|_E \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|B^k x\|_1 = \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|x\|_{k+1}.$$

Por fim, para $j = 0, 1$ fixado, pelo Lema 4.6.2 também vemos que

$$\|(\lambda - A_k)^{-1} x\|_{k+j} = \|(\lambda - A)^{-1} B^k x\|_j \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_j)} \|x\|_{E_k}$$

para $\lambda \in \rho(A)$, $j = 0, 1$ e $x \in E_k$.

Assim,

$$\|(\lambda - A_k)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_k, E_{k+j})} \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_j)}$$

o que prova (4.18) para $\alpha = k \in (0, m] \cap \mathbb{N}$ e cluímos a prova da primeira parte do teorema para α inteiro neste intervalo.

Passo 2: $j = -m, -m+1, \dots, -1$. Afirmamos primeiramente que o semigrupo $\{e^{At}; t \geq 0\}$ em E se estende a um $\mathcal{C}_0$ -semigrupo $U_{-1}(\cdot) = \{U_{-1}(t); t \geq 0\}$ em E_{-1} com

$$\|U_{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(E_{-1})} \leq \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(E)}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.22)$$

Com efeito, seja $x \in E_1$, então para todo $t \geq 0$

$$\|e^{At} x\|_{-1} = \|B^{-1} e^{At} x\|_E = \|B^{-1} e^{At} x\|_E \leq \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(E)} \|x\|_{-1}. \quad (4.23)$$

Se $x \in E_{-1}$, agora como $E \xrightarrow{d} E_{-1}$, existe $\{x_n\} \subset E$ tal que $x_n \rightarrow x$ em E_{-1} . Graças a (4.23), vemos que $\{e^{At} x_n\} \subset E_{-1}$ é de Cauchy e podemos definir para $x \in E_{-1}$, $U_{-1}(t)x = \lim e^{At} x_n$. Dessa forma,

$$\|U_{-1}(t)x\| = \lim \|e^{At} x_n\| \leq \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(E)} \|\lim x_n\|_{-1} = \|e^{At}\|_{\mathcal{L}(E)} \|x\|_{-1},$$

donde segue que os operadores em E_{-1} , $U_{-1}(t)$ são contínuos e vale (4.22).

Provemos que é um $\mathcal{C}_0$ -semigrupo. De fato, como $B_{-1} \in \mathcal{L}is(E, E_{-1})$ temos que

$$U_{-1}(t) = B_{-1} e^{At} (B_{-1})^{-1}, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.24)$$

desde que vale em E_1 a concluímos por densidade. Dessa maneira, vemos que $U_{-1}(0) = B_{-1}I_E B_{-1}^{-1} = I_{E_{-1}}$ e da igualdade

$$U_1(t+s) = B_{-1}e^{At}(B_{-1})^{-1}B_{-1}e^{-sA}(B_{-1})^{-1},$$

segue que $U_{-1}(\cdot)$ satisfaz a propriedade de semigrupo. Por fim, mostremos que $U_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínuo. Ora, para dado $x \in E_{-1}$, existe $\{x_n\} \subset E$ com $\|x_n - x\|_{-1} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Logo, fazendo

$$\begin{aligned} \|U_{-1}(t)x - x\|_{-1} &\leq \|U_{-1}(t)x - U_{-1}(t)x_n\|_{-1} + \|U_{-1}(t)x_n - x_n\|_{-1} \\ &\quad + \|x_n - x\|_{-1}, \end{aligned}$$

obtemos a afirmação de maneira análoga ao que foi feito no Lema 4.6.7.

Seja agora C o gerador infinitesimal de $U_{-1}(\cdot)$. Mostraremos que $E \subset D(C)$ e que $C \supset B_{-1}AB^{-1}$. Com efeito, para $x \in E$ temos $B^{-1}x = (B_{-1})^{-1}x$ e

$$\begin{aligned} \|[U_{-1}(t)x - x]/t - B_{-1}AB^{-1}x\|_{-1} &= \|B_{-1}[(e^{At}(B_{-1})^{-1}x - (B_{-1})^{-1}x)/t - AB^{-1}x]\|_{-1} \\ &= \|[e^{At}B^{-1}xB^{-1}x]/t - AB^{-1}x\|_E, \end{aligned}$$

e o último termo tende a zero quando $t \rightarrow 0^+$, desde que A é o gerador de $\{e^{At}; t \geq 0\}$ como queríamos demonstrar. Com isto e do Lema 4.6.2, obtemos

$$C \supset B_{-1}AB^{-1} \supset B_{-1}B^{-1}A = A.$$

Ainda, como C é gerador de semigrupo, temos que C é operador fechado em E_{-1} e como C é extensão de A devemos ter $C \supset A_{-1}$. Note também que,

$$e^{A_1 t} \subset e^{At} \subset U_{-1}(t),$$

de onde vem que E_1 é invariante sob $\{U_{-1}(t); t \geq 0\}$. Portanto, graças a densidade de E_1 em E_{-1} e o Lema 4.6.5 asseguramos que E_1 é um core para o operador C e pela Observação 32, sabemos que C é o fecho de sua restrição a E_1 . Acima vimos que $C \supset A$ e portanto $C|_{E_1} = A|_{E_1} = A$ e C . Consequentemente, $C = A_{-1}$, o qual é o fecho de A em E_{-1} por definição. Assim, provamos que A_{-1} está bem definido, com $A_{-1} \in \mathcal{G}(E_{-1}, M, \omega)$ e $e^{At} \subset e^{A_{-1}t}$, para todo $t \geq 0$. Por fim, como A é a E -parte de A_{-1} , com $D(A_{-1}) = E$, o Lema 4.1.2 implica $\rho(A_{-1}) = \rho(A)$.

Agora de forma análoga, definimos $U_{-2}(\cdot)$ um $\mathcal{C}_0$ -semigrupo em E_2 que vem como extensão do semigrupo $U_{-1}(\cdot)$ e satisfaz

$$\|U_{-2}(t)\|_{\mathcal{L}(E_{-2})} \leq \|U_{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(E_{-1})}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.25)$$

Também da mesma forma obtemos A_{-2} como o gerador de $U_{-2}(\cdot)$ e que $\rho(A_{-2}) = \rho(A_{-1})$.

Prosseguindo indutivamente, prova-se para todo inteiro $1 \leq k \leq m$ que $A_{-k} \in \mathcal{G}(E_{-k}, M, \omega)$, com $\rho(A_{-k}) = \rho(A)$.

Para provar (4.17), note primeiramente que do Lema 4.6.2, também concluímos que para $j = 1, 2, \dots$, vale

$$AB^{-j} \supset B^{-j}A$$

Logo, se $-k$ é inteiro em $[-m, -1]$, então como A é restrição de A_{-k} , para $x \in E_1$ temos

$$\|A_{-k}x\|_{-k} = \|B^{-k}Ax\|_E = \|B^kAx\|_E = \|AB^{-k}x\|_E \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|B^{-k}x\|_1 = \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|x\|_{-k+1}.$$

Agora, como $E_1 \xrightarrow{d} E_{1-k}$, para todo $1 \leq k \leq m$, segue que

$$\|A_{-k}\|_{\mathcal{L}(E_{1-k}, E_{-k})} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)},$$

como queríamos. Por fim, para obter (4.18) tome $x \in E_{-k}$ e $j = 0, 1$, então se $\lambda \in \rho(-A)$, temos que do Lema 4.1.2, então

$$\|(\lambda - A_{-k})^{-1}x\|_{-k+j} = \|(\lambda - A)^{-1}B^{-k}x\|_j \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_j)} \|x\|_{E_{-k}},$$

assim,

$$\|(\lambda - A_{-k})^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_{-k}, E_{-k+j})} \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E, E_j)},$$

donde decorre a estimativa desejada e o Passo 2.

Passo 3: Caso em que $\alpha \in (j, j+1)$, para algum j inteiro em $[-m, m-1]$. Com efeito, graças aos passos anteriores temos para todo $t \geq 0$ que os operadores

$$\begin{aligned} e^{A_j t} &: E_j \rightarrow E_j, \\ e^{A_{j+1} t} &: E_{j+1} \rightarrow E_{j+1} \end{aligned}$$

são limitados. Sendo assim, basta utilizar que E_α é espaço de interpolação, para obter que E_α é invariante por $\{e^{A_j t}; t \geq 0\}$ e que $e^{A_j t}|_{E_\alpha}: E_\alpha \rightarrow E_\alpha$ é limitado com

$$\|e^{A_j t}|_{E_\alpha}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} \leq \|e^{A_j t}\|_{\mathcal{L}(E_j)}^{1-(\alpha-j)} \|e^{A_{j+1} t}|_{E_\alpha}\|_{\mathcal{L}(E_{j+1})}^{\alpha-j} \leq \|e^{A t}\|_{\mathcal{L}(E)}.$$

Daí vemos também que para $t \in [0, 1]$, $\|e^{A_j t}|_{E_\alpha}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} \leq M$. Além disso, do item (a) do Teorema 3.3.3, temos que $D(A_j) = E_{j+1} \xrightarrow{d} E_\alpha$ e graças ao Lema 4.6.7, obtemos que $C_\alpha = (A_j)_{E_\alpha} \in \mathcal{G}(E_\alpha, M, \omega)$ satisfaz $e^{tC_\alpha} = e^{A_j t}|_{E_\alpha}$, para todo $t \geq 0$.

Dessa forma, basta provar que $A_\alpha = C_\alpha$ e $\rho(A_\alpha) = \rho(A)$ para todo α . De fato, se $j = 0, 1, \dots$, então $A_\alpha = C_\alpha$ por definição e como $D(A_j) \subset E_\alpha$ do Lema 4.1.2 temos que $\rho(A_\alpha) = \rho(A_j)$. Por outro lado, para $j = -m, -m+1, \dots, -1$, note primeiramente que

$$e^{A_1 t} \subset e^{A_j t}|_{E_\alpha}.$$

Daí vemos que E_1 é invariante sob $\{e^{tC_\alpha}; t \geq 0\}$ e como $E_1 \xrightarrow{d} E_\alpha$, podemos utilizar novamente o Lema 4.6.5 para garantir que E_1 é um core para o operador C_α e da Observação 32 obtemos $C_\alpha = \bar{C}_\alpha|_{E_1}$, porém $C_\alpha = (A_j)_{E_\alpha}$ de onde concluímos que

$$C_\alpha|_{E_1} = A_j|_{E_1} = A.$$

Deste modo, tomando o fecho de A em E_α obtemos A_α e assim novamente pelo Lema 4.1.2 segue que $\rho(A_\alpha) = \rho(A_j)$.

Por fim, para ver (4.17) e (4.18), basta utilizar ambas desigualdades para o caso discreto e o fato de $E_\alpha, E_{\alpha+1}$ serem espaços de interpolação relativos aos pares (E_k, E_{k+1}) e (E_{k+1}, E_{k+2}) e com relação os operadores $A_k \in \mathcal{L}(E_{k+1}, E_k)$ e $(\lambda - A_k)^{-1} \in \mathcal{L}(E_k, E_{k+1})$, para todo $k \in \mathbb{Z} \cap [-m, m-1]$, $j = 0, 1$ e $\lambda \in \rho(A)$.

Passo 4: Se A é setorial em E , graças a (4.18) e $\rho(A_\alpha) = \rho(A)$, segue que A_α é setorial em E_α , para todo $\alpha \in [-m, m]$.

Agora provemos (4.19). Com efeito, se j, k são inteiros em $[-m, m]$ com $k > j$, existe $\ell \in \mathbb{N}$ tal que $k = j + \ell$ e neste caso basta provar que $\|e^{A_j t}\|_{\mathcal{L}(E_j, E_{j+\ell})} \leq c t^{-\ell} e^{\sigma t}$. Com efeito, seja $x \in E_j$, temos do lema 4.6.6 temos que $e^{A_j t} x \in E_{j+\ell}$ e ainda

$$\|e^{A_j t} x\|_{j+\ell} = \|(e^{-A_j t/\ell})^\ell x\|_{j+\ell}.$$

Agora, como $A_{j+\ell-1}$ é setorial em $E_{j+\ell-1}$ temos

$$\|e^{A_j t} x\|_{j+\ell} \leq M \left(\frac{t}{\ell}\right)^{-1} e^{\sigma t/\ell} \|(e^{-A_j t/\ell})^{\ell-1} x\|_{j+\ell-1}.$$

Prosseguindo indutivamente, obtemos

$$\|e^{A_j t} x\|_{j+\ell} = (M \left(\frac{t}{\ell}\right)^{-1} e^{\sigma t/\ell})^\ell \|x\|_j.$$

e o resultado segue neste caso.

Seja $\alpha \in (j, j+1)$, logo E_α é espaço de interpolação em relação a (E_j, E_{j+1}) e portanto para $x \in E_j$ temos

$$\|e^{A_j t} x\|_\alpha \leq (\|e^{A_j t} x\|_j)^{1-(\alpha-j)} (\|e^{A_j t} x\|_{j+1})^{\alpha-j} \leq (\|e^{A_j t}\|_{\mathcal{L}(E_j)} \|x\|_j)^{1-(\alpha-j)} (\|e^{A_j t}\|_{\mathcal{L}(E_j, E_{j+1})} \|x\|_j)^{\alpha-j}.$$

Como A_j é setorial em E_j , temos que

$$\|e^{A_j t} x\|_\alpha \leq (c e^{\sigma t} \|x\|_j)^{1-(\alpha-j)} (c t^{-1} e^{\sigma t} \|x\|_j)^{\alpha-j} = c t^{\alpha-j} e^{\sigma t} \|x\|_j.$$

Donde segue (4.19) para este caso. De maneira análoga, obtemos

$$\|e^{A_j t}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha, E_{j+1})} \leq c t^{\alpha-j-1} e^{\sigma t}.$$

Considerando agora o caso em que $j < \beta < \alpha < j+1$. Queremos encontrar η de modo que o espaço intermediário $[E_j, E_\beta]_\eta$ seja igual a E_α . Do Teorema de reiteração 3.6.1

vemos que valor desejado satisfaz $\alpha - j = (1 - \eta)1 + \eta(\beta - j)$. Sendo assim, obtemos E_α como espaço intermediário a E_j e E_β , temos semelhantemente ao feito acima que para $x \in E_\beta$

$$\|e^{A\beta t}x\|_\eta \leq (\|e^{A\beta t}x\|_{j+1})^{1-\eta} (\|e^{A\beta t}x\|_\beta)^\eta \leq (\|e^{A\beta t}\|_{\mathcal{L}(E_\beta, E_{j+1})}\|x\|_\beta)^{1-\eta} (\|e^{A\beta t}\|_{\mathcal{L}(E_\beta)}\|x\|_\beta)^\eta,$$

ainda, o último termo é majorado por $c(t^{\beta-j-1})^{1-\eta} e^{\sigma t}\|x\|_\beta$, mas

$$1 - \eta = \frac{\beta - j - 1 - \alpha + j + 1}{\beta - j - 1} = \frac{\beta - \alpha}{\beta - j - 1}.$$

Também do Teorema de reiteração 3.6.1 temos que $[E_j, E_\beta]_\eta = E_\alpha$, com normas iguais. Logo,

$$\|e^{A\beta t}x\|_\alpha = \|e^{A\beta t}x\|_\eta \leq c t^{\beta-\alpha} e^{\sigma t},$$

como queríamos.

Por fim, mostremos para $-m \leq \ell - 1 < \beta < \ell \leq k < \alpha < k + 1$. Aqui, basta notar que do lema 4.6.6 e fazendo $s = t/3$ da propriedade de semigrupo que

$$\|e^{A\beta t}\|_{\mathcal{L}(E_\beta, E_\alpha)} \leq \|e^{-sA_k}\|_{\mathcal{L}(E_k, E_\alpha)} \|e^{-sA_\ell}\|_{\mathcal{L}(E_\ell, E_k)} \|e^{-sA_\beta}\|_{\mathcal{L}(E_\beta, E_\ell)}$$

concluimos daí que (4.19) é válida, para quaisquer $\alpha > \beta$.

□

PROBLEMAS PARABÓLICOS SEMILINEARES COM CRESCIMENTO CRÍTICO

5.1 Boa colocação local no caso crítico

Considere o problema de valor inicial do tipo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t, x), \quad t > 0 \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde o operador linear $-A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ é um operador setorial em um espaço de Banach E_0 . Seja $\{(E_\alpha, A_\alpha); \alpha \geq -m\}$, a escala de interpolação-extrapolação gerada pelo operador A e o método de interpolação complexa introduzido no Capítulo 3. Denotaremos por $\{e^{At}; t \geq 0\}$ o semigrupo analítico gerado por A , ver 2.2.14.

Para facilitar ideias assuma que f é independente do tempo.

É bem conhecido que se $f : E_1 \rightarrow E_\alpha$, $\alpha > 0$, é Lipschitz contínua em subconjuntos limitados de E_1 então o problema (5.1) é localmente bem colocado em E_1 , como veremos abaixo.

Nesta caso, para cada $x_0 \in E_1$ procuramos por pontos fixos de T no espaço

$$K(\tau, \mu) = \{x(t) \in C([0, \tau], E_1); x(0) = x_0, \|x(t)\|_{L^\infty([0, \tau], E_1)} \leq \|x_0\|_1 + \mu\},$$

onde T é dado por

$$(Tx)(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(x(s))ds. \tag{5.2}$$

Os cálculos,

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t)\|_1 &\leq \|e^{At}x_0\|_1 + M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|f(x(s))\|_\alpha ds \\ &\leq \|e^{At}x_0\|_1 + CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds + CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds \sup_{0 \leq s \leq t} \{\|x(s)\|_1\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t) - (Ty)(t)\|_1 &\leq M \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|f(x(s)) - f(y(s))\|_\alpha ds \\ &\leq CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} \|x(s) - y(s)\|_1 ds \\ &\leq (CM \int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds) \sup_{0 \leq s \leq t} \{\|x(s) - y(s)\|_1\}, \end{aligned}$$

juntamente com o fato que $\|e^{At}x_0\|_1 \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \|x_0\|_1$, $\int_0^t (t-s)^{-1+\alpha} ds = t^\alpha \int_0^1 (1-s)^{-1+\alpha} ds \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, sugerem que para $\mu > 0$ fixo podemos escolher $\tau > 0$ suficientemente pequeno tal que $T : K(\tau, \mu) \rightarrow K(\tau, \mu)$ e que T é uma contração estrita em $K(\tau, \mu)$. Uma vez que isto é conseguido, o Teorema do ponto fixo de Banach se encarrega da existência e unicidade de solução para a equação integral.

