Introdução à cohomologia de De Rham

Junior Soares da Silva

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-MAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Junior Soares da Silva

Introdução à cohomologia de De Rham

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Igor Mencattini

USP – São Carlos
Setembro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586i Silva, Junior Soares da
Introdução à cohomologia de De Rham / Junior
Soares da Silva; orientador Igor Mencattini. --
São Carlos, 2017.
117 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. Cohomologia de De Rham. 2. Cohomologia de
Cech . 3. Cohomologia singular . 4. Teorema de De
Rham . 5. Teoria axiomática de feixes. I.
Mencattini, Igor , orient. II. Título.

Junior Soares da Silva

Introduction to De Rham cohomology

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Igor Mencattini

USP – São Carlos
September 2017

Trabalho dedicado aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, Julia Saraiva da Silva e Lourival Soares da Silva, que não mediram esforços para que eu realizasse esse trabalho. Agradeço à minha namorada, Jhenifer Grassioto, por toda paciência, carinho e apoio, principalmente nos momentos mais difíceis. Agradeço ao meu orientador, Igor Mencattini, pelas valiosas contribuições, correções e dicas que me ajudaram avançar nos estudos. Agradeço ao coordenador da pós graduação em matemática do ICMC, Sérgio Henrique Monari Soares, que me ajudou desde o primeiro dia que cheguei ao ICMC e por toda a preocupação no decorrer do curso. Agradeço aos amigos e colegas do ICMC que dedicaram parte do seu tempo para me auxiliar no avanço e entendimento do conteúdo proposto. Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro que foi essencial. Finalizo agradecendo a todos que me ajudaram de alguma maneira e todos que acreditaram que esse o trabalho seria concluído.

“ A incerteza sempre foi o chão familiar da escolha.”
(Zygmunt Bauman)

RESUMO

DA SILVA, J. S. **Introdução à cohomologia de De Rham**. 2017. 117 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Começamos definindo a cohomologia clássica de De Rham e provamos alguns resultados que nos permitem calcular tal cohomologia de algumas variedades diferenciáveis. Com o intuito de provar o Teorema de De Rham, escolhemos fazer a demonstração utilizando a noção de feixes, que se mostra como uma generalização da ideia de cohomologia. Como a cohomologia de De Rham não é a única que se pode definir numa variedade, a questão da unicidade dá origem a teoria axiomática de feixes, que nos dará uma cohomologia para cada feixe dado. Mostraremos que a partir da teoria axiomática de feixes obtemos cohomologias, além das cohomologias clássicas de De Rham, a cohomologia clássica singular e a cohomologia clássica de Čech e mostraremos que essas cohomologias obtidas a partir da noção axiomática são isomorfas as definições clássicas. Concluiremos que se nos restringirmos a apenas variedades diferenciáveis, essas cohomologias são unicamente isomorfas e este será o teorema de De Rham.

Palavras-chave: Cohomologia de De Rham, Cohomologia Singular, Cohomologia de Čech, Feixes, Teoria Axiomática de Feixes, Teorema de De Rham.

ABSTRACT

DA SILVA, J. S. **Introduction to De Rham cohomology**. 2017. 117 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

We begin by defining De Rham's classical cohomology and we prove some results that allow us a calculation of the cohomology of some differentiable manifolds. In order to prove De Rham's Theorem, we chose to make a demonstration using a notion of sheaves, which is a generalization of the idea of cohomology. Since De Rham's cohomology is not a only one that can be made into a variety, the question of unicity gives rise to axiomatic theory of sheaves, which give us a cohomology for each sheaf given. We will show that from the axiomatic theory of sheaves we obtain cohomologies, besides the classical cohomologies of De Rham, a singular classical cohomology and a classical cohomology of Čech and we will show that cohomologies are obtained from the axiomatic notion are classic definitions. We will conclude that if we restrict ourselves to only differentiable manifolds, these cohomologies are uniquely isomorphic and this will be De Rham's theorem.

Keywords: De Rham cohomology, Singular cohomology, Čech cohomology, Sheaves, Axiomatic sheaf theory, De Rham theorem.

SUMÁRIO

1	TEORIA DE DE RHAM	19
1.1	A Cohomologia de De Rham	19
1.2	A Sequência Mayer-Vietoris	23
1.3	Lemas de Poincaré e Invariância Homotópica	28
1.4	A fórmula de Kunneth	33
2	TEORIA DE FEIXES	39
2.1	Pré-feixes e Feixes	39
2.2	Cocadeias Complexas	52
2.3	Cohomologia Axiomática de Feixes	56
2.4	Existência de teoria de cohomologias	58
3	TEORIAS CLÁSSICAS DE COHOMOLOGIA	69
3.1	Teoria da Cohomologia de De Rham	69
3.2	Teoria da Cohomologia Singular	72
3.3	Teoria da Cohomologia de Čech	86
4	O TEOREMA DE DE RHAM	93
4.1	O Teorema de De Rham via Cohomologia de Čech	94
4.2	O Teorema de De Rham via Homomorfismo Explícito	96
5	APÊNDICE	99
5.1	Partições da Unidade	99
5.2	Produtos Tensoriais	101
5.3	Formas Diferenciais	103
5.4	Integração em Variedades Diferenciáveis	108
	REFERÊNCIAS	117
	Referências	117

INTRODUÇÃO

Este trabalho é uma introdução à teoria de De Rham para aqueles que estão interessados na teoria com ênfase na noção de feixe. A vantagem de tal abordagem é que podemos obter resultados mais gerais que possibilitam, além de deixar a teoria mais rica, apresentar o teorema de De Rham num aspecto mais global (em algumas literaturas essa forma do teorema de Rham é conhecida como forma forte ou abstrata).

Inicia-se o capítulo 1 com a definição de cohomologia de De Rham de uma variedade suave assumindo que o leitor saiba um pouco mais do que cálculo avançado, álgebra linear e topologia geral. Falamos brevemente sobre cadeias complexas e obtemos a noção de pullback de um mapa entre variedades suaves que nos permite provar o lema da invariância homotópica que diz que mapas homotópicos induzem a mesma cohomologia de De Rham. Apresentamos a sequência Mayer-Vietores que diz respeito a cohomologia da união de abertos e nos facilita a calcular a cohomologia de algumas variedades clássicas. É lembrado ainda que podemos obter uma sequência análoga à Mayer-Vietores para formas com suporte compacto com pequenas adaptações da ideia inicial. O que torna o capítulo 1 tão importante é a demonstração de que a cohomologia de De Rham é um invariante homotópico das variedades; isso quer dizer que variedades homotopicamente equivalentes possuem grupos de cohomologia isomorfos. É uma tarefa árdua reconhecer que dois espaços são topologicamente equivalentes e a cohomologia de Rham aparece como uma ferramenta para auxiliar tal tarefa. Provamos alguns resultados que ajudam a provar o lema de Poincaré que diz respeito a cohomologia do espaço euclidiano e também suas consequências. Por fim, utilizamos as ferramentas desenvolvidas para calcular algumas cohomologias e apresentamos a fórmula de Kunneth que grosseiramente diz que a cohomologia do produto é o produto das cohomologias.

No capítulo 2 é apresentada a ideia de pré-feixe e feixe que aparentemente não tem relação com o capítulo anterior, mas no desenvolvimento do capítulo vemos que há várias relações e não é demais dizer que essa nova ideia é uma generalização do que é cohomologia. Provamos, de uma maneira construtiva, que podemos obter um pré-feixe de um feixe e vice versa. Ainda no capítulo 2 formalizamos os conceitos de cadeias complexas e definimos o que é uma teoria de cohomologia de feixes. Mostramos então que se pudermos construir duas teorias de cohomologias de feixes numa variedade diferenciável, elas devem ser necessariamente isomorfas no sentido que é apresentado.

No capítulo 3 apresentamos três teorias de cohomologias de feixes, a teoria de De Rham, a singular e a de Čech que devem ser unicamente isomorfas de acordo com o capítulo anterior.

Aqui devemos lembrar que estas não são as únicas cohomologias conhecidas que podemos obter numa variedades, mas são suficientes para mostrar que cada uma tem suas vantagens em se tratando de construção. Construídas tais cohomologias e mostradas que são isomorfas, este será o teorema de De Rham na forma forte ou forma abstrata.

No capítulo 4 apresentamos o teorema de De Rham de uma forma mais usual; a primeira utilizando a cohomologia de Čech e a segunda obtendo um homomorfismo explícito entre a cohomologia de De Rham e a cohomologia singular que nos serve para lembrar que a abordagem com a teoria de feixes é opcional.

O capítulo 6, que é o apêndice, pode ajudar o leitor que não está familiarizado com alguns conceitos apresentados. Noções fundamentais para o entendimento do texto como a noção de forma diferencial e suas propriedades, integrações em variedades diferenciáveis dentre outras definições são mostradas de maneira sucinta. Devemos salientar que o número de exemplos no decorrer dos capítulos é reduzido, porém os exemplos principais são necessariamente citados. O capítulo 2 é baseado no livro de Frank Warner, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, e os detalhes pertinentes foram organizados similarmente com diferença na notação. Muitos tópicos que não deixam de ser elementares foram omitidos por questões praticas mas que não prejudicam a abordagem como primeira leitura para aqueles que se interessam pelo assunto.

TEORIA DE DE RHAM

1.1 A Cohomologia de De Rham

Seja M uma variedade diferenciável e $k \geq 0$. Denotaremos por $\Omega^k(M)$ o espaço das k -formas diferenciais em M . Definimos os seguintes subespaços de $\Omega^k(M)$:

$$\begin{aligned} Z^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\} \\ B^k(M) &= \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \exists \mu \in \Omega^{k-1} \text{ tal que } d\mu = \omega\}. \end{aligned}$$

Os elementos de $Z^k(M)$ são chamados de formas fechadas e os elementos de $B^k(M)$ são chamados de formas exatas.

Observação 1.1. $\Omega^k(M) = 0$ sempre que $k > \dim(M)$, portanto se $\dim(M) = m$ toda m -forma é fechada. Lembremos que o diferencial exterior satisfaz $d^2 = 0$, então temos uma sequência de espaços vetoriais e transformações lineares

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^m(M) \xrightarrow{d} 0$$

que é um complexo de cadeias.

Definição 1.2. Dado que $d^2 = 0$ temos que $B^k(M) \subset Z^k(M)$ para todo k , assim podemos considerar os seguintes grupos de cohomologia do complexo

$$H_{deR}^k(M) := Z^k(M) / B^k(M)$$

que serão chamados **grupos de cohomologia de De Rham** de M . Dada uma forma $\omega \in Z^k(M)$ denotaremos por $[\omega]$ sua classe de cohomologia em $H_{deR}^k(M)$.

Observação 1.3. A classe que o elemento ω é dada por:

$$[\omega] = \{\omega + d\mu : \mu \in \Omega^{k-1}(M)\}$$

O complexo $\Omega^*(M) = (\oplus_q^m \Omega^q(M), d)$ é um complexo diferencial chamado de complexo de De Rham. Lembremos o básico sobre complexo diferenciais. Uma soma direta $C = \oplus_{q \in \mathbb{Z}} C^q$ indexada por inteiros, é chamado de complexo diferencial se existem homomorfismos

$$\dots \rightarrow C^{q-1} \xrightarrow{d} C^q \xrightarrow{d} C^{q+1} \rightarrow \dots$$

tal que $d^2 = 0$. d é operador diferencial do complexo C . A cohomologia de C é a soma direta $H(C) = \oplus_{q \in \mathbb{Z}} H^q(C)$ onde

$$H^q(C) = \frac{\ker(d) \cap C^q}{\operatorname{im}(d) \cap C^q}$$

Observação 1.4. Toda forma exata é fechada, contudo formas fechadas não precisam ser exatas. Por exemplo, considere a 1-forma em $\mathbb{R}^2/0$ dada por

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Então

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{(dx \wedge dy - dy \wedge dx)x^2 + y^2 - (2xdx + 2ydy)(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)(dx \wedge dy) - (2x^2 dx \wedge dy - 2y^2 dy \wedge dx)}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$

Portanto ω é fechada. Escrevendo ω em coordenadas polares e integrando no círculo unitário centrado no 0 em $\mathbb{R}^2/0$ temos $\int_{S^1} \omega = 2\pi$. Desde que exatidão implica conservatividade pelo Teorema de Stokes, temos que ω não pode ser exata.

Definição 1.5. Um morfismo $f : A \rightarrow B$ entre dois complexos diferenciais $A = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ e $B = \{B_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ com operadores diferenciais d_A e d_B respectivamente ou uma família de morfismos, é uma aplicação que comuta com os operadores diferenciais de A e B , mais precisamente, existem $f_i : A_i \rightarrow B_i$ tais que $f_i d_A = d_B f_{i-1}$. Tal aplicação é chamada de mapa de cadeia.

Definição 1.6. Uma sequência de espaços vetoriais

$$\dots \rightarrow V_{q-1} \xrightarrow{f_{q-1}} V_q \xrightarrow{f_q} V_{q+1} \rightarrow \dots$$

é dita exata se para todo q o núcleo de f_q é igual a imagem do antecessor f_{q-1} . Uma sequência exata da forma

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

é chamada de sequência exata curta.

Definição 1.7. Dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ podemos definir para cada k , uma aplicação linear

$$T^* : \Lambda^k(\mathbb{R}^p) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$$

dada por

$$T^*(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(T(v_1), \dots, T(v_k)).$$

chamada de pullback de ω por T .

Também é possível definir o pullback em variedades.

Definição 1.8. Se $f : M \rightarrow N$ é um mapa suave entre variedades suaves, temos um mapa $T_x^*(f) : T_{f(x)}M \rightarrow T_xM$ definido por

$$T_x^*(f)(\omega)(X) = \omega(T_x^*(f)(X))$$

que define uma aplicação $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ por

$$f^*(\omega)(x)(X_1, \dots, X_n) = \omega(f(x))(T_x^*(f)(X_1), \dots, T_x^*(f)(X_n))$$

para $\omega \in \Omega^k(N)$ e $X_1, \dots, X_n \in T_xM$ também chamada de pullback de formas.

Observação 1.9. A aplicação de pullback de formas comuta com a derivada exterior (vide apêndice) e se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação de classe C^∞ , entre as variedades M e N , então $f^*(Z^k(N)) \subset Z^k(M)$ e $f^*(B^k(N)) \subset B^k(M)$. Assim temos um homomorfismo induzido

$$F^* : H_{deR}^k(N) \rightarrow H_{deR}^k(M)$$

dada por

$$F^*([\omega]) := [F^*(\omega)]$$

para cada inteiro $k \geq 0$.

Teorema 1.10. A aplicação de pullback sobre classes de cohomologia

$$F^* : H_{deR}^k(N) \rightarrow H_{deR}^k(M)$$

é bem definida e dada $G : N \rightarrow O$ temos que

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

além disso F^* é um homomorfismo de álgebras de cohomologia.

Demonstração. Suponha que $\omega \in \Omega^k(N)$ é fechado e representa uma classe de cohomologia $[\omega] \in H^k(N)$. Precisamos verificar que a forma $F^*(\omega) \in \Omega^k(M)$ é também fechada e portanto dá uma classe de cohomologia em $H^k(M)$. De fato, $dF^*(\omega) = F^*(d\omega) = 0$ (pois a derivada exterior comuta com o aplicação de pullback de formas). Agora, suponha que um representante ω é substituído por $\omega' = \omega + d\theta$. Então

$$F^*(\omega') = F^*(\omega + d\theta) = F^*(\omega) + F^*(d\theta) = F^*(\omega) + dF^*(\theta)$$

assim $[F^*(\omega')] = F^*(\omega)$. Portanto a aplicação linear $F^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ está bem definida. A equação $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ segue da mesma propriedade para pullback de formas. Para ver que F^* é um homomorfismo de álgebras sobre cohomologia, escrevemos

$$\begin{aligned} F^*([\omega][\theta]) &= F^*([\omega \wedge \theta]) = [F^*(\omega \wedge \theta)] = \\ &= [F^*\omega \wedge \theta] = [F^*\omega][F^*\theta] = F^*[\omega]F^*[\theta]. \end{aligned}$$

como o desejado. □

Corolário 1.11. Se variedades M e N são difeomorfas, então os grupos de cohomologia $H^k(M)$ e $H^k(N)$ são isomorfos (para todo k).

Demonstração. Suponha que $F : M \rightarrow N$ e $G : N \rightarrow M$ são aplicações suaves mutuamente inversas que dão o difeomorfismo $N \simeq M$. Considere os espaços vetoriais $H^k(M)$ e $H^k(N)$ para algum k . Existem aplicações lineares

$$F^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$$

$$G^* : H^k(M) \rightarrow H^k(N).$$

As identidades $F \circ G = id$ e $G \circ F = id$ implicam que $(F \circ G)^* = G^* \circ F^* = id$ e $(G \circ F)^* = F^* \circ G^* = id$. Assim, as aplicações F^* e G^* são mutuamente inversas e portanto os espaços vetoriais $H^k(M)$ e $H^k(N)$ são isomorfos. □

Proposição 1.12. Dada uma sequência exata curta de complexos diferenciais

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

onde f e g são aplicações de cadeia, existe uma sequência longa exata dos grupos de cohomologia

$$\begin{array}{ccccccc} & \hookrightarrow & H^{q+1}(A) & \longrightarrow & \dots & & \\ & & \searrow & & & \nearrow & \\ & & & d^* & & & \\ & \hookrightarrow & H^q(A) & \xrightarrow{f^*} & H^q(B) & \xrightarrow{g^*} & H^q(C) \longrightarrow \\ & & \searrow & & & \nearrow & \\ & & & d^* & & & \\ & \dots & \longrightarrow & H^{q-1}(B) & \longrightarrow & H^{q-1}(C) & \longrightarrow \end{array}$$

onde f^* e g^* são as aplicações naturalmente induzidas em nível de cohomologia.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^{q+1} & \xrightarrow{f} & B^{q+1} & \xrightarrow{g} & C^{q+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A^q & \xrightarrow{f} & B^q & \xrightarrow{g} & C^q & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \end{array}$$

Demonstração. Utilizaremos o diagrama acima para melhor visualização. $d^*[c]$ para $c \in C^q$ é obtido da seguinte forma: Pela sobrejetividade de g existe um elemento $b \in B^q$ tal que $g(b) = c$. Como $g(db) = d(gb) = dc = 0$ temos que $db = f(a)$ para algum $a \in A^{q+1}$. Este a é fechado. $d^*[c]$ é definido como sendo a classe de cohomologia $[a]$ em H^{q+1} . $\square$

1.2 A Sequência Mayer-Vietoris

A sequência Mayer-Vietoris nos permite calcular a cohomologia da união de conjuntos abertos. Seja M uma variedade diferenciável e suponha que $M = U \cup V$ com ambos U, V abertos. Para cada k , considere as seguintes aplicações lineares:

$$\begin{aligned} \alpha_k : \Omega^k(M) &\rightarrow \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \\ \omega &\mapsto (\omega|_U, \omega|_V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_k : \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) &\rightarrow \Omega^k(U \cap V) \\ (\omega_1, \omega_2) &\mapsto \omega_1|_{U \cap V} - \omega_2|_{U \cap V} \end{aligned}$$

Definição 1.13. A sequência definida abaixo é chamada de sequência Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\alpha_k} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\beta_k} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

Proposição 1.14. A sequência Mayer-Vietoris é exata.

Demonstração. Que α_k é injetiva é simples: Se $\omega \in \Omega^k(M)$ se anula em U e V então se anula em M . Que a imagem de α_k é igual ao núcleo de β_k também é simples: Se $\omega_U \in \Omega^k(U)$ e $\omega_V \in \Omega^k(V)$ concordam na interseção $U \cap V$, então determinam uma forma global $\omega \in \Omega^k(M)$ tal que $\omega|_U = \omega_U$ e $\omega|_V = \omega_V$. Restou verificar se β_k é sobrejetiva. Considere a partição da unidade $\{\lambda_U, \lambda_V\}$ subordinada à cobertura $\{U, V\}$. Se $\omega \in \Omega^k(U \cap V)$, definimos $\omega_1 \in \Omega^k(U)$ por $\omega_1(x) = \lambda_V(x)\omega(x)$ para $x \in U \cap V$ e $\omega_1(x) = 0$ caso contrário. Analogamente, definimos $\omega_2 \in \Omega^k(V)$ por $\omega_2(x) = -\lambda_U(x)\omega(x)$ para $x \in U \cap V$ e $\omega_2(x) = 0$ caso contrário. Assim ω_1, ω_2 são de classe C^∞ e $\omega_1|_{U \cap V} - \omega_2|_{U \cap V} = \omega$.

□

Proposição 1.15. A sequência Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\alpha_k} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{\beta_k} \Omega^*(U \cap V) \rightarrow 0$$

Dá origem a uma sequência longa exata em cohomologia, também chamada sequência Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc} \hookrightarrow & H^{q+2}(M) & \longrightarrow & \cdots & & & \\ & \searrow & & & \xrightarrow{d^*} & & \\ & & & & & & \\ \hookrightarrow & H^{q+1}(M) & \longrightarrow & H^{q+1}(U) \oplus H^{q+1}(V) & \longrightarrow & H^{q+1}(U \cap V) & \searrow \\ & \searrow & & & \xrightarrow{d^*} & & \\ & & & & & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^q(U) \oplus H^q(V) & \longrightarrow & H^q(U \cap V) & \longrightarrow & \end{array}$$

Demonstração. Como claramente as transformações lineares α_k e β_k comutam com a diferencial exterior, elas induzem transformações lineares nos grupos de cohomologia, que denotaremos pelas mesmas letras:

$$\alpha_k : H^k(M) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V);$$

$$\beta_k : H^k(U) \oplus H^k(V) \rightarrow H^k(U \cap V).$$

Lembremos a definição de operador de cobordo d^* neste ocasião específica. A sequência exata curta dá origem

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(M) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U) \oplus \Omega^{q+1}(V) & \longrightarrow & \Omega^{q+1}(U \cap V) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \Omega^q(M) & \longrightarrow & \Omega^q(U) \oplus \Omega^q(V) & \longrightarrow & \Omega^q(U \cap V) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Seja $\omega \in \Omega(U \cap V)$ uma forma fechada. Como β_k é sobrejetiva existem formas ω_1 e ω_2 tais que $\omega = \omega_1|_{U \cap V} - \omega_2|_{U \cap V}$. Como ω é fechada, temos que $d\omega_1(x) = d\omega_2(x)$ para todo $x \in U \cap V$. Logo, definindo $\mu(x) = d\omega_1(x)$ se $x \in U$ e $\mu(x) = d\omega_2(x)$ se $x \notin U$, temos que μ é uma forma de classe C^∞ e fechada em $\Omega^{k+1}(M)$. A aplicação $H^k(U \cap V) \rightarrow H^{k+1}(M)$ é então a aplicação que associa a classe de cohomologia de ω à classe de cohomologia de μ .

□

Proposição 1.16. Se $M = U \cup V$ é a união de dois abertos, tais que a cohomologia de De Rham de U , V e $U \cap V$ tem dimensão finita, então a cohomologia de De Rham de M também tem dimensão finita (dimensão no sentido de espaços vetoriais).

Demonstração. Pela sequência Mayer-Vietoris temos que $H^k(M)$ é isomorfo a soma da imagem de

$$d^* : H^{k-1}(U \cap V) \rightarrow H^k(M)$$

e o núcleo de

$$\alpha_k : H^k(M) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V)$$

Como ambos são de dimensão finita, segue o resultado.

□

Discutiremos agora algumas propriedades de $\Omega_C^*(M) \subset \Omega^*(M)$, que é o espaço de formas diferenciais com suporte compacto numa variedade M . Temos que se $\omega \in \Omega_C^*$ então $d\omega \in \Omega_C^*$, mas em geral, a aplicação de pullback de uma aplicação suave de uma forma com suporte compacto não precisa ter suporte compacto. Precisamente queremos dizer que se $f : M \rightarrow N$ é uma aplicação suave (entre variedades não compactas) e $\omega \in \Omega_C^k(N)$ então

$$\text{supp}(f^* \omega) \subset f^{-1}(\text{supp}(\omega))$$

assim $f^* \omega$ pode não ter suporte compacto. Por exemplo, considere o pullback de funções sobre a projeção $M \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Isto mostra que a cohomologia de De Rham com suporte compacto de uma variedade não é functorial. Assim, se não considerarmos todas as aplicações suaves, mas

somente um subconjunto de aplicações apropriadas, Ω_C^* pode ser um functor. Há duas maneiras de se fazer:

- (a) Ω_C^* é um functor contravariante sobre aplicações próprias (uma aplicação própria é aquela cuja imagem inversa de compacto é compacta).
- (b) Ω_C^* é um functor contravariante sobre inclusões de abertos.

Se $j : U \rightarrow M$ é a aplicação de inclusão de um conjunto aberto U na variedade M , então $j_* : \Omega_C^*(U) \rightarrow \Omega_C^*(M)$ é a aplicação que estende a forma de U por zero à forma sobre M . Assumiremos que Ω_C^* se refere ao functor contravariante em (b). Existe uma sequência de Mayer-Vietoris para este functor. Seja M coberto por dois abertos U e V . A sequência de inclusões

$$M \leftarrow U \cup V \leftarrow U \cap V$$

dá origem a uma sequência de formas com suporte compacto

$$\Omega_c^*(M) \leftarrow \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \xleftarrow{\delta} \Omega_c^*(U \cap V)$$

$$(-j_*\omega, j_*\omega) \leftarrow \omega$$

Proposição 1.17. A sequência Mayer-Vietoris de formas com suporte compacto

$$0 \leftarrow \Omega_c^*(M) \leftarrow \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \leftarrow \Omega_c^*(U \cap V) \leftarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Seja ω uma forma em $\Omega_c^*(M)$. Então ω é imagem de $(\rho_U\omega, \rho_V\omega)$ em $\Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V)$. A forma $\rho_U\omega$ tem suporte compacto porque $\text{supp}(\rho_U\omega) \subset \text{supp}(\rho_U) \cap \text{supp}(\omega)$ e porque um subconjunto fechado de um compacto num espaço de Hausdorff é compacto. Isto mostra a sobrejetividade da aplicação $\Omega_c^*(M) \leftarrow \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V)$. Note-se que na sequência anterior Mayer-Vietoris, multiplicamos por ρ_V para obter a forma em U , aqui $\rho_U\omega$ é a forma em U . Os outros passos são imediatos. $\square$

Novamente a sequência Mayer-Vietoris dá origem à uma sequência exata longa em cohomologia:

$$\begin{array}{ccccccc}
H_c^{q+2}(U \cap V) & \longrightarrow & \dots & & & & \\
\downarrow d^* & & & & & & \\
H_c^{q+1}(U \cap V) & \longrightarrow & H_c^{q+1}(U) \oplus H_c^{q+1}(V) & \longrightarrow & H_c^{q+1}(M) & \longrightarrow & \\
\downarrow d^* & & & & & & \\
\dots & \longrightarrow & H_c^q(U) \oplus H_c^q(V) & \longrightarrow & H_c^q(M) & \longrightarrow &
\end{array}$$

Observação 1.18. A sequência acima está bem definida pois d^* comuta com j_* .

Exemplo 1.19. Se M é compacta então $H_c^q(M) = H^q(M)$ para todo q .

Exemplo 1.20. $H_c^0(M) = \ker(\Omega_C^0(M) \rightarrow \Omega_C^1(M))$ é o conjunto das funções localmente constantes com suporte compacto. Assim, se M é conexo e não compacto, temos que $H_c^0(M) = 0$

Lema 1. Se M é orientada e de dimensão n , então a integração $\int_M$ induz um homomorfismo não trivial $H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$.

Demonstração. Precisamos mostrar primeiramente que se $\omega \in \Omega_C^n(M)$ é exata então $\int_M \omega = 0$. Para isso, seja $\omega = d\mu$ onde μ tem suporte compacto. Considere, à princípio, $M = \mathbb{R}^n$. Nesse caso, existe uma bola B_r de raio r tal que $\text{supp}(\omega) \subset B_r$, e assim, pelo Teorema de Stokes temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{B_r} d\mu = \int_{\partial B_r} \mu = 0.$$

Para o caso geral, cobrimos o compacto $\text{supp}(\omega)$ com uma quantidade finita de vizinhanças $U_1, \dots, U_k$ difeomorfas à $\mathbb{R}^n$ e usamos as partições da unidade para escrever $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_k$ tais que μ_i tem o suporte compacto contido em U_i . Então

$$\int_M \omega = \int_M \sum_i d\mu_i = \sum_i \int_{U_i} d\mu_i = 0$$

devido ao primeiro caso. Para mostrar que o homomorfismo é não trivial, escolha um difeomorfismo g que preserva orientação de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ uma função não nula com suporte compacto. Seja $j : U \subset M$ o aplicação de inclusão. Então

$$\int_M j_* g^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n > 0$$

□

1.3 Lemas de Poincaré e Invariância Homotópica

Proposição 1.21. Para qualquer variedade M , a dimensão do espaço $H^0(M)$ é o número de componentes conexos de M (se for finito).

Demonstração. O espaço das 0-formas é o espaço das funções suaves $C^\infty(M)$. Uma função $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ é fechada se $df = 0$. Isto significa que perto de cada ponto, f deve ser constante, portanto f deve ser localmente constante. Note que não existe 0-formas exatas, pois não existe (-1) -formas. Assim $H^0(M)$ é o espaço de todas as funções localmente constantes em M . Lembramos que é verdade que em um espaço topológico conexo qualquer aplicação localmente constante é constante, então se um espaço topológico, em particular uma variedade, é a união disjunta de componentes conexos (componentes conexos maximais), qualquer aplicação localmente constante é definida pelos valores dos componentes (constantes). Se o número de componentes é finito, o espaço de funções neste conjunto é de dimensão finita e como base toma-se as funções que são identicamente 1 em um componente e identicamente 0 nos demais. Assim a dimensão é o número de componentes.

□

Teorema 1.22. Aplicações homotópicas entre variedades suaves induzem a mesma aplicação linear na sua Cohomologia de De Rham.

