**Fibrados de discos sobre superfícies uniformizados pelo
bidisco hiperbólico**

Sidnei Furtado Costa

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Sidnei Furtado Costa

Fibrados de discos sobre superfícies uniformizados pelo bidisco hiperbólico

Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO
REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira

USP – São Carlos
Agosto de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837f Costa, Sidnei Furtado
Fibrados de discos sobre superfícies
uniformizados pelo bidisco hiperbólico / Sidnei
Furtado Costa; orientador Carlos Henrique Grossi
Ferreira. -- São Carlos, 2017.
80 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. bidisco hiperbólico. 2. fibrados de discos
sobre superfícies. 3. estruturas geométricas em
variedades. I. Ferreira, Carlos Henrique Grossi,
orient. II. Título.

Sidnei Furtado Costa

**Disc bundles over surfaces uniformized by the hyperbolic
bidisc**

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira

USP – São Carlos
August 2017

Este trabalho é dedicado à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e à minha família por sempre estarem presentes nos momentos mais importantes da minha vida.

Agradeço à minha esposa Rafaely por todo o carinho, suporte e amor durante esses últimos anos.

Agradeço ao meu orientador Carlos Henrique Grossi Ferreira por toda a paciência[∞], pelos conselhos, pela motivação e por sempre estar disponível, mesmo que pra responder as perguntas mais ingênuas e, principalmente, por ter acreditado em mim.

Agradeço a amizade e o incentivo dos colegas de doutorado José Santana, Otoniel Nogueira, Martín Barajas e Henri Mercado. Sou grato também por ter sido aluno dos professores Eduardo Tengan, Denise de Matos, Alexandre Anan'in e Carlos Grossi.

Agradeço, por fim, ao CNPq e à Capes pelo apoio financeiro e ao ICMC pelo excelente ambiente de trabalho.

*“It is wrong always, everywhere,
and for anyone, to believe anything
upon insufficient evidence.”
(W. K. Clifford)*

RESUMO

COSTA, S. F. **Fibrados de discos sobre superfícies uniformizados pelo bidisco hiperbólico**. 2017. 80 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Generalizando para o caso do bidisco hiperbólico as construções em (ANAN'IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011) e em (GROSSI, 2015), provamos que o fibrado trivial (tangente) sobre superfícies de gênero ≥ 1 (≥ 2) admite geometria modelada no bidisco hiperbólico. (O caso do fibrado trivial sobre o toro é particularmente curioso, pois a curvatura é nula na base e em cada fibra, mas não no fibrado.) Além do seu próprio valor intrínseco, estes exemplos se inserem no contexto da conjectura de Gromov, Lawson e Thurston. Originalmente, a conjectura de Gromov, Lawson e Thurston diz que um fibrado de discos sobre uma superfície conexa fechada orientável de gênero ≥ 2 admite métrica hiperbólica completa de curvatura constante se e só se $|e| \leq |\chi|$, onde e é o número de Euler do fibrado e χ é a característica de Euler da base. Posteriormente, observou-se que esta desigualdade também era válida em todos os fibrados de discos sobre superfícies com estrutura hiperbólica complexa (i.e., uniformizados pela 2-bola holomorfa) conhecidos. Por esta razão, passou-se a acreditar que a conjectura depende apenas de curvatura negativa *lato sensu* (digamos, *à la* Alexandrov) e não das especificidades de uma geometria hiperbólica particular. O bidisco hiperbólico é o caso mais simples que nos permite “testar” tal hipótese, pois está no “limite” de ser hiperbólico (a curvatura é ≤ 0). Construimos os dois casos extremos: $e = 0$ (fibrado trivial) e $|e| = |\chi|$ (fibrado tangente). Além disso, provamos alguns resultados relacionados à teoria de Teichmüller no contexto de fibrados de discos uniformizados pelo bidisco hiperbólico.

Palavras-chave: bidisco hiperbólico, fibrados de disco sobre superfície, estruturas geométricas em variedades, teorema poliedral de Poincaré.

ABSTRACT

COSTA, S. F. **Disc bundles over surfaces uniformized by the hyperbolic bidisc.** 2017. 80 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Generalizing the constructions in (ANAN'IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011) and in (GROSSI, 2015) to the hyperbolic bidisc, we show that the trivial (tangent) bundle over genus ≥ 1 (≥ 2) surfaces admits a geometric structure modelled on the hyperbolic bidisc. (The case of the trivial bundle over the torus is particularly interesting because the curvature vanishes on the base and on every fiber, but is non-null on the bundle.) Aside from their intrinsic value, these examples also play a role in the context of the Gromov, Lawson and Thurston conjecture (GLT conjecture). Originally, the GLT conjecture states that a disc bundle over a connected oriented closed surface of genus ≥ 2 admits a complete hyperbolic metric of constant curvature if and only if $|e| \leq |\chi|$, where e stands for the Euler number of the bundle and χ , for the Euler characteristic of the base. Afterwards, it was observed that this inequality also holds for every known example of disc bundles over surfaces equipped with complex hyperbolic structure (i.e., uniformized by the holomorphic 2-ball). So, one started to believe that the conjecture depends only on negative curvature *lato sensu* (say, *à la* Alexandrov) and not on the particularities of a specific hyperbolic geometry. The hyperbolic bidisc is the simplest case allowing us to ‘test’ such hypothesis since it lies on the ‘frontier’ of being hyperbolic (curvature is ≥ 0). We construct the two extremal cases: $e = 0$ (trivial bundle) and $|e| = |\chi|$ (tangent bundle). We also prove a few results related to Teichmüller’s theory in the context of disc bundles uniformized by the hyperbolic bidisc.

Keywords: hyperbolic bidisc, disc bundles over surfaces, geometric structures over surfaces, Poincaré’s polyhedron theorem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Configuração de fatias em um par de fibrações euclidianas cotranchais.	42
Figura 2 –	46
Figura 3 – O ponto p' é a projeção ortogonal de p_1^s no eixo de f_2	48
Figura 4 –	50
Figura 5 –	57
Figura 6 – Configuração para $c = -0.15$, $\lambda = 1.75$, $r_1 = 0.8$, $r_2 = 0.45$ e $t = 0.4$. .	60
Figura 7 –	63
Figura 8 – $v_1, v_2 \in T_p\mathbb{H}$ são normais a γ e $p' = r(q)p$	64
Figura 9 –	66
Figura 10 – Configuração para $n_1 = 8$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $t = \pi/4$, $t_2 = \pi/4$ e $t_3 = \pi/5$.	70
Figura 11 – Configuração para $n = 6$ e $t = 0.7$	74
Figura 12 – Configuração para $n = 6$ e $t = -1.9$	77

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
2	GEOMETRIA HIPERBÓLICA PLANA	23
2.1	Espaço tangente e métrica	23
2.2	Geodésicas	24
2.3	Isometrias	26
3	O BIDISCO HIPERBÓLICO	29
3.1	Preliminares	29
3.1.1	<i>Espaço tangente e métrica</i>	30
3.1.2	<i>Isometrias do bidisco</i>	30
3.1.3	<i>Geodésicas</i>	31
3.2	Superfícies do bidisco	32
3.2.1	<i>Planos verticais/horizontais</i>	32
3.2.2	<i>Planos euclidianos</i>	33
3.2.3	<i>Diagonais</i>	36
3.3	Hipersuperfícies do bidisco	39
3.3.1	<i>Fibrações verticais e horizontais</i>	39
3.3.2	<i>Fibrações euclidianas</i>	40
3.3.3	<i>Fibrações diagonais</i>	42
3.3.4	<i>Bissetores</i>	55
3.4	Subespaços totalmente geodésicos do bidisco	55
4	FIBRADOS DE DISCOS SOBRE SUPERFÍCIES COM A GEOMETRIA DO BIDISCO HIPERBÓLICO	63
4.1	Fibrados triviais	63
4.2	O grupo turnover	64
4.2.1	<i>Exemplos</i>	69
4.3	O grupo hiperelíptico	73
4.3.1	<i>Exemplos</i>	74
4.3.2	<i>Mapa para o domínio fundamental</i>	76
4.3.3	<i>Tesselação</i>	77

REFERÊNCIAS	79
-----------------------	----

INTRODUÇÃO

Problemas de uniformização em dimensão real 4 têm ocupado um papel de grande destaque na geometria riemanniana atualmente. De fato, com as demonstrações da *conjectura de geometrização de Thurston* por G. Perelman em 2003 e da *conjectura das variedades virtualmente Haken* por I. Agol em 2012, as principais questões envolvendo uniformização em dimensão 3 foram resolvidas.

Muito pouco é conhecido sobre uniformização em dimensão real 4. Do ponto de vista da geometria hiperbólica, destacam-se como espaços-modelo o espaço hiperbólico real $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, o plano hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e o bidisco hiperbólico $\mathbb{B} := \mathbb{H} \times \mathbb{H}$, onde $\mathbb{H}$ denota o disco hiperbólico. O primeiro possui curvatura negativa constante. O segundo é, do ponto de vista geométrico, equivalente à bola unitária em $\mathbb{C}^2$ munida de sua estrutura holomorfa (ou seja, o grupo de isometrias que preservam a orientação do plano hiperbólico complexo é exatamente o grupo de automorfismos complexos da bola unitária em $\mathbb{C}^2$); tem curvaturas seccionais variando no intervalo $[-4, -1]$.¹ Finalmente, o bidisco hiperbólico é geometricamente equivalente ao bidisco holomorfo e possui curvaturas seccionais variando no intervalo $[-1, 0]$.

Nosso principal interesse, nesta tese, reside na uniformização, pelos espaços-modelo listados acima, de fibrados de discos M sobre superfícies conexas fechadas orientáveis Σ_k .

O caso hiperbólico real foi inicialmente abordado no trabalho seminal (GROMOV; LAWSON; THURSTON, 1988). Lá, Gromov, Lawson e Thurston encontraram uma série de exemplos de fibrados de discos M sobre superfícies conexas fechadas orientáveis Σ_k de gênero $k \geq 2$ uniformizados por $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Esta série de exemplos foi estendida por (KUIPER, 1988), (LUO, 1992) e, mais recentemente, por (ANAN'IN; CHIOVETTO, 2016).

Gromov, Lawson e Thurston observaram em (GROMOV; LAWSON; THURSTON,

¹ Dependendo, é claro, da normalização escolhida para a métrica.

1988) que a desigualdade

$$|eM| \leq |\chi\Sigma_k| \quad (1.1)$$

era válida para todos os exemplos construídos, onde eM denota o número de Euler do fibrado M e $\chi\Sigma_k$ denota a característica de Euler da superfície de gênero k (note-se que, topologicamente/diferenciavelmente, eM e $\chi\Sigma_k$ caracterizam completamente o fibrado M). Isto os levou a formular a seguinte conjectura, conhecida como *conjectura de Gromov, Lawson e Thurston*:

Conjectura(GROMOV; LAWSON; THURSTON, 1988). A desigualdade $|eM| \leq |\chi\Sigma_k|$ é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma métrica hiperbólica completa de curvatura constante em M , onde $k \geq 2$.

O estado da arte do lado “suficiente” da conjectura é o seguinte. N. Kuiper (KUIPER, 1988) construiu fibrados de discos M admitindo estrutura hiperbólica completa de curvatura constante para qualquer valor racional de $|eM/\chi\Sigma_k|$ no intervalo $[0, \frac{1}{3}]$. F. Luo (LUO, 1992) encontrou um exemplo satisfazendo $|eM/\chi\Sigma_k| = \frac{1}{2}$, a melhor cota conhecida até muito recentemente. Em 2016, S. Anan’in e P. Chiovetto (ANAN’IN; CHIOVETTO, 2016) construíram exemplos satisfazendo $|eM/\chi\Sigma_k| = \frac{3}{5}$.

Quanto ao lado “necessário”, a única cota conhecida pertence a M. Kapovich: se M admite estrutura hiperbólica de curvatura constante, então $|eM| \leq \exp\left(\exp\left(10^8|\chi\Sigma_k|\right)\right)$.

Passemos ao caso do plano hiperbólico complexo. Os primeiros exemplos de fibrados de disco M sobre superfícies conexas fechadas orientáveis Σ_k de gênero $k \geq 2$ foram descobertos em (GOLDMAN; KAPOVICH; LEEB, 2001). Posteriormente, novas séries de exemplos foram construídas em (ANAN’IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011) e em (GROSSI, 2015). É importante ressaltar que as dificuldades presentes na construção de fibrados de discos M com estrutura hiperbólica complexa são, em geral, significativamente maiores do que aquelas presentes no caso real. Isto ocorre pela seguinte razão: o problema de se construir uma variedade munida de uma dada estrutura geométrica é essencialmente equivalente àquele de se encontrar certos subgrupos discretos do grupo de isometrias do espaço-modelo em questão. Uma das poucas ferramentas conhecidas que nos permite encontrar um subgrupo discreto G de isometrias é a construção de um *domínio fundamental* para a ação de G , isto é, de um poliedro P cujas faces são identificadas por elementos que geram G e tal que as G -cópias de P *tessalam* o espaço-modelo. A variedade uniformizada pelo espaço-modelo é então obtida pela identificação das faces de P via os geradores de G .

Ocorre que, no caso hiperbólico complexo, não há candidatos simples para constituir as faces de um poliedro P já que não existem hipersuperfícies totalmente geodésicas em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Em (ANAN’IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011) e (GROSSI, 2015), por exemplo, bissetores (i.e., hipersuperfícies equidistantes de dois pontos) são utilizados. Bissetores são

razoavelmente bem comportados e, ainda assim, o problema (digamos) de se determinar a *simplicidade* de um poliedro com faces formadas por bissetores é bastante pesado.

Todos os fibrados M com estrutura hiperbólica complexa conhecidos satisfazem a desigualdade 1.1, o que motivou uma extensão da conjectura de Gromov, Lawson e Thurston para o caso hiperbólico complexo (vide (ANAN'IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011, p. 26)).

Nesta tese, construímos os primeiros exemplos conhecidos de fibrados de discos M sobre superfícies conexas orientáveis fechadas Σ_k de gênero $k \geq 1$ uniformizados pelo bidisco hiperbólico. Além de seu próprio valor intrínseco, as seguintes considerações sobre a conjectura de Gromov, Lawson e Thurston nos motivaram a buscar uma resposta mais ampla para o problema. Como todos os exemplos conhecidos de fibrados M , tanto no caso real quanto no caso complexo, satisfazem a desigualdade (1.1), é possível que a conjectura seja de fato relacionada apenas à curvatura negativa *lato sensu* (à la Alexandrov) e não a modelos específicos de geometria hiperbólica. Em princípio, uma possível demonstração da conjectura de Gromov, Lawson e Thurston que não tenha que passar pelas especificidades das geometrias hiperbólicas real, complexa, etc. pode ter muito mais chances de ser encontrada (por estar sendo procurada no contexto “natural” da conjectura) do que uma que dependa de aspectos específicos das geometrias hiperbólicas real, complexa, etc.

Antes de estudar a conjectura de Gromov, Lawson e Thurston em tal contexto, faz sentido “testar” esta ideia no caso do bidisco hiperbólico, pois, aqui, o termo “hiperbólico” atinge seu limite: em $\mathbb{B}$, a curvatura é ≤ 0 e planos euclidianos (= produtos de geodésicas) realizam a curvatura seccional nula.

Os resultados centrais da tese são os seguintes:

Teorema [Teorema 4.1.2, seção 4.1]. *O fibrado trivial de discos sobre o toro admite estrutura geométrica modelada no bidisco hiperbólico. A geometria em cada fibra, bem como na base do fibrado, é de curvatura zero, mas o próprio fibrado não possui curvatura nula.*

Teorema [Teorema 4.1.1, seção 4.1]. *O fibrado trivial de discos sobre superfícies conexas fechadas orientáveis de qualquer gênero $k \geq 2$ admite estrutura geométrica modelada no bidisco hiperbólico.*

Teorema [Teoremas 4.2.7 e 4.3.1, seções 4.2 e 4.3]. *O fibrado tangente de discos sobre superfícies conexas fechadas orientáveis de qualquer gênero $k \geq 2$ admite geometria modelada no bidisco hiperbólico.*

O último teorema central diz respeito à teoria de Teichmüller no contexto de fibrados de discos uniformizados pelo bidisco hiperbólico (vide as definições pertinentes nas seções 4.2 e 4.3):

Teorema [Teoremas 4.2.7 e 4.3.1]. *Existem representações discretas e fiéis do grupo turnover e do grupo hiperelíptico no grupo de isometrias (que preservam a orientação) do bidisco hiperbólico admitindo deformações não triviais que preservam a discretude e a fidelidade.*

Os exemplos que construímos correspondem aos casos extremais $|eM| = 0$ (fibrado trivial) e $|eM| = |\chi\Sigma_k|$ para $k \geq 1$ (fibrado tangente).

É curioso notar que, no caso hiperbólico real, não se sabe se o fibrado tangente sobre Σ_k , $k \geq 2$, é uniformizado por $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. No caso hiperbólico complexo, o problema de se decidir se o fibrado trivial é uniformizado por $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ constituiu uma conhecida conjectura (vide (GOLDMAN, 1983, p. 583) e (SCHWARTZ, 2007, p. 14)) resolvida em (ANAN'IN; GUSEVSKII, 2005) e, posteriormente, também em (GROSSI, 2015). Já no bidisco hiperbólico, os exemplos extremais foram os primeiros (e, por enquanto, únicos) a ser construídos. Ainda mais: muitas das variações razoáveis para as construções que apresentamos no Capítulo 4 foram experimentadas, mas sempre resultaram (quando bem sucedidas) em um destes casos extremais.

Por fim, a tese está estruturada como se segue.

No capítulo 2, apresentamos conceitos elementares de geometria hiperbólica plana. Nossa abordagem segue (ANAN'IN; GROSSI, 2011a) e é, essencialmente, livre de coordenadas.

No capítulo 3, apresentamos inicialmente uma descrição do bidisco hiperbólico e de seus objetos geométricos básicos: geodésicas e superfícies totalmente geodésicas (planos verticais e horizontais, planos euclidianos, diagonais). Em seguida, tais superfícies totalmente geodésicas são utilizadas para descrever hipersuperfícies que, no capítulo 4, constituirão faces de poliedros fundamentais para a ação de certos subgrupos discretos do grupo de isometrias (que preservam a orientação) do bidisco hiperbólico. São três tipos de hipersuperfícies: as fibrações verticais/horizontais, as fibrações planas e as fibrações diagonais. Cada tipo é trivialmente fibrado sobre uma geodésica por uma das superfícies totalmente geodésicas do bidisco. As propriedades geométricas das hipersuperfícies introduzidas que serão necessárias na construção de poliedros fundamentais são estudadas.

No capítulo 4, encontramos representações discretas e fiéis dos grupos turnover e hiperelíptico que dão origem aos citados exemplos de fibrados de discos sobre superfícies conexas fechadas orientáveis. Os poliedros fundamentais construídos generalizam, para o caso do bidisco hiperbólico, aqueles em (ANAN'IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011) e em (GROSSI, 2015).

GEOMETRIA HIPERBÓLICA PLANA

Neste capítulo relembramos conceitos e ferramentas básicos de geometria hiperbólica plana (geodésicas, grupos de isometrias, subgrupos uniparamétricos, etc.). Nossa abordagem é essencialmente *livre de coordenadas* e segue aquela desenvolvida em (ANAN'IN; GROSSI, 2011a). Essa abordagem nos permitirá apresentar, no próximo capítulo, uma descrição bastante elementar da geometria do bidisco hiperbólico. Por exemplo, a dualidade entre geodésicas e pontos no modelo de Beltrami-Klein-Möbius da geometria hiperbólica plana será utilizada para descrever uma certa classe de hipersuperfícies do bidisco (as chamadas “fibrações euclidianas”).

2.1 Espaço tangente e métrica

Seja V um espaço linear real de dimensão 3 munido de uma forma bilinear simétrica não degenerada $\langle -, - \rangle$ de assinatura $++-$. No que se segue, p pode denotar tanto um ponto na projetivização $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ de V quanto um representante de p em V . Dizemos que um ponto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ é, respectivamente, *negativo*, *isotrópico*, *positivo* se p é um ponto de BV , SV , EV , onde

$$\begin{aligned} BV &:= \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \\ SV &:= \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle = 0\} \text{ e} \\ EV &:= \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle > 0\}. \end{aligned}$$

Estes subespaços correspondem à subdivisão de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ no disco BV e na fita de Möbius EV colados ao longo do círculo SV .

Definimos o plano hiperbólico (real) por $\mathbb{H} := BV$. Assim, o bordo (ou *absoluto*) de $\mathbb{H}$ é o círculo de pontos isotrópicos $\partial\mathbb{H} := SV$.

Seja $p \in \mathbb{RP}V$ um ponto não-isotrópico. Denotamos por $\text{Lin}(\mathbb{R}p, p^{\perp})$ o espaço de aplicações lineares de $\mathbb{R}p := \{rp \mid r \in \mathbb{R}\}$ em $p^{\perp} := \{q \in V \mid \langle q, p \rangle = 0\}$. A cada

$v \in \text{Lin}(\mathbb{R}p, p^\perp)$ associamos a derivação v_p (sobre funções suaves locais definidas em uma vizinhança de $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$) dada por

$$v_p f := \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \tilde{f}(p + \epsilon v(p)),$$

onde $\tilde{f}$ é um levantamento suave de f para uma vizinhança de $\mathbb{R}p$. É simples verificar (vide (ANAN'IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011)) que: 1) $v_p f$ independe do levantamento $\tilde{f}$ e que v_p é de fato uma derivação; 2) a aplicação $\text{Lin}(\mathbb{R}p, p^\perp) \rightarrow T_p \mathbb{R}P^1$, $v \mapsto v_p$, é injetiva e $\mathbb{R}$ -linear. Como $\dim_{\mathbb{R}} \text{Lin}(\mathbb{R}p, p^\perp) = \dim_{\mathbb{R}} T_p \mathbb{R}P^1$, concluímos que

$$T_p \mathbb{R}P^1 \cong \text{Lin}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}p, p^\perp),$$

para p não-isotrópico. Assim, todo vetor v_p tangente a $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ em um ponto não-isotrópico p pode ser escrito na forma $v_p = \langle -, p \rangle v$ para algum $v \in p^\perp$, onde $\langle -, p \rangle$ é a aplicação linear $x \mapsto \langle x, p \rangle$.

Introduzimos em $T_p \mathbb{R}P^1$ a métrica

$$\langle v_p, w_p \rangle := -\text{tr}(v_p^* w_p) = -\langle p, p \rangle \langle v, w \rangle, \quad v_p, w_p \in T_p \mathbb{R}P^1, \quad (2.1)$$

onde v_p^* denota o adjunto de v_p com respeito à forma $\langle -, - \rangle$ e $\text{tr}(v_p^* w_p)$ é o traço da aplicação linear $v_p^* w_p : \mathbb{R}p \rightarrow \mathbb{R}p$. Obtemos assim uma forma bilinear simétrica positivo-definida em $T_p \mathbb{H}$ que varia suavemente com o ponto p — a métrica riemanniana *hiperbólica* em $\mathbb{H}$ — bem como uma forma bilinear simétrica de assinatura $-+$ em $T_p EV$ — uma métrica *lorentziana* na fita de Möbius. Ambas são métricas de curvatura constante -1 .

A distância $d(p, q)$ entre pontos $p, q \in \mathbb{H}$ é dada (vide (ANAN'IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011)) por $\cosh^2 d(p, q) = \text{ta}(p, q)$, onde

$$\text{ta}(p, q) := \frac{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle}$$

é a *tância* entre p e q . Como a distância é uma função monótona da tância (o mais simples invariante racional envolvendo dois pontos no plano projetivo), em geral é mais efetivo utilizar a última ao invés da primeira.

O plano projetivo $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ munido da estrutura geométrica descrita acima se chama *plano hiperbólico estendido* ou modelo de *Beltrami-Klein-Möbius* da geometria hiperbólica.

2.2 Geodésicas

Uma das vantagens do modelo de Beltrami-Klein-Möbius para a geometria hiperbólica está relacionada à facilidade de descrever as geodésicas. De fato, as geodésicas tanto no plano hiperbólico quanto na fita de Möbius lorentziana são obtidas por restrição das retas projetivas em $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ (vide (ANAN'IN; GROSSI, 2011a, p. 13)).

Note-se, inicialmente, que as possíveis assinaturas da forma $\langle -, - \rangle$ restrita a um subespaço linear bidimensional $W \leq V$ são $-+$, $++$, $+0$ (isto é uma consequência direta do critério de Sylvester da álgebra linear). No primeiro caso, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}W$ dá origem a dois segmentos (cada qual uma geodésica), um em $\mathbb{H}$ e outro em EV , colados por dois pontos no absoluto (os *vértices*). No segundo caso, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}W$ está inteiramente contido em EV (estas são geodésicas fechadas em EV) e, no último caso, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}W$ possui um ponto no absoluto e os demais em EV (uma geodésica degenerada em EV).

Em particular temos a seguinte dualidade entre pontos e geodésicas. Dado $p \in EV$, a assinatura da forma restrita a $p^{\perp}$ é $+ -$ e, portanto, $\mathbb{H} \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}p^{\perp}$ é uma geodésica em $\mathbb{H}$. Reciprocamente, uma geodésica $\gamma \subset \mathbb{H}$ é a restrição para $\mathbb{H}$ de alguma reta projetiva $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}W$, i.e., $\gamma = \mathbb{H} \cap \mathbb{P}_{\mathbb{R}}W$, onde W tem a assinatura $+ -$. O ponto $u \in EV$ tal que $u^{\perp} = W$ é o ponto *polar* da geodésica γ .

Em outras palavras, a fita de Möbius lorentziana EV é o espaço (classificador) das geodésicas de $\mathbb{H}$.

Definição 2.2.1. Dizemos que duas geodésicas distintas em $\mathbb{H}$ são, respectivamente, *ultraparalelas*, *assintóticas*, *concorrentes* se elas não se intersectam em $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$, se intersectam em $\partial\mathbb{H}$, se intersectam em $\mathbb{H}$.

Proposição 2.2.2 ((ANAN'IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011; GOLDMAN, 1999)). Sejam γ_1 e γ_2 geodésicas distintas em $\mathbb{H}$ e u_j o polar de γ_j , $j = 1, 2$. Então γ_1 e γ_2 são, respectivamente, *ultraparalelas*, *assintóticas*, *concorrentes* sse $\text{ta}(u_1, u_2) > 1$, $\text{ta}(u_1, u_2) = 1$, $\text{ta}(u_1, u_2) < 1$. ■

No que se segue, introduzimos uma parametrização particular para geodésicas em $\mathbb{H}$ que será utilizada com bastante frequência.