Com algum esforço extra podemos mostrar que a solução encontrada é uma solução da equação diferencial (5.1), ver por exemplo (HENRY, 1985).

Na análise acima, a convergência da integral imprópria $\int_0^1 (1-s)^{-1+\alpha} ds$, que é equivalente ao fato que $\alpha > 0$, é essencial e todo o argumento cai por terra quando $\alpha = 0$. Também vale notar que, como $A : E_1 \rightarrow E_0$, o fato que $f : E_1 \rightarrow E_\alpha$ com $\alpha > 0$ significa que as soluções do problema (5.1) podem ser obtidas como perturbações do problema linear $\dot{x} = Ax$, basta olhar para fórmula da variação das constantes (5.2).

Estamos interessados na resolubilidade local do problema (5.1), quando $\alpha = 0$. Nesta direção considere primeiramente o lema abaixo.

Lema 5.1.1. *Seja $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ tal que $-A$ gera um semigrupo fortemente contínuo e que $-A$ é setorial, portanto A gera semigrupo analítico. Então, $D(A) = E_0$ e A é operador limitado.*

Demonstração. Seja $x_0 \in E_0$ qualquer e considere o problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Ax, \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

É conhecido que $x(t) = e^{-At}x_0$ é solução de (5.1) definida para todo $t > 0$. Agora, consideremos outro problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ay, \quad t > 0 \\ y(0) &= x(1), \end{aligned}$$

como $-A$ é setorial, A é gerador de semigrupo analítico e $y(t) = e^{At}x(1)$ é solução de (5.1). Note que, $F(t) = e^{At}e^{-At}x_0$ é diferenciável, com derivada nula e como está definida em um conexo, $F(t) = x_0$ para todo $t \geq 0$. Deste modo, como o semigrupo analítico regulariza, obtemos $x_0 = y(1) = e^{A1}x(1) \in D(A)$ e o resultado segue do teorema do Gráfico fechado. $\square$

A partir do resultado acima fica claro que se a única hipótese sobre f é que $f : E_1 \rightarrow E_0$ seja localmente Lipschitz, será impossível mostrar que o problema (5.1) é localmente bem colocado. De fato, tomando $f(x) = -2Ax$, que satisfaz $f : E_1 \rightarrow E_0$ e é globalmente Lipschitz, teremos $\dot{x} = Ax + f(x) = -Ax$, o qual pelo Lema acima, vemos que não é localmente bem colocado para operadores ilimitados. Portanto, alguma **condição extra** deve ser imposta sobre f para garantir a existência das soluções do problema acima.

Para lidar com o caso $\alpha = 0$ foi introduzido em (ARRIETA; CARVALHO, 1999) o conceito de ε -regularidade que descrevemos a seguir no contexto de escalas de Banach

Definição 5.1.2. Dizemos que $x : [0, \tau] \rightarrow E_1$ é uma **solução fraca ε -regular**, ou simplesmente **ε -solução** para (5.1) relativo ao par (E_1, E_0) se $x \in C([0, \tau], E_1) \cap C((0, \tau], E_{1+\varepsilon})$, e $x(t)$ satisfaz para todo $t \in [0, \tau]$

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s, x(s))ds. \quad (5.3)$$

Definição 5.1.3. Para $\varepsilon \geq 0$, diremos que a transformação g , é uma **aplicação ε -regular** relativamente ao par (E_1, E_0) , se existem $\rho > 1$, $\gamma(\varepsilon)$ com $\rho\varepsilon \leq \gamma(\varepsilon) < 1$ e uma constante c , tal que $g : E_{1+\varepsilon} \rightarrow E_{\gamma(\varepsilon)}$ e

$$\|g(x) - g(y)\|_{\gamma(\varepsilon)} \leq c\|x - y\|_{1+\varepsilon}(\|x\|_{1+\varepsilon}^{\rho-1} + \|y\|_{1+\varepsilon}^{\rho-1} + 1) \quad \forall x, y \in E_{1+\varepsilon}. \quad (5.4)$$

Mais geralmente, se $m \in \mathbb{N}$ está fixado, para $\alpha \geq -m$, temos

Definição 5.1.4.

- $x : [0, \tau] \rightarrow E_1$ é uma **solução fraca ε -regular** para (5.1) relativo ao par $(E_{\alpha+1}, E_\alpha)$ se $x \in C([0, \tau], E_{1+\alpha}) \cap C((0, \tau], E_{1+\alpha+\varepsilon})$ e satisfaz (5.3).
- g , é uma **aplicação ε -regular** relativamente ao par $(E_{\alpha+1}, E_\alpha)$, quando existem $\rho > 1$, $\gamma(\varepsilon)$ com $\rho\varepsilon \leq \gamma(\varepsilon) < 1$ e uma constante c , tal que $g : E_{1+\alpha+\varepsilon} \rightarrow E_{\gamma(\varepsilon)+\alpha}$ e

$$\|g(x) - g(y)\|_{\gamma(\varepsilon)+\alpha} \leq c\|x - y\|_{1+\varepsilon+\alpha}(\|x\|_{1+\varepsilon+\alpha}^{\rho-1} + \|y\|_{1+\varepsilon+\alpha}^{\rho-1} + 1) \quad \forall x, y \in E_{1+\varepsilon+\alpha}. \quad (5.5)$$

Observação 34. Para o caso especial em que $\varepsilon > 0$, note que a definição de ε -regular nos diz que a não linearidade tira um pouco menos que "uma derivada", isto é, f leva elementos de $E_{1+\varepsilon}$ em $E_{\gamma(\varepsilon)}$ com $\gamma(\varepsilon) \geq \rho\varepsilon > \varepsilon$, enquanto o operador A leva $E_{1+\varepsilon}$ em E_ε . Em outras palavras, f é um "pouco mais regular" que o operador linear.

5.2 Teorema de boa colocação para o caso crítico

Em relação ao operador linear $-A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ vamos assumir que ele é um operador setorial no espaço de Banach E_0 . Iremos denotar por E_α , $\alpha \geq -m$ os espaços de interpolação - extrapolação de ordem m gerados pelo par (E_0, A) e por $\{e^{At}; t \geq 0\}$ o semigrupo analítico gerado por A , veja o Teorema 2.2.14. Sem perda de generalidade assumiremos que o semigrupo é uniformemente limitado em t , caso contrário, translate por um múltiplo escalar da identidade. Note que, fazendo isso o problema (5.1) ficaria

$$\dot{x} = (A - \mu)x + \mu x + f(t, x) = (A - \mu)x + g(t, x),$$

onde esta nova aplicação g não altera suas propriedades de ε -regularidade e nem as condições que vamos impor a seguir. Sendo assim, seja M de modo que,

$$t^{1+\alpha-\beta} \|e^{At}x\|_{1+\alpha} \leq M \|x\|_\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1 + \alpha \leq 2, \quad (5.6)$$

(veja 4.19).

Agora com relação as não linearidades, vamos considerar a seguinte classe de funções: com ε , ρ , $\gamma(\varepsilon)$, c , constantes positivas e $v(t)$ com $0 \leq v(t) \leq \delta$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} v(t) = 0$, defina $\mathcal{F} \doteq \mathcal{F}(\varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, v(\cdot))$ como a família de funções f tal que se $t > 0$ $f(t, \cdot)$ é uma aplicação ε -regular relativa ao par (E_0, E_1) , satisfazendo:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\gamma(\varepsilon)} \leq c \|x - y\|_{1+\varepsilon} (\|x\|_{1+\varepsilon}^{\rho-1} + \|y\|_{1+\varepsilon}^{\rho-1} + v(t)t^{-\gamma(\varepsilon)+\varepsilon}) \quad (5.7)$$

$$\|f(t, x)\|_{\gamma(\varepsilon)} \leq c (\|x\|_{1+\varepsilon}^\rho + v(t)t^{-\gamma(\varepsilon)}). \quad (5.8)$$

para todo $x, y \in E_{1+\varepsilon}$.

Vamos assumir que a função $v(\cdot)$ é não decrescente.

Na maioria dos casos vamos fixar os parâmetros ε , ρ , $\gamma(\varepsilon)$ e c , e denotar a classe $\mathcal{F}$ definida acima por $\mathcal{F}(v(\cdot))$.

Antes de apresentar o teorema principal desta seção, iremos provar alguns lemas auxiliares.

Lema 5.2.1. *Para todo $t > 0$ fixado, o operador $t^\alpha e^{At} : E_1 \rightarrow E_{1+\alpha}$, é limitado satisfazendo $\|t^\alpha e^{At}\|_{L(E_1, E_{1+\alpha})} \leq M$, com M independente de t . Além disso, dado um compacto J de E_1 temos que*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{x \in J} \|t^\alpha e^{At}x\|_{1+\alpha} = 0.$$

Demonstração. A primeira afirmativa segue de do Teorema 4.6.8, mais precisamente estimativa (4.19).

Para a segunda afirmação, tome $J \subset E_1$ compacto. Ora, se $z \in E_{1+\alpha}$, temos de (4.19) que vale

$$\|t^\alpha e^{At} z\|_{1+\alpha} \leq M t^\alpha \|z\|_{1+\alpha}, \quad (5.9)$$

e o termo a direita tende a zero quando $t \rightarrow 0$.

Afirmamos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ de modo que para todo $x \in E_1$ e todo $t \in (0, \delta)$ tem-se

$$\|t^\alpha e^{At} x\|_{1+\alpha} < \varepsilon.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, considere a família $\{B_{E_1}(x, \varepsilon/2M)\}_{x \in E_{1+\alpha}}$. Graças à densidade de $E_{\alpha+1}$ em E_1 vemos que essa família constitui uma cobertura aberta para J em E_1 . Pela compacidade de J existe um número finito dessas bolas abertas que cobrem J , isto é,

$$J \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon/2M),$$

onde $x_i \in E_{1+\alpha}$, para todo $i \in \{1, \dots, p\}$.

Agora, por (5.9) conseguimos para cada $i = 1, \dots, p$ um $\delta_i > 0$ de maneira que se $t \in (0, \delta_i)$ então

$$\|t^\alpha e^{At} x_i\|_{1+\alpha} < \varepsilon/2.$$

Deste modo, tomando $\delta = \min_{1 \leq i \leq p} \delta_i$ (lembre-se que x_i depende apenas de ε), obtemos que relação anterior é satisfeita para todo $t \in (0, \delta)$.

Agora, se $x \in E_1$ é qualquer temos que existe $i_0 \in \{1, \dots, p\}$ tal que $x_{i_0} \in E_{1+\alpha}$ com $x \in B_{E_1}(x_{i_0}, \varepsilon/2M)$. Sendo assim, para $t \in (0, \delta)$ obtemos

$$\begin{aligned} \|t^\alpha e^{At} x\|_{1+\alpha} &\leq \|t^\alpha e^{At} (x - x_{i_0})\|_{1+\alpha} + \|t^\alpha e^{At} x_{i_0}\|_{1+\alpha} \\ &< M \|x - x_{i_0}\|_1 + \varepsilon/2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

onde utilizamos o que foi feito previamente juntamente com (4.19).

Portanto, a afirmação está provada e concluimos da definição de supremo que

$$\sup_{x \in J} \|t^\alpha e^{At} x\|_{1+\alpha} < \varepsilon, \quad \forall t \in (0, \delta),$$

e assim obtemos o resultado desejado. $\square$

Consideramos agora a **função Beta** $B(\cdot, \cdot) : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, que é dada por

$$B(a, b) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx.$$

Para cada $\varepsilon \geq 0$ fixado defina para todo $\theta \in [0, \gamma(\varepsilon))$

$$B_\varepsilon^\theta \doteq \max_{0 \leq \xi \leq \theta} \{B(\gamma(\varepsilon) - \xi, 1 - \gamma(\varepsilon)), B(\gamma(\varepsilon) - \xi, 1 - \rho\varepsilon)\}.$$

Observação 35. Sejam $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$, $x \in C((0, \tau], E_{1+\varepsilon})$ e $\theta \in [0, \gamma(\varepsilon))$. Então, para todo $t \in (0, \tau]$

$$\int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \in E_{1+\theta}.$$

Demonstração. De fato, para todo $s \in [0, \tau]$, temos que $e^{A(t-s)} f(s, x(s)) \in E_{1+\theta}$ e por (4.19) obtemos

$$\|e^{A(t-s)} f(s, x(s))\|_{1+\theta} \leq (t-s)^{\gamma(\varepsilon)-1-\theta} \|f(s, x(s))\|_{\gamma(\varepsilon)}.$$

Como $\gamma(\varepsilon) - \theta - 1 > -1$ segue que o lado direito é integrável¹, ver (FOLLAND, 1999) página 79, e o resultado segue. $\square$

Lema 5.2.2. Seja $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$. Se $x \in C((0, \tau], E_{1+\varepsilon})$, então para todo $0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$, temos que

$$t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{1+\theta} \leq cMB_\varepsilon^\theta(\mathbf{v}(t) + t^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon}[\lambda(t)]^\rho) \quad 0 < t \leq \tau,$$

onde $\lambda(t) \doteq \sup_{s \in (0, t]} \{s^\varepsilon \|x(s)\|_{1+\varepsilon}\}$.

Demonstração. A estimativa (4.19), juntamente com o fato de que $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$ nós dá

$$\begin{aligned} t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{1+\theta} &\leq Mt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} \|f(s, x(s))\|_{\gamma(\varepsilon)} ds \\ &\leq cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} (\mathbf{v}(s)s^{-\gamma(\varepsilon)} + \|x(s)\|_{1+\varepsilon}^\rho) ds \\ &\leq cMt^\theta \mathbf{v}(t) \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds + cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} [s^\varepsilon \|x(s)\|_{1+\varepsilon}]^\rho ds \\ &\leq cM\mathbf{v}(t) \int_0^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds + cMt^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} [\lambda(t)]^\rho \int_0^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} ds \\ &= cM\mathbf{v}(t) B(\gamma(\varepsilon) - \theta, 1 - \gamma(\varepsilon)) + cMt^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} [\lambda(t)]^\rho B(\gamma(\varepsilon) - \theta, 1 - \rho\varepsilon) \\ &\leq cMB_\varepsilon^\theta [\mathbf{v}(t) + t^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} [\lambda(t)]^\rho], \end{aligned}$$

e assim o lema está provado. $\square$

Lema 5.2.3. Sejam $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$ e $x, y \in C((0, \tau], E_{1+\varepsilon})$ de maneira que $t^\varepsilon \|x(t)\|_{1+\varepsilon} \leq \mu$, $t^\varepsilon \|y(t)\|_{1+\varepsilon} \leq \mu$, para algum $\mu > 0$. Então, para todo $0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$, vale

$$t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\|_{1+\theta} \leq \Gamma_\theta(t) \sup_{s \in (0, \tau]} s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{1+\varepsilon},$$

onde

$$\Gamma_\theta(t) \doteq cMB_\varepsilon^\theta \left[\mathbf{v}(t) + t^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} 2\mu^{\rho-1} \right].$$

¹ note também que caso $\theta = \gamma(\varepsilon)$ não garantimos mais a integrabilidade

Demonstração. Fazendo uso da propriedade de ε -regularidade de f e novamente de (4.19), temos

$$\begin{aligned}
& t^\theta \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] ds \right\|_{1+\theta} \\
& \leq t^\theta \int_0^t cM(t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} \|x(s) - y(s)\|_{1+\varepsilon} (v(t)s^{-\gamma(\varepsilon)+\varepsilon} + \|x(s)\|_{1+\varepsilon}^{\rho-1} + \|y(s)\|_{1+\varepsilon}^{\rho-1}) ds \\
& \leq cMt^\theta v(t) \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{1+\varepsilon} ds + \\
& cMt^\theta \int_0^t (t-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} [(s^\varepsilon \|x(s)\|_{1+\varepsilon})^{\rho-1} + (s^\varepsilon \|y(s)\|_{1+\varepsilon})^{\rho-1}] s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{1+\varepsilon} ds \\
& \leq \Gamma_\theta(t) \sup_{t \in (0, \tau]} \{s^\varepsilon \|x(s) - y(s)\|_{1+\varepsilon}\}.
\end{aligned}$$

□

Agora vamos enunciar o teorema mais importante do Capítulo, que dá quais as condições necessárias para se obter uma ε -solução para o problema proposto em relação ao par (E_1, E_0) . Além disso, o teorema abaixo possui informações a respeito de continuidade com relação aos dados iniciais (5.12) e também compara, de certa forma, as propriedades da solução aqui obtida com o as do caso linear, ver por exemplo (5.11) e (4.19).

Teorema 5.2.4. *Seja $f \in \mathcal{F}(\varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, v(\cdot))$. Dado $y_0 \in E_1$ existem $r > 0$, e $\tau_0 > 0$ de modo que para qualquer $x_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$ existe uma função contínua $x(\cdot, x_0) : [0, \tau_0] \rightarrow E_1$, com $x(0) = x_0$, que é a única solução ε -regular começando em x_0 do problema*

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + f(t, x), \quad t > 0 \\
x(0) &= x_0.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Esta solução satisfaz

$$x \in C((0, \tau_0], E_{1+\theta}), \quad 0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$$

e

$$t^\theta \|x(t, x_0)\|_{1+\theta} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 < \theta < \gamma(\varepsilon). \tag{5.11}$$

Adicionalmente, Se $x_0, z_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$, então vale a seguinte desigualdade que diz respeito à continuidade com relação aos dados iniciais

$$t^\theta \|x(t, x_0) - x(t, z_0)\|_{1+\theta} \leq C \|x_0 - z_0\|_1, \quad \forall t \in [0, \tau_0], \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0, \tag{5.12}$$

para todo $\theta_0 < \gamma(\varepsilon)$.

As constantes acima dependem do seguinte: $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, v(\cdot), \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M)$, $r = r(y_0, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M)$, $C = C(\theta_0, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), M)$.

Demonstração.

Vamos organizar a prova deste teorema em duas partes, Existência e Unicidade.

Existência. Tendo em vista os resultados anteriormente provados nos Lemas 5.2.2 e 5.2.3, defina μ por

$$cMB_\varepsilon^\varepsilon \mu^{\rho-1} = \frac{1}{8}$$

e escolha $r = r(\mu, M) > 0$ de modo que

$$r = \frac{\mu}{4M} = \frac{1}{4M(8cMB_\varepsilon^\varepsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}}. \quad (5.13)$$

Agora, para y_0 fixado, como $v(t) \rightarrow 0$ e $\|t^\varepsilon e^{At} y_0\|_{1+\varepsilon} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0+$, escolha $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, \mu, v(\cdot), \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M) \in (0, 1]$ de modo que $v(t) < \delta$ para $t \in (0, \tau_0]$ e

$$\|t^\varepsilon e^{At} y_0\|_{1+\varepsilon} \leq \frac{\mu}{2}, \quad 0 \leq t \leq \tau_0, \quad (5.14)$$

$$cM\delta B_\varepsilon^\varepsilon = \min\left\{\frac{\mu}{8}, \frac{1}{4}\right\},$$

onde δ é definido pela relação acima.