Demonstração. Suponha que f_0 e f_1 são aplicações homotópicas $M \rightarrow N$. Seja $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ uma homotopia. Queremos mostrar que as aplicações lineares $f_0^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ e $f_1^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ coincidem para todo $k \geq 0$. Isto significa que se tomarmos a classe de cohomologia $[\omega] \in H^k(N)$ representado pela forma $\omega \in \Omega^k(N)$, as aplicações de pullback $f_0^*(\omega)$ e $f_1^*(\omega)$ não coincidem necessariamente, mas devem se diferenciar somente por uma forma exata. Para este fim, introduziremos uma transformação linear

$$K : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

diminuindo os graus, tal que para qualquer forma $\omega \in \Omega^k(N)$,

$$f_0^*\omega - f_1^*\omega = (d \circ K + K \circ d)\omega$$

assim para formas fechadas será $f_0^*\omega - f_1^*\omega = d(K\omega)$. Definiremos K , usando a homotopia F . Considere $F^*(\omega) \in \Omega^k(M \times [0, 1])$. Cada k -forma σ sobre $M \times [0, 1]$ pode ser unicamente escrita como $\sigma = \sigma_t^{(0)} + dt \wedge \sigma_t^{(1)}$ onde $\sigma_t^{(0)}$ e $\sigma_t^{(1)}$ são formas sobre M dependentes do parâmetro t . Mais precisamente, com respeito a um sistema de coordenadas locais $(x, t) = (x_1, \dots, x_m, t)$ em $M \times [0, 1]$

$$\sigma = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sigma_{i_1, \dots, i_k}^{(0)}(x, t) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \sigma_{j_1, \dots, j_{k-1}}^{(1)}(x, t) dt dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}.$$

O grau de $\sigma_t^{(0)}$ é k , enquanto o grau de $\sigma_t^{(1)}$ é $k-1$. De fato, o termo com $\sigma_t^{(1)}$ contém um fator extra dt , que aumenta o grau em 1. Definamos o operador K por $K\omega = (\bar{K} \circ F^*)\omega$ onde $\bar{K}$ envia qualquer $\sigma = \sigma_t^{(0)} + dt \wedge \sigma_t^{(1)}$ sobre $M \times [0, 1]$ a $\int_0^1 dt(\sigma_t^{(1)})$, ou seja:

$$K\sigma = \sum_{j_1 < \dots < j_{k-1}} \left[\int_0^1 \sigma_{j_1, \dots, j_{k-1}}^{(1)}(x, t) dt \right] dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_{k-1}}$$

o resultado é uma $k-1$ -forma. Verifiquemos se realmente K tem a propriedade desejada. Primeiramente $d \circ F = F \circ d$, assim é necessário calcular o comutador de d e K . Sobre $M \times [0, 1]$

$$d = d_x + dt \wedge \partial / \partial t$$

onde d_x pode ser considerado como o diferencial em M . Em coordenadas locais, $d_x = dx^i \wedge \partial / \partial x^i$. Se aplicarmos isso a $\sigma \in \Omega^k(M \times [0, 1])$ escrito como acima chegamos à

$$\begin{aligned} d\sigma &= (d_x + dt \wedge \partial / \partial t)(\sigma_t^{(0)} + dt \wedge \sigma_t^{(1)}) = \\ &= d_x \sigma_t^{(0)} + dt \wedge (-d_x \sigma_t^{(1)} + (\partial \sigma_t^{(0)} / \partial t)) \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} \bar{K}d\sigma &= \int_0^1 dt(-d_x \sigma_t^{(1)} + (\partial \sigma_t^{(0)} / \partial t)) = \\ &= - \int_0^1 dt(d_x \sigma_t^{(1)}) + \sigma_1^{(0)} - \sigma_0^{(0)} \end{aligned}$$

por outro lado temos

$$d\bar{K}\sigma = d \int_0^1 dt(\sigma_t^{(1)}) = \int_0^1 dt(dx \sigma_t^{(1)})$$

portanto

$$(d \circ K + K \circ d)\omega = \sigma_1^{(0)} - \sigma_0^{(0)}$$

Assim aplicando esta última equação à $\sigma = F^*\omega$ temos o desejado. Agora temos, para $K = \bar{K} \circ F^*$

$$(d \circ K + K \circ d)\omega = (d \circ \bar{K} \circ F^* + \bar{K} \circ F^* \circ d)\omega = (d \circ \bar{K} \circ F^* + \bar{K} \circ d \circ F^*)\omega =$$

$$= (d \circ \bar{K} + \bar{K} \circ d)(F^* \omega) = (F^* \omega)_1^{(0)} - (F^* \omega)_0^{(0)} = f_0^* \omega - f_1^* \omega.$$

De fato, quando vemos F como a família $F = (., t)$ vemos que $f_1^* \omega$ é obtido de $F^* \omega$, isto é, passando a $(F^* \omega)_t^{(0)}$ na notação acima. Assim $f_1^* \omega$ e $f_0^* \omega$ são obtidos fazendo t ir de 0 a 1.

□

Corolário 1.23. Variedades M e N homotopicamente equivalentes possuem grupos de cohomologia $H^k(M)$ e $H^k(N)$ isomorfos para todo k .

Demonstração. Seja $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow M$ aplicações tais que $f \circ g \simeq id$ e $g \circ f \simeq id$. Então pelo teorema acima, para cada k , temos aplicações lineares de espaços vetoriais

$$f^* : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$$

e

$$g^* : H^k(M) \rightarrow H^k(N)$$

com a propriedade que $f^* \circ g^* = id$ em $H^k(M)$ e $g^* \circ f^* = id$ em $H^k(N)$ (homotópico à identidade torna-se igual à identidade para aplicações de cohomologia). Assim os espaços são isomorfos.

□

Teorema 1.24. (O lema de Poincaré) Sobre $\mathbb{R}^n$ toda k -forma fechada é exata. Ou

$$H^k(\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R} & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k > 0 \end{cases}$$

Demonstração. Como $(ker d) \cap \Omega^0(\mathbb{R})$ são as funções constantes, temos que $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Agora, desde que $\mathbb{R}^n$ é contrátil a um ponto, assim pelo corolário anterior temos que $H^k(\mathbb{R}^n) = H^k(*)$ para $k = 0, 1, \dots$ como desejado.

□

Definição 1.25. Um domínio aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de forma-estrela se existe um ponto $x_0 \in U$ tal que para cada $x \in U$, todos os pontos de segmento $[x_0, x]$ estão em U .

Exemplo 1.26. Qualquer domínio convexo (aquele onde para quaisquer dois pontos, o segmento que os une está contido no domínio) é forma-estrela, entretanto, um conjunto de forma-estrela não precisa ser necessariamente convexo.

Teorema 1.27. (Segundo lema de Poincaré) Sobre $\mathbb{R}^n$ ou qualquer domínio com forma-estrela, toda k -forma fechada é exata se $k \geq 1$.

Demonstração. Mostrarei a prova para 1-formas que pode ser generalizada para k -formas. Seja $A = A_i(x)dx^i$ uma 1-forma fechada sobre o domínio forma-estrela $U \subset \mathbb{R}^n$. Isto significa que $\partial_i A_j - \partial_j A_i = 0$. Sem perda de generalidade, assumimos que o centro $x_0 \in U$ é a origem de $\mathbb{R}^n$. Para qualquer ponto $x \in U$, o segmento $[0, x]$ consiste dos pontos tx onde $t \in [0, 1]$. Defina uma função por

$$f(x) = \int_0^1 x^i A_i(tx) dt$$

Para todo $x \in U$. Ela é bem definida, desde $tx \in U$. Assim

$$\begin{aligned} df &= dx^j (\partial / \partial x^j) \int_0^1 x^i A_i(tx) dt = dx^j \int_0^1 (\partial / \partial x^j) x^i A_i(tx) dt = \\ &= dx^j \int_0^1 (\delta_j^i A_i(tx) + x^i t \partial_j A_i(tx)) dt = dx^j \int_0^1 (A_i(tx) + tx^i \partial_i A_j(tx)) dt = \\ &= dx^j \int_0^1 (d/dt)(t A_j(tx)) dt = dx^j t A_j(tx) \Big|_{t=0}^{t=1} = A \end{aligned}$$

Assim $A = df$.

□

Corolário 1.28. Os grupos de cohomologia de De Rham da bola unitária em $\mathbb{R}^n$ são todos nulos para $p \geq 1$.

Corolário 1.29. Seja U uma bola aberta no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e seja $\Omega^k(U)$, o espaço das k -formas diferenciais sobre U . Então para cada $k \geq 1$ existe uma transformação linear

$$h_k : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$$

tal que

$$h_{k+1} \circ d + d \circ h_k = id$$

Corolário 1.30. (Todas as formas fechadas são localmente exatas) Toda forma fechada de grau maior ou igual do que 1 é exata em alguma vizinhança de cada ponto.

Demonstração. Em cada ponto de uma variedade suave, existe uma bola aberta B difeomorfa a $\mathbb{R}^m$. Como $\mathbb{R}^m$ é forma estrela, tem grupos de cohomologia triviais H^m para $m \geq 1$, assim aplicando o lema de invariância homotópica segue o resultado.

□

Teorema 1.31. Seja S^n a esfera de dimensão $n \geq 1$, então

$$H^k(S^n) = 0 \text{ se } k \neq 0, n$$

$$H^k(S^n) = \mathbb{R} \text{ se } k = 0, n$$

Demonstração. Desde que S^1 é conexo, temos que $H^0(S^1) = \mathbb{R}$. Sejam $p, q \in S^1$ tais que $p \neq q$. Seja $U = S^1 - \{p\}$ e $V = S^1 - \{q\}$, assim $H^1(U) = 0 = H^1(V)$ pois U e V são difeomorfos a $\mathbb{R}$, enquanto que $H^0(U \cap V) = \mathbb{R}^2$ dado que $U \cap V$ tem duas componentes conexas, ou melhor, $U \cap V$ se retrai a dois pontos. Assim utilizando a sequência Mayer-Vietoris

$$0 \rightarrow H^0(S^1) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V) \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} H^1(S^1) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow 0$$

Desde que U e V tem forma estrela, seu primeiro grupo de cohomologia é zero e desde que $U \cap V$ se retrai a dois pontos, que tem dimensão 0, seu primeiro grupo de cohomologia também é zero. A imagem de δ é igual ao núcleo de $H^1(S^1) \rightarrow H^1(U) \oplus H^1(V)$, mas $H^1(U) \oplus H^1(V) = 0$, assim δ é sobrejetivo. O núcleo de δ é igual a imagem de $H^0(U) \oplus H^0(V) \rightarrow H^0(U \cap V)$, mas desde que tal aplicação é apenas a aplicação de subtração e a diferença de duas funções constantes é novamente constante, sua imagem é o conjunto das funções constantes, que é isomorfo a $\mathbb{R}$. Antes de partir para n qualquer, faremos o caso $n = 2$ pois este basicamente usa o método acima. Novamente sejam $p, q \in S^2$ tais que $p \neq q$. Seja $U = S^2 - \{p\}$ e $V = S^2 - \{q\}$. Observe que tais conjuntos são homeomorfos a $\mathbb{R}^2$ e sua interseção $U \cap V$ se retrai a S^1 . Assim temos a seguinte sequência:

$$(H^0(S^2) \simeq \mathbb{R}) \rightarrow (H^0(U) \oplus H^0(V)) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow (H^0(U \cap V) \simeq S^1) \simeq \mathbb{R} \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} (H^1(S^2) \simeq 0) \rightarrow (H^1(U) \oplus H^1(V)) \simeq 0 \rightarrow (H^1(S^1) \simeq \mathbb{R}) \xrightarrow{\delta}$$

$$\xrightarrow{\delta} (H^2(S^2) \simeq \mathbb{R}) \rightarrow (H^2(U) \oplus H^2(V)) \simeq 0 \rightarrow (H^2(S^1) \simeq \mathbb{R})$$

Para $n \geq 2$ escreva $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ e $U = \mathbb{R}^n$ e $V = S^n - \{\infty\}$. Assim $H^p(U) = H^p(V) = 0$ para $p > 0$ pelo Lema de Poincaré. A projeção radial de $U \cap V = \mathbb{R}^n - \{0\}$ em $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$ é homotópica à identidade, e portanto os p -grupos de cohomologia de $U \cap V$ e de S^{n-1} são isomorfos para $p < n$. Assim, conhecemos os p -grupos de cohomologia para p entre 1 e n . Pela sequência de Mayer-Vietoris obtemos a sequência exata

$$H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) \rightarrow H^{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow H^k(S^n) \rightarrow H^k(U) \oplus H^k(V)$$

Como a aplicação $H^0(S^n) \rightarrow H^0(U) \oplus H^0(V)$ tem núcleo trivial, sua imagem é isomorfa a $\mathbb{R}$. Assim $H^0(S^n) \simeq \mathbb{R}$. A aplicação $\delta : H^0(S^{n-1}) \rightarrow H^1(S^n)$ é sobrejetiva, desde que $H^k(U) \oplus H^k(V) \simeq 0$ para $k > 0$. Isto é verdade para todas as aplicações δ da nossa sequência. O núcleo de tal aplicação é a imagem da aplicação que apenas subtrai duas funções constantes, assim seu núcleo é isomorfo a $\mathbb{R}$. Mas isto é exatamente o que $H^0(S^{n-1})$ é, por hipótese, deve ser a aplicação trivial. Assim $H^1(S^{n-1}) = 0$ para $1 < p < n$, as aplicações de $H^p(S^n)$ são triviais, assim $H^p(S^n)$ é trivial. Finalmente, para $H^n(S^n)$, a aplicação δ é novamente sobrejetiva e desde que $H^{n-1}(S^{n-1}) \simeq \mathbb{R}$ por hipótese a imagem de uma aplicação de subtração em $H^{n-1}(S^{n-1})$ é zero. A última aplicação δ tem núcleo trivial e portanto é um isomorfismo, logo $H^n S^n \simeq \mathbb{R}$.

□

Proposição 1.32. Para qualquer variedade suave M temos

$$H^*(M) \simeq H^*(\mathbb{R} \times M).$$

Demonstração. Considere as aplicações $\pi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ e $i : M \rightarrow \mathbb{R} \times M$ dadas por

$$\pi(s, p) := p, \quad i(p) := (0, p)$$

para $s \in \mathbb{R}$ e $p \in M$. Temos que $\pi \circ i = id$ e $i \circ \pi$ é homotópica à identidade. Um exemplo explícito é dado por:

$$f_t : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M$$

$$f_t(x, y) := (xt, y)$$

e ainda $f_0 = i \circ \pi$ e $f_1 = id$.

□

1.4 A fórmula de Kunneth

Definição 1.33. Seja M uma variedade de dimensão n . Uma cobertura aberta $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M é chamada de cobertura fina, se todas as interseções finitas $U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_p}$ são difeomorfas a $\mathbb{R}^n$. Uma variedade que tem cobertura fina finita é chamada de variedade de tipo finito.

O seguinte resultado será apresentado sem demonstração:

Teorema 1.34. Toda variedade tem uma cobertura fina. Se uma variedade é compacta, então a cobertura pode ser escolhida sendo de tipo finita.

Proposição 1.35. Se uma variedade M tem cobertura fina finita, então sua cohomologia é de dimensão finita.

Demonstração. Da sequência Mayer-Vietoris temos

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(U \cap V) \xrightarrow{d^*} H^q(U \cup V) \xrightarrow{r} H^q(U) \oplus H^q(V) \rightarrow \dots$$

Assim, obtemos

$$H^q(U \cup V) \simeq \ker(r) \oplus \operatorname{im}(r) \simeq \operatorname{im}(d^*) \oplus \operatorname{im}(r)$$

Sabemos que se a q -ésima cohomologia de U, V e $U \cap V$ são de dimensão finita, então a q -ésima cohomologia de $U \cup V$ também é. Para uma variedade que é difeomorfa à $\mathbb{R}^n$, a dimensão finita de $H^*(M)$ segue do Lema de Poincaré. Agora procedemos por indução sobre a cardinalidade de uma cobertura fina. Suponha que a cohomologia de qualquer variedade tendo uma cobertura fina com no máximo p conjuntos abertos é de dimensão finita. Considere uma variedade tendo uma cobertura fina $\{U_0, \dots, U_p\}$ com $p+1$ conjuntos abertos. Agora $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ tem cobertura fina com p conjuntos abertos. Por hipótese, a q -ésima cohomologia de $\{U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}\}, U_p$ e $(U_0 \cup \dots \cup U_{p-1}) \cap U_p$ são de dimensão finita. Assim a q -ésima cohomologia de $(U_0 \cup \dots \cup U_p)$ também é.

□

Proposição 1.36. Toda variedade compacta M tem cohomologia de De Rham com dimensão finita.

Demonstração. A variedade $M/\partial M$ tem boa cobertura finita e é homopicamente equivalente à M .

□

Apresentaremos o seguinte lema sem demonstração. O leitor interessado pode consultar [8, pag. 129].

Lema 2. (Lema dos Cinco) Seja

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \xrightarrow{f_3} & D & \xrightarrow{f_4} & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \xrightarrow{f'_1} & B' & \xrightarrow{f'_2} & C' & \xrightarrow{f'_3} & D' & \xrightarrow{f'_4} & E' \end{array}$$

um diagrama comutativo de homomorfismos de grupos abelianos tal que as linhas horizontais são exatas. Se α, β, γ e ε são isomorfismos, então γ também o é.

Teorema 1.37. (Fórmula de Kunneth) A cohomologia do produto de duas variedades M e F é o produto tensorial

$$H^*(M \times F) = H^*(M) \otimes H^*(F)$$

Isto significa que

$$H^l(M \times F) = \bigoplus_{p+q=l} H^p(M) \otimes H^q(F)$$

para todo l .

Demonstração. Esta prova da Fórmula de Kunneth se fará supondo que M tem uma cobertura fina finita com n elementos. As projeções naturais

$$\begin{array}{ccc} M \times F & \xrightarrow{\rho} & F \\ \downarrow \pi & & \\ M & & \end{array}$$

induzem uma aplicação em cohomologia

$$\varphi : H^*(M) \otimes H^*(F) \rightarrow H^*(M \times F)$$

$$[\omega] \otimes [\phi] \mapsto [\pi^* \omega \wedge \rho^* \phi].$$

Mostraremos que φ é um isomorfismo. Se $n = 1$ então M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$ e assim segue pelo lema de Poincaré. Agora fixe um inteiro $n \geq 2$ e, assuma por indução, que a fórmula de Kunneth é válida para $M \times F$ sempre que M tem uma boa cobertura com no máximo $n - 1$ conjuntos abertos. Consideremos a boa cobertura aberta $M = U_1 \cup \dots \cup U_n$ e denote $U = U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$ e $V := U_n$. Pela hipótese de indução, a fórmula de Kunneth é válida para $U \times F$, $V \times F$ e $(U \cap V) \times F$. Da sequência exata Mayer-Vietoris

$$\dots \rightarrow H^p(U \cup V) \rightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \rightarrow H^p(U \cap V) \rightarrow \dots$$

obtemos uma sequência exata tensoriando com $H^{l-p}(F)$:

$$\dots \rightarrow H^p(U \cup V) \otimes H^{l-p}(F) \rightarrow (H^p(U) \oplus H^p(V)) \otimes H^{l-p}(F) \rightarrow H^p(U \cap V) \otimes H^{l-p}(F) \rightarrow \dots$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^p(U \cup V) \otimes H^{l-p}(F) &\rightarrow (H^p(U) \otimes H^{l-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{l-p}(F)) \rightarrow \\ &\rightarrow H^p(U \cap V) \otimes H^{l-p}(F) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Desde que tensoriar com um espaço vetorial preserva a exatidão. Somando sobre $p = 0, 1, \dots, l$ temos a sequência exata

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \bigoplus_{p=0}^l H^p(U \cup V) \otimes H^{l-p}(F) \\ \rightarrow \bigoplus_{p=0}^l (H^p(U) \otimes H^{l-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{l-p}(F)) \\ \rightarrow \bigoplus_{p=0}^n H^p(U \cap V) \otimes H^{l-p}(F) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{p=0}^l H^p(U \cup V) \otimes H^{l-p}(F) & \longrightarrow & \bigoplus_{p=0}^l (H^p(U) \otimes H^{l-p}(F)) \oplus (H^p(V) \otimes H^{l-p}(F)) & \longrightarrow & \bigoplus_{p=0}^l H^p(U \cap V) \otimes H^{l-p}(F) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H^p((U \cup V) \times F) & \longrightarrow & H^l(U \times (F)) \oplus H^l(V \times F) & \longrightarrow & H^l((U \cap V) \times F) \end{array}$$

A comutatividade é clara, exceto talvez pelo quadrado (omitido acima):

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus H^p(U \cap V) \otimes H^{l-p}(F) & \xrightarrow{d^*} & \bigoplus H^{p+1}(U \cup V) \otimes H^{l-p}(F) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ H^l(U \cap V) \times F & \xrightarrow{d^*} & H^{l+1}((U \cup V) \times F) \end{array}$$

Vamos verificar. Seja $[\omega] \otimes [\phi] \in H^p(U \cap V) \otimes H^{l-p}(F)$ onde $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$ e $\phi \in \Omega^{l-p}(F)$ são formas fechadas, então

$$\varphi d^*(\omega \otimes \phi) = \pi^*(d^*\omega) \wedge \rho^*\phi$$

$$d^*\varphi(\omega \otimes \phi) = d^*(\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi)$$

lembre-se que se $\{\rho_U, \rho_V\}$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U, V\}$ então $d^*\omega \in \Omega^{p+1}(M)$ é dada por

$$d^*\omega = \begin{cases} -d(\rho_V\omega) & \text{sobre } U \\ d(\rho_V\omega) & \text{sobre } V. \end{cases}$$

Desde que as funções de pullback $\{\pi^*\rho_U, \pi^*\rho_V\}$ formam uma partição da unidade sobre $(U \cup V) \times F$ subordinada à cobertura $\{U \times F, V \times F\}$ sobre $(U \cap V) \times F$. Mais precisamente temos

$$\pi^*\rho_U = \rho_U \circ \pi : M \times F \rightarrow [0, 1]$$

$$\pi^*\rho_V = \rho_V \circ \pi : M \times F \rightarrow [0, 1]$$

e assim, usando esta partição da unidade para a definição do operador

$$d^* : \Omega^l((U \cap V) \times F) \rightarrow \Omega^{l+1}(M \times F)$$

na sequência Mayer-Vietoris para $M \times F$ temos

$$d^*(\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi) = d^*((\pi^*\rho_U)\pi^*\omega \wedge \rho^*\phi) =$$

$$= (d\pi^*(\rho_U\omega)) \wedge \rho^*\phi = \pi^*(d^*\omega) \wedge \rho^*\phi.$$

Assim o diagrama é comutativo. A hipótese de indução assegura que temos isomorfismos em U , V e $U \cap V$, pelo Lema dos Cinco, se é verdade para U , V e $U \cap V$ então é verdade para $U \cup V$. Isto completa a demonstração.

□

TEORIA DE FEIXES

2.1 Pré-feixes e Feixes

Definição 2.1. Um pré-feixe F sobre um espaço topológico M é:

- (a) Uma correspondência que a cada aberto $U \subset M$ associa um conjunto $F(U)$.
- (b) Uma coleção de aplicações (chamadas morfismos de restrição)

$$\rho_{U,V} : F(U) \rightarrow F(V)$$

para cada par de abertos U e V tais que se $V \subset U$ satisfazem

- (1) $\rho_{U,U} = id$ sobre U .
- (2) Para cada $W \subset V \subset U$ tem-se

$$\rho_{U,W} : \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}.$$

Observação 2.2. Denotaremos um pré-feixe como acima por $\{F(U), \rho_{U,V}\}$.

Observação 2.3. Lidaremos principalmente com um pré-feixe F , onde $F(U)$ tem alguma estrutura algébrica, como por exemplo grupos abelianos ou K -módulos. Neste caso também precisaremos que os sub-prefeixes (apresentados a seguir) tenham subestrutura induzida e cada homomorfismo ou morfismo de restrição preserve estrutura algébrica. Considere K sempre como sendo o conjunto dos números reais, salvo menção contrária.

Definição 2.4. Um pré-feixe $\{F(U), \rho_{U,V}\}$ sobre uma variedade M é dito completo se dado um conjunto aberto $U = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ de abertos em M , com $\alpha \in I$, as seguintes duas condições são satisfeitas:

- C_1 - Sempre que f e g em $F(U)$ são tais que $\rho_{U_{\alpha},U} f = \rho_{U_{\alpha},U} g$ para todo α , então $f = g$;
- C_2 - Se $f_{\alpha} \in F(U_{\alpha})$ e se para cada $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ temos que

$$\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha} f_\alpha = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta} f_\beta$$

para todo α e β , então existe um elemento $f \in F(U)$ tal que $f_\alpha = \rho_{U_\alpha, U} f$ para todo α .

Exemplo 2.5. Sejam X e Y espaços topológicos e $C_{X,Y}$ o pré-feixe definido por

(a) $C_{X,Y}(U) := \{f : U \subset X \rightarrow Y; f \text{ é contínua}\}$.

(b) Para $f \in C_{X,Y}(U)$, $\rho_{U,V} := f|_V$ a restrição natural como função. É fácil ver que tal pré-feixe satisfaz os axiomas C_1 e C_2 e portanto é completo.

Exemplo 2.6. Seja X um espaço topológico. Seja $C_{X,K}$ como no exemplo acima. Este é um pré-feixe completo de K -espaços vetoriais, isto é, $C_{X,K}(U)$ é um K -espaço vetorial.

Exemplo 2.7. O conjunto $\{\Omega^k(U); \rho_{U,V}\}$, onde $\rho_{U,V} := \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(V)$ das formas diferenciais é um pré-feixe completo para todo aberto $V \subset U$ sobre a variedade diferenciável M . Isso será demonstrado mais adiante no texto.

Agora daremos um exemplo de pré-feixe que não é completo.

Exemplo 2.8. Seja X o plano complexo e defina o pré-feixe B colocando $B(U)$ como a álgebra de função holomorfas limitadas no conjunto aberto U . Seja $U_i = \{z : |z| < i\}$ e então $C = \cup U_i$. Seja $f_i \in B(U_i)$ definidas colocando $f_i(z) = z$. Então é claro que não existe $f \in B(\mathbb{C})$ com a propriedade $f|_{U_i} = f_i$. De fato, pelo teorema de Liouville $B(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Consequentemente B não é completo, desde que viola o axioma C_2 .

Definição 2.9. Sejam $P = \{F(U), \rho_{U,V}\}$ e $P' = \{F'(U), \rho_{U,V}\}$ dois pré-feixes sobre M . Um homomorfismo entre P e P' é uma coleção de homomorfismos $\varphi_U : F(U) \rightarrow F'(U)$ tal que

$$\rho'_{U,V} \circ \varphi_V = \varphi_U \circ \rho_{U,V}$$

para $U \subset V$. Um isomorfismo de pré-feixes é um homomorfismo de pré-feixes onde cada φ_U é isomorfismo de K -módulos.

Definição 2.10. Um feixe S de K -módulos sobre M , consiste de um espaço topológico junto com uma aplicação $\pi : S \rightarrow M$ satisfazendo:

- (a) π é um homeomorfismo local.
- (b) $\pi^{-1}(m)$ é um K -módulo para todo $m \in M$
- (c) As leis de composição são contínuas na topologia de S .

No item (c) queremos dizer que se denotarmos por $S \circ S$ o subspaço de $S \times S$ consistindo de todos os pares (r, s) tais que $\pi(r) = \pi(s)$. Então queremos que as aplicações $(r, s) \rightarrow r - s$ de $S \circ S \rightarrow S$ sejam contínuas e cada uma das aplicações $s \mapsto ks$ de $S \rightarrow S$ seja contínua para todo $k \in K$. É fácil ver que as aplicações $s \mapsto -s$ e $(s, r) \mapsto s + r$ também são contínuas.

A aplicação π é chamada projeção e o K -módulo $S_m = \pi^{-1}(m)$ é chamado "talo" sobre $m \in M$. Seja $U \subset M$ um conjunto aberto. Chamaremos uma aplicação contínua $f : U \rightarrow S$ tal que $\pi \circ f = id$ de seção de S sobre U . A zero seção é a seção que associa a cada elemento $m \in U$ o elemento nulo de S_m . Denotaremos por $\Gamma(S, U)$ o conjunto das seções de S sobre U . Faremos de $\Gamma(S, U)$ um K -módulo como segue: Sejam f e g em $\Gamma(S, U)$ e $k \in K$. Definamos a soma de f e g como sendo a seção:

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m)$$

$$(kf)(m) = k(f(m)).$$

O módulo das seções globais, ou seja, as seções de S sobre M denotaremos apenas por $\Gamma(S)$.

Proposição 2.11. Seções são aplicações abertas.

Demonstração. Seja $U \subset M$ um conjunto aberto e seja $f : U \rightarrow S$ uma seção. Agora tome um aberto $A \subset U$. Queremos mostrar que $f(A)$ é um conjunto aberto. De fato, como $\pi^{-1}(A)$ é aberto em S e $f(A) = f(\pi \circ \pi^{-1}(A)) = (f \circ \pi)(\pi^{-1}(A)) = \pi^{-1}(A)$ que é aberto.

□

Exemplo 2.12. O exemplo mais elementar de feixe sobre M é o chamado feixe constante $\mathcal{G} = M \times G$ onde G é um K -módulo com a topologia discreta e em $\mathcal{G}$ é colocada a topologia produto. Aqui a projeção é simplesmente $\pi(m, g) = m$.

Definição 2.13. Seja $m \in M$. Funções f e g definidas em abertos contendo m são ditas de mesmo germe se estas são iguais em alguma vizinhança de m . Isto introduz uma relação de equivalência sobre as aplicações C^∞ definidas numa vizinhança de m . Duas aplicações são equivalentes se, e somente se, elas têm o mesmo germe. As classes de equivalência são chamadas germes e denotamos por $\bar{F}_m$. Se f é uma aplicação C^∞ em uma vizinhança de m , então $[f]_m$ denotará seu germe. As operações de adição, multiplicação por escalar e multiplicação de funções faz de $\bar{F}_m$ uma álgebra. Um germe $[f]_m$ tem um valor bem definido $f(m)$ em m , a saber, o valor de qualquer representante em m .

Exemplo 2.14. Seja $F_m \subset \bar{F}_m$ o conjunto de germes que se anulam em m . Então F_m é um ideal. Agora seja

$$C^\infty(M) = \bigsqcup_{m \in M} \bar{F}_m.$$

Definimos a projeção $\pi : C^\infty(M) \rightarrow M$ da maneira usual, ou seja, $\pi(\bar{F}_m) = m$. Associamos a cada aberto $U \subset M$ e cada função $f \in C^\infty(U)$ o conjunto

$$\bigsqcup_{m \in U} [f]_m \subset C^\infty(M).$$

A coleção desses conjuntos formam um base para a topologia sobre $C^\infty(M)$ que faz de $C^\infty(M)$ um feixe de espaços vetoriais reais. $C^\infty(M)$ é chamado de feixes de germes de funções $C^\infty(M)$ sobre M . Analogamente pode-se fazer a construção para funções de classe $C^p(M)$ para cada inteiro $p \geq 0$.