Sejam $v, w \in \partial\mathbb{H}$ distintos. Uma parametrização para a geodésica γ com vértices v e w é dada por $t \mapsto e^{t\lambda}v - e^{-t\lambda}kw$, onde $2k = \langle v, w \rangle^{-1}$ e $\lambda \neq 0$; tal parametrização é por comprimento de arco sse $\lambda = \pm 1$ (vide (GOLDMAN, 1999, p. 106)). Assim, se $p, q \in \mathbb{H}$ satisfazem $\langle p, p \rangle = \langle q, q \rangle = -1$ e $\langle p, q \rangle < 0$ (é sempre possível escolher representantes satisfazendo essas condições), então

$$\gamma_{p,q} : t \mapsto \sinh((1-t)\lambda)p + \sinh(t\lambda)q \quad (2.2)$$

é uma parametrização para a geodésica ligando $p = \gamma_{p,q}(0)$ e $q = \gamma_{p,q}(1)$, onde $\lambda = d(p, q)$.

De fato, basta notar que, para todos $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_{p,q}(t), \gamma_{p,q}(s) \rangle &= -\sinh((1-t)\lambda) \sinh((1-s)\lambda) + \sinh((1-t)\lambda) \sinh(s\lambda) \langle p, q \rangle \\
&\quad + \sinh((1-s)\lambda) \sinh(t\lambda) \langle p, q \rangle - \sinh(t\lambda) \sinh(s\lambda) \\
&= -\sinh((1-t)\lambda) \sinh((1-s)\lambda) - \sinh((1-t)\lambda) \sinh(s\lambda) \cosh(\lambda) \\
&\quad - \sinh((1-s)\lambda) \sinh(t\lambda) \cosh(\lambda) - \sinh(t\lambda) \sinh(s\lambda) \\
&= -\sinh((1-t)\lambda) \sinh(\lambda) \cosh(s\lambda) \\
&\quad - \sinh((1-s)\lambda) \sinh(t\lambda) \cosh(\lambda) - \sinh(t\lambda) \sinh(s\lambda) \\
&= -(\sinh(\lambda) \cosh(t\lambda) - \cosh(\lambda) \sinh(t\lambda)) \sinh(\lambda) \cosh(s\lambda) \\
&\quad - (\sinh(\lambda) \cosh(s\lambda) - \cosh(\lambda) \sinh(s\lambda)) \sinh(t\lambda) \cosh(\lambda) - \sinh(t\lambda) \sinh(s\lambda) \\
&= -\sinh^2(\lambda) \cosh(t\lambda) \cosh(s\lambda) + \cosh^2(\lambda) \sinh(s\lambda) \sinh(t\lambda) - \sinh(t\lambda) \sinh(s\lambda) \\
&= -\sinh^2(\lambda) \cosh(t\lambda) \cosh(s\lambda) + (1 + \sinh^2(\lambda)) \sinh(s\lambda) \sinh(t\lambda) \\
&\quad - \sinh(t\lambda) \sinh(s\lambda) \\
&= -\sinh^2(\lambda) \cosh(\lambda(t-s)),
\end{aligned}$$

o que implica que

$$\text{ta}(\gamma_{p,q}(t), \gamma_{p,q}(s)) = \frac{\langle \gamma_{p,q}(t), \gamma_{p,q}(s) \rangle^2}{\langle \gamma_{p,q}(t), \gamma_{p,q}(t) \rangle \langle \gamma_{p,q}(s), \gamma_{p,q}(s) \rangle} = \cosh^2(\lambda(t-s)),$$

ou seja, que $d(p, q) = \lambda|t-s|$ para todos $t, s \in \mathbb{R}$.

2.3 Isometrias

O grupo de isometrias (que preservam a orientação) $\text{Isom } \mathbb{H}$ de $\mathbb{H}$ é a componente da identidade de

$$\text{SOV} = \{f \in \text{SLV} \mid \langle fv, fw \rangle = \langle v, w \rangle, \forall v, w \in V\}.$$

Definição 2.3.1. Seja $f \in \text{Isom } \mathbb{H}$, $f \neq 1$. Dizemos que

1. f é *elíptica* se ela possui um único ponto fixo em $\mathbb{H}$;
2. f é *parabólica* se ela possui um único ponto fixo em $\partial\mathbb{H}$;
3. f é *hiperbólica* se ela possui exatamente dois pontos fixos distintos em $\partial\mathbb{H}$.

O grupo $\text{Isom } \mathbb{H}$ é gerado por reflexões em geodésicas. De fato, se γ_1 e γ_2 são geodésicas distintas que se intersectam em um ponto $p \in \mathbb{H}$ num ângulo $\theta/2$, então o produto das reflexões nessas geodésicas é uma rotação pelo ângulo θ em torno de p . Se γ_1 e γ_2 são ultraparalelas e distantes $\lambda/2$ uma da outra, então o produto das reflexões nessas

geodésicas é uma isometria hiperbólica com comprimento de translação¹ λ estabilizando a geodésica simultâneamente ortogonal a γ_1 e γ_2 . Por fim, se γ_1 e γ_2 têm um único vértice em comum v , então o produto das reflexões nessas geodésicas é parabólica com único ponto fixo v .

Seja $u \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ um ponto não isotrópico. A *reflexão na geodésica* polar ao ponto u é dada por

$$r(u) : x \mapsto x - 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

Se $u \in EV$, a isometria $r(u)$ não preserva a orientação de $\mathbb{H}$. Por outro lado, se $u \in \mathbb{H}$, $r(u) \in \text{Isom } \mathbb{H}$ é simplesmente a rotação por π em torno de u , i.e., $r(u)$ é a reflexão no ponto u .

Observação 2.3.2. Se γ é a geodésica polar ao ponto u , vamos usar tanto $r(u)$ quanto $r(\gamma)$ para designar a reflexão na geodésica γ .

Combinando a discussão acima com a Proposição 2.2.2, obtemos a seguinte

Proposição 2.3.3 ((ANAN'IN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011)). Sejam $u_1, u_2 \in EV$. Então $f = R(u_2)R(u_1)$ é, respectivamente, elíptica, parabólica, hiperbólica sse $\text{ta}(u_1, u_2) < 1$, $\text{ta}(u_1, u_2) = 1$, $\text{ta}(u_1, u_2) > 1$. Em particular,

1. se f é elíptica, então seu ângulo de rotação θ satisfaz $\cos^2(\theta/2) = \text{ta}(u_1, u_2)$;
2. se f é hiperbólica, então seu comprimento de translação ℓ_f satisfaz $\cosh^2(\ell_f/2) = \text{ta}(u_1, u_2)$.

■

¹ O comprimento de translação de uma isometria hiperbólica f é dado por $\ell_f := \inf_{x \in \mathbb{H}} d(x, fx)$.

O BIDISCO HIPERBÓLICO

O bidisco hiperbólico é o produto de dois planos hiperbólicos munido da métrica usual do produto. No que segue, utilizaremos os conceitos e definições do capítulo anterior para descrever aspectos elementares da geometria do bidisco hiperbólico.

Inicialmente, observamos que a ação do grupo de isometrias do bidisco não é bitransitiva, ou seja, a distância não é o único invariante geométrico de um par de pontos. Disto segue que existem diferentes classes geométricas de geodésicas no bidisco (de fato, existe uma reta projetiva de tais classes). Há três tipos de superfícies totalmente geodésicas no bidisco hiperbólico: os planos horizontais/verticais, os planos euclidianos e as diagonais. Planos horizontais/verticais e diagonais podem conter apenas tipos geométricos específicos de geodésicas, enquanto que planos euclidianos contêm representantes de todas as classes geométricas de geodésicas.

Tais superfícies totalmente geodésicas, estudadas em detalhes na Seção 3.2, desempenham um papel central nesta tese. De fato, elas são utilizadas na Seção 3.3 para descrever as hipersuperfícies que constituirão as faces dos poliedros fundamentais para a ação de certos subgrupos discretos do grupo de isometrias do bidisco hiperbólico. Estes grupos discretos são construídos no Capítulo 4.

Por fim, apresentamos na Seção 3.4 uma classificação dos subespaços totalmente geodésicos do bidisco, utilizando apenas técnicas elementares.

3.1 Preliminares

A descrição da geometria básica do bidisco hiperbólico apresentada abaixo requer apenas os conceitos elementares introduzidos no capítulo anterior. Utilizaremos sem referência a notação introduzida naquele capítulo.

3.1.1 Espaço tangente e métrica

Seja $X := \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ e seja SX o conjunto dos pontos $p \in X$ que possuem pelo menos uma coordenada isotrópica. Se $p = (p_1, p_2) \in X \setminus SX$, então

$$\langle v, w \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle + \langle v_2, w_2 \rangle,$$

onde $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in T_p X$ (estamos identificando $T_{(p_1, p_2)}X \cong T_{p_1}\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \oplus T_{p_2}\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$), é uma forma não degenerada em $T_p X$ que varia suavemente com p . Assim, $\langle -, - \rangle$ define uma métrica nas componentes conexas de $X \setminus SX$ (a métrica canônica do produto).

O *bidisco hiperbólico* é definido por $\mathbb{B} := \mathbb{H} \times \mathbb{H} \subset X$ com a métrica induzida. Logo, a distância entre $p = (p_1, p_2), q = (q_1, q_2) \in \mathbb{B}$ é dada por

$$\mu(p, q) = \sqrt{d(p_1, q_1)^2 + d(p_2, q_2)^2}.$$

Topologicamente, $\mathbb{B}$ é uma 4-bola aberta, cujo bordo é a 3-esfera $\partial\mathbb{B} = SX = (\partial\mathbb{H} \times \mathbb{H}) \cup (\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}) \cup (\partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H})$ colada dos dois toros sólidos $\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$ e $\partial\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ao longo do toro (de pontos com ambas as coordenadas isotrópicas) $\partial_0\mathbb{B} := \partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$.

Observação 3.1.1. Dado um ponto $p \in \mathbb{B}$, a menos que explícito o contrário, iremos denotar por $p_j := \pi_j p$, onde $\pi_j : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{H}$ é a projeção canônica na j -ésima coordenada de $\mathbb{B}$, $j = 1, 2$.

3.1.2 Isometrias do bidisco

Sejam $f, g \in \text{Isom } \mathbb{H}$. Então $(f, g) : (p_1, p_2) \mapsto (fp_1, gp_2)$ é uma isometria de $\mathbb{B}$. Disso segue que $\text{Isom}_o \mathbb{B} := \text{Isom } \mathbb{H} \times \text{Isom } \mathbb{H}$ está contido no grupo de isometrias do bidisco hiperbólico. Além destas, temos ainda a isometria $\iota : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}, (x, y) \mapsto (y, x)$. É bem sabido que o grupo de isometrias do bidisco hiperbólico é uma *extensão* de $\text{Isom}_o \mathbb{B}$ pela involução ι . Uma prova elementar deste fato pode ser encontrada em (CHARETTE; DRUMM; LAREAU-DUSSAULT, 2013) e utiliza essencialmente a ideia de que isometrias preservam famílias de subespaços totalmente geodésicos de mesma curvatura.

Proposição 3.1.2 ((CHARETTE; DRUMM; LAREAU-DUSSAULT, 2013)). O grupo de isometrias do bidisco é dado por

$$\text{Isom } \mathbb{B} := \text{Isom}_o \mathbb{B} \rtimes \langle \iota \rangle = \{ \iota \circ (f_1, f_2), (f_1, f_2) \mid f_j \in \text{Isom } \mathbb{H}, j = 1, 2 \},$$

onde $\langle \iota \rangle$ é o grupo gerado por ι . ■

O grupo de isometrias do bidisco não age transitivamente em pares de pontos com mesma distância. De fato, sejam $m, p, q \in \mathbb{B}$ tais que $m_2 = m_1, p_2 = p_1, q_1 = m_1$

e $d(m_1, q_2) = \sqrt{2}d(m_1, p_1)$. É imediato que $\mu(m, p) = \mu(m, q)$, porém não existe uma isometria $I \in \text{Isom } \mathbb{B}$ fixando o ponto m e tal que $Ip = q$.

De modo geral, temos a seguinte

Proposição 3.1.3. $p, p', q, q' \in \mathbb{B}$ tais que $\mu(p, p') = \mu(q, q')$. Existe uma isometria $I \in \text{Isom } \mathbb{B}$ tal que $Ip = q$ e $Ip' = q'$ sse os conjuntos $\{\text{ta}(p_1, p'_1), \text{ta}(p_2, p'_2)\}$ e $\{\text{ta}(q_1, q'_1), \text{ta}(q_2, q'_2)\}$ são iguais.

Demonstração. Pela proposição 3.1.2, $I = (f_1, f_2)$ ou $I = \iota \circ (f_1, f_2)$, onde f_1, f_2 são isometrias do plano hiperbólico. No primeiro caso, se $Ip = q$ e $Ip' = q'$, então

$$f_1 p_1 = q_1 \text{ e } f_1 p'_1 = q'_1 \Rightarrow d(q_1, q'_1) = d(f_1 p_1, f_1 p'_1) = d(p_1, p'_1).$$

Um argumento análogo mostra que $d(q_2, q'_2) = d(p_2, p'_2)$. No segundo caso, se $Ip = q$ e $Ip' = q'$, então

$$f_1 p_1 = q_2 \text{ e } f_1 p'_1 = q'_2 \Rightarrow d(q_2, q'_2) = d(f_1 p_1, f_1 p'_1) = d(p_1, p'_1).$$

E analogamente, $d(q_1, q'_1) = d(f_2 p_2, f_2 p'_2) = d(p_2, p'_2)$. ■

3.1.3 Geodésicas

Geodésicas do bidisco são da forma (γ_1, γ_2) , onde γ_1 e γ_2 são (parametrizações de) geodésicas em $\mathbb{H}$. De fato, se $p, q \in \mathbb{B}$ são distintos, então

$$\gamma : t \mapsto (\gamma_{p_1, q_1}(t), \gamma_{p_2, q_2}(t)) \quad (3.1)$$

é uma parametrização para a geodésica passando por p e q . Para ver isto, basta notar que

$$\mu(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s| \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

para todos $t, s \in \mathbb{R}$, onde $\lambda_j = d(p_j, q_j)$, $j = 1, 2$ (vide a parametrização 2.2). Note que se $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_2 = 0$, i.e., se p e q têm uma coordenada em comum, então $t \mapsto \gamma(t)$ tem uma coordenada constante. Um ponto $v \in \partial \mathbb{B}$ é um *vértice* da geodésica γ se $\gamma(t) \rightarrow v$ quando $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.

Seja $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ uma geodésica em $\mathbb{B}$. Associamos a γ a constante $\kappa(\gamma) := \sqrt{|\langle \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_2 \rangle / \langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1 \rangle|}$. Se $\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_1 \rangle = 0$, i.e., se γ_1 é constante, definimos $\kappa(\gamma) := \infty$. É claro que $\kappa(\gamma)$ independe da parametrização de γ e que $\kappa(\iota\gamma) = \kappa(\gamma)^{-1}$. A geodésica γ é dita *genérica* se ambas as projeções $\pi_1\gamma$ e $\pi_2\gamma$ são geodésicas de $\mathbb{H}$ ou, de maneira equivalente, se $\kappa(\gamma) \neq 0, \infty$. Dizemos que duas geodésicas γ e σ em $\mathbb{B}$ são *equivalentes* se $\kappa(\gamma) = \kappa(\sigma)$ ou $\kappa(\gamma) = \kappa(\sigma)^{-1}$.

Proposição 3.1.4. Sejam γ e σ duas geodésicas distintas em $\mathbb{B}$. Existe uma isometria $I \in \text{Isom } \mathbb{B}$ tal que $I\gamma = \sigma$ sse elas são equivalentes. ■

Observação 3.1.5. No plano hiperbólico, uma geodésica é unicamente determinada por um par de pontos isotrópicos $v, w \in \partial\mathbb{H}$ (seus vértices). Já no bidisco, dados dois pontos $v, w \in \partial\mathbb{B}$ distintos, temos as seguintes possibilidades:

1. Suponha que v esteja no toro sólido $\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H}$ e que v seja o vértice de alguma geodésica $\gamma \in \mathbb{B}$. Denote por $w \in \partial\mathbb{B}$ o outro vértice de γ . Suponha primeiro que v e w estão em toros sólidos distintos, i.e., que $v = (x, v')$ e $w = (w', y)$, onde $x, y \in \mathbb{H}$ e $v', w' \in \partial\mathbb{H}$. Sejam $p, q \in \mathbb{B}$ pontos distintos de γ . Da parametrização 3.1 segue que γ não tem os vértices descritos. Suponha agora que v e w estão no mesmo toro sólido, mas com coordenadas negativas distintas. Um argumento análogo ao anterior mostra v e w não são vértices de nenhuma geodésica em $\mathbb{B}$. Resta o caso em que v e w pertencem ao mesmo toro sólido e têm coordenadas negativas iguais, ou seja, $v = (x, v')$ e $w = (x, w')$, para certos $x \in \mathbb{H}$ e $v', w' \in \partial\mathbb{H}$. Assim, se γ' é a geodésica em $\mathbb{H}$ com vértices v' e w' , a geodésica $\gamma : t \mapsto (x, \gamma'(t))$ é a única geodésica em $\mathbb{B}$ ligando v e w . O caso em que $v \in \partial\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ é análogo.
2. Suponha que $v, w \in \partial_0\mathbb{B}$. Neste caso, existem infinitas geodésicas com vértices v e w . De fato, defina

$$\gamma_{\lambda,r}(t) = \left(e^{-t}v_1 - e^t k_1 w_1, e^{-t\lambda-r}v_2 - e^{t\lambda+r}k_2 w_2 \right), \quad (3.2)$$

onde $\lambda, r \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ e $2k_j = \langle v_j, w_j \rangle^{-1}$, $j = 1, 2$. Então é imediato que $\gamma_{\lambda,r}$ tem vértices v e w e que $\gamma_{\lambda,r} \neq \gamma_{\lambda',r'}$ se $(\lambda, r) \neq (\lambda', r')$. Essas são, de fato, todas as geodésicas com vértices v e w .

3.2 Superfícies do bidisco

As superfícies totalmente geodésicas do bidisco são, geometricamente, de três tipos distintos, dependendo da geometria nelas induzida. As *diagonais* possuem, com a métrica induzida, curvatura constante $-1/2$; os *planos verticais/horizontais* têm curvatura constante -1 e, os *planos euclidianos*, curvatura constante 0 .

Estas superfícies totalmente geodésicas desempenharão um papel central na construção de certas classes de hipersuperfícies do bidisco, apresentadas na seção seguinte.

3.2.1 Planos verticais/horizontais

Planos verticais/horizontais constituem a classe mais simples de superfícies totalmente geodésicas em $\mathbb{B}$. Eles serão utilizados para mostrar que os fibrados triviais sobre superfícies de gênero $k \geq 2$ admitem geometria modelada no bidisco.

Definição 3.2.1. O produto $p \times \mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{H} \times p$) de um ponto e um plano hiperbólico será chamado de *plano vertical* (resp. *horizontal*.)

Via a involução ι , planos verticais e horizontais são isométricos. O estabilizador de um plano vertical $p \times \mathbb{H}$ em $\text{Isom } \mathbb{B}$ é, naturalmente, o produto do estabilizador $\text{SO}(2)$ de um ponto no plano hiperbólico pelo grupo $\text{SO}(2, 1)$ de isometrias do disco hiperbólico, ou seja, $\text{Stab}(p \times \mathbb{H}) \simeq \text{SO}(2) \times \text{SO}(2, 1)$.

Dado um plano vertical $p \times \mathbb{H}$ e um ponto $(p, q) \in p \times \mathbb{H}$, é fácil ver que $v \in T_{(p,q)}\mathbb{B}$ é tangente a $p \times \mathbb{H}$ sse $v_1 = 0 \in T_p\mathbb{H}$ e $v_2 \in T_q\mathbb{H}$.

Observação 3.2.2. Um plano vertical e um plano horizontal sempre se intersectam em um único ponto e o fazem ortogonalmente. De fato, se $v \in T_{(p,q)}(p \times \mathbb{H})$ e $w \in T_{(p,q)}(\mathbb{H} \times q)$, então $v = (0, v)$ e $w = (w, 0)$ para alguns $v \in T_q\mathbb{H}$ e $w \in T_p\mathbb{H}$. Logo, $\langle v, w \rangle = 0$.

A *projeção ortogonal* no plano vertical $p \times \mathbb{H}$ é definida por

$$\text{proj}_{p \times \mathbb{H}} : x \mapsto (p, x_2), \quad x \in \mathbb{B}. \quad (3.3)$$

É claro que $\mu(x, p \times \mathbb{H}) = d(x_1, p)$. Além do mais, para cada $x \in p \times \mathbb{H}$, $\text{proj}_{p \times \mathbb{H}}^{-1}x = \mathbb{H} \times x_2$ é ortogonal a $p \times \mathbb{H}$ em (p, x_2) . Isso implica que

$$\mathbb{B} = \text{proj}_{p \times \mathbb{H}}^{-1}(p \times \mathbb{H}) = \bigsqcup_{x \in p \times \mathbb{H}} \text{proj}_{p \times \mathbb{H}}^{-1}x,$$

onde $\bigsqcup$ denota a união disjunta.

A *projeção ortogonal* $\text{proj}_{\mathbb{H} \times p}$ no plano horizontal $\mathbb{H} \times p$ é definida de maneira análoga.

3.2.2 Planos euclidianos

Planos euclidianos são superfícies totalmente geodésicas de curvatura constante zero no bidisco. Eles serão utilizados na construção de um fibrado trivial sobre o toro com a geometria modelada no bidisco (Teorema 4.1.2).

Definição 3.2.3. Um *plano euclidiano* é o produto $\gamma_1 \times \gamma_2$ de duas geodésicas $\gamma_1, \gamma_2 \subset \mathbb{H}$. Se $u_j \in EV$ é o ponto polar da geodésica γ_j , $j = 1, 2$, dizemos que $u = (u_1, u_2)$ é o *ponto polar* do plano euclidiano $\gamma_1 \times \gamma_2$.

Toda geodésica genérica determina (e está contida em) um único plano euclidiano. Neste caso, chamaremos o plano euclidiano determinado pela geodésica genérica γ de o *plano de* γ . Se uma geodésica não é genérica, então ela está contida em infinitos planos euclidianos que se intersectam apenas nesta geodésica.

Planos euclidianos contêm representantes de todas as classes de equivalência de geodésicas do bidisco, i.e., se S é um plano euclidiano arbitrário, então para cada $\kappa \in \mathbb{R}$, existe pelo menos uma geodésica γ em S com $\kappa(\gamma) = \kappa$ (ver observação 3.1.5). Isso não é

verdade, por exemplo, para planos verticais/horizontais, que só possuem geodésicas com $\kappa = 0, \infty$, e para diagonais que só possuem geodésicas com $\kappa = 1$ (ver definição 3.2.11).

O estabilizador de um plano euclidiano no bidisco é particularmente pobre:

Proposição 3.2.4. Uma isometria I do bidisco estabiliza o plano euclidiano $S = \gamma_1 \times \gamma_2$, sse

1. $I = (f_1, f_2)$ para qualquer par $f_1, f_2 \in \text{Isom } \mathbb{H}$ tal que $f_j \gamma_j = \gamma_j$, $j = 1, 2$.
2. $I = \iota \circ (f_1, f_2)$ para qualquer par $f_1, f_2 \in \text{Isom } \mathbb{H}$ tal que $f_j \gamma_j = \gamma_{j+1}$, $j = 1, 2$ (índices mod 2).

Demonstração. Pela proposição 3.1.2, $I = (f_1, f_2)$ ou $I = \iota \circ (f_1, f_2)$ onde f_1, f_2 são isometrias do plano hiperbólico. No primeiro caso, $(f_1, f_2)(p_1, p_2) \in \gamma_1 \times \gamma_2$, $\forall p_j \in \gamma_j$, sse f_j estabiliza γ_j , $j = 1, 2$. No segundo caso, $\iota \circ (f_1, f_2)(p_1, p_2) = (f_2 p_2, f_1 p_1) \in \gamma_1 \times \gamma_2$, $\forall p_j \in \gamma_j$, $j = 1, 2$, sse f_1 manda γ_1 para γ_2 e f_2 manda γ_2 para γ_1 . ■

Corolário 3.2.5. Se $I \in \text{Isom } \mathbb{B}$ estabiliza um plano euclidiano e tem ordem finita, então I tem ordem no máximo 4.

Demonstração. Segue imediatamente da proposição 3.1.3. ■

Seja $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ um plano. Uma tal isometria é dada por $I = \iota \circ (fr(p), hf^{-1})$, onde $p \in \gamma_1$ e $f, h \in \text{Isom } \mathbb{H}$ são tais que $f\gamma_1 = \gamma_2$ e h é hiperbólica com eixo γ_1 ou $h = 1$. De fato, dado $x \in \mathbb{B}$, temos

$$\begin{aligned} (\iota \circ (fr(p), hf^{-1}))^4(x_1, x_2) &= (\iota \circ (fr(p), hf^{-1}))^3(hf^{-1}x_2, fr(p)x_1) \\ &= (\iota \circ (fr(p), hf^{-1}))^2(hr(p)x_1, fr(p)hf^{-1}x_2) \\ &= \iota \circ (fr(p), hf^{-1})(hr(p)hf^{-1}x_2, fr(p)hr(p)x_1) \\ &= (hr(p)hr(p)x_1, fr(p)hr(p)hf^{-1}x_2) \\ &= (hh^{-1}x_1, fh^{-1}hf^{-1}x_2) = (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Além do mais

$$\begin{aligned} \iota \circ (fr(p), hf^{-1})(x_1, x_2) &= (x_1, x_2) \Leftrightarrow (hf^{-1}x_2, fr(p)x_1) = (x_1, x_2) \\ &\Leftrightarrow hf^{-1}x_2 = x_1 \text{ e } fr(p)x_1 = x_2 \\ &\Rightarrow x_2 = fh^{-1}x_1 \text{ e } fr(p)x_1 = fh^{-1}x_1 \\ &\Rightarrow r(p)x_1 = h^{-1}x_1 \Rightarrow x_1 = m \Rightarrow x_2 = fh^{-1}m, \end{aligned}$$

onde $m = \gamma_{p, hp}(1/2)$, ou seja, I fixa o ponto $(m, fh^{-1}m) \in S$. É claro que se h estabiliza γ_2 (e não é elíptica), a isometria $I = \iota \circ (fh, r(p)f^{-1})$ também tem ordem 4.

Definição 3.2.6. Dois planos euclidianos distintos $\gamma_1 \times \gamma_2$ e $\gamma'_1 \times \gamma'_2$ são ditos, respectivamente, *ultraparalelos*, *assintóticos*, *concorrentes* se as geodésicas γ_j e γ'_j , $j = 1, 2$, são ultraparalelas, assintóticas, concorrentes.