Note que, estas escolhas implicam que para todo $t \in (0, 1)$, temos

$$\Gamma_\varepsilon(t) = cMB_\varepsilon^\theta \left[v(t) + t^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon} 2\mu^{\rho-1} \right] \leq cMB_\varepsilon^\varepsilon [\delta + 2\mu^{\rho-1}] \leq \frac{1}{2}.$$

Estamos querendo encontrar soluções que regularizam de forma instantânea, logo precisamos procurar soluções no espaço

$$K(\tau_0) = \{x \in C((0, \tau_0], E_{1+\varepsilon}) : \sup_{t \in (0, \tau_0]} t^\varepsilon \|x(t)\|_{1+\varepsilon} \leq \mu\},$$

com a norma

$$\|x\|_{K(\tau_0)} = \sup_{t \in (0, \tau_0]} t^\varepsilon \|x(t)\|_{1+\varepsilon}.$$

Observamos que $(K(\tau_0), d)$ é um espaço métrico completo onde $d : K(\tau_0) \times K(\tau_0) \rightarrow \mathbb{R}$ é induzida pela norma definida acima, isto é, $d(x, y) = \|x - y\|_{K(\tau_0)}$.

Assuma que $x_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$ e defina a seguinte aplicação em $K(\tau_0)$

$$(Tx)(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds.$$

A fim de usar o Teorema do ponto fixo de Banach vamos provar que para todo $x_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$, $TK(\tau_0) \subset K(\tau_0)$ e que T é uma contração em $K(\tau_0)$.

Provemos primeiramente que T é uma aplicação bem definida e que $T(K(\tau_0)) \subset K(\tau_0)$. Vamos iniciar mostrando que

$$\text{Se } x \in K(\tau_0) \quad \text{então} \quad Tx \in C((0, \tau_0], E_{1+\theta}), \quad \forall \theta \in [0, \gamma(\varepsilon)). \quad (5.15)$$

De fato, fixado $t_2 \in (0, \tau_0]$ e considere $\tau_0 \geq t_1 \geq t_2$ e, dessa forma para $0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$, temos que

$$\begin{aligned} \|(Tx)(t_1) - (Tx)(t_2)\|_{1+\theta} &\leq \|(e^{A(t_1-t_2)} - I)e^{At_2}x_0\|_{1+\theta} + \left\| \int_{t_2}^{t_1} e^{A(t_1-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{1+\theta} \\ &\quad + \left\| [e^{A(t_1-t_2)} - I] \int_0^{t_2} e^{A(t_2-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{1+\theta}. \end{aligned}$$

Na estimativa acima, pela continuidade forte do semigrupo em $E_{1+\theta}$ o primeiro e terceiro termo tendem a zero quando $t_1 \rightarrow t_2$. Sendo assim, basta analisar o segundo termo.

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_2}^{t_1} e^{A(t_1-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{1+\theta} &\leq c \int_{t_2}^{t_1} M(t_1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} (\delta s^{-\gamma(\varepsilon)} + \|x(s)\|_{1+\varepsilon}^\rho) ds \\ &\leq cM\delta \int_{t_2}^{t_1} (t_1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds + cM \int_{t_2}^{t_1} (t_1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} (s^\varepsilon \|x(s)\|_{1+\varepsilon})^\rho ds \\ &\leq cM\delta t_1^{-\theta} \int_{t_2}^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\gamma(\varepsilon)} ds + cM\mu^\rho t_1^{\gamma(\varepsilon)-\theta-\rho\varepsilon} \int_{t_2}^1 (1-s)^{-1+\gamma(\varepsilon)-\theta} s^{-\rho\varepsilon} ds. \end{aligned}$$

Fazendo $t_1 \rightarrow t_2^+$, vemos que o segundo termo tende a zero como queríamos. O caso $t_1 < t_2$ é tratado de maneira análoga e assim segue (5.15).

Vamos provar agora que $t^\varepsilon \|Tx(t)\|_{1+\varepsilon} \leq \mu$, para todo $t \in (0, \tau_0]$. Com efeito, temos do Lema 5.2.3 para $\varepsilon = \theta$ e das escolhas feitas em (5.13) e (5.14) que

$$\begin{aligned} t^\varepsilon \|(Tx)(t)\|_{1+\varepsilon} &\leq \|t^\varepsilon e^{At}x_0\|_{1+\varepsilon} + t^\varepsilon \left\| \int_0^t e^{A(t-s)} f(s, x(s)) ds \right\|_{1+\varepsilon} \\ &\leq \|t^\varepsilon e^{At}(x_0 - y_0)\|_{1+\varepsilon} + \|t^\varepsilon e^{At}y_0\|_{1+\varepsilon} + cM\delta B_\varepsilon^\varepsilon + cMB_\varepsilon^\varepsilon \mu^\rho \\ &\leq Mr + \|t^\varepsilon e^{At}y_0\|_{1+\varepsilon} + cMB_\varepsilon^\varepsilon \delta + cMB_\varepsilon^\varepsilon \mu^\rho \leq \mu, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Por fim, mostremos que T é uma contração em $K(\tau_0)$. De fato, tomando $x, y \in K(\tau_0)$ vemos que satisfazem as condições do Lema 5.2.3 e assim para $\theta = \varepsilon$ e novamente das escolhas anteriores obtemos para $t \in (0, 1)$

$$\|T(x) - T(y)\|_{K(\tau_0)} \leq \Gamma_\varepsilon(t) \|x - y\|_{K(\tau_0)} \leq \frac{1}{2} \|x - y\|_{K(\tau_0)},$$

ou seja, $d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{2}d(x, y)$ para todo $x, y \in K(\tau_0)$ e segue o desejado.

Agora do Teorema do ponto fixo de Banach, sabemos que T possui um único ponto fixo em $K(\tau_0)$. Iremos denotar seu ponto fixo por $X(t, x_0)$ o qual é definido para

$x_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$ e $0 \leq t \leq \tau_0$. Note que, por (5.15), temos $X(\cdot, x_0) \in C((0, \tau_0], E_{1+\theta})$, para todo $0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$, o que em particular vale para $\theta = \varepsilon$. Além disso, $X(t, x_0)$ satisfaz a fórmula da variação das constantes para todo $t \in [0, \tau_0]$. Sendo assim, para mostrar que $X(\cdot, x_0)$ é ε -solução basta provar que $X(\cdot, x_0) \in C([0, \tau], E_1)$. Ora, como $E_{1+\varepsilon} \xrightarrow{d} E_1$, vemos que é suficiente provar que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|X(t, x_0) - x_0\|_1 = 0$.

Para isto, provemos primeiramente que $t^\theta \|X(t, x_0)\|_{1+\theta} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ para todo $0 < \theta < \gamma(\varepsilon)$.

De fato, pelo Lema 5.2.2 temos para todo $t \in (0, \tau_0]$

$$\begin{aligned} t^\theta \|X(t, x_0)\|_{1+\theta} &\leq t^\theta \|e^{At} x_0\|_{1+\theta} + t^\theta \int_0^t \|e^{A(t-s)} f(s, X(s, x_0))\|_{1+\theta} ds \\ &\leq t^\theta \|e^{At} x_0\|_{1+\theta} + cMB_\varepsilon^\theta v(t) + cMB_\varepsilon^\theta \mu^{\rho-1} \sup_{0 < s \leq t} \{t^\varepsilon \|X(t, x_0)\|_{1+\varepsilon}\} \end{aligned}$$

Portanto, se $\theta = \varepsilon$ vale

$$t^\varepsilon \|X(t, x_0)\|_{1+\varepsilon} \leq t^\varepsilon \|e^{At} x_0\|_{1+\varepsilon} + cMB_\varepsilon^\varepsilon v(t) + \frac{1}{8} \sup_{0 < s \leq t} \{t^\varepsilon \|X(t, x_0)\|_{1+\varepsilon}\}.$$

Agora, como v é não decrescente e como a desigualdade acima vale para todo $t \in (0, \tau_0]$, podemos tomar o supremo para todo $s \in (0, t]$ e obtemos

$$\sup_{0 < s \leq t} \{s^\varepsilon \|X(s, x_0)\|_{1+\varepsilon}\} \leq \frac{8}{7} \left(\sup_{0 < s \leq t} s^\varepsilon \|e^{As} x_0\|_{1+\varepsilon} + cMB_\varepsilon^\varepsilon v(t) \right) \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0,$$

onde foi usado o Lema 5.2.1 para a convergência do segundo termo da desigualdade acima.

Se $0 < \theta < \gamma(\varepsilon)$, pelas expressões acima também obtemos $t^\theta \|X(t, x_0)\|_{1+\theta} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Provemos agora que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|X(t, x_0) - x_0\|_1 = 0.$$

Graças à continuidade forte do semigrupo e pelo Lema 5.2.2 para $\theta = 0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|X(t, x_0) - x_0\|_1 &\leq \|e^{At} x_0 - x_0\|_1 + \int_0^t \|e^{A(t-s)} f(s, X(s, x_0))\|_1 ds \\ &\leq \|e^{At} x_0 - x_0\|_1 + cMB_\varepsilon^0(v(t) + [\sup_{0 < s \leq t} \{t^\varepsilon \|X(t, x_0)\|_{1+\varepsilon}\}]^\rho) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned}$$

Deste modo, vemos que $X(\cdot, x_0)$ é uma ε -solução começando em x_0 que é única definida no espaço métrico $K(\tau_0)$, chamaremos esta solução obtida de K -solução.

Além disso, se $x_0, z_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$, levando em conta as estimativas do Lema 5.2.3 e nossa escolha de τ_0 , temos o seguinte

$$\begin{aligned} & t^\theta \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{1+\theta} \\ & \leq t^\theta \|e^{At}(x_0 - z_0)\|_{1+\theta} + t^\theta \int_0^t \|e^{A(t-s)}[f(s, X(s, x_0)) - f(s, X(s, z_0))]\|_{1+\theta} ds \quad (5.16) \\ & \leq M\|x_0 - z_0\|_1 + \Gamma_\theta(t) \sup_{s \in [0, t]} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Logo, para $\theta = \varepsilon$ e para todo $\tau < t$ temos

$$\begin{aligned} & \tau^\varepsilon \|X(\tau, x_0) - X(\tau, z_0)\|_{1+\varepsilon} \\ & \leq M\|x_0 - z_0\|_1 + \frac{1}{2} \sup_{s \in (0, \tau]} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{1+\varepsilon} \\ & \leq M\|x_0 - z_0\|_1 + \frac{1}{2} \sup_{s \in (0, t]} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos que

$$\sup_{s \in (0, t]} s^\varepsilon \|X(s, x_0) - X(s, z_0)\|_{1+\varepsilon} \leq 2M\|x_0 - z_0\|_1,$$

e assim para $0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\varepsilon)$ temos por (5.16) que

$$t^\theta \|X(t, x_0) - X(t, z_0)\|_{1+\theta} \leq M\|x_0 - z_0\|_1 + \Gamma_\theta(t) 2M\|x_0 - z_0\|_1 \leq C(\theta_0)\|x_0 - z_0\|_1.$$

onde $C(\theta_0) = M(1 + 2 \sup\{\Gamma_\theta(t); t \in [0, \tau_0], 0 \leq \theta \leq \theta_0\})$. Assim, concluímos a parte de Existência do teorema.

Unicidade. Note da parte de existência temos que para qualquer $x_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$ e para qualquer $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$ existe uma única K -solução definida em $[0, \tau_0]$, do problema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t, x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para expressar a dependência da K -solução em f iremos denotá-la por $X_f(\cdot, x_0)$.

Na parte de existência provamos que toda K -solução é ε -solução a fim de provar a unicidade de ε -soluções provemos que toda ε -solução é K -solução.

Para isto considere os seguintes resultados.

Lema 5.2.5. *Se $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$, então $f_a \in \mathcal{F}(\mathbf{v}_a(\cdot))$ para todo $a \geq 0$, onde $f_a(t, x) \equiv f(t+a, x)$ e $\mathbf{v}_a(t) = \mathbf{v}(t+a)(t/t+a)^{\gamma(\varepsilon)-\varepsilon} \leq \mathbf{v}(t+a)$. Adicionalmente, existe $a_1 > 0$, pequeno, de modo que para todo $a \in [0, a_1]$ o tempo de existência $\tau_0(a)$ dado por (5.14) pode ser escolhido independente de a .*

Demonstração. Primeiramente provemos que $f_a \in \mathcal{F}(\mathbf{v}_a(\cdot))$. Com efeito, como $f(\cdot, x)$ é ε -regular e que f_a é apenas uma translação na variável temporal segue que $f_a(\cdot, x)$ é ε -regular. Além disso, com os cálculos

$$\mathbf{v}(a+t)(a+t)^{\varepsilon-\gamma(\varepsilon)} = \mathbf{v}_a(t)t^{\varepsilon-\gamma(\varepsilon)}$$

e $(t/t+a)^{\gamma(\varepsilon)} \leq (t/t+a)^{\gamma(\varepsilon)-\varepsilon}$, observamos que

$$\mathbf{v}(a+t)(a+t)^{-\gamma(\varepsilon)} \leq \mathbf{v}_a(t)t^{-\gamma(\varepsilon)}.$$

Daí segue a primeira parte do Lema.

Para a segunda parte basta observar que se $\mathbf{v}(t) < \delta$ para $t \in [0, \bar{\tau}_0]$, então para $a_1 = \frac{1}{2}\bar{\tau}_0$ e $\tau_0 = \frac{1}{2}\bar{\tau}_0$ teremos que $\mathbf{v}(t+a) < \delta$ para todo $t \in [0, \tau_0]$ e para todo $a \in (0, a_1]$. $\square$

Lema 5.2.6. *Se $\phi(t)$ é uma solução ε -regular em $[0, t_0]$ de (5.17) e $t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{1+\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$, então $\phi(t) = X_f(t, x_0)$ para todo $0 \leq t \leq \min\{\tau_0, t_0\}$.*

Demonstração. Por hipótese, $t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{1+\varepsilon} \rightarrow 0$, logo $\phi \in K(\bar{\tau})$ para algum $\bar{\tau} \leq \tau_0$. Note também que $X_f(\cdot, x_0) \in K(\bar{\tau})$. Agora, como ϕ é ε -solução, vemos que ϕ e $X_f(\cdot, x_0)$ são soluções da quação integral e assim da unicidade do teorema do ponto fixo em $K(\bar{\tau})$ obtemos $X_f(t, x_0) = \phi(t)$ para todo $0 \leq t \leq \bar{\tau}$. Agora, com um argumento usual de continuação de soluções vemos que $X_f(t, x_0) = \phi(t)$ para todo $0 \leq t \leq \min\{t_0, \tau_0\}$. Isto conclui a prova do Lema. $\square$

Seja $\phi(t)$ uma solução ε -regular começando em $x_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$, definida em $0 \leq t \leq t_0$. Vamos provar que ϕ é uma K -solução, mais precisamente, caso $\tau_0 \leq t_0$ que $\phi \in K(\tau_0)$, ou caso $t_0 > \tau_0$ que $\tilde{\phi} \in K(\tau_0)$, onde $\tilde{\phi}$ é extensão de ϕ que ainda é ε -solução com tempo de existência τ_0 e deste modo a unicidade seguirá da unicidade de K -soluções. Com efeito, como $\phi \in C([0, t_0], E_1)$ existe $a_0 \in (0, t_0)$ de modo que $\phi(a) \in B_{E_1}(y_0, r)$, para todo $a \in (0, a_2]$. A partir de agora considere $a_0 = \min\{a_1, a_2\}$, onde a_1 aparece no Lema 5.2.5. Novamente da continuidade de ϕ , obtemos $\phi_a(\cdot) \equiv \phi(a+\cdot) \in C([0, t_0-a], E_{1+\varepsilon})$, e portanto $t^\varepsilon \|\phi_a(t)\|_{1+\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$. Além disso, afirmamos que ϕ_a é uma ε -solução de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f_a(t, x) \\ x(0) &= \phi(a) \end{aligned} \tag{5.18}$$

De fato, já vimos acima que ϕ_a satisfaz a condição de regularidade mais precisamente, $\phi_a(\cdot) \in C([0, t_0-a], E_{1+\varepsilon})$, portanto basta verificar que satisfaz a fórmula da variação das constantes para (5.18). Para isto, note que

$$\phi(a) = e^{Aa}x_0 + \int_0^a e^{A(a-s)}f(s, \phi(s))ds, \tag{5.19}$$

desde que, ϕ é ε -solução e $a \in (0, t_0)$. Da equação acima e da propriedade de semigrupo, obtemos que

$$e^{At}\phi(a) = e^{A(t+a)}x_0 + \int_0^a e^{A(t+a-s)}f(s, \phi(s))ds. \quad (5.20)$$

Fazendo

$$I = \int_0^t e^{A(t-s)}f_a(s, \phi_a(s))ds = \int_a^{t+a} e^{A(t+a-s)}f(s, \phi(s))ds, \quad (5.21)$$

vemos que

$$I + e^{At}\phi(a) = \phi(t+a) = \phi_a(t).$$

Donde segue a afirmação.

Agora, como $f_a \in \mathcal{F}(\mathbf{v}_a(\cdot))$ e $\phi(a) \in B^{E_1}(y_0, r)$, pelo Lema 5.2.5 e da parte de existência do teorema sabemos que existe uma única K -solução $X_{f_a}(\cdot, \phi(a))$ definida em $[0, \tau_0]$. Além disso, como $t^\varepsilon \|\phi_a(t)\|_{1+\varepsilon} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0$ vemos pelo Lema 5.2.6 segue que $X_{f_a}(t, \phi(a)) = \phi_a(t)$ para todo $0 \leq t \leq \min\{\tau_0, t_0 - a\}$ e para qualquer $0 < a \leq a_0$. Deste modo, podemos assumir que $t_0 \geq \tau_0$. Caso contrário, defina $\tilde{\phi}(t) = \phi(t)$ for $0 \leq t \leq t_0$ and $\tilde{\phi}(t) = X_{f_{a_0}}(t - a_0, \phi(a_0))$ para $t_0 \leq t \leq \tau_0$, semelhantemente ao que foi feito acima $\tilde{\phi}$ é também ε -solução começando em x_0 .

