I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

SOBRE EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA RELATIVA ENTRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Maria Luiza Paiva e Silva Lelis

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

SOBRE EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA RELATIVA ENTRE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Maria Luiza Paiva e Silva Lelis

Orientador: Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Ciências (Matemática).

SÃO CARLOS
1979

À minha mãe

ON RELATIVE ASYMPTOTIC EQUIVALENCE BETWEEN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Maria Luiza Paiva e Silva Lelis

Adviser: Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues

ABSTRACT

We are concerned with the systems:

(1) $\dot{y} = A(t)y$

(2) $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$

where x, y and $f(t,x)$ are n-vectors, $A(t)$ is a $n \times n$ matrix and t is in $J = [t_o,\infty)$, $t_o \geq 0$. We give conditions on $f(t,x)$ and $A(t)$ in such a way that the following statements hold:

(I) If $y(t) \neq 0$ is a solution of (1) then there exist a family of solutions $x(t)$ of (2) satisfying

(3) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||} = 0$

and

(4) $\dfrac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||}$ integrable on J

(II) If $x(t)$ is a solution of (2), $x(t) \neq 0$ for all large t, then there exist a family of solutions $y(t)$ of (2) such that (3) and (4) hold.

We also give an answer to the question: how large is the family of solutions $x(t)$ of (2) satisfying (I) ? A similar result follows with respect to condition (II).

Finally, we present some applications to a class of matrices $A(t)$ which include the constant and periodic cases.

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão ao Prof. Hildebrando Munhoz Rodrigues que com pertinaz atenção e entusiasmo orientou este trabalho. Agradeço-lhe também o maior amadurecimento científico e valiosas sugestões no campo profissional que sempre procurou transmitir.

Agradeço ao Prof. Plácido Zoéga Tâboas que prontamente atendeu minhas dúvidas, durante viagem de estudos do Prof. Hildebrando.

Meus agradecimentos ao Dr. Matinas Suzuki, Presidente da Fundação Educacional de Barretos em 1975 que propiciou condições para que pudesse completar meus cursos.

Agradeço a todos que colaboraram de alguma forma na realização deste trabalho.

Este trabalho foi patrocinado, parcialmente, pelas Instituições: CAPES, CNPq, FAPESP.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Consideremos as equações diferenciais ordinárias

(1) $\dot{y} = A(t)y$

(2) $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$

onde $x,y \in X$ $(X = R^n$ ou $C^n)$, t varia em $J = [t_o,\infty), t_o \geq 0$, $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ e f está definida em $J \times X$ com valores em X.

Com relação aos sistemas acima podemos considerar os seguintes problemas:

(I) Para cada solução $y(t) \neq 0$ de (1) existe uma família de soluções $x(t)$ de (2) *próxima de* $y(t)$? Quão grande é esta família ?

(II) Para cada solução $x(t)$ de (2), $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_o$, existe uma família de soluções $y(t)$ de (1) *próxima de* $x(t)$? Quão grande é esta família ?

É claro que existem diversas maneiras de considerar proximidade de soluções.

Em diversos trabalhos realizados nesta linha $x(t)$ *próxima de* $y(t)$ significa

(3) $$\lim_{t\to\infty} t^{\mu} \frac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||} = 0$$

onde $\mu \geq 0$ é um inteiro.

O primeiro problema foi estudado por S. Faedo [1] e E. Levi [3], no caso em que $A(t)$ é constante, $f(t,x)$ é linear em x e $\mu = 0$.

Z. Szmydt [9], usando o método topológico de T. Ważewski [10], generalizou os resultados de Faedo e Levi, considerando $A(t)$ ainda constante, $f(t,x)$ não necessariamente linear em x, $\mu = 0$ e $\mu = \ell$ onde ℓ é um inteiro não negativo associado a cada solução de (1). Além disso, ele deu uma estimativa para o número de parâmetros livres de que depende a família de soluções de (2).

Estes estudos foram feitos no período de 1947 a 1955.

Em 1965, N. Onuchic, usando um teorema bastante geral devido a P. Hartman e N. Onuchic [2] (Teorema 1.1 deste trabalho), generaliza o resultado de Z. Szmydt, no caso $\mu = 0$. N. Onuchic [5, (a) e (b)] dá uma resposta positiva aos problemas (I) e (II) considerando $A(t)$ não necessariamente constante.

Em 1973, ainda baseado no Teorema de Hartman e Onuchic, H. M. Rodrigues [6, (a) e (b)] generalizou os resultados de Onuchic para o caso $\mu \geq 0$ inteiro qualquer.

Em 1978, Rodrigues [6, (c)] realiza um trabalho paralelo a esses para equações com retardamento. Basicamente as técnicas utilizadas são a fórmula da variação das constantes escrita numa forma conveniente e o princípio da contração uniforme.

Em 1978, A. Spezamiglio [8], substituindo a condição (3) por

$$\lim_{t\to\infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||} = 0$$

responde positivamente aos problemas (I) e (II) para $\mu \geq 0$ um inteiro qualquer e $\rho \geq 0$ um número real. A técnica utilizada por Spezamiglio é também o Teorema de Hartman-Onuchic.

Este trabalho enquadra-se no mesmo contexto considerado em Onuchic [5, (a)], Spezamiglio [8] e Rodrigues [6, (a)]. Desta forma, depende diretamente do Teorema de Hartman-Onuchic. Nosso objetivo central pode ser formulado do seguinte modo: dar condições sobre $A(t)$ (que não será necessariamente constante) e sobre $f(t,x)$ (que não será necessariamente linear em x) de modo que os problemas (I) e (II) tenham respostas positivas, no caso em que *$x(t)$ próximo de $y(t)$* tem o seguinte significado:

$\frac{x-y}{||y||}$ pertence ao espaço de Banach

$$\mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_0^{\infty}(J,X).$$

Isto corresponde ao caso considerado por Rodrigues, quando $\mu = 0$, com a condição adicional de que

$\frac{x-y}{||y||}$ é integrável em $[t_0,\infty)$.

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados básicos que serão necessários para os capítulos posteriores. Entre estes resultados destacamos o Teorema 1.1 (de Hartman e Onuchic), que tem importância fundamental neste trabalho.

No Capítulo 2 analisamos os problemas (I) e (II). Nos Teoremas 2.5 e 2.9 damos a resposta a estes problemas. Ressaltamos também o Lema 2.3 que trata da $A(t)$-admissibilidade de um par $(\mathcal{B},\mathcal{D})$ de espaços de Banach e constitui a parte mais elaborada deste trabalho.

Finalmente, no Capítulo 3, damos algumas aplicações da teoria desenvolvida, trabalhando com uma classe de matrizes $A(t)$ que incluem as matrizes constantes e as matrizes periódicas.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

ESPAÇOS DE BANACH MAIS FORTES QUE $L(X)$

O TEOREMA DE HARTMAN-ONUCHIC

HIPÓTESES SOBRE A MATRIZ $A(t)$

TRÊS LEMAS BÁSICOS

D-EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA RELATIVA

ESPAÇOS DE BANACH MAIS FORTES QUE $L(X)$

Seja $X = R^n$ ou $X = C^n$ e $||\cdot||$ uma norma em X. Seja $J = [t_o,\infty)$ com $t_o \geq 0$. Denotaremos por $L(J,X)$ o conjunto das funções definidas em J com valores em X e localmente Lebesgue-integráveis. Em $L(J,X)$ consideremos a topologia da convergência em média de ordem 1, nos sub-intervalos limitados de J, isto é:

$f_n \xrightarrow{L(J,X)} f$ quando $n \to \infty$ se para todo $[a,b] \subset J$,

$\int_a^b |f_n - f| \to 0$ quando $n \to \infty$.

Seja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(J,X)$ um espaço de Banach. Diremos que $\mathcal{B}$ *é mais forte que* $L(J,X)$ se $\mathcal{B}$ estiver algebricamente contido em $L(J,X)$ e se convergência em $\mathcal{B}$ implica convergência em $L(J,X)$.

Seja $H(R)$ a classe de todos os espaços de Banach $\beta = \beta(J,R) \subset L(J,R)$ que satisfazem as propriedades:

(i) β é mais forte que $L(J,R)$;

(ii) se $\varphi \in \beta$, ψ é mensurável e $|\psi(t)| \leq |\varphi(t)|$ em quase toda parte, então $\psi \in \beta$ e $|\psi|_\beta \leq |\varphi|_\beta$;

(iii) $\chi_{[t_o,T]} \in \beta$ para todo $T \geq t_o$ onde $\chi_{[t_o,T]}$ é a função característica de $[t_o,T]$;

(iv) β é *lean* no infinito, isto é, se $\psi \in \beta$ então $\chi_{[t_o,T]}\cdot\psi \to \psi$ quando $T \to \infty$, em β.

Vejamos alguns exemplos de espaços pertencentes a $H(R)$.

Exemplo 1. Seja o espaço $L^p(J,R) = \{f : J \to R \mid f$ é mensurável e $|f|^p$ é Lebesgue-integrável em J, onde $1 \leq p < \infty\}$ com a norma: $|f|_p = [\int_J |f|^p]^{1/p}$.

O espaço $L^p(J,R)$ pertence a $H(R)$.

Exemplo 2. Consideremos o espaço $L^\infty(J,R)$ das funções reais f, mensuráveis e essencialmente limitadas em J, com a seguinte norma: $|f|_\infty = \operatorname{supess}|f(t)|$. Este espaço não pertence a $H(R)$. De fato, a propriedade (iv) não está satisfeita, como mostra o exemplo a seguir: seja $\psi(t) = 1$ para todo $t \in J$: $\psi \in L^\infty(J,R)$; observe-se que $|\psi - \chi_{[t_o,T]}\cdot\psi|_\infty = 1$ para todo T e portanto,

$$\chi_{[t_o,T]}\cdot\psi \not\longrightarrow \psi \quad \text{quando} \quad T \to \infty.$$

Exemplo 3. Seja o espaço $L_o^\infty(J,R)$ dos elementos ψ de $L^\infty(J,R)$ que satisfazem:

$$\operatorname*{limess}_{t\to\infty} \psi(t) = 0$$

(isto é, $\psi(t)$ coincide em quase toda parte com uma função $\psi(t)$ tal que $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$).