Planos euclidianos concorrentes se intersectam em um único ponto em $\mathbb{B}$; planos assintóticos se intersectam em um único ponto em $\partial\mathbb{B}$; planos ultraparalelos são disjuntos em $\mathbb{B}$. Existem ainda planos euclidianos que se intersectam ao longo de uma geodésica em $\mathbb{B}$. Como um exemplo, tome $\gamma_1 \times \gamma$ e $\gamma'_1 \times \gamma$, onde $\gamma, \gamma_1, \gamma'_1$ são geodésicas em $\mathbb{H}$ com γ_1 e γ'_1 concorrentes.

Observação 3.2.7. Sejam $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ e $S' = \gamma'_1 \times \gamma'_2$ planos euclidianos concorrentes. Seja θ_j o ângulo no qual as geodésicas γ_j e γ'_j se intersectam, $j = 1, 2$. O par (θ_1, θ_2) é um invariante geométrico deste par de planos. Chamaremos tal invariante de *ângulo* entre S e S' .

Dado um plano euclidiano $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ e um ponto $p \in S$ é automático verificar que $v \in T_p\mathbb{B}$ é tangente a S em p sse $v_j \in T_{p_j}\gamma_j$, $j = 1, 2$.

Proposição 3.2.8. Sejam $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ e $S' = \gamma'_1 \times \gamma'_2$ planos euclidianos concorrentes. Então S e S' são ortogonais sse γ_j e γ'_j , $j = 1, 2$, são ortogonais.

Demonstração. É claro que a ortogonalidade de γ_j e γ'_j , $j = 1, 2$, implica a ortogonalidade de S e S' . Suponha que S e S' são ortogonais no ponto $p = S \cap S'$. Então, para quaisquer $v \in T_pS$ e $v' \in T_pS'$, temos $\langle v, v' \rangle = 0$. Se $v' = (v'_1, 0) \in T_pS'$, onde $v'_1 \neq 0$, então $0 = \langle v, v' \rangle \Leftrightarrow \langle v_1, v'_1 \rangle = -\langle v_2, 0 \rangle = 0$ para qualquer $v \in T_pS$, ou seja, $T_{p_1}\gamma_1$ e $T_{p_1}\gamma'_1$ são ortogonais. Um raciocínio análogo mostra que $T_{p_2}\gamma_2$ e $T_{p_2}\gamma'_2$ devem ser ortogonais. ■

Seja γ uma geodésica em $\mathbb{H}$ com ponto polar u . A projeção ortogonal na geodésica γ é dada por (vide (ANAN'IN; GROSSI, 2011a) ou (GOLDMAN, 1999))

$$\pi(u)x := x - \frac{\langle x, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u. \quad (3.4)$$

A *projeção ortogonal* no plano euclidiano $\gamma_1 \times \gamma_2$ é definida por

$$\text{proj}_{\gamma_1 \times \gamma_2} : x \mapsto (\pi(u_1)x_1, \pi(u_2)x_2),$$

onde u_j é o polar da geodésica γ_j , $j = 1, 2$.

Observação 3.2.9. Quando não houver possibilidade de consufão, vamos escrever proj_S para indicar a projeção ortogonal no plano euclidiano $S = \gamma_1 \times \gamma_2$.

Proposição 3.2.10. Se S é um plano euclidiano, então para qualquer $p \in S$, o subespaço $\text{proj}_S^{-1}p$ é o plano euclidiano ortogonal a S em p . Além do mais, $\text{proj}_S^{-1}p \cap \text{proj}_S^{-1}q = \emptyset$ sse $p \neq q$, $p, q \in S$. Em particular $\mathbb{B} = \bigsqcup_{p \in S} \text{proj}_S^{-1}p$.

Demonstração. Seja $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ e seja $p \in S$. Então $\text{proj}_S^{-1}p = \gamma'_1 \times \gamma'_2$, onde γ'_j é a geodésica ortogonal a γ_j no ponto p_j , $j = 1, 2$. E como em $\mathbb{H}$ geodésicas (distintas) ortogonais a uma geodésica em comum são ultraparalelas, temos que $\text{proj}_S^{-1}p \cap \text{proj}_S^{-1}q = \emptyset$ sse $p, q \in S$ são distintos. ■

3.2.3 Diagonais

Uma *diagonal* no bidisco nada mais é do que uma identificação $f \in \text{Isom } \mathbb{H}$ do disco hiperbólico com si mesmo. Diagonais serão utilizadas para provar que o fibrado tangente de discos sobre uma superfície de gênero $k \geq 2$ admite geometria modelada no bidisco hiperbólico.

Definição 3.2.11. Uma *diagonal* é qualquer subespaço da forma $\Delta_f := \{(x, fx) \mid x \in \mathbb{H}\}$, onde $f \in \text{Isom } \mathbb{H}$.

Note que se I é um isometria arbitrária do bidisco, então $I\Delta_1 = \Delta_f$, onde $f = f_2 f_1^{-1}$ (resp. $f = f_1 f_2^{-1}$) se $I = (f_1, f_2)$ (resp. $I = \iota \circ (f_1, f_2)$). Em particular, o espaço das diagonais em $\mathbb{B}$ tem dimensão 3.

Observação 3.2.12. No que se segue, vamos escrever Δ_p , $p \in \mathbb{H}$, e Δ ao invés de $\Delta_{r(p)}$ e Δ_1 , respectivamente.

Se γ é uma geodésica na diagonal Δ_f , então $\gamma_2(t) = f\gamma_1(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular $\kappa(\gamma) = 1$. Reciprocamente, se γ é uma geodésica em $\mathbb{B}$ tal que $\kappa(\gamma) = 1$, então existe uma única isometria $f \in \text{Isom } \mathbb{H}$ tal que $\gamma_2(t) = f\gamma_1(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A diagonal Δ_f será chamada de a *diagonal de γ* .

Proposição 3.2.13. O estabilizador da diagonal Δ_f é dado por

$$\text{Stab}(\Delta_f) = \{(g, fgf^{-1}), \iota \circ (fg, gf^{-1}) \mid g \in \text{Isom } \mathbb{H}\}.$$

Demonstração. Seja $I = (f_1, f_2)$ ou $I = \iota \circ (f_1, f_2)$. Então $Ip \in \Delta$ para todo $p \in \Delta$ sse $f_1 = f_2$. Resta conjugar essas isometrias por $(1, f)$. ■

Proposição 3.2.14. Duas diagonais arbitrárias Δ_f, Δ_g se intersectam, respectivamente, em um único ponto de $\mathbb{B}$, em um único ponto de $\partial\mathbb{B}$, em exatamente dois pontos distintos de $\partial\mathbb{B}$ sse $f^{-1}g$ é elíptica, parabólica, hiperbólica.

Demonstração. Se $p \in \Delta_f \cap \Delta_g$, então existem $x, y \in \mathbb{H}$ tais que $p = (x, fx) = (y, gy)$. Logo, $x = y$ e $f^{-1}gx = x$. ■

Definição 3.2.15. Dizemos que duas diagonais distintas são, respectivamente, *ultraparalelas*, *assintóticas*, *concorrentes* se elas se intersectam em exatamente dois pontos distintos de $\partial\mathbb{B}$, um único ponto de $\partial\mathbb{B}$, um único ponto de $\mathbb{B}$.

Um vetor $v \in T_p\mathbb{B}$ é tangente à diagonal Δ_f no ponto $p \in \Delta_f$ sse $v_2 = fv_1$. Dadas duas diagonais concorrentes Δ_f e Δ_g , é natural definir o *ângulo* entre elas por $|\theta|/2$, onde $\theta \in [-\pi, \pi]$ é o ângulo de rotação da isometria elíptica $f^{-1}g$. A diagonal Δ_f é ortogonal à diagonal Δ sse $f = r(p)$, para algum ponto $p \in \mathbb{H}$.

A *projeção ortogonal* na diagonal Δ_f é definida por

$$\text{proj}_{\Delta_f} : x \mapsto (m, fm),$$

onde $m = \gamma_{x_1, f^{-1}x_2}(1/2)$.

Proposição 3.2.16. Sejam $p \in \mathbb{B}$ e $f \in \text{Isom } \mathbb{H}$. Então $\text{proj}_{\Delta_f} p \in \Delta_f$ é o (único) ponto na diagonal Δ_f que realiza a distância entre p e Δ_f .

Demonstração. Podemos supor $f = 1$. Sejam $m = \gamma_{p_1, p_2}(1/2)$, o ponto médio de p_1 e p_2 em $\mathbb{H}$, e γ a geodésica em $\mathbb{H}$ passando por p_1 e p_2 . Seja ainda $y \in \mathbb{H} \setminus \gamma$ (o caso $y \in \gamma$, $y \neq m$ segue pelo mesmo argumento). Então $\mu^2(p, (y, y)) = d^2(p_1, y) + d^2(p_2, y) > d^2(p_1, y') + d^2(p_2, y')$, onde y' é a projeção ortogonal de y em γ . Se y' está entre p_1 e p_2 , então

$$\begin{aligned} d^2(p_1, y') + d^2(p_2, y') &= \left(d(p_1, y') + d(p_2, y') \right)^2 - 2d(p_1, y')d(p_2, y') \\ &\geq d^2(p_1, p_2) - 2d(p_1, m)d(p_2, m) = d^2(p_1, p_2)/2 \\ &= \mu^2(p, (m, m)). \end{aligned}$$

Se y' não está entre p_1 e p_2 , então

$$\begin{aligned} d^2(p_1, y') + d^2(p_2, y') &= (d(p_1, y') - d(p_2, y'))^2 + 2d(p_1, y')d(p_2, y') \\ &= d^2(p_1, p_2) + 2d(p_1, y')d(p_2, y') > d^2(p_1, p_2)/2 \\ &= \mu^2(p, (m, m)). \end{aligned}$$

■

A seguinte observação é uma aplicação direta da proposição anterior.

Observação 3.2.17. Sejam $p \in \mathbb{B}$ e $q \in \Delta$. Então $\text{proj}_{\Delta} p = q$ sse $p_2 = R(q_1)p_1$. Logo, $\text{proj}_{\Delta}^{-1} q = \Delta_{q_1}$. De modo geral, a diagonal ortogonal a Δ_f em $p \in \Delta_f$ é dada por $\text{proj}_{\Delta_f}^{-1} p = \Delta_{fr(p_1)}$. Note ainda que $\text{proj}_{\Delta_f}^{-1} p \cap \text{proj}_{\Delta_f}^{-1} q = \emptyset$ sse $p \neq q$, $p, q \in \Delta_f$, o que implica que $\mathbb{B} = \text{proj}_{\Delta_f}^{-1} \Delta_f = \bigsqcup_{p \in \Delta_f} \text{proj}_{\Delta_f}^{-1} p$.

Proposição 3.2.18. Duas diagonais ultraparalelas possuem uma família uniparamétrica de diagonais simultaneamente ortogonais a ambas.

Demonstração. Suponha que as diagonais em questão são Δ e Δ_f , para alguma isometria hiperbólica $f \in \text{Isom } \mathbb{H}$. A ortogonalidade de Δ_p e Δ_f (ver observação anterior) é equivalente à ortogonalidade de Δ e $\Delta_{r(p)f}$. Mas pela observação anterior, Δ e $\Delta_{r(p)f}$ são

ortogonais sse $r(p)f$ é uma reflexão em ponto. Provemos que isto acontece sse p é um ponto no eixo f .

De fato, suponha que p pertence ao eixo de f . Escrevemos f na forma $f = r(p_2)r(p_1)$, onde p_1, p_2 pertencem ao eixo de f . Movendo simultaneamente p_1 e p_2 ao longo de eixo de f sem alterar as distâncias entre tais pontos (tal movimento se chama um *bending*, vide (ANAN'IN, 2012)), não modificamos a isometria f . Assim, podemos fazer $p_2 = p$, isto é, $f = r(p)r(p'_1)$ para algum p'_1 no eixo da isometria. Daí, $r(p)f = r(p)r(p)r(p'_1) = r(p'_1)$. Reciprocamente, suponha que $r(p)f$ é uma reflexão em ponto e que p não pertence ao eixo de f . Escrevemos f na forma $f = r_2r_1$ onde r_j é a reflexão numa geodésica γ_j , $j = 1, 2$, ortogonal ao eixo de f e tal que $p \in \gamma_2$. Seja γ_3 a geodésica ortogonal a γ_2 passando por p . Então $r(p) = r_3r_2$, onde r_3 denota a reflexão na geodésica γ_3 . Assim, $r(p)f = r_3r_2r_2r_1 = r_3r_1$. Como $r(p)f$ é uma reflexão em ponto, isto significa que as geodésicas γ_1 e γ_3 se intersectam ortogonalmente, o que é impossível.

Logo, para cada $p \in \text{eixo}(f)$ a diagonal Δ_p é ortogonal a Δ e a Δ_f . Em particular, Δ_p intersecta Δ_f em $\text{proj}_{\Delta_f}\Delta_p = (m, fm)$, onde $m = \gamma_{p,f^{-1}p}(1/2)$. ■

Corolário 3.2.19. Sejam Δ_{f_1} e Δ_{f_2} ultraparalelas. A diagonal Δ_f é simultaneamente ortogonal a Δ_{f_1} e Δ_{f_2} sse $f = f_1r(p)$ ou $f = f_2r(p)$ para algum ponto p no eixo de $f_1^{-1}f_2$.

Demonstração. Pela Observação 3.2.17, a diagonal Δ_p é ortogonal a Δ ; pelo Lema acima, Δ_p é ortogonal a $\Delta_{f_1^{-1}f_2}$ (resp. $\Delta_{f_2^{-1}f_1}$) sse p é um ponto no eixo de $f_1^{-1}f_2$. Logo uma diagonal Δ_f é simultaneamente ortogonal a Δ_{f_1} e Δ_{f_2} sse $f = f_1r(p)$ (resp. $f = f_2r(p)$) para algum p no eixo de $f_1^{-1}f_2$. ■

Sejam f_1 e f_2 como no corolário acima. Da proposição 3.2.18, se p pertence ao eixo de $h_j := f_j^{-1}f_{j+1}$, então Δ_p intersecta Δ e Δ_{h_j} , respectivamente, em (p, p) e (m, h_jm) , onde $m = \gamma_{p,h_j^{-1}p}(1/2)$, $j = 1, 2$ (índices mod 2). Aplicando $(1, f_j)$, obtemos que $\Delta_{f_jr(p)}$ intersecta ortogonalmente Δ_{f_j} e $\Delta_{f_{j+1}}$, respectivamente, em (p, f_jp) e $(m, f_{j+1}m)$, $j = 1, 2$ (índices mod 2). Portanto, variando p , vemos que duas diagonais ultraparalelas Δ_{f_1} e Δ_{f_2} possuem ortogonais comuns (somente) ao longo das geodésicas $(\gamma, f_1\gamma) \subset \Delta_{f_1}$ e $(\gamma, f_2\gamma) \subset \Delta_{f_2}$, onde γ é o eixo de $f_1^{-1}f_2$. Como consequência, temos a seguinte

Proposição 3.2.20. A distância entre duas diagonais ultraparalelas Δ_{f_1} e Δ_{f_2} , é dada por

$$\mu(\Delta_{f_1}, \Delta_{f_2}) = \ell_f / \sqrt{2},$$

onde $f := f_1^{-1}f_2$.

Demonstração. Sejam $f := f_1^{-1}f_2$ e $m = \gamma_{p,f^{-1}p}(1/2)$, onde p é um ponto no eixo de f .

Como visto logo acima, a distância entre Δ_{f_1} e Δ_{f_2} é dada por

$$\begin{aligned}\mu^2((p, f_1 p), (m, f_2 m)) &= d^2(p, m) + d^2(f_1 p, f_2 m) = d^2(p, m) + d^2(f^{-1} p, m) \\ &= 2d^2(p, m) = d^2(p, f p)/2.\end{aligned}$$

■

Observação 3.2.21. Se $f \in \text{Isom } \mathbb{H}$ é elíptica ou hiperbólica, faz sentido associar o símbolo f^t à isometria com o mesmo conjunto de pontos fixos que f , mas com autovalores elevados a $t \in \mathbb{R}$. É claro que $f^0 := 1$. Vamos nos referir ao grupo $C(f) := \{f^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ como o *subgrupo uniparamétrico* de f . Note que se $I \in \text{Isom}_o \mathbb{B}$, podemos definir $I^t := (f_1^t, f_2^t)$, sempre que f_j , $j = 1, 2$, é elíptica ou hiperbólica.

A *reflexão* na diagonal Δ_f é definida por

$$R(f) := \iota \circ (f, f^{-1}).$$

Claro que $R(f)$ é uma involução que fixa Δ_f pontualmente. Além disso, $R(f)$ é uma reflexão no sentido usual, isto é, $R(f)$ estabiliza as diagonais ortogonais a Δ_f (para ver isto, tome $f = 1$).

Dadas duas diagonais ultraparalelas Δ_{f_1} e Δ_{f_2} , dizemos que Δ_f é a *diagonal média* de Δ_{f_1} e Δ_{f_2} se $R(f)\Delta_{f_1} = \Delta_{f_2}$.

Proposição 3.2.22. Sejam Δ_{f_1} e Δ_{f_2} ultraparalelas. Então a diagonal média de Δ_{f_1} e Δ_{f_2} é dada por Δ_f com $f = f_1(f_1^{-1}f_2)^{1/2} = f_2(f_1^{-1}f_2)^{-1/2}$.

Demonstração. Dado $(x, f_1 x) \in \Delta_{f_1}$, temos

$$\begin{aligned}R(f)(x, f_1 x) &= \iota \circ (f, f^{-1})(x, f_1 x) = (f^{-1} f_1 x, f x) = ((f_1^{-1} f_2)^{-1/2} x, f_1 (f_1^{-1} f_2)^{1/2} x) \\ &= ((f_1^{-1} f_2)^{-1/2} x, f_2 f_2^{-1} f_1 (f_1^{-1} f_2)^{1/2} x) = ((f_1^{-1} f_2)^{-1/2} x, f_2 (f_1^{-1} f_2)^{-1/2} x),\end{aligned}$$

ou seja, $R(f)(x, f_1 x) \in \Delta_{f_2}$. ■

3.3 Hipersuperfícies do bidisco

Nesta seção, descreveremos alguns tipos de hipersuperfícies do bidisco (fibradas por superfícies totalmente geodésicas) bem como exibiremos critérios suficientes para garantir que duas hipersuperfícies de um mesmo tipo se intersectem somente ao longo de uma fibra comum a ambas. Isto é essencial para a construção de poliedros fundamentais cujas faces são as mencionadas hipersuperfícies.

3.3.1 Fibrações verticais e horizontais

Definição 3.3.1. Uma *fibração vertical* (resp. *horizontal*) é o produto $\gamma \times \mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{H} \times \gamma$) de uma geodésica e um plano hiperbólico.

Sejam $p \in \mathbb{H}$ e γ uma geodésica em $\mathbb{H}$. É imediato que

$$\text{proj}_{\mathbb{H} \times p}^{-1}(\gamma, p) = \gamma \times \mathbb{H} \quad \text{e} \quad \text{proj}_{p \times \mathbb{H}}^{-1}(p, \gamma) = \mathbb{H} \times \gamma.$$

Além de sua fibração natural por planos verticais, $\gamma \times \mathbb{H}$ possui infinitas fibrações por planos euclidianos: sejam $\sigma \subset \mathbb{H}$ uma geodésica arbitrária e σ_x a geodésica passando por $x \in \mathbb{H}$ e ortogonal a σ ; então $\gamma \times \mathbb{H} = \bigsqcup_{x \in \sigma} \gamma \times \sigma_x$.

Duas fibrações verticais/horizontais distintas, quando se intersectam, o fazem ao longo de um plano vertical/horizontal. Note-se ainda que a fibração vertical $\gamma_1 \times \mathbb{H}$ e a fibração horizontal $\mathbb{H} \times \gamma_2$ se intersectam ao longo do plano euclidiano $\gamma_1 \times \gamma_2$.

3.3.2 Fibrações euclidianas

Definição 3.3.2. Seja γ uma geodésica no plano euclidiano S . A hipersuperfície

$$E(S, \gamma) := \text{proj}_S^{-1}\gamma,$$

será chamada de *fibração euclidiana*, com *espinha* S e *eixo* γ . Para cada $p \in \gamma$, o plano euclidiano $\text{proj}_S^{-1}p$ será chamado uma *fatia* de $E(S, \gamma)$.

Observação 3.3.3. Se $\kappa(\gamma) = 0$ (resp. $\kappa(\gamma) = \infty$), então $E(S, \gamma)$ é uma fibração vertical (resp. horizontal). Em particular, fibrações verticais/horizontais são casos particulares de fibrações euclidianas.

É fácil ver que a hipersuperfície $E(S, \gamma)$ é dual à parte positiva da geodésica γ ; em outras palavras, o conjunto dos pontos com ambas as coordenadas positivas de γ consiste dos polares às fatias de $E(S, \gamma)$.

Seja $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ um plano euclidiano e seja f_j uma isometria hiperbólica estabilizando a geodésica γ_j , $j = 1, 2$. Então, para cada $p \in S$, a imagem do mapa $t \mapsto (f_1^{t\lambda_1}, f_2^{t\lambda_2})p$ descreve uma geodésica γ em S tal que $\kappa(\gamma) = \lambda_2/\lambda_1$. Seja γ uma tal geodésica em S e seja $q \in E(S, \gamma)$. Definimos a *trajetória* de q em $E(S, \gamma)$ como a imagem do mapa $c_q : t \mapsto (f_1^{t\lambda_1}, f_2^{t\lambda_2})q$. Intuitivamente, a trajetória de $q \in E(S, \gamma)$ é a curva $(c_1 \times c_2) \cap E(S, \gamma)$, onde c_j denota o hiperciclo de γ_j passando por q_j , $j = 1, 2$.

Proposição 3.3.4. Sejam S e S' planos euclidianos ultraparalelos. Então existe uma única fibração euclidiana contendo S e S' como fatias.

Demonstração. Suponha que $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ e $S' = \gamma'_1 \times \gamma'_2$, onde γ_j e γ'_j , $j = 1, 2$, são ultraparalelas. Denote por σ_j a geodésica simultaneamente ortogonal a γ_j e γ'_j , $j = 1, 2$. A fibração euclidiana procurada é dada por $E(\sigma_1 \times \sigma_2, \gamma)$, onde γ é a geodésica ligando (p_1, p_2) e (p'_1, p'_2) , onde $p_j := \sigma_j \cap \gamma_j$ e $p'_j := \sigma_j \cap \gamma'_j$, $j = 1, 2$. ■

Existem 4 regiões conexas e duas a duas disjuntas associadas a cada plano euclidiano $S \subset \mathbb{B}$. Elas são as componentes do complementar de $(\pi_1 S \cap \mathbb{H}) \cup (\mathbb{H} \cap \pi_2 S)$ em $\mathbb{B}$. Essas regiões são chamadas de *blocos* associados a S .

Definição 3.3.5. Duas fibrações euclidianas são ditas *cotranchais* se elas têm uma fatia em comum. Duas fibrações euclidianas cotranchais são ditas *opostas* se elas não intersectam o mesmo par de blocos associados à fatia comum.

Teorema 3.3.6. Duas fibrações euclidianas cotranchais com eixos genéricos são disjuntas fora da fatia comum sse elas são opostas ou coespinais com eixos distintos.

Demonstração. Sejam E_1 e E_2 fibrações euclidianas cotranchais com fatia comum $S = \gamma \times \gamma'$. Por definição, as respectivas espinhas $S_1 = \gamma_1 \times \gamma'_1$ e $S_2 = \gamma_2 \times \gamma'_2$ de E_1 e E_2 devem, necessariamente, ser ortogonais a S . Assim podemos supor que $E_j := \text{proj}_{S_j}^{-1} \gamma_j$ para alguma geodésica genérica γ_j em S_j tal que $\text{proj}_{S_j}^{-1} \gamma_j(0) = S$ (ver figura 1a para uma configuração desses planos). Suponha também que, para todo $t \neq 0$, $\gamma_{1,t}$ e $\gamma_{2,t}$ (resp. $\gamma'_{1,t}$ e $\gamma'_{2,t}$) estejam do mesmo lado com relação a γ (resp. γ'), onde $\gamma_{j,t} \times \gamma'_{j,t} := \text{proj}_{S_j}^{-1} \gamma_j(t)$ é a fatia de E_j no ponto $\gamma_j(t)$, $j = 1, 2$. Isso é equivalente a dizer que E_1 e E_2 não são opostas. Suponha ainda que E_1 e E_2 são disjuntas fora da fatia comum S . Temos os seguintes casos:

Caso 1. $\gamma_1 \neq \gamma_2$ e $\gamma'_1 \neq \gamma'_2$. Seja $t_1 > 0$ (resp. $t_2 > 0$) tal que γ'_{1,t_1} e γ'_2 (resp. γ'_{2,t_2} e γ'_{1,t_1}) são assintóticas. É fácil ver que para todo $t > t_2$, $\gamma'_{2,t}$ e γ'_{1,t_1} são concorrentes (ver figura 1a). Isto implica que, para todo $t > t_2$, $\gamma_{2,t}$ e γ_{1,t_1} não se intersectam. Se γ_{1,t_1} e γ_2 são concorrentes, então γ_{1,t_1} deve, necessariamente, estar entre γ e $\gamma_{2,t}$ para todo $t \geq t_2$ (ver figura 1a). Seja $t_3 > t_2$ tal que γ'_{2,t_3} e γ'_1 são assintóticas (ver figura 1b). Então, para todo $t > t_1$, $\gamma'_{1,t}$ e γ'_{2,t_3} se intersectam. Em particular, existe $t > t_1$ tal que as geodésicas $\gamma_{1,t}$ e γ_{2,t_3} se intersectam, o que contraria o fato de que $E_1 \cap E_2 = S$. Agora se γ_{1,t_1} e γ_2 são ultraparalelas, então $\gamma_{2,t}$ não está entre γ e γ_{1,t_1} para todo $t > t_2$ (ver figura 1c). Seja $t_3 < t_1$ tal que γ_{1,t_4} e γ_2 são assintóticas (ver figura 1d). Então para todo $t > t_2$, $\gamma_{2,t}$ intersecta γ_{1,t_4} , o que implica que γ'_{1,t_4} está entre $\gamma'_{2,t}$ e γ' para todo $t > t_2$. Seja $t_5 < t_2$ tal que γ_{2,t_5} e γ_1 são assintóticas (ver figura 1e). Note que $\gamma_{1,t}$ e γ_{2,t_5} se intersectam para todo $t > t_4$ e que γ'_{1,t_4} está entre $\gamma'_{2,t}$ e γ' para todo $t > t_5$. Isso implica que, para algum $t > t_4$, a geodésica $\gamma'_{1,t}$ intersecta a geodésica γ'_{2,t_5} , o que é uma contradição.

Caso 2: $\gamma_1 = \gamma_2$ e $\gamma'_1 \neq \gamma'_2$. Reparametrizando, se necessário, podemos supor que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (ver figura 1f). Como E_1 e E_2 são disjuntos fora da fatia comum S , então, por exemplo, $\gamma'_{1,t}$ está entre $\gamma'_{2,t}$ e γ' para todo $t > 0$ suficientemente pequeno.