Pela definição de K -solução, para concluirmos o desejado basta mostrar que

$$t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{1+\varepsilon} \leq \mu,$$

para todo $0 < t \leq \tau_0$. Ora, para $0 < a < a_0$,

$$t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{1+\varepsilon} \leq t^\varepsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{1+\varepsilon} + t^\varepsilon \|\phi_a(t)\|_{1+\varepsilon}. \quad (5.22)$$

Fixando $0 < t \leq \tau_0$, como queremos tomar o limite $a \rightarrow 0$, podemos tomar a tal que $t_0 - a \geq \tau_0$ e assim $\phi_a(t) = X_{f_a}(t, \phi(a))$. Deste modo, a relação (5.22) implica que

$$t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{1+\varepsilon} \leq t^\varepsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{1+\varepsilon} + \mu.$$

Agora, fazendo $a \rightarrow 0$, obtemos $t^\varepsilon \|\phi(t) - \phi(t+a)\|_{1+\varepsilon} \rightarrow 0$, que implica que $t^\varepsilon \|\phi(t)\|_{1+\varepsilon} \leq \mu$ para qualquer $t \in (0, \tau_0]$. Isto concluí a prova da Unicidade do teorema. ■

Observação 36. *Seja $m \in \mathbb{N}$ fixado e $\delta \in [-m, m]$, o Teorema 5.2.4 continua válido para qualquer par do tipo $(E_{1+\delta}, E_\delta)$, mais precisamente...*

Corolário 5.2.7. *Seja $f \in \mathcal{F}(\varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, \mathbf{v}(\cdot))$ relativa ao par $(E_{1+\delta}, E_\delta)$. Dado $y_0 \in E_{1+\delta}$ existem $r > 0$, e $\tau_0 > 0$ de modo que para qualquer $x_0 \in B_{E_{1+\delta}}(y_0, r)$ existe uma função contínua $x(\cdot, x_0) : [0, \tau_0] \rightarrow E_{1+\delta}$, com $x(0) = x_0$, que é a única solução ε -regular relativa ao par $(E_{1+\delta}, E_\delta)$ começando em x_0 do problema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(t, x), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Esta solução satisfaz

$$x \in C((0, \tau_0], E_{1+\delta+\theta}), \quad 0 \leq \theta < \gamma(\varepsilon)$$

e

$$t^\theta \|x(t, x_0)\|_{1+\delta+\theta} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 < \theta < \gamma(\varepsilon). \quad (5.24)$$

Adicionalmente, Se $x_0, z_0 \in B_{E_{1+\delta}}(y_0, r)$, então vale a seguinte desigualdade que diz respeito a continuidade com relação a dados iniciais

$$t^\theta \|x(t, x_0) - x(t, z_0)\|_{1+\theta+\delta} \leq C \|x_0 - z_0\|_{1+\delta}, \quad \forall t \in [0, \tau_0], \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\varepsilon) \quad (5.25)$$

Demonstração. Segue do Teorema 4.6.8, desde que $-A_\delta$ é setorial e as estimativas de ε -regularidade nestes espaços se comportam de maneira análoga às feitas na prova do teorema anterior, por conta de (4.19), contanto que a diferença entre os índices do par $(E_{1+\delta}, E_\delta)$ seja unitária. $\square$

Observação 37.

- *Do mesmo modo que o Teorema 5.2.4 continua válido para qualquer par da forma $(E_{1+\delta}, E_\delta)$, para todo $\delta \in [-m, m]$, de modo geral os resultados das seções subsequentes podem ser passados para este contexto sem maiores problemas, basta utilizar o Teorema 4.6.8 para transladar as escalas.*
- *O corolário anterior terá importância fundamental no caso em que $m = 2$ e $\delta = -1$, como veremos no Capítulo 6.*

5.3 Continuação de soluções

Para poder “continuar” soluções usaremos resultados que garantem tempo de existência uniforme. No caso de conjuntos compactos em E_1 o resultado seguirá como corolário do teorema de boa colocação. Veremos também critérios para se obter resultados deste tipo, para conjuntos limitados.

Observação 38. *Note que, o Teorema 5.2.4 nós dá tempo de existência localmente uniforme, isto irá permitir obter propriedades a respeito do tempo de existência uniforme em conjuntos relativamente compactos de E_1 .*

Corolário 5.3.1. *Seja f como no Teorema 5.2.4 e K um conjunto tal que seu fecho é compacto em E_1 , então existe $\tau_0 = \tau(K)$ tal que a ε -solução começando em x_0 existe para tempo τ_0 qualquer $x_0 \in K$. Em outras palavras, o tempo de existência é uniforme em pré-compactos.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.2.4, dado qualquer $y_0 \in \bar{K}$ existem $r_0 = r(y_0) > 0$ e $\tau_0 = \tau(y_0) > 0$ tais que para qualquer $x_0 \in B_{E_1}(y_0, r_0)$ a única ε -solução existe in $[0, \tau_0]$. Sendo $\bar{K}$ um conjunto compacto de E_1 podemos escolher $y_1, \dots, y_p \in \bar{K}$ de modo que $K \subset \cup B_{E_1}(y_i, r(y_i))$. Afirmamos que o valor $\tau_0 = \min\{\tau(y_i) : 1 \leq i \leq n\}$ é o tempo de existência desejado. De fato, dado $x \in K$, $x \in B_{E_1}(y_j, r(y_j))$ para algum $j = 1, \dots, p$ e assim obtemos $x(t, x_0)$ a ε -solução definida em $[0, \tau_j]$ e da escolha acima o resultado segue. $\square$

Para a próxima proposição precisaremos da seguinte análise.

Lema 5.3.2. *Seja $-A$ é operador setorial em X . Então, para $a > 0$ temos que $-\tilde{A} = -aA$ é também setorial.*

Adicionalmente, se $\{(\tilde{E}_\alpha, \tilde{A}_\alpha) : \alpha \geq -m\}$ é a escala de Banach de ordem m gerada por $(E, \tilde{A})$, então $\|x\|_{\tilde{E}_\alpha} \doteq \|x\|_{\tilde{A}} = a^\alpha \|x\|_\alpha$.

Demonstração. Seja $\Sigma_{c, \varphi}$, o setor de vértice c e ângulo φ , que contém $\rho(A)$. Note que, $-aA$ é setorial com setor, $\Sigma_{ac, \varphi}$ e a estimativa resolvente contínua válida para todo $\lambda \in \Sigma_{ac, \varphi}$.

Para a segunda afirmativa, note que para $j \geq -m$ inteiro e $x \in E_j$ temos

$$\|x\|_{\tilde{A}} = \|(aA)^j x\|_E = a^j \|x\|_j.$$

Seja $\alpha \in (j, j+1)$, como E_α e $\tilde{E}_\alpha$ são espaços de interpolação exatos com relação aos pares (E_j, E_{j+1}) e $(\tilde{E}_j, \tilde{E}_{j+1})$, respectivamente, e a identidade $I_j : E_j \rightarrow \tilde{E}_j$ tem norma a^j , temos que

$$\|x\|_{\tilde{A}} \leq (a^j)^{1-(\alpha-j)} (a^{j+1})^{\alpha-j} \|x\|_\alpha.$$

Assim, $\|x\|_{\tilde{A}} \leq a^\alpha \|x\|_\alpha$. Agora, como a inversa de I_j também é limitada com norma a^{-j} , obtemos a desigualdade recíproca de maneira completamente análoga. $\square$

Proposição 5.3.3. *Nas condições do Teorema 5.2.4, se tivermos que $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$, então r pode ser escolhido arbitrariamente grande. Isto é, o tempo de existência é uniforme em conjuntos limitados de E_1 .*

Demonstração. Primeiramente defina $y(t) = x(at)$, para algum $a < 1$. A equação para y é $\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{f}(t, y)$ onde $\tilde{f}(t, x) = af(at, x)$ e $\tilde{A} = aA$. Além disso, note que $x(t)$ é uma solução da equação original $(0, \tau_0]$ se, e somente se, $y(t)$, $t \in [0, \tau_0/a]$ é uma solução da nova equação. Sendo $-A$ setorial, temos que $-aA$ é também setorial. logo para estarmos nas hipóteses

do Teorema 5.2.4, basta provarmos que $\tilde{f} \in \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{v}} \cdot)$ para alguma $\tilde{\mathbf{v}}$. De fato, do cálculo

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(t, y)\|_{\tilde{E}_{\gamma(\varepsilon)}} &= a^{\gamma(\varepsilon)+1} \|f(at, y)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} \\ &\leq a^{\gamma(\varepsilon)+1-\rho(1+\varepsilon)} c \left(\mathbf{v}(at) a^{\rho(1+\varepsilon)} (at)^{-\gamma(\varepsilon)} + \|y\|_{\tilde{E}_{1+\varepsilon}}^\rho \right) \\ &\leq a^{\gamma(\varepsilon)+1-\rho(1+\varepsilon)} c \left(\tilde{\mathbf{v}}(t) t^{-\gamma(\varepsilon)} + \|y\|_{\tilde{E}_{1+\varepsilon}}^\rho \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

e de maneira análoga podemos fazer as estimativas da propriedades Lipschitz e podemos escolher $\tilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(at) a^{\rho(1+\varepsilon)-\gamma(\varepsilon)}$. Logo, $\tilde{A}$ é setorial e $\tilde{f} \in \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{v}}(\cdot))$ e podemos aplicar a parte de existência do Teorema 5.2.4. Ou seja, podemos obter um número positivo $\tilde{r}$ de maneira que as conclusões do teorema ainda são válidas. Mais precisamente, de (5.13), obtemos que

$$\tilde{r} = \frac{1}{4\tilde{M}(8\tilde{c}\tilde{M}B_\varepsilon^\varepsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}}$$

onde $\tilde{r}, \tilde{c}$ e $\tilde{M}$ são as constantes relacionadas as novas equações. Vamos relacionar $\tilde{r}, \tilde{c}, \tilde{M}$ com r, c e M da equação original. Denote por $\tilde{E}_\alpha$ os espaços obtidos na escala gerada por $(E, \tilde{A})$. Do lema anterior, temos que $\|\cdot\|_{\tilde{E}_\alpha} = a^\alpha \|\cdot\|_{E_\alpha}$ e assim

$$t^{\alpha-\beta} \|e^{aAt} x\|_{\tilde{E}_\alpha} = a^\beta (at)^{\alpha-\beta} \|e^{Aat} x\|_{E_\alpha} \leq M a^\beta \|x\|_{E_\beta} = M \|x\|_{\tilde{E}_\beta},$$

que implica que $\tilde{M} = M$. Agora, de (5.26) segue que $\tilde{c} = a^{\gamma(\varepsilon)-\rho\varepsilon+1-\rho} c$. Juntando os fatos, obtemos que

$$\tilde{r} = \frac{1}{4\tilde{M}(8\tilde{c}\tilde{M}B_\varepsilon^\varepsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}} = \frac{a^{(-\gamma(\varepsilon)-1+\rho+\rho\varepsilon)/(\rho-1)}}{4M(8cMB_\varepsilon^\varepsilon)^{\frac{1}{\rho-1}}} = ra^{\frac{\rho\varepsilon-\gamma(\varepsilon)}{\rho-1}+1}.$$

Isto implica que $\|y_0 - x_0\|_{\tilde{E}_1} < \tilde{r}$ existe $\tilde{\tau}_0$ tal que a solução de $\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{f}(t, x)$ começando em x_0 está definida em $[0, \tilde{\tau}_0]$. Porém,

$$\|y_0 - x_0\|_{\tilde{E}_1} = a \|y_0 - x_0\|_1,$$

logo, se $\|y_0 - x_0\|_1 < ra^{\frac{\rho\varepsilon-\gamma(\varepsilon)}{\rho-1}}$ então $\dot{x} = Ax + f(t, x)$ tem a solução $x(t, x_0) = \tilde{x}(\frac{t}{a}, x_0)$ definida em $[0, a\tilde{\tau}_0]$. Deste modo, como $a > 0$ pode ser escolhido arbitrariamente pequeno e como $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$ vemos que podemos escolher $\tilde{r}$ arbitrariamente grande. Logo, dado $B \subset E_1$ um limitado e x_0 , podemos tomar $a > 0$ tal que $B \subset B_{E_1}(x_0, \tilde{r})$ e assim temos que as solução tem o mesmo intervalo de existência, $[0, a\tau_0]$ em B . Portanto, as soluções coincidem em conjuntos limitados de E_1 para um mesmo intervalo de existência e a proposição está provada. $\square$

Definição 5.3.4. *Seja x uma ε -solução da equação (5.1) definida em $[0, \tau_0]$.*

- Dizemos que $\tilde{x}$ é uma **continuação** de x se está definida em $[0, \tau_1)$ com $\tau_1 > \tau_0$, $\tilde{x}$ coincide com x em $[0, \tau_0)$ e $\tilde{x}(t)$ satisfaz (5.3) para todo $t \in [0, \tau_1)$.
- Uma solução x é dita um **solução maximal**, se ela não admite continuação, ou seja, se está definida num intervalo maximal de existência.

Vemos abaixo que sempre podemos obter uma solução maximal.

Proposição 5.3.5. *Assuma que A e f são como no Teorema 5.2.4. Dado $x_0 \in E_1$ existe uma única solução maximal $x : [t_0, \tau_{\max}) \rightarrow E_1$ de (5.1).*

Demonstração. Considere

$$\mathcal{J} = \{t_\varphi : \text{existe uma solução } \varphi \text{ de 5.1 definida em } [0, t_\varphi)\}.$$

Agora, escreva

$$I_m \doteq \bigcup_{t \in \mathcal{J}} [0, t)$$

e defina para $t \in I_m$, $\tilde{x}(t) = \varphi(t)$, para φ tal que $t \in [0, t_\varphi)$. Provemos que $\tilde{x}$ está bem definida em I_m . Com efeito, se $t \in [0, t_{\varphi_1}) \cap [0, t_{\varphi_2})$ podemos assumir sem perda de generalidade que $t_{\varphi_2} > t_{\varphi_1}$ e pela unicidade de ε -solução $\varphi_2(t) = \varphi_1(t)$ donde segue a boa definição de $\tilde{x}$.

Vemos também que $\tilde{x}$ é uma ε -solução maximal, desde que qualquer outra solução terá seu intervalo de definição contido em I_m . $\square$

Definição 5.3.6. *Com o resultado acima podemos definir o tempo de **existência maximal** como*

$$\tau_m \doteq \sup\{t_\varphi : \text{existe uma solução } \varphi \text{ de 5.1 definida em } [0, t_\varphi)\}.$$

Observação 39. *O tempo de existência sempre existe pois o conjunto acima é não vazio. Note também que τ_m pode ser infinito. Assim, se o conjunto $\mathcal{J}$ for limitado teremos $I_m = [0, \tau_m)$ e caso contrário $I_m = [0, \infty)$.*

A seguinte proposição a respeito de continuação de soluções dá condições para se obter $\tau_m = \infty$.

Proposição 5.3.7. *Sejam $f \in \mathcal{F}(V(\cdot))$ e $x(\cdot, x_0)$ a ε -solução começando em x_0 com o tempo maximal de existência $\tau_m < \infty$. Então*

$$\lim_{t \rightarrow \tau_m^-} \|x(t, x_0)\|_{1+\delta} = \infty, \quad \forall \delta \in (0, \varepsilon).$$

Adicionalmente, caso $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$, então a equação acima vale também para $\delta = 0$.

Demonstração. Primeiramente note que se f é ε -regular relativa ao par (E_1, E_0) com $\gamma(\varepsilon) \geq \rho\varepsilon$, tomando $\varepsilon^* = \delta - \varepsilon > 0$, afirmamos que f é aplicação ε -regular relativa ao par $(E_{1+\delta}, E_\delta)$. De fato, para $\gamma(\varepsilon^*) = \gamma(\varepsilon) - \delta$ temos que

$$\gamma(\varepsilon^*) \geq \rho\varepsilon - \delta > \rho\varepsilon - \rho\delta = \rho\varepsilon^*,$$

onde na última desigualdade usamos o fato $\rho > 1$.

Assim, $E_{1+\varepsilon} = E_{1+\delta+\varepsilon^*}$ e $E_{\gamma(\varepsilon)} = E_{\gamma(\varepsilon^*)+\delta}$ de onde segue a afirmação.

Logo, graças a afirmação anterior f é ε^* -regular relativa ao par $(E_{1+\delta}, E_\delta)$ com $\gamma(\varepsilon^*) > \rho\varepsilon^*$ e podemos provar a proposição também para o caso em que $\delta = 0$.

Suponha que $\|x(t_n, x_0)\|_{1+\delta} \leq K$, para algum $K > 0$ e certa sequência $\{t_n\}$ de números reais convergindo para τ_m a direita. Deste modo, pela Proposição 5.3.3 para o par $(E_{1+\delta}, E_\delta)$, com $0 \leq \delta < \varepsilon$, considerando o limitado $B \doteq B_{E_{1+\delta}}(0, K)$ sabemos que existe τ_B tempo de existência para qualquer condição inicial dada em B .

Como τ_m é maximal não existe a possibilidade $\tau_B > \tau_m$ e $x_0 \in B$ ². Portanto, lidemos com o caso $\tau_B \leq \tau_m$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\tau_m - t_{n_0} < \tau_B$. Assim, $0 \leq \tau_m - \tau_B < t_{n_0}$ e $\tau_m < \tau_B + t_{n_0}$. Considere agora o problema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= Au + f(t + t_{n_0}, u) \\ u(0) &= x(t_{n_0}, x_0). \end{aligned} \tag{5.27}$$

Pelo Teorema de existência e unicidade, obtemos uma ε -solução u definida em $(0, \tau_B]$.

Deste modo, conseguimos definir $\bar{u}(t) = x(t, x_0)$ para todo $t \in [0, t_{n_0}]$ e $\bar{u}(t) = u(t - t_{n_0}, x(t_{n_0}))$ para $t \in [t_{n_0}, \tau_B + t_{n_0}]$, que é uma continuação para x uma contradição já que x é maximal e assim o resultado segue. $\square$

Observação 40. Note que, podemos utilizar a proposição acima da seguinte maneira. Seja $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$ e $x(\cdot, x_0)$ a ε -solução começando em x_0 com o tempo maximal de existência τ_m e

$$\lim_{t \rightarrow \tau_m^-} \|x(t, x_0)\|_{1+\delta} < K \quad \text{para algum } \delta \in (0, \varepsilon),$$

então $\tau_m = \infty$.