O espaço $L_o^\infty(J,R)$ com a norma induzida de $L^\infty(J,R)$ pertence a $H(R)$.

Exemplo 4. Seja $\psi : J \to (0,\infty)$ contínua e indiquemos por $\beta = L_{\ ,0}(J,R)$ o conjunto das funções $\varphi \in L(J,R)$ tais que $\frac{\varphi}{\psi} \in L_0^\infty(J,R)$. Em β, consideremos a norma: $|\varphi|_\beta = |\frac{\varphi}{\psi}|_\infty$.

O espaço $\beta = L_{\psi,0}(J,R)$ pertence a $H(R)$.

Vejamos exemplos de espaços mais fortes que $L(J,X)$.

Exemplo 5. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ espaços de Banach mais fortes que $L(J,X)$. Consideremos em $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ a norma:

$$|\cdot|_{\mathcal{B}} = |\cdot|_1 + |\cdot|_2$$

onde $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ indicam as normas em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ respectivamente.

O espaço $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach mais forte que $L(J,X)$. Para demonstrarmos esta afirmação provemos inicialmente que $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach.

Seja (f_n), $f_n \in \mathcal{B}$ para $n = 1, 2, \ldots,$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}$. Desde que $|\cdot|_i \leq |\cdot|_{\mathcal{B}}$ para $i = 1,2$ segue que (f_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}_1$ e em $\mathcal{B}_2$. Logo, $f_n \xrightarrow{\mathcal{B}_1} f_1$ e $f_n \xrightarrow{\mathcal{B}_2} f_2$. Como $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são mais fortes que $L(J,X)$, temos: $f_n \xrightarrow{L(J,X)} f_1$ e $f_n \xrightarrow{L(J,X)} f_2$. Como $L(J,X)$ é um espaço de Hausdorff segue, da unicidade do limite, que $f_1 = f_2$. Portanto $f_n \xrightarrow{\mathcal{B}} f_1$.

Mostremos agora que a convergência em $\mathcal{B}$ implica a convergência em $L(J,X)$.

Seja (f_n) uma seqüência em $\mathcal{B}$ com $f_n \xrightarrow{\mathcal{B}} f$ quando $n \to \infty$. Portanto $f_n \xrightarrow{\mathcal{B}_1} f$ e do fato de $\mathcal{B}_1$ ser mais forte que $L(J,X)$ segue que $f_n \xrightarrow{L(J,X)} f$ o que conclui a demonstração.

Dado um espaço $\beta = \beta(J,R)$ mais forte que $L(J,R)$ podemos considerar o espaço $\mathcal{B} = \mathcal{B}(J,X) = \{f \in L(J,X) \mid ||f|| \in \beta\}$ com a norma: $|f|_B = |||f|||_\beta$. É fácil ver que $\mathcal{B}$ é mais forte que $L(J,X)$.

Exemplo 6. A partir de $\beta = L_{\psi,0}(J,R)$ podemos tomar o espaço

$$\mathcal{B} = L_{\psi,0}(J,X) = \{x \in L(J,X) \mid ||x|| \in L_{\psi,0}(J,R)\}$$

com a norma

$$|\cdot|_B = |||\cdot|||_\beta .$$

Este espaço $\mathcal{B}$ é mais forte que $L(J,X)$.

Exemplo 7. O espaço $\mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X)$, de acordo com o que já vimos, é um espaço de Banach mais forte que $L(J,X)$.

O TEOREMA DE HARTMAN-ONUCHIC

Consideremos os sistemas homogêneo e não homogêneo:

(H) $\dot{y} = A(t)y$

(NH) $\dot{x} = A(t)x + b(t)$

onde supomos $A(t)$ uma matriz $q \times q$ localmente Lebesgue-integrável em $J = [t_o,\infty)$.

Sejam $\mathcal{B},\mathcal{D} \subset L(J,X)$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$ mais fortes que $L(J,X)$. Dizemos que o par $(\mathcal{B},\mathcal{D})$ é *$A(t)$-admissível* se para cada $b \in \mathcal{B}$ existir pelo menos uma solução $x(t)$ de (NH) tal que $x(t) \in \mathcal{D}$.

Sejam:

- $\overline{B}(\rho,D) = \{x \in \mathcal{D} \mid |x|_{\mathcal{D}} \le \rho\}$ a bola fechada em $\mathcal{D}$ de raio $\rho > 0$;
- $C_c(J,X)$ o conjunto das funções contínuas em J, com valores em X, considerando-se neste conjunto a topologia da convergência uniforme nas partes compactas;

- $S = \bar{B}(\rho,D) \cap C_c(J,X)$;

- $\bar{S}$, a aderência de S em $C_c(J,X)$.

Diremos que x é uma $\mathcal{D}$-solução para $\dot{x} = g(t,x)$ se é solução deste sistema em J e $x \in \mathcal{D}$.

Consideremos agora o conjunto $X_{o,\mathcal{D}} = \{\xi \in X \mid$ a solução y de (H) satisfazendo $y(t_o) = \xi$ pertence a $\mathcal{D}\}$. É fácil verificar que $X_{o,\mathcal{D}}$ é subespaço vetorial de X.

Seja $X_{1,\mathcal{D}}$ um subespaço vetorial de X tal que $X = X_{o,\mathcal{D}} \oplus X_{1,\mathcal{D}}$.

Tomemos o sistema:

(P) $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$.

Teorema 1.1. Seja $A(t)$ *uma matriz* $n \times n$ *localmente Lebesgue-integrável em* J. *Suponhamos satisfeitas as seguintes hipóteses:*

(a) $(\mathcal{B},\mathcal{D})$ *é* $A(t)$*-admissível;*

(b) *para cada* $x \in \bar{S}$, $f(\cdot,(\cdot)) \in \mathcal{B}$ *e a função* $x \in \bar{S} \to f(\cdot,x(\cdot)) \in \mathcal{B}$ *é contínua em* $\bar{S}$, *onde em* $\bar{S}$ *estamos considerando a topologia induzida pela topologia de* $C_c(J,X)$;

(c) *existe constante* $r > 0$ *tal que* $|f(\cdot,x(\cdot))|_{\mathcal{B}} \leq r$ *para toda função* $x \in \bar{S}$.

Nas condições acima, existem constantes C_o *e* K *que dependem somente de* $A(t)$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ *e* $X_{1,\mathcal{D}}$ *de modo que se* $\xi_o \in X_{o,\mathcal{D}}$ *satisfaz:* $C_o||\xi_o|| + Kr \leq \rho$, *existe pelo menos uma* $\mathcal{D}$*-solução* x *de* (P) *que satisfaz:* $P_{o,\mathcal{D}}x(t_o) = \xi_o$ *onde* $P_{o,\mathcal{D}}$ *indica a projeção sobre* $X_{o,\mathcal{D}}$.

Observação: como referência para o teorema acima, que depende fortemente de resultados de Massera e Schäffer, ver [2,3].

HIPÓTESES SOBRE A MATRIZ $A(t)$

Seja $B(t) = (b_{i,j}(t))$ uma matriz $q \times q$.

Diremos que *$B(t)$ satisfaz a hipótese H* se:

$B(t)$ é contínua em J;

$b_{i,j}(t) = 0$, qualquer que seja $t \in J$, para $i < j$;

$b_{i,i}(t) = \alpha + \lambda(t)$, $i = 1, 2, \ldots, q$ onde λ satisfaz a condição: $\int_{t_0}^{t} R(\lambda(s))ds$ é limitada em J (se z é um número complexo, $R(z)$ indica a parte real de z);

$b_{i,j}(t)$ é limitada em J para $i > j$;

para $m = 2, \ldots, q$ tem-se:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\left|\int_{t_0}^{t} b_{m,m-1}(t_{m-2})dt_{m-2}\int_{t_0}^{t_{m-2}} b_{m-1,m-2}(t_{m-3})dt_{m-3}\cdots\int_{t_0}^{t_1} b_{2,1}(s)ds\right|}{t^{m-1}} > 0$$

Observação: uma condição suficiente para o último item da hipótese H é que:

$$\lim_{t\to\infty} |b_{j+1,j}(t)| > 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, q \text{ e } b_{j+1,j}(t) \text{ real.}$$

Diremos que a matriz *$A(t)$ satisfaz a hipóste H_1* se:

$A(t) = \mathrm{diag}(A^1(t), \ldots, A^N(t))$ onde:

$A^k(t)$, $k = 1, \ldots, N$ são matrizes $n_k \times n_k$ satisfazendo a hipótese H e

$R(\alpha_1) \geq \ldots \geq R(\alpha_N)$ onde α_k é o elemento constante da diagonal de $A^k(t)$.

TRÊS LEMAS BÁSICOS

Lema 1.2. Seja A(t) *matriz* $q \times q$ *satisfazendo a hipótese* H. *Então, para cada solução* $y(t) \not\equiv 0$ *do sistema* (H) *existe um inteiro* ℓ, $0 \le \ell \le q-1$ *tal que*

$$0 < \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha)t}} \le \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha)t}} < \infty.$$

Observação: a demonstração deste lema pode ser encontrada em [5.a (Lema 1)].

Lema 1.3. Seja $A(t) = \mathrm{diag}(A^1(t), \ldots, A^N(t))$ *matriz satisfazendo a hipótese* H_1. *Então para cada solução* $y(t) \not\equiv 0$ *de* $\dot{y} = A(t)y$ *existem inteiros* i, ℓ, *com* $1 \le i \le N$, $0 \le \ell \le n_i - 1$, *tais que*

$$0 < \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_i)t}} \le \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_i)t}} < \infty.$$

Observação: o lema acima pode ser encontrado em [5.a (Lema 2)].