Figura 1 – Configuração de fatias em um par de fibrações euclidianas cotranchais.

Mas para algum $t > 0$, $\gamma'_{1,t}$ e γ'_2 são assintóticas e, para tal t , as geodésicas $\gamma'_{1,t}$ e $\gamma'_{2,t}$ se intersectam, o que é uma contradição.

Caso 3. $\gamma_1 \neq \gamma_2$ e $\gamma'_1 = \gamma'_2$. Mesmo argumento do caso anterior.

Reciprocamente, se E_1 e E_2 são opostas ou coespinais com eixos distintos, o resultado é imediato. ■

Observação 3.3.7. Se (exatamente) um dos eixos das fibrações planas na proposição acima não é uma geodésica genérica, então E_1 e E_2 são claramente disjuntas fora da fatia comum.

3.3.3 Fibrações diagonais

Definição 3.3.8. Seja γ uma geodésica na diagonal Δ_f . A hipersuperfície

$$D(f, \gamma) := \text{proj}_{\Delta_f}^{-1} \gamma$$

será chamada de *fibração diagonal com espinha Δ_f e eixo γ* . Os vértices da geodésica γ serão chamados os *vértices* de $D(f, \gamma)$ e, para cada $p \in \gamma$, a diagonal $\text{proj}_{\Delta_f}^{-1} p$ será chamada

uma fatia de $D(f, \gamma)$.

Observação 3.3.9. A espinha diagonal (e portanto, o eixo) de $D(f, \gamma)$ não é única. De fato, se h é uma isometria hiperbólica arbitrária estabilizando a geodésica γ_1 , então Δ_{fh} é uma espinha de $D(f, \gamma)$, pois, para qualquer $p \in \gamma$, $\text{proj}_{\Delta_f}^{-1} p = (1, fr(p_1))\Delta = (1, fhr(p'_1))\Delta = \text{proj}_{\Delta_{fh}}^{-1}(p'_1, fhp'_1)$, onde $p'_1 := h^{-1/2}p_1$. Assim, $D(f, \gamma) = \text{proj}_{\Delta_f}^{-1}\gamma = \text{proj}_{\Delta_{fh}}^{-1}(\gamma_1, fg\gamma_1)$.

Proposição 3.3.10. Uma fibração diagonal é completamente determinada por seus vértices.

Demonstração. Sejam γ e σ geodésicas em $\mathbb{B}$ com o mesmo par de vértices. Suponha que $\gamma \in \Delta_f$ e que $\kappa(\sigma) = 1$. Então, para alguma isometria h estabilizando σ_1 , temos que $\sigma = (\gamma_1, fh\gamma_1)$, pois é sempre possível reparametrizar de modo que a primeira coordenada de σ e γ coincidam ponto a ponto. O resultado segue da observação anterior. ■

Proposição 3.3.11. Fibrações diagonais possuem uma fibração por produtos de hiperciclos.

Demonstração. Seja $D := \text{proj}_{\Delta}^{-1}\gamma$, para alguma geodésica $\gamma \in \Delta$. Seja c um hiperciclo da geodésica γ_1 e seja r a reflexão em γ_1 . Se $(p, q) \in c \times rc$, então o ponto médio m de p e q está na geodésica γ_1 , o que implica que $(p, q) \in \Delta_m \subset D$. Reciprocamente, dado $(p, q) \in D$, existe $m \in \gamma_1$ tal que $q = r(m)p$. Denote por c (resp. c') o hiperciclo de γ passando por p (resp. q). É claro que $c' = rc$. Isso mostra que $D = \{c \times rc \mid c \text{ é um hiperciclo de } \gamma\}$. ■

A proposição acima permite entender que fibrações diagonais fazem parte de uma família mais abrangente de fibrações. De fato, sejam $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ um plano euclidiano, $\kappa \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ e σ uma geodésica intersectando S ortogonalmente e tal que $\kappa(\sigma) = \kappa$. Defina

$$H(S, \sigma) := \bigsqcup_{p \in \sigma} c_{p_1} \times c_{p_2},$$

onde c_{p_j} é o hiperciclo de γ_j passando por p_j , $j = 1, 2$. Note que, para cada plano euclidiano S e $\kappa \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ existem exatamente duas hipersuperfícies do tipo acima contendo o plano euclidiano S , e estas duas são opostas (a definição de fibrações opostas, neste caso, é análoga àquela de fibrações euclidianas opostas). O papel de σ na definição de H é apenas indicar o par de blocos associados a S que $H(S, \sigma)$ deve intersectar. A hipersuperfície $H(S, \sigma)$ é uma fibração diagonal sse $\kappa(\sigma) = 1$.

Lema 3.3.12. Seja γ uma geodésica em Δ . Então, para quaisquer $p, q \in \gamma$, $p \neq q$,

$$(1, r(q))D(1, \gamma) = (1, r(p))D(1, \gamma).$$

Demonstração. Dado $x \in \gamma_1$, existe $x' \in \gamma_1$ tal que $r(q)r(x') = r(p)r(x)$. Logo $(1, r(q))\Delta_{x'} = (1, r(p))\Delta_x$. ■

Proposição 3.3.13. Sejam Δ_{f_1} e Δ_{f_2} ultraparalelas. Então existe uma única fibração diagonal, denotada por $D(f_1, f_2)$, contendo Δ_{f_1} e Δ_{f_2} como fatias.

Demonstração. Seja $f := f_1^{-1}f_2$. Pela proposição 3.2.18, temos que Δ e Δ_f possuem ortogonais comuns somente ao longo das geodésicas $(\gamma, \gamma) \subset \Delta$ e $(\gamma, f\gamma) \subset \Delta_f$, onde γ é o eixo de f . Seja $p \in \gamma$ arbitrário. Então $D' := (1, r(p))D(1, \gamma)$ contém $\Delta = (1, r(p))\Delta_p$ e $\Delta_f = (1, r(p))\Delta_q$ como fatias, onde $q = \gamma_{p, f^{-1}p}(1/2)$. A hipersuperfície procurada é então $(1, f_1)D' = (1, f_1r(p))D(1, (\gamma, \gamma)) = D(f_1r(p), (\gamma, f_1r(p)\gamma))$. ■

Sejam γ uma geodésica na diagonal Δ_f e h uma isometria hiperbólica com eixo γ_1 . Se $p \in \gamma_1$, então $\gamma : t \mapsto (h^t p, fh^t p)$ é uma parametrização para γ . Obtemos assim a seguinte descrição alternativa para fibrações diagonais

$$\text{proj}_{\Delta_f}^{-1}\gamma = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} \text{proj}_{\Delta_f}^{-1}(h^t p, fh^t p) = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} (h^t, fh^t) \text{proj}_{\Delta}^{-1}(p, p) = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} (h^t, fh^t) \Delta_p. \quad (3.5)$$

Proposição 3.3.14. Sejam Δ_{f_1} e Δ_{f_2} ultraparalelas. A fibração diagonal contendo Δ_{f_1} e Δ_{f_2} como fatias é dada por

$$D(f_1, f_2) = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} (1, f_1(f_1^{-1}f_2)^t) \Delta. \quad (3.6)$$

Demonstração. Sejam $f := f_1^{-1}f_2$ e γ o eixo de f . Se $p \in \gamma$, então, pela proposição 3.3.13 e pela descrição (3.5) acima, temos que

$$\begin{aligned} D(f_1, f_2) &= \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} \text{proj}_{\Delta_{f_1 r(p)}}^{-1}(f^t p, f_1 r(p) f^t p) = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} (1, f_1 r(p)) \text{proj}_{\Delta}^{-1}(f^t p, f^t p) \\ &= \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} (1, f_1 r(p)) \Delta_{f^t p} = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} (1, f_1 r(p) r(f^t p)) \Delta = \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} (1, f_1 f^{-2t}) \Delta \\ &= \bigsqcup_{t \in \mathbb{R}} (1, f_1 f^t) \Delta. \end{aligned}$$

■

Observação 3.3.15. Introduzimos a seguinte notação para certos subespaços de $D(f_1, f_2)$:

$$\begin{aligned} D[f_1, f_2] &:= \bigsqcup_{t \geq 0} (1, f_1(f_1^{-1}f_2)^t) \Delta, & D[f_1, f_2]^\circ &= \bigsqcup_{t > 0} (1, f_1(f_1^{-1}f_2)^t) \Delta, \\ D[f_1, f_2] &:= \bigsqcup_{t \in [0, 1]} (1, f_1(f_1^{-1}f_2)^t) \Delta, & D[f_1, f_2]^\circ &= \bigsqcup_{t \in (0, 1)} (1, f_1(f_1^{-1}f_2)^t) \Delta. \end{aligned}$$

Definição 3.3.16. Sejam γ uma geodésica em Δ_f e h uma isometria hiperbólica com eixo γ_1 . Definimos a *trajetória* de um ponto $p \in D(f, \gamma)$ como a imagem em $\mathbb{B}$ do mapa $t \mapsto (h^t, fh^t f^{-1})p$.

Se p é um ponto arbitrário de $D(f, \gamma)$, então $p = (p_1, fr(q)p_1)$ para algum $p_1 \in \mathbb{H}$ e $q \in \gamma$. Assim, $(h^t, fh^t f^{-1})p = (h^t p_1, fh^t r(q)p_1) = (h^t p_1, fr(h^t q)h^t p_1)$, o que implica que

$\text{proj}_{\Delta_f}(h^t, fh^t f^{-1})p = (h^t, fh^t f^{-1})q'$, onde $q' := (q, fq)$. Logo, $(h^t, fh^t f^{-1})p \subset c \times fc'$ para todo $t \in \mathbb{R}$, onde c é o hiperciclo de γ passando por p_1 e c' é o hiperciclo de γ passando por $r(q)p_1$. Isso mostra que fibrações diagonais possuem uma terceira fibração, dessa vez por curvas cujas coordenadas são parametrizações de hiperciclos.

Quando a fibração diagonal é definida por um par de diagonais ultraparalelas $\Delta_{f_1}, \Delta_{f_2}$, da proposição 3.3.13, temos que $D(f_1, f_2) = D(f_1 r(q), \gamma)$, onde $\gamma = (\gamma_1, f_1 r(q) \gamma_1)$ e q é um ponto no eixo γ_1 de $f := f_1^{-1} f_2$. Assim, da definição 3.3.16, a trajetória de um ponto $p \in \Delta_{f_1}$ em $D(f_1, f_2)$ é dada por

$$t \mapsto (f^t, f_1 r(q) f^t r(q) f_1^{-1})p = (f^t, f_1 f^{-t} f_1^{-1})p.$$

Proposição 3.3.17. A reflexão numa fatia de uma fibração diagonal estabiliza a trajetória dos seus pontos.

Demonstração. Seja $p \in D(1, \gamma)$ e f uma isometria hiperbólica com eixo γ_1 . Sejam $p_1 \in \mathbb{H}$ e $q \in \gamma_1$ tais que $p = (p_1, r(q)p_1)$. A reflexão de $c_p : t \mapsto (f^t, f^t)p$ na fatia $\Delta_{f^s q}$, $s \in \mathbb{R}$, de $D(1, \gamma)$ é dada por

$$\begin{aligned} \iota \circ (r(f^s q), r(f^s q))c_p(t) &= \iota \circ (r(f^s q), r(f^s q))(f^t p_1, f^t r(q)p_1) \\ &= (r(f^s q) f^t r(q)p_1, r(f^s q) f^t p_1) \\ &= (f^s r(q) f^{-s} f^t r(q)p_1, f^s r(q) f^{-s} f^t p_1) \\ &= (f^s f^s f^{-t} r(q) r(q)p_1, f^s f^s f^{-t} r(q)p_1) \\ &= (f^{2s-t} p_1, f^{2s-t} r(q)p_1) \\ &= (f^{2s-t}, f^{2s-t})(p_1, r(q)p_1) = c_p(2s - t). \end{aligned}$$

■

Corolário 3.3.18. A trajetória de um ponto em uma fibração diagonal intercecta as fatias ortogonalmente. ■

O estudo da interseção de duas fibrações diagonais com uma fatia em comum se resume a determinar a classe de conjugação de certas isometrias no produto dos subgrupos uniparamétricos associados a essas fibrações. A seguir, vamos ver que tais classes de conjugação são completamente determinadas pela posição relativa das geodésicas estáveis pelos subgrupos uniparamétricos em questão.

Observação 3.3.19. Sejam f_1 e f_2 isometrias hiperbólicas com eixos assintóticos. Se f_1 e f_2 não têm nenhum ponto fixo atrator/repulsor em comum, então a isometria $f_1 f_2$ é parabólica sse f_1 e f_2 têm o mesmo comprimento de translação. Nos demais casos, $f_1 f_2$ é hiperbólica com comprimento de translação $|\ell_{f_2} - \ell_{f_1}|$. Por outro lado, se f_1 e f_2 possuem um ponto fixo atrator (resp. repulsor) em comum, então a isometria $f_1 f_2$ é hiperbólica

com mesmo ponto fixo atrator (resp. repulsor) que f_1 e f_2 . Além do mais, o comprimento de translação de $f_1 f_2$ é $\ell_{f_1} + \ell_{f_2}$. ■

Lema 3.3.20. Sejam f_1 e f_2 isometrias hiperbólicas com eixos distintos. Então $f_1^{-t_1} f_2^{t_2}$ não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ para todo $t_1, t_2 \neq 0$ sse os eixos de f_1 e f_2 são concorrentes ou assintóticos.

Demonstração. Suponha que os eixos de f_1 e f_2 são ultraparalelos e seja γ a geodésica simultaneamente ortogonal aos eixos de f_1 e f_2 . Para cada $x \notin \gamma$, denote por γ_j^x a geodésica passando por x e ortogonal ao eixo de f_j , $j = 1, 2$. Então $r(\gamma)r(\gamma_j^x) = f_j^{t_j}$ para algum $t_j \neq 0$, $j = 1, 2$, o que implica que $f_1^{-t_1} f_2^{t_2} = r(\gamma_1^x)r(\gamma)r(\gamma)r(\gamma_2^x) = r(\gamma_1^x)r(\gamma_2^x)$ fixa x (ver figura 2a). A recíproca é imediata. ■

Sejam f_1 e f_2 isometrias hiperbólicas. Dizemos que f_1 e f_2 têm *ordem cíclica* $+1$ (resp. -1) se a ordem cíclica dos pontos fixos de f_1 e f_2 é dada por *arar* (resp. *aarr*), onde a denota um ponto fixo atrator e r denota um ponto fixo repulsor (ver figura 2).

(a) f_1 e f_2 têm ordem cíclica -1 . (b) f_1 e f_2 têm ordem cíclica $+1$.

Figura 2

Lema 3.3.21. Sejam f_1 e f_2 isometrias hiperbólicas com eixos distintos. Então $f_1^{-t_1} f_2^{t_2}$ não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ para todo $t_1, t_2 > 0$ sse

1. f_1 e f_2 têm eixos assintóticos ou concorrentes, ou
2. f_1 e f_2 têm eixos ultraparalelos e ordem cíclica $+1$.

Demonstração. 1.) Segue do lema 3.3.20 e da observação 3.3.19. 2.) Suponha que f_1 e f_2 têm eixos ultraparalelos e ordem cíclica $+1$. Seja γ a geodésica simultaneamente ortogonal aos eixos de f_1 e f_2 . Para cada $t_j > 0$ denote por γ_{t_j} a geodésica em $\mathbb{H}$ ortogonal ao eixo de f_j , $j = 1, 2$, tal que $f_1^{-t_1} = r(\gamma_{t_1})r(\gamma)$ e $f_2^{t_2} = r(\gamma)r(\gamma_{t_2})$ (ver figura 2b). Note que γ_{t_1} e γ_{t_2} estão de lados opostos com relação à geodésica γ para todos $t_1, t_2 > 0$. Isto implica que $f_1^{-t_1} f_2^{t_2}$ é hiperbólica para todos $t_1, t_2 > 0$. ■

Corolário 3.3.22. Se f é hiperbólica e g é elíptica, então $f^{-t}g^k f^s g^{-k}$ é hiperbólica para todos $t, s > 0$ e $k \in \mathbb{R}$ com $g^k \neq 1$.

Demonstração. Denote por γ o eixo de f . Se $g^k \gamma$ e γ são assintóticas ou concorrentes, o resultado segue do lema 3.3.20. Suponha então que $g^k \gamma$ e γ são ultraparalelas. Neste caso, a ordem cíclica de f e $g^k f g^{-k}$ é $+1$, o que implica que a ordem cíclica de f^t e $g^k f^s g^{-k}$ é $+1$ para todos $t, s > 0$. O resultado segue do lema 3.3.21. ■

Definição 3.3.23. Duas fibrações diagonais são ditas *cotranchais* se têm uma fatia em comum. Duas fibrações diagonais são ditas *coespinais* se têm uma espinha em comum.

Proposição 3.3.24. Duas fibrações diagonais cotranchais $D(f, f_1)$ e $D(f, f_2)$ são disjuntas fora da fatia comum Δ_f sse os eixos de $f^{-1}f_1$ e $f^{-1}f_2$ são concorrentes ou assintóticos.

Demonstração. Podemos supor que $f = 1$. Então f_1 e f_2 são, necessariamente, hiperbólicas. As fibrações $D(1, f_1)$ e $D(1, f_2)$ são disjuntas fora da fatia comum Δ sse quaisquer duas de suas fatias $\Delta_{f_1^t}, \Delta_{f_2^s}, t, s \neq 0$, não se intersectam em $\mathbb{B}$, i.e., sse $f_1^{-t}f_2^s$ não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ para todos $t, s \neq 0$. Pelo lema 3.3.20, isto acontece sse os eixos de f_1 e f_2 são concorrentes ou assintóticos. No primeiro caso, se p denota o ponto de interseção dos eixos de f_1 e f_2 , então, pelo lema 3.3.12, Δ_p é uma espinha comum de $D(1, f_1)$ e $D(1, f_2)$. No segundo caso, as fibrações não possuem espinha em comum. ■

Proposição 3.3.25. Sejam Δ_f, Δ_{f_1} e Δ_{f_2} duas a duas ultraparalelas. Então $D[f, f_1)$ e $D[f, f_2)$ se intersectam somente em Δ_f sse

1. $f^{-1}f_1$ e $f^{-1}f_2$ têm eixos assintóticos ou concorrentes, ou
2. $f^{-1}f_1$ e $f^{-1}f_2$ têm eixos ultraparalelos ou iguais e ordem cíclica $+1$.

Demonstração. Podemos supor que $f = 1$ e que f_j é hiperbólica, $j = 1, 2$. Assim, da proposição 3.3.14, podemos escrever $D[1, f_j) = \bigsqcup_{t \geq 0} (1, f_j^t) \Delta$, $j = 1, 2$. O resultado segue dos lemas 3.3.20 e 3.3.21. ■

A seguir vamos determinar condições necessárias para que duas fibrações diagonais cotranchais não se aproximem “demais” quando nos afastamos da fatia comum. Esta condição é essencial para a aplicação da versão do Teorema Poliedral de Poincaré (vide (ANAN'IN; GROSSI, 2011b)) que utilizaremos no Capítulo 4.

Suponha que as fibrações diagonais cotranchais $D[1, f_1)$ e $D[1, f_2)$ sejam disjuntas fora do slice comum. Se os eixos de f_1 e f_2 são concorrentes em $p \in \mathbb{H}$, então, para cada $t, s > 0$, existem $p_1^s, p_2^t \in \mathbb{H}$ tais que $f_1^{-s} = r(p_1^s)r(p)$ e $f_2^t = r(p)r(p_2^t)$ (ver figura 3). Fixado $s > 0$, a distância entre as fatias $\Delta_{f_1^s}$ e $\Delta_{f_2^t}$, $t > 0$, é dada por

$$\mu(\Delta_{f_1^s}, \Delta_{f_2^t}) = d(p_1^s, p_2^t)\sqrt{2},$$

onde $d(p_1^s, p_2^t)$ é metade do comprimento de translação de $f_1^{-s} f_2^t$.

Se $\angle(p_2^t, p, p_1^s) \leq \pi/2$, a distância mínima é realizada exatamente quando p_2^t é a projeção ortogonal de p_1^s em $\gamma_2 := \text{eixo}(f_2)$ (ver figura 3a). Logo,

$$\mu(\Delta_{f_1^s}, D[1, f_2]) = d(p_1^s, \gamma_2) \sqrt{2}.$$

Por outro lado, se $\angle(p_2^t, p, p_1^s) \in (\pi/2, \pi)$, então $\Delta_{f_1^s}$ está mais próxima de Δ do que de qualquer outra fatia de $D[1, f_2]$ (ver figura 3b), ou seja,

$$\mu(\Delta_{f_1^s}, D[1, f_2]) = d(p_1^s, p) \sqrt{2} = s \ell_{f_1} / \sqrt{2} = \mu(\Delta_{f_1^s}, \Delta).$$

Figura 3 – O ponto p' é a projeção ortogonal de p_1^s no eixo de f_2 .

Suponha agora que os eixos de f_1 e f_2 são assintóticos. Da observação 3.3.19, se o ponto fixo comum de f_1 e f_2 não é atrator/repulsor para ambas, então $f_1^{-s} f_2^t$ é hiperbólica para todos $t, s > 0$. Fixado $s > 0$, a observação 3.3.19 e a proposição 3.2.20 implicam que a distância entre as fatias $\Delta_{f_1^s}$ e $\Delta_{f_2^t}$, $t > 0$, é dada por

$$\mu(\Delta_{f_1^s}, \Delta_{f_2^t}) = (s \ell_{f_1} + t \ell_{f_2}) / \sqrt{2}.$$

Neste caso, a distância é mínima exatamente quando $t = 0$, i.e.,

$$\mu(\Delta_{f_1^s}, D[1, f_2]) = s \ell_{f_1} / \sqrt{2} = \mu(\Delta_{f_1^s}, \Delta).$$

Se, por outro lado, o ponto fixo comum é atrator/repulsor para f_1 e f_2 , então, para cada $s > 0$, existe $t = t(s) > 0$ tal que $f_1^{-s} f_2^t$ é parabólica. Assim, quando $t' \rightarrow t$, a distância entre $\Delta_{f_1^s}$ e $\Delta_{f_2^{t'}}$ se aproxima de 0.

Por fim, suponha que f_1 e f_2 têm eixos ultraparalelos e ordem cíclica +1. Seja γ a geodésica ortogonal comum aos eixos de f_1 e f_2 . Para cada $t, s > 0$ existem geodésicas $\gamma_s, \gamma_t \in \mathbb{H}$ tais que $f_1^{-s} = r(\gamma_s)r(\gamma)$ e $f_2^t = r(\gamma)r(\gamma_t)$ (ver figura 3c). Assim, fixado $s > 0$, a distância entre as fatias $\Delta_{f_1^s}$ e $\Delta_{f_2^t}$, $t > 0$, é dada por

$$\mu(\Delta_{f_1^s}, \Delta_{f_2^t}) = d(\gamma_s, \gamma_t) \sqrt{2}, \quad (3.7)$$

onde $d(\gamma_s, \gamma_t)$ é metade do comprimento de translação de $f_1^{-s} f_2^t$. Note que (3.7) é mínima exatamente quando $t = 0$. Neste caso, temos

$$\mu(\Delta_{f_1^s}, D[1, f_2]) = d(\gamma^s, \gamma) \sqrt{2} = s \ell_{f_1} / \sqrt{2} = \mu(\Delta_{f_1^s}, \Delta).$$

Seja S um subconjunto qualquer de $\mathbb{B}$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$. Definimos por

$$N(S, \epsilon) := \bigcup_{x \in S} \{y \in \mathbb{B} \mid \mu(y, x) < \epsilon\}$$

a ϵ -vizinhança de S . Assim, se f_1 e f_2 são como acima, é fácil ver que para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tais que $D[1, f_1] \cap N(D[1, f_2], \delta) \subset N(\Delta, \epsilon)$. Em outras palavras, se $D[1, f_1]$ intersecta uma vizinhança de $D[1, f_2]$, então essa interseção ocorre perto da fatia comum Δ . Isso prova a seguinte

Proposição 3.3.26. Sejam Δ_f , Δ_{f_1} e Δ_{f_2} duas a duas ultraparalelas. Se

1. $f^{-1}f_1$ e $f^{-1}f_2$ têm eixos concorrentes, ou
2. $f^{-1}f_1$ e $f^{-1}f_2$ têm eixos assintóticos, mas nenhum ponto fixo atrator/repulsor em comum, ou
3. $f^{-1}f_1$ e $f^{-1}f_2$ têm eixos ultraparalelos e ordem cíclica $+1$,

então, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$D[f, f_1] \cap N(D[f, f_2], \delta) \subset N(\Delta_f, \epsilon).$$

■

No que se segue, vamos considerar uma região do bidisco, cujo bordo é constituído por duas fibrações diagonais cotranchais, e vamos exhibir critérios para garantir que as cópias dessa região por uma certa família de isometrias de $\mathbb{B}$ tessela o bidisco.

Proposição 3.3.27. Sejam Δ_{f_1} e Δ_{f_2} ultraparalelas e seja g uma isometria elíptica. Se $I = (g, f_1 g f_1^{-1})$, então $D[f_1, f_2] \cap I^k D[f_1, f_2] = \Delta_{f_1}$ para todo $k \in \mathbb{R}$ tal que $g^k \neq 1$. ■

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} I^k D[f_1, f_2] &= (g^k, f_1 g^k f_1^{-1}) \bigsqcup_{t \geq 0} (1, f_1 (f_1^{-1} f_2)^t) \Delta = (1, f_1) \bigsqcup_{t \geq 0} (g^k, g^k (f_1^{-1} f_2)^t) \Delta \\ &= (1, f_1) \bigsqcup_{t \geq 0} (1, g^k (f_1^{-1} f_2)^t g^{-k}) \Delta = (1, f_1) \bigsqcup_{t \geq 0} (1, (g^k f_1^{-1} f_2 g^{-k})^t) \Delta \\ &= (1, f_1) D[1, g^k f_1^{-1} f_2 g^{-k}]. \end{aligned}$$

Logo, $D[f_1, f_2]$ e $I^k D[f_1, f_2]$ são disjuntas fora da fatia comum Δ_{f_1} sse $D[1, f]$ e $D[1, g^k f g^{-k}]$ são disjuntas fora da fatia comum Δ , onde $f := f_1^{-1} f_2$. Isto acontece sse

$$f^{-t} (g^k f g^{-k})^s = f^{-t} g^k f^s g^{-k}$$

não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ para todos $t, s > 0$. O resultado segue do corolário 3.3.22. ■

Sejam $f_1, f_2, g \in \text{Isom } \mathbb{H}$ tais que $f_1^{-1} f_2$ é hiperbólica e g é uma rotação por $2\pi/n$, $n \geq 2$. Se $I = (g, f_1 g f_1^{-1})$, então o subespaço

$$S(g, f_1, f_2) := \bigsqcup_{t \in (0,1)} I^t D[f_1, f_2]^\circ = \bigsqcup_{\substack{t \in (0,1) \\ s > 0}} (1, f_1 g^t (f_1^{-1} f_2)^s g^{-t}) \Delta$$

é uma região conexa do bidisco limitada por $\partial S(g, f_1, f_2) := D[f_1, f_2] \cup ID[f_1, f_2]$.