No caso em que $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$ basta que $\lim_{t \rightarrow \tau_m^-} \|x(t, x_0)\|_1 < K$, para obtermos $\tau_m = \infty$.

5.4 Regularização de soluções

Nesta seção procuramos condições de maneira que a solução que encontramos possa de fato satisfazer a equação (5.10). Porém, mesmo satisfazendo a equação abstrata,

² caso x_0 não estiver, basta tomar a união, ainda será um limitado e depois disso tome τ_B

nas aplicações gostaríamos de obter soluções clássicas para os problemas tratados. Para isto precisaremos do Teorema 5.4.2 que fundamenta argumentos de “bootstrapping” que veremos no Capítulo 6.

Lema 5.4.1. *Assuma as condições do teorema anterior. Sejam $0 < \alpha < 1$ e $0 < \theta < 1 - \alpha$, então para todo $0 \leq t \leq 1$ vale*

$$\|(e^{Ah} - I)e^{At}\|_{\mathcal{L}(E_\alpha)} \leq \frac{K}{\theta} h^\theta t^{-\theta}$$

Demonstração. Para todo $x \in E_\alpha$ podemos escrever

$$(e^{Ah} - I)e^{At}x = \int_0^h A e^{As} e^{At} x ds$$

e assim

$$\|(e^{Ah} - I)e^{At}x\|_\alpha \leq \int_0^h \|e^{As} e^{At}x\|_{\alpha+1} ds \leq \int_0^h M s^{\theta-1} \|e^{At}x\|_{\alpha+\theta} \leq \frac{K}{\theta} h^\theta t^{-\theta} \|x\|_\alpha.$$

□

Teorema 5.4.2. *Seja $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$, com $t \rightarrow f(t, x)$ sendo uma aplicação de $(0, \infty)$ para $E_{\gamma(\varepsilon)}$, localmente Hölder contínua, uniformemente para x em conjuntos limitados de $E_{1+\varepsilon}$, isto é, se U é um conjunto limitado qualquer de qualquer ponto de $E_{1+\varepsilon}$ existe vizinhança $V \subset U$ e constantes $K, \eta > 0$, tais que quando (τ_1, x_1) e (τ_2, x_2) estão em V*

$$\|f(\tau_1, x_1) - f(\tau_2, x_2)\|_{\gamma(\varepsilon)} \leq K(|\tau_1 - \tau_2|^\eta + \|x_1 - x_2\|_{1+\varepsilon}^\eta).$$

Nestas condições, se $x_0 \in E_{1+\varepsilon}$ e $x : [0, \tau_0] \rightarrow E_{1+\varepsilon}$ é contínua e satisfaz a fórmula da variação das constantes, ou seja,

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}f(s, x(s))ds, \quad (5.28)$$

então $x \in C^1([0, \tau_0], E_{\gamma(\varepsilon)}) \cap C([0, \tau_0], E_{1+\gamma(\varepsilon)})$ e $x(\cdot, x_0)$ é uma solução estrita de (5.10), ou seja, satisfaz de fato o PVI (5.10).

Demonstração. Note que, como $x(\cdot)$ satisfaz (5.28), temos para $0 \leq t < t+h < \tau_0$ que

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)}f(s, x(s))ds + \frac{1}{h}(e^{Ah} - I)x(t).$$

O termo do meio converge em $E_{\gamma(\varepsilon)}$ para $f(t^+, x(t^+)) = f(t, x(t))$ quando $h \rightarrow 0^+$, logo se o último termo converge em $E_{\gamma(\varepsilon)}$ vamos obter que existe derivada a direita e da continuidade do lado direito da equação concluiremos que $x(t)$ é derivável e que $\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + Ax(t)$ e dessa forma teríamos $x(t) \in E_{\gamma(\varepsilon)+1}$.

Como $\{(t, x(t)) : 0 \leq t \leq \tau_0\}$ é um subconjunto compacto de $(0, \infty) \times E_{1+\varepsilon}$, existe B tal que $\sup_{0 \leq t \leq \tau_0} \|f(t, x(t))\|_{\gamma(\varepsilon)} \leq B$.

Primeiramente mostraremos que $x : (0, \tau_0] \rightarrow E_{1+\varepsilon}$ é Hölder contínua.

Com efeito, para $0 < t \leq t+h \leq \tau_0$,

$$\begin{aligned} x(t+h) - x(t) &= (e^{Ah} - I)[e^{A(t)}x(0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s, x(s))ds] \\ &\quad + \int_t^{t+h} e^{A(t+h-s)}f(s, x(s))ds \end{aligned}$$

Agora, fixe $\alpha = 1 + \varepsilon - \gamma(\varepsilon)$ e tome $0 < \theta < 1 - \alpha$, temos do Lema 5.4.1

$$\begin{aligned} \|x(t+h) - x(t)\|_\alpha &\leq Mh^\theta t^{-\theta} \|x(0)\|_{1+\varepsilon} + \int_0^t Mh^\theta (t-s)^{-\alpha-\theta} Bds \\ &\quad + \int_t^{t+h} M(t+h-s)^{-\alpha} Bds \\ &\leq Kh^\theta t^{-\theta}. \end{aligned}$$

Assim, escolha $\delta = \eta\theta \in (0, 1)$ vemos que $t \mapsto f(t, x(t)) \doteq g(t)$ é contínua em $[0, \tau_0)$ e satisfaz uma condição de Hölder

$$\|g(t+h) - g(t)\|_{\gamma(\varepsilon)} \leq Kt^{-\delta} h^\delta, \quad 0 < t \leq t+h \leq \tau_0,$$

para alguma escolha de K .

Agora, vamos provar que o termo $\frac{1}{h}(e^{Ah} - I)x(t)$ converge em $E_{\gamma(\varepsilon)}$. Com efeito, como para todo $t \in (0, \tau_0]$ temos $e^{At}x_0 \in E_{1+\gamma(\varepsilon)}$ é suficiente provar que

$$G(t) = \int_0^t e^{A(t-s)}g(s)ds$$

toma valores em $E_{\gamma(\varepsilon)+1}$ com $t \rightarrow AG(t)$ contínua em $[0, \tau_0]$, isto é, mostraremos que $h^{-1}(e^{Ah} - I)G(t)$ converge em $E_{\gamma(\varepsilon)}$ quando $h \rightarrow 0^+$, uniformemente para $t_0 \leq t \leq \tau_0$, qualquer que seja $t_0 > 0$. De fato, como

$$\int_h^t e^{A(t+h-s)}g(t)ds = \int_0^{t-h} e^{A(t-s)}g(t)ds,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} h^{-1}(e^{Ah} - I)G(t) &= \int_0^t h^{-1}(e^{Ah} - I)e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds \\ &\quad + h^{-1} \int_0^h e^{A(t+h-s)}g(t)ds - h^{-1} \int_{t-h}^t e^{A(t-s)}g(t)ds \end{aligned}$$

e os dois últimos termos são convergentes quando $h \rightarrow 0^+$ uniformemente em t , para $e^{At}g(t)$ e $g(t)$, respectivamente. Deste modo, se $t \in [t_0, \tau_0]$ basta provar que $\int_0^t h^{-1}(e^{Ah} - I)e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds$ converge para $\int_0^t Ae^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds$, quando $h \rightarrow 0^+$ e que este último está em $E_{\gamma(\varepsilon)}$. Com efeito, graças a condição de Hölder para g temos que a integral

$$\int_0^t \|Ae^{A(t-s)}\|_{\mathcal{L}(E_{\gamma(\varepsilon)})} \|g(t) - g(s)\|_{\gamma(\varepsilon)} ds \leq K \int_0^t (t-s)^{-1+\delta} ds,$$

é finita graças a escolha de δ , donde vemos que $\int_0^t A e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds$ está em $E_{\gamma(\varepsilon)}$. Além disso, como

$$\begin{aligned} & h^{-1} \int_0^t (e^{Ah} - I) e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds - \int_0^t A e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds \\ &= h^{-1} \int_0^t (e^{Ah} - I - hA) e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds \\ &= \int_0^t h^{-1} \int_0^h A(e^{A\sigma} - I) d\sigma e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds. \end{aligned}$$

Assim, para $0 < \beta < \delta$

$$\begin{aligned} & \|h^{-1}(e^{Ah} - I)G(t) - \int_0^t A e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds\|_{\gamma(\varepsilon)} \\ & \leq \int_0^t h^{-1} \int_0^h \|A(e^{A\sigma} - I) d\sigma e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))\|_{\gamma(\varepsilon)} ds \\ & \leq \int_0^t \int_0^h h^{-1} \|A(e^{A\sigma} - I) e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))\|_{\gamma(\varepsilon)} d\sigma ds \\ & \leq \int_0^t h^{-1} h^{\beta+1} \|e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))\|_{\gamma(\varepsilon)+\beta+1} ds \\ & \leq \int_0^t M h^\beta (t-s)^{-\beta-1} \|g(s) - g(t)\|_{\gamma(\varepsilon)} ds \\ & \leq \int_0^t K h^\beta (t-s)^{-\beta-1} s^{-\delta} (t-s)^\delta ds \\ & = h^\beta \int_0^t K (t-s)^{-\beta-1+\delta} s^{-\delta} ds \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} 0, \end{aligned}$$

uniformemente para $t_0 \leq t \leq \tau_0$, já que a última integral é convergente da escolha de β .

Portanto,

$$h^{-1}(e^{Ah} - I)G(t) \rightarrow \int_0^t A e^{A(t-s)}(g(s) - g(t))ds + e^{At}g(t) - g(t)$$

quando $h \rightarrow 0^+$ uniformemente para $t \in [t_0, \tau_0]$ tomando valores em $E_{\gamma(\varepsilon)}$ e a prova está completa. $\square$

Corolário 5.4.3. Se $f \in \mathcal{F}(\mathbf{v}(\cdot))$ e $t \rightarrow f(t, x)$ é uma aplicação de $(0, \infty)$ para $E_{\gamma(\varepsilon)}$, é localmente Hölder contínua, uniformemente para x em conjuntos limitados de $E_{1+\varepsilon}$ e x é a ε -solução, então

$$x \in C^1((0, \tau_0], E_{\gamma(\varepsilon)}) \cap C((0, \tau_0], E_{1+\gamma(\varepsilon)}).$$

Além disso, $x(t)$ satisfaz o PVI (5.10), para todo $t > 0$.

Demonstração. Como x é ε -solução, para todo $t_0 > 0$, $x: [t_0, \tau_0] \rightarrow E_{1+\varepsilon}$ satisfaz as hipóteses do teorema anterior e podemos concluir o resultado desejado. $\square$

5.5 Caso autônomo

Resumindo todos os resultados anteriores para o caso autônomo, ou seja, quando f independe do tempo, enunciamos uma versão completa do Teorema 5.2.4, com todo tipo de informação que conseguimos obter nas seções anteriores deste capítulo.

Teorema 5.5.1. *Suponha que f é independente do tempo e que é uma aplicação ε -regular, para algum $\varepsilon > 0$, relativa ao par (E_1, E_0) . Então, dado $y_0 \in E_1$, existem $r = r(y_0) > 0$ e $\tau_0 = \tau_0(y_0) > 0$ de modo que para qualquer $x_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$ existe uma função contínua $x : [0, \tau_0] \rightarrow E_1$, com $x(0) = x_0$, que é a única ε -solução de*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x), \quad t > 0 \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Esta solução satisfaz

$$x \in C((0, \tau_0], E_{1+\gamma(\varepsilon)}) \text{ e } t^\theta \|x(t, x_0)\|_{E_{1+\theta}} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0, \quad 0 < \theta < \gamma(\varepsilon).$$

Adicionalmente,

- Se $x_0, z_0 \in B_{E_1}(y_0, r)$, então

$$t^\theta \|x(t, x_0) - x(t, z_0)\|_{E_{1+\theta}} \leq C(\theta_0) \|x_0 - z_0\|_1, \quad \forall t \in [0, \tau_0], \quad 0 \leq \theta \leq \theta_0 < \gamma(\varepsilon).$$

- $x(\cdot, x_0)$ é uma solução forte de (5.29) e $x \in C^1((0, \tau_0], E_{\gamma(\varepsilon)}) \cap C((0, \tau_0], E_{1+\gamma(\varepsilon)})$.
- Se $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$, então o tempo de existência é uniforme em conjuntos limitados de E_1 .

As constantes acima dependem do seguinte: $\tau_0 = \tau_0(y_0, A, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M)$,
 $r = r(y_0, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), c, M)$, $C = C(\theta_0, \varepsilon, \rho, \gamma(\varepsilon), M)$.

Demonstração. Basta notar que neste caso que para $v(t) = t^{\gamma(\varepsilon)-\varepsilon}$ temos que $f \in \mathcal{F}(v(\cdot))$. Pela condição de ε -regularidade, obtemos

$$\|f(x) - f(y)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} \leq c \|x - y\|_{E_{1+\varepsilon}} (\|x\|_{E_{1+\varepsilon}}^{\rho-1} + \|y\|_{E_{1+\varepsilon}}^{\rho-1} + v(t)t^{-\gamma(\varepsilon)+\varepsilon}).$$

Agora, tomando acima $y = 0$ em $E_{\varepsilon+1}$, temos

$$\|f(x) - f(0)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} \leq c (\|x\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho + \|x\|_{E_{1+\varepsilon}} + 1),$$

observando que

$$(\|x\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho + \|x\|_{E_{1+\varepsilon}}) \leq (\|x\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho + 1),$$

assim conseguimos obter para $t < 1$

$$\|f(x)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}} \leq \tilde{c} (\|x\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho + t^{\gamma(\varepsilon)} t^{-\gamma(\varepsilon)}) \leq \tilde{c} (\|x\|_{E_{1+\varepsilon}}^\rho + v(t)t^{-\gamma(\varepsilon)}),$$

onde $\tilde{c} = \max(c, \|f(0)\|_{E_{\gamma(\varepsilon)}})$.

Por fim, para obter a regularidade de basta notar que por f ser independente de t , satisfaz uma condição Hölder com $\theta = 1$. E o resultado está provado. $\square$

Definição 5.5.2. *Seja f uma aplicação independente do tempo que é ε -regular para todo ε em um intervalo I relativa ao par (E_1, E_0) , classificamos a não linearidade da seguinte maneira:*

- *Se $I = [0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > 0$ e $\gamma(0) > 0$. Dizemos que f é uma aplicação **subcrítica** relativa a (E_1, E_0) .*
- *Se $I = [0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > 0$ com $\gamma(\varepsilon) = \rho\varepsilon$, $\varepsilon \in I$ e se f não é subcrítica, então dizemos que f é uma aplicação **crítica** relativa a (E_1, E_0) .*
- *Se $I = (0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > 0$ com $\gamma(\varepsilon) = \rho\varepsilon$, $\varepsilon \in I$ e f não é subcrítica nem crítica, então dizemos que f é uma aplicação **duplamente crítica** relativa a (E_1, E_0) .*
- *Se $I = [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > \varepsilon_0 > 0$ com $\gamma(\varepsilon_0) > \rho\varepsilon_0$ e f não sendo subcrítica, crítica ou duplamente crítica, então dizemos que f é uma aplicação **ultra subcrítica** relativa ao par (E_1, E_0) .*
- *Se $I = [\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ para algum $\varepsilon_1 > \varepsilon_0 > 0$ com $\gamma(\varepsilon) = \rho\varepsilon$, $\varepsilon \in I$, e se f são subcrítica, crítica, duplamente crítica ou ultra subcrítica, então dizemos que f é um mapa **ultra crítico** relativo ao par (E_1, E_0) .*

De maneira análoga podemos estender esses conceitos para quaisquer pares do tipo (E_{j+1}, E_j) . Para nós será interessante o caso $j = -1$.

Observação 41. *No caso em que f é subcrítica, note que $f : E_1 \rightarrow E_{\gamma(0)}$, com $\gamma(0) > 0$.*

Se f é crítica, para $\varepsilon = 0$, então $f : E_1 \rightarrow E_0$ e não existe $\alpha > 0$ tal que $f : E_1 \rightarrow E_\alpha$.

Nos últimos dois casos f não é uma aplicação bem definida em $E_{1+\varepsilon}$ para ε arbitrariamente pequeno, é apenas ε -regular para $\varepsilon \geq \varepsilon_0 > 0$.

Caso f é subcrítica ou ultra subcrítica, podemos escolher tempo de existência uniforme em limitados. Porém nos casos remanescentes, ou casos críticos, a principio não se sabe se o tempo de existência é uniforme em limitados em muitos casos é um problema em aberto. (Note que, no argumento utilizado na Proposição 5.3.3 o fato $\gamma(\varepsilon) > \rho\varepsilon$ é extremamente importante na prova, o que não se tem nesses casos críticos).

EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

As equações de Navier-Stokes descrevem o movimento de um fluido em Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^N$, com $N = 2$ ou 3 . Dados uma posição $x \in \Omega$ e um tempo $t \geq 0$ queremos encontrar um campo velocidade $u(x, t) = (u^1(x, t), \dots, u^n(x, t)) \in \mathbb{R}^N$ e a pressão $\pi(x, t) \in \mathbb{R}$. Fixemos então $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira suave. As **equações de Navier-Stokes** são dadas por

$$\begin{aligned} u_t^i + \sum_{k=1}^N u^k \partial_k u^i &= \Delta u^i - \partial_i \pi + f_i(t), \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div}(u) &= \sum_{j=1}^N \partial_j u^j = 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $\partial_i = \partial / (\partial x_i)$, $\Delta = \sum_{j=1}^N \partial_{jj}$ o **Operador de Laplace**, para cada $i = 1, \dots, N$ e com condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$.

Faça, $\Delta u \doteq (\Delta u^1, \dots, \Delta u^N)$ e

$$(u \cdot \nabla)u \doteq \left(\sum_{k=1}^N u^k \partial_k u^1, \dots, \sum_{k=1}^N u^k \partial_k u^N \right),$$

deste modo, podemos escrever as equações de Navier-Stokes como um sistema de equações em $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u - \nabla \pi + f(t) - (u \cdot \nabla)u, \quad x \in \Omega \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \quad x \in \Omega \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde $u : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ é o campo velocidade, $\pi : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é a pressão e $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$ a força externa.

Vamos trabalhar agora com o modelo (6.2) com o objetivo de tratá-lo com a teoria abstrata desenvolvida no restante do trabalho.

Neste capítulo, considere $p \in (1, \infty)$ e p^* seu expoente conjugado, isto é, $1/p + 1/p^* = 1$.