Lema 1.4. Seja h *uma função não negativa e* k *um número inteiro,* $k \ge 2$. *Então,*

$$\int_t^\infty \{\int_{u_k}^\infty \ldots (\int_{u_2}^\infty h(u_1)du_1) \ldots du_k\} < \infty$$

se e somente se

$$\int_t^\infty h(u)u^{k-1}du < \infty.$$

Observação: o lema acima pode ser encontrado em [9].

$\mathcal{D}$-EQUIVALÊNCIA ASSINTÓTICA RELATIVA

Consideremos os sistemas:

$$\dot{y} = f(t,y)$$

$$\dot{x} = g(t,x)$$

onde $f,g : [0,\infty) \times X \to X$.

Seja $\mathcal{D}$ um espaço de Banach mais forte que $L(J,X)$.

Vamos definir o conceito de $\mathcal{D}$-equivalência assintótica relativa para os dois sistemas dados: dizemos que os sistemas são *$\mathcal{D}$-relativa assintoticamente equivalentes* se a toda solução $y(t)$ de $\dot{y} = f(t,y)$, definida no futuro, isto é, definida em algum intervalo da forma $[\tau,\infty)$, com $y(t) \neq 0$ para todo t suficientemente grande, corresponder pelo menos uma solução $x(t)$ de $\dot{x} = g(t,x)$, definida no futuro, satisfazendo: $\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}$ e reciprocamente.

Observe-se que a relação: $x \sim y$ se e somente se $\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_0^\infty(J,X)$ é uma relação de equivalência no conjunto das funções contínuas de J em X, não nulas.

CAPÍTULO 2

OS PROBLEMAS P_1 e P_2

OS PROBLEMAS P_1 e P_2

Seja $A(t)$ uma matriz satisfazendo à hipótese H_1 e $f : R \times X \to X$ uma função. Seja $\mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_0^\infty(J,X)$. Consideremos os sistemas:

(H) $\dot{y} = A(t)y$

(P) $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$.

Nosso objetivo é dar condições sobre f para que os seguintes problemas tenham solução:

(P_1) Dada uma solução $y(t) \neq 0$ de (H), determinar uma família de soluções $x(t)$ de (P) de modo que

$$\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}.$$

Além disso, dar informações sobre o número de parâmetros dos quais depende essa família.

(P_2) Dada uma solução $x(t)$ de (P) com $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_1 > t_0$, determinar uma família de soluções $y(t)$ de (H) de modo que

$$\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D}, \quad \text{para} \quad t \geq t_1.$$

Além disso, dar informações sobre o número de parâmetros dos quais depende essa família.

Para responder estes dois problemas utilizaremos o Teorema 1.1. Das hipóteses deste teorema, a mais trabalhosa de ser verificada é a hipótese (a), que diz respeito à admissibilidade. Por esta razão verificaremos a hipótese da admissibilidade separadamente e isto será um resultado fundamental neste trabalho. Antes, porém, forneceremos uma estimativa da dimensão de $X_{o,\mathcal{D}}$.

A DIMENSÃO DE $X_{o,\mathcal{D}}$

Lema 2.1. Seja $C(t) = A(t) - \frac{\ell}{t}I$ *onde* $\ell \geq 0$ *é um inteiro e* $A(t)$ *é uma matriz* $n \times n$ *que satisfaz a hipótese* H. *Seja* $R(\alpha) < 0$ *ou* $R(\alpha) = 0$, *sendo que, neste último caso, exige-se também que* $\ell \geq n+1$. *Então, toda solução* $y(t)$ *de* $\dot{y} = C(t)y$ *pertence a* $\mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_0^\infty(J,X)$, *sendo* $J = [t_0,\infty)$, $t_0 > 0$.

Prova:

Fazendo a mudança de variáveis:

$x = t^\ell y$

em $\dot{y} = C(t)y$ obtemos o sistema equivalente

$\dot{x} = A(t)x$.

Pelo Lema 1.2, para cada solução $x(t) \neq 0$ de $\dot{x}=A(t)x$, existe um inteiro m, $0 \leq m \leq n-1$ tal que:

$$0 < \underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{||x(t)||}{t^m e^{R(\alpha)t}} \leq \overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{||x(t)||}{t^m e^{R(\alpha)t}} < \infty.$$

Portanto, existe uma constante c tal que

$$\frac{||x(t)||}{t^m e^{R(\alpha)t}} \leq c$$

donde,

$$||x(t)|| \leq c.t^m e^{R(\alpha)t}$$

Portanto,

$$(2.1) \quad ||y(t)|| \leq c.t^{m-\ell} e^{R(\alpha)t}$$

para cada solução $y(t)$ de $\dot{y} = C(t)y$.

Vamos agora examinar os dois casos possíveis: $R(\alpha) < 0$ ou $R(\alpha) = 0$.

Caso 1: $R(\alpha) < 0$.

Observemos inicialmente o seguinte fato: se $P(t)$ é um polinômio então, para todo $\varepsilon > 0$ e $\tau \in R$ existe uma constante K tal que:

$$P(t) < Ke^{\varepsilon t}, \quad \text{para} \quad t > \tau.$$

Observe-se ainda que o resultado acima é válido mesmo que ocorram expoentes negativos em $P(t)$.

Seja ε tal que $0 < \varepsilon < -R(\alpha)$ e $P(t) = ct^{m-\ell}$. Então, de acordo com as observações acima, existem K e τ com

$$ct^{m-\ell} < Ke^{\varepsilon t} \quad \text{para} \quad t > \tau.$$

De (2.1) segue que

$$||y(t)|| \le Ke^{(\varepsilon+R(\alpha))t} \quad \text{para} \quad t > \tau$$

e como $\varepsilon+R(\alpha) < 0$ resulta

$$\lim_{t\to\infty} ||y(t)|| = 0 \quad \text{e} \quad \int_{t_o}^{\infty} ||y(t)|| < \infty$$

donde, $y \in \mathcal{D}$.

Caso 2: $R(\alpha) = 0$.

Neste caso, temos de (2.1):

$$||y(t)|| \le ct^{m-\ell}.$$

Como $m \le n-1$ e $-\ell \le -n-1$ segue que

$$m-\ell \le -2.$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} ||y(t)|| = 0$$

e lembrando que $t_o > 0$,

$$\int_{t_o}^{\infty} ||y(t)||dt < \infty.$$

Portanto, $y \in \mathcal{D}$. ␣

Lema 2.2. Suponhamos $t_o > 0$. *Seja* $B(t)$ *uma matriz satisfazendo a hipótese* H_1, *onde* $b^k_{i,i}(t) = \gamma_k + \lambda_k(t)$, $i = 1, \ldots, n_k$ *e* $R(\gamma_1) \ge \ldots \ge R(\gamma_{q-1}) > R(\gamma_q) = R(\gamma_{q+1}) = \ldots$ $\ldots = R(\gamma_{q+r-1}) = 0 > R(\gamma_{q+r}) \ge \ldots \ge R(\gamma_N)$ *onde* $q = 1$ *ou* $q+r-1 = N$ *podem ocorrer.*

Sejam:

a) ℓ *um inteiro fixado,* $\ell \geq 0$*;*

b) $s_k = \min\{\ell-1, n_k\}$ *se* $\ell > 1$ *e* $s_k = 0$ *se* $\ell \leq 1$, *para* $k = q, q+1, \ldots, q+r-1$*;*

c) $p = s_q + \ldots + s_{q+r-1} + n_{q+r} + \ldots + n_N$ *se* $q+r-1 < N$ *e* $p = s_q + \ldots + s_{q+r-1}$ *se* $q+r-1 = N$.

Então, $\dim X_{o,\mathcal{D}} \geq p$ *onde* $\mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X)$ e $X_{o,\mathcal{D}} = \{\xi \in X \mid$ *a solução* $y(t)$ *de* $\dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]y$ *que satisfaz* $y(t_o) = \xi$ *pertence a* $\mathcal{D}\}$.

Prova:

Para cada $k = q+r, \ldots, N$, a matriz B^k satisfaz as hipóteses do Lema 2.1 e portanto toda solução y^k de

$$(2.2) \quad \dot{y}^k = [B^k(t) - \frac{\ell}{t}I]y^k$$

satisfaz

$$||y^k|| \in \mathcal{D}_1, \quad k = q+r, \ldots$$

onde $\mathcal{D}_1 = L^1(J,R) \cap L_o^\infty(J,R)$.

Analisaremos a seguir os dois casos possíveis: $\ell \leq 1$ e $\ell > 1$.

Caso 1: $\ell \leq 1$

Neste caso temos: $s_k = 0$ para todo $k = q,\ldots,q+r-1$ e portanto,

$$p = n_{q+r} + \ldots + n_N.$$

Seja

$$(2.3)\quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^{q+r}(t) \\ y^{q+r+1}(t) \\ \vdots \\ y^{N}(t) \end{bmatrix}$$

onde $\qquad y^k = \begin{bmatrix} y_1^k \\ \vdots \\ y_{n_k}^k \end{bmatrix}$ $\qquad$ é solução de (2.2) para todo

$k = q+r, \ldots, N, \quad y^k \not\equiv 0.$

É claro que $y(t)$ é solução de

$$\dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]y$$

Além disso, $y \in \mathcal{D}$.

Logo, a n-upla

$$(0,\ldots,0,a_1^{q+r},a_2^{q+r},\ldots,a_{n_{q+r}}^{q+r},a_1^{q+r+1},\ldots,a_{n_{q+r+1}}^{q+r+1},\ldots,a_1^N,\ldots,a_N^N)$$

pertence a $X_{o,\mathcal{D}}$ para quaisquer $a_i^k \in R$, $k = q+r, \ldots, N$, $i = 1, \ldots, n_k$. Donde se conclui que

$$\dim X_{o,\mathcal{D}} \geq n_{q+r} + \ldots + n_N = p.$$

Caso 2: $\ell > 1$

Tomemos agora o seguinte sistema:

$$(2.4)\quad \dot{x} = [A(t) - \frac{\ell}{t}I]x$$

onde $A(t)$ é a submatriz de $B^k(t)$ que se obtém suprimindo-se as $n_k - s_k$ primeiras linhas e colunas de $B^k(t)$.