Corolário 3.3.28. Sejam Δ_{f_1} e Δ_{f_2} ultraparalelas e seja g uma rotação por $2\pi/n$, $n \geq 2$. Então $S(g, f_1, f_2) \cap I^k S(g, f_1, f_2) = \emptyset$ para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$, onde $I = (g, f_1 g f_1^{-1})$. ■

Sejam $p_1, p_2 \in \mathbb{H}$, $p_1 \neq p_2$, $g \in \text{Isom } \mathbb{H}$ elíptica e $f \in \text{Isom } \mathbb{H}$ hiperbólica com eixo γ . Denote por m o ponto médio do segmento de geodésica ligando p_1 e p_2 e por σ a geodésica passando por m e ortogonal à geodésica ligando p_1 e p_2 . Se $s > 0$ é o menor número real tal que $g^s = 1$, então existem apenas dois valores de t no intervalo $[0, s]$ tais que $g^t \gamma$ é ortogonal a σ (ver figura 4a). Além disso, para apenas um destes dois valores de t existe um (único) $s_0 > 0$ tal que $p_2 = g^t f^{s_0} g^{-t} p_1$. Em particular, se g é uma rotação por $2\pi/n$, $n \geq 2$, acabamos de mostrar que

$$\mathbb{B} = \bigcup_{k=1}^n I^k S[g, 1, f],$$

onde $S[g, 1, f] := S(g, 1, f) \cup \partial S(g, 1, f)$. Neste caso, dizemos que a região $S[g, 1, f]$ *tessela* o bidisco em torno da diagonal Δ .

Lema 3.3.29 ((ANAN'IN; GROSSI, 2011a)). Sejam γ uma geodésica em $\mathbb{H}$ e $p \notin \gamma$. A distância $d(p, \gamma)$ de p a γ é dada por $\cosh^2 d(p, \gamma) = 1 - \text{ta}(p, u)$, onde u é o polar de γ . ■

Lema 3.3.30. Sejam γ uma geodésica em $\mathbb{H}$ com polar u e seja g uma rotação por $2\pi/n$, $n \geq 2$, em torno de $p \in \mathbb{H}$.

1. Se n é par, então γ intersecta $g^k \gamma$ em $\overline{\mathbb{H}}$, para todo $k = 1, \dots, n-1$, $k \neq n/2$, sse $\text{ta}(p, u) \in [-\text{tg}^2(\pi/n), 0)$. É claro que γ intersecta $g^{n/2} \gamma$ sse $\text{ta}(p, u) = 0$.
2. Se n é ímpar, então γ intersecta $g^k \gamma$ em $\overline{\mathbb{H}}$, para todo $k = 1, \dots, n-1$, sse $\text{ta}(p, u) \in [-\text{tg}^2(\pi/2n), 0]$.

- (a) g é uma rotação anti-horária em torno de p e f tem ponto fixo atrator/repulsor v^+/v^- e eixo γ . A geodésica σ é ortogonal a $g^j\gamma$, $j = 1, 2$, e a geodésica σ' , passando por p_1 , é ortogonal a $g^2\gamma$.
- (b) g é uma rotação por $2\pi/8$ em torno de p e γ é a geodésica polar a $(1, 0, \cos(3\pi/8))$.

Figura 4

Demonstração. Note que $g^k\gamma \cap \gamma \neq \emptyset \Leftrightarrow g^{n-k}\gamma \cap \gamma \neq \emptyset$. Logo, é suficiente mostrar que há interseção apenas para $k \leq k_0 := n/2 - 1$ se n é par e para $k \leq k_1 := (n-1)/2$ se n é ímpar. Podemos supor que $p = (0, 0, 1)$ e que a geodésica γ é polar a $u := (1, 0, \cos t)$ para algum $t \in (0, \pi/2]$. Se n for par, então γ intersecta $g^k\gamma$, $k = 1, \dots, k_0$, sse $t \geq k\pi/n$ (ver figura 4b). Logo, γ intersecta $g^k\gamma$ para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$, com exceção de $g^{n/2}\gamma$, sse $t \geq k_0\pi/n$ (quando $t = \pi/2$, $g^{n/2}\gamma = \gamma$), ou seja, sse

$$\begin{aligned} \text{ta}(p, \pi(u)p) &= 1 - \text{ta}(p, u) = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = 1/\sin^2 t \leq 1/\sin^2(k_0\pi/n) \\ &= 1/\sin^2(\pi/2 - \pi/n) = 1/\cos^2(\pi/n) = 1 + \text{tg}^2(\pi/n). \end{aligned}$$

Por outro lado, se n é ímpar, γ intersecta $g^k\gamma$, $k = 1, \dots, k_1$, sse $t \geq k\pi/n$. Logo γ intersecta $g^k\gamma$ para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$ sse $t \geq k_1\pi/n$, ou seja, sse

$$\begin{aligned} \text{ta}(p, \pi(u)p) &= 1 - \text{ta}(p, u) = 1/\sin^2 t \leq 1/\sin^2(k_1\pi/n) = 1/\sin^2(\pi/2 - \pi/2n) \\ &= 1/\cos^2(\pi/2n) = 1 + \text{tg}^2(\pi/2n). \end{aligned}$$

■

Sejam f e g isometrias arbitrárias e seja $k \in \mathbb{Z}$. Então é imediato que

$$(\iota \circ (g, g))^k \Delta_f = (1, g^k f^{\epsilon_k} g^{-k}) \Delta, \quad (3.8)$$

onde $\epsilon_k = (-1)^k$.

Proposição 3.3.31. Sejam Δ_{f_1} e Δ_{f_2} ultraparalelas e seja g uma rotação por $2\pi/n$, $n \geq 2$, em torno de $p \in \mathbb{H}$. Se $I = \iota \circ (f_1 g, g f_1^{-1})$, então $D[f_1, f_2] \cap I^k D[f_1, f_2] = \Delta_{f_1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $I^k \neq 1$, sse

1. $n \in 4\mathbb{Z}$ e $\text{ta}(p, u) \in [-\text{tg}^2(\pi/n), 0]$;

2. n é ímpar e $\text{ta}(p, u) \in [-\text{tg}^2(\pi/2n), 0]$,

onde u é o polar do eixo de $f_1^{-1}f_2$.

Demonstração. Podemos supor que $f_1 = 1$ e que $f_2 = f$ é hiperbólica. Da equação 3.8 temos que $D[1, f)$ e $I^k D[1, f)$ se intersectam apenas em Δ sse

$$f^{-t}g^k f^{s\epsilon_k} g^{-k}$$

não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ para todo $t, s > 0$. Se k é par, então $f^{-t}g^k f^{s\epsilon_k} g^{-k} = f^{-t}g^k f^s g^{-k}$ e o resultado segue do corolário 3.3.22. Suponha que n seja par. Neste caso I tem ordem n . Se k é ímpar, então $f^{-t}g^k f^{s\epsilon_k} g^{-k} = f^{-t}g^k f^{-s} g^{-k}$. Se os eixos de f e $g^k f^{-1} g^{-k}$ são ultraparalelos, então existem $t, s > 0$ tais que a isometria $f^{-t}g^k f^{-s} g^{-k}$ tem pontos fixos em $\mathbb{H}$, pois a ordem cíclica de f e $g^k f^{-1} g^{-k}$ é -1 (ver prova do lema 3.3.20). Portanto, $f^{-t}g^k f^{-s} g^{-k}$ não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ para todos $t, s > 0$ sse o eixo γ de f intersecta $g^k \gamma$ em $\overline{\mathbb{H}}$ para todo k ímpar. Se $n/2$ é ímpar, então existem $t, s > 0$ tais que $f^{-t}g^{n/2} f^{-s} g^{-n/2}$ tem pontos fixos, pois f e $g^{n/2} f^{-1} g^{-n/2}$ têm eixos ultraparalelos (ou iguais, caso o eixo de f passe por p) e ordem cíclica -1 . Se $n/2$ é par, então, pelo lema 3.3.30, $f^{-t}g^k f^{-s} g^{-k}$ não tem pontos fixos para todo k ímpar sse $\text{ta}(p, u) \in [-\text{tg}^2(\pi/n), 0]$. Suponha agora que n seja ímpar. Neste caso I tem ordem $2n$ e $(n-1)/2$ ou $(n+1)/2$ é ímpar. Logo, do lema 3.3.30, $f^{-t}g^k f^{-s} g^{-k}$ não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$ para todo k ímpar sse $\text{ta}(p, u) \in [-\text{tg}^2(\pi/2n), 0]$. ■

Sejam $f, g \in \text{Isom } \mathbb{H}$ tais que f é hiperbólica e g é como na proposição acima. Se $I = \iota \circ (g, g)$, então

$$I^k S(g, 1, f) = I^k \bigcup_{\substack{t \in (0,1) \\ s > 0}} (1, g^t f^s g^{-t}) \Delta = \bigcup_{\substack{t \in (0,1) \\ s > 0}} (1, g^{k+t} f^{s\epsilon_k} g^{-(k+t)}) \Delta.$$

Assim, para analisar como as cópias de $S := S(g, 1, f)$ por I interagem umas com as outras, é suficiente determinar a quais classes de conjugação pertencem as isometrias

$$g^{t_1} f^{-s_1} g^{-t_1} g^{k+t_2} f^{s_2\epsilon_k} g^{-(k+t_2)} = g^{t_1} (f^{-s_1} g^{k+t_2-t_1} f^{s_2\epsilon_k} g^{-(k+t_2-t_1)}) g^{-t_1}$$

para todos $t_1, t_2 \in (0, 1)$, $s_1, s_2 > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$ tal que $I^k \neq 1$. Suponha que o ponto fixo p de g não esteja no eixo de f . Se k for par, então é imediato que S e $I^k S$ não se intersectam (corolário 3.3.22). Se n e $k = (n-1)/2$ (resp. $k = (n+1)/2$) são ímpares, então para cada $t_2 - t_1$ suficientemente próximo de $1/2$ (resp. $-1/2$), as isometrias f e $g^{(k+t_2-t_1)} f^{-1} g^{-(k+t_2-t_1)}$ têm eixos ultraparalelos e ordem cíclica -1 , o que implica que existem $s_1, s_2 > 0$, tais que $f^{-s_1} g^{(k+t_2-t_1)} f^{-s_2} g^{-(k+t_2-t_1)}$ é elíptica. Se n é par e $k = n/2 - 1$ (resp. $k = n/2$) é ímpar, então, para cada $t_2 - t_1$ suficientemente próximo de 1 (resp. 0), existem $s_1, s_2 > 0$ tais que $f^{-s_1} g^{(k+t_2-t_1)} f^{-s_2} g^{-(k+t_2-t_1)}$ é elíptica. Em outras palavras, se p não está no eixo de f , então existe pelo menos um k ímpar tal que $S \cap I^k S \neq \emptyset$. Suponha

agora que p esteja no eixo de f . Se n é ímpar e $k = (n-1)/2$ (resp. $k = (n+1)/2$) é ímpar, então, para todos $t_2 - t_1 = 1/2$ (resp. $t_2 - t_1 = -1/2$) e $s_1 = s_2 > 0$, temos que $f^{-s_1} g^{k+t_2-t_1} f^{-s_2} g^{-(k+t_2-t_1)} = 1$. Se n é par e $k = n/2$ é ímpar, então, para todo $t_1 = t_2 = 0$ e $s_1 = s_2 > 0$, temos que $f^{-s_1} g^{k+t_2-t_1} f^{-s_2} g^{-(k+t_2-t_1)} = 1$, ou seja, neste caso $S = I^k S$. Se n e $n/2$ são pares, então é imediato que $S \cap I^k S = \emptyset$ para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$, pois os eixos de f e $g^{k+t} f^{-s} g^{-(k+t)}$ são distintos para todo k ímpar e $t \in (-1, 1)$. Isso prova o seguinte

Corolário 3.3.32. Sejam g uma rotação por $2\pi/n$, $n \geq 2$, em torno de p e f uma isometria hiperbólica. Se $I = \iota \circ (g, g)$ e $S := S(g, 1, f)$, então $S \cap I^k S = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $I^k \neq 1$, sse o eixo de f passa por p e $n \in 4\mathbb{Z}$. ■

Sejam f e g como no corolário acima. Denote $J := (g, g)$. Então

$$I^k S(g, 1, f) = \bigcup_{\substack{t \in (0,1) \\ s > 0}} \left(1, g^{k+t} f^{s\epsilon_k} g^{-(k+t)}\right) \Delta = J^k \bigcup_{\substack{t \in (0,1) \\ s > 0}} \left(1, g^t f^{s\epsilon_k} g^{-t}\right) \Delta.$$

Se n é um múltiplo de 4 e k é ímpar, então $n/2 + k$ é ímpar e $I^k S = J^{n/2+k} S$. Isto implica que

$$\bigcup_{k=1}^n I^k S[g, 1, f] = \bigcup_{k=1}^n J^k S[g, 1, f] = \mathbb{B}.$$

Se n é ímpar e $k + n$ é par, então k é ímpar e

$$\bigcup_{k=2,4,\dots,2n} I^k S[g, 1, f] = \bigcup_{k=1}^n J^k S[g, 1, f] = \mathbb{B}.$$

E por fim, se n é ímpar e $k + n$ é ímpar, então k é par e

$$\bigcup_{k=1,3,\dots,2n-1} I^k S[g, 1, f] = \bigcup_{k=1}^n J^k S[g, 1, f^{-1}] = \mathbb{B}.$$

Proposição 3.3.33. Sejam Δ_{f_1} e Δ_{f_2} ultraparalelas e seja g uma rotação por $2\pi/n$, $n \geq 2$, em torno de p . Se $I = \iota \circ (f_1 r(p)g, r(p)g f_1^{-1})$, então $D[f_1, f_2] \cap I^k D[f_1, f_2] = \Delta_{f_1}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $I^k \neq 1$, sse $n \in 2\mathbb{Z}$ e $\text{ta}(p, u) \in [-\text{tg}^2(\pi/n), 0]$, onde u é o polar do eixo de $f_1^{-1} f_2$.

Demonstração. Análoga à demonstração da proposição 3.3.31. ■

Seja f uma isometria hiperbólica com eixo γ e seja g como na proposição acima. Suponha que $n = 2r$ com r ímpar. Então $(r(p)g)^{k+r} \gamma = (r(p)g)^k \gamma$, para todo $k = 1, \dots, n$. Por outro lado, $(r(p)g)^{k+r} f^{\epsilon_{k+r}} (r(p)g)^{-(k+r)} = (r(p)g)^k f^{-\epsilon_k} (r(p)g)^{-k}$ para todo $k = 1, 2, \dots, n$, ou seja, os eixos de $(r(p)g)^{k+r} f^{\epsilon_{k+r}} (r(p)g)^{-(k+r)}$ e $(r(p)g)^k f^{\epsilon_k} (r(p)g)^{-k}$ coincidem, mas têm orientações opostas. Em outras palavras, $I^k D[1, f]$ e $I^{k+r} D[1, f]$ são segmentos de uma mesma fibração diagonal.

Corolário 3.3.34. Seja g uma rotação por $2\pi/n$, $n = 2r \geq 2$, em torno de $p \in \mathbb{H}$. Seja f uma isometria hiperbólica cujo eixo passa por p . Se $I = \iota \circ (r(p)g, r(p)g)$ e $S := S(g, 1, f)$, então $S \cap I^k S = \emptyset$ para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Demonstração. Basta notar que, para todos $t_1, s_1 \in (0, 1)$ e $t, s > 0$ e $k = 1, \dots, n-1$, a isometria

$$\begin{aligned} g^{t_1} f^{-t} g^{-t_1} (r(p)g)^k (g^{s_1} f^s g^{-s_1})^{\epsilon_k} (r(p)g)^{-k} &= g^{t_1} f^{-t} g^{-t_1} r(p)^k g^k g^{s_1} f^{\epsilon_k s} g^{-s_1} g^{-k} r(p)^k g^{t_1} g^{-t_1} \\ &= g^{t_1} \left(f^{-t} g^{k+s_1-t_1} r(p)^k f^{\epsilon_k s} r(p)^k g^{-(k+s_1-t_1)} \right) g^{-t_1} \\ &= g^{t_1} \left(f^{-t} g^{k+s_1-t_1} f^s g^{-(k+s_1-t_1)} \right) g^{-t_1} \end{aligned}$$

é hiperbólica (corolário 3.3.22). ■

Definição 3.3.35. Sejam $f_j \in \text{Isom } \mathbb{H}$, $j = 1, \dots, n \geq 3$. O subespaço

$$D[f_1, \dots, f_n] := \bigcup_{j=1}^n D[f_j, f_{j+1}]$$

será chamado uma *configuração de fibrações diagonais com vértices Δ_{f_j} e faces $D[f_j, f_{j+1}]$* (índices módulo n). Diremos que a fibração $D[f_1, \dots, f_n]$ é *simples* quando seus vértices são dois a dois ultraparalelos e quaisquer duas de suas faces se intersectam em $\mathbb{B}$ somente se têm um vértice em comum e tal interseção se restringe a este vértice comum. Quando $n = 3$, chamaremos a configuração acima de *triângulo diagonal*. Um *poliedro diagonal* em $\mathbb{B}$ é um subespaço $P \subset \mathbb{B}$ limitado por uma configuração de fibrações diagonais. Dizemos que um poliedro diagonal $P \subset \mathbb{B}$ é *simples* se a configuração de fibrações diagonais associada é simples. Denotaremos por $P[f_1, \dots, f_n]$ o poliedro diagonal limitado pela configuração $D[f_1, \dots, f_n]$.

Proposição 3.3.36. Sejam Δ_f , Δ_{f_1} e Δ_{f_2} duas a duas ultraparalelas. O triângulo diagonal $D[f, f_1, f_2]$ é simples sse os eixos de $f^{-1}f_1$ e $f^{-1}f_2$ são assintóticos ou concorrentes.

Demonstração. Suponha que os eixos de f_1 e f_2 são ultraparalelos. Então, pela proposição 3.3.25 parte (2), temos que $D[1, f_1]$ e $D[1, f_2]$ são disjuntos fora da fatia comum sse a ordem cíclica de f_1 e f_2 é $+1$. Suponha que este seja o caso. Então as fibrações diagonais $D[f_1, 1]$ e $D[f_1, f_2]$ são disjuntas fora da fatia comum Δ_{f_1} sse $D[1, f_1^{-1}]$ e $D[1, f_1^{-1}f_2]$ são disjuntas fora da fatia comum Δ , o que por sua vez acontece sse a ordem cíclica de f_1^{-1} e $f_1^{-1}f_2$ é $+1$, o que é uma contradição (ver figura 2b). De maneira análoga mostra-se que $D[f_2, 1]$ e $D[f_2, f_1]$ se intersectam fora da fatia comum Δ_{f_2} . A recíproca segue da proposição 3.3.25 parte (1). ■

Proposição 3.3.37. O poliedro diagonal limitado por um triângulo diagonal simples é fibrado por diagonais.

Demonstração. Se as faces do triângulo diagonal são coespinais, o resultado é imediato. Suponha que este não seja o caso e que $D[1, f_1, f_2]$ seja o triângulo diagonal simples em questão. Denote por $v \in \partial\mathbb{H}$ o ponto fixo em comum de f_1 e f_2 . Devemos mostrar que duas diagonais distintas de $P[1, f_1, f_2] = \bigcup_{t \in [0,1]} D[1, f_1(f_1^{-1}f_2)^t]$ não se intersectam. Para isso, basta mostrar que, para todos $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_1 \neq t_2$, $s_1, s_2 \in [0, 1]$, a isometria

$$\left(f_1(f_1^{-1}f_2)^{t_1}\right)^{-s_1} \left(f_1(f_1^{-1}f_2)^{t_2}\right)^{s_2} \quad (3.9)$$

não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$. Da observação 3.3.19, existe um único $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f_1(f_1^{-1}f_2)^{t_0}$ não é hiperbólica. Resta notar que, se $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus t_0$ são distintos, $f_1(f_1^{-1}f_2)^{t_1}$ e $f_1(f_1^{-1}f_2)^{t_2}$ têm eixos distintos; logo, a isometria 3.9 (que fixa o ponto v e, portanto, não é elíptica) não é a identidade. ■

3.3.4 Bissetores

Definição 3.3.38. Sejam $p, q \in \mathbb{B}$ distintos. O *bissetor* de p e q é a hipersuperfície

$$B(p, q) := \left\{ x \in \mathbb{B} \mid \mu(x, p) = \mu(x, q) \right\}$$

equidistante de p e q .

Note que se p e q têm uma coordenada em comum, então $B(p, q)$ é uma fibração vertical/horizontal. Por esta razão, vamos considerar apenas o caso em que a geodésica ligando p e q é genérica. Neste caso, o plano euclidiano dessa geodésica será chamado a *espinha* do bissetor $B(p, q)$.

Para cada $k \in \mathbb{R}$ e $x, y \in \mathbb{H}$, denotaremos por

$$B_k(x, y) := \left\{ z \in \mathbb{H} \mid d^2(z, x) - d^2(z, y) = k \right\}.$$

Note que $B_0(x, y)$ é a geodésica equidistante de x e y em $\mathbb{H}$.

Sejam $x, p, q \in \mathbb{B}$. Como $\mu(x, p) = \mu(x, q)$ é equivalente a

$$d^2(x_1, p_1) - d^2(x_1, q_1) = d^2(x_2, q_2) - d^2(x_2, p_2),$$

é fácil ver que

$$B(p, q) = \bigsqcup_{k \in \mathbb{R}} S_k(p, q),$$

onde $S_k(p, q) := B_k(p_1, q_1) \times B_k(q_2, p_2)$. Para cada $k \in \mathbb{R}$, o subespaço $S_k(p, q)$ é chamado uma *fatia* do bissetor $B(p, q)$.

Seja $\gamma(t) = \left(\gamma_{p_1, q_1}(1/2 + t\lambda_1^{-2}/2), \gamma_{p_2, q_2}(1/2 - t\lambda_2^{-2}/2) \right)$, onde $\lambda_j = d(p_j, q_j)$, $j = 1, 2$. Então é imediato que

$$\mu(p, \gamma(t)) = \mu(q, \gamma(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além do mais, para cada $k \in \mathbb{R}$, a fatia $S_k(p, q)$ intersecta a espinha do bissetor $B(p, q)$ no ponto $\gamma(t)$. A geodésica γ será chamada o *eixo* do bissetor $B(p, q)$.

Bissetores estão entre as hipersuperfícies mais complicadas do bidisco; muito pouco é conhecido sobre tais hipersuperfícies (para mais detalhes vide (CHARETTE; DRUMM; KIM, 2016) e (CHARETTE; DRUMM; LAREAU-DUSSAULT, 2013)).

3.4 Subespaços totalmente geodésicos do bidisco

Teorema 3.4.1. Os únicos subespaços totalmente geodésicos do bidisco são: pontos, geodésicas, planos verticais/horizontais, planos euclidianos, diagonais e fibrações verticais/horizontais.

A prova deste fato será subdividida numa série de lemas e proposições.

Lema 3.4.2. Se um subconjunto totalmente geodésico C de $\mathbb{H}$ contém uma geodésica γ e um ponto $p \in \mathbb{H}$, $p \notin \gamma$, então $C = \mathbb{H}$. ■

Observação 3.4.3. Dados dois pontos $p, q \in \mathbb{H}$, lembre-se que $\gamma_{p,q}$ denota a geodésica parametrizada tal que $\gamma_{p,q}(0) = p$ e $\gamma_{p,q}(1) = q$. Em particular, $\gamma_{p,q}(2) = r(q)p$ e $\gamma_{p,q}(-1) = r(p)q$.

Lema 3.4.4. Sejam γ uma geodésica em $\mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}$, $p \notin \gamma$. Sejam $q, q_1, q_2 \in \gamma$ dois a dois distintos e tais que $d(p, q) = d(p, \gamma)$ e $d(q, q_1) = d(q, q_2)$. Para cada $t \neq 0, \pm 1$, os pontos $\gamma_{p,q}(t)$, $\gamma_{p,q_1}(t)$ e $\gamma_{p,q_2}(t)$ não estão numa mesma geodésica.

Demonstração. Podemos supor que γ é a geodésica polar a $(0, 1, 0)$ e que $p = (0, \tanh(p'), 1)$ para algum $p' \neq 0$. Então $q = (0, 0, 1)$, $q_1 = (\tanh(q'), 0, 1)$ e $q_2 = (-\tanh(q'), 0, 1)$, para algum $q' \neq 0$. Se $\lambda := d(p, q_j)$, então a geodésica ligando p e q_j é definida por $\gamma_{p,q_j}(t) = a_t p + b_t q_j$, $j = 1, 2$, onde $a_t := \cosh(p') \sinh((1-t)\lambda)$ e $b_t := \cosh(q') \sinh(t\lambda)$. Note em particular que $\cosh(\lambda) = \cosh(p') \cosh(q')$ e que $d(p, q) = p'$. Um cálculo simples mostra que o polar da geodésica ligando os pontos $\gamma_{p,q_1}(t)$ e $\gamma_{p,q_2}(t)$ é dado por

$$u_t := (0, a_t + b_t, a_t \tanh(p')).$$

Agora $\gamma_{p,q}(t) = a'_t p + b'_t q$, onde $a'_t = \cosh(p') \sinh((1-t)p')$ e $b'_t = \sinh(tp')$, o que implica

que

$$\begin{aligned}
0 &= \langle u_t, \gamma_{p,q}(t) \rangle = \langle (0, a_t + b_t, a_t \tanh(p')), (0, a'_t \tanh(p'), a'_t + b'_t) \rangle \\
&= a'_t \tanh(p')(a_t + b_t) - a_t \tanh(p')(a'_t + b'_t) \Leftrightarrow a'_t b_t = a_t b'_t \\
&\Leftrightarrow \cosh(p') \sinh((1-t)p') \cosh(q') \sinh(t\lambda) = \cosh(p') \sinh((1-t)\lambda) \sinh(tp') \\
&\Leftrightarrow \sinh((1-t)p') \cosh(q') \sinh(t\lambda) = \sinh((1-t)\lambda) \sinh(tp') \\
&\Leftrightarrow \cosh(q') \sinh(t\lambda) \sinh(p') \cosh(tp') = \sinh(\lambda) \cosh(t\lambda) \sinh(tp') \\
&\Leftrightarrow \frac{\cosh(\lambda)}{\cosh(p')} \sinh(t\lambda) \sinh(p') \cosh(tp') = \sinh(\lambda) \cosh(t\lambda) \sinh(tp') \\
&\Leftrightarrow \tanh(t\lambda) \tanh(p') = \tanh(\lambda) \tanh(tp') \\
&\Leftrightarrow t = 0, \pm 1 \text{ ou } \lambda = |p'|,
\end{aligned}$$

o que é impossível, pois, por hipótese $t \neq 0, \pm 1$ e $q_1 \neq q$. ■

O lema acima é válido no seguinte caso geral

Exercício. Sejam γ uma geodesica de $\mathbb{H}$, $p \in \mathbb{H}$, $p \notin \gamma$ e $x, y, z \in \gamma$ dois a dois distintos. Então para todo $t \neq 0, \pm 1$, os pontos $\gamma_{p,x}(t)$, $\gamma_{p,y}(t)$ e $\gamma_{p,z}(t)$ não são colineares (o resultado é claramente óbvio para $t = \pm 2$ e para t suficientemente grande).