Observação 2.15. Feixes não são necessariamente espaços de Hausdorff. Um exemplo é dado pelo feixe $C^0(\mathbb{R})$ de funções contínuas sobre a reta real. Seja $g(t) \equiv 0$ e seja $f(t) = 0$ para $t \leq 0$ e $f(t) = t$ se $t > 0$. Então os germes na origem são elementos distintos de $C^0(\mathbb{R})$, contudo f e g tem o mesmo germes para $t < 0$. Segue que os germes de f e g na origem não podem ser separados por abertos disjuntos de $C^0(\mathbb{R})$.

Definição 2.16. Sejam S e S' dois feixes de K -módulos sobre M com projeções π e π' . Uma aplicação contínua $\varphi : S \rightarrow S'$ tal que $\pi' \circ \varphi = \pi$ é chamada de aplicação de feixes. Observe que tais aplicações são necessariamente homeomorfismo locais e levam talos em talos. Uma aplicação de feixes φ que é homomorfismo sobre cada talo é chamado homomorfismo de feixes. Um isomorfismo de feixes é um homomorfismo de feixes cuja aplicação inversa é também um homomorfismo de feixes.

Definição 2.17. Um subfeixe de um feixe F é um conjunto aberto R junto com uma aplicação de projeção $\pi|_R : R \rightarrow S$ tal que cada talo $\pi^{-1}|_R(m) = R_m = R \cap S_m$ é um submódulo de S_m para todo $m \in M$.

Observação 2.18. Seja $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ um homomorfismo de feixes. O núcleo de φ é o subconjunto de $\mathcal{S}$ que é levado sobre 0 -seção de $\mathcal{F}$ e este é, de fato, um subfeixe de S . O subfeixe $\varphi(\mathcal{S}) \subset \mathcal{F}$ é chamado imagem de φ . No caso em que φ é injetora, podemos identificar S com $\varphi(\mathcal{S})$ e falar de subfeixe S de F .

Exemplo 2.19. $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ é um endomorfismo de feixes das formas diferenciais, temos que seu núcleo será o feixe das formas fechadas que será um subfeixe.

Observação 2.20. O conjunto das formas exatas não é necessariamente um subfeixe.

Exemplo 2.21. O conjunto $\{\Omega^k(U); \rho_{U,V}\}$, onde $\rho_{U,V} := \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(V)$ das formas diferenciais é um pré-feixe completo para todo aberto $V \subset U$ sobre a variedade diferenciável M . Isso será demonstrado mais adiante no texto.

Definição 2.22. Seja R um subfeixe de S . Para cada $m \in M$. Seja $\mathcal{F}_m$ o módulo quociente $\mathcal{S}_m / \mathcal{R}_m$ e seja

$$\mathcal{F} = \bigsqcup_{m \in M} \mathcal{F}_m$$

Seja $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ a aplicação natural que associa com cada elemento de $\mathcal{S}_m$ sua classe de equivalência $\mathcal{F}_m$, para cada m , e em $\mathcal{F}$ coloque a topologia quociente, isto é, um conjunto U

em $\mathcal{F}$ é aberto se e somente se $\tau^{-1}(U)$ é aberto em $\mathcal{S}$. Então com essa topologia a projeção natural $\bar{\pi}$ que leva cada elemento de $\mathcal{F}_m$ em m , $\mathcal{F}$ é um feixe sobre M e $\tau : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ é um homomorfismo de feixes. $\mathcal{F}$ será chamado de feixe quociente de $\mathcal{S}$ módulo $\mathcal{R}$

Lema 3. O feixe quociente $\mathcal{F}$ é um feixe.

Demonstração. É claro que $\bar{\pi}^{-1}(m)$ é um K -módulo. Afim de mostrar que $\bar{\pi}$ é homeomorfismo local, seja U uma vizinhança de $p \in M$ tal que $\pi|_U$ é invertível. Então definimos uma inversa de $\bar{\pi}|_U$ por $\tau \circ \pi^{-1}|_U$, pois se $a \in \mathcal{F}_m$ e $m \in U$ temos

$$((\tau \circ \pi^{-1}|_U) \circ \bar{\pi}|_U)(a) = (\tau \circ \pi^{-1}|_U)(m) = \tau(U_m) = a$$

$$((\bar{\pi}|_U) \circ (\tau \circ \pi^{-1}|_U))(m) = \bar{\pi}|_U(\tau(U_m)) = \bar{\pi}|_U(a) = m$$

para mostrar que a subtração é contínua, sejam $[s_1], [s_2] \in \mathcal{F}_m$ e sejam s_1, s_2 seus representantes em $\mathcal{S}_m$. Então $[s_1] - [s_2] = \tau(s_1 - s_2)$ é contínua porque é a composição de τ com sua subtração em $\mathcal{S}_m$. Analogamente temos que a multiplicação por $k \in K$ é contínua.

□

Teorema 2.23. Seja $\varphi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$ é um homomorfismo de feixes. Então dado $s \in \mathcal{S}_m$ a aplicação natural

$$\psi : \mathcal{S}/\ker\varphi \rightarrow im\varphi$$

$$(s + (\ker\varphi|_{\mathcal{S}_m})) \mapsto \varphi(s)$$

é isomorfismo de feixes.

Demonstração. Como φ é aplicação de feixes, ψ também o é. Da definição de ψ vemos que $\psi|_{\mathcal{S}_m} : (S/\ker\varphi)_m \rightarrow im(\varphi)_m$ é homomorfismo de K -módulos. Pela definição de feixe quociente $(S/\ker(\varphi))_m = S_m/\ker(\varphi|_{S_m})$ e $(im(\varphi))_m = im(\varphi|_{S_m})$. Assim usando o primeiro teorema do isomorfismo para módulos, vemos que $\psi|_{S_m}$ é um isomorfismo de K -módulos e portanto ψ é isomorfismo de feixes.

□

Definição 2.24. Uma sequência de feixes e homomorfismos:

$$\cdots \rightarrow S_i \rightarrow S_{i+1} \rightarrow S_{i+2} \rightarrow \cdots$$

é chamada exata se imagem de cada homomorfismo é o núcleo do próximo. Sequências exatas de K -módulos são definidas similarmente.

A seguinte proposição é consequência imediata da definição de homomorfismo de feixes.

Proposição 2.25. Uma sequência de feixes $\dots \xrightarrow{f_i} S_i \xrightarrow{f_{i+1}} S_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} S_{i+2} \rightarrow \dots$ é exata se, e somente se, para cada $m \in M$ a sequência induzida de homomorfismos de talo sobre m , a saber

$$\dots \xrightarrow{(f_i)_m} (S_i)_m \xrightarrow{(f_{i+1})_m} (S_{i+1})_m \xrightarrow{(f_{i+2})_m} (S_{i+2})_m \rightarrow \dots$$

é exata.

Se $\mathcal{R}$ é um subfeixe de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{F}$ é o feixe quociente $\mathcal{S}/\mathcal{R}$ então a sequência natural de homomorfismos

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{F}$$

é exata, onde 0 denota o feixe constante sobre M cujo talo em cada ponto é o K -módulo consistindo de um único elemento. Cada feixe S dá origem canonicamente ao pré-feixe $\{\Gamma(S, U); \varphi_{U, V}\}$. Aqui associamos a cada aberto U em M um K -módulo $\Gamma(S, U)$ de seções de S sobre U e cada inclusão $U \subset V$ de conjuntos abertos em M associa-se o homomorfismo:

$$\varphi_{U, V} : \Gamma(S, V) \rightarrow \Gamma(S, U)$$

que leva a seção S sobre V a sua restrição para U . Denotaremos esta aplicação de feixes para pré-feixes por α . Chamaremos $\alpha(S)$ de pré-feixe de seções do feixe S .

Teorema 2.26. Cada pré-feixe $P = \{F(U); \rho_{U, V}\}$ determina canonicamente um feixe, que chamaremos de feixe associado (na prática, muitos feixes surgem naturalmente de pré-feixes).

Demonstração. Durante a construção, o melhor exemplo para se ter em mente é o pré-feixe $\{C^\infty(U); \rho_{U, V}\}$; seu feixe associado será o feixe de germes de funções C^∞ sobre M . Seja $P = \{F(U); \rho_{U, V}\}$ um pré-feixe de K -módulos sobre M . Seja $m \in M$ e seja

$$S_m^* = \bigsqcup_{m \in U} F(U).$$

Se estabelecermos $f \in F(U)$ equivalente à $g \in F(V)$ se, e somente se, existe uma vizinhança W de m , com $W \subset U \cap V$ tal que $\rho_{W, U}(f) = \rho_{W, V}(g)$, isto quer dizer que f e g têm o mesmo germe em m . Obtemos uma relação de equivalência em S_m^* . Com a relação de equivalência acima, definimos o conjunto $S_m = \{[f]; f \in F(U)\}$ de classes de equivalência de S_m^* , que será o talo do feixe associado a m . Se $m \in U$ seja

$$\rho_{m, U} : F(U) \rightarrow S_m$$

$$s \mapsto [s]$$

a projeção natural que atribui a cada elemento de $F(U)$ sua classe de equivalência. Sejam $f \in S_U$ e $g \in S_V$ representantes das classes $[f]$ e $[g]$ em S_m respetivamente. Existe uma vizinhança W de m tal que $W \subset U \cap V$. Definimos a adição e a multiplicação em S_m por:

$$[f] + [g] = [\rho_{W,U}f + \rho_{W,V}g]$$

$$k[f] = [kf].$$

É fácil notar que as operações anteriores estão bem definidas e dão à S_m uma estrutura de K -módulo, tal que as aplicações $\rho_{m,U}$ são homomorfismos. S_m é conhecido como o limite direto dos módulos S_U para $U \ni m$. Agora seja

$$S = \bigsqcup_{m \in M} S_m$$

e seja $\pi : S \rightarrow M$ a projeção natural tal que $\pi(S_m) = m$. Definimos uma topologia em S tomando por base da topologia a coleção de subconjuntos de S da forma:

$$O_f = \{\rho_{p,U}f; p \in U\}$$

para os vários $f \in F(U)$ e os vários conjuntos abertos U em M . Esta coleção é, de fato, uma base para a topologia em S , pois se $s \in O_f \cap O_g$ digamos $s = \rho_{p,U}f = \rho_{p,V}g$ então existe uma vizinhança W de p com $W \subset U \cap V$ para o qual $\rho_{W,U}f = \rho_{W,V}g$ a partir de onde segue que $s \in O_{\rho_{W,U}f} \subset O_f \cap O_g$.

Provemos agora que S é um feixe sobre M com a projeção π . Observe que π é um homeomorfismo local desde que é homeomorfismo em cada O_f . Cada talo S_m tem estrutura de K -módulo, assim, precisamos verificar se as operações de composição são contínuas. Considere primeiro a multiplicação por $k \in K$. Seja $s \in S$ e seja O uma vizinhança aberta de ks . Seja $s = \rho_{p,U}f$. Então O_{kf} é também uma vizinhança aberta de ks . Seja V uma vizinhança aberta de p contida em $\pi(O_{kf} \cap O)$. Então $O_{\rho_{V,U}f}$ é uma vizinhança aberta de s que é levada sobre a multiplicação por k em uma vizinhança aberta $\pi(O_{kf} \cap O) \subset O$ de ks . Finalmente mostremos que a aplicação $([g], [h]) \mapsto [g] - [h]$ de $S \circ S \rightarrow S$ é contínua. Para isso, seja O_f uma vizinhança aberta de $[g] - [h]$ digamos que $[g] - [h] = \rho_{p,U}f$ e seja $[g] = \rho_{p,V}g$ e $[h] = \rho_{p,W}h$ então existe uma vizinhança aberta Q de p com $Q \subset U \cap V \cap W$ tal que

$$\rho_{Q,U}f = \rho_{Q,V}g - \rho_{Q,W}h$$

seguindo que a vizinhança

$$O_{\rho_{Q,V}g} \times O_{\rho_{Q,W}h} \cap S \circ S$$

de $([g], [h])$ é levada em O_f . Assim as composições são, de fato, contínuas e S é um feixe sobre M com a projeção π . $\square$

Observação 2.27. S é chamado feixe associado ao pré-feixe P . Denotaremos essa aplicação de pré-feixes para feixes por β . Assim $S = \beta(P)$.

Claramente cada homomorfismo $\varphi_U : S \rightarrow F$ dá origem a um homomorfismo de pré-feixes entre o pré-feixe das seções $\alpha(S)$ e $\alpha(F)$ compondo os elementos de $\Gamma(S, U)$ com φ . Reciprocamente um homomorfismo de φ_U de P para P' induz canonicamente um homomorfismo de φ do feixe associado $S = \beta(P)$ e $S = \beta(P')$ tal que

$$\rho'_{p,U} \circ \varphi_U = \varphi \circ \rho_{p,U}$$

para cada aberto U em M e para cada $p \in U$. Além do mais, indo por outra direção de homomorfismo de feixes para homomorfismo de pré-feixes ou vice-versa, a composição de dois homomorfismos induz a composição de homomorfismo correspondentes.

Lema 4. Se duas seções que concordam num ponto $p \in M$, então elas concordam numa vizinhança de p .

Demonstração. Sejam f e g duas seções definidas em um aberto $U \subset M$ que concordam em $p \in U$. Como π é homeomorfismo local, existe uma vizinhança aberta W de $f(p) = g(p)$ no qual π tem uma inversa. Assim, desde que f e g são inversas locais de π , vemos que f e g concordam em $\pi(W) \cap U$ que é um conjunto aberto, desde que π é uma aplicação aberta. $\square$

Lema 5. Seja S um feixe sobre M com projeção π . Dado $a \in S$, então existe um aberto $V \subset M$ e $x \in V$ tal que $f(x) = a$, onde $f \in \Gamma(S, V)$.

Demonstração. Como π é homeomorfismo em cada ponto $a \in S$, existe uma vizinhança V de a , tal que π restrito à V é invertível. Esta inversa é, de fato, uma seção de π , denotada por f e $f(\pi(a)) = a$. Assim o resultado segue tomando $x = \pi(a)$. $\square$

Proposição 2.28. Seja S um feixe de K -módulos sobre M . Se tomarmos seu pré-feixe $\alpha(S)$ de seções e então associamos o feixe $\beta(\alpha(S))$ obtemos o germe de seções de S . Então os feixes S e $\beta(\alpha(S))$ são canonicamente isomorfos.

Demonstração. De fato, Seja $[f] \in \beta(\alpha(S))$ o germe, em p , de alguma seção f de S sobre um aberto contendo p . Isto é, $[f] = \rho_{p,U}(f)$ para alguma $f \in \Gamma(S, U)$. Então

$$\psi : \beta(\alpha(S)) \rightarrow S$$

$$[f] \mapsto f(p)$$

determina uma aplicação bem definida que é um isomorfismo de feixes. Para ver que a aplicação está bem definida, é só notar que outro representante da classe de $[f]$, terá o mesmo valor em p como f . Para mostrar que ψ é um homomorfismo de feixes, sejam π a projeção sobre S e π' a projeção em $\beta(\alpha(S))$, logo

$$\pi \circ \psi([f]) = \pi(f(p)) = p$$

E além disso temos

$$\pi'([f]) = \pi'(\rho_{p,U}(f)) = p$$

por definição. Sejam $[f], [g] \in \beta(\alpha(S))$, onde $[f] = \rho_{p,U}(f)$ e $[g] = \rho_{p,V}(g)$, com $g \in \Gamma(S, V)$ então existe uma vizinhança W de p , tal que $W \subset V \cap U$ com $f = g$ em W . Assim para $x \in W$

$$\psi([f] + [g]) = (f + g)(p) = f(p) + g(p) = \psi([f] + \psi([g]))$$

$$\psi(k[f]) = (kf)(p) = k(f(p)) = k\psi([f])$$

o que mostra que ψ é um homomorfismo de feixes. Agora, devemos encontrar uma inversa para ψ . Pelo lema anterior, todo elemento de S é valor de alguma seção de S , ou seja, dado $a \in S$ existe uma seção local $f \in \Gamma(S, U)$ e um ponto $p \in M$ tal que $f(p) = a$. Mostremos que o aplicação

$$\psi^{-1} : S \rightarrow \beta(\alpha(S))$$

$$a \rightarrow \rho_{p,U}f$$

é uma inversa de ψ . Novamente esta aplicação é bem definida pois se duas seções f e g concordam em $p \in M$, elas devem concordar numa vizinhança de p . Portanto têm o mesmo germe. Para $p \in M$ temos

$$\pi' \circ \psi^{-1}(f(p)) = \pi'(\rho_{p,U}f) = p$$

e $\pi(f(p)) = p$. É ainda necessário mostrar que ψ^{-1} é, de fato, um homomorfismo de feixes. Sejam $a, b \in S$ e f uma seção, tal que $f(p) = a + b$ e sejam f_a e f_b seções tais que $f_a(p) = a$ e $f_b(p) = b$. Assim

$$\psi^{-1}(a + b) = \rho_{p,U}f$$

$$\psi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b) = \rho_{p,U_a}f_a + \rho_{p,U_b}f_b = \rho_{p,U_a \cap U_b}(f_a + f_b)$$

observando que f e $f_a + f_b$ concordam em p , tais aplicações devem concordar numa vizinhança de p , assim representam a mesma classe de equivalência em $\beta(\alpha(S))$ e, portanto, $\psi^{-1}(a + b) = \psi^{-1}(a) + \psi^{-1}(b)$. O mesmo argumento vale para mostrar que $\psi^{-1}(ka) = k\psi^{-1}(a)$.

□

Exemplo 2.29. Se começarmos com um pré-feixe P e tomarmos o pré-feixe $\alpha(\beta(S))$ de seções do feixe P associado, podemos obter um pré-feixe distinto de P . Por exemplo, tome $P = \{F(U), \rho_{U,V}\}$ onde $F(U)$ é K para cada U e todas as restrições $\rho_{U,V}$ para $U \subsetneq V$ são identicamente nulas. Então como $\beta(S)$ é formado pela classe de equivalência nula, temos que o pré-feixe $\alpha(\beta(S))$ atribui a cada aberto U em M o K -módulo nulo.

Exemplo 2.30. Se tomarmos o pré-feixe $P = \{Z^k(U); \rho_{U,V}\}$ das k -formas diferenciais fechadas com os morfismos sendo apenas restrições naturais, temos que este é um pré-feixe completo. De fato, desde que ele é o núcleo do homomorfismo $d : \Omega \rightarrow \Omega$, onde Ω é o pré-feixe completo das k -formas diferenciais e d é o operador diferencial. Por outro lado ao tomarmos o pré-feixe $P = \{B^k(U); \rho_{U,V}\}$ das k -formas diferenciais exatas, temos que tal pré-feixe não é completo, visto que não satisfaz a propriedade $C1$. Assim é interessante saber o que acontece ao tomarmos o feixe associado desse pré-feixe. Como fizemos na construção, obtemos o talo do feixe associado como sendo o conjunto S que é formado pelos germes das k -formas diferenciais exatas. Deste modo podemos obter um isomorfismo entre o talo S e o conjunto das k -formas fechadas, pois toda forma fechada é localmente exata (provado no capítulo 1). Assim como há um isomorfismo em nível de talos, obtemos um isomorfismo de feixes por definição.

Proposição 2.31. Se P é um pré-feixe completo, então $\alpha(\beta(S))$ é canonicamente isomorfo com P .

Demonstração. Seja $P = \{F(U), \rho_{U,V}\}$ definimos um homomorfismo de P para $\alpha(\beta(S)) = \{\Gamma(\beta(P), U), \rho_{U,V}\}$ como segue. Para cada aberto U em M definimos:

$$\begin{aligned} \varphi_U : F(U) &\rightarrow \Gamma(\beta(P), U) \\ f &\mapsto \delta_f : U \rightarrow \beta(P) \\ p &\mapsto \rho_{p,U}f \end{aligned}$$

Note primeiramente que os homomorfismos de restrição são os mesmos, tanto para P como para $\alpha(\beta(S))$. Mostremos que as aplicações φ_U são homomorfismos de pré-feixes para todo aberto $U \subset M$. Seja $f \in F(V)$ e $p \in \beta(S)$ então

$$(\rho_{U,V} \circ \varphi_V)(f) = \rho_{U,V}(\delta_f) = \delta_f.$$

$$(\varphi_U \circ \rho_{U,V})(f) = \delta_{\rho_{U,V}(f)}$$

Que são iguais dado que têm o mesmo germe. Ainda temos que $\varphi_U(kf + g) = k\varphi_U(f) + \varphi_U(g)$. Para provar que φ_U é um isomorfismo para todo aberto $U \subset M$, precisamos verificar que tais homomorfismos são isomorfismos. Primeiro mostraremos a injetividade. Se $f \in F(U)$

é levado na 0-seção, então para cada ponto $p \in U$, existe uma vizinhança $U_p \subset U$ tal que $\rho_{U_p, U} f = 0$, como a coleção $\{U_p\}$ cobre U e pelo axioma C_1 da definição de pré-feixe, temos que $\rho_{U_p, U}(f) = \rho_{U_p, U}(0)$ portanto $f = 0 \in F(U)$. Para provar a sobrejetividade seja $c : U \rightarrow \beta(P)$ uma seção. Então para cada $p \in U$ existe uma vizinhança U_p de p e um elemento $f_p \in F(U_p)$ tal que

$$\rho_{q, U_p} f_p = c(q)$$

para todo $q \in U_p$. Temos assim uma coleção $\{f_p\}$ e uma cobertura $\{U_p\}$ de U . Tome agora $p, q \in U$ mostremos que

$$\rho_{U_p \cap U_q, U_p} f_p = \rho_{U_p \cap U_q, U_q} f_q$$

De fato, pela equação $\rho_{q, U_p} f_p = c(q)$, para todo $r \in U_p \cap U_q$ tem-se

$$\rho_{r, U_p \cap U_q} \circ \rho_{U_p \cap U_q, U_p} f_p = c(r)$$

$$\rho_{r, U_p \cap U_q} \circ \rho_{U_p \cap U_q, U_q} f_q = c(r)$$

Pela definição de $\rho_{r, U_p \cap U_q}$, existe uma vizinhança $W_r \subset U_p \cap U_q$ de r , tal que

$$\rho_{W_r, U_p \cap U_q} \circ \rho_{U_p \cap U_q, U_p} f_p = \rho_{W_r, U_p \cap U_q} \circ \rho_{U_p \cap U_q, U_q} f_q$$

Se construirmos W_r para todo $r \in U_p \cap U_q$, obtemos uma coleção $\{W_r\}$ que cobre $U_p \cap U_q$. Usando o axioma C_2 da definição, temos que

$$\rho_{U_p \cap U_q, U_p} f_p = \rho_{U_p \cap U_q, U_q} f_q$$

para quaisquer p, q em U . Assim, existe $f \in F(U)$ tal que

$$f_p = \rho_{U_p, U} f \text{ para todo } p \in U. \text{ Assim } f \text{ é levado em } c. \quad \square$$

Definição 2.32. Sejam $P = \{F(U), \rho_{U, V}\}$ e $P' = \{F'(U), \rho'_{U, V}\}$ pré-feixes sobre M . Então seu produto tensorial será o pré-feixe:

$$P \otimes P' = \{F(U) \otimes F'(U); \rho_{U, V} \otimes \rho'_{U, V}\}.$$

Se $\{\varphi_U\} : P \rightarrow Q$ e $\{\varphi'_U\} : P' \rightarrow Q'$ são homomorfismos de pré-feixes, então seu produto tensorial $\{\varphi_U\} \otimes \{\varphi'_U\}$ é, por definição, o homomorfismo

$$\{\varphi_U \otimes \{\varphi'_U\} : P \otimes P' \rightarrow Q \otimes Q'.$$

Se S e F são feixes sobre M , definimos o produto tensorial $S \otimes F$ como sendo

$$S \otimes F := \beta(\alpha(S) \otimes \alpha(F)).$$

Além disso, se $\varphi : S \rightarrow F$ e $\lambda : S' \rightarrow F'$ são homomorfismos de feixes, e se $\{\varphi_U\} : \alpha(S) \rightarrow \alpha(F)$ e $\{\lambda_U\} : \alpha(S') \rightarrow \alpha(F')$ são os homomorfismos correspondentes de pré-feixes das seções, então definimos o produto tensorial $\varphi \otimes \lambda : S \otimes S' \rightarrow F \otimes F'$ associado com o homomorfismo de pré-feixes

$$\{\varphi_U\} \otimes \{\lambda_U\} : \alpha(S) \otimes \alpha(S') \rightarrow \alpha(F) \otimes \alpha(F')$$

Definição 2.33. Um feixe S sobre M é dito ser fino se para qualquer cobertura aberta localmente finita $\{U_i\}_{i \in I}$ de M , existe, para cada i , um endomorfismo l_i de S tal que:

$$(a) \text{supp}(l_i) \subset U_i$$

$$(b) \sum_i l_i = id.$$

Observação 2.34. Por suporte de l_i , queremos dizer o feixe do conjunto $\{x \in M; l_i|_{S_m} \neq 0\}$ e chamaremos $\{l_i\}$ uma partição da unidade para S subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ de M .

Exemplo 2.35. Um exemplo de feixe fino é o feixe $C^\infty(M)$ dos germes de funções de classe C^∞ sobre M . Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura localmente finita aberta de M , $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ a partição da unidade subordinada à esta cobertura. Obtemos endomorfismos $\bar{l}_i$ do pré-feixe $\{C^\infty(U); \rho_{U,V}\}$ estabelecendo:

$$\bar{l}_i(f) = (\varphi_i|_U) \cdot f$$

para $f \in C^\infty$. O endomorfismo de feixes associado l_i de $C^\infty(M)$ forma uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_i\}$ de M . Sejam S e F feixes sobre M com S sendo um feixe fino. Então $S \otimes F$ é um feixe fino. De fato, se $\{l_i\}$ é uma partição da unidade para S subornada à cobertura $\{U_i\}$ de M então $l_i \otimes id$ é uma partição da unidade para $S \otimes F$.

A seguinte proposição é uma consequência direta da definição.

Proposição 2.36. Um homomorfismo de feixes $\varphi : S \rightarrow F$ dá origem à um homomorfismo $\Gamma(S) \rightarrow \Gamma(F)$ de módulos das seções globais. A sequência exata:

$$0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$$

dá origem a sequência exata

$$0 \rightarrow \Gamma(S') \rightarrow \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S'')$$

contudo o homomorfismo $\Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S'')$ não é geralmente sobrejetivo.

Teorema 2.37. Seja $\varphi : S \rightarrow F$ um homomorfismo de feixes sobrejetor com núcleo R . suponha que R é um feixe fino. Então o homomorfismo $\Gamma(S) \rightarrow \Gamma(F)$ é sobrejetivo.

Demonstração. Seja t uma seção global de F . Devemos construir uma seção s de S tal que $\varphi \circ s = t$. Por continuidade de φ e t e como as projeções de S e F são homeomorfismos locais, existe uma cobertura $\{U_i\}$ de M por abertos para cada i uma seção s_i de S sobre U_i tal que $\varphi \circ s_i = t|_{U_i}$. Desde que M é paracompacto podemos assumir que a cobertura é localmente finita. A diferença $s_i - s_j = s_{ij}$ é uma seção do núcleo R sobre $U_i \cap U_j$ a diferença satisfaz $s_{ij} + s_{jk} = s_{ik}$. Agora seja $\{l_i\}$ uma partição da unidade para R subordinada a cobertura $\{U_i\}$ de M . Considere a seção $l_i \circ s_{ij}$ de R sobre $U_i \cap U_j$. Desde que o suporte de l_j está em U_j podemos estender a seção $l_j \circ s_{ij}$ a uma seção contínua de R sobre U_i definindo ser zero nos pontos $U_i - U_j$ seja

$$s'_i = \sum_j l_j \circ s_{ij}$$

então s'_i é uma seção de R sobre U_i e assim

$$s'_i - s'_j = \sum_k l_k \circ s_{ik} - \sum_k l_k \circ s_{jk} = \sum_k l_k \circ s_{ij} = s_{ij}$$

sobre $U_i \cap U_j$. Assim

$$s_i - s'_i = s_j - s'_j$$

sobre $U_i \cap U_j$. Seguindo que $s(m) = (s_i - s'_i)(m)$ para todo $m \in U_i$ então s é uma seção global bem definida de S tal que $\varphi \circ s = t$.

□

Definição 2.38. Um K -módulo X é livre de torção se não existe elemento não nulo $x \in X$ para o qual existe um elemento não nulo $k \in K$ tal que $kx = 0$. Um feixe é dito livre de torção se cada talo é livre de torção.

O seguinte lema é um resultado básico sobre produto tensorial de sequências exatas e sua demonstração será omitida.

Lema 6. Seja

$$0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$$

uma sequência exata de K -módulos e seja B um K -módulo. Então a sequência induzida

$$A' \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$$

é exata, mas $A' \otimes B \rightarrow A \otimes B$ não é necessariamente injetivo. Se contudo A'' ou B for livre de torção então a sequência inteira é exata.

$$0 \rightarrow A' \otimes B \rightarrow A \otimes B \rightarrow A'' \otimes B \rightarrow 0$$

é exata.

Teorema 2.39. Seja

$$0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$$

uma sequência exata de feixes sobre M e seja F também um feixe sobre M . Então se F ou S'' é livre de torção a sequência:

$$0 \rightarrow S' \otimes F \rightarrow S \otimes F \rightarrow S'' \otimes F \rightarrow 0$$

é exata. Além disso, se F ou S' é um feixe fino, então a seguinte sequência é exata:

$$0 \rightarrow \Gamma(S' \otimes F) \rightarrow \Gamma(S \otimes F) \rightarrow \Gamma(S'' \otimes F) \rightarrow 0$$

Demonstração. A exatidão de $0 \rightarrow S' \otimes F \rightarrow S \otimes F \rightarrow S'' \otimes F \rightarrow 0$ é consequência imediata do lema anterior. Se F ou S' é fino, então $S' \otimes F$ é fino e como $0 \rightarrow S' \otimes F \rightarrow S \otimes F \rightarrow S'' \otimes F \rightarrow 0$ é exata e de 3.33 segue o resultado.

□

2.2 Cocadeias Complexas

Formalizaremos o estudo das cocadeias complexas nessa seção.