6.1 Projeção de Leray

Note que, em (6.2), existe uma condição de $\operatorname{div} u = 0$, que muitas vezes é dita **condição de incompressibilidade** do fluido. Para lidar com essa condição no nosso contexto, vamos resolver a equação num espaço de **divergência nula**, o qual definiremos a seguir.

Nesta seção iremos exibir uma decomposição para o espaço $L^p(\Omega)^N$ que diz basicamente que todo campo vetorial neste espaço se escreve de maneira única como soma de dois vetores, um deles com divergência zero e o outro sendo um campo gradiente.

Faremos a construção da projeção de Leray como em (FUJIWARA; MORIMOTO, 1977). Alguns resultados técnicos serão omitidos e podem ser encontrados em (FUJIWARA; MORIMOTO, 1977).

Lema 6.1.1. *Seja $v \in L^p(\Omega)^N$ tal que $\operatorname{div} v \in L^p(\Omega)$ e denote $\Gamma = \partial\Omega$ a fronteira do domínio Ω . Então, a componente normal à fronteira de v , digamos $(v_n)_\Gamma$ existe e pertence a $W^{-1/p,p}(\Gamma)$. Além disso, existe C tal que*

$$\|(v_n)_\Gamma\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)} \leq C(\|v\|_{L^p(\Omega)^N} + \|\operatorname{div} v\|_{L^p(\Omega)}).$$

Demonstração. Ver (FUJIWARA; MORIMOTO, 1977) páginas 686-692. $\square$

Agora construiremos um operador linear P_p em $L^p(\Omega)^N$ e provaremos algumas de suas propriedades. Seja u um elemento qualquer de $L^p(\Omega)^N$.

Considere o problema

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_1 &= \operatorname{div} u, \text{ em } \Omega, \\ \varphi_1 &= 0, \text{ em } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Utilizando que $\operatorname{div} u \in W^{-1,p}(\Omega)$ e os resultados de (LIONS; MAGENES, 1961) páginas 39-101, sabemos que o problema (6.3) possui única solução $\varphi_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e que existe $C > 0$ de modo que

$$\|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|\operatorname{div} u\|_{W^{-1,p}(\Omega)}.$$

Assim,

$$\|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C'\|u\|_{L^p(\Omega)^N}, \tag{6.4}$$

$$u - \nabla \varphi_1 \in L^p(\Omega)^N,$$

por (6.3), temos

$$\operatorname{div}(u - \nabla \varphi_1) = 0.$$

Graças ao Lema 6.1.1, sabemos que a componente normal à fronteira de $u - \nabla \varphi_1$ está em $W^{-1/p,p}(\Gamma)$. Denotaremos por $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}$ a componente normal de $\nabla \varphi_1$ em Γ .

Considere agora o problema

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_2 &= 0, \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} &= (u_n)_\Gamma - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \text{ em } \Gamma. \end{aligned} \quad (6.5)$$

É conhecido que o problema (6.5) possui única solução $\varphi_2 \in W^{1,p}(\Omega)$, a menos de constante, satisfazendo

$$\|\varphi_2\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C' \|(u_n)_\Gamma - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}\|_{W^{-1/p,p}(\Gamma)},$$

veja (LIONS; MAGENES, 1962) páginas 1-44. Novamente pelo Lema (6.1.1) e por (6.4), obtemos

$$\|\varphi_2\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C' \|u - \nabla \varphi_1\|_{L^p(\Omega)^N} \leq C'' \|u\|_{L^p(\Omega)^N}. \quad (6.6)$$

Agora, estamos prontos para definir a projeção P_p . Para cada $u \in L^p(\Omega)^N$, tome φ_1 a solução do problema (6.3) e φ_2 a solução, a menos de constante, do problema (6.5) e escreva $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in W^{1,p}(\Omega)$. Defina $P_p u = u - \nabla \varphi$ ¹ Logo, $\operatorname{div}(P_p u) = 0$ e a componente normal $(P_p u)_n = 0$ em Γ . Reciprocamente, se u é tal que $\operatorname{div} u = 0$ e $(u_n)_\Gamma = 0$, então $P_p u = u$. Portanto, $P_p u = u$, para todo $u \in P_p(L^p(\Omega)^N)$.

Note também que P_p é um operador limitado em $L^p(\Omega)^N$. De fato,

$$\begin{aligned} \|P_p u\|_{L^p(\Omega)^N} &\leq \|u - \nabla(\varphi_1 + \varphi_2)\|_{L^p(\Omega)^N} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)^N} + \|\nabla \varphi_1\|_{L^p(\Omega)^N} + \|\nabla \varphi_2\|_{L^p(\Omega)^N} \\ &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)^N} + \|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|\varphi_2\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\leq K \|u\|_{L^p(\Omega)^N}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade foi utilizado (6.4) e (6.6). Assim, obtemos o seguinte lema:

Lema 6.1.2. *O operador P_p é um operador limitado em $L^p(\Omega)^N$. Além disso, $P_p(L^p(\Omega)^N)$ é um subespaço fechado em $L^p(\Omega)^N$, em particular é um espaço de Banach com a norma induzida.*

Demonstração. A primeira afirmativa segue do que foi feito acima, portanto basta provar que $P_p(L^p(\Omega)^N)$ é um subespaço fechado. Com efeito, seja $u \in \overline{P_p(L^p(\Omega)^N)}$, logo existe $\{u_k\} \subset L^p(\Omega)^N$ tal que $u = \lim_k P_p(u_k)$. Assim, a componente normal de u em Γ , u_n é nula e u possui divergente nulo, isto prova que $u = P_p u$ e o resultado segue. $\square$

¹ Note que, φ é única a menos de constante, mas $\nabla \varphi$ é unicamente determinado.

A seguir um importante resultado a respeito da projeção que construímos.

Teorema 6.1.3. *Para todo $1 < p < \infty$, o operador $P_p \in \mathcal{L}(L^p(\Omega)^N)$ e seu operador dual $(P_p)^*$ é P_{p^*} ,*

Demonstração. Provamos no lema anterior que $P_p \in \mathcal{L}(L^p(\Omega)^N)$. Sendo $(L^p(\Omega)^N)^* = L^{p^*}(\Omega)^N$, temos que $(P_p)^* \in \mathcal{L}(L^{p^*}(\Omega)^N)$ e portanto resta provar que os operadores $(P_p)^*$ e P_{p^*} coincidem num subespaço denso de $L^{p^*}(\Omega)^N$. Com efeito, sejam $u, v \in C_0^\infty(\Omega)^N$. Neste caso, temos que $P_{p^*}v = v - \nabla \varphi$, para alguma $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)^N$ e assim

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} P_p u \cdot (v - P_{p^*}v) dx &= \int_{\Omega} P_p u \cdot \nabla \varphi dx \\ &= \int_{\Gamma} (P_p u)_n \varphi d\sigma - \int_{\Omega} \operatorname{div} P_p u \cdot \varphi dx \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega} P_p u \cdot v dx = \int_{\Omega} P_p u \cdot P_{p^*}v dx$$

e analogamente, obtemos que

$$\int_{\Omega} u \cdot P_{p^*}v dx = \int_{\Omega} P_p u \cdot P_{p^*}v dx$$

de onde concluímos que

$$\int_{\Omega} u \cdot P_{p^*}v dx = \int_{\Omega} P_p u \cdot v dx. \quad (6.7)$$

Agora como $P_p \in \mathcal{L}(L^p(\Omega)^N)$ e $C_0^\infty(\Omega)^N$ é denso em $L^p(\Omega)^N$ e portando obtemos que (6.7) é válida para todo $u \in L^p(\Omega)^N$ e portanto obtemos que $v \in D((P_p)^*)$ e $(P_p)^*v = P_{p^*}v$, ou seja, estes operadores contínuos coincidem num denso e portanto são iguais, como queríamos. $\square$

Como simples consequência do teorema anterior e da definição de operador dual notamos a seguinte relação.

Corolário 6.1.4. *Sejam $1 < p < \infty$, p^* seu conjugado, $u \in L^p(\Omega)^N$ e $v \in L^{p^*}(\Omega)^N$, então*

$$\int_{\Omega} u \cdot P_{p^*}v dx = \int_{\Omega} P_p u \cdot v dx.$$

Definição 6.1.5.

- Definimos o espaço de **divergência nula em $L^p(\Omega)^N$** como

$$L_{\sigma}^p(\Omega)^N \doteq P_p(L^p(\Omega)^N).$$

- O conjunto dos **campos suaves de divergência nula** é definido como

$$\mathcal{C}_{0,\sigma}^\infty = \{u \in C_0^\infty(\Omega)^N; \operatorname{div} u = 0\}.$$

Pelas informações acima, obtemos a seguinte observação:

Observação 42.

- Se $u \in L^p_\sigma(\Omega)^N$, então $P_p u = u$.
- Se $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, então $P_p \nabla \varphi = 0$.

De acordo com (FUJIWARA; MORIMOTO, 1977), é válida a seguinte decomposição para os espaços $L^p(\Omega)^N$:

Teorema 6.1.6. *O espaço de divergência nula é caracterizado por $L^p_\sigma(\Omega)^N = \overline{\mathcal{C}_{0,\sigma}^\infty}^{\|\cdot\|_{L^p(\Omega)^N}}$. Além disso, é válida a seguinte decomposição*

$$L^p(\Omega)^N = L^p_\sigma(\Omega)^N \oplus \{\nabla \varphi : \varphi \in W^{1,p}(\Omega)\},$$

as vezes chamada de **Decomposição de Helmholtz**.

Demonstração. Para a prova nos referimos a (FUJIWARA; MORIMOTO, 1977) página 697-698. $\square$

Observação 43. *Dado $u \in L^p(\Omega)$, existe uma única maneira de escrever $u = u_1 + u_2$ com $u_1 \in L^p_\sigma(\Omega)^N$ e $u_2 \in \{\nabla \varphi : \varphi \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})\}$, em outras palavras, se $u \in L^p(\Omega)^N$ existe única $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$, a menos de constante, tal que $u_1 = u - \nabla \varphi$ é um campo em $L^p_\sigma(\Omega)^N$.*

A partir da construção acima iremos fixar a projeção P_p construída acima da seguinte maneira.

Definição 6.1.7. *A **Projeção de Leray** em $L^p(\Omega)^N$ é a projeção natural definida a partir da decomposição acima, isto é,*

$$P_p : L^p(\Omega)^N \rightarrow L^p_\sigma(\Omega)^N$$

pondo para cada $u \in L^p(\Omega)^N$, $P_p u \doteq u - \nabla \varphi$, para φ é dado acima.

Note que, ao aplicarmos a projeção de Leray em (6.2) de maneira heurística, nos livramos da condição de incompressibilidade e obtemos uma equação em $L^p_\sigma(\Omega)^N$

$$\begin{aligned} u_t &= A_p u + N(u) + f_\sigma, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{6.8}$$

onde $A_p = P_p \Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet homogênea, $N(u) = -P_p(u \cdot \nabla)u$ e $f_\sigma = P_p f$.

Nas próximas seções vamos lidar com todos estes termos para poder provar um resultado de boa colocação local para (6.8), na verdade para uma “formulação fraca” desta equação.

Observação 44. *Observe que, a construção da Projeção de Leray nos garante que os problemas (6.8) e (6.2) são equivalentes.*

6.2 Operador de Stokes

Nesta seção definiremos o Operador de Stokes no contexto dos espaços $L^p(\Omega)^N$ e vamos provar as propriedades necessárias a respeito de geração de semigrupo.

Definição 6.2.1. Definimos o **Operador de Stokes** como sendo a composição de P_p com o operador de Laplace Δ com domínio $D(A_p)$,

$$A_p \doteq P_p \Delta : D(A_p) \subset L_\sigma^p \rightarrow L_\sigma^p,$$

onde $D(A_p) \doteq D(\Delta) \cap L_\sigma^p$ e $D(\Delta) = W^{2,p}(\Omega)^N \cap W_0^{1,p}(\Omega)^N$.

Observação 45. No que se segue, sempre vamos considerar o espaço $L_\sigma^p(\Omega)^N$ como um espaço de Banach, desde que é subespaço fechado, com a norma induzida de $L^p(\Omega)^N$.

Lema 6.2.2. O operador de Stokes é densamente definido, ou seja, $D(A_p)$ é denso em $L_\sigma^p(\Omega)^N$.

Demonstração. Com efeito, dada $f \in L_\sigma^p(\Omega)^N$, pelo Teorema 6.1.6 existe $\{u_n\} \subset \mathcal{C}_{0,\sigma}^\infty$ de modo que $\|f - u_n\|_p \rightarrow 0$. Sendo assim, basta identificar $\mathcal{C}_{0,\sigma}^\infty$ como subconjunto de $D(A_p)$ e o resultado segue. $\square$

Provaremos a seguir ótimas propriedades do operador de Stokes no caso em que $p = 2$ e a utilizaremos para garantir que A_p é o gerador de semigrupo analítico, para $p \geq 2$.

Teorema 6.2.3. O operador de Stokes A_2 é auto-adjunto em $L_\sigma^2(\Omega)^N$.

Demonstração. Provemos primeiramente que é simétrico. De fato, note primeiramente que se $u, v \in D(A_2)$ vale $(u, \Delta v) = \sum_{i=1}^N u_i \Delta v_i = \sum_{i=1}^N v_i \Delta u_i = (\Delta u, v)$ e Δ neste caso é o operador Laplaciano usual, o qual é sabido que é simétrico. Ainda para $u, v \in D(A_2)$ temos que $P_2 u = u$, $P_2 v = v$ e como $P \doteq P_2$ e Δ são simétricos, temos

$$\langle Au, v \rangle = \int_\Omega P \Delta u \cdot v = \int_\Omega \Delta u \cdot v = \int_\Omega u \cdot \Delta v = \int_\Omega u \cdot P \Delta v = \langle u, Av \rangle,$$

e para algum $\xi > 0$,

$$\langle A_2 u, u \rangle = - \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq -\xi \int_\Omega |u|^2,$$

ou seja, $\langle A_2 u, u \rangle \leq -\xi \|u\|_2^2$. Portanto, A_2 é simétrico e limitado superiormente.

Sendo assim, para concluir que A_2 é auto-adjunto, basta provar que A_2 é sobrejetor. Para isto, vamos mostrar primeiramente que $P_2(C_0^\infty(\Omega)^N) \subset R(A_2)$, onde $R(A_2)$ é a imagem

do operador A_2 . Com efeito, seja $f \in C_0^\infty(\Omega)^N$, por (LADYZHENSKAYA, 1969) [3.5], sabemos que existem única $u \in W^{2,2}(\Omega)^N$ e $\pi \in W^{1,2}(\Omega)$ tais que

$$\begin{aligned}\Delta u - \nabla \pi &= f \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \text{ em } \Omega, \\ u &= 0 \text{ em } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Aplicando P_2 na primeira equação, obtemos $P_2 f = A_2 u$ e concluímos que A_2 injetor² e que $P_2(C_0^\infty(\Omega)^N) \subset R(A_2)$ como queríamos.

Agora, como $C_0^\infty(\Omega)^N$ é denso em $L^2(\Omega)^N$ e P_2 é contínua temos que

$$L_\sigma^2 = P_2(\overline{C_0^\infty(\Omega)^N}) \subset \overline{P_2(C_0^\infty(\Omega)^N)} \subset \overline{R(A_2)}.$$

Logo, $R(A_2)$ é densa e como é subconjunto fechado, concluímos a sobrejetividade. Portanto, graças ao Teorema 2.1.9 obtemos que A_2 é auto-adjunto. $\square$

Teorema 6.2.4. *O negativo do operador de Stokes $-A_2$ é setorial em L_σ^2 e portanto A_2 gera semigrupo analítico.*

Demonstração. Com efeito, temos que A_2 é auto-adjunto e da prova do Teorema anterior vimos que

$$\langle A_2 u, u \rangle \leq -\xi \|u\|_2.$$

Dessa forma, o resultado segue do Teorema 2.2.12. $\square$

Observação 46. *Lembre-se que no 2.2.12, localizamos a imagem numérica do operador em uma semi-reta $(-\infty, -\xi]$ e isso nos permite obter uma estimativa resolvente num setor $\Sigma_{-\xi}$, o qual daqui em diante denotaremos apenas por Σ .*

Provaremos que se $p > 2$ a estimativa resolvente obtida para o caso $p = 2$ continuará válida e também concluiremos que $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\xi]$ está contido no resolvente do operador A_p , isso será o objetivo principal para concluir que $-A_p$ é também operador setorial.

Não fizemos o cálculo da imagem numérica para A_p com $p > 2$ para a prova da setorialidade como é esperado, pois o operador de Stokes por conta da presença da Projeção P_p apresenta certas dificuldades. Porém através de outras condições de fronteira, “Navier-type boundary conditions” é possível fazer esse cálculo, veja (BABA; AMROUCHE; ESCOBEDO, 2016).

Precisaremos do seguinte resultado para o problema de Navier-Stokes linear, o qual enunciaremos de maneira menos geral do que é encontrado em (WAHL, 1981).

A prova do teorema abaixo pode ser encontrada em (SOLONNIKOV, 1975).

² Segue da unicidade do problema 6.9.

Teorema 6.2.5. *Seja $p > 2$, $T > 0$, $f \in L^p((0, T), L^p(\Omega)^N)$, $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)^N \cap L^p_\sigma(\Omega)^N$. Então existe única $u \in D(A_p)$ com $\dot{u} \in L^p((0, T), L^p(\Omega)^N)$ e uma $\pi \in L^p((0, T), L^p(\Omega)^N)$, a qual é única a menos de constante, com $\nabla \pi \in L^p((0, T), L^p(\Omega)^N)$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} \dot{u} - \Delta u + \nabla \pi &= f, \text{ em } \Omega \text{ e } t > 0 \\ \operatorname{div} u &= 0, \text{ em } \Omega \\ u &= 0, \text{ em } \partial\Omega \\ u(0) &= u_0, \text{ em } \Omega. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Adicionalmente, vale a estimativa

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u'(t)\|_{L^p(\Omega)^N}^p dt + \int_0^T \|u(t)\|_{W^{2,p}(\Omega)^N}^p dt + \int_0^T \|\nabla \pi(t)\|_{L^p(\Omega)^N}^p dt \leq \\ c \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^p(\Omega)^N}^p dt + \int_0^T \|f(t)\|_{L^p(\Omega)^N}^p dt + \|u_0\|_{W^{2,p}(\Omega)^N}^p \right). \end{aligned}$$

No resultado a seguir veremos que A_p gera um semigrupo analítico em $L^p_\sigma(\Omega)^N$. Faremos como foi feito em (WAHL, 1981), Capítulo 3.