Para $k = q, \ldots, q+r-1$, $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$.

A ordem de $A(t)$ é

$$s_k = \min\{\ell-1, n_k\}$$

e portanto

$$\ell-1 \geq s_k$$

isto é,

$$\ell \geq s_k + 1$$

Então, pelo lema 2.1 toda solução $x(t)$ do sistema (2.4) é tal que $||x(t)|| \in \mathcal{D}_1$.

Seja

$$(2.5)\quad y^k(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^k_{n_k-s_k+1}(t) \\ \vdots \\ y^k_{n_k}(t) \end{bmatrix}_{n_k \times 1}$$

tal que

$$x(t) = \begin{bmatrix} y^k_{n_k-s_k+1} \\ \vdots \\ y^k_{n_k}(t) \end{bmatrix}$$

é solução de (2.4).

Segue pois que $y^k(t)$ é solução de (2.2) e $||y^k(t)|| \in \mathcal{D}_1$ para $k = q, \ldots, q+r-1$.

Tomemos agora a função

$$\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y^q \\ \vdots \\ y^{q+r-1} \\ y^{q+r} \\ \vdots \\ y^N \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

onde y^k é solução de (2.2) para $k = q+r, \ldots, N$ e y^k é do tipo descrito em (2.5) para $k = q, \ldots, q+r-1$.

É fácil ver que:

ψ é solução de $\dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}]y$ e

$\psi \in \mathcal{D}$.

Segue, portanto, que qualquer n-upla do tipo:

$$\mathrm{col}(0,\ldots,0,a^q,\ldots,a^{q+r-1},a^{q+r},\ldots,a^N)$$

pertence a $X_{o,\mathcal{D}}$,

onde

$$a^k = \mathrm{col}(\underbrace{a_1^k,a_2^k,\ldots,a_{n_k}^k}_{n_k \text{ componentes}}) \quad \text{para} \quad k = q+r,\ldots,N$$

$$a^k = \mathrm{col}(0,\ldots,0,a_{n_k-s_k+1}^k,a_{n_k-s_k+2}^k,\ldots,a_{n_k}^k) \quad \text{para}$$

$k = q,\ldots,q+r-1$.

Logo,

$$\dim X_{o,\mathcal{D}} \geq s_q + s_{q+1} + \dots + s_{q+r-1} + n_{q+r} + \dots + n_N = p. \square$$

ADMISSIBILIDADE

Consideremos uma matriz $A(t)$ satisfazendo H_1 e $h : J \to R$, contínua, que satisfaça a seguinte propriedade:

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{s+1} h(t) \ell n\, t\, dt < \infty$$

onde $t_o > 0$ e $s+1 = \max\{n_k,\ k = 1,\dots,N\}$.

Pode-se demonstrar (ver [9]) que existe uma função $\varphi : J \to R$ tal que

$\varphi \geq 1$

φ é contínua

$\varphi(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$

$$\int_{t_o}^{\infty} \varphi(t) h(t) t^{s+1} \ell n\, t\, dt < \infty$$

Seja $\psi = \hat{M}\varphi h$ onde $\hat{M} > 0$ é uma constante.

Consideremos os espaços de Banach:

$\mathcal{B} = L_{\psi,0}(J,X)$ e

$\mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^{\infty}(J,X)$

Lema 2.3. Seja $B(t)$ *uma matriz satisfazendo as hipóteses do Lema 2.2, com a restrição:* $b_{i,i}^k(t) = \gamma_k$. *Então o par* $(\mathcal{B},\mathcal{D})$ *é* $[B(t) - \frac{\ell}{t} I]$*-admissível, onde* $0 \leq \ell \leq s$, ℓ *inteiro.*

Prova:

Seja

$$g = \begin{bmatrix} g^1 \\ \vdots \\ g^N \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

uma função de $\mathcal{B}$, onde

$$g^k = \begin{bmatrix} g_1^k \\ \vdots \\ g_{n_k}^k \end{bmatrix}_{n_k \times 1} \qquad \text{para } k = 1, \ldots, N$$

Consideremos o sistema:

$$(2.6) \quad \dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t} I]y + g(t)$$

Este sistema pode ser decomposto em N sistemas:

$$(2.7)_k \quad \dot{y}^k = [B^k(t) - \frac{\ell}{t} I]y^k + g^k(t).$$

Vamos dividir a demonstração em três partes:

Caso 1. $1 \leq k \leq q-1$

Caso 2. $q \leq k \leq q+r-1$

Caso 3. $q+r \leq k \leq N$

Para cada k, existe uma solução de $(2.7)_k$ da seguinte forma:

$$y^k(t) = \begin{bmatrix} y_1^k(t) \\ \vdots \\ y_{n_k}^k(t) \end{bmatrix}_{n_k \times 1}$$

onde

$$y_i^k(t) = \sigma_1^i(t) + \ldots + \sigma_i^i(t), \quad i = 1, \ldots, n_k$$

com

$$\sigma_m^i(t) = \int_\infty^t b_1(t_1)dt_1 \int_\infty^{t_1} b_2(t_2)dt_2 \ldots$$

$$\ldots \int_\infty^{t_{m-2}} b_{m-1}(t_{m-1})dt_{m-1} \int_\infty^{t_{m-1}} h_{i,m}(t_m) e^{\int_{t_m}^{t} [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau} dt_m,$$

onde $h_{i,m}(t)$ é combinação linear de componentes de $g(t)$, desde que seja garantida a convergência das integrais, onde $m = 1, \ldots, i$ e cada $b_j(t)$ é elemento não diagonal de $B^k(t)$ e, portanto, $b_j(t)$ é limitado. Assim, existe $P > 0$ tal que

$$|b_j(t)| \leq P, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o.$$

Em cada caso mostraremos que a m-upla integral acima é convergente, $\sigma_m^i(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ e $\int_{t_o}^\infty |\sigma_m^i(t)|dt < \infty$ para todo $i = 1, \ldots, n_k$ e $m = 1, 2, \ldots, i$.

Desta forma, teremos mostrado que

$$y_k^i(t) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty \quad \text{e} \quad \int_{t_o}^\infty |y_i^k(t)|dt < \infty,$$

isto é,

$$y^k \in \mathcal{D}_{n_k} = L^1(J, E^{n_k}) \cap L_o^\infty(J, E^{n_k})$$

onde $E = R$ ou C, e assim

$$y = \begin{bmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^N \end{bmatrix}$$

pertence a $\mathcal{D}$, conforme queremos.

$$\int_{t_m}^{t} [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau = \gamma_k(t-t_m) + \ell n(\frac{t_m}{t})^{\ell}.$$

Assim,

$$|e^{\int_{t_m}^{t} [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau}| = e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} . (\frac{t_m}{t})^{\ell}$$

e como existe $P > 0$ tal que $|b_j(t)| \leq P$ para todo $t \geq t_o$ e para cada j, existe $c > 0$ tal que:

$$|\sigma_m^i(t)| \leq c\int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ \ldots \int_{t_{m-2}}^{\infty} dt_{m-1} \int_{t_{m-1}}^{\infty} | h_{i,m}(t_m)| .$$

$$. \ e^{R(\gamma_k)} (\frac{t_m}{t})^{\ell} dt_m$$

Como foi suposto que $g \in L_{\psi,0}(J,X)$, temos que $\frac{g}{\psi}$ é essencialmente limitada em $[t_o,\infty)$. Existe pois $M > 0$ tal que $|g(t)| \leq M\psi(t)$ q.t.p. Assim, da desigualdade acima, resulta que

$$(2.8) \quad |\sigma_m^i(t)| \leq K\int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ \ldots$$

$$\ldots \int_{t_{m-2}}^{\infty} dt_{m-1} \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) e^{R(\gamma_k)(t-t_m)} . (\frac{t_m}{t})^{\ell} dt_m$$

onde $K = cM$.

Passemos agora à análise dos três casos.

Caso 1: $1 \le k \le q-1$. Logo, $\mathcal{R}(\gamma_k) > 0$.

Existe $T \ge t_o$ tal que

$$\frac{e^{\mathcal{R}(\gamma_k)t}}{t^{\ell}} \quad \text{é crescente para} \quad t \ge T.$$

Da afirmação acima e da desigualdade (2.8) segue que, para $t > T$,

$$|\sigma_m^i(t)| \le K\int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \ \ldots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)\frac{e^{\mathcal{R}(\gamma_k)t_m}}{t_m^{\ell}} \ .$$

$$. \ e^{-\mathcal{R}(\gamma_k)t_m} . t_m^{\ell} dt_m ,$$

isto é,

$$(2.9) \quad |\sigma_m^i(t)| \le K\int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \ \ldots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)dt_m .$$

Como, por hipótese,

$$\int_{t_o}^\infty \psi(\tau)\tau^{s+1}d\tau < \infty \quad \text{e} \quad m-1 \le s < s+1$$

temos que

$$\int_{t_o}^\infty \psi(\tau)\tau^{m-1}d\tau < \infty.$$

Segue então, do Lema 1.4 que:

$$\int_{t_o}^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \ \ldots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)dt_m < \infty.$$

Logo,

$$\int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \ \dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)dt_m \to 0$$ quando $t \to \infty$ e, portanto,

$$|\sigma_m^i(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

De (2.9) temos:

$$\int_T^\infty |\sigma_m^i(t)|dt \le K\int_T^\infty dt \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \ \dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)dt_m.$$

Como

$$\int_T^\infty \psi(u)u^m du < \infty,$$

segue do Lema 1.4 que

$$\int_T^\infty dt \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \ \dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)dt_m < \infty.$$

Logo,

$$\int_{t_o}^\infty |\sigma_m^i(t)|dt = \int_{t_o}^T |\sigma_m^i(t)|dt + \int_T^\infty |\sigma_m^i(t)|dt < \infty.$$

Conclusão do Caso 1: para $1 \le k \le q-1$, com a hipótese: $\int_{t_o}^\infty \psi(u)u^{s+1}du < \infty$ temos: $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

Caso 2: $q \le k \le q+r-1$. Logo, $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$.