Definição 2.40. Uma cocadeia complexa C^* consiste de uma sequência de K -módulos e homomorfismos

$$\dots \rightarrow C^{q-1} \rightarrow C^q \rightarrow C^{q+1} \rightarrow \dots$$

definida para todos os inteiros q tais que em cada estágio a imagem de um homomorfismo está contida no núcleo do próximo. O homomorfismo $C^q \rightarrow C^{q+1}$ (que nos referiremos simplesmente por d^q ou simplesmente por d se o índice q não é necessário para clarificação) é chamado q -ésimo operador de cobordo. O núcleo $Z^q(C^*)$ de d^q é o módulo de cociclos de grau q da cocadeia complexa C^* e a imagem $B^q(C^*)$ de d^{q-1} é o módulo de cobordo de grau q . O q -ésimo módulo de cohomologia $H^q(C^*)$ é definido sendo o quociente

$$H^q(C^*) = Z^q(C^*)/B^q(C^*).$$

Seja C^* e D^* duas cocadeias complexas. Uma aplicação de cocadeias $C^* \rightarrow D^*$ consiste de uma coleção de homomorfismos $\varphi_q : C^q \rightarrow D^q$ em que para cada q o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
C^{q+1} & \xrightarrow{\varphi_{q+1}} & D^{q+1} \\
d_C^q \uparrow & & d_D^q \uparrow \\
C^q & \xrightarrow{\varphi_q} & D^q
\end{array}$$

Proposição 2.41. Segue do diagrama acima que a aplicação de cocadeias $C^* \rightarrow D^*$ manda o módulo de q -cociclos de C^* no módulo de q -cociclos de D^* e manda o módulo de q -cobordos de C^* no módulo de q -cobordos de D^* e assim induz um homomorfismo nos módulos de cohomologia:

$$H^q(C^*) \rightarrow H^q(D^*)$$

Demonstração. Seja $\{\varphi_q\}$ a coleção de homomorfismos. Seja f um q -cobordo de C^* . Pela comutatividade do diagrama anterior, $d_D^q(\varphi_q(f)) = \varphi_{q+1}(d_C^q(f)) = 0$, assim $\varphi_q(f)$ é um q -cobordo em D^* . Similarmente temos que se f é um $(q+1)$ -cociclo de C^* , isto é, $f = d_C^q(g)$ para algum $g \in C^q$, então $\varphi_{q+1}(f) = \varphi_{q+1}(d_C^q(g)) = d_D^q(\varphi_q(g))$ e portanto $\varphi_{q+1}(f)$ é também um $(q+1)$ -cociclo de D^* . Assim basta definir $H^q(C^*) \rightarrow H^q(D^*)$ por $[f] \mapsto [\varphi_q(f)]$ que é um homomorfismo bem definido. Denotaremos tal aplicação por φ^* .

□

Lema 7. A Composição $C^* \rightarrow D^*$ de duas aplicações de cocadeia $C^* \rightarrow D^*$ e $D^* \rightarrow E^*$ induz homomorfismo nos módulos de cohomologia $H^q(C^*) \rightarrow H^q(E^*)$ que é a composição de $H^q(C^*) \rightarrow H^q(D^*)$ e $H^q(D^*) \rightarrow H^q(E^*)$.

Demonstração. Sejam $\varphi : C^* \rightarrow D^*$ e $\psi : D^* \rightarrow E^*$. Então para $[w] \in H^q(C^*)$ temos que

$$\psi^*(\varphi^*[w]) = [\psi \circ \varphi(w)] \text{ e } (\psi \circ \varphi)^*[w] = [\psi \circ \varphi(w)]$$

e o resultado segue.

□

Definição 2.42. Uma sequência de aplicações de cocadeias do tipo

$$0 \rightarrow C^* \rightarrow D^* \rightarrow E^* \rightarrow 0$$

é chamada sequência exata curta se para cada q , temos que

$$0 \rightarrow C^q \rightarrow D^q \rightarrow E^q \rightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de K -módulos.

Definição 2.43. Um homomorfismo entre seqüências exatas $0 \rightarrow C^* \rightarrow D^* \rightarrow E^* \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow \bar{C}^* \rightarrow \bar{D}^* \rightarrow \bar{E}^* \rightarrow 0$ de cocadeias complexas, consiste de aplicações de cocadeias $C^* \rightarrow \bar{C}^*$, $D^* \rightarrow \bar{D}^*$ e $E^* \rightarrow \bar{E}^*$ tal que o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & D^* & \longrightarrow & E^* & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{C}^* & \longrightarrow & \bar{D}^* & \longrightarrow & \bar{E}^* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Proposição 2.44. Dada uma seqüência exata curta de aplicações de cocadeias $0 \rightarrow C^* \rightarrow D^* \rightarrow E^* \rightarrow 0$ consistindo das seqüências exatas curtas $0 \rightarrow C^q \xrightarrow{f^q} D^q \xrightarrow{g^q} E^q \rightarrow 0$. Então existem homomorfismos:

$$H^q(E^*) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(C^*)$$

para cada q tal que a seguinte seqüência é exata:

$$\dots \rightarrow H^{q-1}(E^*) \xrightarrow{\delta} H^q(C^*) \xrightarrow{f^*} H^q(D^*) \xrightarrow{g^*} H^q(E^*) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(C^*)$$

Demonstração. Afim de definir δ , recorreremos algumas vezes ao seguinte o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{q+2} & \xrightarrow{f^{q+1}} & D^{q+2} & \longrightarrow & E^{q+2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow d_D & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{q+1} & \xrightarrow{f^q} & D^{q+1} & \xrightarrow{g^{q+1}} & E^{q+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow d_D & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^q & \longrightarrow & D^q & \xrightarrow{g^q} & E^q & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \end{array}$$

que, por conveniência, indicamos explicitamente homomorfismos particulares. Seja e um cociclo em E^q . Desde que g^q é sobrejetivo, existe um elemento $d \in D^q$ tal que $g^q(d) = e$. Desde que o quadrado inferior direito é comutativo, temos que

$$0 = d_E(e) = d_E(g^q(d)) = g^q(d_D(d))$$

Assim $d_D(d) \in \ker(g) = \text{im}(f)$ e portanto existe um elemento $c \in C^{q+1}$ tal que $f(c) = d_D(d)$. Assim $d_D(f(c)) = d_D^2(d) = 0$ e como f é uma aplicação de cocadeia temos que $f(d_C(c)) = 0$ e por ser injetivo temos $d_C(c) = 0$, assim c representa uma classe em $H^{q+1}(C^*)$ e definimos

$\delta[e] = [c]$. Verifiquemos que tal aplicação está bem definida. Sejam $e, e' \in E^q$ tais que $[e] = [e']$. Com o mesmo argumento de antes, sejam $d, d' \in D^q$ tais que $g(d) = e$ e $g(d') = e'$ e considere $d_D(d), d_D(d') \in D^{q+1}$. Temos que $g(d_D(d)) = d_D(g(d)) = 0$ e o mesmo para d' e concluímos que ambos d, d' estão no núcleo de g e portanto na imagem de f e podemos encontrar $c, c' \in C^{q+1}$ tais que $f(c) = d_D(d)$ e $f(c') = d_D(d')$ e assim $\delta[e - e'] = [c - c']$. Para concluir que δ está bem definido, resta mostrar que $c - c'$ é um cobordo. Considere $e - e' = d(d) - d(d')$. Por hipótese ele está na imagem de d_E e assim existe um elemento $\bar{e} \in E^{q-1}$ tal que $d_E(\bar{e}) = g(d) - g(d')$. Pela sobrejetividade de g , existe $\bar{d} \in D^{q-1}$ tal que $g(\bar{d}) = \bar{e}$. Considere $d - d' - d_D(\bar{e})$ então

$$g(d - d' - d_D(\bar{e})) = g(d) - g(d') - g(d) + g(d') = 0$$

Assim $d - d' - d_D(\bar{e}) \in \ker(g) = \text{im}(f)$, logo existe $\bar{c} \in C^q$ tal que $f(\bar{c}) = d - d' - d_D(\bar{e})$

e

$$d_D(f(\bar{c})) = d_D(d - d' - d_D(\bar{e})) = f(c - c')$$

Portanto $f(d_C(\bar{c})) = f(c - c')$ e como f é injetiva temos que $d_C\bar{c} = c - c'$ o que implica que $c - c' \in \text{Im}(d_C)$ e $[c - c'] = 0$. Concluímos que δ está bem definido. Devemos mostrar agora que com esta definição de δ a sequência $\cdots \rightarrow H^{q-1}(E^*) \xrightarrow{\delta} H^q(C^*) \xrightarrow{f^*} H^q(D^*) \xrightarrow{g^*} H^q(E^*) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(C^*)$ é exata. Denotemos por f^* e g^* as aplicações induzidas em cohomologia de f e g respectivamente. Primeiro mostremos que $\ker(g^*) = \text{im}(f^*)$: Seja $[h] \in \text{im}(f^*)$ Assim existe $[\bar{h}]$ tal que $f^*[\bar{h}] = [h]$ e $g^*[h] = g^* \circ f^*[\bar{h}] = [(g \circ f)h] = [0]$. Assim $g(h) \in \text{im}(d_E)$ que implica que existe um elemento $e \in E^{q-1}$ tal que $d_E(e) = g(h)$. Como g é sobrejetivo, existe $d \in D^{q-1}$ tal que $g(d) = e$ e então $d_E(e)$ é novamente um elemento de D^q e assim $[h - d_D(d)] = [h]$ e aplicando g sobre $h - d_D(d)$ obtemos

$$g(h - d_D(d)) = g(h) - d_E(g(d)) = g(h) - d_E(e) = g(h) - g(h) = 0$$

E então $h - d_D(d) \in \text{im}(f) = \ker(g)$ e portanto existe $c \in C^q$ tal que $f(c) = h - d_D(d)$ e concluímos que $f^*[c] = [f(c)] = [h - d_D(d)]$ e como $h \in \text{im}(d_D)$ implica que $f^*[u] = [h]$ e portanto $[h] \in \text{im}(f)$

Mostremos agora que $\text{im}(\delta) = \ker(f^*)$: Seja $[h] \in \ker(f^*)$, desde que f é injetivo, tem núcleo trivial e logo $f(h) \in \text{im}(d_D)$ e portanto existe $d \in D^{q-1}$ tal que $d_D(d) = f(h)$. Se considerarmos o elemento $g(d) \in E^{q-1}$, pela definição de δ temos que $g(d_D(d)) = d_E(g(d)) = g(f(h)) = 0$ e concluímos que $d_D(d) \in \text{im}(f)$ e por construção $f(h) = d_D(d)$ e assim $[h] = \delta[g(c)]$ e $[h] \in \text{im}(\delta)$.

Reciprocamente, seja $[h] \in \text{im}(\delta)$. Então existe $w \in E^{q-1}$ tal que $\delta[w] = [h]$. Como g é sobrejetivo, existe $v \in D^{q-1}$ tal que $g(v) = w$. Como $d_D(v)$ está no núcleo de g , temos que $g(d_D(v)) = d_E(g(v)) = d_E(w) = 0$. Assim existe um elemento $h \in C^q$ tal que $f(h) = d_D(v)$ e

segue que $f(h)$ está na imagem de d_D , o que implica que $[h]$ está no núcleo de f^* . Com argumentos análogos aos acima, prova-se que $\text{im}(g^*) = \ker(\delta)$. $\square$

Proposição 2.45. Dados os homomorfismos de aplicações de cocadeias complexas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C^* & \longrightarrow & D^* & \longrightarrow & E^* \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & \bar{C}^* & \longrightarrow & \bar{D}^* & \longrightarrow & \bar{E}^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} H^q(E^*) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(C^*) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(\bar{E}^*) & \xrightarrow{\partial} & H^{q+1}(\bar{C}^*) \end{array}$$

Demonstração. Começemos com um cociclo $\sigma \in E^q$ e levantamos ele de volta a $\bar{\sigma} \in E^q$ que mapeamos para $d(\bar{\sigma}) \in D^{q+1}$ que vimos que é a imagem de um elemento $\sigma' \in C^{q+1}$ que, por sua vez, é levado em $\bar{\sigma}' \in \bar{C}^{q+1}$. Então $\bar{\sigma}'$ é um cociclo em $\bar{C}^{q+1}$ e é um representante da classe de cohomologia em $H^{q+1}(\bar{C}^*)$ no qual a classe de cohomologia de σ em $H^q(\bar{E}^*)$ é mapeado sobre a composição $H^q(E^*) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(C^*) \rightarrow H^{q+1}(\bar{C}^*)$. Por outro lado, podemos primeiro mapear σ para $\bar{\sigma} \in \bar{E}^q$ então levantarmos de volta para $\bar{\bar{\sigma}} \in \bar{D}^q$, mapear para $d(\bar{\bar{\sigma}}) \in \bar{D}^{q+1}$ e levantarmos de volta a $\bar{\sigma}' \in \bar{C}^{q+1}$ então $\bar{\sigma}'$ é um cociclo que representa a classe de cohomologia em $H^{q+1}(\bar{C}^*)$ no qual a classe de cohomologia de σ é levada sobre a composição $H^q(E^*) \rightarrow H^q(\bar{E}^*) \xrightarrow{\partial} H^{q+1}(\bar{C}^*)$. Ainda é preciso verificar que $\bar{\sigma}' - \bar{\bar{\sigma}}'$ é cobordo. Agora $\bar{\sigma} \in E^q$ Assim existe um elemento $\lambda \in \bar{C}^q$ que é levado em $\bar{\sigma}' - \bar{\bar{\sigma}}'$. Finalmente temos que $d\lambda = \bar{\sigma}' - \bar{\bar{\sigma}}'$ o que completa a prova. $\square$

2.3 Cohomologia Axiomática de Feixes

Definição 2.46. Uma teoria cohomológica de feixes H para M com coeficientes na feixes de K -módulos sobre M consiste de:

- (I) Um K -módulo $H^q(M, S)$ para cada feixe S e para inteiro q .
- (II) Um homomorfismo $H^q(M, S) \rightarrow H^q(M, S')$ para cada homomorfismo $S \rightarrow S'$ e cada inteiro q .
- (III) Um homomorfismo $H^q(M, S'') \rightarrow H^{q+1}(M, S')$ para cada sequência curta exata $0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$ e cada inteiro q , tal que as seguintes propriedades se mantêm:

(a) $H^q(M, S) = 0$ para cada $q < 0$ e existe um isomorfismo $H^0(M, S) \cong \Gamma(S)$ tal que para cada homomorfismo $S \rightarrow S'$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, S) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(S) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^0(M, S') & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(S') \end{array}$$

(b) $H^q(M, S) = 0$ para todo $q > 0$ se S é um feixe fino.

(c) Se $0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$ é exata então a seguinte sequência é exata:

$$\dots \rightarrow H^q(M, S') \rightarrow H^q(M, S) \rightarrow H^q(M, S'') \rightarrow H^{q+1}(M, S') \rightarrow \dots$$

(d) O homomorfismo identidade $id : S \rightarrow S$ também induz o homomorfismo identidade $H^q(M, S) \rightarrow H^q(M, S)$

(e) Se o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & S' & \\ \nearrow & & \searrow \\ S & \xrightarrow{\quad} & S'' \end{array}$$

Comuta, então para cada q o seguinte diagrama também comuta:

$$\begin{array}{ccc} & H^q(M, S') & \\ \nearrow & & \searrow \\ H^q(M, S) & \xrightarrow{\quad} & H^q(M, S'') \end{array}$$

(f) Para cada homomorfismo de sequências exatas de feixes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S' & \longrightarrow & S & \longrightarrow & S'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} H^q(M, S'') & \longrightarrow & H^{q+1}(M, S') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^q(M, F'') & \longrightarrow & H^{q+1}(M, F') \end{array}$$

O módulo $H^q(M, S)$ é chamado o q -ésimo módulo de cohomologia de M com coeficientes no feixe S relativo a teoria de cohomologia H .

Definição 2.47. Uma sequência exata de feixes:

$$0 \rightarrow A \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots$$

é chamada resolução do feixe A . A resolução anterior é fina (respectivamente livre de torção) se cada um dos feixes C_i são finos (respectivamente livre de torção).

A cada resolução de A e cada feixe S associamos uma cocadeia complexa

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma(C_0 \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_1 \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_2 \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_3 \otimes S) \rightarrow \dots$$

o qual denotaremos por $\Gamma(C^* \otimes S)$. Para cada $q \geq 0$ o módulo de q -cocadeias é $\Gamma(C_q \otimes S)$ onde para $q < 0$ o módulo de q -cocadeias é o módulo nulo. Note cuidadosamente que esta cocadeia complexa não contém o módulo $\Gamma(A \otimes S)$. Os homomorfismos na sequência anterior são aqueles induzidos por homomorfismos $C_i \otimes S \rightarrow C_{i+1} \otimes S$ que são produtos tensoriais dos homomorfismos de $0 \rightarrow A \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots$ junto com a identidade. A exatidão de $0 \rightarrow A \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots$ implica que em $\dots \rightarrow 0 \rightarrow C_0 \otimes S \rightarrow C_1 \otimes S \rightarrow C_2 \otimes S \rightarrow C_3 \otimes S \rightarrow \dots$ A imagem de cada homomorfismo está contido no núcleo do próximo e isto, por sua vez, implica que $\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma(C_0 \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_1 \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_2 \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_3 \otimes S) \rightarrow \dots$ é, de fato, uma cocadeia complexa.

Observação 2.48. Um homomorfismo $S \rightarrow S'$ quando tensoriado com o homomorfismo identidade de feixes C_i leva a homomorfismos $C_i \otimes S \rightarrow C_i \otimes S'$. Estes, por sua vez, induzem homomorfismos $\Gamma(C_i \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_i \otimes S')$ que comutam com os homomorfismos de cobordo de suas respectivas cocadeias complexas e assim determinam uma aplicação de cocadeia

$$\Gamma(C^* \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S')$$

2.4 Existência de teoria de cohomologias

Teorema 2.49. Cada resolução fina e livre de torção do feixe constante $\mathcal{K} = M \times K$

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots$$

determina canonicamente uma teoria de cohomologia para M com coeficientes no feixe de K -módulos sobre M .

Demonstração. Obtemos uma teoria de cohomologia como segue:

(I) Com o feixe S e cada inteiro q associamos o q -ésimo módulo da cocadeia complexa $\Gamma(C^* \otimes S)$ isto é, estabelecemos

$$H^q(M, S) = H^q(\Gamma(C^* \otimes S))$$

(II) Com cada homomorfismo $S \rightarrow S'$ e cada inteiro q associamos o homomorfismo $H^q(M, S) \rightarrow H^q(M, S')$ induzido pela aplicação de cocadeias $\Gamma(C^* \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S')$

(III) Cada sequência exata curta de feixes

$$0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$$

Induz, em vista do teorema 2.39 e o fato que C_i são feixes livres de torção, uma sequência exata curta de aplicações de cocadeia

$$0 \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S') \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S) \rightarrow \Gamma(C^* \otimes S'') \rightarrow 0$$

com o qual existe um homomorfismo associado

$$H^q(\Gamma(C^* \otimes S'')) \rightarrow H^{q+1}(\Gamma(C^* \otimes S'))$$

que associamos com a sequência exata $0 \rightarrow S' \rightarrow S \rightarrow S'' \rightarrow 0$ e cada inteiro q . O fato de que axioma 2.46(d) para uma teoria de cohomologia é satisfeito é aparente. A observação de que Composição $C^* \rightarrow D^*$ de duas aplicações de cocadeia $C^* \rightarrow D^*$ e $D^* \rightarrow E^*$ induz homomorfismo nos módulos de cohomologia $H^q(C^*) \rightarrow H^q(E^*)$ que é a composição de $H^q(C^*) \rightarrow H^q(D^*)$ e $H^q(D^*) \rightarrow H^q(E^*)$. Uma sequência de aplicações de cocadeias do tipo

$$0 \rightarrow C^* \rightarrow D^* \rightarrow E^* \rightarrow 0$$

forma uma sequência exata curta se para cada q

$$0 \rightarrow C^q \rightarrow D^q \rightarrow E^q \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de K-módulos implica que o axioma (e) é satisfeito. Os axiomas (c) e (f) são consequências de 2.45. Agora seja L_q o núcleo de $C_q \rightarrow C_{q+1}$ então segue da exatidão de (1) que

$$0 \rightarrow L_q \rightarrow C_q \rightarrow L_{q+1} \rightarrow 0$$

é exata. E desde que L_q é um subfeixe do feixe C_q que é livre de torção, então L_q também é livre de torção. Segue do teorema 2.39 que para qualquer feixe S a sequência

$$0 \rightarrow L_q \otimes S \rightarrow C_q \otimes S \rightarrow L_{q+1} \otimes S \rightarrow 0$$

é exata. E também obtemos que a sequência

$$0 \rightarrow \Gamma(L_q \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_q \otimes S) \rightarrow \Gamma(L_{q+1} \otimes S) \rightarrow 0.$$

Em particular, $\Gamma(L_q \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_q \otimes S)$ é uma injeção, desde que o homomorfismo

$$\Gamma(C_q \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_{q+1} \otimes S)$$

é a composição

$$\Gamma(C_q \otimes S) \rightarrow \Gamma(L_{q+1} \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_{q+1} \otimes S)$$

Seguindo de $0 \rightarrow \Gamma(L_q \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_q \otimes S) \rightarrow \Gamma(L_{q+1} \otimes S) \rightarrow 0$ que o núcleo de $\Gamma(C_q \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_{q+1} \otimes S)$ é simplesmente o submódulo $\Gamma(L_q \otimes S)$ de $\Gamma(C_q \otimes S)$. Assim para $q \geq 0$,

$$H^q(M, S) = H^q(\Gamma(C^* \otimes S) = \Gamma(L_q \otimes S) / \text{Im} \Gamma(C_{q-1} \otimes S)$$

Agora se S acontecer de ser um feixe fino, então de acordo com o teorema 2.39 a sequência completa

$$0 \rightarrow \Gamma(L_{q-1} \otimes S) \rightarrow \Gamma(C_{q-1} \otimes S) \rightarrow \Gamma(L_q \otimes S) \rightarrow 0$$

é exata e ainda que $H^q(M, S) = 0$ para $q > 0$. Assim o axioma (b) é satisfeito. Finalmente é rápido que $H^q(M, S) = 0$ para $q < 0$ e para que $q = 0$ o homomorfismo $K \rightarrow L_0 \subset C_0$ induz para um feixe arbitrário S . Um isomorfismo

$$S \simeq K \otimes S \xrightarrow{\sim} L_0 \otimes S$$

e assim um isomorfismo

$$\Gamma(S) \xrightarrow{\sim} \Gamma(L_0 \otimes S) = H^0(M, S)$$

que claramente satisfaz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(S) & \xrightarrow{\sim} & H^0(M, S) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \Gamma(S') & \xrightarrow{\sim} & H^0(M, S') \end{array}$$

para cada homomorfismo $S \rightarrow S'$. Assim o axioma (a) é satisfeito.

□

Definição 2.50. Sejam H e H' duas teorias cohomológicas de feixes sobre M com coeficientes no feixe de K -módulos sobre M . Um homomorfismo da teoria de cohomologias H para teoria H' consiste de um homomorfismo

$$H^q(M, S) \rightarrow H'^q(M, S)$$

para cada feixe S e para cada inteiro q , tal que as seguintes condições se mantêm:

(a) Para $q = 0$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} H^0(M, S) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H'^0(M, S) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma(S) \end{array}$$

(b) Para cada homomorfismo $S \rightarrow F$ e cada inteiro q o diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} H^q(M, S) & \xrightarrow{\partial} & H^q(M, F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H'^0(M, S) & \xrightarrow{\partial} & H'^q(M, F) \end{array}$$

(c) Para cada sequência exata de feixes

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow S \rightarrow F \rightarrow 0$$

O seguinte diagrama comuta para cada inteiro q :

$$\begin{array}{ccc} H^q(M, F) & \xrightarrow{\cong} & H^{q+1}(M, \mathcal{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H'^0(M, F) & \xrightarrow{\cong} & H'^{q+1}(M, \mathcal{R}) \end{array}$$

Definição 2.51. Um isomorfismo $H \rightarrow H'$ é um homomorfismo em cada um dos homomorfismos $H^q(M, S) \rightarrow H'^q(M, S)$ são isomorfismos. O homomorfismo identidade de H em si mesmo é o homomorfismo $H \rightarrow H$ que atribui a cada homomorfismo identidade $H^q(M, S) \rightarrow H^q(M, S)$ a cada feixe S e cada inteiro q .

Exemplo 2.52. (O feixe dos germes de seções descontínuas de S). Seja S um feixe sobre M . Por seção descontínua de S sobre um aberto $U \subset M$ queremos dizer uma aplicação $f : U \rightarrow S$ contínua ou não, tal que $\pi \circ f = id$. Atribuindo a cada aberto $U \subset M$ o módulo das seções descontínuas de S sobre U temos um pré-feixe cujo feixe associado S_0 é chamado de feixe dos germes de seções descontínuas de S .

Lema 8. O feixe S_0 é fino para qualquer feixe S .

Demonstração. Para uma cobertura localmente finita $\{U_i\}_{i \in I}$ de M , escolha um refinamento $\{V_i\}_{i \in I}$ tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para cada $i \in I$. Associamos a cada ponto $x \in M$ um conjunto V_i onde $x \in V_i$ para algum (não necessariamente único) i . Então definimos uma função sobre M , dada por $\varphi_j(x) = 1$ caso $j=i$, e 0 caso contrário. Segue que o $supp \varphi_i \subset U_i$ e $\sum \varphi_i \equiv 1$. Associamos com φ_i um endomorfismo $\bar{l}_i$ do pré-feixe de seções descontínuas de S definindo:

$$\bar{l}_i(s)(m) = \varphi_i(m)s(m)$$

para cada seção descontínua s de S sobre um aberto $U \subset M$ e cada $m \in M$. O endomorfismo de pré-feixes $\bar{l}_i$ induz um endomorfismo l_i do feixe S_0 das seções descontínuas de S . É imediato que $\{l_i\}$ forma uma partição da unidade de S_0 subordinada à cobertura localmente finita $\{U_i\}$ de M . Assim S_0 é um feixe fino, como o desejado.

□

Observação 2.53. Existe uma injeção natural de S em S_0 , a saber, cada elemento do talo S_m é o valor de m de uma seção s de S definida em alguma vizinhança de m e levamos $s(m)$ ao germe de s em m dentro de S_0 . Se denotarmos $\bar{S}$ o feixe quociente S_0/S então para cada feixe S , construímos uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow S \rightarrow S_0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow 0$$

E cada feixe intermediário é um feixe fino.

Teorema 2.54. Sejam H e H' duas teorias cohomológicas de feixes sobre M com coeficientes no feixe de K -módulos sobre m . Então existe um único homomorfismo de H em H' .

Demonstração. Mostremos a unicidade inicialmente. Suponha que tenhamos um homomorfismo de H em H' e seja S um feixe dado. Segue dos axiomas de teoria de feixes e da existência do homomorfismo entre teorias, aplicado à sequência $0 \rightarrow S \rightarrow S_0 \rightarrow \bar{S} \rightarrow 0$ no qual o feixe S_0 é fino, que temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(S_0) & \longrightarrow & \Gamma(\bar{S}) & \longrightarrow & H^1(M, S) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow & & \\
\Gamma(S_0) & \longrightarrow & \Gamma(\bar{S}) & \longrightarrow & \bar{H}^1(M, S) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

E para cada $q \geq 2$ temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^{q-1}(M, \bar{S}) & \longrightarrow & H^q(M, S) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \bar{H}^{q-1}(M, S) & \longrightarrow & \bar{H}^q(M, \bar{S}) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Em ambos os diagramas acima as sequências são exatas. Agora da unicidade dos homomorfismos $H^q(M, S) \rightarrow H'^q(M, S)$ segue para $q = 0$ e segue imediatamente que 2.50(a) é satisfeito para o caso $q = 0$. Definimos os homomorfismos 2.50(a) para $q = 1$ e indutivamente para $q > 1$. Para provar que isto de fato define um homomorfismo de H para H' resta mostrar que 2.50(b) se mantém para $q > 0$ e que 2.50(c) se mantém para todo q . Agora para $q = 1$ do seguinte diagrama construído a partir de duas cópias de

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(S_0) & \longrightarrow & \Gamma(\bar{S}) & \longrightarrow & H^1(M, S) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow & & \\
\Gamma(S_0) & \longrightarrow & \Gamma(\bar{S}) & \longrightarrow & \bar{H}^1(M, S) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

temos o seguinte diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(\bar{S}) & \longrightarrow & H^1(M, S) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
& & \Gamma(\bar{S}) & \longrightarrow & H^1(M, F) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(\bar{F}) & \longrightarrow & \bar{H}^1(M, \bar{S}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
& \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\
& & \Gamma(\bar{F}) & \longrightarrow & \bar{H}^1(M, F) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \dots
\end{array}$$

No diagrama acima, a comutatividade segue do face do lado direito que é forçada a priori das outras faces e 2.50(b) segue por indutividade para $q > 1$ de construção análoga. Como para 2.50(c) suponha que a sequência exata curta

$$0 \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow F \rightarrow 0$$

é dada. Seja R_0 e S_0 o feixe de germes de seções descontínuas de R e S respectivamente. A composição $R \rightarrow S \rightarrow S_0$ é uma injeção de R em S_0 . Seja G o feixe quociente S_0/R . Seja $\bar{R} = R_0/R$. Então existem homomorfismos unicamente determinados $F \rightarrow G$ e $\bar{R} \rightarrow G$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & S & \longrightarrow & F \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & S_0 & \longrightarrow & G \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow id & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & R_0 & \longrightarrow & \bar{R} \longrightarrow 0
\end{array}$$

Segue dos axiomas de cohomologia aplicados ao diagrama anterior que existem diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \longrightarrow & \Gamma(S) & \longrightarrow & \Gamma(F) & \longrightarrow & H^1(M, R) \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dots & \longrightarrow & \Gamma(S_0) & \longrightarrow & \Gamma(G) & \longrightarrow & H^1(M, R) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dots & \longrightarrow & \Gamma(R_0) & \longrightarrow & \Gamma(\bar{R}) & \longrightarrow & H^1(M, R) \longrightarrow 0
\end{array}$$

e (para $q \geq 1$) temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H^q(M, S) & \longrightarrow & H^q(M, F) & \longrightarrow & H^{q+1}(M, R) \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^q(M, G) & \xrightarrow{\cong} & H^{q+1}(M, R) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow id \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^q(M, \bar{R}) & \xrightarrow{\cong} & \bar{H}^{q+1}(M, R) \longrightarrow 0
\end{array}$$

Assim vemos que o homomorfismo $H^0(M, F) \rightarrow H^1(M, R)$ é a seguinte composição:

$$H^0(M, F) \xrightarrow{\cong} \Gamma(F) \rightarrow \Gamma(G)/\text{Im}\Gamma(S_0) \xrightarrow{\cong} \Gamma(\bar{R})/\text{Im}\Gamma(R_0) \xrightarrow{\cong} H^1(M, R).$$

Segue do diagrama anterior que o homomorfismo $H^0(M, F) \rightarrow H^{q+1}(M, R)$ para $q \geq 1$ é a composição:

$$H^q(M, F) \rightarrow H^q(M, G) \xrightarrow{\cong} H^q(M, \bar{R}) \rightarrow H^{q+1}(M, R).$$

Portanto temos que a sequência correspondente para a teoria H' com o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^0(M, F) & \longrightarrow & \Gamma(F) & \longleftarrow & \Gamma(G)/\text{Im}\Gamma(S_0) & \longleftarrow & \Gamma(\bar{R})/\text{Im}\Gamma(R_0) & \longrightarrow & H^1(M, R) \\
\downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow id \\
\bar{H}^0(M, F) & \longrightarrow & \Gamma(F) & \longrightarrow & \Gamma(G)/\text{Im}\Gamma(S_0) & \longleftarrow & \Gamma(\bar{R})/\text{Im}\Gamma(R_0) & \longrightarrow & \bar{H}^1(M, R)
\end{array}$$

no qual o primeiro e o último quadrado comutam pelas definições de homomorfismos $H^0(M, F) \rightarrow \bar{H}^0(M, F)$ e $H^1(M, R) \rightarrow \bar{H}^1(M, R)$ e os dois quadrados médios comutam trivialmente. Assim 2.50 (c) está provado para $q = 0$. De $H^q(M, F) \rightarrow H^q(M, G) \xrightarrow{\cong} H^q(M, \bar{R}) \rightarrow H^{q+1}(M, R)$ e a sequência correspondente para a teoria H' obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
H^q(M, F) & \longrightarrow & H^q(M, G) & \longleftarrow & H^q(M, \bar{R}) & \longrightarrow & H^{q+1}(M, R) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bar{H}^q(M, F) & \longrightarrow & \bar{H}^q(M, G) & \longleftarrow & \bar{H}^q(M, \bar{R}) & \longrightarrow & \bar{H}^{q+1}(M, R)
\end{array}$$

onde o último quadrado comuta por definição de homomorfismo $H^{q+1}(M, R) \rightarrow \bar{H}^{q+1}(M, R)$ e os dois primeiros comutam por 2.50(b). Assim 2.50(c) segue para $q \geq 1$ e a prova do teorema está completa.