Proposição 3.4.5. Seja $C \subset \mathbb{B}$ um subconjunto totalmente geodésico contendo uma geodésica não genérica γ e um ponto $p \in \mathbb{B}$, $p \notin \gamma$.

1. Se γ_j é um ponto, $p_j \neq \gamma_j$ e $p_{j+1} \notin \gamma_{j+1}$, então C contém $\iota^{j+1}(\gamma_{p_j, \gamma_j} \times \mathbb{H})$, $j = 1, 2$ (índices mod 2).
2. Se γ_j é um ponto, $p_j \neq \gamma_j$ e $p_{j+1} \in \gamma_{j+1}$, então C contém $\iota^{j+1}(\gamma_{p_j, \gamma_j} \times \gamma_{j+1})$, $j = 1, 2$ (índices mod 2).
3. Se γ_j é um ponto, $p_j = \gamma_j$ e $p_{j+1} \notin \gamma_{j+1}$, então C contém $\iota^{j+1}(p_j \times \mathbb{H})$, $j = 1, 2$ (índices mod 2).

Demonstração. Suponha que γ_1 é um ponto (o outro caso é análogo).

1. Sejam $q_0, q_1, q_2 \in \gamma_2$ dois a dois distintos e tais que $d(p_2, q_0) = d(p_2, \gamma_2)$ e $d(q_1, q_0) = d(q_2, q_0)$. Então, pelo lema 3.4.4, para cada $t \neq 0, \pm 1$ os pontos $(\gamma_{p_1, \gamma_1}(t), \gamma_{p_2, q_j}(t))$, $j = 0, 1, 2$, não estão na mesma geodésica. Logo, do lema 3.4.2, temos que $\gamma_{p_1, \gamma_1}(t) \times \mathbb{H} \subset C$, para todo $t \neq 0, \pm 1$, i.e., $x \times \mathbb{H} \subset C$ para todo $x \in \gamma_{p_1, \gamma_1} \setminus \{p_1, \gamma_1, r(p_1)\gamma_1\}$. Fixados $x, y \in \gamma_{p_1, \gamma_1} \setminus \{p_1, \gamma_1, r(p_1)\gamma_1\}$, temos que a geodésica ligando (x, q) e (y, q) está contida em C para todo $q \in \mathbb{H}$, i.e., $\gamma_{p_1, \gamma_1} \times q \subset C$ para todo $q \in \mathbb{H}$.

2. Como $p_2 \in \gamma_2$, a geodésica $(\gamma_{p_1, \gamma_1}(t), p_2)$ está contida em C , ou seja, $\gamma_{p_1, \gamma_1} \times p_2 \subset C$. Resta notar que, para qualquer $q \in \gamma_{p_1, \gamma_1} \times \gamma_2$, temos que $q = (\gamma_{q'_1, \gamma_1}(2), \gamma_{p_2, q'_2}(2)) \in C$, onde $q'_1 := r(\gamma_1)q_1$ e $q'_2 := \gamma_{p_2, q_2}(1/2)$ (ver figura 5a).

3. Segue imediatamente do lema 3.4.2. ■

Figura 5

Proposição 3.4.6. Seja $C \subset \mathbb{B}$ um subconjunto totalmente geodésico contendo um plano vertical $q \times \mathbb{H}$ (resp. horizontal $\mathbb{H} \times q$) e um ponto $p \notin q \times \mathbb{H}$ (resp. $p \notin \mathbb{H} \times q$). Então C contém a fibração vertical $\gamma_{p_1, q} \times \mathbb{H}$ (resp. horizontal $\mathbb{H} \times \gamma_{p_2, q}$).

Demonstração. Vamos considerar apenas o caso vertical (o horizontal é análogo). Note que $\gamma_{p_1, q} \times p_2 \subset C$, pois p and (q, p_2) são pontos de C . Agora, para qualquer $x \in \gamma_{p_1, q} \times \mathbb{H}$, $x \neq p$, e $x \notin q \times \mathbb{H}$, temos que $x = (\gamma_{q, x'_1}(2), \gamma_{x'_2, p_2}(2)) \in C$, onde $x'_2 := r(p_2)x_2$ e $x'_1 := \gamma_{q, x_1}(1/2) \in \gamma_1$. ■

Proposição 3.4.7. Seja $C \subset \mathbb{B}$ um subconjunto totalmente geodésico contendo uma fibração vertical/horizontal L e um ponto $p \in \mathbb{B}$, $p \notin L$. Então $C = \mathbb{B}$.

Demonstração. Suponha que $L = \gamma \times \mathbb{H}$, para alguma geodésica γ de $\mathbb{H}$. Seja $q \in \mathbb{B}$, $q \neq p$ e $q \notin \gamma \times \mathbb{H}$. Suponha que q_1 e p_1 estejam do mesmo lado com relação a γ e seja $x \in \gamma$ arbitrário. A geodésica ligando p_1 e $q'_1 := r(x)q_1$ intersecta a geodésica γ em, digamos, p_0 . Note que para algum $t_0 > 1$, $\gamma_{p_1, p_0}(t_0) = q'_1$ (ver figura 5b). Sejam γ_2 uma geodésica arbitrária em $\mathbb{H}$ que não passa por p_2 e $x_0, x_1, x_2 \in \gamma_2$ dois a dois distintos e tais que $d(p_2, x_0) = d(p_2, \gamma_2)$ e $d(x_1, x_0) = d(x_2, x_0)$. Então, pelo lema 3.4.4, os pontos $(\gamma_{p_1, p_0}(t_0), \gamma_{p_2, x_j}(t_0))$, $j = 0, 1, 2$, não estão numa mesma geodésica e, pelo lema 3.4.2, $q'_1 \times \mathbb{H} \subset C$. Resta notar que $q = (\gamma_{q'_1, x}(2), \gamma_{q'_2, y}(2)) \in C$, onde $q'_2 := r(y)q_2$ e $y \in \mathbb{H}$ é arbitrário. Agora, se q_1 e p_1 estão de lados opostos com relação a γ , um argumento análogo mostra que $q_1 \times \mathbb{H} \subset C$, ou seja, $q \in C$. ■

Proposição 3.4.8. Seja $C \subset \mathbb{B}$ um subconjunto totalmente geodésico contendo a diagonal Δ e um ponto $p \in \mathbb{B}$, $p \notin \Delta$. Então $C = \mathbb{B}$.

Demonstração. Seja $q \in \mathbb{B}$ tal que $q \neq p$ e $q \notin \Delta$. Como as geodésicas $(p_1, \gamma_{p_1, p_2}(t))$ e $(\gamma_{p_1, p_2}(t), p_2)$ ligam pontos de C , temos que $p_1 \times \gamma_{p_1, p_2}$ e $\gamma_{p_1, p_2} \times p_2$ estão contidos em C .

Sejam $x_1, x_2 \in \gamma_{p_1, p_2}$, tais que $x_1, x_2 \neq p_1$ e $x_1 \neq x_2$. Se $q'_1 := r(p_1)q_1$, então os pontos $(\gamma_{q'_1, p_1}(2), \gamma_{q'_1, x_j}(2)) = (q_1, r(x_j)q'_1)$, $j = 1, 2$, e (q_1, q_1) estão numa mesma geodésica sse $q_1 \in \gamma_{p_1, p_2}$. Se $q_1 \notin \gamma_{p_1, p_2}$, então, do lema 3.4.2, temos que $q_1 \times \mathbb{H} \subset C$. Se $q_1 \in \gamma_{p_1, p_2}$, mas $q_2 \notin \gamma_{p_1, p_2}$, um argumento semelhante mostra que $\mathbb{H} \times q_2 \subset C$. Suponha agora que $q_1, q_2 \in \gamma_{p_1, p_2}$. Então $q = (\gamma_{p_1, m}(2), \gamma_{q'_2, p_2}(2)) \in C$, onde $q'_2 := r(p_2)q_2$ e $m := \gamma_{p_1, q_1}(1/2)$. ■

Proposição 3.4.9. Seja $C \subset \mathbb{B}$ um subconjunto totalmente geodésico contendo um plano euclidiano $S = \gamma_1 \times \gamma_2$ e um ponto $p \in \mathbb{B}$, $p \notin S$.

1. Se $p_1 \in \gamma_1$ (resp. $p_2 \in \gamma_2$), então C contém a fibração vertical $\gamma_1 \times \mathbb{H}$ (resp. horizontal $\mathbb{H} \times \gamma_2$);
2. Se $p_j \notin \gamma_j$, $j = 1, 2$, então $C = \mathbb{B}$.

Demonstração. 1. Suponha que $p_1 \in \gamma_1$ e seja $q \in \gamma_1 \times \mathbb{H}$, tal que $q \neq p$ e $q \notin S$. Se p_2 e q_2 estão do mesmo lado com relação a γ_2 , denote por $q'_2 := r(x)q_2$, onde $x \in \gamma_2$ arbitrário, e por p'_2 o ponto de interseção de γ_{p_2, q'_2} e γ_2 . Seja $t_0 > 1$ tal que $q'_2 = \gamma_{p_2, p'_2}(t_0)$. Logo, $q = (\gamma_{q'_1, m}(2), \gamma_{q'_2, x}(2)) \in C$, onde $q'_1 := \gamma_{p_1, q_1}(t_0)$ e $m := \gamma_{q_1, q'_1}(1/2)$. Suponha agora que q_2 e p_2 estão de lados opostos com relação a γ_2 . Então a geodésica γ_{p_2, q_2} intersecta γ_2 em, digamos, y . Seja t_1 tal que $q'_2 := r(y)q_2 = \gamma_{p_2, y}(t_1)$. Então $q = (\gamma_{q'_1, m'}(2), \gamma_{q'_2, y}(2))$, onde $q'_1 := \gamma_{p_1, q_1}(t_1)$ e $m' := \gamma_{q'_1, q_1}(1/2)$.

2. Seja $q \in \mathbb{B}$ tal que $q \neq p$ e $q \notin S$. Suponha que $q_1 \notin \gamma_1$. Se q_1 e p_1 estão do mesmo lado com relação a γ_1 , sejam $x \in \gamma_1$ arbitrário e $x_0, x_1, x_2 \in \gamma_2$ dois a dois distintos tais que $d(p_2, x_0) = d(p_2, \gamma_2)$ e $d(x_1, x_0) = d(x_2, x_0)$. Note que a geodésica passando por p_1 e $q'_1 := r(x)q_1$ intersecta a geodésica γ_1 em, digamos, p_0 . Assim, para algum $t_0 > 1$, temos que $\gamma_{p_1, p_0}(t_0) = q'_1$; portanto, pelo lema 3.4.4, os pontos $(\gamma_{p_1, p_0}(t_0), \gamma_{p_2, x_j}(t_0))$, $j = 0, 1, 2$, não estão na mesma geodésica. Logo, pelo lema 3.4.2, $q'_1 \times \mathbb{H} \subset C$. Resta notar que $q = (\gamma_{q'_1, x}(2), \gamma_{q'_2, y}(2)) \in C$, onde $q'_2 := r(y)q_2$ e $y \in \gamma_2$ é arbitrário. Por outro lado, se q_1 e p_1 estão de lados opostos com relação a γ_1 , um argumento análogo ao anterior mostra que $q_1 \times \mathbb{H} \subset C$, ou seja, $q \in C$. Agora, se $q_1 \in \gamma_1$, então $q_2 \notin \gamma_2$ e um argumento análogo, usando agora q_2 ao invés de q_1 , mostra que $q \in C$. ■

Lema 3.4.10. Seja γ uma geodésica e seja $p \in \mathbb{H}$, $p \notin \gamma$. Se $x, y \in \gamma$, $x \neq y$, então o ponto médio do segmento de geodésica ligando $\gamma_{x, p}(t)$ e $\gamma_{y, p}(-t)$ está em γ para todo $t \neq 0, \pm 1$ sse $\text{ta}(p, x) = \text{ta}(p, y)$.

Demonstração. Podemos supor que γ é polar a $u = (0, 1, 0)$, $p = (0, \sinh(p'), \cosh(p'))$, $x = (\sinh(x'), 0, \cosh(x'))$ e $y = (\sinh(y'), 0, \cosh(y'))$, onde $p', x', y' \in \mathbb{R}$, $p' \neq 0$ e $x' \neq y'$. Logo, o ponto médio de $\gamma_{x, p}(t)$ e $\gamma_{y, p}(-t)$ é dado por

$$\gamma_{x, p}(t) + \gamma_{y, p}(-t) = \frac{\sinh((1-t)\lambda_x)}{\sinh(\lambda_x)}x + \frac{\sinh(t\lambda_x)}{\sinh(\lambda_x)}p + \frac{\sinh((1+t)\lambda_y)}{\sinh(\lambda_y)}y + \frac{\sinh(-t\lambda_y)}{\sinh(\lambda_y)}p,$$

onde $\lambda_x = d(p, x)$ e $\lambda_y = d(p, y)$. Agora

$$\begin{aligned}
 0 &= \langle \gamma_{x,p}(t) + \gamma_{y,p}(-t), u \rangle = \left\langle \frac{\sinh(t\lambda_x)}{\sinh(\lambda_x)} p, u \right\rangle - \left\langle \frac{\sinh(t\lambda_y)}{\sinh(\lambda_y)} p, u \right\rangle \\
 &= \frac{\sinh(t\lambda_x)}{\sinh(\lambda_x)} \sinh(p') - \frac{\sinh(t\lambda_y)}{\sinh(\lambda_y)} \sinh(p') \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sinh(t\lambda_x)}{\sinh(\lambda_x)} = \frac{\sinh(t\lambda_y)}{\sinh(\lambda_y)} \\
 &\Leftrightarrow \lambda_x = \lambda_y
 \end{aligned}$$

■

Proposição 3.4.11. Seja $C \subset \mathbb{B}$ um subconjunto totalmente geodésico contendo uma geodésica genérica γ e um ponto $p \in \mathbb{B}$, $p \notin \gamma$.

1. Se $p \in \gamma_1 \times \gamma_2$, então $\gamma_1 \times \gamma_2 \subset C$;
2. Se $p_1 \in \gamma_1$ e $p_2 \notin \gamma_2$ (resp. $p_2 \in \gamma_2$ e $p_1 \notin \gamma_1$), então C contém $\gamma_1 \times \mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{H} \times \gamma_2$);
3. Se $\kappa(\gamma) \neq 1$ e $p_j \notin \gamma_j$, $j = 1, 2$, então $C = \mathbb{B}$;
4. Se $\kappa(\gamma) = 1$, $p_j \notin \gamma_j$, $j = 1, 2$, e p não está na diagonal de γ , então $C = \mathbb{B}$.
5. Se $\kappa(\gamma) = 1$, $p_j \notin \gamma_j$, $j = 1, 2$, e p está na diagonal de γ , então C contém a diagonal de γ .

Demonstração. 1. Seja t_j tal que $\gamma_j(t_j) = p_j$, $j = 1, 2$. Então as geodésicas $(p_1, \gamma_{p_2, \gamma_2(t_1)}(t))$ e $(\gamma_{p_1, \gamma_1(t_2)}(t), p_2)$ estão contidas em C , i.e., C contém $p_1 \times \gamma_2$ e $\gamma_1 \times p_2$. Agora, dado $q \in \gamma_1 \times \gamma_2$, $q \neq p$, $q \notin \gamma$, basta notar que $q = (\gamma_{p_1, q'_1}(2), \gamma_{q'_2, p_2}(2)) \in C$, onde $q'_1 := \gamma_{q_1, p_1}(1/2)$ e $q'_2 := r(p_2)q_2$.

2. Suponha que $p_1 \in \gamma_1$ e $p_2 \notin \gamma_2$. Se t_0 é tal que $p_1 = \gamma_1(t_0)$, então a geodésica $(p_1, \gamma_{p_2, p'_1}(t))$, onde $p'_1 := \gamma_2(t_0)$, está contida em C , i.e., C contém o produto $p_1 \times \gamma_{p_2, p'_1}$. Seja $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 \neq t_0$, tal que $q_2 := \gamma_2(t_1) \notin \gamma_{p_2, p'_1}$, e sejam $x_0, x_1, x_2 \in \gamma_{p_2, p'_1}$, dois a dois distintos e tais que $d(q_2, x_0) = d(q_2, \gamma_{p_2, p'_1})$ e $d(x_1, x_0) = d(x_2, x_0)$. Pelo lema 3.4.4, para todo $t \neq 0, \pm 1$, os pontos $\gamma_{q_2, x_j}(t)$, $j = 0, 1, 2$, não estão na mesma geodésica. Assim, pelo lema 3.4.2, C contém $\gamma_{q_1, p_1}(t) \times \mathbb{H}$ para todo $t \neq 0, \pm 1$, onde $q_1 := \gamma_1(t_1)$, o que implica que $\gamma_1 \times \mathbb{H} \subset C$.

3. Podemos supor que $p_j = (0, \sinh r_j, \cosh r_j)$, para algum $r_j > 0$, $j = 1, 2$, e que a geodésica γ é dada por

$$\gamma(t) = ((\sinh t, 0, \cosh t), (\sinh(t\lambda + c), 0, \cosh(t\lambda + c))), \quad \lambda, c \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0. \quad (3.10)$$

Como $\text{ta}(\gamma_1(t), p_1) = \text{ta}(\gamma_1(-t), p_1)$, pelo lema 3.4.10, o ponto médio $m_1 = m_1(t, s)$ do segmento de geodésica ligando $\gamma_{\gamma_1(t), p_1}(s)$ e $\gamma_{\gamma_1(-t), p_1}(-s)$ está contido em γ_1 para todo $s \in \mathbb{R}$

Figura 6 – Configuração para $c = -0.15$, $\lambda = 1.75$, $r_1 = 0.8$, $r_2 = 0.45$ e $t = 0.4$.

(veja figura 6). Se $c \neq 0$, também pelo lema 3.4.10, o ponto médio $m_2 = m_2(t, s)$ do segmento de geodésica ligando $\gamma_{\gamma_2(t), p_2}(s)$ e $\gamma_{\gamma_2(-t), p_2}(-s)$ não está em γ_2 para todo $s \neq 0, \pm 1$. Fixado $s \neq 0, \pm 1$, seja $t_s \in \mathbb{R}$ tal que $m_1 = \gamma_1(t_s)$. Então C contém o ponto $(m_1, \gamma_2(t_s)) \in \gamma_1 \times \gamma_2$ e o ponto (m_1, m_2) , o que implica que C contém o subespaço $m_1 \times \gamma_{\gamma_2(t_s), m_2}$. Como $p_1 \notin \gamma_1$, pela proposição 3.4.5, temos que $\gamma_{p_1, m_1} \times \gamma_{\gamma_2(t_s), m_2} \subset C$. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma_1(t_0) \notin \gamma_{p_1, m_1}$ e $\gamma_2(t_0) \notin \gamma_{\gamma_2(t_s), m_2}$. Então, do item 2. da proposição 3.4.9 temos que $C = \mathbb{B}$. Suponha agora que $c = 0$. Neste caso $(m_1, m_2) \in \gamma_1 \times \gamma_2$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ (lema 3.4.10). Em particular, podemos escrever $m_1 = (\tanh(t) \tanh(s\lambda_1), 0, \tanh \lambda_1)$ e $m_2 = (\tanh(\lambda t) \tanh(s\lambda_2), 0, \tanh \lambda_2)$, onde $\lambda_j = d(p_j, \gamma_j(t))$, $j = 1, 2$. Se denotarmos por $o := (0, 0, 1)$, então

$$\text{ta}(o, m_1) = \frac{1}{1 - \tanh^2(t)f_1(t, s)} \quad \text{e} \quad \text{ta}(o, m_2) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\lambda t)f_2(t, s)},$$

onde, $f_j(t, s) = \tanh(s\lambda_j)/\tanh \lambda_j$, $j = 1, 2$. Logo $d(o, m_2) = \lambda d(o, m_1)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ sse $\lambda = 1$ e $p_1 = p_2$, o que contraria o fato de que $\kappa(\gamma) \neq 1$. Assim, devem existir $t \neq 0$ e $s \neq 0, \pm 1$ tais que $(m_1, m_2) \notin \gamma$. Pelo item 1., temos que $\gamma_1 \times \gamma_2 \subset C$. Como $p_j \notin \gamma_j$ segue, do item 2. da proposição 3.4.9, que $C = \mathbb{B}$.

4. segue dos itens 2. e 3. considerando $\lambda = 1$, $c = 0$ e $p_1 \neq p_2$ em 3.10.

5. segue imediatamente do lema 3.4.2. ■

Demonstração do Teorema 3.4.1. É claro que pontos, geodésicas, planos verticais/horizontais, diagonais, planos euclidianos e fibras verticais/horizontais são totalmente geodésicos. Que não existem outros, segue das proposições 3.4.5 a 3.4.11. ■

FIBRADOS DE DISCOS SOBRE SUPERFÍCIES COM A GEOMETRIA DO BIDISCO HIPERBÓLICO

No que se segue vamos construir poliedros que servirão de domínios fundamentais para a ação de certas famílias de grupos discretos e provaremos os principais resultados deste trabalho utilizando os fatos estabelecidos no capítulo anterior.

4.1 Fibrados triviais

Teorema 4.1.1. O fibrado trivial de discos sobre superfícies conexas fechadas orientáveis de qualquer gênero $k \geq 2$ admite estrutura geométrica modelada no bidisco hiperbólico.

Demonstração. Sejam Γ um grupo discreto agindo em $\mathbb{H}$ e $P \subset \mathbb{H}$ um domínio fundamental para Γ . Então é imediato que o grupo $\Gamma_1 := \{(f, 1) \mid f \in \Gamma\}$ age discretamente no bidisco e que $P \times \mathbb{H} \subset \mathbb{B}$ é um domínio fundamental para Γ_1 .

Em particular, suponha que Γ é um grupo de superfícies agindo em $\mathbb{H}$. Um domínio fundamental $P \subset \mathbb{H}$ para Γ é limitado por um polígono geodésico e a fibração vertical $\partial P \times \mathbb{H}$ limita o poliedro $P^\circ \times \mathbb{H} \subset \mathbb{B}$ que é difeomorfo a uma 4-bola aberta. Assim, $\Gamma_1 \backslash \mathbb{B}$ é um fibrado de discos sobre a superfície $\Gamma \backslash \mathbb{H}$.

Seja $q_2 \in \mathbb{H}$ arbitrário. Então $P \times \mathbb{H} = \text{proj}_{\mathbb{H} \times q_2}^{-1}(P \times q_2)$. Em particular, o plano horizontal $H = \mathbb{H} \times q_2$ é invariante pela ação de Γ_1 . Para calcular o número de Euler, seguindo (GROMOV; LAWSON; THURSTON, 1988), estudaremos o transporte paralelo de vetores normais ao plano H ao longo do bordo de $P \times q_2 \subset H$. Seja $q \in \partial P \times q_2$.

Figura 7

Então $v \in T_q\mathbb{B}$ é normal a H em q sse $v = (0, v_2)$ para algum $v_2 \in T_{q_2}\mathbb{H}$ (ver seção 3.2.1 e figura 7). Como o transporte paralelo no bidisco é feito coordenada a coordenada, é imediato que o transporte paralelo normal a H ao longo de $\partial P \times q_2$ não altera v . O plano estável H é uma seção equivariante do fibrado $\Gamma_1 \backslash \mathbb{B}$, e neste caso, o número de Euler (racional) do fibrado $\Gamma_1 \backslash \mathbb{B}$ é exatamente o ângulo acumulado por um vetor normal a H ao ser transportado paralelamente ao longo de $\partial P \times q_2$. Segue daí que o fibrado $\Gamma_1 \backslash \mathbb{B}$ é trivial. ■

Teorema 4.1.2. O fibrado trivial de discos sobre o toro admite estrutura geométrica modelada no bidisco hiperbólico. A geometria em cada fibra, bem como na base do fibrado, é de curvatura zero, mas o próprio fibrado não possui curvatura nula.

Demonstração. Sejam γ uma geodésica em $\mathbb{H}$ e $p, q \in \gamma$ distintos. Denote por $S := \gamma \times \gamma$. Seja Γ o grupo gerado por $T_1 = (f^{1/2}, 1)$ e $T_2 = (1, f^{1/2})$, onde $f = r(q)r(p)$. O quadrado $P' \subset S$ com vértices (p, p) , (p, q) , (q, q) e (q, p) é um domínio fundamental para a ação de Γ restrita a S (ver figura 8). Segue daí que $P = \text{proj}_S^{-1}P'$ é um domínio fundamental para a ação de Γ em $\mathbb{B}$. O poliedro P é limitado pelas fibrações euclidianas cujos eixos são os lados de P' . Assim, pela proposição 3.2.10, P é fibrado por planos euclidianos. Portanto, $\Gamma \backslash \mathbb{B}$ é um fibrado de discos sobre o toro $\Gamma \backslash S$.

Como na proposição anterior, seguindo (GROMOV; LAWSON; THURSTON, 1988), mostraremos que $\Gamma \backslash \mathbb{B}$ é o fibrado trivial através do estudo do transporte paralelo de vetores normais a S ao longo do bordo de $\partial P'$. Pela descrição do espaço tangente a S dada na seção 3.2.2, os vetores normais a S são da forma $v = (v_1, v_2)$, onde v_j é ortogonal a γ . Como antes, o transporte paralelo de v ao longo do bordo de P' é trivial. Logo, $\Gamma \backslash \mathbb{B}$ é um fibrado trivial. ■

Figura 8 – $v_1, v_2 \in T_p\mathbb{H}$ são normais a γ e $p' = r(q)p$.

4.2 O grupo turnover

O grupo turnover é um grupo gerado por três isometrias de ordem finita com produto 1. Mais precisamente,

$$T := T(I_1, I_2, I_3) := \langle I_1, I_2, I_3 \mid I_1^{n_1} = I_2^{n_2} = I_3^{n_3} = I_1 I_2 I_3 \rangle. \quad (4.1)$$

No plano hiperbólico real, se cada I_j é uma isometria elíptica com ponto fixo $p_j \in \mathbb{H}$ e ordem n_j , $j = 1, 2, 3$, tal que n_1, n_2, n_3 são inteiros positivos satisfazendo $\sum 1/n_j < 1$, então, pelo teorema poliedral de Poincaré, T age discretamente em $\mathbb{H}$. Um domínio fundamental para T é dado por $P = \Delta \cup r\Delta$, onde r é a reflexão em um dos lados do triângulo $\Delta := \Delta(p_1, p_2, p_3)$.