Neste caso, a desigualdade (2.8) torna-se:

$$(2.10) \quad |\sigma_m^i(t)| \le \frac{K}{t^\ell}\int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \ \dots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^\ell dt_m.$$

Analisaremos os seguintes sub-casos:

$$\textit{Caso 2.1:}\quad \ell \le 2 \begin{cases} 2.1.1: & \ell = 0 \\ 2.1.2: & \ell = 1 \\ 2.1.3: & \ell = 2 \end{cases}$$

$$\textit{Caso 2.2:}\quad \ell > 2 \begin{cases} 2.2.1: & n_k-(\ell-1) \ge 1 \begin{cases} 2.2.1.1: & 1 \le i \le n_k-(\ell-1) \\ 2.2.1.2: & i > n_k-(\ell-1) \end{cases} \\ 2.2.2: & n_k-(\ell-1) < 1 \end{cases}$$

Caso 2.1.1: $\ell = 0$

Da desigualdade (2.10) temos:

$$(2.11)\quad |\sigma_m^i(t)| \le K\int_t^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)dt_m$$

Desde que

$$\int_{t_o}^\infty \psi(u)u^{m-1}du < \infty$$

segue do Lema 1.4 que

$$\int_{t_o}^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)dt_m < \infty$$

e, portanto,

$$\int_t^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)dt_m \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

De (2.11) segue que

$$|\sigma_m^i(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty \quad \text{e}$$

$$\int_{t_o}^{\infty} |\sigma_m^i(t)|dt \le \int_{t_o}^{\infty} dt\int_{t}^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ \dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m)dt_m$$

Como,

$$\int_{t_o}^{\infty} \psi(u)u^m du < \infty$$

segue, do Lema 1.4, que:

$$\int_{t_o}^{\infty} dt\int_{t}^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ \dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m)dt_m < \infty$$

e, portanto,

$$\int_{t_o}^{\infty} |\sigma_m^i(t)|dt < \infty.$$

Conclusão do Caso 2.1.1: para $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$, $\ell = 0$ e $\int_{t_o}^{\infty} \psi(u)u^{s+1}du < \infty$, tem-se $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

Caso 2.1.2: $\ell = 1$

Da desigualdade (2.10) temos:

$$(2.12) \quad |\sigma_m^i(t)| \le \frac{K}{t}\int_{t}^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ \dots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m)t_m dt_m.$$

Como, por hipótese,

$$\int_{t_o}^{\infty} \psi(s)ss^{m-1}ds = \int_{t_o}^{\infty} \psi(s)s^m ds < \infty$$

segue de (2.12) e do Lema 1.4 que

$|\sigma_m^i(t)| \to 0$ quando $t \to \infty$ e

$$\int_{t_o}^{\infty} |\sigma_m^i(t)|dt \le K\int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t}\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m dt_m$$

Calculando por partes a integral do segundo membro, temos:

$$\int_{t_o}^{\infty} |\sigma_m^i(t)|dt \le K\{\ell nt\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m dt_m\Big|_{t_o}^{\infty}$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty}\ell ntdt\int_t^{\infty}dt_2\int_{t_2}^{\infty}dt_3 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)dt_m\} =$$

$$= K\{\lim_{t\to\infty}\ell nt\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m dt_m +$$

$$- \ell nt_o\int_{t_o}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m dt_m +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty}\ell ntdt\int_t^{\infty}dt_2\int_{t_2}^{\infty}dt_3 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)dt_m\}$$

Como a função ℓnt é crescente e $t_m \ge t_{m-1} \ge \ldots \ge t_1 \ge t$ temos que:

$$\int_{t_o}^{\infty} |\sigma_m^i(t)|dt \le K\{\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m\ell nt_m dt_m +$$

$$- \ell nt_o\int_{t_o}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m dt_m +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty}dt\int_t^{\infty}dt_2\int_{t_2}^{\infty}dt_3 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m\ell nt_m dt_m\}.$$

Desde que

$$m \le i \le n_k \le s+1$$

e que

$$\int_{t_o}^{\infty} \psi(u) u^m \ell n u \, du < \infty$$

e portanto

$$\int_{t_o}^{\infty} \psi(u) u^m du < \infty$$

segue, do Lema 1.4, que

$$\int_{t_o}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) t_m dt_m < \infty,$$

$$\int_{t_o}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) t_m \ell n t_m dt_m < \infty$$

e portanto

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m) t_m \ell n t_m dt_m = 0.$$

Temos, portanto, que:

$$\int_{t_o}^{\infty} |\sigma_m^i(t)| dt < \infty.$$

Conclusão do Caso 2.1.2: supondo $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$, $\ell = 1$ e $\int_{t_o}^{\infty} \psi(u) u^{s+1} \ell n u du < \infty$, tem-se: $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

Caso 2.1.3: $\ell = 2$

Da desigualdade (2.10) temos:

$$|\sigma_m^i(t)| \le \frac{K}{t^2}\int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \; \dots \; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) t_m^2 dt_m$$

e portanto,

$$(2.13) \quad t^2|\sigma_m^i(t)| \le K\int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \; \dots \; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) t_m^2 dt_m$$

Pelo Lema 1.4, a convergência da integral

$$\int_{t_o}^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \; \dots \; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) t_m^2 dt_m$$

é equivalente à convergência da integral

$$\int_{t_o}^\infty \psi(u) u^2 u^{m-1} du = \int_{t_o}^\infty \psi(u) u^{m+1} du.$$

Seja

$1 \le i \le n_k - 1$

Então,

$m \le i \le n_k - 1 \le s$

de modo que

$m+1 \le s+1.$

Assim, a hipótese assegura a convergência da última integral e, portanto,

$$\int_{t_o}^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \; \dots \; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) t_m^2 dt_m < \infty$$

e

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^2dt_m = 0.$$

Segue de (2.13) que

$$\text{(2.14)}\quad \lim_{t\to\infty} t^2|\sigma_m^i(t)| = 0, \quad 1 \le i \le n_k-1$$

e também que

$$\int_{t_o}^\infty t|\sigma_m^i(t)|dt \le K\int_{t_o}^\infty \frac{dt}{t}\int_t^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^2dt_m$$

Resolvendo por partes a integral do segundo membro,

$$\int_{t_o}^\infty t|\sigma_m^i(t)|dt \le K\{\lim_{t\to\infty} \ell nt\int_t^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^2dt_m$$

$$- \ell n\ t_o\int_{t_o}^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^2dt_m +$$

$$+ \int_{t_o}^\infty \ell ntdt\int_t^\infty dt_2\int_{t_2}^\infty dt_3 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^2dt_m\}.$$

Como a função ℓnt é crescente e $t \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_m$ tem-se:

$$\int_{t_o}^\infty t|\sigma_m^i(t)|dt \le K\{\lim_{t\to\infty}\int_t^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^2\ell nt_mdt_m$$

$$- \ell n\ t_o\int_{t_o}^\infty dt_1\int_{t_1}^\infty dt_2 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^2dt_m +$$

$$+ \int_{t_o}^\infty dt\int_t^\infty dt_2\int_{t_2}^\infty dt_3 \;\dots\; \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m)t_m^2\ell nt_mdt_m\}$$

Como $m+1 \le i+1 \le n_k \le s+1$ temos, por hipótese,

$$\int_{t_o}^{\infty} \psi(u)u^{m+1}\ell nudu < \infty.$$

Pelo Lema 1.4 temos então:

$$\int_{t_o}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \;\ldots\; \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m)t_m^2 \ell nt_m < \infty$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \;\ldots\; \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m)t_m^2 \ell nt_m = 0.$$

Logo,

$$(2.15) \quad \int_{t_o}^{\infty} t|\sigma_m^i(t)|dt < \infty, \quad \text{para} \quad 1 \le i \le n_k-1$$

De (2.14) e (2.15) concluimos que

$$(2.16) \quad t^2|y_i^k(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty \quad \text{e} \quad \int_{t_o}^{\infty} t|y_i^k(t)|dt < \infty$$

para $1 \le i \le n_k-1$.

Consideremos agora $i = r = n_k$.

A coordenada $y_r^k(t)$ deverá satisfazer à seguinte equação diferencial:

$$\dot{y}_r^k = [\gamma_k - \frac{\ell}{t}]y_r^k + \sigma^r(t) + g_r^k(t)$$

onde

$$\sigma^r(t) = b_{r,1}^k(t)y_1^k(t) + \ldots + b_{r,r-1}^k(t)y_{r-1}^k(t).$$

Observe-se que as coordenadas $y_1^k(t) \ldots y_{r-1}^k(t)$ já foram encontradas acima.