□

Corolário 2.55. Um homomorfismo de teorias de cohomologia H para $\bar{H}$ deve ser necessariamente um isomorfismo. Consequentemente quaisquer duas teorias de cohomologia em M coeficientes no feixe de K -módulos sobre M , são unicamente isomorfas.

Demonstração. Assuma que um homomorfismo $H \rightarrow \bar{H}$ é dado. Pelo teorema anterior, deve existir um homomorfismo $\bar{H} \rightarrow H$. A composição $\bar{H} \rightarrow H \rightarrow \bar{H}$ deve ser necessariamente a identidade por causa da unicidade e similarmente $H \rightarrow \bar{H} \rightarrow H$ deve ser também o homomorfismo identidade. Segue que ambos os homomorfismos $H \rightarrow \bar{H}$ e $\bar{H} \rightarrow H$ devem ser isomorfismos. □

Assuma que

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C_1 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{K} & \longrightarrow & \bar{C}_0 & \longrightarrow & \bar{C}_1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

é um diagrama comutativo no qual as linhas são resoluções finas e livre de torção do feixe constante $\mathcal{K}$. Já vimos que cada uma dessas resoluções determinam uma teoria de cohomologia. Denote a teoria de cohomologia obtida da resolução de cima por H e a segunda resolução por $\bar{H}$. Afirmamos que o "homomorfismo" entre essas duas resoluções finas e livre de torção induzem canonicamente um homomorfismo, e portanto, pela corolário imediatamente anterior induz um isomorfismo $H \rightarrow \bar{H}$. Para cada feixe S , o diagrama acima induz uma aplicação de cocadeia $\Gamma(C^* \otimes S) \rightarrow \Gamma(\bar{C}^* \otimes S)$ do qual obtemos um homomorfismo $H^q(M, S) \rightarrow \bar{H}^q(M, S)$ para cada inteiro q . Os axiomas 2.50 (a),(b) e (c) para teorias de cohomologias são satisfeitos. Este procedimento para obter um homomorfismo de teoria de cohomologia será usado adiante para obter um isomorfismo explícito da teoria de cohomologia de De Rham e a teoria de cohomologia singular para uma variedade diferenciável M .

Teorema 2.56. Assuma que H é uma teoria de cohomologia para M com coeficientes no feixe de K -módulos sobre M . Seja

$$0 \rightarrow S \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow \dots$$

uma resolução fina do feixe S . Então existem isomorfismos canônicos

$$H^q(M, S) \simeq H^q(\Gamma(C^*))$$

para todo q .

Demonstração. A partir da exatidão de $0 \rightarrow S \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2$ segue que $0 \rightarrow \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(C_0) \rightarrow \Gamma(C_1)$ é exata. Assim $H^0(M, S) \simeq \Gamma(S) \simeq H^0(\Gamma(C^*))$. Agora seja K_q o núcleo de $C_q \rightarrow C_{q+1}$ para $q \geq 1$. Então a exatidão de $0 \rightarrow S \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2$ implica que

$$0 \rightarrow K_q \rightarrow C_q \rightarrow K_{q+1} \rightarrow 0$$

é exata para $q \geq 1$ e que

$$0 \rightarrow S \rightarrow C_0 \rightarrow K_1 \rightarrow 0$$

é exata. Segue de sequência cohomológica longa para $0 \rightarrow K_q \rightarrow C_q \rightarrow K_{q+1} \rightarrow 0$ e do fato de C_0 é um feixe fino que

$$H^q(M, S) \simeq H^{q+1}(M, K_1)$$

para $q > 1$.

$$H^1(M, S) \simeq \Gamma(K_1)/\text{Im}\Gamma(C_0) \simeq H^1(\Gamma(C^*))$$

por repetidas aplicações da sequência longa exata associada com $0 \rightarrow K_q \rightarrow C_q \rightarrow K_{q+1} \rightarrow 0$ e do fato que os feixes C_i são finos, obtemos para $q > 1$

$$H^q(M, S) \simeq H^{q-1}(M, K_1) \simeq H^{q-2}(M, K_2) \simeq H^{q-2}(M, K_3) \simeq \dots \simeq H^1(M, K_{q-1})$$

$$\Gamma(K_q)/\text{Im}\Gamma(C_{q-1}) \simeq H^q\Gamma(C^*)$$

□

Proposição 2.57. Seja $\{F(U); \rho_{U,V}\}$ um pré-feixe satisfazendo C_2 e seja $\mathcal{S}$ o feixe associado. Considere

$$(S_M)_0 = \{s \in S_M : \rho_{m,M}(s) = 0 \text{ para todo } m \in M\}.$$

Então a sequência

$$0 \rightarrow (S_M)_0 \rightarrow S_M \xrightarrow{\lambda} \Gamma(\mathcal{S}) \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. λ será o homomorfismo que envia $s \in S_M$ à seção global $m \mapsto \rho_{m,M}(s)$ de $\mathcal{S}$. A exatidão em S_M é clara pela definição de $(S_M)_0$. Assim precisamos provar que λ é sobrejetivo.

Seja $t \in \Gamma(\mathcal{S})$, sabemos que existe uma cobertura aberta localmente finita $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M e existem elementos $s_\alpha \in S_{U_\alpha}$ tais que

$$\lambda(s_\alpha) = t|_{U_\alpha}$$

Seja $\{V_\alpha\}$ um refinamento tal que $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$. Seja I_m a coleção finita de todos os índices α para os quais $m \in \bar{V}_\alpha$. Seja W_m uma vizinhança de m tal que

- (a) $W_m \cap \bar{V}_\beta = \emptyset$ se $\beta \notin I_m$,
- (b) $W_m \subset \bigcap_{\alpha \in I_m} U_\alpha$,
- (c) Se $\alpha, \alpha' \in I_m$ então $\rho_{W_m, U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{W_m, U_{\alpha'}}(s_{\alpha'})$.

Seja $s_m \in S_{W_m}$ a imagem dos elementos em (c). Então para todo $n, m \in M$ temos

$$\rho_{W_n \cap W_m, W_m}(s_m) = \rho_{W_n \cap W_m, W_n}(s_n).$$

De fato, tome $p \in W_m \cap W_n$. Então segue de (a) que $I_p \subset I_m \cap I_n$. Assim seja $\alpha \in I_p$, logo temos

$$s_m = \rho_{W_n, U_\alpha}(s_\alpha)$$

e

$$s_n = \rho_{W_n, U_\alpha}(s_\alpha)$$

e, de acordo com (c), temos

$$\rho_{W_n \cap W_m, W_m}(s_m) = \rho_{W_n \cap W_m, U_\alpha}(s_\alpha) = \rho_{W_n \cap W_m, W_n}(s_n)$$

o que prova que $\rho_{W_n \cap W_m, W_m}(s_m) = \rho_{W_n \cap W_m, W_n}(s_n)$.

Segue dessa igualdade e da hipótese C_2 que existe um elemento $s \in S_M$ tal que

$$\rho_{W_m, M}(s) = s_m$$

e portanto $\lambda(s) = t$.

□

Consideraremos agora diferentes teorias de cohomologia de feixes para uma variedade diferenciável M , que serão unicamente isomorfas. Devemos também definir as versões clássicas dessas teorias e provar que estas são canonicamente isomorfas com a teoria de cohomologia com coeficientes em feixes constantes.

TEORIAS CLÁSSICAS DE COHOMOLOGIA

3.1 Teoria da Cohomologia de De Rham

Seja $U \subset M$ um conjunto aberto. Já vimos que o conjunto das k -formas diferenciais sobre U formam um espaço vetorial real $\Omega^k(U)$.

Lema 9. O conjunto $\{\Omega^k(U); \rho_{U,V}\}$, onde $\rho_{U,V} := \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^k(V)$ para todo aberto $V \subset U$, é um pré-feixe completo sobre a variedade diferenciável M .

Demonstração. Claramente o conjunto é um pré-feixe. Primeiro mostremos que dados $f, g \in \Omega^k(U)$ tais que $\rho_{U_\alpha, U} f = \rho_{U_\alpha, U} g$ para todo α onde $U = \cup_\alpha U_\alpha$, então $f = g$. De fato, como $\rho_{U_\alpha, U} f = f|_{U_\alpha}$ e $\rho_{U_\alpha, U} g = g|_{U_\alpha}$ e por hipótese $g|_{U_\alpha} = f|_{U_\alpha}$ para todo α , temos que $f = g$. Agora seja $f_\alpha \in \Omega^k(U_\alpha)$ tal que para cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ temos que

$$\rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta} f_\alpha = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta, U_\beta} f_\beta$$

para todo α e β . Definimos f como sendo $f_\alpha(x)$ para $x \in U_\alpha$. Claramente o aplicação está bem definido, porém resta mostrar que $f \in \Omega^k(U)$. Lembrando que $\Omega^k(U)$ é definido como sendo $\Gamma(\Lambda^k(T_*M))$ então se π é a projeção de $\Lambda^k(T_*M)$ temos que $\pi \circ f_\alpha = id$. Assim rapidamente vemos que $\pi \circ f = id$ e portanto $f \in \Omega^k(U)$.

□

Do operador de derivação exterior d obtemos para todo $p \geq 0$ o homomorfismo de pré-feixes

$$\{\Omega^k(U); \rho_{U,V}\} \xrightarrow{d} \{\Omega^{k+1}(U); \rho_{U,V}\}$$

Denotaremos o feixe de germes associados as k -formas diferenciais por $\mathcal{E}^k(M)$ e manteremos o símbolo d para os homomorfismos de feixes induzidos por $\{\Omega^k(U); \rho_{U,V}\} \xrightarrow{d} \{\Omega^{k+1}(U); \rho_{U,V}\}$.

O feixe constante $\mathcal{R} = M \times \mathbb{R}$ pode ser naturalmente injetado em $\mathcal{E}^0(M)$ mandando $a \in \mathcal{R}_m$ para o germe em m da função com valor constante a . Assim temos uma sequência:

$$0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3(M) \xrightarrow{d} \dots \quad (3.1)$$

Observação 3.1. A coleção de homomorfismos h_k no lema de Poincaré é um exemplo de uma ferramenta muito útil na teoria de cohomologias de cocadeias complexas, chamado operador homotópico. Eles surgem naturalmente na seguinte situação: Suponha que temos duas aplicações de cocadeias chamados f e g entre as cocadeias complexas C^* e D^* e suponhas que queremos mostrar que f e g ambos induzem o mesmo homomorfismo de módulos de cohomologia. Seguirá que se pudermos encontrar operadores homotópicos para f e g , a saber, operadores

$$h_k : C^k \rightarrow D^{k-1}$$

tais que

$$h_{k-1} \circ d + d \circ h_k = f_k - g_k$$

sobre C^k (onde d indica o operador de cobordo em ambos C^* e D^*) pois então se $\sigma \in C^k$ é um cociclo, então temos que $f_k(\sigma) = g_k(\sigma)$ a menos de cobordo, assim $f_k(\sigma)$ e $g_k(\sigma)$ moram na mesma classe de cohomologia. No lema de Poincaré, encontramos operadores homotópicos (para $k \geq 1$) entre o aplicação de cocadeias identidade de cocadeias complexas

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d} \Omega^1(U) \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \xrightarrow{d} \Omega^3(U) \xrightarrow{d} \dots$$

E o aplicação zero de cocadeias, com U sendo uma bola aberta no espaço euclidiano. Consequentemente, todos os grupos de cohomologia deste aplicação de cocadeias se anulam para $k \geq 1$.

Proposição 3.2. A sequência acima $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3(M) \xrightarrow{d} \dots$ é uma resolução fina e livre de torção do feixe constante $\mathcal{R}$.

Demonstração. Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura localmente finita para M e seja $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ uma partição da unidade subordinada à esta cobertura. Obtemos endomorfismos $\bar{l}_i$ do pré-feixe $\{\Omega^k(U); \rho_{U,V}\}$ fazendo

$$\bar{l}_i(f) = (\varphi_i|_U) \cdot f$$

para $f \in \Omega^k(U)$. Os endomorfismos de feixes associados l_i de $\mathcal{E}^k(M)$ formam uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ de M . Assim os feixes $\mathcal{E}^k(M)$ são todos finos. Eles são livres de torção desde que são feixes de espaços vetoriais reais. A sequência em questão

é claramente exata em $\mathcal{R}$ e em $\mathcal{E}^0(M)$. Desde que o operador de derivação exterior satisfaz $d \circ d = 0$, o mesmo é verdade para os homomorfismos de feixes na sequência. Assim a imagem de cada homomorfismo está contida no núcleo do próximo. Que a sequência é na realidade exata, e portanto, uma resolução, é consequência do seguinte corolário do lema de Poincaré: Sobre $\mathbb{R}^n$ ou qualquer domínio com forma-estrela, toda k -forma fechada é exata se $k \geq 1$.

□

Como $0 \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^3(M) \xrightarrow{d} \dots$ é exata, ela é portanto uma resolução fina e livre de torção do feixe constante $\mathcal{R}$. Utilizando os resultados da seção anterior, tal sequência dá origem a uma teoria de cohomologia para M com coeficientes no feixe de espaços vetoriais reais, estabelecendo:

$$H^q(M, F) = H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M) \otimes F))$$

para $q \geq 1$ e para F sendo um feixe de espaços vetoriais reais sobre M .

Se tomarmos F como sendo o feixe constante $\mathcal{R}$, então

$$H^q(M, R) = H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M) \otimes R)) \simeq H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M))).$$

Definição 3.3. Definimos os grupos de cohomologia de uma variedade diferenciável M são os módulos $H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M)))$.

Teorema 3.4. Existem isomorfismos $H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M))) \simeq H_{deR}^q(M)$ para todo q .

Demonstração. Considere a cocadeia complexa $\Gamma(\mathcal{E}^*(M))$:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^0(M)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^1(M)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^2(M)) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^3(M)) \rightarrow \dots$$

e a cocadeia complexa $\Omega^*(M)$:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \Omega^3(M) \xrightarrow{d} \dots$$

Lembre-se que para um pré-feixe completo $P = \{F(U); \rho_{U,V}\}$, temos que o pré-feixe $(\beta(\alpha(P)))$ é isomorfo a P . Fizemos isso construindo isomorfismos de pré-feixes $\{\varphi_U\}$ dados por

$$\varphi_U : F(U) \rightarrow \Gamma(\beta(P), U)$$

$$f \mapsto \rho_{m,U} f$$

No caso do pré-feixe $\{\Omega^k(U); \rho_{U,V}\}$ temos o seguinte

$$\varphi_U^q : \Omega^q(U) \rightarrow \Gamma(\mathcal{E}^q, U)$$

$$f \mapsto \rho_{m,U} f$$

são os isomorfismos. Resta mostrar que homomorfismos acima comutam com as cobordo das suas respectivas cocadeias complexas. Seja $f \in \Omega^q(M)$ então

$$\varphi_M^{q+1}(df) = p \mapsto \rho_{m,M} df$$

$$d(\varphi_M^q f) = d(p \mapsto \rho_{m,M} f) = p \mapsto \rho_{m,M} df$$

portanto $\{\varphi_M^q\}$ é um isomorfismo de cocadeias. Isto mostra existem isomorfismos canônicos

$$H^q(\Gamma(\mathcal{E}^*(M))) \simeq H^q((\Omega^*(M))).$$

Como $H^q(\Gamma(E^*(M)))$ é o clássico q -ésimo grupo de cohomologia de De Rham $H_{deR}^q(M)$ para M . Assim

$$H_{deR}^q(M) \simeq H^q(M, \mathbb{R}).$$

□

3.2 Teoria da Cohomologia Singular

Seja M uma variedade, $U \subset M$ um aberto e K um corpo. Lembremos que

$$\Delta_p = \{(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p; \sum_{i=1}^p a_i \leq 1 \text{ e cada } a_i \geq 0\}$$

é chamado p -simplex padrão para $\mathbb{R}^p$. Δ_0 é o espaço de um ponto $\{0\}$. Um p -simplex singular contínuo σ em U é uma aplicação contínua $\sigma : \Delta_p \rightarrow U$ e assim podemos definir um p -simplex diferenciável como sendo um p -simplex contínuo que pode ser estendido para uma vizinhança de Δ_p em U .

Definição 3.5. Definimos $S_p^\infty(U) = \{\sum_i n_i f_i : n_i \in \mathbb{Z}, f_i : \Delta_p \rightarrow U, f_i \text{ é de classe } C^\infty\}$ o grupo abeliano gerado pelos p -simplices C^∞ em U .

Definição 3.6. Definimos $S_p(U) = \{\sum_i n_i f_i : n_i \in \mathbb{Z}, f_i : \Delta_p \rightarrow U, f_i \text{ é contínua}\}$. Os elementos de $S_p(U)$ serão chamados de p -cadeias singulares com coeficientes inteiros.

Definição 3.7. Se σ é um p -simplex singular em U com $p \geq 1$, seu bordo é definido como sendo a $(p-1)$ -cadeia singular

$$\partial_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_{p-1}$$

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma^i$$

onde σ^i é a i -ésima face de σ .

Definição 3.8. Seja $S^p(U, K)$ o K -módulo das funções f que atribuem a cada p -simplex contínuo em U um elemento de K , ou seja, $S^p(U, K) = \text{Hom}(S_p(U), K)$. Tais funções f são chamadas p -cocadeias singulares. Multiplicação por escalar e adição no módulo $S^p(U, K)$ são definidas por

$$(kf)(\sigma) = k(f(\sigma))$$

$$(f + g)(\sigma) = f(\sigma) + g(\sigma).$$

Definição 3.9. Se $V \subset U$ seja:

$$\rho_{V,U} : S^p(U, K) \rightarrow S^p(V, K)$$

o homomorfismo que atribui a cada $f \in S^p(U, K)$ sua restrição aos p -simplices singulares que estão em V . Então

$$\{S^p(U, K); \rho_{V,U}\}$$

forma um pré-feixe chamado pré-feixe de p -cadeias singulares.

Proposição 3.10. O pré-feixe $\{S^p(U, K); \rho_{V,U}\}$ para $p \geq 1$ satisfaz o seguinte: Se $U = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$ e se $f_{\alpha} \in S^p(U_{\alpha}, K)$ e para cada $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ temos que

$$\rho_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}, U_{\beta}} f_{\alpha} = \rho_{U_{\alpha} \cap U_{\beta}, U_{\beta}} f_{\beta}$$

para todo α e β , então existe um elemento $f \in S^p(U, K)$ tal que $f_{\alpha} = \rho_{U_{\alpha}, U} f$ para todo α .

Demonstração. Basta definir $f(\sigma) = f_i(\sigma)$ se $\sigma \in S^p(U_{\alpha})$ e 0 caso contrário. $\square$

Observação 3.11. $\rho_{V,U} : S^p(U, K) \rightarrow S^p(V, K)$ não satisfaz C_1 , porém o pré-feixe $\{S^0(U, K); \rho_{V,U}\} \simeq \{A^0(U, K); \rho_{V,U}\}$ é completo.

Definição 3.12. Para $p \geq 1$ seja $S_{\infty}^p(U, K)$ o K -módulo consistindo das funções f que atribuem a cada p -simplex diferenciável em U um elemento de K , ou seja, $S_{\infty}^p(U, K) = \text{Hom}(S_p^{\infty}(U), K)$. Os elementos $f \in S^p(U, K)$ serão chamados de p -cocadeias singulares diferenciáveis sobre U .

Definição 3.13. Com os homomorfismos de restrição definidos como $\rho_{V,U} : S_{\infty}^p(U, K) \rightarrow S_{\infty}^p(V, K)$ obtemos o pré-feixe

$$\{S_\infty^p(U, K); \rho_{V, U}\}$$

de p-cocadeias singulares diferenciáveis sobre U .

O desenvolvimento das teorias de cohomologias singulares diferenciáveis e a teoria de cohomologias singulares contínuas são próximas, devemos primeiramente discutir o caso contínuo. Tenha em mente que uma construção análoga se aplica se $S_\infty^p(U, K)$. Quando diferenças substanciais surgirem elas serão discutidas.

Definição 3.14. Um homomorfismo de cobordo

$$d : S^p(U, K) \rightarrow S^{p+1}(U, K)$$

é definido estabelecendo

$$df(\sigma) := f(\partial\sigma)$$

para $f \in S^p(U, K)$ e para σ um $(p+1)$ -simplex singular em U .

Observação 3.15. Como $\partial \circ \partial = 0$ temos $d \circ d = 0$.

Desde que d comuta com os homomorfismo de restrição, d induz um homomorfismo de pré-feixes

$$\{S^p(U, K); \rho_{V, U}\} \xrightarrow{d} \{S^{p+1}(U, K); \rho_{V, U}\}$$

E ao mesmo tempo, em vista de $d \circ d = 0$, d faz com que

$$\dots \rightarrow S^0(U, K) \xrightarrow{d} S^1(U, K) \xrightarrow{d} S^2(U, K) \xrightarrow{d} S^3(U, K) \xrightarrow{d} S^4(U, K) \xrightarrow{d} \dots$$

seja uma cocadeia complexa (onde os módulos de cocadeias são zero para $q < 0$) o qual denotaremos por $S^*(U, K)$.

Denotaremos o feixe de germes associados de p-cocadeias singulares por $\mathcal{S}^p(M, K)$ (e $\mathcal{S}^p(M, K)$ no caso diferenciável) e manteremos d para denotar o homomorfismo de feixes induzido

$$\mathcal{S}^p(M, K) \rightarrow \mathcal{S}^{p+1}(M, K).$$

Observe que $S^0(M, K)$ é simplesmente o feixe de germes de funções sobre M com valores em K . O feixe constante $\mathcal{K}$ pode ser canonicamente injetado em $S^0(M, K)$ mandando $k \in \mathcal{K}_m$ no germe em m da funções sobre M com valor constante k . Assim temos a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^2(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^3(M, K) \xrightarrow{d} \dots$$

e uma sequência análoga com $\mathcal{S}_\infty^p(M, K)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}_\infty^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_\infty^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_\infty^2(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_\infty^3(M, K) \xrightarrow{d} \dots$$

com $p \geq 1$.

Proposição 3.16. As sequências

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^2(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^3(M, K) \xrightarrow{d} \dots$$

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}_\infty^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_\infty^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_\infty^2(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}_\infty^3(M, K) \xrightarrow{d} \dots$$

são resoluções finas e do feixe constante $\mathcal{K}$.

Demonstração. Que os feixes $\mathcal{S}^p(M, K)$ e $\mathcal{S}_\infty^p(M, K)$ são livres de torção para todo p é uma consequência do fato que eles são feixes de germes de certos tipos de funções com valores em K e K é um corpo. Para ver que os feixes $\mathcal{S}^0(M, K)$ e $\mathcal{S}_\infty^0(M, K)$ para $p \geq 1$ são todos feixes finos, tome uma cobertura localmente finita $\{U_i\}$ de M no qual as funções φ_i tomam valores 0 ou 1 somente. Para cada i , definimos um endomorfismo $\bar{l}_i$ de $\mathcal{S}^p(U, K)$ estabelecendo:

$$\bar{l}_i(f)(\sigma) = \varphi_i(\sigma(0))f(\sigma)$$

onde se $q \geq 1$ então 0 denota a origem de $\mathbb{R}^p$. Os endomorfismos $\bar{l}_i$ comutam com as restrições, ou seja, $\rho_{U,V} \circ \bar{l}_i = \bar{l}_i \circ \rho_{U,V}$ e assim determinam um endomorfismo de pré-feixes de $\{\mathcal{S}^p(U, K); \rho_{V,U}\}$. Seja $l_i : \mathcal{S}^p(M, K) \rightarrow \mathcal{S}^p(M, K)$ o endomorfismo de feixes associado com $\bar{l}_i$. Mostremos que $\{l_i\}$ formam uma partição da unidade. Para todo $f \in \mathcal{S}^p(U, K)$ e $\sigma \in \mathcal{S}^p(U)$ temos

$$\begin{aligned} \sum_i l_i \circ \rho_{m,U} f(\sigma) &= \sum_i \rho_{m,U} \bar{l}_i f(\sigma) = \rho_{m,U} \varphi_i(\sigma(0)) f(\sigma) = \rho_{m,U} f(\sigma) \sum_i (\varphi_i \sigma(0)) = \\ &= \rho_{m,U} f(\sigma) \end{aligned}$$

que implica que $\sum_i l_i = 1$. Agora tome $m \in M$ com $m \notin U_i$ e mostremos que $l_i|_{\mathcal{S}^p(M, K)_m} = 0$ que provará que $\{l_i\}$ é uma partição da unidade. Escolha uma vizinhança tal que $U \cap \text{supp}(\varphi_i) = \emptyset$. Como $\varphi(0) \in U$ então $\varphi(0) \notin \text{supp}(\varphi_i)$ e portanto

$$(l_i \circ \rho_{m,U})f(\sigma) = \rho_{m,U} \varphi_i(\sigma(0))f(\sigma) = 0$$

Assim os feixes $\mathcal{S}^p(M, K)$ (similarmente $\mathcal{S}_\infty^p(M, K)$) são feixes finos.

Lema 10. A sequência $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^2(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^3(M, K) \xrightarrow{d} \dots$ é exata em $\mathcal{S}^0(M, K)$.

Demonstração. Primeiro mostremos que $\mathcal{K}$ está contido no núcleo de d . Lembre-se que homomorfismos de feixes são definidos em cada talo e assim precisamos verificar somente no nível de talos. Seja $f \in \mathcal{S}^0(M, K)_m$ um elemento da imagem de $\mathcal{K}$ e $f' \in S^0(U, K)$ tal que $\rho_{m,U} f' = f$. Para todo 1-simplex singular σ em U temos que

$$d(f'(\sigma)) = f'(\sigma^0 - \sigma^1) = f'(\sigma^0) - f'(\sigma^1).$$

Como f é um germe de uma função constante, f' é uma função constante. Como σ^0 e σ^1 são p-simplices, podemos indentificá-los como pontos e concluir que $d(f'(\sigma)) = 0$. Assim $f \in \ker(d)$. Agora tome $f \in \mathcal{S}^0(M, K)_m$ no núcleo de d e $f' \in S^0(K, U)$ tal que $\rho_{m,U} f' = f$. Então $df' = 0$ e $f'(\sigma^0) = f'(\sigma^1)$ para todos 1-simplices σ .

□

Lema 11. Na sequência $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^2(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^3(M, K) \xrightarrow{d} \dots$ o núcleo de d^p está contido na imagem de d^{p+1} .

Demonstração. Aqui faremos uso do fato que M é uma variedade e portanto localmente euclidi-ana. É suficiente assumir que U é uma bola aberta unitária em $\mathbb{R}^{\dim M}$. Seja $f \in (\mathcal{S}^p(M, K)_m)$ tal que $df = 0$ e $f' \in S^p(M, K)$ tal que $\rho_{m,U} f' = f$, assim $df' = 0$. Se pudermos encontrar $g \in S^{p-1}(U, K)$ tal que $dg = f$ concluiríamos que $d(\rho_{m,U} g) = f$. Para encontrar g , construiremos operadores homotópicos para $p \geq 1$ da forma

$$h_p : S^p(U, K) \rightarrow S^{p-1}(U, K)$$

tais que

$$d \circ h_p + h_{p+1} \circ d = id.$$

Neste momento, assuma que tenhamos tais operadores, logo concluiríamos que

$$f' = d(h_p f') + h_{p+1}(df') = d(h_p f')$$

e assim $f' \in \text{im}(d)$. Que concluiria a prova. Para encontrar os operadores h_p definiremos operadores $\bar{h}_p$ tais que

$$id = \partial \circ \bar{h}_{p+1} + \bar{h}_p \circ \partial$$

□

Lema 12. As aplicações $\bar{h}_p : S_{p-1}(U) \rightarrow S_p(U)$ dadas por

$$\bar{h}_p(\sigma)(a_1, \dots, a_p) = \left(\sum_{i=1}^p a_i \right) \cdot \sigma \left(\frac{a_2}{\sum_{i=1}^p a_i}, \dots, \frac{a_p}{\sum_{i=1}^p a_i} \right)$$

satisfazem

$$id = \partial \circ \bar{h}_{p+1} + \bar{h}_p \circ \partial$$

para qualquer p-simplex σ e $(a_1, \dots, a_p) \neq 0$.