No bidisco, vamos considerar o caso em que cada I_j estabiliza uma diagonal Δ_{f_j} , $j = 1, 2, 3$. Logo,

$$I_j = (g_j, f_j g_j f_j^{-1})$$

para alguma rotação g_j por $2\pi/n_j$, onde os n_j 's são como acima. Note que a igualdade $I_1 I_2 I_3 = 1$ ocorre sse

$$g_1 g_2 g_3 = 1 \quad \text{e} \quad f_1 g_1 f_1^{-1} f_2 g_2 f_2^{-1} f_3 g_3 f_3^{-1} = 1.$$

Em particular, existe uma isometria $h \in \text{Isom } \mathbb{H}$ tal que $h\Delta = \Delta' := \Delta(f_1 p_1, f_2 p_2, f_3 p_3)$.

No que se segue, vamos impor condições sobre f_1 , f_2 e f_3 para que os triângulos diagonais $D_1 := D[f_1, f_2, f_3]$ e $D_2 := D[f_1, f_3, f_4]$ sejam simples, onde f_4 é definida por $\Delta_{f_4} = I_1 \Delta_{f_2}$. Seja P_j o poliedro diagonal em $\mathbb{B}$ limitado por D_j (caso exista), $j = 1, 2$. O subespaço $P = P_1 \cup P_2$ será o candidato a domínio fundamental para a ação do grupo gerado por I_1, I_2, I_3 no bidisco. A discretude será uma consequência da versão do teorema poliedral de Poincaré dada em (ANAN'IN; GROSSI, 2011b).

Podemos supor que $f_1 = 1$. Logo, a igualdade $I_1 I_2 I_3 = 1$ implica que os triângulos Δ e Δ' diferem apenas por uma rotação em torno de p_1 .

Proposição 4.2.1. Suponha que Δ e Δ' diferem por uma rotação em torno de p_1 . Então o triângulo diagonal $D[1, f_2, f_3]$ é simples sse o triângulo diagonal $D[1, f_3, f_4]$ é simples, onde $f_4 := g_1 f_2 g_1^{-1}$.

Demonstração. Seja g uma rotação em torno de p_1 tal que $\Delta' = g\Delta$ e denote por r_j a reflexão na geodésica σ_j equidistante de p_j e $g p_j = f_j p_j$, $j = 2, 3$. Então $g_1 = r_3 r_2$, pois o ângulo entre σ_2 e σ_3 em p_1 é π/n_1 (ver figura 9a). Assim, $g_1 p_2 = r_3 r_2 p_2 = r_3 g p_2$ e $g_1 g p_2 = r_3 r_2 g p_2 = r_3 p_2$ implicam que $g_1 f_2 g_1^{-1}$ e $r_3 f_2 r_3$ têm o mesmo eixo. Logo, se f_2 e f_3 são hiperbólicas com eixos assintóticos ou concorrentes, o mesmo vale para f_3 e f_4 , pois o eixo de f_3 é estável por r_3 . ■

Denote por γ_j o eixo de f_j , $j = 2, 3$, e suponha que γ_2 intersecta γ_3 em $x_1 \in \mathbb{H}$. Então, $g_1 \gamma_2$ intersecta γ_3 em $x_2 = r_3 x_1$. Sejam $y_1 \in \gamma_2$, $y_2, z_1 \in \gamma_3$ e $z_2 \in g\gamma_2$, tais que

$$f_2 = r(x_1) r(y_1), \quad f_3 = r(x_1) r(z_1) = r(x_2) r(y_2) \quad \text{e} \quad f_4 = r(x_2) r(z_2)$$

(ver figura 9a). Então, do lema 3.3.12, temos que

$$D_j := D[1, f_{j+1}, f_{j+2}] = (1, r(x_j)) \text{proj}_{\Delta}^{-1} \partial \Delta(x'_j, y'_j, z'_j), \quad (4.2)$$

onde $\Delta(x'_j, y'_j, z'_j)$ é o triângulo na diagonal Δ com vértices $x'_j = (x_j, x_j)$, $y'_j = (y_j, y_j)$ e $z'_j = (z_j, z_j)$, $j = 1, 2$. As três faces de D_j são coespinais, $j = 1, 2$. Em particular, as espinhas de D_1 e D_2 são iguais sse $x_1 = x_2$.

O poliedro diagonal limitado por D_j é, portanto, $P_j := (1, r(x_j))\text{proj}_\Delta^{-1}\Delta(x'_j, y'_j, z'_j)$, $j = 1, 2$. No que se segue, vamos mostrar que $P_1 \cap P_2 = D[1, f_3]$.

Figura 9

Observação 4.2.2. Sejam $x, y \in \mathbb{B}$. Denotaremos por $\gamma[x, y]$ o segmento de geodésica ligando x e y .

Do lema 3.3.12, temos que

$$D[1, f_3] = (1, r(x_1))\text{proj}_\Delta^{-1}\gamma[x'_1, z'_1] = (1, r(x_2))\text{proj}_\Delta^{-1}\gamma[x'_2, y'_2],$$

pois $x_1, x_2, z_1, y_2 \in \gamma_3$ e $d(x_1, z_1) = d(x_2, y_2)$. Além do mais, os triângulos $\Delta(x'_1, y'_1, z'_1)$ e $\Delta(x'_2, y'_2, z'_2)$ têm os mesmos ângulos internos. De fato, basta notar que

$$\begin{aligned} f_4 &= g_1 f_2 g_1^{-1} = r_3 r_2 f_2 r_2 r_3 = r_3 f_2^{-1} r_3 = r_3 r(y_1) r(x_1) r_3 \\ &= r_3 r(x_1) r(x_1) r(y_1) r(x_1) r_3 = r_3 r(x_1) r(r(x_1) y_1) r_3 = r(x_2) r(r_3 r(x_1) y_1), \end{aligned}$$

o que implica que $r_3 r(x_1) y_1 = z_2$. Em particular, y_1 e z_2 estão de lados opostos com relação a γ_3 . Um raciocínio análogo mostra que $r_3 r(x_1) z_1 = y_2$.

De 4.2, segue que toda fatia de P_j fora da face comum $D[1, f_3]$ pode ser escrita como $\Delta_{h_{u_j}}$, onde $h_{u_j} = r(x_j) r(u_j)$ para algum $u_j \in \Delta(x_j, y_j, z_j)$, $u_j \notin \gamma_3$, $j = 1, 2$. Como y_1 e z_2 estão de lados opostos com relação a γ_3 , os eixos de h_{u_1} e h_{u_2} se intersectam em $\mathbb{H}$ ou são ultraparalelos com ordem cíclica $+1$, i.e., $h_{u_1}^{-1} h_{u_2}$ não tem pontos fixos em $\mathbb{H}$. Em outras palavras, P_1 e P_2 não se intersectam fora da face comum, ou seja, $P_1 \setminus D[1, f_3]$ e $P_2 \setminus D[1, f_3]$ estão de lados opostos com relação a $D(1, f_3)$.

Denotemos por $P := P[1, f_2, f_3, f_4] := P_1 \cup P_2$.

Proposição 4.2.3. O poliedro P é fibrado por diagonais.

Demonstração. P_1 e P_2 são fibrados por diagonais (vide proposição 3.3.37) e $P_1 \cap P_2 = D[1, f_3]$. ■

Lema 4.2.4. Sejam g uma rotação por um ângulo $\theta \in (0, 2\pi)$ em torno de $p \in \mathbb{H}$ e f_j uma isometria hiperbólica com ponto fixo atrator v_j^+ e ponto fixo repulsor v_j^- , $j = 1, 2$. Se $v_2^\pm \in \{g^t v_1^\pm \mid t \in [0, 1]\}$, então $D[1, f_2] \subset S[g, 1, f_1]$.

Demonstração. Se $f_2 = g^t f_1^s g^{-t}$ para algum $t \in [0, 1]$ e $s > 0$, o resultado é imediato. Suponha que este não seja o caso. Então a existência de $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tais que $v_2^+ = g^{t_1} v_1^+$ e $v_2^- = g^{t_2} v_1^-$, implica que para todo $t \in (t_1, t_2)$ (assumindo $t_1 < t_2$) as geodésicas $g^t \gamma_1$ e γ_2 são ultraparalelas, onde γ_j denota o eixo de f_j , $j = 1, 2$. Sejam $x \in \mathbb{H}$ e $s > 0$ arbitrários. Denote por m o ponto médio de x e $f_2^s x$, e por σ a geodésica passando por m e ortogonal ao eixo de f_2 . Seja $t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que $g^{t_0} \gamma_1$ seja ortogonal a σ e seja σ' a geodésica passando por x e ortogonal à geodésica $g^{t_0} \gamma_1$ (ver figura 9b). É claro que a isometria $r(\sigma)r(\sigma')$ é hiperbólica com eixo $g^{t_0} \gamma_1$. Em particular, $r(\sigma)r(\sigma')x = f_2^s x$. Portanto, para algum $s_0 > 0$, temos $g^{t_0} f_1^{s_0} g^{-t_0} x = f_2^s x$, o que implica que $(x, f_2^s x) = (x, g^{t_0} f_1^{s_0} g^{-t_0} x) \in S[g, 1, f_1]$. ■

Até o fim desta seção, vamos considerar apenas o caso em que os eixos de f_2 e f_3 se intersectam em $\mathbb{H}$.

No que se segue, mostramos que as cópias de P pelas isometrias I_1 , I_2 e I_3 tessalam uma vizinhança de cada um dos vértices do poliedro P .

Denote, respectivamente, por v_j^+ e v_j^- o ponto fixo atrator e repulsor de f_j , $j = 2, 3$. Por construção, $v_3^\pm \in \{g_1^t v_2^\pm \mid t \in [0, 1]\}$, o que, pelo lema 4.2.4, implica que $D[1, f_3] \subset S[g_1, 1, f_2]$. Uma vez que $\partial S[g_1, 1, f_2]$ contém as faces cotranchais $D[1, f_2]$ e $D[1, f_4]$ de P , temos $P \subset S[g_1, 1, f_2]$. Assim, do corolário 3.3.28, as cópias de P por I_1 tessalam uma vizinhança do vértice Δ .

Do corolário 3.3.28, as cópias de $S[g_3, f_3, f_4]$ por I_3 tessalam uma vizinhança de Δ_{f_3} sse as cópias de $S[g_3, 1, f_3^{-1} f_4]$ por (g_3, g_3) tessalam uma vizinhança de Δ , pois

$$\begin{aligned} S[g_3, f_3, f_4] &= \bigcup_{t \in [0, 1]} (g_3^t, f_3 g_3^t f_3^{-1}) D[f_3, f_4] = \bigcup_{\substack{t \in [0, 1] \\ s \geq 0}} (g_3^t, f_3 g_3^t (f_3^{-1} f_4)^s) \Delta \\ &= \bigcup_{\substack{t \in [0, 1] \\ s \geq 0}} (1, f_3 g_3^t (f_3^{-1} f_4)^s g_3^{-t}) \Delta = (1, f_3) S[g_3, 1, f_3^{-1} f_4]. \end{aligned}$$

Assim, para mostrar que as cópias de P por I_3 tessalam uma vizinhança de Δ_{f_3} , é suficiente mostrar que $P' := (1, f_3^{-1})P \subset S[g_3, 1, f_3^{-1} f_4]$. Do lema 3.3.12, temos que

$$\begin{aligned} P'_1 &= (1, f_3^{-1})P_1 = (1, r(z_1)) \text{proj}_\Delta^{-1} \Delta(z'_1, x'_1, y'_1) \text{ e} \\ P'_2 &= (1, f_3^{-1})P_2 = (1, r(y_2)) \text{proj}_\Delta^{-1} \Delta(y'_2, x'_2, z'_2). \end{aligned}$$

Em particular, P'_1 e P'_2 se intersectam somente ao longo de $D[1, f_3^{-1}]$. Agora

$$\begin{aligned} g_1 f_2 g_2 f_2^{-1} f_3 g_3 f_3^{-1} = 1 &\Leftrightarrow g_2 f_2^{-1} f_3 g_3 f_3^{-1} g_1 f_2 = 1 \Leftrightarrow g_1 g_2 f_2^{-1} f_3 g_3 f_3^{-1} g_1 f_2 g_1^{-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow g_3^{-1} f_2^{-1} f_3 g_3 f_3^{-1} g_1 f_2 g_1^{-1} = 1 \Leftrightarrow f_2^{-1} f_3 g_3 f_3^{-1} f_4 g_3^{-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow g_3 f_3^{-1} f_4 g_3^{-1} = f_3^{-1} f_2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

implica que os atratores (resp. repulsores) de $f_3^{-1} f_4 = r(y_2) r(z_2)$ e de $g_3 f_3^{-1} f_4 g_3^{-1} = r(z_1) r(y_1)$ estão de lados opostos com relação a γ_3 , pois y_1 e z_2 estão de lados opostos com relação a γ_3 . Como g_3 é uma rotação antihorária, temos que $v_3^\mp \in \{g_3^t u_\pm \mid t \in [0, 1]\}$, onde u_+ (resp. u_-) é o ponto fixo atrator (resp. repulsor) de $f_3^{-1} f_4$. Assim, do lema 4.2.4, temos que $D[1, f_3^{-1}] \subset S[g_3, 1, f_3^{-1} f_4]$. Uma vez que $\partial S[g_3, 1, f_3^{-1} f_4]$ contém as faces cotranchais

$$D[1, f_3^{-1} f_4] = (1, r(z_1)) \text{proj}_\Delta^{-1} \gamma[z'_1, y'_1] \text{ e } (g_3, g_3) D[1, f_3^{-1} f_4] = (1, r(y_2)) \text{proj}_\Delta^{-1} \gamma[y'_2, z'_2]$$

de P' , temos $P' \subset S[g_3, 1, f_3^{-1} f_4]$.

Resta mostrar que as cópias de P pela isometria I_2 tessalam uma vizinhança de Δ_{f_2} . Como precisamos mostrar a tesselação apenas localmente, é suficiente mostrar que as cópias de $Q := P_1 \cup I_1^{-1} P_2$ por I_2 tessalam uma vizinhança de Δ_{f_2} . Note que o poliedro Q é simples, pois P_1 e $I_1^{-1} P_2$ se intersectam somente ao longo de $D[1, f_2]$. Aplicando $(1, f_2^{-1})$, obtemos

$$Q'_1 := (1, f_2^{-1}) P_1 = P[1, f_2^{-1}, f_2^{-1} f_3] = (1, r(y_1)) \text{proj}_\Delta^{-1} \Delta(y'_1, x'_1, z'_1).$$

A equação 4.3 é equivalente à equação $g_2 f_2^{-1} f_3 g_2^{-1} = g_1^{-1} f_4^{-1} f_3 g_1$, o que implica que

$$\begin{aligned} I_1^{-1} \Delta_{f_3} &= I_2 I_3 \Delta_{f_3} = I_2 \Delta_{f_3} = (g_2, f_2 g_2 f_2^{-1} f_3) \Delta \\ &= (1, f_2 g_2 f_2^{-1} f_3 g_2^{-1}) \Delta = (1, f_2) (1, g_1^{-1} f_4^{-1} f_3 g_1) \Delta. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} Q'_2 &:= (1, f_2^{-1}) I_1^{-1} P[1, f_3, f_4] = (1, f_2^{-1}) P[1, f_2 g_1^{-1} f_4^{-1} f_3 g_1, f_2] \\ &= P[f_2^{-1}, g_1^{-1} f_4^{-1} f_3 g_1, 1] = P[1, f_2^{-1}, g_1^{-1} f_4^{-1} f_3 g_1] \\ &= (1, r(g_1^{-1} z_2)) \text{proj}_\Delta^{-1} I_1^{-1} \Delta(z'_2, x'_2, y'_2). \end{aligned}$$

Assim, Q'_1 e Q'_2 se intersectam somente ao longo de

$$D[1, f_2^{-1}] = (1, r(g_1^{-1} z_2)) \text{proj}_\Delta^{-1} I_1^{-1} \gamma[z'_2, x'_2] = (1, r(y_1)) \text{proj}_\Delta^{-1} \gamma[y'_1, x'_1].$$

Como $g_1^{-1} y_2$ e z_1 estão de lados opostos com relação a γ_2 , os pontos fixos atratores (resp. repulsores) de $f_2^{-1} f_3 = r(y_1) r(z_1)$ e $g_2 f_2^{-1} f_3 g_2^{-1} = r(g_1^{-1} z_2) r(g_1^{-1} y_2)$ estão de lados opostos com relação a γ_2 . Por construção, temos que $v_2^\pm \in \{g_2^t u'_\mp \mid t \in [0, 1]\}$, onde u'_+ (resp. u'_-) é o ponto fixo atrator (resp. repulsor) de $f_2^{-1} f_3$. Assim, pelo lema 4.2.4, $D[1, f_2^{-1}] \subset S[g_2, 1, f_2^{-1} f_3]$. Já que $\partial S[g_2, 1, f_2^{-1} f_3]$ contém as faces cotranchais

$$D[1, f_2^{-1} f_3] = (1, r(y_1)) \text{proj}_\Delta^{-1} \gamma[y'_1, z'_1] \text{ e } (g_2, g_2) D[1, f_2^{-1} f_3] = (1, r(g_1^{-1} z_2)) \text{proj}_\Delta^{-1} I_1^{-1} \gamma[z'_2, x'_2]$$

de $Q' = Q'_1 \cup Q'_2$, temos $Q' \subset S[g_2, 1, f_2^{-1}f_3] \Leftrightarrow Q \subset S[g_2, f_2, f_3]$.

Finalmente, pela versão do teorema poliedral de Poincaré em (ANAN'IN; GROSSI, 2011b), obtemos a seguinte

Proposição 4.2.5. Sejam I_1, I_2, I_3 como descritas acima. As cópias do poliedro P , pelos elementos do grupo T gerado por I_1, I_2, I_3 , tessalam o bidisco. Em particular, o poliedro P é um domínio fundamental para o grupo T que é, portanto, discreto. ■

4.2.1 Exemplos

Sejam n_1, n_2 e n_3 inteiros positivos satisfazendo $1/n_1 + 1/n_2 + 1/n_3 < 1$ e sejam a_0 e b_0 tais que

$$\cosh a_0 = \frac{\cos(\pi/n_3) + \cos(\pi/n_1) \cos(\pi/n_2)}{\sin(\pi/n_1) \sin(\pi/n_2)}$$

e

$$\cosh b_0 = \frac{\cos(\pi/n_2) + \cos(\pi/n_1) \cos(\pi/n_3)}{\sin(\pi/n_1) \sin(\pi/n_3)}.$$

Considere os seguintes pontos em $\mathbb{H}$:

$$p_1 = (0, 0, 1), \quad p_2 = (a, 0, 1) \text{ e } p_3 = (b \cos(\pi/n_1), b \sin(\pi/n_1), 1),$$

onde $a := \tanh a_0$ e $b := \tanh b_0$. Assim, o triângulo $\triangle$ com vértices p_j e lados $s_j = \gamma[p_{j-1}, p_{j+1}]$, $j = 1, 2, 3$, tem ângulos $\pi/n_1, \pi/n_2$ e π/n_3 , respectivamente, nos vértices p_1, p_2 e p_3 . Denote por g_j a rotação antihorária em torno de p_j , $j = 1, 2, 3$. Então é imediato que $g_1 g_2 g_3 = 1$.

Para cada $t \in (0, \pi)$, definimos por

$$\varphi_t := \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a rotação por um ângulo $2t$ em torno de p_1 ; para cada $t_2, t_3 \in (0, \pi)$, denote por γ_{t,t_2} e σ_{t,t_3} as geodésicas polares a $v_{t,t_2} := (\cos t, \sin t, \cos t_2)$ e $w_{t,t_3} := \varphi_{\pi/2n_1} v_{t,t_3}$, respectivamente (ver figura 10).

Note que $u_t := (\sin t, -\cos t, 0)$ e $u_{t,t_2,a} := (\sin t, a \cos t_2 - \cos t, a \sin t)$ são pontos positivos de γ_{t,t_2} , tais que $\langle u_t, p_1 \rangle = \langle u_{t,t_2,a}, p_2 \rangle = 0$. Em particular

$$\begin{aligned} r(u_t)p_2 &= 2\langle p_2, u_t \rangle u_t - p_2 = (2a \sin t)u_t - p_2 = 2a \sin t(\sin t, -\cos t, 0) - (a, 0, 1) \\ &= (2a \sin^2 t - a, -2a \sin t \cos t, -1) \\ &= (a \sin^2 t - a \cos^2 t, -a \sin(2t), -1) \\ &= -(a \cos(2t), a \sin(2t), 1) = -\varphi_t p_2, \end{aligned}$$

i.e., u_t é polar à geodésica equidistante de p_2 e $\varphi_t p_2$ em $\mathbb{H}$. Assim a isometria definida por

$$f_{t,t_2} := r(u_t)r(u_{t,t_2,a})$$

é hiperbólica. De fato, basta notar que

$$\text{ta}(u_t, u_{t,t_2,a}) = 1 + \frac{a^2 \sin^2 t \sin^2 t_2}{(1 - a \cos t \cos t_2)^2 - a^2 \sin^2 t \sin^2 t_2} > 1 \quad (4.4)$$

para todo $t, t_2 \in (0, \pi)$. Além do mais, f_{t,t_2} leva p_2 para $\varphi_t p_2$, tem eixo γ_{t,t_2} , ponto fixo atrator $v_{t,t_2}^+ := (\cos(t+t_2), \sin(t+t_2), 1)$ e ponto fixo repulsor $v_{t,t_2}^- := (\cos(t-t_2), \sin(t-t_2), 1)$.

Figura 10 – Configuração para $n_1 = 8$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, $t = \pi/4$, $t_2 = \pi/4$ e $t_3 = \pi/5$.

De maneira análoga, a isometria definida por

$$h_{t,t_3} := r(\varphi_{\pi/2n_1} u_t) r(\varphi_{\pi/2n_1} u_{t,t_3,b})$$

é hiperbólica, com ponto fixo atrator $w_{t,t_3}^+ := \varphi_{\pi/2n_1} v_{t,t_3}^+$, ponto fixo repulsor $w_{t,t_3}^- := \varphi_{\pi/2n_1} v_{t,t_3}^-$, eixo σ_{t,t_3} e tal que $h_{t,t_3} p_3 = \varphi_t p_3$. De fato,

$$\begin{aligned} h_{t,t_3} p_3 &= r(\varphi_{\pi/2n_1} u_t) r(\varphi_{\pi/2n_1} u_{t,t_3,b}) p_3 = -r(\varphi_{\pi/2n_1} u_t) p_3 \\ &= p_3 - 2\langle p_3, \varphi_{\pi/2n_1} u_t \rangle \varphi_{\pi/2n_1} u_t \\ &= \varphi_{\pi/2n_1} ((b, 0, 1) - 2\langle (b, 0, 1), u_t \rangle u_t) \\ &= \varphi_{\pi/2n_1} ((b, 0, 1) - (2b \sin t) u_t) \\ &= \varphi_{\pi/2n_1} \varphi_t (b, 0, 1) = \varphi_t p_3, \end{aligned}$$

pois $p_3 = \varphi_{\pi/2n_1} (b, 0, 1)$. E da equação 4.4 temos que

$$\text{ta}(\varphi_{\pi/2n_1} u_t, \varphi_{\pi/2n_1} u_{t,t_3,b}) = \text{ta}(u_t, u_{t,t_3,b}) > 1,$$

para todo $t, t_3 \in (0, \pi)$.

A recíproca é verdadeira, i.e., se f é qualquer isometria hiperbólica levando p_2 para $\varphi_t p_2$, então existe um único $t_2 \in (0, \pi)$ tal que $f = f_{t,t_2}$, pois o eixo de f deve, necessariamente, ser ortogonal à geodésica equidistante de p_2 e $\varphi_t p_2$. Algo análogo é válido para isometrias hiperbólicas levando p_3 para $\varphi_t p_3$.

Agora precisamos impor restrições sobre t_2 e t_3 de modo a garantir que a fibração $D[1, f_{t,t_2}, h_{t,t_3}]$ seja simples (vide proposição 3.3.36). Uma vez feitas tais restrições, a fibração $D[1, f_{t,t_2}, h_{t,t_3}]$ será simples para todo $t \in (0, \pi)$, pois

$$\begin{aligned} \text{ta}(v_{t,t_2}, w_{t,t_3}) &= \frac{(\cos t \cos(t + \pi/n_1) + \sin t \sin(t + \pi/n_1) - \cos t_2 \cos t_3)^2}{(1 - \cos^2 t_2)(1 - \cos^2 t_3)} \\ &= \frac{(\cos(\pi/n_1) - \cos t_2 \cos t_3)^2}{\sin^2 t_2 \sin^2 t_3} \end{aligned}$$

independe de t .

A construção acima torna imediato o seguinte

Lema 4.2.6. Sejam $t, t_2, t_3 \in (0, \pi)$.

1. Se $t_2 \in (0, \pi/n_1]$, então o eixo de h_{t,t_3} intersecta o eixo de f_{t,t_2} sse $t_3 \in (\pi/n_1 - t_2, \pi/n_1 + t_2)$;
2. Se $t_2 \in [\pi/n_1, \pi - \pi/n_1]$, então o eixo de h_{t,t_3} intersecta o eixo de f_{t,t_2} sse $t_3 \in (t_2 - \pi/n_1, t_2 + \pi/n_1)$;
3. Se $t_2 \in [\pi - \pi/n_1, \pi)$, então o eixo de h_{t,t_3} intersecta o eixo de f_{t,t_2} sse $t_3 \in (t_2 - \pi/n_1, 2\pi - t_2 - \pi/n_1)$.

Demonstração. Note que $\text{ta}(u_t, \varphi_{\pi/2n_1} u_t) = \cos^2(\pi/n_1)$, i.e., o ângulo entre a geodésica equidistante de p_2 e $\varphi_t p_2$ (polar a u_t) e a geodésica equidistante de p_3 e $\varphi_t p_3$ (polar a $\varphi_{\pi/2n_1} u_t$) é π/n_1 para todo $t \in (0, \pi)$. Além do mais, os eixos de f_{t,t_2} e h_{t,t_3} são, respectivamente, ortogonais a estas geodésicas equidistantes. Resta analisar as combinações possíveis para t_2 e t_3 que resultem em interseção dos respectivos eixos (vide figura 10). ■

Para cada $(t, t_2, t_3) \in (0, \pi)^3$, definimos

$$I_1 := (g_1, g_1), \quad I_{2,t,t_2} := (g_2, f_{t,t_2} g_2 f_{t,t_2}^{-1}) \quad \text{e} \quad I_{3,t,t_3} := (g_3, h_{t,t_3} g_3 h_{t,t_3}^{-1}).$$

Por construção I_1 , I_{2,t,t_2} e I_{3,t,t_3} estabilizam, respectivamente, as diagonais Δ , $\Delta_{f_{t,t_2}}$ e $\Delta_{h_{t,t_3}}$. Além do mais, $I_1^{n_1} = I_{2,t,t_2}^{n_2} = I_{3,t,t_3}^{n_3} = I_1 I_{2,t,t_2} I_{3,t,t_3} = 1$.