De (2.16) segue que

$$t^2|\sigma^r(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty \quad \text{e}$$

$$\int_{t_o}^{\infty} t|\sigma^r(t)|dt < \infty$$

Uma solução da equação diferencial acima é da forma:

$$y_r^k(t) = \int_{t_o}^{t} e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau} [\sigma^r(u) + g_r^k(u)]du$$

Lembrando que $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$ e portanto,

$$|e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau}| = (\tfrac{u}{t})^{\ell}$$

temos:

$$|y_r^k(t)| \leq \frac{1}{t^{\ell}}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}|\sigma^r(u)|du + \frac{1}{t^{\ell}}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}|g_r^k(u)|du$$

e como

$$|g_r^k(t)| \leq M\psi(t) \quad \text{e} \quad \ell = 2$$

temos:

$$(2.17) \quad |y_r^k(t)| \leq \frac{1}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^2|\sigma^r(u)|du + \frac{M}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^2\psi(u)du.$$

Portanto,

$$(2.18) \quad t|y_r^k(t)| \leq \frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^2|\sigma^r(u)|du + \frac{M}{t}\int_{t_o}^{t} u^2\psi(u)du.$$

Pela regra de L'Hospital, temos:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^2|\sigma^r(u)|du = \lim_{t\to\infty} t^2|\sigma^r(t)| = 0$$

Por outro lado, desde que $\ell \leq s$ e $\ell = 2$, temos que $s \geq 2$ e portanto $s+1 \geq 3$. Assim, por hipótese,

$$\int_{t_o}^{\infty} u^3\psi(u)du < \infty$$

donde,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{t}\int_{t_o}^{t} u^2\psi(u)du = 0$$

Assim,

$$t|y_r^k(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty.$$

De (2.17) temos:

$$\int_{t_o}^{\infty} |y_r^k(t)|dt \leq \int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^2|\sigma^r(u)|du +$$

$$+ M\int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^2\psi(u)du$$

Resolvendo por partes a primeira integral do segundo membro, temos:

$$\int_{t_o}^{\infty} |y_r^k(t)|dt \leq -\frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^2|\sigma^r(u)|du\Big|_{t_o}^{\infty} +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty} \frac{1}{t}t^2|\sigma^r(t)|dt + M\int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^2\psi(u)du =$$

$$= \lim_{t\to\infty} - \frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^2|\sigma^r(u)|du + \int_{t_o}^{\infty} t|\sigma^r(t)|dt +$$

$$+ M\int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^2\psi(u)du.$$

Conforme já vimos acima,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^2|\sigma^r(u)|du = 0$$

$$\int_{t_o}^{\infty} t|\sigma^r(t)|dt < \infty$$

$$\int_{t_o}^{t} u^2\psi(u)du \leq C_1 < \infty$$

Portanto,

$$\int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^2\psi(u)du \leq \int_{t_o}^{\infty} \frac{C_1}{t^2}dt < \infty.$$

Das desigualdades acima resulta:

$$\int_{t_o}^{\infty} |y_r^k(t)|dt < \infty.$$

Dos resultados obtidos segue que:

Conclusão do Caso 2.1.3: supondo $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$, $\ell = 2$ e $\int_{t_o}^{\infty} \psi(u)u^{s+1}\ell nudu < \infty$, tem-se: $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

Assim, encerramos o *Caso 2.1.*

Conclusão do Caso 2.1: supondo $R(\gamma_k) = 0$, $\ell \leq 2$ e $\int_{t_o}^{\infty} \psi(u)u^{s+1}\ell nu du < \infty$, tem-se: $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

Caso 2.2: $\ell > 2$

Caso 2.2.1: $n_k-(\ell-1) \geq 1$, $\ell > 2$

Caso 2.2.1.1: $\ell > 2$, $n_k-(\ell-1) \geq 1$ e $1 \leq i \leq n_k-(\ell-1)$.

Como $m \leq i$, segue que

$m \leq n_k-(\ell-1)$

e portanto

$m+\ell-1 \leq n_k \leq s+1$

Da desigualdade (2.10) temos:

$$t^{\ell}|\sigma_m^i(t)| \leq K\int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m)t_m^{\ell} dt_m$$

Como $m+\ell-1 \leq s+1$, da hipótese tem-se:

$$\int_{t_o}^{\infty} \psi(u)u^{m+\ell-1}du < \infty.$$

Do Lema 1.4 segue, então, que

$$\int_{t_o}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m)t_m^{\ell} dt_m < \infty$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{t_{m-1}}^{\infty} \psi(t_m)t_m^{\ell} dt_m = 0$$

o que implica:

(2.19) $\lim_{t\to\infty} t^{\ell}|\sigma_m^i(t)| = 0$

Ainda de (2.10) temos:

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-1}|\sigma_m^i(t)|dt \le K\int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t}\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m^{\ell}dt_m$$

Resolvendo por partes a integral do segundo membro e lembrando que ℓnt é crescente, temos:

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-1}|\sigma_m^i(t)|dt \le K\{-\ell nt_o\int_{t_o}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m^{\ell}dt_m +$$

$$(2.20) \quad + \lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m^{\ell}\ell nt_m dt_m +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty}dt\int_t^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m^{\ell}\ell nt_m dt_m\}.$$

Como $m+\ell-1 \le s+1$ segue que

$$\int_{t_o}^{\infty}\psi(u)u^{m+\ell-1}du < \infty \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty}\psi(u)u^{m+\ell-1}\ell nu du < \infty$$

Pelo Lema 1.4 temos:

$$\int_{t_o}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m^{\ell}dt_m < \infty$$

e

$$\int_{t_o}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}dt_2 \ldots \int_{t_{m-1}}^{\infty}\psi(t_m)t_m^{\ell}\ell nt_m dt_m < \infty$$

e portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \; \ldots \int_{t_{m-1}}^\infty \psi(t_m) t_m^\ell \ell n t_m dt_m = 0$$

Segue de (2.20) que:

$$(2.21) \quad \int_{t_o}^\infty t^{\ell-1} |\sigma_m^i(t)| dt < \infty.$$

De (2.19) e (2.21) temos:

Conclusão do Caso 2.2.1.1: supondo $R(\gamma_k) = 0$, $\ell > 2$, $1 \le i \le n_k-(\ell-1)$ e $\int_{t_o}^\infty \psi(u) u^{s+1} \ell n u du < \infty$, tem-se:

$$(2.22) \quad \lim_{t\to\infty} t^\ell |y_i^k(t)| = 0 \quad \text{e} \quad \int_{t_o}^\infty t^{\ell-1} |y_i^k(t)| dt < \infty.$$

Caso 2.2.1.2: $\ell > 2$, $n_k-(\ell-1) \ge 1$ e $i > n_k-(\ell-1)$.

Seja $i = n_k-(\ell-1) + r$ onde $r = 1, 2, \ldots, \ell-1$.

Para $r = 1$ temos: $i = n_k-(\ell-1) + 1$. Neste caso a i-ésima componente de y^k é dada por:

$$(2.23) \quad y_i^k(t) = \int_{t_o}^t e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}] d\tau} [\sigma^i(u) + g_i^k(u)] du$$

onde

$$\sigma^i(t) = b_{i,j}^k(t) y_1^k(t) + \ldots + b_{i,i-1}^k(t) y_{i-1}^k(t)$$

Desde que $b_{i,j}^k(t)$ é limitada e para cada $j = 1,2,\ldots,$ $\ldots, i-1 = n_k-(\ell-1)$, $y_j^k(t)$ satisfaz (2.22) segue que

$$(2.24) \quad t^\ell |\sigma^i(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

e

$$(2.25)\quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-1}|\sigma^i(t)|dt < \infty$$

De (2.23) temos:

$$|y_i^k(t)| \le \frac{1}{t^\ell}\int_{t_o}^{t} u^\ell|\sigma^i(u)|du + \frac{M}{t^\ell}\int_{t_o}^{t} u^\ell\psi(u)du$$

$$(2.26)\quad t^{\ell-1}|y_i^k(t)| \le \frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^\ell|\sigma^i(u)|du + \frac{M}{t}\int_{t_o}^{t} u^\ell\psi(u)du$$

Como $u^\ell\psi(u)$ é positiva e integrável em $[t_o,\infty)$ temos:

$$\int_{t_o}^{t} u^\ell\psi(u)du \le \int_{t_o}^{\infty} u^\ell\psi(u)du = C_2 < \infty$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{t}\int_{t_o}^{t} u^\ell\psi(u)du = 0$$

Além disso, da regra de L'Hospital e de (2.24),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^\ell|\sigma^i(u)|du = \lim_{t\to\infty} t^\ell|\sigma^i(t)| = 0.$$

Portanto, de (2.25), tem-se:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-1}|y_i^k(t)| = 0, \quad \text{para} \quad i = n_k-(\ell-1)+1.$$

De (2.26) segue que:

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-2}|y_i^k(t)|dt \le \int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^\ell|\sigma^i(u)|du +$$

$$+ M\int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}\psi(u)du$$

Resolvendo por partes a primeira integral do segundo membro e usando os resultados (2.24) e (2.25), tem-se:

$$\int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}|\sigma^i(u)|du = -\frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}|\sigma^i(u)|du\Big|_{t_o}^{\infty} +$$

$$+\int_{t_o}^{\infty}\frac{1}{t}t^{\ell}|\sigma^i(t)|dt = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}|\sigma^i(u)|du +$$

$$+\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-1}|\sigma^i(t)|dt = \lim_{t\to\infty} - t^{\ell}|\sigma^i(t)| +$$

$$+\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-1}|\sigma^i(t)|dt < \infty$$

Além disso, a segunda integral do segundo membro também é convergente, pois

$$\int_{t_o}^{t} u^{\ell}\psi(u)du \le \int_{t_o}^{\infty} u^{\ell}\psi(u)du < \infty$$

e portanto,

$$\int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t^2}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}\psi(u)du < \infty.$$

Em vista dos fatos acima, segue que:

$$\int_{t_o}^{t} t^{\ell-2}|y_i^k(t)|dt < \infty \quad \text{para} \quad i = n_k-(\ell-1)+1$$

Vamos supor que tenhamos mostrado para todo r, $1 \le r \le q$ onde $q < \ell-1$, que

$$(2.27) \quad \lim_{t\to\infty} t^{\ell-r}|y_i^k(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(r+1)}|y_i^k(t)|dt < \infty$$

onde $i = n_k-(\ell-1) + r$.

Mostremos que para $j = n_k-(\ell-1) + q+1 \le n_k$ ainda vale (2.27), isto é, que

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-(q+1)}|y_j^k(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(q+2)}|y_j^k(t)| < \infty$$

Isto encerrará a prova, por indução, de que (2.27) vale para todo $i = n_k-(\ell-1) + r$ onde $1 \le r \le \ell-1$.