Demonstração. Geometricamente $\bar{h}_p(\sigma)$ é o cone em U obtido ligando σ radialmente à origem. Primeiro devemos mostrar que o aplicação $\bar{h}_p(\sigma)$ está bem definido. Para qualquer ponto $(a_1, \dots, a_p) \neq 0$ temos $\frac{a_2}{\sum_{i=1}^p a_i} + \dots + \frac{a_p}{\sum_{i=1}^p a_i} \leq 1$ assim $\sigma(\frac{a_2}{\sum_{i=1}^p a_i}, \dots, \frac{a_p}{\sum_{i=1}^p a_i})$ é bem definido. Resta verificar que $\bar{h}_p(\sigma)$ é contínuo em zero. Como $\sigma(\frac{a_2}{\sum_{i=1}^p a_i}, \dots, \frac{a_p}{\sum_{i=1}^p a_i})$ é limitado, temos que $\lim_{a \rightarrow 0} \bar{h}_p(\sigma)(a) = 0$ e assim $\bar{h}_p$ é linear e pode ser estendido à um homomorfismo $S_{p-1} \rightarrow S_p$. Agora provemos o lemma. Seja $c = \sum_{i=1}^p a_i$. Temos que

$$\begin{aligned} (\bar{h}_p \circ \partial(\sigma))(a_1, \dots, a_p) &= c \cdot \partial \sigma(a_2/c, \dots, a_p/c) \\ &= c \cdot \sum_{i=0}^p (-1)^i (\sigma \circ k_i^{p-1})(a_2/c, \dots, a_p/c) \\ &= c \sigma \circ k_0^{p-1}(a_2/c, \dots, a_p/c) + c \sum_{i=1}^p (-1)^i (\sigma)(a_2/c, \dots, a_i/c, 0, a_{i+1}/c, \dots, a_p/c) \\ &= c \sigma \circ k_0^{p-1}(a_2/c, \dots, a_p/c) + c \sum_{i=2}^{p+1} (-1)^{i-1} (\sigma)(a_2/c, \dots, a_i/c, 0, a_{i+1}/c, \dots, a_p/c) \end{aligned}$$

por outro lado temos

$$\begin{aligned} (\partial \circ \bar{h}_p(\sigma))(a_1, \dots, a_p) &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \bar{h}_{p+1}(\sigma k_i^p)(a_1, \dots, a_p) \\ &= \bar{h}_{p+1}(\sigma)(a - c, a_1, \dots, a_p) + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i (\bar{h}_{p+1}(\sigma))(a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_i, \dots, a_p) \\ &= \bar{h}_{p+1}(\sigma)(a - c, a_1, \dots, a_p) + \bar{h}_{p+1}(\sigma)(0, a_1, \dots, a_p) \\ &\quad + c \cdot \sum_{i=2}^{p+1} (-1)^i (\sigma)(a_2/c, \dots, a_{i-1}/c, 0, a_i/c, \dots, a_p/c) \end{aligned}$$

Somando os termos até as somas se cancelarem, restará três termos que lidaremos com eles separadamente.

$$\begin{aligned}
 c\sigma \circ k_0^{p-1}(a_2/c, \dots, a_p/c) &= c\sigma\left(1 - \frac{\sum_{i=2}^p a_i}{\sum_{i=1}^p a_i}, a_2/c, \dots, a_p/c\right) \\
 &= c\sigma(a_1/c, \dots, a_p/c) - c\bar{h}_{p+1}(\sigma)(0, a_1, \dots, a_p) \\
 &= -c\sigma(a_1/c, \dots, a_p/c) \\
 &= \bar{h}_{p+1}(\sigma)(a - c, a_1, \dots, a_p) - \bar{h}_{p+1}(\sigma)(0, a_1, \dots, a_p) \\
 &= (a - c + c)(\sigma)(a_1, \dots, a_p) = \sigma(a_1, \dots, a_p)
 \end{aligned}$$

e portanto

$$id = \partial \circ \bar{h}_{p+1} + \bar{h}_p \circ \partial$$

□

Lema 13. Sejam f, g duas aplicações de cadeias de U^* para V^* tais que existe $h_p : V_p \rightarrow U_{p+1}$ cumprindo

$$\partial \circ h_{p+1} + h_p \circ \partial = f - g.$$

Então suas aplicações duais f^* e g^* satisfazem o mesmo, ou seja, existe $h_p^* : hom(U_{p+1}, K) \rightarrow hom(V_p, K)$ tais que

$$d \circ h_{p+1}^* + h_p^* \circ d = f^* - g^*$$

Como consequência do lema anterior, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.17. As aplicações $h_p : S^p(U, K) \rightarrow S^{p-1}(U, K)$ dadas por

$$h_p(f)(\sigma) = f(\bar{h}_p(\sigma))$$

satisfazem:

$$d \circ h_p + h_{p+1} \circ d = id$$

Observação 3.18. Existe um ponto onde o tratamento do caso contínuo não é suficiente para o caso diferenciável. Pois se σ é um $(p-1)$ -simplex singular diferenciável com $p \geq 2$ e se $\bar{h}_p(\sigma)$ é definido como acima, então $\bar{h}_p(\sigma)$ será contínuo mas não necessariamente diferenciável (existem problemas na origem). Por exemplo, se σ fosse um 1-simplex singular diferenciável em U então para $\bar{h}_p(\sigma)$ se estender e ser um aplicação suave na vizinhança da origem em $\mathbb{R}^2$ teria ao menos

que ter a imagem de σ contida em um plano bidimensional passando pela origem em U . Este não é o caso. O defeito é remediado pelo significado de "função suave". Denotemos por φ uma função real C^∞ sobre a linha real definida como segue. Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$$

que é uma função não-negativa, C^∞ e positiva para $t > 0$. Então a função

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}.$$

Então $\varphi(t)$ toma valores entre 0 e 1 e tem o valor 1 para $t \geq 1$ e o valor 0 para $t \leq 0$. Então se $p \geq 2$ e se σ é um $(p-1)$ simplex diferenciável definimos $\bar{h}_p(\sigma)$ por

$$\bar{h}_p(\sigma)(a_1, \dots, a_n) = \varphi\left(\sum_{i=1}^p a_i\right) \cdot \sigma(a_2 / \sum_{i=1}^p a_i, \dots, a_p / \sum_{i=1}^p a_i)$$

onde assumimos novamente que $\bar{h}_p(\sigma)$ leva a origem de Δ^p na origem de U . Agora extensa σ para ser diferenciável em todo $\mathbb{R}^{p-1}$ tal que σ e cada uma das suas derivadas seja limitada. Então $\bar{h}_p(\sigma)$ leva qualquer ponto onde $\sum_{i=1}^p a_i = 0$ na origem de U . Além do mais, $\bar{h}_p(\sigma)$ é diferenciável de classe C^∞ em todo $\mathbb{R}^p$. Os únicos pontos onde problemas surgem são aqueles nos quais $\sum_{i=1}^p a_i = 0$ e desde que $\varphi(t)$ e todas as suas derivadas se anulam mais rápido do que qualquer polinômio em t quando $t \rightarrow 0$ e desde que σ e cada uma das suas derivadas são limitadas em $\mathbb{R}^{p-1}$ segue que todas as derivadas de $\bar{h}_p(\sigma)$ de todas as ordens existem, são contínuas e zero nos pontos tais que $\sum_{i=1}^p a_i = 0$.

□

Definição 3.19. Ambas as resoluções de $\mathcal{K}$ para o caso contínuo e o diferenciável dão origem a teorias de cohomologias, que chamaremos módulos de cohomologia singular, se estabelecermos para cada inteiro q o seguinte

$$H^q(M, S) = H^q(\Gamma(\mathcal{S}^*(M, K) \otimes S))$$

$$H^q(M, S) = H^q(\Gamma(\mathcal{S}_\infty^*(M, K) \otimes S))$$

as quais, que serão unicamente isomorfas.

Definição 3.20. Seja G um K -módulo. Denotaremos $S^p(U, G)$ o K -módulo consistindo de todas as funções que atribuem a cada p -simplex singular um elemento de G . A cohomologia singular clássica de grupos de M com coeficientes em um K -módulo G são definidas no caso contínuo e diferenciável por:

$$H_\Delta^q(M, G) = H^q((S^*(M, G)))$$

$$H_{\Delta_\infty}^q(M, G) = H^q((S_\infty^*(M, G))$$

Mostraremos agora que os grupos clássicos de cohomologia singular são canonicamente isomorfos com o módulo de cohomologia de feixes $H^q(M, \mathcal{G})$. Para isso, precisamos de alguns resultados preliminares.

Definição 3.21. Seja $q \geq 1$, um p -simplex linear em Δ_q é um p -simplex da forma:

$$(a_1, \dots, a_p) \mapsto (1 - \sum_{i=1}^p a_i)v_0 + a_1v_1 + \dots + a_pv_p$$

($0 \mapsto v_0$ para $p = 0$) canonicamente determinado por sequências ordenadas de pontos $v_0, \dots, v_p \in \Delta_p$. Denotaremos esses p -simplex lineares por $(v_0, \dots, v_p)$. O grupo abeliano livre gerado por p -simplices lineares em Δ_q será denotado por $L_q(\Delta_q)$.

Observação 3.22. A aplicação identidade de Δ_q em si mesmo, é um q -simplex em Δ_q que denotaremos simplesmente por Δ_q .

Definição 3.23. O baricentro de um p -simplex singular linear $\sigma = (v_0, \dots, v_p) \in \Delta_q$ é o ponto

$$b_\sigma = \frac{v_0}{p+1} + \dots + \frac{v_p}{p+1}$$

.

Definição 3.24. Dado um p -simplex linear $\sigma = (v_0, \dots, v_p) \in \Delta_q$ e um ponto $v \in \Delta_q$ definiremos a ligação $v\sigma$ de v e σ sendo um $(p+1)$ -simplex linear $(v, v_0, \dots, v_p) \in \Delta_q$. A operação de ligação se estende por linearidade ao conjunto $L_q(\Delta_q)$.

Proposição 3.25. Se $p \geq 1$ então

$$\partial_p(v\sigma) = \sigma - v(\partial_p\sigma)$$

Demonstração. Dado $v = (v_1, \dots, v_p) \in \Delta_p$, durante a demonstração usaremos a notação $\partial_p(\sigma) = \sigma|_{[v_0, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_p]}$, onde σ é um p -simplex em M com $p \geq 1$.

Assim temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \partial_p(v\sigma) &= \sigma|_{[v_0, \dots, v_n]} + \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \sigma|_{[v, \dots, \bar{v}_{i-1}, \dots, v_n]} = \sigma - \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma|_{[v, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_p]} \\ &= \sigma - v \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \sigma|_{[v, \dots, \bar{v}_{i-1}, \dots, v_n]} \right) = v - v(\partial\sigma) \end{aligned}$$

□

Definição 3.26. Definimos homomorfismos de subdivisão $Sd_p : L_p(\Delta_q) \rightarrow L_p(\Delta_q)$ estabelecendo $Sd = id$ para $p = 0$ e estabelecendo

$$Sd_p = b_\sigma Sd_{p-1}(\partial\sigma)$$

para σ um p -simplex linear em Δ_q com $p \geq 1$ e estendendo linearmente para $L_p(\Delta_q)$. Definimos homomorfismos $R : L_p(\Delta_q) \rightarrow L_{p+1}(\Delta_q)$ estabelecendo $R = 0$ para $p = 0$ e estabelecendo

$$R(\sigma) = b_\sigma(\sigma - Sd_p(\sigma) - R(\partial\sigma))$$

para σ um p -simplex linear em Δ^q com $p \geq 1$ e estendendo por linearidade a $L_p(\Delta)$.

Proposição 3.27. Com as definições temos que

$$\partial \circ Sd_{p+1} = Sd_p \circ \partial$$

$$\partial \circ R + R \circ \partial = id - Sd$$

sobre $L_p(\Delta)$ com $p \geq 1$ (A coleção de módulos $L_p(\Delta)$ e homomorfismos $\partial : L_p(\Delta) \rightarrow L_{p-1}(\Delta)$ forma o que chamamos de cadeia complexa em contraste da cocadeia complexa nos quais os homomorfismos vão na direção contrária.

Demonstração. A primeira igualdade $\partial \circ Sd = Sd \circ \partial$ nos diz que a subdivisão Sd é um aplicação de cadeia, desta cadeia em si mesma. A segunda igualdade $\partial \circ R + R \circ \partial = id - Sd$ mostra que R é um operador homotópico para as aplicações de cadeia id e Sd , do qual segue que Sd induz o aplicação identidade sobre grupos homológicos $nuc(\partial)_p / Im \partial_{p+1}$ desta cadeia complexa. Usemos a indução. Para $p=0$, temos

$$(\partial \circ Sd_1)(\sigma) = \partial(b_\sigma \partial\sigma) = \partial\sigma - b_\sigma \partial^2\sigma = \partial\sigma = (Sd_0 \circ \partial)(\sigma)$$

agora, assuma que a equação se mantém para $p = n - 1$, então temos

$$\begin{aligned} \partial(Sd_{n+1}(\sigma)) &= \partial(b_\sigma Sd_n(\partial\sigma)) = Sd_n \partial\sigma - b_\sigma \partial(Sd_n(\partial\sigma)) = \\ &= Sd_n \partial\sigma - b_{Sd_{n-1}(\partial^2\sigma)} = Sd_n(\partial\sigma) \end{aligned}$$

para provar que $R(\sigma) = b_\sigma(\sigma - Sd_p(\sigma) - R(\partial\sigma))$ também o faremos por indução. Seja σ um 1-simplex em Δ_p . Então

$$(\partial \circ R_1)(\sigma) + (R_0 \circ \partial)(\sigma) = \partial(b_\sigma - b_\sigma Sd_1(\sigma)) + 0 = \sigma - b_\sigma(\partial\sigma) - Sd_1(\sigma) + b_\sigma(\partial \circ Sd_1\sigma) =$$

$$= \sigma - b_\sigma(\partial\sigma) - Sd_1(\sigma) + b_\sigma(Sd_0 \circ \partial\sigma) = \sigma - Sd_1(\sigma)$$

que prova a igualdade para $p=0$. Seja σ um p -simplex linear tal que a equação se mantém para $p=n-1$, assim temos

$$\begin{aligned} (\partial \circ R_{n+1})(\sigma) &= \partial(b_\sigma\sigma) - \partial(b_\sigma Sd_{n+1}) - \partial(b_\sigma Sd_n(\partial\sigma)) = \\ &= \sigma - (b_\sigma\partial\sigma) - Sd_{n+1}(\sigma) - b_\sigma(\partial Sd_n\sigma) - R_n(\partial\sigma) + b_\sigma(\partial R_n\partial\sigma) \end{aligned}$$

assim,

$$(\partial \circ R_{n+1})(\sigma) + R_n(\partial\sigma) = \sigma - Sd_{n+1}(\sigma) + b_\sigma(-\partial\sigma + \partial Sd_{n+1}\sigma + \partial R_n(\partial\sigma)).$$

Usando agora o fato que a equação se mantém para $p=n-1$, provemos que $-\partial\sigma + \partial Sd_{n+1}\sigma + \partial R_n(\partial\sigma) = 0$

$$-\partial\sigma + \partial Sd_{n+1}\sigma + \partial R_n(\partial\sigma) = -\partial\sigma + \partial Sd_{n+1}\sigma + \partial\sigma - Sd_{n-1}(\partial\sigma) - R_{n-1}\partial^2\sigma = 0$$

o que conclui a demonstração. □

Definição 3.28. Definimos homomorfismos $Sd : S_p(U) \rightarrow S_p(U)$ e $R : S_p(U) \rightarrow S_{p+1}(U)$ para $p \geq 1$ estabelecendo:

$$Sd(\sigma) = \sigma \circ Sd(\Delta^p)$$

$$R(\sigma) = \sigma \circ R(\Delta^p)$$

para um p -simplex singular em U e então estendendo por linearidade para $S_p(U)$.

Observação 3.29. Segue facilmente que as igualdades $\partial \circ Sd = Sd \circ \partial$ e $\partial \circ R + R \circ \partial = id - Sd$ se mantém em $S_p(U)$ para $p \geq 1$.

Observação 3.30. Seja $\sigma = (v_0, \dots, v_p) \in \Delta^q$ um p -simplex singular. Então o diâmetro de cada simplex de $Sd(\sigma)$ é no máximo $\frac{p}{p+1}$ vezes o diâmetro de σ pois o diâmetro de simplex linear σ é no máximo a distância entre qualquer dois dos vértices v_i , e ainda

$$\left| \frac{1}{k+1} \cdot (v_{i_0} + \dots + (v_{i_k})) - v_i \right| = \frac{1}{k+1} \left| \sum_{l=0}^k (v_{i_l} - v_i) \right| \leq \frac{k}{k+1} diam\sigma \leq \frac{p}{p+1} diam\sigma$$

Definição 3.31. Seja $\mathcal{U}$ uma cobertura aberta de M . Denotaremos por $(S_{\mathcal{U}}(U))_p$ o espaço dos p -cadeias singulares com valores em elementos da cobertura $\mathcal{U}$.

Lema 14. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}$ uma cobertura aberta para M . Seja $S_{\mathcal{U}}^*(M, G)$ o complexo de cocadeias singulares f com valores em G definidos somente em p -simplices singulares definidos em pequenas $\mathcal{U}$ -vizinhanças. Temos que a aplicação

$$j_{\mathcal{U}} : S^*(M, G) \rightarrow S_{\mathcal{U}}^*(M, G)$$

$$f \mapsto f|_U$$

induz isomorfismo em cohomologia.

Demonstração. Desde que estamos trabalhando com uma cobertura fixada $\mathcal{U}$ de M retiraremos o índice $\mathcal{U}$ de $j_{\mathcal{U}}$. Para provar que

$$j : S^*(M, G) \rightarrow S_{\mathcal{U}}^*(M, G)$$

induz isomorfismo nos módulos de cohomologia, construiremos uma aplicação de cocadeias

$$k : S_{\mathcal{U}}^*(M, G) \rightarrow S^*(M, G)$$

tal que

$$j \circ k = id$$

assim j deve induzir sobrejeções nos módulos de cohomologia, tais que existam operadores homotópicos

$$h_p : S^p(M, G) \rightarrow S^{p-1}(M, G)$$

para todo p , que satisfazem:

$$h_{p+1} \circ d + d \circ h_p = id - k_p \circ j_p.$$

Desse modo $k \circ j$ induziria a identidade em cohomologia implicando que j deve induzir injeções. As definições de h e k requerem um pouco de esforço. Seja $f \in S_{\mathcal{U}}^p(M, G)$ assim f está definido em somente vizinhanças contidas em $\mathcal{U}$ e queremos definir $k(f)$ para ser um elemento de $S^p(M, G)$, isto é, $k(f)$ deve estar definido em todos os p -simplices singulares. Definiremos uma operação de "subdivisão" para quebrar p -simplices singulares grandes em menores. Subdividindo qualquer p -simplex singulares muitas vezes, obtemos uma cadeia de $\mathcal{U}$ -vizinhanças nas quais

podemos então aplicar f . Assim definiremos $k(f)$ em um simplex singular maior para f estar definido nos menores. Simpleses que já estão em $\mathcal{U}$ -vizinhanças não precisarão ser subdivididos. A dificuldade está relacionada ao fato que o número de vezes que um p -simplex singular σ precisa ser subdividido a fim de se obter uma cadeia de $\mathcal{U}$ -vizinhanças pequenas depende de σ . Seja σ um p -simplex singular em M . A cobertura aberta $\sigma^{-1}(\mathcal{U})$ de Δ^p tem número de Lebesgue δ . Segue que para s suficientemente grande, o diâmetro de cada simplex em $(Sd)^s(\Delta^p)$ é menor que δ onde $(Sd)^s$ é s -ésima composição dele por ele mesmo. Assim cada p -simplex singular na cadeia $(Sd)^s(\sigma)$ mora em um elemento da cobertura $\mathcal{U}$. Agora tome $s(\sigma)$ como sendo o menor elemento dos inteiros positivos $s \geq 0$ tais que cada simplex de $(Sd)^s(\sigma)$ mora em elemento de $\mathcal{U}$. Então podemos definir homomorfismos

$$k_p : S^p_{\mathcal{U}}(M, G) \rightarrow S^p(M, G)$$

estabelecendo $k_p = id$ para $p \leq 0$ e para $p \geq 1$ fazendo

$$k_p(f)(\sigma) = f((Sd)^{s(\sigma)}(\sigma) + \sum_{j=-1}^p (-1)^j R(\sum_{s(\sigma^j) \leq i \leq s(\sigma)-1} (Sd)^i(\sigma^j)))$$

note que Sd criou uma potência negativa que é interpretada como sendo o homomorfismo nulo e $(Sd)^0 = id$. Também definimos homomorfismos

$$h_p : S^p(M, G) \rightarrow S^{p-1}(M, G)$$

estabelecendo $h_p = 0$ para $p \leq 1$ e

$$h_p(f)(\sigma) = f(R(\sum_{0 \leq i \leq s(\sigma)-1} (Sd)^i(\sigma)))$$

para $p \geq 2$. Finalmente o fato de que os homomorfismos k_p levam a uma aplicação de cocadeia $k : S^*(M, G) \rightarrow S^*_{\mathcal{U}}(M, G)$ segue de $h_{p+1} \circ d + d \circ h_p = id - k_p \circ j_p$. Ainda de $h_{p+1} \circ d + d \circ h_p = id - k_p \circ j_p$ obtemos

$$d \circ k_p \circ j_p = k_{p+1} \circ j_{p+1} \circ d$$

mas j é aplicação de cocadeia. Assim $d \circ k_p \circ j_p = k_{p+1} \circ d \circ j_p$. Desde que j é sobrejetivo segue que $d \circ k_p = k_{p+1} \circ d$. Isto completa a prova que j induz isomorfismos em cohomologia.

□

Teorema 3.32. $H^q((S^*_0(M, G))) = 0$ para todo q . (O caso diferenciável é idêntico).

Demonstração. A igualdade é trivialmente satisfeita se $q < 0$ desde que $S^*(M, G)$ são todos zero.

O módulo $S_0^0(M, G)$ também é zero desde que o pré-feixe $\{S^0(M, G); \rho_{U,V}\}$ é completo. Assim $H^0((S_0^*(M, G))) = 0$. Resta mostrar para $q \geq 1$.

Como cada elemento de $S^p(M, G)$ determina um elemento de $S_{\mathcal{U}}^p(M, G)$ por restrição aos simplices definidos em $\mathcal{U}$. Os homomorfismos de restrição

$$j_{\mathcal{U}} : S^p(M, G) \rightarrow S_{\mathcal{U}}^p(M, G)$$

levam a um aplicação de cocadeias

$$j_{\mathcal{U}} : S^*(M, G) \rightarrow S_{\mathcal{U}}^*(M, G).$$

Os núcleos dos homomorfismos $j_{\mathcal{U}}$ formam uma cocadeia complexa $K_{\mathcal{U}}^*$ tal que

$$0 \rightarrow K_{\mathcal{U}}^* \rightarrow S^*(M, G) \rightarrow S_{\mathcal{U}}^*(M, G) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de cocadeias complexas. O ingrediente chave na prova de $H^q((S_0^*(M, G))) = 0$ é o fato de que a aplicação de cocadeias $j_{\mathcal{U}}$ induz isomorfismos em cohomologia. Vamos assumir isto por um momento. Segue que

$$H^q(K_{\mathcal{U}}^*) = 0$$

para todo q . Agora seja $q \geq 1$ e seja f um cociclo em $S_0^q(M, G)$, isto é, $df = 0$. Então por definição de $S_0^q(M, G)$, existe uma cobertura $\mathcal{U}$ de M consistindo de conjuntos abertos suficientemente pequenos tais que $f \in K_{\mathcal{U}}^q$. Segue de $H^q(K_{\mathcal{U}}^*)$ que existe um elemento $g \in K_{\mathcal{U}}^{q-1} \subset S_0^{q-1}(M, G)$ tal que $dg = f$.

□

Corolário 3.33. $H^q(S^*(M, G)) \simeq H^q(\Gamma(\mathcal{S}^*(M, G)))$ e $H^q(S_{\infty}^*(M, G)) \simeq H^q(\Gamma(\mathcal{S}_{\infty}^*(M, G)))$.

Demonstração. Segue da proposição 3.68 que

$$0 \rightarrow S_0^*(M, G) \rightarrow S^*(M, G) \rightarrow \Gamma(S^*(M, G)) \rightarrow 0$$

é uma sequência exata de cocadeias complexas. Como $H^q((S_0^*(M, G))) = 0$ para todo q , segue de 3.57 que existem isomorfismo canônicos

$$H^q(S^*(M, G)) \simeq H^q(\Gamma(\mathcal{S}^*(M, G)))$$

$$H^q(S_{\infty}^*(M, G)) \simeq H^q(\Gamma(\mathcal{S}_{\infty}^*(M, G)))$$

□

Corolário 3.34. Se na construção da sequência $0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{S}^0(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^1(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^2(M, K) \xrightarrow{d} \mathcal{S}^3(M, K) \xrightarrow{d} \dots$ substituirmos K por G e $\mathcal{K} = M \times K$ por $\mathcal{G} = M \times G$ temos isomorfismos canônicos:

$$H_{\Delta}^q(M, G) \simeq H_{\Delta}^q(M, \mathcal{G}) \simeq H_{\Delta^{\infty}}^q(M, G).$$

3.3 Teoria da Cohomologia de Čech

Definição 3.35. Seja $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de M . Uma coleção $(U_0, \dots, U_q)$ de membros da cobertura tal que $(U_0 \cap \dots \cap U_q) \neq \emptyset$ será chamado de q -simplex. Chamaremos $|\sigma| := U_1 \cap \dots \cap U_p$ de suporte do p -simplex. A i -ésima face de um q -simplex $\sigma = (U_0, \dots, U_q)$ será o $(q-1)$ -simplex $\sigma^i = (U_0, \dots, U_{i-1}, U_{i+1}, \dots, U_q)$. Podemos associar à $\mathcal{U}$ um complexo simplicial abstrato $N(\mathcal{U})$ chamado de nervo de $\mathcal{U}$. As faces de $N(\mathcal{U})$ são os conjuntos $U_0, \dots, U_q$ com $U_0 \cap \dots \cap U_q \neq \emptyset$.

Definição 3.36. Seja F um feixe sobre uma variedade M . Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta localmente finita de M . Uma k -cocadeia de Čech é uma função f sobre as k -faces de $N(\mathcal{U})$ tal que o valor $f(\sigma)$ sobre a face $\sigma = (U_0, \dots, U_q)$ está em $F(|\sigma|)$. Assim o grupo de k -cocadeias é

$$C^k(\mathcal{U}, F) = \bigoplus_{i_0, \dots, i_k} F(|\sigma|)$$

Definição 3.37. Definimos o operador de cobordo d que envia $(k-1)$ -cocadeias em k -cocadeias fazendo

$$d_{k-1} : C^{k-1}(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^k(\mathcal{U}, F)$$

do seguinte modo: Seja $f \in C^{k-1}(\mathcal{U}, F)$ então

$$d_{k-1}f(\sigma) = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \rho_{|\sigma|, |\sigma^j|} f(\sigma^j)$$

Teorema 3.38. $d_{q+1} \circ d_q = 0$

Demonstração. Seja σ um $(q+2)$ -simplex e f uma q -cocadeia. Usaremos a seguinte notação:

$$(\sigma^i)^j = \sigma^{i,j} = \begin{cases} (U_0, \dots, \check{U}_i, \dots, \check{U}_{j+1}, \dots, U_q) & \text{se } j \geq i \\ (U_0, \dots, \check{U}_j, \dots, \check{U}_i, \dots, U_q) & \text{se } j < i \end{cases}$$

Pode-se verificar que se $j \geq i$ temos $\sigma^{i,j} = \sigma^{j+1,i}$ e se $j < i$ $\sigma^{i,j} = \sigma^{j,i-1}$

$$\begin{aligned}
d_{q+1}(d_q(f(\sigma))) &= \sum_{i=0}^{q+2} (-1)^i \rho_{|\sigma|, |\sigma^j|} \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \rho_{|\sigma|, |\sigma^{i,j}|} f(\sigma^{i,j}) \\
&= \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^{i+j} \rho_{|\sigma|, |\sigma^{i,j}|} f(\sigma^{i,j}) \\
&= \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} f(\sigma^{i,j}) + \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{j < i} (-1)^{i+j} f(\sigma^{i,j}) \\
&= \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j} f(\sigma^{j+1,i}) + \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{j < i} (-1)^{i+j} f(\sigma^{i,j}) = \\
&= \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{j \geq i} (-1)^{i+j-1} f(\sigma^{j,i}) + \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{j < i} (-1)^{i+j} f(\sigma^{i,j}) \\
&= \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{i > j} (-1)^{i+j-1} f(\sigma^{i,j}) + \sum_{i=0}^{q+2} \sum_{j < i} (-1)^{i+j} f(\sigma^{i,j}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

A imagem de d em $C^k(U, F)$ é o grupo de k -cobordos e o núcleo de d é o núcleo é o grupo de k -cociclos:

$$B^k(U, F) = \text{im}(d : C^{k-1}(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^k(\mathcal{U}, F))$$

$$Z^k(U, F) = \ker(d : C^{k-1}(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^k(\mathcal{U}, F))$$

Definição 3.39. Chamamos de grupo de cohomologia de Čech da cobertura U com coeficientes em F de grau k o quociente:

$$\check{H}^k(U, F) = Z^k(\mathcal{U}, F) / B^k(\mathcal{U}, F)$$

Observação 3.40. $\check{H}^0(\mathcal{U}, F) = F(M)$, pois se $f \in \check{C}^0(\mathcal{U}, F)$, $f(U_i)$ é uma seção de $F(U_i)$ e $\rho_{U_i, U_i \cap U_j} f(U_i) = \rho_{U_i, U_j \cap U_i} f(U_j)$

Lembremos a seguinte definição:

Definição 3.41. Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ coberturas abertas de M . Então $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ se todo elemento de $\mathcal{V}$ está contido em um elemento de $\mathcal{U}$. Uma escolha de inclusões $\tau : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ é chamado de aplicação de refinamento.

Usando o refinamento τ , obtemos um morfismo das Cohomologias de Čech com respeito a diferentes coberturas. Se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ e τ é a aplicação de refinamento então $\tau: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $W \subset \tau(W)$ para cada $W \subset \mathcal{U}$. Se $\sigma = (V_0, \dots, V_q)$ é um q -simplex da cobertura V então $\tau(\sigma)$ denota o q -simplex $(\tau(V_0), \dots, \tau(V_q))$ da cobertura $\mathcal{U}$.

Proposição 3.42. τ induz uma aplicação de cocadeia $\tau: C^*(U, F) \rightarrow C^*(V, F)$ se estabelecermos

$$\tau_q(f)(\sigma) = \rho_{|\sigma|, |\tau(\sigma)|} f(\tau(\sigma))$$

Para $f \in C^q(\mathcal{U}, F)$ e σ um q -simplex de F .