Teorema 6.2.6. *O operador de Stokes $-A_p$ é setorial em $L^p(\Omega, \mathbb{C}^N)$, para todo $2 \leq p < \infty$.*

Demonstração. O caso $p = 2$ foi resolvido no Teorema 6.2.4. Suponha $p > 2$, dado $f \in L^p_\sigma(\Omega)^N$ queremos encontrar $u \in D(A_p)$ de modo que

$$(\lambda - A_p)u = f.$$

Como $f \in L^p(\Omega)^N$ e $p > 2$, temos $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, ora, do teorema anterior temos que $-A_2$ é setorial, em especial, para $\lambda \in \Sigma$, onde Σ é um setor que está contido em $\rho(A_2)$ temos que existe único $u \in D(A_2)$ tal que

$$(\lambda - A_2)u = f.$$

Porém, como $2 - N/p \geq 0$ ($N = 3, 4$), pelo Teorema das Imersões de Sobolev, $W^{2,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)^N$ e assim obtemos que $u \in L^p_\sigma(\Omega)^N$ e ainda que

$$-A_2 u = -\lambda u + f \in L^p_\sigma(\Omega)^N.$$

Agora, por (LADYZHENSKAYA, 1969) [3.5], o problema

$$\begin{aligned} -\Delta v + \nabla \pi &= -\lambda u + f \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div} v &= 0 \text{ em } \Omega, \\ v &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \\ v &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{6.11}$$

possui única solução $v \in W^{2,p}(\Omega)^N \cap W_0^{1,p}(\Omega)^N$ e $\pi \in W^{1,p}$, onde π é determinada a menos de constante. Ora, a equação (6.11) está em $L^p(\Omega)^N$ e portanto em $L^2(\Omega)^N$ e portanto podemos aplicar a projeção P_2 obtendo assim

$$P_2 \Delta v = -\lambda u + f = A_2 u.$$

Logo, como $0 \in \rho(A_2)$, concluímos que $u = v$ e portanto que $u \in D(A_p)$

$$A_p v = -\lambda u + f \quad \text{e } v \in W^{2,p}(\Omega)^N \cap L_\sigma^p(\Omega)^N.$$

Assim, $u \in D(A_p)$ e é o único que satisfaz $(\lambda - A_p)u = f$, o que prova que o operador $(\lambda - A_p)$ é bijeção para todo $\lambda \in \Sigma$.

Agora, provaremos uma estimativa resolvente. Sejam $u_0 \in D(A_p)$, $f_0 \in L_\sigma^p(\Omega)^N$ e $\pi_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ tais que

$$\lambda u_0 - \Delta u_0 + \nabla \pi_0 = f_0. \quad (6.12)$$

Multiplicando a equação acima por $e^{\lambda t}$ e escrevendo $u(t, x) = e^{\lambda t} u_0(x)$, $\pi(t, x) = e^{\lambda t} \pi_0(x)$ e $f(t, x) = e^{\lambda t} f_0(x)$, obtemos o seguinte problema

$$u' - \Delta u + \nabla \pi = f,$$

$$\operatorname{div} u = 0$$

$$u(0) = u_0.$$

Graças ao Teorema de Solonnikov 6.2.5, o problema de Stokes linear acima possui únicas soluções $u \in D(A_p)$ e $\pi \in W^{1,p}(\Omega)$, a menos de constante, satisfazendo

$$\int_0^T \|u'(t)\|_p^p dt + \int_0^T \|u(t)\|_{2,p}^p dt \leq c \left(\int_0^T \|u(t)\|_p^p dt + \int_0^T \|f(t)\|_p^p dt + \|u_0\|_{2,p}^p \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} & |\lambda|^p \int_0^T e^{p \operatorname{Re} \lambda t} \|u_0\|_p^p dt + \int_0^T e^{p \operatorname{Re} \lambda t} \|u_0\|_{2,p}^p dt \leq \\ & c \left(\int_0^T e^{p \operatorname{Re} \lambda t} \|u_0\|_p^p dt + \int_0^T e^{p \operatorname{Re} \lambda t} \|f_0\|_p^p dt + \|u_0\|_{2,p}^p \right). \end{aligned}$$

Simplificando,

$$\frac{(e^{p \operatorname{Re} \lambda T} - 1)}{p \operatorname{Re} \lambda} (|\lambda|^p - c) \|u_0\|_p^p + \left(\frac{e^{p \operatorname{Re} \lambda T} - 1}{p \operatorname{Re} \lambda} - c \right) \|u_0\|_{2,p}^p \leq c \frac{(e^{p \operatorname{Re} \lambda T} - 1)}{p \operatorname{Re} \lambda} \|f_0\|_p^p.$$

Agora, vamos tomar $\lambda \in \mathbb{C}$ de modo que $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ e $|\lambda|^p \geq c + 1$. Se $T \geq c + 1$ temos $(e^{p \operatorname{Re} \lambda T} - 1)/p \operatorname{Re} \lambda \geq T \geq c + 1$ e deste modo

$$(|\lambda|^p - c) \|u_0\|_p^p + \left(1 - \frac{c p \operatorname{Re} \lambda}{e^{p \operatorname{Re} \lambda T} - 1} \right) \|u_0\|_{2,p}^p \leq c \|f_0\|_p^p.$$

Ora, da escolha $p \operatorname{Re} \lambda / (e^{p \operatorname{Re} \lambda T} - 1) \geq c + 1$ obtemos

$$\frac{1}{c+1} = 1 - \frac{c}{c+1} \leq 1 - \frac{c p \operatorname{Re} \lambda}{e^{p \operatorname{Re} \lambda T} - 1}.$$

De onde segue que

$$(|\lambda|^p - c)\|u_0\|_p^p + \frac{1}{c+1}\|u_0\|_{2,p}^p \leq c\|f_0\|_p^p.$$

Dessa forma,

$$\|u_0\|_p \leq (c/(|\lambda|^p - c))^{1/p}\|f_0\|_p \leq \frac{\tilde{c}}{|\lambda| + \omega}\|f_0\|_p, \quad (6.13)$$

onde $\omega > 0$ é arbitrário e $\tilde{c} > 0$ é uma constante que depende de c . Para provar a estimativa resolvente desejada teremos que escolher $\omega > 0$ adiante.

Aplicando agora P_p na equação (6.12), obtemos

$$\lambda u_0 - A_p u_0 = f_0. \quad (6.14)$$

Ora, $u_0 = (\lambda - A_p)^{-1}f_0$, desde que $\lambda \in \Sigma$ e de (6.13), vemos que $(\lambda - A_p)^{-1}$ é limitado e portanto $\lambda - A_p$ é um operador fechado, o que implica que A_p é um operador fechado. Agora, o fato de A_p ser fechado juntamente com o que foi feito na primeira parte da prova garante que $\Sigma \subset \rho(A_p)$.

Basta provarmos a estimativa resolvente para algum setor contido em Σ e a prova estará concluída. De fato, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $\operatorname{Re}\lambda > 0$ e $|\lambda|^p \geq c+1$, por (6.13) temos que

$$\|(\lambda - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} \leq \frac{\tilde{c}}{|\lambda| + \omega}. \quad (6.15)$$

Para $|\lambda| \leq (c+1)^{1/p}$, basta utilizar que a aplicação $\rho(A_p) \ni \lambda \mapsto (\lambda - A_p)^{-1}$ é analítica e portanto limitada numa bola, ou seja

$$\sup_{|\lambda| \leq (c+1)^{1/p}} \|(\lambda - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} \leq C.$$

Como

$$C \leq \frac{C(|\lambda| + \omega)}{|\lambda| + \omega} \leq \frac{C_1}{|\lambda| + \omega},$$

podemos escolher $K = \max\{C_1, \tilde{c}\} > 0$ obtendo

$$\|(\lambda - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} \leq \frac{K}{|\lambda| + \omega}, \quad \forall \operatorname{Re}\lambda \geq 0. \quad (6.16)$$

Tome λ com $\operatorname{Re}\lambda = 0$ e escolha ω de modo que cada bola $B_\lambda \doteq B(\lambda, (|\lambda| + \omega)/2K)$ variando no eixo imaginário esteja contida em Σ ³. Logo se $\mu \in B_\lambda$, podemos utilizar a identidade do resolvente e obter

$$\begin{aligned} \|(\mu - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} &\leq \|(\lambda - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} \\ &\quad + |\lambda - \mu| \|(\mu - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} \|(\lambda - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} \\ &\leq \frac{K}{|\lambda| + \omega} + \frac{1}{2} \|(\mu - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(\mu - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} \leq \frac{2K}{|\lambda| + \omega} \frac{|\mu| + \omega}{|\mu| + \omega} \leq \frac{2K+1}{|\mu| + \omega}.$$

³ $\omega/(2K) < \xi$, onde ξ é o mesma constante do Teorema 6.2.4.

Por fim, basta tomar $M = 2K + 1$ e obtemos a estimativa resolvente

$$\|(\lambda - A_p)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_\sigma^p(\Omega)^N)} \leq \frac{M}{|\mu| + \omega}$$

para todo

$$\lambda \in \{\mu \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \mu \geq 0\} \cup \{\mu \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} \mu < 0 \text{ e } |\operatorname{Im} \mu| \geq \tilde{K}(-\operatorname{Re} \mu)\},$$

onde $\tilde{K} = \tilde{K}(\omega, K)$ e por definição o $-A_p$ é setorial. $\square$

Observação 47.

- A partir deste resultado sabemos que A_p gera semigrupo analítico, para todo $2 \leq p < \infty$.
- Em (WAHL, 1981), ele mostra que o item acima é válido para todo $1 < p < \infty$ a menos de $p = 3/2$.

6.3 Formulação “muito fraca” para a equação de Navier-Stokes

Nesta seção reformularemos a equação (6.8) num contexto “fraco”. Na linguagem das escalas de Banach é basicamente “transladar” o problema para uma escala negativa. Para isso, precisamos analisar a equação num contexto analítico funcional na tentativa de escrever cada termo da equação como um funcional linear. Começaremos com o termo não linear $P_p(u \cdot \nabla)u$, o qual será a “chave” na obtenção de um resultado de boa colocação local.

Será de grande utilidade recordamos do produto tensorial em $\mathbb{R}^N$.

Definição 6.3.1. *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^N$ definimos o **produto tensorial** entre u e v por $uv \doteq u \otimes v \doteq (u_i v_j)_{i,j=1}^N$.*

Defina,

$$\operatorname{div}(uu) \doteq \frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 u) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(u_n u) = (\operatorname{div}(u_1 u), \dots, \operatorname{div}(u_n u)).$$

Observação 48. *Note que, caso $\operatorname{div} u = 0$, temos que*

$$(u \cdot \nabla)u = \frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 u) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(u_n u) - \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} u_n \right) u = \operatorname{div}(uu).$$

Lema 6.3.2. *Sejam $u, \phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ suaves com suporte compacto em Ω e $\operatorname{div} \phi = \operatorname{div} u = 0$. Então,*

$$\int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot \phi = - \int_{\Omega} u \otimes u \cdot \nabla \phi,$$

onde no último termo utilizamos a notação de produto de matrizes em $\mathbb{R}^N$, isto é, se A, B são matrizes $N \times N$, então $A \cdot B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.

Demonstração. Fixe $\Gamma = \partial\Omega$, pela observação anterior e pelo Teorema da divergência temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u \cdot \nabla) u \cdot \phi dx &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(uu) \cdot \phi dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(u_1 u), \dots, \operatorname{div}(u_N u)) \cdot (\phi_1, \dots, \phi_N) dx \\ &= - \int_{\Omega} u_1 u \cdot \nabla \phi_1 + \dots + (u_N u) \cdot \nabla \phi_N dx + \int_{\Gamma} \phi_1 (u_1 u)_{\Gamma} + \dots + \phi_N (u_N u)_{\Gamma} d\sigma \\ &= - \int_{\Omega} [u_1 u \ \dots \ u_N u] \cdot [\nabla \phi_1 \ \dots \ \nabla \phi_N] dx + \int_{\Gamma} 0 d\sigma \\ &= - \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_1 u_1 & \dots & u_1 u_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_N u_1 & \dots & u_N u_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x_N} & \dots & \frac{\partial \phi_N}{\partial x_N} \end{bmatrix} dx \\ &= - \int_{\Omega} u \otimes u \cdot \nabla \phi dx, \end{aligned}$$

onde, para cada $i = 1, \dots$, o termo $(u_i u)_{\Gamma}$ é a componente normal do campo $u_i u$ em Γ . $\square$

Seja $m \in \mathbb{N}$ e fixe para todo $1 < p < \infty$ o espaço $E_0^p = L_{\sigma}^p(\Omega)^N$, e portanto a norma em E_0^p é a norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)^N}$. Como vimos anteriormente, A_p é fechado e densamente definido e então podemos considerar a escala de interpolação-extrapolação de ordem m gerada por (E_0^p, A_p)

$$\{(E_{\alpha}^p, A_{p,\alpha}); \alpha \geq -m\}.$$

Como $D(A_p)$ é denso em E_0^p , podemos considerar $(A_p)^{\#}$ o operador dual de A_p . No trabalho de (FUJIWARA; MORIMOTO, 1977) (página 698) temos a seguinte caracterização para o operador dual $(A_p)^{\#} = A_{p^*}$ e $D(A_p^{\#}) = E_1^{p^*}$. Já sabemos que operador dual é sempre fechado em $E_0^{p^*}$ e como $\rho(A_p) = \rho((A_p)^*)$ podemos considerar a escala dual de interpolação-extrapolação gerada por $((E_0^p)^{\#}, (A_p)^{\#})$, a qual pode ser escrita como

$$\{(E_{\alpha}^{p^*}, A_{p^*,\alpha}); \alpha \geq -m\}.$$

Como $1 < p < \infty$, $L_{\sigma}^p(\Omega)^N$ é reflexivo⁴ e graças ao Teorema 4.4.7 vale que

$$E_{-\alpha}^p = (E_{\alpha}^{p^*})^{\#}.$$

Utilizaremos desta última relação para inserir o contexto analítico funcional, para o problema (6.8).

⁴ Na verdade é uniformemente convexo, propriedade que depende apenas da norma

Recordemos que quando aplicamos formalmente a projeção P_p a (6.2) obtemos

$$\begin{aligned} u_t &= A_p u + N(u) + f_\sigma, \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \quad (6.17)$$

onde $A_p = P_p \Delta$ com condição de fronteira de Dirichlet, $N(u) = -P_p(u \cdot \nabla)u$ e $f_\sigma = P_p f$.

Vamos estabelecer o contexto analítico funcional para (6.17). Nossa intenção é de escrever (6.17) na escala (E_0^p, E_{-1}^p) , e utilizar o Teorema abstrato 5.2.4 nesta escala.

Sendo assim, tomando o produto interno da equação acima por $\phi \in C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ e integrando em Ω , obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u \cdot \phi = \int_\Omega A_p u \cdot \phi + \int_\Omega N(u) \phi + \int_\Omega f_\sigma \cdot \phi, \quad t > 0. \quad (6.18)$$

Agora, como $\phi \in L_\sigma^{p*}(\Omega)^N$ temos $P_p^* \phi = \phi$. Além disso, temos

$$\int_\Omega P_p \Delta u \cdot \phi = \int_\Omega \Delta u \cdot \phi = \int_\Omega u \cdot \Delta \phi.$$

Ainda, pelo Lema 6.3.2 temos que

$$\int_\Omega N(u) \cdot \phi = - \int_\Omega (u \cdot \nabla) u \cdot \phi = \int_\Omega u \otimes u \cdot \nabla \phi.$$

Assim,

$$\int_\Omega N(u) \cdot \phi = \int_\Omega u \otimes u \cdot \nabla \phi.$$

Deste modo, obtemos a formulação **muito fraca** da equação de Navier-Stokes

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u \cdot \phi = \int_\Omega u \cdot \Delta \phi + \int_\Omega u \otimes u \cdot \nabla \phi + \int_\Omega f_\sigma \cdot \phi, \quad t > 0. \quad (6.19)$$

Portanto, para utilizar o contexto das escalas de Banach, seguiremos da seguinte maneira. Para cada $u \in L_\sigma^p(\Omega)^N$ podemos definir os funcionais $A_{p,-1}u, N_{-1}(u), f_{\sigma,-1} \in E_{-1}^p$ como os elementos em $E_{-1}^p = (E_{-1}^{p*})^*$ que satisfazem

$$E_1^{p*} \ni \phi \mapsto A_{p,-1}u(\phi) = \int_\Omega u \Delta \phi,$$

$$E_1^{p*} \ni \phi \mapsto N_{-1}(u)(\phi) = \int_\Omega u \otimes u \cdot \nabla \phi,$$

e

$$E_1^{p*} \ni \phi \mapsto f_{\sigma,-1}(\phi) = \int_\Omega f_\sigma \cdot \phi,$$

ou seja, estamos considerando cada termo em (6.17) como um funcional linear de E_1^{p*} em $\mathbb{R}$.

Com isto, (6.2) pode ser escrita em E_{-1}^p como

$$\begin{aligned} u_t &= A_{p,-1}u + N_{-1}(u) + f_{\sigma,-1}, \quad t > 0 \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Assim, encontramos $A_{p,-1}$, com $D(A_{p,-1}) = L_\sigma^p(\Omega)^N$

$$A_{p,-1} : L_\sigma^p(\Omega)^N \subset E_{-1}^p \rightarrow E_{-1}^p$$

o qual é setorial graças aos Teoremas 4.6.8 e 6.2.6.

Uma vez que chegamos a este ponto, a boa colocação local de (6.2) em $L_\sigma^p(\Omega)^N$ se reduz a mostrar que $N_{-1}(\cdot)$ é uma aplicação ε -regular relativa ao par (E_0^p, E_{-1}^p) , desde que $f_{\sigma,-1}$ depende apenas do tempo e portanto basta colocar a condição de $f_{\sigma,-1}$ ser Hölder contínua nessa variável, ver Teorema 5.4.2. Por esse motivo daqui em diante consideraremos $f_{\sigma,-1} = 0$.

Utilizando teoria de interpolação conseguimos o seguinte teorema de imersão sem precisar conhecer precisamente os espaços E_α^p .