Já vimos (2.26) que:

$$(2.28) \quad |y_j^k(t)| \le \frac{1}{t^\ell}\int_{t_o}^{t} u^\ell|\sigma^j(u)|du + \frac{M}{t^\ell}\int_{t_o}^{t} u^\ell\psi(u)du \quad ,$$

onde

$$\sigma^j(u) = b_{j,1}^k(t)y_1^k(t) + \dots + b_{j,j-1}^k(t)y_{j,j-1}^k(t)$$

Mas $b_{j,i}^k$ é limitada e para $i = 1,2,\dots,j-1 = n_k-(\ell-1)+q$ vale a hipótese de indução estabelecida em (2.27). Portanto, como $\ell-r \ge \ell-q$ temos:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-q}|y_i^k(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(q+1)}|y_i^k(t)|dt < \infty$$

Das considerações acima temos:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-q}|\sigma^j(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(q+1)}|\sigma^j(t)|dt < \infty$$

De (2.28) vem:

$$t^{\ell-(q+1)}|y_j^k(t)| \le \frac{1}{t^{q+1}}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}|\sigma^j(u)|du +$$

$$+ \frac{M}{t^{q+1}}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}\psi(u)du$$

Mas, pela regra de L'Hospital,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{q+1}}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}|\sigma^j(u)|du = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\ell}|\sigma^j(t)|}{(q+1)t^q} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\ell-q}|\sigma^j(t)|}{q+1} = 0$$

Além disso,

$$\int_{t_o}^{t} u^{\ell}\psi(u)du \le \int_{t_o}^{\infty} u^{\ell}\psi(u)du \le \int_{t_o}^{\infty} u^{s+1}\psi(u)du < \infty$$

donde,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{t^{q+1}}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}\psi(u)du = 0$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-(q+1)}|y_j^k(t)| = 0 \quad \text{para} \quad j = n_k-(\ell-1) + q+1$$

De (2.28) temos ainda:

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(q+2)}|y_j^k(t)|dt \le \int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^{q+2}}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}|\sigma^j(u)|du +$$

(2.29)

$$+ M\int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^{q+2}}\int_{t_o}^{t} u^{\ell}\psi(u)du$$

Calculando por partes a primeira integral do segundo membro, temos:

$$\int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t^{q+2}}\int_{t_o}^{t}u^{\ell}|\sigma^j(u)|du = \frac{-1}{(q+1)t^{q+1}}\int_{t_o}^{t}u^{\ell}|\sigma^j(u)|du\Big|_{t_o}^{\infty}$$

$$+\int_{t_o}^{\infty}\frac{t^{\ell}|\sigma^j(t)|}{(q+1)t^{q+1}}dt = \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{(q+1)t^{q+1}}\int_{t_o}^{t}u^{\ell}|\sigma^j(u)|du +$$

$$+\frac{1}{q+1}\int_{t_o}^{\infty}t^{\ell-(q+1)}|\sigma^j(t)|dt = \frac{1}{q+1}\int_{t_o}^{\infty}t^{\ell-(q+1)}|\sigma^j(t)|dt < \infty$$

Quanto à segunda integral do segundo membro de (2.29), temos:

$$\int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t^{q+2}}\int_{t_o}^{t}u^{\ell}\psi(u)du \le \int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t^{q+2}}\int_{t_o}^{\infty}u^{\ell}\psi(u)du < \infty$$

pois

$$\int_{t_o}^{\infty}u^{\ell}\psi(u)du < \infty$$

e

$$q+2 \ge 2.$$

Em vista do exposto segue de (2.29) que

$$\int_{t_o}^{\infty}t^{\ell-(q+2)}|y_j^k(t)|dt < \infty, \quad j = n_k-(\ell-1) + q+1$$

o que encerra a prova por indução. Assim, temos:

Conclusão do Caso 2.2.1.2: supondo $R(\gamma_k) = 0$, $\ell > 2$, e $i = n_k-(\ell-1) + q$ com $1 \le q \le \ell-1$ tem-se:

$$t^{\ell-q}|y_i^k(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad t\to\infty$$

e

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(q+1)}|y_i^k(t)|dt < \infty$$

Lembrando que, para $\ell > 2$ tem-se $\ell-1 > 1$ e que $q \leq \ell-1$ implica $\ell-(q+1) \geq 0$ e $\ell-q \geq 1$, temos, das conclusões dos casos 2.2.1.1 e 2.2.1.2 que:

$$|y_i^k(t)| \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to \infty$$

$$\int_{t_o}^{\infty} |y_i^k(t)|dt < \infty$$

qualquer que seja $i = 1,2,\ldots,n_k$, o que conclui o caso 2.2.1.

Conclusão do Caso 2.2.1: supondo $R(\gamma_k) = 0$, $\ell > 2$ e $n_k-(\ell-1) > 0$, com a hipótese de que $\int_{t_o}^{\infty} t^{s+1}\ell nt\psi(t)dt < \infty$, tem-se: $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

Caso 2.2.2: $R(\gamma_k) = 0$, $\ell > 2$ e $n_k-(\ell-1) \leq 0$.

Para $m = 1$, da desigualdade (2.10) temos:

$$|\sigma_1^i(t)| \leq \frac{K}{t^{\ell}}\int_t^{\infty}\psi(t_1)t_1^{\ell}dt_1$$

e, portanto,

$$t^{\ell}|\sigma_1^i(t)| \leq K\int_t^{\infty}\psi(t_1)t_1^{\ell}dt_1$$

Como $\ell < s+1$, segue da hipótese que

$$\int_{t_o}^{\infty}\psi(t_1)t_1^{\ell}dt_1 < \infty$$

e, portanto

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty}\psi(t_1)t_1^{\ell}dt_1 = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell}|\sigma_1^i(t)| = 0.$$

Além disso,

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell}|\sigma_1^i(t)|dt \le K\int_{t_o}^{\infty} dt\int_t^{\infty}\psi(t_1)t_1^{\ell}dt_1$$

Como $\ell+1 \le s+1$, da hipótese temos:

$$\int_{t_o}^{\infty} \psi(t)t^{\ell+1}dt < \infty$$

e assim, do Lema 1.4, segue que

$$\int_{t_o}^{\infty} dt\int_t^{\infty}\psi(t_1)t_1^{\ell}dt_1 < \infty$$

Segue então que

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell}|\sigma_1^i(t)|dt < \infty$$

Seja agora $m = 2$. Da desigualdade (2.10) temos:

$$t^{\ell}|\sigma_2^i(t)| \le K\int_t^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty} \psi(t_2)t_2^{\ell}dt_2$$

Como já vimos

$$\int_{t_o}^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}dt_2 < \infty$$

e assim,

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty} dt_1\int_{t_1}^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}dt_2 = 0.$$

Logo,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell}|\sigma_2^i(t)| = 0.$$

Por outro lado,

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-1}|\sigma_2^i(t)|dt \le K\int_{t_o}^{\infty}\frac{dt}{t}\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}dt_2 =$$

$$= \ell nt\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}dt_2 + \int_{t_o}^{\infty}\ell ntdt\int_t^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}dt_2 \le$$

$$\le \lim_{t\to\infty}\int_t^{\infty}dt_1\int_{t_k}^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}\ell nt_2dt_2 +$$

$$- \ell nt_o\int_{t_o}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}dt_2 +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty}dt\int_t^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}\ell nt_2dt_2$$

Como $\ell+1 \le s+1$ segue, da hipótese, que:

$$\int_{t_o}^{\infty}\psi(t)t^{\ell+1}\ell ntdt < \infty$$

e

$$\int_{t_o}^{\infty}\psi(t)t^{\ell+1}dt < \infty$$

e, portanto, pelo Lema 1.4,

$$\int_{t_o}^{\infty}dt\int_t^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}dt_2 < \infty$$

e

$$\int_{t_o}^{\infty}dt_1\int_{t_1}^{\infty}\psi(t_2)t_2^{\ell}\ell nt_2dt_2 < \infty$$

E deste último fato, temos ainda,

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \psi(t_2) t_2^{\ell} \ell n t_2 dt_2 = 0$$

Dos fatos acima, segue que

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-1} |\sigma_2^i(t)| dt < \infty$$

Como

$$y_1^k(t) = \sigma_1^1(t) \quad \text{e} \quad y_2^k(t) = \sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t)$$

segue, das conclusões acima, que

$$(2.30) \quad \lim_{t\to\infty} t^{\ell} |y_i^k(t)| = 0 \quad \text{e} \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-1} |y_i^k(t)| dt < \infty,$$

para $i = 1, 2$.

Vamos agora provar que

$$(2.31) \quad \lim_{t\to\infty} t^{\ell-r} |y_i^k(t)| = 0 \quad \text{e} \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-r-1} |y_i^k(t)| dt < \infty$$

para todo $i = 2+r$, $r = 0,1,2,\ldots,n_k-2$.