Demonstração. Para todo q temos:

$$(d \circ \tau_q)(f(\sigma)) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \rho_{|\sigma|, |\sigma^i|} \circ \rho_{|\sigma^i|, |\tau(\sigma^i)|} f(\tau(\sigma^i)) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \rho_{|\sigma|, |\tau(\sigma^i)|} f(\tau(\sigma^i))$$

$$\tau_{q+1}(df(\sigma)) = \rho_{|\sigma|, |\tau(\sigma)|} \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \rho_{|\tau(\sigma)|, |\tau(\sigma^i)|} f(\tau(\sigma^i)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \rho_{|\sigma|, |\tau(\sigma)|} \circ \rho_{|\tau(\sigma)|, |\tau(\sigma^i)|} f(\tau(\sigma^i))$$

□

Esta aplicação de cocadeias induz homomorfismos

$$\tau_q^*: \check{H}^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}, F)$$

entre os módulos de cohomologia.

Proposição 3.43. Se μ e τ são ambas aplicações de refinamento de V em U , então $\mu_q^* = \tau_q^*$ para cada q .

Demonstração. Provaremos a afirmação encontrando operadores homotópicos $h_q: C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{V}, F)$ tais que $h_{q+1} \circ d + d \circ h_q = \tau_q - \mu_q$, pois devemos lembrar de um fato geral: Se temos duas aplicações de cocadeia g^* e f^* de (U^*, d_U) para (V^*, d_V) tais que $h_{q+1} \circ d_U + d_V \circ h_q = f_q - g_q$, então f e g induzem o mesmo em cohomologia. De fato,

$$f_q(\sigma) - g_q(\sigma) = h_{q+1}(d_U(\sigma)) + (d_V(h_q(\sigma))) = d_V(h_q(\sigma)).$$

Se $\sigma = (V_0, \dots, V_{q-1})$ é um $(q-1)$ -simplex da cobertura $\mathcal{V}$, seja

$$\sigma_k = (\mu(V_0), \dots, \mu(V_k), \tau(V_k), \dots, \tau(V_{q-1}))$$

então definimos homomorfismos $h_q : C^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow C^{q-1}(\mathcal{V}, F)$ fazendo

$$h_q(f(\sigma)) = \sum_{j=0}^{q-1} \rho_{|\sigma|, |\sigma_k|} f(\sigma_k).$$

Antes de mostrar que os h_q satisfazem o desejado, faremos a seguinte observação:

$$(\sigma^j)^k = \sigma^{i,j} = \begin{cases} (\mu(V_0), \dots, \widehat{\mu(V_j)}, \dots, \mu(V_{k+1}), \tau(V_{k+1}), \dots, \tau(V_{q-1})) & \text{se } j > k \\ (\mu(V_0), \dots, \mu(V_k), \tau(V_k), \dots, \widehat{\tau(V_j)}, \dots, \tau(V_{q-1})) & \text{se } k < j \end{cases}$$

$$(\sigma^k)^j = \sigma^{i,j} = \begin{cases} (\mu(V_0), \dots, \mu(V_k), \tau(V_k), \dots, \widehat{\tau(V_j)}, \dots, \tau(V_{q-1})) & \text{se } k < j \\ (\mu(V_0), \dots, \widehat{\mu(V_j)}, \dots, \mu(V_k), \tau(V_k), \dots, \tau(V_{q-1})) & \text{se } j < k \end{cases}$$

Para $k < j$, $(\sigma_k)^j = (\sigma^j)_{k-1}$ e para $k > j$, $(\sigma_k)^{j+1} = (\sigma^j)_k$. Também $(\sigma_0)^0 = \tau(\sigma)$ e $(\sigma_{q-1})^q = \mu(\sigma)$. Agora provemos que h_q são operadores homotópicos.

$$\begin{aligned} d_{q-1}(h_q(f(\sigma))) &= \sum_{j=0}^q (-1)^j h_q(f)(\sigma^j) \\ &= \sum_{j=0}^q \sum_{k=j}^{q-1} (-1)^{j+k} (f(\sigma^j)_k) \\ &= \sum_{j=0}^q \sum_{k < j} (-1)^{k+j} f((\sigma^j)_k) + \sum_{j=0}^q \sum_{k \geq j} (-1)^{k+j} f((\sigma^j)_k) \\ &= \sum_{j=0}^q \sum_{k < j} (-1)^{k+j} f((\sigma^j)_k) + \sum_{j=0}^q \sum_{k > j} (-1)^{k+j-1} f((\sigma^j)_{k-1}) \\ &= \sum_{j=0}^q \sum_{k < j} (-1)^{k+j} f((\sigma_k)^{j+k}) + \sum_{j=0}^q \sum_{k > j} (-1)^{k+j-1} f((\sigma_k)^j) \end{aligned}$$

por outro lado temos

$$\begin{aligned}
h_{q+1}(d^q(f(\sigma))) &= \sum_{k=0}^q (-1)^i d(f)(\sigma_k) \\
&= \sum_{j=0}^q \sum_{k=j}^{q-1} (-1)^{j+k} (f(\sigma_k)^j) \\
&= \sum_{k=0}^q \sum_{j \leq k} (-1)^{k+j} f((\sigma_k)^j) + \sum_{k=0}^q \sum_{j > k} (-1)^{k+j} f((\sigma^j)_k) \\
&= \sum_{k=0}^q \sum_{j \leq k} (-1)^{k+j} f((\sigma_k)^j) + \sum_{k=0}^q \sum_{j \geq k} (-1)^{k+j+1} f((\sigma_k)^{j+1})
\end{aligned}$$

somando tudo, todos os termos se cancelarão, exceto onde $k = j$. Isto é:

$$\begin{aligned}
h_{q+1}(d^q(f(\sigma))) + d_{q-1}(h_q(f(\sigma))) &= \sum_{k=0}^q (-1)^{2k} (f)(\sigma_k)^k - \sum_{k=0}^q (-1)^{2k} (f)(\sigma_k)^{k+1} \\
&= f((\sigma_0)^0) - f((\sigma_{q-1})^q) = f(\tau(\sigma)) - f(\mu(\sigma)) \\
&= \tau(f(\sigma)) - \mu(f(\sigma))
\end{aligned}$$

o que conclui que $\tau_q^* = \mu_q^*$.

□

Assim se $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ que denotaremos por $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ então existem homomorfismos canônicos $\check{H}^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}, F)$. Desde que o conjunto de coberturas de M forma uma soma direta sobre a relação $<$ de refinamento e desde que se $\mathcal{B} < \mathcal{V} < \mathcal{U}$ então o homomorfismo $\check{H}^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{B}, F)$ é a composição $\check{H}^q(\mathcal{U}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{V}, F)$ e $\check{H}^q(\mathcal{V}, F) \rightarrow \check{H}^q(\mathcal{B}, F)$. Assim pode-se formar um módulo de limite direto

$$\check{H}^q(M, F) = \text{dir}_{\mathcal{U}} \lim \check{H}^q(U, F).$$

Precisamente o limite direto acima significa:

$$\check{H}^q(M, F) = \bigsqcup_i \check{H}^q(\mathcal{U}_i, F) / \sim$$

Se $\mathcal{U}_i$ é um refinamento de $\mathcal{U}_j$ denotaremos a aplicação de refinamento por $\mu_{j,i}$ e declaramos que $x_i \in \check{H}^q(\mathcal{U}_i, F)$ é equivalente à $x_j \in \check{H}^q(\mathcal{U}_j, F)$ são equivalentes se, e somente se, existe um refinamento comum $\mathcal{U}_k$ de $\mathcal{U}_j$ e $\mathcal{U}_i$ tal que os homomorfismos induzidos pelas aplicações de refinamento $\mu_{i,k}^*$ e $\mu_{j,k}^*$ satisfazem $\mu_{i,k}^q(x_i) = \mu_{j,k}^q(x_j)$. Esta é uma relação de equivalência. Se tomarmos $F = \mathcal{G} = M \times G$ onde G é um K -módulo, então chamaremos $\check{H}^q(M, \mathcal{G})$ de Módulo

Clássico de Cohomologia de Čech. Afirmaremos sem demonstração que $\check{H}^q(M, F)$ dá origem à uma teoria de Cohomologia de Feixes. O leitor interessado pode consultar [3, pág 202].

O TEOREMA DE DE RHAM

Sabemos que quaisquer teorias de cohomologias sobre M são unicamente isomorfas. Por convenção denotaremos a cohomologia de Čech simplesmente por

$$H^p(M, S) = \check{H}^p(M, S)$$

e para qualquer resolução fina e livre de torção

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \cdots$$

temos

$$H^p(M, S) = H^p(\Gamma(C^* \otimes S)).$$

Assim as teorias que apresentamos na seção anterior são isomorfas entre si.

$$\check{H}^p(M, S) \simeq H_{\Delta}^p(M, S) \simeq H_{\Delta^{\infty}}^p(M, S)$$

para um K -módulo G e ainda, são isomorfas ao $H^p(M, \mathcal{G})$ onde $\mathcal{G}$ é o feixe constante. Se tomarmos $K = \mathbb{R}$ temos

$$H_{deR}^p(M) \simeq H^p(M, \mathcal{R}) \simeq H_{\Delta^{\infty}}^p(M, \mathbb{R})$$

A seguir mostraremos um isomorfismo explícito entre essas cohomologias, que é o Teorema de De Rham, porém antes provaremos tal teorema com uma abordagem diferente, isto é, usando a cohomologia de Čech.

4.1 O Teorema de De Rham via Cohomologia de Čech

Neste seção desenvolveremos mais teoria sobre feixes e cohomologia e então o teorema de De Rham será apresentado como caso especial.

Lema 15. Se $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ é uma partição da unidade de um pré-feixe completo F subordinado à uma cobertura localmente finita $\{U_i\}_{i \in I}$, então para todo aberto $V \subset M$ existem homomorfismos

$$\varphi_V^{U_i \cap V} : F(U_i \cap V) \rightarrow F(V)$$

onde temos: Para cada $W \subset V - U_i$ tem-se

$$\rho_{W,V}(\varphi_V^{U_i \cap V}(s)) = 0$$

Demonstração. Podemos definir

$$\varphi_V^{U_i \cap V}(s)(x) = \begin{cases} \varphi_i(s(x)) & \text{se } x \in U_i \cap V \\ 0 & \text{se } x \in V - U_i \end{cases} \quad \text{assim } \varphi_V^{U_i \cap V}(s) : V \rightarrow \bar{F} \text{ é uma seção contínua.}$$

□

Observação 4.1. Já vimos que o feixe $\Omega^k(M)$ das k -formas diferenciais em M é um feixe fino.

Lema 16. Se F é um feixe fino, então

$$\check{H}^k(U, F) = 0 \text{ para todo } k > 0.$$

Demonstração. Devemos definir homomorfismos

$$h_k : C^k(U, F) \rightarrow C^{k-1}(U, F)$$

que satisfaçam

$$h_{k+1}d^k + d^{k-1}h^k = id$$

Para isso, definamos

$$h^{k+1}(c)(U_{i_0}, \dots, U_{i_k}) = \sum_{U \in \mathcal{U}} (-1)^j \varphi_{U_{i_0}, \dots, U_{i_k}}^{U \cap U_{i_0}, \dots, U_{i_k}} c(U_{i_0}, \dots, U_{i_{j-1}}, U, U_{i_j}, \dots, U_{i_k})$$

□

Teorema 4.2. Se $0 \rightarrow F \rightarrow F_0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow \dots$ é uma resolução fina e $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta, tal que

$$F_{i-1}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) \rightarrow F_i(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k}) \rightarrow F_{i+1}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k})$$

é exata para todo simplexo do nervo da cobertura $\mathcal{U}$. Então existe um isomorfismo entre

$$H^k(\mathcal{U}, F) \cong \frac{\text{Ker}(d^k) : F^k(M) \rightarrow F^{k+1}(M)}{\text{Im}(d^{k-1}) : F^{k-1}(M) \rightarrow F^k(M)} \text{ para todo } k \geq 1$$

Demonstração. O seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & C^0(\mathcal{U}, F) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, F) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, F) \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_0(M) & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U}, F_0) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, F_0) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, F_0) \longrightarrow \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 F_1(M) & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U}, F_1) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, F_1) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, F_1) \longrightarrow \dots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Observe que a primeira linha é um complexo de cadeias que não depende da resolução, enquanto que a primeira coluna é um complexo de cadeias que não depende da cobertura $\mathcal{U}$. Queremos construir um isomorfismo entre os grupos de cohomologia desses dois complexos. Para tanto vamos usar que as linhas, a partir da segunda, são exatas a partir da segunda coluna e que a hipótese sobre $\mathcal{U}$ implica que as colunas, a partir da segunda, são exatas a partir da segunda linha. Dado $[z_0] \in \check{H}^k(\mathcal{U}; F)$ então ele será representado por um cociclo z_0 em $C^k(\mathcal{U}; F)$. Sua imagem $z_1 \in C^k(\mathcal{U}; F_0)$ é também um cociclo, pois o diagrama comuta e sua imagem pela seta horizontal coincide com a imagem pela seta vertical da imagem de z_0 pela seta horizontal, que é 0. Como a linha é exata, z_1 é a imagem de uma cocadeia $c_1 \in C^{k-1}(\mathcal{U}; F_0)$. Como a imagem de z_1 pela seta vertical é 0, a imagem $z_2 \in C^{k-1}(\mathcal{U}; F_1)$ de c_1 pela seta vertical é um cociclo, pois sua imagem pela seta horizontal coincide com a imagem de z_1 pela seta vertical, que é 0. Como a linha é exata, z_2 é a imagem de uma cocadeia c_2 em $C^{k-2}(\mathcal{U}; F_1)$ pela seta horizontal. Indutivamente, podemos construir uma cocadeia $c_j \in C^{k-j}(\mathcal{U}; F_{j-1})$ e cociclos $z_j \in C^{k-j+1}(\mathcal{U}; F_{j-1})$ tais que z_j é a imagem de c_{j-1} pela seta vertical e, é ainda a imagem de c_j pela seta horizontal. Finalmente, chegamos a um ciclo z_{k+1} em $C^0(\mathcal{U}; F_k)$, e portanto, a um elemento de $F^k(M)$. A classe de cohomologia desse ciclo é a imagem da classe de cohomologia inicial. Como o processo é simétrico temos que essa aplicação é bijetiva e como todas as setas são homomorfismos ela é um isomorfismo.

□

Corolário 4.3. (O Teorema de De Rham) Seja $0 \rightarrow M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}^0 \rightarrow \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2 \rightarrow \dots$ a resolução fina do feixe constante $M \times \mathbb{R}$. Se $\mathcal{U}$ é uma cobertura aberta simples de M , então $H^k(U; M \times \mathbb{R}) \cong H_{deR}^k(M)$.

Demonstração. Que a sequência é exata já foi mostrado, e que cada um dos feixes $\mathcal{E}^k$ é fino também já foi demonstrado. Uma cobertura simples de M satisfaz a hipótese do teorema anterior. Logo $\check{H}^k(U; \mathbb{R})$ é canonicamente isomorfo a $H_{deR}^k(M)$. Como toda cobertura pode ser refinada por uma cobertura simples, temos que $\check{H}^k(M; M \times \mathbb{R}) = \check{H}^k(\mathcal{U}; M \times \mathbb{R})$ se $\mathcal{U}$ é uma cobertura simples. □

4.2 O Teorema de De Rham via Homomorfismo Explícito

Definiremos uma aplicação linear da cohomologia de De Rham $H_{deR}^p(M)$ ao espaço $H_{\Delta^\infty}^p(M, \mathbb{R})$ de cohomologia singular diferenciável. Lembremos da seguinte versão do Lema de Poincaré:

Teorema 4.4. (Lema de Poincaré) Seja U uma bola aberta no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e seja $\Omega^k(U)$, como habitual, o espaço das k -formas diferenciais sobre U . Então para cada $k \geq 1$ existe uma transformação linear

$$h_k : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$$

tal que

$$h_{k+1} \circ d + d \circ h_k = id$$

Definição 4.5. Considere o homomorfismo $k_p : \Omega^p(M) \rightarrow S_\infty^p(M, \mathbb{R})$ para cada inteiro $p \geq 0$ definido por

$$k_p(\omega)(\sigma) = \int_\sigma \omega$$

para cada p -forma diferenciável ω sobre M e cada p -simplex singular diferenciável σ sobre M . É uma consequência imediata do teorema de Stokes que os homomorfismos k_p induzem uma aplicação de cocadeia

$$k : \Omega^*(M) \rightarrow S_\infty^*(M, \mathbb{R})$$

Seja

$$k_p^* : H_{deR}^p(M) \rightarrow H_{\Delta\infty}^p(M, \mathbb{R})$$

denotando o homomorfismo induzido de módulos de cohomologia. k_p^* é chamado de homomorfismo de De Rham.

Teorema 4.6. O homomorfismo $k_p^* : H_{deR}^p(M) \rightarrow H_{\Delta\infty}^p(M, \mathbb{R})$ é um isomorfismo para cada inteiro p .

Demonstração. Os homomorfismos

$$k_p : \Omega^p(M) \rightarrow S_{\infty}^p(M, \mathbb{R})$$

$$k_p(\omega)(\sigma) = \int_{\sigma} \omega$$

podem ser definidos para conjuntos arbitrários abertos de M e isso leva a homomorfismos de pré-feixes

$$\{\Omega^p(U); \rho_{U,V}\} \xrightarrow{k_p} \{S_{\infty}^p(U, \mathbb{R}); \rho_{U,V}\}$$

que comuta pelo teorema de Stokes com o homomorfismo de cobordo

$$\{\Omega^p(U); \rho_{U,V}\} \rightarrow \{\Omega^{p+1}(U); \rho_{U,V}\}$$

e com

$$S_{\infty}^p(U, K) \rightarrow S_{\infty}^{p+1}(U, K).$$

Então os homomorfismos induzidos de feixes associados formam um diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0(M) & \longrightarrow & \mathcal{E}^1(M) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow id & & \downarrow k_0 & & \downarrow k_2 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{R} & \longrightarrow & S_{\infty}^0(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & S_{\infty}^1(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Considere o seguinte diagrama comutativo de cocadeias complexas no qual as linhas já mostramos que são exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^*(M) & \xrightarrow{1} & \Gamma(\mathcal{E}^*(M)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow k & & \downarrow 3 & & \\ 0 & \longrightarrow & S_{\infty,0}^*(M, \mathbb{R}) & \longrightarrow & S_{\infty}^*(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{2} & \Gamma(S_{\infty}^*(M, \mathbb{R})) \longrightarrow 0 \end{array}$$

A aplicação de cocadeias 1 induz isomorfismos $H_{deR}^p(M) \simeq H^p(M, \mathcal{R})$, já provamos que 2 induz isomorfismos $H_{\Delta^\infty}^p(M; \mathbb{R}) \simeq H^p(M; \mathcal{R})$. Que 3 induz isomorfismos de cohomologia segue do corolário 2.56 aplicado ao homomorfismo de teoria de cohomologia de feixes induzidos de acordo com 2.57 pelo homomorfismo 1 de resoluções finas e livre de torção de $\mathcal{R}$. Assim a partir da unicidade do isomorfismo entre teoria de cohomologias, 3 induz o isomorfismo identidade de $H^p(M, \mathcal{R})$. Segue que k_p^* é o isomorfismo canônico de $H_{deR}^p(M) \simeq H^p(M, \mathcal{R}) \simeq H_{\Delta^\infty}^p(M, \mathbb{R})$ para cada inteiro p .

□

APÊNDICE

5.1 Partições da Unidade

Nesta seção M denotará uma variedade diferenciável de dimensão m , salvo menção contrária.

Definição 5.1. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O suporte de f , denotado por $\text{supp}(f)$, é o fecho do conjunto $\{x \in M; f(x) \neq 0\}$.

Definição 5.2. Seja $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de M . Uma partição da unidade subordinada à cobertura $\mathcal{U}$ é uma família de funções $\{\lambda_i : M \rightarrow [0, 1]\}$ de classe C^∞ tal que:

- (a) $\text{supp}(\lambda_i) \subset U_i$;
- (b) $\{\text{supp}(\lambda_i)\}_{i \in I}$ é uma coleção localmente finita, isto significa que todo ponto de M possui uma vizinhança que intersecta no máximo um número finito de elementos da coleção;
- (c) $\sum_{i \in I} \lambda_i(x) = 1$.

Observação 5.3. A soma (c) é finita para cada $x \in M$ devido à (b).

Definição 5.4. Sejam $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in \Lambda}$ coberturas abertas de M . Então $\mathcal{V}$ é um refinamento de $\mathcal{U}$ se todo elemento de $\mathcal{V}$ está contido em um elemento de $\mathcal{U}$. Formalmente queremos dizer que existe uma aplicação $\tau : \Lambda \rightarrow I$ tal que para cada j tem-se $V_j \subset U_{\tau(j)}$.

Proposição 5.5. Seja $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in \Lambda}$ uma cobertura aberta de M que refina a cobertura $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ (considere a aplicação de refinamento como τ). Se existe uma partição da unidade $\{\lambda_j; j \in \Lambda\}$ subordinada à cobertura $\mathcal{V}$, então existe uma partição da unidade $\{\psi_i; i \in I\}$ subordinada à cobertura $\mathcal{U}$.

Demonstração. Afirmamos que

$$\psi_i = \sum_{\tau(j)=i} \lambda_j.$$

Provemos que o suporte de ψ_i está contido em U_i . Seja x um ponto do complementar de U_i . Como $\{\text{supp}(\lambda_j)\}_{j \in \Lambda}$ é uma coleção localmente finita, existe uma vizinhança W_0 de x que intersecta apenas um número finito de elementos dessa família. Se $\tau(j) = i$ e $\text{supp}(\lambda_j) \cap W_0 = \emptyset$ definimos $V_j = W_0$. Nesse caso $x \notin \text{supp}(\lambda_j) = \text{supp}(\psi_i)$. Caso contrário, como $\text{supp}(\lambda_j) \subset V_j \subset U_i$ e $x \notin U_i$, existe uma vizinhança Y_j de x tal que $Y_j \cap \text{supp}(\lambda_j) = \emptyset$. A interseção finita $V = \cap Y_j$ é uma vizinhança aberta de x na qual $\psi_i \equiv 0$. De fato, dado $y \in V$ temos que $\psi_i(y) = \sum_{\tau(j)=i} \lambda_j(y)$ e como $y \notin \text{supp}(\lambda_j)$ temos que $\lambda_j(y) = 0$

□

Lema 17. Se M é uma variedade, então existe uma sequência de subconjuntos compactos

$$K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \dots$$

tais que

- $\cup_{i=1}^{\infty} K_i = M$
- $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$.

Demonstração. Qualquer cobertura aberta $\{U_i; i \in I\}$ de M admite uma subcobertura enumerável. De fato, seja uma base enumerável de abertos $\{B_n; n \in \mathbb{N}\}$. Se $x \in M$ e $x \in U_i$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset U_i$. Temos assim uma cobertura enumerável de M , B_{n_j} onde cada B_{n_j} está contido em algum U_i . Para cada j escolhamos i_j que $U_{i_j} \subset B_{n_j}$. Portanto encontramos uma subcobertura enumerável. Agora, para cada $x \in M$ seja V_x uma vizinhança compacta de x e considere a cobertura de M feita pelo interior dos conjuntos V_x . De tal cobertura extraímos uma subcobertura enumerável $\{V_n; n \in \mathbb{N}\}$. Seja $K_1 = V_1$. Como K_1 é compacto e os interiores dos V_n cobrem K_1 , podemos encontrar uma subcobertura finita. A união de K_1 com os elementos dessa cobertura finita de K_1 é um conjunto compacto K_2 cujo interior contém K_1 . Constrói-se toda a sequência então utilizando o mesmo argumento.

□

Teorema 5.6. Dada uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M , então existe uma partição da unidade subordinada à cobertura $\mathcal{U}$.

Demonstração. Considere a sequência de compactos K_i tais que

- $\cup_{i=1}^{\infty} K_i = M$

- $K_i \subset \text{int}(K_{i+1})$.

Para cada $x \in M$, seja W_x uma vizinhança de x e $\varphi : W_x \rightarrow B(0; 3)$ uma carta, onde $B(0; 3)$ é a bola de centro zero e raio 3 em $\mathbb{R}^m$, onde

- $\varphi_x(x) = 0$;
- W_x está contido em um elemento da cobertura $\mathcal{U}$;
- Se $x \in K_{i+1}/\text{int}(K_i)$, então $W_x \subset \text{int}(K_{i+2})/K_{i-1}$ (se $x \in K_1$ então $W_x \in \text{int}(K_2)$ e se $x \in K_2/\text{int}(K_1)$ temos $W_x \in \text{int}(K_3)$).

Seja $\lambda_x : M \rightarrow [0; 1]$ uma função de classe C^∞ cujo valor é 1 no conjunto $Z_x = \varphi_x^{-1}(B(0, 1))$ e vale 0 fora de $V_x = \varphi_x^{-1}(B(0; 2))$ (considere $\lambda_x = \lambda \circ \varphi_x$, onde $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow [0; 1]$ é uma função de classe C^∞ que vale 1 em $B(0; 1)$ e 0 fora de $B(0; 2)$).

Dada a cobertura $\{Z_x\}_{x \in M}$ tomamos uma subcobertura finita dos compactos $K_{i+1} \setminus K_i$. Desse modo, tem-se uma cobertura $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e funções de classe C^∞ $\lambda_i : M \rightarrow [0; 1]$ cujo valor é 1 em Z_i e 0 fora de Z_i . Como cada W_i está contido em algum elemento da cobertura $\mathcal{U}$. Por construção, a cobertura W_i é localmente finita. Considere $\varphi_i : M \rightarrow [0; 1]$ dada por

$$\varphi_i(x) = \frac{\lambda(x)}{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(x)}$$

Como W_i é localmente finita, a soma no denominador é finita numa vizinhança compacta de cada ponto e não se anula. Portanto cada φ_i é de classe C^∞ e a coleção $\{\varphi_i\}$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{W_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Pela proposição 1.5, existe uma partição da unidade subordinada à $\mathcal{U}$.

□

5.2 Produtos Tensoriais

Nesta subseção V , W e U denotarão espaços vetoriais reais de dimensão finita.

Definição 5.7. Se X é um conjunto, então definimos o espaço vetorial livre sobre X , $V(X)$ sendo a soma direta de V com índices em X :

$$V(X) = \bigoplus_{x \in X} V$$

Definição 5.8. Seja $F(V, W)$ o espaço vetorial livre sobre $\mathbb{R}$ cujos geradores são os elementos de $V \times W$. Assim $F(V, W)$ consiste de todas as combinações finitas de pares (v, w) com $v \in V$ e $w \in W$. Seja $R(V, W)$ o subspaço de $F(V, W)$ gerado pelo conjunto de elementos de $F(V, W)$ das seguintes formas:

$$\begin{aligned}
& (v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w) \quad (\forall a \in \mathbb{R}), (\forall v_1, v_2, v_3 \in V), (\forall w, w_1, w_2, w_3 \in W) \\
& (v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2) \\
& (av, w) - a(v, w) \\
& (v, aw) - a(v, w)
\end{aligned}$$

Definição 5.9. O espaço vetorial $F(V, W)/R(V, W)$ é chamado produto tensorial de V e W e é denotado por $V \otimes W$. Os elementos de $V \otimes W$ serão denotados por $v \otimes w$.

Proposição 5.10. O espaço vetorial $F(V, W)/R(V, W)$ satisfaz as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
(v_1 + v_2) \otimes w &= v_1 \otimes w + v_2 \otimes w \\
v \otimes (w_1 + w_2) &= v \otimes w_1 + v \otimes w_2 \\
a(v \otimes w) &= av \otimes w = v \otimes aw \\
& (\forall a \in \mathbb{R}), (\forall v_1, v_2, v, w \in V)
\end{aligned}$$

O produto tensorial ainda possui as seguintes propriedades:

(a) Propriedade da aplicação universal. Seja φ uma aplicação bilinear $(v, w) \mapsto v \otimes w$ de $V \times W$ em $V \otimes W$. Então sempre que U for um espaço vetorial e $l : V \times W \rightarrow U$ é uma aplicação bilinear, existe um único aplicação linear $\bar{l} : V \otimes W \rightarrow U$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc}
V \otimes W & \xrightarrow{\bar{l}} & U \\
\varphi \uparrow & \nearrow l & \\
V \times W & &
\end{array}$$

O par consistindo de $V \otimes W$ e φ é dito resolver o problema da aplicação universal para formas bilineares com domínio $V \times W$. Além disso $V \otimes W$ e φ são únicos com respeito a esta propriedade no sentido de que se X é um espaço vetorial e $\bar{\varphi} : V \times W \rightarrow X$ é uma aplicação bilinear com a propriedade de aplicação universal acima, então:

(a) Existe um isomorfismo $\alpha : V \otimes W \rightarrow X$ tal que $\alpha \circ \varphi = \bar{\varphi}$.

(b) $V \otimes W$ é canonicamente isomorfo com $W \otimes V$.

(c) $V \otimes (W \otimes U)$ é canonicamente isomorfo com $(V \otimes W) \otimes U$.

(d) Pela propriedade (a), a aplicação bilinear de $V^* \otimes W$ no espaço vetorial $\text{Hom}(V, W)$ de transformações lineares de V em W definidas por $(f, w)(v) = f(v) \cdot (w)$ para $f \in V^*$, $v \in V$ e $w \in W$ determina unicamente uma aplicação linear $\alpha : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$. α é um isomorfismo. Como consequência temos:

$$\dim(V \otimes W) = (\dim V) \cdot (\dim W)$$

(d) Sejam $\{e_i, i = 1, \dots, c\}$ e $\{f_j, j = 1, \dots, d\}$ bases para V e W respectivamente. Então $\{e_i \otimes f_j, i = 1, \dots, c; j = 1, \dots, d\}$ é uma base para $V \otimes W$.

5.3 Formas Diferenciais

Se temos dois espaços vetoriais normados E e F , consideraremos o espaço vetorial normado $L^p(E, F)$ como sendo o espaço das aplicações contínuas p -lineares $E^p \rightarrow F$. Para $p = 1$, escreveremos simplesmente $L(E, F)$ e, por praticidade, para $p = 0$ definimos $L^0(E, F) = F$.

Definição 5.11. Uma aplicação $f \in L^p(E, F)$ é chamada alternada se seu valor $f(x_1, \dots, x_p)$ é nulo sempre que $x_i = x_{i+1}$ para ao menos um índice i ($1 \leq i < p$). Observe que para $p = 1$ toda função linear $E \rightarrow F$ é uma função alternada. O espaço formado pelas formas p -lineares alternativas é um subespaço vetorial de $L^p(E, F)$ e será denotado por $A^p(E, F)$.

Observação 5.12. $A^1(E, F) = L(E, F)$ e colocamos por definição $A^0(E, F) = F$.