Dizemos que uma tripla $(t, t_2, t_3) \in (0, \pi)^3$ é *admissível* se o eixo de f_{t,t_2} intersecta o eixo de h_{t,t_3} em $\mathbb{H}$. Denotaremos por $\mathfrak{J} \subset (0, \pi)^3$ o subespaço das triplas (t, t_2, t_3) admissíveis. Segue do lema 4.2.6 que $\mathfrak{J}$ é conexo.

Para todo $(t, t_2, t_3) \in \mathfrak{J}$, os poliedros diagonais $P[1, f_{t,t_2}, h_{t,t_3}]$ e $P[1, h_{t,t_3}, g_1 f_{t,t_2} g_1^{-1}]$ são fibrados por diagonais (vide proposição 3.3.37), o que implica que o poliedro

$$P_{t,t_2,t_3} := P[1, f_{t,t_2}, h_{t,t_3}] \cup P[1, h_{t,t_3}, g_1 f_{t,t_2} g_1^{-1}]$$

é fibrado por diagonais (vide proposição 4.2.3).

Defina

$$\mathfrak{J} \ni (t, t_1, t_2) \mapsto \rho_{t,t_1,t_2} : T \rightarrow \text{Isom } \mathbb{B}$$

$$I_1 \mapsto I_1$$

$$I_j \mapsto I_{j,t,t_j}, \quad j = 2, 3,$$

onde T é o grupo turnover (4.1). Pela proposição 4.2.5, o grupo $\rho_{t,t_1,t_2} T$ age discretamente em $\mathbb{B}$ para toda tripla $(t, t_2, t_3) \in \mathfrak{J}$ e o poliedro P_{t,t_2,t_3} é um domínio fundamental para $\rho_{t,t_2,t_3} T$. Portanto, $\rho_{t,t_2,t_3} T \backslash \mathbb{B}$ é um fibrado de discos sobre o orbifold $T \backslash \mathbb{H}$.

A representação $\rho_{\pi/2, \pi/2, \pi/2}$ deixa uma diagonal invariante. De fato, basta notar que $f_{\pi/2, \pi/2} = r(p_1)r(p_2)$ e $h_{\pi/2, \pi/2} = r(p_1)r(p_3)$, de onde segue que

$$I_{2, \pi/2, \pi/2} \Delta_{p_1} = I_{3, \pi/2, \pi/2} \Delta_{p_1} = \Delta_{p_1}.$$

Concluimos que $\mathfrak{J} \rightarrow \text{Hom}(T, \text{Isom } \mathbb{B})$, $(t, t_1, t_2) \mapsto \rho_{t,t_1,t_2}$, é uma deformação 3-dimensional contínua da representação Fuchsiana $\rho_{\pi/2, \pi/2, \pi/2}$.

Denote por $P' \subset \Delta_{p_1}$ o polígono em Δ_{p_1} tal que $\text{proj}_{\Delta_{p_1}}^{-1} P' = P_{\pi/2, \pi/2, \pi/2}$ (P' é um domínio fundamental para a ação de $\rho_{\pi/2, \pi/2, \pi/2} T$ restrita a Δ_{p_1}). Sejam $v, w \in T_q \mathbb{B}$, $q \in \partial P' \subset \Delta_{p_1}$, tal que v (w) é normal (tangente) a Δ_{p_1} . Então, $v = (v_1, -r(p_1)v_1)$ e $w = (w_1, r(p_1)w_1)$ para alguns $v_1, w_1 \in T_{q_1} \mathbb{H}$ (vide seção 3.2.3). Logo, o ângulo acumulado por v ao ser transportado paralelamente ao longo do bordo de P' iguala o ângulo acumulado por w ao ser transportado paralelamente ao longo de $\partial P'$. E este último, como é bem sabido, é a característica de Euler χ do orbifold $\rho_{\pi/2, \pi/2, \pi/2} T \backslash \Delta_{p_1}$. Seguindo (GROMOV; LAWSON; THURSTON, 1988) (ou (GOLDMAN; KAPOVICH; LEEB, 2001)), isto quer dizer que o número de Euler racional e (vide (BONAHON; SIEBENMANN, 1985)) do fibrado de discos $\rho_{\pi/2, \pi/2, \pi/2} T \backslash \mathbb{B}$ sobre o orbifold $\rho_{\pi/2, \pi/2, \pi/2} T \backslash \Delta_{p_1}$ satisfaz $|e| = |\chi|$.

Em resumo, temos o

Teorema 4.2.7. Sejam n_1, n_2, n_3 inteiros positivos tais que $\sum 1/n_j < 1$ e seja T o grupo turnover. Para cada $(t_1, t_2, t_3) \in \mathfrak{J}$, existe uma representação fiel e discreta $\rho_{t_1,t_2,t_3} : T \rightarrow \text{Isom } \mathbb{B}$ tal que $M(t_1, t_2, t_3) := \rho_{t_1,t_2,t_3} T \backslash \mathbb{B}$ é um fibrado de discos sobre o orbifold $S(n_1, n_2, n_3) := T \backslash \mathbb{H}$ com número de Euler dado por $|eM(t_1, t_2, t_3)| = |\chi S(n_1, n_2, n_3)|$. ■

Passando para subgrupos de índice finito e sem torção em T (Lema de Selberg, vide (BEARDON, 1995)) obtemos fibrados de discos sobre superfícies.

4.3 O grupo hiperelíptico

O grupo hiperelíptico é o grupo gerado por um número finito de involuções cujo produto é 1. No plano hiperbólico $\mathbb{H}$, se

$$H_n := \langle r_1, \dots, r_n \mid r_1^2 = \dots = r_n^2 = r_n \cdots r_1 \rangle$$

denota o grupo gerado pelas reflexões r_j nos pontos médios dos lados de um polígono geodésico convexo P com $n \geq 5$ lados e cuja soma dos ângulos internos é 2π , o teorema poliedral de Poincaré diz que H_n age discretamente em $\mathbb{H}$ e que P é um domínio fundamental para H_n .

A seguir vamos construir uma família a um parâmetro de grupos hiperelípticos agindo discretamente em $\mathbb{B}$.

Sejam g uma rotação por $2\pi/n$, $n \geq 6$ par, em torno de $p \in \mathbb{H}$, f uma isometria hiperbólica arbitrária e $I = (g, g)$. Então $I^k \Delta_f = \Delta_{f_k}$, onde $f_k := g^k f g^{-k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Denote por $D_k := D[f_{k-1}, f_k]$ o segmento de fibração diagonal contendo as diagonais ultraparalelas $\Delta_{f_{k-1}}$ e Δ_{f_k} como fatias, $k = 1, \dots, n$ (vide corolário 3.3.22 e proposição 3.3.13). Pelo corolário 3.3.28, $S(g, 1, f)$ e $I^k S(g, 1, f)$ são disjuntas para todo $k \in \mathbb{Z}$ tal que $I^k \neq 1$. Como $D_k^\circ \subset I^{k-1} S(g, 1, f)$, $k = 1, \dots, n$, temos que D_1° e D_k° não se intersectam para todo $k = 2, 3, \dots, n$.

Assim, o poliedro $P := \bigcup_{k=1}^n I^k P[1, f, f_1]$ é simples sse o poliedro $P[1, f, f_1]$ é simples, o que, pela proposição 3.3.36, acontece sse os eixos de f e gfg^{-1} são assintóticos ou concorrentes. Denotando por $m_k := f_{k-1}(f_{k-1}^{-1}f_k)^{1/2}$, segue que $R_k := \iota \circ (m_k, m_k^{-1})$ é a reflexão na fatia média da face D_k do poliedro diagonal P , $k = 1, \dots, n$.

Note que

$$\begin{aligned} I^k \Delta_{m_1} &= (g^k, g^k f (f^{-1} f_1)^{1/2}) \Delta = (1, g^k f (f^{-1} f_1)^{1/2} g^{-k}) \Delta \\ &= (1, g^k f g^{-k} g^k (f^{-1} f_1)^{1/2} g^{-k}) \Delta = (1, f_k (g^k (f^{-1} f_1) g^{-k})^{1/2}) \Delta \\ &= (1, f_k (f_k^{-1} f_{k+1})^{1/2}) \Delta = (1, m_{k+1}) \Delta = \Delta_{m_{k+1}}. \end{aligned}$$

Isso implica que a reflexão na fatia média Δ_{m_k} de D_k satisfaz

$$R_k = \iota \circ (m_k, m_k^{-1}) = I^{k-1} R_1 I^{-(k-1)},$$

$k = 1, \dots, n$. Assim

$$\begin{aligned} R_n \cdots R_1 &= I^{n-1} R_1 I^{-(n-1)} I^{n-2} R_1 I^{-(n-2)} \cdots I^2 R_1 I^{-2} I R_1 I^{-1} R_1 \\ &= I^{-1} R_1 I^{-1} R_1 \cdots I^{-1} R_1 I^{-1} R_1 = (I^{-1} R_1)^n. \end{aligned}$$

Segue de

$$\begin{aligned} R_1 I &= \iota \circ (m_1 g, m_1^{-1} g) = \iota \circ (f (f^{-1} f_1)^{1/2} g, (f^{-1} f_1)^{-1/2} f^{-1} g) \\ &= \iota \circ (f (f^{-1} f_1)^{1/2} g, (f^{-1} f_1)^{-1/2} f^{-1} g f g^{-1} g f^{-1}) \\ &= \iota \circ (f (f^{-1} f_1)^{1/2} g, (f^{-1} f_1)^{1/2} g f^{-1}), \end{aligned}$$

que $R_1 I \in \text{Stab } \Delta_f$ (ver proposição 3.2.13) e que $R_1 I$ tem ordem n sse $(f^{-1}f_1)^{1/2}g$ tem ordem n .

4.3.1 Exemplos

Denote por g a rotação antihorária por um ângulo $2\pi/n$, $n \geq 6$ par, em torno de $p = (0, 0, 1) \in \mathbb{H}$, i.e., $g = \varphi_{\pi/n}$. Para cada $t \in (0, \pm\pi)$, denote por γ_t a geodésica polar a $v_t = (1, 0, \cos t)$. Note que $\gamma_t = \gamma_{-t}$. Sejam $\lambda, \theta_t \in \mathbb{R}$ definidos, respectivamente, por $\cosh \lambda = \cotg^2(\pi/n)$ e $\cos \theta_t = c \cos t$, onde $c := \tanh \lambda$.

Denote por $q_t := (c \cos \theta_t, -\epsilon_t c \sin \theta_t, 1)$ e $u_t := (c^{-1} \cos \theta_t, -\epsilon_t c^{-1} \sin \theta_t, 1)$, onde $\epsilon_t = \pm 1$ é o sinal de t . Então $\langle u_t, q_t \rangle = 0$ e

$$\langle u_t, \pi(v_t)q_t \rangle = \left\langle u_t, q_t - \frac{\langle q_t, v_t \rangle}{\langle v_t, v_t \rangle} v_t \right\rangle = -\frac{\langle q_t, v_t \rangle}{\langle v_t, v_t \rangle} \langle u_t, v_t \rangle = -\frac{\langle q_t, v_t \rangle}{\langle v_t, v_t \rangle} (c^{-1} \cos \theta_t - \cos t) = 0,$$

ou seja, u_t é o ponto polar da geodésica passando por q_t e pela projeção ortogonal $\pi(v_t)q_t$ de q_t em γ_t (ver figura 11). Se $u := (0, 1, 0)$, então

$$\text{ta}(u, u_t) = \frac{c^{-2} \sin^2 \theta_t}{c^{-2} - 1} = \frac{c^{-2}(1 - \cos^2 \theta_t)}{c^{-2} - 1} = \frac{1 - c^2 \cos^2 t}{1 - c^2} > 1,$$

o que implica que $f_t := r(u)r(u_t)$ é uma isometria hiperbólica com eixo γ_t e tal que $f_{-t} = f_t^{-1}$.

Figura 11 – Configuração para $n = 6$ e $t = 0.7$.

Em particular, $d(p, f_t p) = 2\lambda$ e $d(p, q_t) = d(q_t, f_t p)$. De fato,

$$\begin{aligned} f_t^{-1}p &= r(u_t)r(u)p = -r(u_t)p = p - 2\frac{\langle p, u_t \rangle}{\langle u_t, u_t \rangle}u_t = p + \frac{2}{c^{-2} - 1}u_t \\ &= \left(\frac{2c}{1 - c^2} \cos \theta_t, -\epsilon_t \frac{2c}{1 - c^2} \sin \theta_t, 1 + \frac{2c^2}{1 - c^2} \right) \\ &= \left(2 \sinh(\lambda) \cosh(\lambda) \cos \theta_t, -\epsilon_t \sinh(\lambda) \cosh(\lambda) \sin \theta_t, 1 + 2 \sinh^2(\lambda) \right) \\ &= (\sinh(2\lambda) \cos \theta_t, -\epsilon_t \sinh(2\lambda) \sin \theta_t, \cosh(2\lambda)). \end{aligned}$$

E assim,

$$\text{ta}(p, f_t^{-1}p) = \frac{\langle p, f_t^{-1}p \rangle^2}{\langle p, p \rangle \langle f_t^{-1}p, f_t^{-1}p \rangle} = \cosh^2(2\lambda).$$

Considere agora os seguintes pontos positivos

$$\begin{aligned} x_t &:= (\sin \theta_t, \epsilon_t \cos \theta_t, 0), \\ y_t &:= (\sin \theta'_t, \epsilon_t \cos \theta'_t, 0), \\ z_t &:= (\epsilon_t \cos \theta'_t, -\sin \theta'_t, \epsilon_t c \cos(\pi/n)), \\ m_t &:= (c^2 \cos(\pi/n) \sin \theta_t - \sin \theta'_t, \epsilon_t c^2 \cos(\pi/n) \cos \theta_t - \epsilon_t \cos \theta'_t, c \sin(\pi/n)), \end{aligned}$$

onde $\theta'_t = \theta_t - \pi/n$.

As seguintes igualdades são imediatas

$$\langle p, x_t \rangle = \langle p, y_t \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \text{ta}(x_t, y_t) = \cos^2(\pi/n). \quad (4.5)$$

$$\langle x_t, q_t \rangle = \langle x_t, f^{-1}p \rangle = 0. \quad (4.6)$$

$$\langle z_t, y_t \rangle = \langle z_t, q_t \rangle = \langle z_t, m_t \rangle = \langle m_t, q_t \rangle = 0. \quad (4.7)$$

Das igualdades em (4.5) segue que as geodésicas polares a x_t e y_t se intersectam em p num ângulo π/n , o que implica que $g = r(y_t)r(x_t)$. Note que $r(q_t)r(p)p = f_t^{-1}p$ pois $d(q_t, p) = d(q_t, f^{-1}p)$; além disso, $r(q_t)r(p)x_t = x_t$, pois x_t é ortogonal a q_t e a p (4.5 e 4.6). Logo,

$$\begin{aligned} f_t^{-1}g f_t &= r(q_t)r(p)g(r(q_t)r(p))^{-1} = r(q_t)r(p)r(y_t)r(x_t)r(p)r(q_t) \\ &= r(r(q_t)r(p)y_t)r(x_t), \end{aligned}$$

o que implica que a geodésica polar a $r(q_t)r(p)y_t$ intersecta a geodésica polar a x_t em $f^{-1}p$ num ângulo π/n . Em particular, as geodésicas polares a y_t e a $r(q_t)r(p)y_t$ são ultraparalelas, pois $r(q_t)r(p)$ é hiperbólica e estabiliza a geodésica polar a x_t . Temos assim que

$$f_t^{-1}g f_t g^{-1} = r(r(q_t)r(p)y_t)r(y_t)$$

é uma isometria hiperbólica com eixo polar a z_t , pois, das igualdades em (4.7),

$$0 = \langle -z_t, -y_t \rangle = \langle r(q_t)z_t, r(p)y_t \rangle = \langle z_t, r(q_t)r(p)y_t \rangle.$$

Segue ainda das igualdades em (4.7) que $\{m_t, z_t, q_t\}$ é uma base ortogonal. Isto implica que $r(m_t)r(q_t)r(z_t) = 1$ (vide (ANAN'IN, 2012)). Assim,

$$r(m_t)r(q_t)r(p)y_t = -r(m_t)r(q_t)y_t = -r(z_t)y_t = y_t,$$

ou seja, m_t é o ponto médio de y_t e $r(q_t)r(p)y_t$, o que implica que

$$(f_t^{-1}gf_tg^{-1})^{1/2}g = r(m_t)r(y_t)r(y_t)r(x_t) = r(m_t)r(x_t) = r(q_t)g_t, \quad (4.8)$$

onde $g_t := r(z_t)r(x_t)$ é uma rotação (horária) por um ângulo $2\pi/n$ em torno de q_t pois

$$\text{ta}(x_t, z_t) = \frac{(\epsilon_t \cos(\theta_t - \pi/n) \sin \theta_t - \epsilon_t \sin(\theta_t - \pi/n) \cos \theta_t)^2}{1 - c^2 \cos^2(\pi/n)} = \frac{\sin^2(\pi/n)}{\text{tg}^2(\pi/n)} = \cos^2(\pi/n).$$

Para cada $t \in (0, \pm\pi)$ defina $m_{k,t} := f_{t,k-1}(f_{t,k-1}^{-1}f_{t,k})^{1/2}$, onde $f_{t,k} := g^k f_t g^{-k}$, $k = 1, \dots, n$. Logo, de (4.8), temos que

$$R_{n,t} \dots R_{1,t} = 1,$$

onde $R_{k,t} = \iota \circ (m_{k,t}, m_{k,t}^{-1})$, $k = 1, \dots, n$.

Seja

$$\rho_t : H_n \rightarrow \text{Isom } \mathbb{B}, \quad \rho_t r_j = R_{j,t}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Da proposição 3.3.36, o triângulo diagonal $D[1, f_t, gf_tg^{-1}]$ é simples sse os eixos de f_t e gf_tg^{-1} são concorrentes ou assintóticos. Pelo lema 3.3.30, isso acontece sse $\text{ta}(p, v_t) \in [-\text{tg}^2(\pi/n), 0) \Leftrightarrow t \in \epsilon_t \mathfrak{I}_n$, onde $\mathfrak{I}_n := [\pi/n, \pi - \pi/n]$.

4.3.2 Mapa para o domínio fundamental

Note que

$$R_{1,t}\Delta = \iota \circ (m_{1,t}, m_{1,t}^{-1})\Delta = (m_{1,t}^{-1}, m_{1,t})\Delta = (1, m_{1,t}^2)\Delta.$$

Assim,

$$R_{1,t}D[1, f_t, gf_tg^{-1}] = D[m_{1,t}^2, gf_tg^{-1}, f_t].$$

Sejam $n \geq 6$ par e $t \in \mathfrak{I}_n^\circ$. Denote por x_1 o ponto de interseção entre γ_t e $g\gamma_t$. Sejam $x_2 \in \gamma_t$ e $x_3 \in g\gamma_t$ tais que $f_t = r(x_1)r(x_2)$ e $gf_tg^{-1} = r(x_1)r(x_3)$. Então $(f_t^{-1}gf_tg^{-1})^{1/2} = r(x_2)r(m)$, onde $m := \gamma_{x_2, x_3}(1/2)$. Isso implica que $m_{1,t} = r(x_1)r(x_2)r(x_2)r(m) = r(x_1)r(m)$ e $m_{1,t}^2 = r(x_1)r(x_4)$, onde $x_4 := r(m)x_1$ (ver figura 12). Logo

$$D[1, f_t, gf_tg^{-1}] = (1, r(x_1))\text{proj}_\Delta^{-1}\partial\Delta(x'_1, x'_2, x'_3)$$

e

$$D[m_{1,t}^2, gf_tg^{-1}, f_t] = (1, r(x_1))\text{proj}_\Delta^{-1}\partial\Delta(x'_4, x'_3, x'_2),$$

cópias de $(1, f_t^{-1})Q$ por R tessalam uma vizinhança de Δ .

Deste modo, se $t \in \pm \mathfrak{I}_n$, a versão do Teorema Poliedral de Poincaré em (ANAN'IN; GROSSI, 2011b) garante que a representação ρ_t age discretamente no bidisco e que $\rho_t H_n \backslash \mathbb{B}$ é um fibrado de discos sobre $H_n \backslash \mathbb{H}$.

Note que $f_{\pi/2} = r(p)r(q_{\pi/2})$. Assim,

$$\begin{aligned} m_{1,\pi/2} &= f_{\pi/2}(f_{\pi/2}^{-1}g f_{\pi/2}g^{-1})^{1/2} = r(p)r(q_{\pi/2})(r(q_{\pi/2})r(p)r(p)r(gq_{\pi/2}))^{1/2} \\ &= r(p)r(q_{\pi/2})r(q_{\pi/2})r(m') = r(p)r(m'), \end{aligned}$$

onde $m' := \gamma_{q_{\pi/2}, gq_{\pi/2}}(1/2)$. Logo,

$$\begin{aligned} R_{k,\pi/2}\Delta_p &= I^{k-1}R_{1,\pi/2}I^{-(k-1)}\Delta_p = I^{k-1} \circ \iota \circ (m_{1,\pi/2}, m_{1,\pi/2}^{-1})(1, r(p))\Delta \\ &= I^{k-1}(r(m), r(p)r(m))\Delta = I^{k-1}\Delta_p = \Delta_p, \end{aligned}$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Note ainda que, se $J = (r(p), r(p))$, então

$$JR_{1,t}J^{-1} = R_{1,t-\pi}.$$

Em outras palavras, as representações $\rho_{\pm\pi/2}H_n$ são Fuchsianas e $\rho_t r_k = J\rho_{t-\pi}r_kJ^{-1}$ para todos $t \in (0, \pi)$ e $k = 1, \dots, n$. Em particular, $\mathfrak{I}_n \rightarrow \text{Hom}(H_n, \text{Isom } \mathbb{B})$, $t \mapsto \rho_t$, é uma deformação a um parâmetro contínua da representação Fuchsiana $\rho_{\pi/2}$. Chegamos ao

Teorema 4.3.1. Sejam $n \geq 6$ par e H_n o grupo hiperelíptico. Para cada $t \in [\pi/n, \pi - \pi/n]$, existe uma representação fiel e discreta $\rho_t : H_n \rightarrow \text{Isom } \mathbb{B}$ tal que $M(n, t) := \rho_t H_n \backslash \mathbb{B}$ é um fibrado de discos sobre o orbifold $S_n := H_n \backslash \mathbb{H}$. O número de Euler é dado por $|eM(n, t)| = |\chi S_n|$. ■

Passando para subgrupos de índice finito e sem torção em H_n (Lema de Selberg, vide (BEARDON, 1995)) obtemos fibrados de discos sobre superfícies.

REFERÊNCIAS

- ANAN'IN, S. Reflections, bendings, and pentagons. **preprint**, <https://arxiv.org/abs/1201.1582>, 2012. Citado nas páginas 38 e 76.
- ANAN'IN, S.; CHIOVETTO, P. A couple of real hyperbolic disc bundles over surfaces. **preprint**, <https://arxiv.org/abs/1609.02206v1>, 2016. Citado nas páginas 19 e 20.
- ANAN'IN, S.; GROSSI, C. Coordinate-free classic geometries. **Moscow Math. J.**, v. 11, p. 633–655, 2011. Citado nas páginas 22, 23, 24, 35 e 50.
- _____. Yet another poincaré polyhedron theorem. **Proc. Edinburgh Math. Soc.**, v. 54, p. 297–308, 2011. Citado nas páginas 47, 65, 69, 77 e 78.
- ANAN'IN, S.; GROSSI, C.; GUSEVSKII, N. Complex hyperbolic structures on disc bundles over surfaces. **International Mathematics Research Notices**, v. 52, p. 4295–4375, 2011. Citado nas páginas 11, 13, 20, 21, 22, 24, 25 e 27.
- ANAN'IN, S.; GUSEVSKII, N. Complex hyperbolic structures on disc bundles over surfaces II. **preprint**, <http://arxiv.org/abs/math/0512406>, 2005. Citado na página 22.
- BEARDON, A. F. **The Geometry of Discrete Groups**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1995. (Graduate Texts in Mathematics , Vol 91). Citado nas páginas 72 e 78.
- BONAHON, F.; SIEBENMANN, L. The classification of seifert fibered 3-orbifolds. **Low Dimensional Topology**, v. 95, p. 258pp, 1985. Citado na página 72.
- CHARETTE, V.; DRUMM, T. A.; KIM, Y. Bisectors determining unique pairs of points in the bidisk. **preprint**, <https://arxiv.org/abs/1608.07342>, 2016. Citado na página 55.
- CHARETTE, V.; DRUMM, T. A.; LAREAU-DUSSAULT, R. Equidistant hypersurfaces of the bidisk. **Geom. Dedicata**, v. 163, p. 275–284, 2013. Citado nas páginas 30 e 55.
- GOLDMAN, W. M. Conformally flat manifolds with nilpotent holonomy and the uniformization problem for 3-manifolds. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 278, n. 2, p. 573–583, 1983. Citado na página 22.
- _____. **Complex hyperbolic geometry**. [S.l.]: Clarendon press - Oxford, 1999. Citado nas páginas 25 e 35.
- GOLDMAN, W. M.; KAPOVICH, M.; LEEB, B. Complex hyperbolic manifolds homotopy equivalent to a riemann surface. **Comm. Anal. Geom.**, v. 9, n. 1, p. 61–95, 2001. Citado nas páginas 20 e 72.
- GROMOV, M.; LAWSON, H. B.; THURSTON, W. Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds. **Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.**, v. 68, p. 27–45, 1988. Citado nas páginas 19, 20, 63, 64 e 72.

GROSSI, C. Fibrados hiperbólicos e o turnover. **Tese de livre docência**, 2015. ICMC-USP. Citado nas páginas [11](#), [13](#), [20](#) e [22](#).

KUIPER, N. H. Hyperbolic 4-manifolds and tessellations. **Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.**, v. 68, p. 47–76, 1988. Citado nas páginas [19](#) e [20](#).

LUO, F. Constructing conformally flat structures on some seifert fibered 3-manifolds. **Math. Ann.**, v. 294, n. 3, p. 449–458, 1992. Citado nas páginas [19](#) e [20](#).

SCHWARTZ, R. E. **Spherical CR geometry and Dehn surgery**. [S.l.]: Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, 2007. Citado na página [22](#).