Teorema 6.3.3. *Se $1 > \alpha > 0$ e $q = \frac{Np}{N-2\alpha p}$, então é válida a imersão $E_\alpha^p \hookrightarrow L^q(\Omega)^N$.*

Demonstração. Por construção $E_0^p \subset L_\sigma^p(\Omega)^N$ e $E_1^p \subset W^{2,p}(\Omega)^N$ e como A_p é setorial a segunda inclusão é com normas equivalentes. Interpolando estes espaços obtemos $E_\alpha^p \subset H^{2\alpha,p}$ e agora basta utilizar o Teoremas de Imersão 3.7.7. $\square$

Lema 6.3.4. *Sejam u, v vetores em $\mathbb{R}^N$. São válidas as seguintes propriedades:*

1. $(u + v) \otimes w = u \otimes w + v \otimes w$;
2. $|u \otimes v|_{M_N(\mathbb{R})} \leq |u| |v|$;
3. $u \otimes v = (v \otimes u)^t$, onde A^t denota a matriz transposta de $A \in M_N(\mathbb{R})$.

Teorema 6.3.5. *$N_{-1}(\cdot)$ é uma aplicação ε -regular relativa ao par (E_0^p, E_{-1}^p) para todo $p \geq N$, com $\gamma(\varepsilon) = \frac{p-N}{2p} + 2\varepsilon$ e sendo:*

- Duplamente crítico se $p = 2$, i.e., ε -regular para todo $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$;
- Crítico se $p \in \mathbb{N}$ com $p \geq 3$, i.e., ε -regular para todo $\varepsilon \in [0, \frac{1}{4})$;
- Subcrítico se $p > N$, i.e., ε -regular para todo $\varepsilon \in [0, \frac{N}{4p})$.

Demonstração. Dado $u \in E_\varepsilon^p$, vamos encontrar $r > 1$ de modo que $u \in L^{2r}(\Omega)^N$. Com efeito, graças ao Teorema de Imersão 3.7.7 temos que $r = \frac{Np}{2N-4\varepsilon p}$ este é o valor desejado. Da condição de r ser positivo, devemos ter também que $\varepsilon < \frac{N}{2p}$. Como queremos que $r > 1$, obtemos que $\varepsilon > \frac{N(2-p)}{4p}$. Seja r^* o expoente conjugado de r , isto é, $1/r + 1/r^* = 1$, logo $r^* = \frac{Np}{Np-2N+4\varepsilon p}$.

Agora, para provar que N_{-1} é ε -regular, mostremos primeiramente que $N_{-1} : E_\varepsilon^p \rightarrow E_{\eta-1}^p$, onde η é o candidato para $\gamma(\varepsilon)$. De fato, como $E_{\eta-1}^p = (E_{1-\eta}^p)^*$ precisamos de η

satisfazendo $\eta = \frac{p-N}{2p} + 2\varepsilon$ para que $|\nabla\phi| \in L^{r^*}(\Omega)$. De fato, como $\phi \in E_{1-\eta}^{p^*} \subset H^{2-2\eta,p^*}(\Omega)^N$ logo, $|\nabla\phi| \in H^{1-2\eta,p^*}(\Omega)$ e do Teorema de imersão 3.7.5 devemos ter η satisfazendo

$$r^* = \frac{Np}{N - (1 - 2\eta)p^*},$$

e como $r^* = \frac{Np}{Np - 2N + 4\varepsilon p}$, basta simplificar as expressões para encontrar $\eta = \frac{p-N}{2p} + 2\varepsilon$, como queríamos

Então, para $u, v \in E_\varepsilon^p$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u \otimes v \nabla \phi \right| &\leq \int_{\Omega} |u| |v| |\nabla \phi| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (|u| |v|)^r \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_{\Omega} |\nabla \phi|^{r^*} \right)^{\frac{1}{r^*}} \\ &\leq \|u\|_{L^{2r}} \|v\|_{L^{2r}} \|\phi\|_{1,r^*} \\ &\leq c \|u\|_{E_\varepsilon^p} \|v\|_{E_\varepsilon^p} \|\phi\|_{E_{1-\eta}^{p^*}}. \end{aligned}$$

Assim, para $u = v$, obtemos $\|N_{-1}(u)\|_{E_{\eta-1}^p} \leq c \|u\|_{E_\varepsilon^p}^2$. Ainda pela estimativa acima, como

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\Omega} u \otimes u \nabla \phi - \int_{\Omega} v \otimes v \nabla \phi \right| \\ &\leq \left| \int_{\Omega} u \otimes (u - v) \nabla \phi \right| + \left| \int_{\Omega} (u - v) \otimes v \nabla \phi \right|, \end{aligned}$$

obtemos que

$$\|N_{-1}(u) - N_{-1}(v)\|_{E_{\eta-1}^p} \leq c(\|u\|_{E_\varepsilon^p} + \|v\|_{E_\varepsilon^p}) \|u - v\|_{E_\varepsilon^p}.$$

Assim, segue o resultado desejado. $\square$

Como consequência do Teorema 5.2.4 obtemos o seguinte resultado

Corolário 6.3.6. *Dado $p \geq N$ e $u_0 \in L_\sigma^p(\Omega)^N$, existe uma única ε -solução de (6.20) começando em u_0 e que está definida num intervalo maximal de existência $[0, \tau_{u_0})$, com $u \in C([0, \tau_{u_0}), E_0^p) \cap C((0, \tau_{u_0}), E_{\gamma(\varepsilon)}^p) \cap C^1((0, \tau_{u_0}), E_{\gamma(\varepsilon)-1}^p)$. Além disso,*

1. *Se $p > N$ e $\limsup_{t \rightarrow \tau_{u_0}} \|u(t, u_0)\|_p < \infty$ para algum, então $\tau_{u_0} = \infty$, onde a norma $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(\Omega)^N}$.*
2. *Sejam $u_0 \in E_0^N$ com $N = 3$ e $N^+ = N/(1 - 4\varepsilon)$ para $\varepsilon \in (0, 1/4)$. Nessas condições, se $\limsup_{t \rightarrow \tau_{u_0}} \|u(t)\|_{N^+} < \infty$, então $\tau_{u_0} = \infty$.*

Demonstração. Graças ao Lema 6.3.5, basta aplicarmos o resultado autônomo abstrato 5.5.1 para o par (E_0^p, E_{-1}^p) .

Temos que $\gamma(\varepsilon) > \varepsilon$ quando $p > N$ e portanto, graças à Proposição 5.3.7 obtemos o item 1.

Para o caso $p = N$, lidemos da seguinte maneira. Para todo $t_0 > 0$, temos que $u(t_0) \in E_{2\varepsilon}^N$. Pelo Teorema de imersão 3.7.7, temos que $E_{2\varepsilon}^N \hookrightarrow L^q(\Omega)^N$ quando $q = NN/(N - 4\varepsilon N)$. Logo, se $q = N^+$ temos que $u(t_0) \in E_0^q$.

Agora, considerando o problema

$$\begin{aligned} \dot{v} &= A_q v + N_{-1} v, \quad t > 0 \\ v(0) &= u(t_0). \end{aligned} \tag{6.21}$$

Sabemos que o problema acima possui solução $v \in C((0, \tau_{v_0}, E_{2\varepsilon}^{N^+}))$. Como tínhamos tomado u anteriormente como solução maximal, u é uma continuação para v . Além disso, como $N^+ > N$ estamos no caso do item anterior e portanto se assumirmos a estimativa dada na norma $\|\cdot\|_{N^+}$, obtemos de maneira análoga que o tempo de existência é infinito e a afirmativa segue. □

Observação 49. No trabalho (ESCAURIAZA; SEREGIN; ŠVERÁK, 2003) temos o seguinte resultado mais ou menos na direção do corolário anterior. Se $u_0 \in E_0^3$ e tivermos uma estimativa em L^3 , então $\tau_{u_0} = \infty$.

6.4 Existência e Suavidade para as Equações de Navier-Stokes

Existem **quatro** perguntas milionárias a respeito das equações de Navier-Stokes, o Clay Mathematics Institute (CMI) gostaria de saber a resposta de pelo menos uma delas. Discutiremos uma delas do ponto de vista da continuação de soluções e enunciaremos também uma segunda questão dentro do assunto da primeira. Deste modo, ainda existem duas perguntas que podem ser interessantes que não serão tratadas aqui. Para encontrar as perguntas com precisão basta entrar no site do Clay Mathematics Institute (CMI) e procurar sobre “Millenium Prizes” e “Navier-Stokes Equations”.

A questão fundamental que o instituto quer saber a resposta sobre as equações de Navier-Stokes é se existem soluções globalmente definidas e que são suaves em dimensão 3, (em dimensão 2 já está resolvido). Mais precisamente, duas das questões em aberto são:

Problema A: Existência e Suavidade em $\mathbb{R}^3$: Suponha que força externa $f(t) \equiv 0$. Dada $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^N$ com $\operatorname{div} u_0 = 0$, então existem π e u soluções em $\mathcal{C}^\infty(\Omega \times [0, +\infty))$ e

com u satisfazendo

$$\int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx < C \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (6.22)$$

Problema C: O Colapso da Existência e Suavidade em $\mathbb{R}^3$: Existe uma condição inicial u_0 como no problema A e uma função f suave satisfazendo certas condições, de modo que não existe solução para a equação satisfazendo certas condições.

Em outras palavras, o Problema C é “simplesmente” encontrar um contra exemplo para o Problema A.

Os problemas B e D podem ser encontrados no site do CMI e possuem formulação um pouco diferente da tratada nesta dissertação.

Observação 50. *No que se segue daremos uma interpretação, em termos de continuação de soluções, para o Problema A.*

Considerando o problema (6.20) com dado inicial u_0 em L^3 , provamos na seção anterior que se $p = N = 3$, para obtermos solução com tempo maximal de existência sendo infinito, basta provarmos uma estimativa da solução obtida em L^{3^+} .

Notamos aqui que se tivermos tempo de existência infinito, utilizando argumentos conhecidos de “bootstrapping” podemos regularizar a solução obtida até obter solução clássica. De fato, seja $u_0 \in L^3(\Omega)^3$ e suponha que o tempo de existência maximal da solução τ_{u_0} seja infinito, isto é, $\tau_{u_0} = \infty$.

Pelo Corolário 6.3.6 temos que $u \in C((0, \infty), E_{2\varepsilon}^3)$, para $\varepsilon \in (0, 1/4)$. Fixe $\varepsilon \in (1/8, 1/4)$. Pelo Teorema de imersão 6.3.3 temos que

$$E_{2\varepsilon}^3 \hookrightarrow L^p(\Omega)^3,$$

onde $p = 3/(1 - 4\varepsilon)$.

Agora para $t_0 > 0$ qualquer, temos $u(t_0) \in L^p(\Omega)^3$ e como $p > 3$, considerando o problema

$$\begin{aligned} v_t &= A_{p,-1}v + N_{-1}(v), \quad t > 0 \\ v(0) &= u(t_0), \end{aligned}$$

obtemos que a solução $v \in C((0, \infty), E_{\gamma(\varepsilon)}^p)$, onde $\gamma(\varepsilon) = (p - 3)/2p + 2\varepsilon$. Como $\gamma(\varepsilon) = 4\varepsilon$ e u é solução maximal de (6.20) e v é uma continuação, obtemos que $u(t) \in E_{4\varepsilon}^p$ para todo $t \geq t_0$ e da arbitrariedade de t_0 , obtemos essa propriedade para todo $t > 0$. Agora, como $8\varepsilon - 3/p = \nu > 0$ por teoremas de imersão conhecidos, ver (WAHL, 1981), (BERGH; LOFSTROM, 1976) ou (ADAMS; FOURNIER, 1975), obtemos que $E_{\gamma(\varepsilon)}^p \hookrightarrow \mathcal{C}^\nu(\Omega)^N$. Continuando este procedimento de “bootstrapping” conseguimos obter a solução u tendo um número arbitrário de derivadas no sentido forte, ou seja, $u \in C((0, \infty), \mathcal{C}^\infty(\Omega))$.

Lembre-se que pela construção da Projeção de Leray, podemos obter a pressão e sendo u suave usando teoremas de regularização problemas elípticos, pode-se obter a pressão também suave.

A estimativa (6.22) é um tipo de estimativa de energia usual.

Deste modo, obtemos o resultado

Proposição 6.4.1. *Considerando o problema (6.20) com dado inicial em L^3 , para resolver o Problema A é suficiente mostrar que a solução está globalmente definida, isto é, que o tempo de existência é infinito.*

Tendo em vista o que foi feito no Corolário 6.3.6, temos critérios para conseguir provar o Problema A, em outras palavras provando uma estimativa em L^{3+} , conseguiríamos resolver o Problema A.

Portanto para conseguir ganhar um milhão de dólares, “basta ” provar uma estimativa em L^{3+} .

Em qualquer um dos casos lhe desejamos bons estudos e boa sorte.

REFERÊNCIAS

ADAMS, R.; FOURNIER, J. **Sobolev Spaces**. [S.l.]: Academic Press, 1975. Citado na página 129.

AMANN, H. **Linear and Quasilinear Parabolic Problems**. Birkhäuser Basel, 1995. (Springer monographs in mathematics). ISBN 978-3-0348-9221-6. Disponível em: <https://books.google.com.br/books/about/Linear_and_Quasilinear_Parabolic_Problem.html?id=VRYnocx4ACoC&redir_esc=y>. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 76.

ARRIETA, J.; CARVALHO, A. N. Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to navier-stokes and heat equations. **Transactions of the A. M. S.**, v. 352, n. 1, p. 285–310, 1999. Citado 5 vezes nas páginas 11, 13, 18, 20 e 91.

ARRIETA, J.; CARVALHO, A. N.; HALE, J. K. A damped hyperbolic equation with critical exponent. **Journal of Differential Equations**, v. 156, n. 2, p. 376–406, 1999. Citado na página 20.

ARRIETA, J.; CARVALHO, A. N.; RODRIGUEZ-BERNAL, A. Parabolic problems with nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities. **Journal of Differential Equations**, v. 156, n. 2, p. 376–406, 1999. Citado na página 20.

BABA, H. A.; AMROUCHE, C.; ESCOBEDO, M. Semi-group theory for the stokes operator with navier-type boundary conditions on l_p -spaces. **Recent Advances in Partial Differential Equations and Applications**, v. 666, p. 23–40, 2016. Citado na página 119.

BERGH, J.; LOFSTROM, J. **Interpolation Spaces - An introduction**. Grund. math. Wiss., 1976. (Springer monographs in mathematics). ISBN 3540078754. Disponível em: <https://books.google.com.br/books/about/Interpolation_spaces.html?id=jB3vAAAAMAAJ&redir_esc=y>. Citado 4 vezes nas páginas 33, 36, 50 e 129.

CALDERÓN, A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. **Studia Mathematica**, XXIV, p. 114–190, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 33.

CARVALHO, A. N.; CHOLEWA, J. W. Attractors for strongly damped wave equation with critical nonlinearities. **Pacific Journal of Mathematics**, v. 207, n. 2, 2002. Citado na página 20.

_____. Local well posedness for strongly damped wave equation with critical nonlinearities. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, v. 66, p. 443–463, 2002. Citado na página 20.

_____. Continuation and asymptotics to semilinear parabolic equations with critical nonlinearities. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 310, n. 2, p. 557–578, 2005. Citado na página 20.

_____. Local well posedness, asymptotic bootstrapping and asymptotic behavior for a class of semilinear evolution equations of second order in time. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 361, n. 5, p. 2567–2586, 2009. Citado na página 20.

CONWAY, J. B. **Functions of One Complex Variable I**. [S.l.]: Springer Science and Business Media, 2012. ISBN 1461599725. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 37.

DAVIES, E. B. **One-Parameter Semigroups**. [S.l.]: Academic Press Inc, 1980. Citado na página 23.

ESCAURIAZA, L.; SEREGIN, G.; ŠVERÁK, V. L3 solutions of the navier–stokes equations and backward uniqueness. **Russian Math. Surveys**, v. 58, n. 2, p. 211–250, 2003. Citado na página 128.

FOLLAND, G. B. **Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications**. [S.l.]: John Wiley and sons, inc., 1999. Citado 3 vezes nas páginas 36, 43 e 94.

FUJIWARA, D.; MORIMOTO, H. An lr theorem of the helmholtz decomposition of vetor fields. **J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.**, v. 352, p. 685–700, 1977. Citado 4 vezes nas páginas 21, 114, 117 e 124.

HENRY, D. **Geometric theory of semilinear parabolic equations**. [S.l.]: Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 90.

KATO, T. **Pertubation Theory for linear Operators**. [S.l.]: Springer-Verlag, New York Inc, 1976. Citado na página 23.

LADYZHENSKAYA, O. A. **The Mathematical Theory of Vis- cous Incompressible Flow**. [S.l.]: Gordon and Breach: New York, London, Paris, 1969. Citado 2 vezes nas páginas 119 e 120.

LIMA, E. L. **Espaços métricos**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977. ISBN 3540078754. Citado na página 66.

LIONS, J. L.; MAGENES, E. **Problemi de limiti non omogenei (III)**. [S.l.]: Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1961. Citado na página 114.

_____. **Problemi de limiti non omogenei (V)**. [S.l.]: Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1962. Citado na página 115.

PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. [S.l.]: Springer-Verlag, New York Inc, 1983. Citado na página 23.

SOLONNIKOV, V. A. Estimates for tho non-stacionary navier-stokes equations. **Plenum Publishing Corporation**, p. 467–529, 1975. Citado na página 119.

TRIEBEL, H. **Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators**. [S.l.]: North Holland, 1978. ISBN 0720407109. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 45.

WAHL, V. W. **The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1981. Citado 4 vezes nas páginas 119, 120, 123 e 129.

ÍNDICE

- aplicação ε -regular, 89
- condição de incompressibilidade, 112
- continuação de soluções, 102
- core, 77
- crítica, 109
- densamente imersos, 31
- dissipativo, 27
- duplamente crítica, 109
- escala de interpolação-extrapolação, 74
- escala de Banach, 57
- escala de potência, 62
- escala densamente imersa, 57
- escala dual, 68
- escala extrapolada de potências, 67
- escalas de Banach isomorfas, 57
- espaço de extrapolação, 64
- espaço dos isomorfismos lineares, 56
- fecho de um operador, 24
- gerador infinitesimal, 26
- holomorfa, 32
- imersos, 31
- livre de divergência, 114
- norma do gráfico, 58
- Núcleo de Poisson, 43
- operador adjunto, 25
- Operador de Stokes, 116
- operador dual, 24
- operador fechado, 23
- operador fechável, 23
- operador simétrico, 25
- parte de um operador linear, 55
- produto tensorial, 121
- Projeção de Leray, 115
- resolvente, 24
- semigrupo, 26
- setorial, 30
- solução ε -regular, 89
- solução maximal, 102
- subcrítica, 109
- tempo de existência maximal, 103
- tipo de um operador linear, 75