Sejam $f \in A^p(E, F)$ e $g \in A^q(E, G)$. Para definir a multiplicação entre f e g introduziremos uma aplicação bilinear contínua

$$\Phi : F \times G \rightarrow H$$

onde H é um espaço vetorial normado. Tal aplicação permite f e g serem associadas com uma aplicação $h : E^{p+q} \rightarrow H$

$$h(x_1, \dots, x_{p+q}) = \Phi(f(x_1, \dots, x_p), g(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}))$$

Observe que h é linear e contínuo, mas não necessariamente alternado. Esta aplicação pertence ao espaço vetorial de aplicações $(p+q)$ -lineares que são alternativas quando consideradas as p primeiras variáveis ou as q últimas. Denotaremos tal espaço por $A^{p,q}(E, H)$.

Há um procedimento padrão para associar a toda aplicação $h \in A^{p,q}(E, H)$, uma aplicação $\bar{h} \in A^{p+q}(E, H)$. Defina uma aplicação bilinear contínua

$$\Phi_{p,q} : A^{p,q}(E, H) \rightarrow A^{p+q}(E, H)$$

onde $\varphi_{p,q}(h) = \bar{h} = \sum_{\sigma} \text{sig}(\sigma)(\sigma h)$ onde a soma é sobre todas as permutações $\sigma \in S_{p+q}$ tais que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ e } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$$

E $\text{sig}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ .

Definição 5.13. O produto exterior de $f \in A^p(E, F)$ e $g \in A^q(E, G)$ em relação à $\Phi : F \times G \rightarrow H$ denotada por

$$f \bigwedge_{\Phi} g$$

é o elemento $\varphi_{p,q}(h) \in A^{p+q}(E, H)$ onde $h \in A^{p,q}(E, H)$ é definido por

$$h(x_1, \dots, x_{p+q}) = \Phi(f(x_1, \dots, x_p), g(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})).$$

Assim

$$(f \bigwedge_{\Phi} g)(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma} \text{sig}(\sigma) \Phi(f(x_1, \dots, x_p), g(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}))$$

onde

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \text{ e } \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$$

Exemplo 5.14. Se $p = q = 1$ e $f \in L(E, F)$ e $g \in L(E, G)$ então $f \bigwedge_{\Phi} g \in A^2(E, H)$ é o aplicação

$$f \bigwedge_{\Phi} g(x_1, x_2) = \Phi(f(x_1), g(x_2)) - \Phi(f(x_2), g(x_1))$$

Observação 5.15. Frequentemente consideraremos $f \bigwedge_{\Phi} g$ quando $G = \mathbb{R}$ e $H = F$. Nesse caso usaremos $\Phi : F \times \mathbb{R} \rightarrow F$ como sendo apenas a multiplicação de um vetor por um escalar e então omitiremos Φ da notação $f \bigwedge g$. Particularmente se $f \in L(E, \mathbb{R})$ e $g \in L(E, \mathbb{R})$ seu produto $f \bigwedge g$ é dado por

$$(f \bigwedge g)(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot g(x_2) - f(x_2) \cdot g(x_1)$$

A seguinte proposição será apresentada sem demonstração, o leitor interessado pode consultar a referência [6], pág 15.

Proposição 5.16. Sejam $f \in A^p(E, \mathbb{R})$ e $g \in A^q(E, \mathbb{R})$ então

$$g \bigwedge f = (-1)^{pq} f \bigwedge g.$$

Seja $L^k(\mathbb{R}^m)$ o espaço vetorial das funções k -lineares da forma $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Denotaremos $\Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ o subespaço de $L^k(\mathbb{R}^m)$ consistindo das funções alternadas.

Definição 5.17. O alternador Alt será a aplicação linear

$$Alt : L^k(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^m)$$

dada por

$$Alt(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k} \sum_{\sigma \in S_k} sig(\sigma) T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

onde S_k é o conjunto formado pelas permutações de $\{1, 2, \dots, k\}$. Pode-se verificar que Alt mantém os elementos de $\Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ fixos.

Usando o alternador, definimos o produto exterior de funções multilineares da seguinte maneira

$$\Lambda : \Lambda^k(\mathbb{R}^m) \times \Lambda^l(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Lambda^{k+l}(\mathbb{R}^m)$$

$$\omega \wedge \mu = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \mu)$$

Explicitamente tem-se

$$\omega \wedge \mu = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} sig(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \mu(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$

O produto exterior, imediatamente acima, goza das seguintes propriedades:

- $\omega \wedge \mu = (-1)^{kl} \mu \wedge \omega$ se $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^m), \mu \in \Lambda^l(\mathbb{R}^m)$
- $(\omega \wedge \mu) \wedge \theta = \omega \wedge (\mu \wedge \theta)$
- $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \mu = \omega_1 \wedge \mu + \omega_2 \wedge \mu$
- $\mu \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \mu \wedge \omega_1 + \mu \wedge \omega_2$
- $\omega \wedge (\mu_1 + \mu_2) = \omega \wedge \mu_1 + \omega \wedge \mu_2$
- $a(\omega \wedge \mu) = (a\omega) \wedge \mu = \omega \wedge (a\mu)$

Assim se $dx^1, \dots, dx^m$ é a base dual canônica de $\mathbb{R}^m$, onde $dx^i(v) = v_i$ temos

$$\{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}; 0 < i_1 < \dots < i_k \leq m\}$$

é uma base de $\Lambda^k(\mathbb{R}^m)$.

Mais geralmente, se V é um espaço vetorial de dimensão m e tem base $\{e_1, \dots, e_m\}$ o conjunto

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m\}$$

é uma base para $\Lambda^k(V)$.

Definição 5.18. Uma k -forma diferencial ω em um aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é uma aplicação $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^∞ . Denotamos por $\Omega^k(U)$ o conjunto das k -formas diferenciais em U . Temos que $\Omega^k(U)$ tem dimensão infinita. Denotaremos por $\Omega_c^k(U)$ o subespaço vetorial de $\Omega(U)$ que consiste das k -formas diferenciais em U com suporte compacto.

Definição 5.19. O produto exterior de formas diferenciais

$$\Lambda : \Omega^k(\mathbb{R}^m) \times \Omega^l(\mathbb{R}^m) \rightarrow \Omega^{k+l}(\mathbb{R}^m)$$

é definido de maneira natural, isto é, $(\omega \wedge \mu)(x) = \omega(x) \wedge \mu(x)$ e possui as mesmas propriedades mencionadas acima.

Novamente uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ de classe C^∞ , induz uma aplicação linear

$$f^* : \Omega^k(V) \rightarrow \Omega^k(U),$$

chamada de pullback de formas diferenciais, definida por

$$(f^*\omega)(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(x))(Df(x)v_1, \dots, Df(x)v_k).$$

onde $D(f)$ é a derivada padrão. Usando a base usual de $\Lambda^k(\mathbb{R}^m)$ podemos escrever uma k -forma diferencial em U como

$$\omega(x) = \sum_J a_J(x)(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})$$

onde J percorre todas as k -uplas $(j_1, \dots, j_k)$ com $0 \leq j_1 < \dots < j_k \leq m$ e cada a_J é uma função de classe C^∞ em U .

Podemos definir formas diferenciais em variedades.

Definição 5.20. Seja M uma variedade diferenciável. Uma k -forma diferencial ω em M é uma correspondência que associa a cada ponto $x \in M$ uma função k -linear alternada em $T_x M$ (espaço tangente em x) tal que a expressão em ω em qualquer carta $(U, (x_1, \dots, x_m))$ de M , $\omega = \sum a_J(x)(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})$ é tal que as funções a_J sejam diferenciáveis em U .

Observação 5.21. Manteremos $\Omega^k(M)$ para as k -formas diferenciais em M e $\Omega_c^k(M)$ para as k -formas diferenciais com suporte compacto.

Seja $U \subset M$ um aberto. Existe um operador diferencial, chamado de *operador derivada exterior*, que definiremos primeiramente no espaço de formas em abertos de $\mathbb{R}^m$. Tal operador comuta com o pullback de formas o que permite defini-lo para formas em variedades.

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. O espaço das 0-formas $\Omega^0(U)$ é o espaço $C^\infty(U)$. A diferencial de uma função f , que denotaremos por df , é uma 1-forma em U , e portanto temos uma aplicação linear

$$d : \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^1(U)$$

dada por

$$f \mapsto df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j$$

Se $\omega \in \Omega^k(U)$ então já vimos que podemos escrever $\omega = \sum_j a_j dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$ e assim definimos

$$d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$$

$$d\omega = \sum da_J \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})$$

onde $J = j_1 < \dots < j_k$, ou ainda

$$d\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} d\omega_{j_1 \dots j_k} \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})$$

Observe que d é um operador linear. Como $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, o operador d satisfaz a regra de Leibniz:

$$d(\omega \wedge \mu) = d\omega \wedge \mu + (-1)^k \omega \wedge d\mu$$

para $\omega \in \Omega^k(U)$ e $\mu \in \Omega^l(U)$.

Proposição 5.22. Se $\omega \in \Omega^k(U)$ então $d(d\omega) = 0$.

Demonstração. Se $f \in \Omega^0(U)$ temos

$$d(df) = d\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx^j\right) = \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx^i \wedge dx^j = 0.$$

Pois as derivadas de segunda ordem são simétricas.

No caso geral, escreva $\omega = \sum_j f(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})$ e usando a regra de Leibniz indutivamente temos:

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= d(f(dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k})) = \\ &= d(df) \wedge (dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}) + \sum_{i=1}^k (-1)^i f \cdot dx^{j_1} \wedge \dots \wedge (dx^{j_i}) \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = 0 \end{aligned}$$

□

5.4 Integração em Variedades Diferenciáveis

O teorema de mudança de variáveis na teoria de integração em $\mathbb{R}^m$ diz que se $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ é difeomorfismo e $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável, então

$$\int_V \phi(x) dx = \int_U (\phi \circ f) |det Df(x)| dx.$$

Se $\omega \in \Omega^m(V)$, então podemos escrever $\omega(x) = a(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ e $f^* \omega(x) = (a \circ f)(x) \cdot det(Df(x)) \cdot dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. Logo, definimos

$$\int_V \omega = \int_V a(x) dx$$

Desse modo, temos que

$$\int_U f^* \omega = \pm \int_V \omega$$

Sendo o sinal "+" se f preserva orientação e "-" se f inverte a orientação. Deste modo, tem sentido dizer que uma m -forma $\omega \in \Omega_c^m(U)$ é integrável e que a integração é um funcional linear de $\Omega_c^m(U)$ que comuta com o operador de pullback de m -formas por difeomorfismos que preservam orientação. Isso nos permite definir integração m -formas com suporte compacto em variedades orientadas de dimensão m que faremos adiante.

Definição 5.23. Para cada $p \geq 1$ o conjunto

$$\Delta_p = \{(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p ; \sum_{i=1}^p a_i \leq 1 \text{ e cada } a_i \geq 0\}$$

é chamado p -simplex padrão em $\mathbb{R}^p$. Para $p = 0$ estabelecemos $\Delta_0 = 0$ o espaço de um único ponto.

Definição 5.24. Seja M uma variedade. Um p -simplex diferenciável singular σ em M é uma aplicação de Δ^p em M que deve ser diferenciável (C^∞) de uma vizinhança de Δ_p em $\mathbb{R}^p$ em M . Às vezes, nos referiremos a tal σ como somente um p -simplex em M . Mais adiante deveremos manter o termo "diferenciável" já que lidaremos com p -simplex contínuos também. Um 0-simplex em M consiste de um aplicação do espaço de um único ponto $\{0\}$ em M .

Definição 5.25. Uma p -cadeia c em M (com coeficientes reais) é uma combinação linear finita $c = \sum a_i \sigma_i$ de p -simplices σ_i em M onde os a_i são números reais. Denotaremos o conjunto dos p -simplex contínuos por $S_p(M)$.

Definição 5.26. Para cada $p \geq 0$ definimos uma coleção de aplicações

$$k_i^p : \Delta_p \rightarrow \Delta_{p+1}$$

para $0 \leq i \leq p+1$ como segue:

para $p = 0$, $k_0^0(0) = 1$ e $k_1^0(0) = 0$; e para $p \geq 1$

$$\begin{cases} k_0^p(a_1, \dots, a_p) = (1 - \sum_{i=1}^p a_i, a_1, \dots, a_p) \\ k_i^p(a_1, \dots, a_p) = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_i, \dots, a_p) \end{cases}$$

onde $0 \leq i \leq p+1$.

Se σ é um p -simplex em M com $p \geq 1$ definimos sua i -ésima face como sendo o p -simplex

$$\sigma^i = \sigma \circ k_i^p$$

Definição 5.27. O bordo de um p -simplex σ é um operador

$$\partial_p : S_p(M) \rightarrow S_{p-1}(M)$$

definido por

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma^i$$

Estendemos o operador cobordo linearmente para cadeias. Assim a cobordo da p -cadeia $\sum_{j=1}^k a_j \sigma_j$ é

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^k (-1)^i a_j \sigma_j^i$$

Proposição 5.28. $k_i^{p+1} \circ k_j^p = k_{j+1}^{p+1} \circ k_i^p$ ($p \geq 0; i \leq j$).

Demonstração. Para $p = 0$ existem três casos a se verificar. Para $p \geq 1$ observe que em ambos os lados da equação $k_i^{p+1} \circ k_j^p = k_{j+1}^{p+1} \circ k_i^p$ se verifica os seguintes aplicações:

$$1 \leq i < j; (a_1, \dots, a_p) \mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_i, \dots, a_{j-1}, 0, a_j, \dots, a_p)$$

$$1 \leq i = j; (a_1, \dots, a_p) \mapsto (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, 0, a_i, \dots, a_p)$$

$$0 = i < j; (a_1, \dots, a_p) \mapsto (1 - \sum_{i=1}^p a_i, a_1, \dots, a_{j-1}, 0, a_j, \dots, a_p)$$

$$0 = i = j; (a_1, \dots, a_p) \mapsto (0, 1 - \sum_{i=1}^p a_i, a_1, \dots, a_p)$$

□

Proposição 5.29. $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$.

Demonstração. A prova é clara para $p \leq 0$. Seja $\sigma \in S_{p+1}(M)$ um $(p+1)$ -simplex singular. Então temos que

$$\begin{aligned} \partial_p(\partial_{p+1}(\sigma)) &= \partial_p\left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \sigma^i\right) = \partial_p\left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \sigma \circ k_i^{p+1}\right) = \\ &= \sum_{j=0}^p (-1)^j \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \sigma \circ k_i^{p+1}\right)^j = \sum_{j=0}^p (-1)^j \left(\sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \sigma \circ k_i^{p+1}\right) \circ k_j^p = \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{j=0}^p (-1)^{i+j} \sigma \circ (k_i^{p+1} \circ k_j^p) = \sum_{i=0}^{p+1} \sum_{j=0}^p (-1)^{i+j} \sigma \circ (k_{j+1}^{p+1} \circ k_i^p) = 0 \end{aligned}$$

pareando os termos opostos que se cancelarão.

□

Agora seja σ um p -simplex em M e seja ω uma p -forma definida numa vizinhança da imagem de σ . Na maioria de nossas aplicações lidaremos somente com formas suaves, mas para nossos propósitos a seguinte definição seria suficiente para ω sendo p -forma contínua. Primeiro de tudo, se $p = 0$ então um 0-simplex consiste simplesmente de um ponto de M e uma 0-forma é simplesmente uma função. Neste caso, definimos a integral da função ω sobre o 0-simplex σ sendo o valor de ω no ponto $\sigma(0) \in M$.

$$\int_{\sigma} \omega = \omega(\sigma(0)).$$

Se $p \geq 1$ então desde σ se estende a um aplicação suave na vizinhança de $\Delta^p \in \mathbb{R}^p$ em M , ω pode ser "traído de volta" via ω para a p -forma $\delta\sigma(\omega)$ sobre uma vizinhança de Δ^p . Neste caso definimos a integral da p -forma ω como sendo o p -simplex σ por

$$\int_{\sigma} \omega = \int_{\Delta^p} \delta(\sigma(\omega)).$$

Estendemos estas integrais linearmente para cadeias, assim se $c = \sum a_i \sigma_i$ então:

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{\sigma_i} \omega$$

Teorema 5.30. (Teorema de Stokes) Seja c uma p -cadeia ($p \geq 1$) em uma variedade diferenciável M e seja ω uma $(p-1)$ -forma suave definida sobre uma vizinhança da imagem de c . Então

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega$$

Demonstração. É suficiente considerar o caso no qual a p -cadeia c consiste de um único p -simplex σ . Assim devemos provar

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Segue imediatamente da nossa definição de que $\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$ é equivalente a

$$\int_{\Delta^p} d(\delta\sigma(\omega)) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} \delta\sigma^i(\omega) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} \delta k_i^{p-1} \circ \delta\sigma(\omega)$$

observe primeiramente que o caso para $p = 1$ se reduz diretamente ao Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_{\Delta^1} \left(\frac{d}{dr} \right) (\omega \circ \sigma) = \omega(\sigma(1)) - \omega(\sigma(0))$$

assim assumimos que $p \geq 2$. Então a $(p-1)$ -forma $\delta\sigma(\omega)$ pode ser expressa como

$$\delta\sigma(\omega) = \sum_{j=1}^p a_j dr_1 \wedge \dots \wedge \hat{dr}_j \wedge \dots \wedge dr_p$$

onde o acento circunflexo sobre o termo significa que o mesmo foi omitido e onde a_j são funções C^∞ sobre uma vizinhança de Δ^p em $\mathbb{R}^p$. Desde que a integral é linear, podemos considerar o

caso especial no qual $\delta\sigma(\omega)$ consiste do termo único da forma $a_j dr_1 \wedge \dots \wedge \hat{dr}_j \wedge \dots \wedge dr_p$. Neste caso, temos que

$$\int_{\Delta^p} d(\delta\sigma(\omega)) = (-1)^{j-1} \int_{\Delta} (\partial a_j / \partial r_j) (dr_1 \wedge \dots \wedge dr_p)$$

E temos ainda que para $1 \leq i \leq p$

$$\delta k_i^{p-1}(r_j) = \begin{cases} r_j & \text{se } (1 \leq j \leq i-1) \\ 0 & \text{se } (j = i) \\ r_{j-1} & \text{se } (i+1 \leq j \leq p) \end{cases}$$

$$\delta k_i^{p-1}(r_j) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_j & \text{se } (j = 1) \\ r_{j-1} & \text{se } (1 < j \leq p) \end{cases}$$

Aplicando $\delta k_i^{p-1}(r_j)$ e $\delta k_i^{p-1}(r_j)$ ao lado direito de $\int_{\Delta^p} d(\delta\sigma(\omega)) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} \delta\sigma^i(\omega) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} \delta k_i^{p-1} \circ \delta\sigma(\omega)$ obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^p (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} \delta k_i^{p-1}(a_j dr_1 \wedge \dots \wedge \hat{dr}_j \wedge \dots \wedge dr_p) = \\ & (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} a_j (1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_1, \dots, r_j) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_p + \\ & + (-1)^j \int_{\Delta^{p-1}} a_j(r_1, \dots, r_{j-1}, 0, r_j, \dots, r_{p-1}) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_p \end{aligned}$$

Agora aplicamos o teorema de mudança de variáveis ao primeiro termo do lado direito da igualdade acima. Seja φ_j o difeomorfismo de $\mathbb{R}^{p-1}$ definido por

$$\varphi_j(r_1, \dots, r_{p-1}) = \begin{cases} (r_1, \dots, r_p) & (j = 1) \\ (1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_2, \dots, r_{p-1}) & (1 < j \leq p) \\ (r_2, \dots, r_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_j, \dots, r_{p-1}) & (3 \leq j \leq p) \end{cases}$$

Então $\varphi_j(\Delta^{p-1}) = \Delta^{p-1}$ e $|J\varphi_j| = 1$, assim pelo teorema de mudança de variáveis temos que

$$\begin{aligned} & (-1)^i \int_{\Delta^{p-1}} a_j (1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_1, \dots, r_j) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_p = \\ & (-1)^{j-1} \int_{\Delta^{p-1}} a_j(r_1, \dots, r_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_j, \dots, r_{p-1}) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{p-1}. \end{aligned}$$

Das igualdades acima vimos que a prova foi reduzida a mostrar que

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta^{p-1}} a_j \left(1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_1, \dots, r_j \right) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_p = \\ &= \int_{\Delta^{p-1}} a_j(r_1, \dots, r_{j-1}, 1 - \sum_{i=1}^{p-1} r_i, r_j, \dots, r_{p-1}) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{p-1} - \\ & \quad - \int_{\Delta^{p-1}} a_j(r_1, \dots, r_{j-1}, 0, r_j, \dots, r_{p-1}) dr_1 \wedge \dots \wedge dr_{p-1} \end{aligned}$$

mas tal última igualdade é simplesmente a avaliação da integral de $(\partial a_j)/(\partial r_j)$ sobre Δ^p iterando a primeira com respeito a r_j e aplicando novamente o Teorema Fundamental do Cálculo.

□

Seja M uma variedade orientada m -dimensional. Integraremos m -formas sobre domínios regulares em M . Um subconjunto $D \subset M$ é chamado regular se para cada ponto $x \in M$ uma das seguintes condições é satisfeita:

- (a) Existe uma vizinhança aberta de m que está contida em $M - D$.
- (b) Existe uma vizinhança aberta de m que está contida em D .
- (c) Existe um sistema de coordenadas (U, φ) sobre m tal que $\varphi(U \cap D) = \varphi(U) \cap H^n$ onde H^n é semiplano superior de $\mathbb{R}^n$.

Os pontos de D do tipo (b) são chamados pontos interiores e pertencem ao $\text{int}(D)$. Os pontos do tipo (c) são chamados ponto de bordo e pertencem à fronteira ∂D de D . Sistemas de coordenadas do tipo (c) restritas a ∂D se sobrepõe diferencialmente e levam a uma estrutura de variedade de dimensão $(n-1)$ sobre ∂D , fazendo de ∂D uma variedade $(n-1)$ -dimensional mergulhada em M . Seja $m \in \partial D$ e $v \in T_m M$. Chamamos v um vetor exterior a D se para cada curva suave $\alpha(t)$ em M com $\alpha(0) = v$ tem-se $\alpha(t) \notin D$ para $0 < t < \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$. A orientação sobre M induz uma orientação sobre ∂D como segue. Seja v um vetor externo a ∂D em m e sejam $v_1, \dots, v_{n-1}$ uma base do espaço tangente $(\partial D)_m$. Então definimos $v_1, \dots, v_{n-1}$ sendo uma base orientada de $(\partial D)_m$ se e somente se $v, v_1, \dots, v_{n-1}$ é uma base orientada de $T_m M$. Pode-se facilmente verificar que esta definição é independente do vetor externo v escolhido e que ela realmente define uma orientação em ∂D . Agora seja ω uma n -forma (onde $n = \dim M$) com suporte compacto e seja D um domínio regular em M . Como um caso particular, D pode ser todo o M . Iremos definir a integral de ω sobre D . Para nosso propósito será suficiente que a n -forma ω seja contínua. Usaremos partições da unidade para reduzir o suporte de ω para n -simplices adequados em M sobre os quais podemos integrar como já fizemos. Assim, primeiramente devemos escolher n -simplices adequados relacionados a D e ∂D . Um n -simplex σ em M será chamado regular se σ se estende a um difeomorfismo numa vizinhança de Δ^n . Quando estamos

falando de n -simplices, devemos sempre assumir que eles foram estendidos dessa maneira a uma vizinhança de Δ^n . Um n -simplex regular orientável é aquele no qual o aplicação σ preserva orientações. (Sempre tomaremos a orientação padrão de $\mathbb{R}^n$). Associado com um domínio regular D , consideraremos somente n -simplices regulares orientados dos seguintes dois tipos:

$$(\alpha)\sigma(\Delta^n) \subset \text{int}(D)$$

$$(\beta)\sigma(\Delta^n) \subset \text{De}\sigma(\Delta^n) \cap \partial D = \sigma^n(\Delta^{n-1})$$

Agora cubra D por abertos U dos seguintes tipos:

(α') U mora no interior de n -simplex regular orientado σ do tipo (α) .

β' U é imagem de um n -simplex do tipo β regular e orientável de um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ que é vizinhança de um ponto na i -ésima face de Δ^n que interceta a fronteira de Δ^n somente na n -ésima face e cuja imagem sobre σ está contida em $\sigma(\Delta^n) \cup (M - D)$. Desde que $\text{supp}\omega \cap D$ é compacto, tem uma cobertura finita $U_1, \dots, U_k$ por abertos do tipo (α') ou (β') . Sejam os n -simplices regulares orientados associados $\sigma_1, \dots, \sigma_k$. Seja $U = M - (\text{supp}\omega \cap D)$ e sejam $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ as partições da unidade subornada à cobertura $U, U_1, \dots, U_n$ de M . Definimos a integral de ω sobre D por

$$\int_D \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\sigma_i} \varphi_i \omega$$

Precisamos verificar que a definição da integral acima é independente da escolha da cobertura e da partição da unidade escolhida. Sejam $V, V_1, \dots, V_n$ e $\psi, \psi_1, \dots, \psi_n$ outra cobertura e outra partição da unidade respectivamente, com V_j associado com o n -simplex regular orientado τ_j . Desde que $\psi = 0$ sobre o $\text{supp}\omega \cap D$, segue que $\sum_{j=1}^l \psi_j = 1$, assim

$$\sum_{i=1}^k \int_{\sigma_i} \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\sigma_i} \sum_{j=1}^l \psi_j \varphi_i \omega = \sum_{i,j} \int_{\sigma_i} \psi_j \varphi_i \omega$$

Similarmente

$$\sum_{j=1}^l \int_{\tau_j} \psi_j \omega = \sum_{i,j} \int_{\tau_j} \psi_j \varphi_i \omega$$

. Agora desde que $\sigma_i^{-1} \circ \tau_j$ é um difeomorfismo que preserva a orientação no conjunto aberto (possivelmente vazio) onde está definido e desde que $(\text{supp}\psi_j \varphi_i \omega) \cap \sigma_i(\Delta^n) = (\text{supp}\psi_j \varphi_i \omega) \cap \tau_j(\Delta^n)$, segue do teorema de mudança de variáveis que

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_i} \psi_j \varphi_i \omega &= \int_{\Delta^n} \delta \sigma_i(\psi_j \varphi_i \omega) = \int_{\Delta^n} \delta(\sigma_i^{-1} \circ \tau_j)[\delta \sigma_i(\psi_j \varphi_i \omega)] = \\ &= \int_{\Delta^n} \delta \tau_j(\psi_j \varphi_i \omega) = \int_{\tau_j} \psi_j \varphi_i \omega \end{aligned}$$

Assim $\int_D \omega$ é bem definido e independente da escolha da cobertura e partição da unidade. Observe que se λ é um difeomorfismo de M , então

$$\int_{\lambda(D)} \omega = \pm \int_D \delta \lambda(\omega)$$

Com o sinal "+" se, e somente se, λ preserva orientação.

Teorema 5.31. (Teorema de Stokes II) Seja D um domínio regular em variedade M orientável n -dimensional orientada e seja ω uma $(n-1)$ forma de suporte compacto. Então

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

Demonstração. Sejam $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ partições da unidade subordinada a cobertura $U_1, \dots, U_k$ de M e $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ n -simplices orientados e regulares relativos a $(\text{supp } \omega \cap D)$. Desde que $\sum_{i=1}^k \varphi_i = 1$ sobre uma vizinhança de $(\text{supp } \omega \cap D)$ e $d(\sum \varphi_i) = 0$. Assim em uma vizinhança de $(\text{supp } \omega \cap D)$ temos

$$\sum_{i=1}^k d(\varphi_i \omega) = \sum_{i=1}^k d\varphi_i \wedge \omega + \sum_{i=1}^k \varphi_i d\omega = d\omega$$

Agora se σ_i é um n -simplex do tipo que $\sigma(\Delta^n) \subset \text{int}(D)$ então temos que

$$\int_{\partial \sigma_i} \varphi_i \omega = 0 = \int_{\partial D} \varphi_i \omega$$

Desde que o $\text{supp } \varphi_i \omega \subset \text{Int } \sigma_i(\Delta^n) \subset D$. Por outro lado, suponha que σ_i é um n -simplex do tipo (β) . Neste caso $\varphi_i \omega$ é zero na fronteira de φ exceto possivelmente nos pontos no interior da n -ésima face $(\sigma_i)^n$. $(\sigma_i)^n$ é um $(n-1)$ -simplex regular que preserva orientação em ∂D se n é par e reverte orientação se n é ímpar. Segue que

$$\int_{\partial \sigma_i} \varphi_i \omega = (-1)^n \int_{\partial \sigma_i} \varphi_i \omega = (-1)^n (-1)^n \int_{\partial D} \varphi_i \omega = \int_{\partial D} \varphi_i \omega$$

Assim pela primeira versão do Teorema de Stokes temos que

$$\begin{aligned} \int_D d\omega &= \sum_i \int_D d(\varphi_i \omega) = \sum_i \int_{\sigma_i} d(\varphi_i \omega) = \sum_i \int_{\partial \sigma_i} \varphi_i \omega = \\ &= \sum_i \int_{\partial D} \varphi_i \omega = \int_{\partial D} \omega \end{aligned}$$

□

Corolário 5.32. Seja ω uma $(n - 1)$ -forma suave sobre uma variedade compacta orientada de dimensão n . Então

$$\int_M d\omega = 0.$$

REFERÊNCIAS

- [1] Bott, R.; Tu, Loring W. *Differential Forms in Algebraic Topology*. New York: Springer Verlag, 1982. Nenhuma citação no texto.
- [2] Wells, R. O. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. New York: Springer Verlag, 1980. Nenhuma citação no texto.
- [3] Warner, Frank W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. New York: Springer-Verlag, 1971. Nenhuma citação no texto.
- [4] Melo, Welington. *Topologia das Variedades*. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. Nenhuma citação no texto.
- [5] Spanier, H. Edwin. *Algebraic Topology*. New York: Springer-Verlag, 1966. Nenhuma citação no texto.
- [6] Cartan, Henri. *Differential Forms*. New York: Courier Corporation, 1970. Nenhuma citação no texto.
- [7] Hartshorne, Robin. *Algebraic Geometry*. New York: Springer-Verlag 1977. Nenhuma citação no texto.
- [8] Hatcher, Allen. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press 2002. Nenhuma citação no texto.
- [9] Lima, Elon Lages. *Curso de Análise Vol. 2*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides 11.ed. 2012. Nenhuma citação no texto.
- [10] Witte, Aldo. *Axiomatic sheaf cohomology theories*. 2015. 78f. Bachelor Thesis in Mathematics - Utrecht niversity, Utrecht, 2015. Nenhuma citação no texto.