Faremos a prova por indução sobre r. Para $r = 0$, temos $i = 2$ e já vimos que neste caso vale (2.31). Vamos supor que para todo r, com $r \leq \rho < n_k-2$ vale (2.31). Seja $j=2+\rho+1$. Mostremos que (2.31) vale para $i = j$, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-(\rho+1)} |y_j^k(t)| = 0$$

e

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(\rho+1)-1} |y_j^k(t)| dt < \infty$$

Já vimos que

$$(2.32)\quad |y_j^k(t)| \le \frac{1}{t^{\ell}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}|\sigma^i(\tau)|d\tau + \frac{M}{t^{\ell}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}\psi(\tau)d\tau$$

onde

$$\sigma^j(t) = b_{j,1}^k y_1^k(t) + \dots + b_{j,j-1}^k(t) y_{j-1}^k(t).$$

Como $r \le \rho$ temos: $\ell-r \ge \ell-\rho$ e $\ell-r-1 \ge \ell-\rho-1$. Além disso, $\ell-\rho \le \ell$ e $\ell-\rho-1 \le \ell$. Segue então, da hipótese de indução e de (2.30) que

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-\rho}|y_i^k(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-\rho-1}|y_i^k(t)| < \infty$$

para todo $i = 1,2,\dots,j-1$. E desde que $b_{j,i}^k(t)$ é limitada para $i = 1,2,\dots,j-1$, temos:

$$(2.33)\quad \lim_{t\to\infty} t^{\ell-\rho}|\sigma^j(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-\rho-1}|\sigma^j(t)| < \infty$$

De (2.32) temos:

$$t^{\ell-(\rho+1)}|y_j^k(t)| \le \frac{1}{t^{\rho+1}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}|\sigma^j(\tau)|d\tau +$$

$$+ \frac{M}{t^{\rho+1}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}\psi(\tau)d\tau$$

Pela regra de L'Hospital e por (2.33) temos:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{\rho+1}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}|\sigma^j(\tau)|d\tau = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\ell}|\sigma^j(t)|}{(\rho+1)t^{\rho}} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^{\ell-\rho}|\sigma^j(t)|}{\rho+1} = 0.$$

Como $\tau^{\ell}\psi(\tau) > 0$ temos:

$$\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}\psi(\tau)d\tau \le \int_{t_o}^{\infty} \tau^{\ell}\psi(\tau)d\tau = C_2 < \infty$$

Assim,

$$0 \le \lim_{t\to\infty} \frac{M}{t^{\rho+1}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}\psi(\tau)d\tau \le \lim_{t\to\infty} \frac{MC_2}{t^{\rho+1}} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{t^{\rho+1}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}\psi(\tau)d\tau = 0$$

Podemos agora afirmar que:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-(\rho+1)}y_j^k(t) = 0$$

De (2.32) temos:

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(\rho+1)-1}|y_j^k(t)|dt \le \int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^{\rho+2}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}|\sigma^j(\tau)|d\tau +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty} \frac{M}{t^{\rho+2}}dt\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}\psi(\tau)d\tau$$

Fazendo por partes a primeira integral do segundo membro e aplicando (2.33) temos:

$$\int_{t_o}^{\infty} \frac{dt}{t^{\rho+2}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}|\sigma^j(\tau)|d\tau = \frac{-1}{(\rho+1)t^{\rho+1}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}|\sigma^j(\tau)|d\tau\Big|_{t_o}^{\infty} +$$

$$+ \int_{t_o}^{\infty} \frac{1}{(\rho+1)t^{\rho+1}}t^{\ell}|\sigma^j(t)|dt =$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{(\rho+1)t^{\rho+1}}\int_{t_o}^{t} \tau^{\ell}|\sigma^j(\tau)|d\tau + \frac{1}{\rho+1}\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-\rho-1}|\sigma^j(t)|dt =$$

$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\ell-\rho}}{(\rho+1)^2}|\sigma^j(t)| + \frac{1}{\rho+1}\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-\rho-1}|\sigma^j(t)|dt < \infty$$

Temos agora que

$$\int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-(\rho+1)-1}|y_j^k(t)|dt < \infty$$

o que encerra a prova de (2.31). Portanto, para todo $i = 2+r$, $r = 0, 1, \ldots, n_k-2$ temos:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell-r}|y_i^k(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell-r-1}|y_i^k(t)|dt < \infty$$

e para $i = 1$ já provamos que

$$\lim_{t\to\infty} t^{\ell}|y_i^k(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} t^{\ell}|y_i^k(t)|dt < \infty$$

Mas se $r \le n_k-2$ então $\ell-r \ge \ell-n_k+2$.

Por outro lado, $n_k-(\ell-1) \le 0$, donde,

$\ell - n_k \ge 1$.

Logo,

$\ell-r \ge 3$ e $\ell-r-1 \ge 2$.

Portanto, podemos garantir, a partir do resultado obtido por indução e do resultado obtido para $i = 1$ (lembrando que aqui $\ell > 2$) que:

$$\lim_{t\to\infty} |y_i^k(t)| = 0 \quad e \quad \int_{t_o}^{\infty} |y_i^k(t)|dt < \infty$$

para todo i, $1 \le i \le n_k$, o que conclui o caso 2.2.2.

Conclusão do Caso 2.2.2: supondo $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$, $\ell > 2$, e $n_k-(\ell-1) \le 0$, com a hipótese de que $\int_{t_o}^{\infty} t^{s+1}\ell n t\psi(t)dt < \infty$, tem-se: $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

As conclusões dos casos 2.2.1 e 2.2.2 nos permitem escrever:

Conclusão do Caso 2.2: supondo $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$ e $\ell > 2$, com a hipótese $\int_{t_o}^{\infty} t^{s+1}\ell n t\psi(t)dt < \infty$ temos que $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

As provas dos casos 2.1 e 2.2 concluem o nosso caso 2.

Conculsão do Caso 2: supondo $\mathcal{R}(\gamma_k) = 0$, com a hipótese $\int_{t_o}^{\infty} t^{s+1}\ell n t\psi(t)dt < \infty$ tem-se que $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

Caso 3: $q+r \le k \le N$. Logo, $\mathcal{R}(\gamma_k) < 0$

Já vimos que uma solução de $(2.7)_k$ tem componentes da forma:

$$y_i^k(t) = \sigma_1^i(t) + \sigma_2^i(t) + \ldots + \sigma_i^i(t), \quad i=1,2,\ldots,n_k$$

onde

$$\sigma_m^i(t) = \int_{t_o}^{t} b_1(t_1)dt_1 \int_{t_o}^{t} b_2(t_2)dt_2 \ldots \int_{t_o}^{t_{m-2}} b(t_{m-1})dt_{m-1} \cdot$$

(2.34)

$$\cdot \int_{t_o}^{t_{m-1}} h_{i,m}(t_m) e^{\int_{t_m}^{t} [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau} dt_m$$

Seja $0 < \delta < -R(\gamma_k)$. Temos que:

$$e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau} = e^{\gamma_k(t-u)} e^{\ell n(\frac{u}{t})^\ell} = e^{\gamma_k(t-u)} (\frac{u}{t})^\ell$$

Portanto,

$$|e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau}| = (\frac{u}{t})^\ell e^{R(\gamma_k)(t-u)}$$

onde $t_o \leq u \leq t$. Assim,

$$(\frac{u}{t})^\ell \leq 1$$

Além disso, como $R(\gamma_k) \leq -\delta$, tem-se:

$$R(\gamma_k)(t-u) \leq -\delta(t-u)$$

Logo,

$$(2.35) \quad |e^{\int_u^t [\gamma_k - \frac{\ell}{\tau}]d\tau}| \leq e^{-\delta(t-u)}, \quad t_o \leq u \leq t$$

De [5.a, pg. 54], de (2.34) e de (2.35) podemos afirmar que existe constante k_1 tal que, para $t \geq t_o$,

$$(2.36) \quad |\sigma_m^i(t)| \leq k_1 e^{(-\frac{\delta}{2m})t} \int_{t_o}^{\infty} \psi(u)du + k_1 \int_{t/2}^{t} \psi(u)du$$

e portanto,

$$0 \leq \lim_{t\to\infty} |\sigma_m^i(t)| \leq \lim_{t\to\infty} [k_1 e^{(-\frac{\delta}{2m})t} \int_{t_o}^{\infty} \psi(u)du] +$$

$$+ k_1 \lim_{t\to\infty} \int_{t/2}^{t} \psi(u)du$$

Mas, por hipótese,

$$\int_{t_o}^{\infty} \psi(u)du = k_2 < \infty$$

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} k_1 e^{(-\frac{\delta}{2m})t} \int_{t_o}^{\infty} \psi(u)du = \lim_{t\to\infty} k_1 k_2 e^{(-\frac{\delta}{2m})t} = 0$$

Além disso, para $\frac{t}{2} \geq t_o$, temos:

$$\int_{t/2}^{t} \psi(u)du \leq \int_{t_o}^{t} \psi(u)du$$

e como $\int_{t_o}^{\infty} \psi(u)du < \infty$, segue que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t/2}^{t} \psi(u)du = 0$$

Das considerações acima segue que

$$\lim_{t\to\infty} |\sigma_m^i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n_k \quad \text{e} \quad m = 1, 2, \ldots, i$$

De (2.36) temos ainda:

$$\int_{t_o}^{\infty} |\sigma_m^i(t)|dt \leq k_1 \int_{t_o}^{\infty} e^{(-\frac{\delta}{2m})t} \int_{t_o}^{\infty} \psi(u)du +$$

$$+ k_1 \int_{t_o}^{\infty} dt \int_{t/2}^{t} \psi(u)du$$

A respeito das integrais do segundo membro, podemos dizer:

$$\int_{t_o}^{\infty} e^{(-\frac{\delta}{2m})} dt \int_{t_o}^{\infty} \psi(u)du = k_2 \int_{t_o}^{\infty} e^{(-\frac{\delta}{2m})t} dt < \infty$$

Fazendo $\frac{t}{2} = t_1$ temos: $t = 2t_1$ e $dt = 2dt_1$. Logo,

$$\int_{t_o}^{\infty} dt \int_{t/2}^{t} \psi(u)du = 2\int_{t_o}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{2t_1} \psi(u)du \leq$$

$$\leq 2\int_{t_o}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \psi(u)du$$

Como, por hipótese, $\int_{t_o}^{\infty} t\psi(t) < \infty$, segue, do Lema 1.4, que

$$\int_{t_o}^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \psi(u)du < \infty$$

e portanto,

$$\int_{t_o}^{\infty} dt \int_{t/2}^{t} \psi(u)du < \infty.$$

Segue pois que:

$$\int_{t_o}^{\infty} |\sigma_m^i(t)|dt < \infty, \quad \text{para} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n_k \\ m = 1, 2, \ldots, i \end{array}$$

o que conclui a demonstração do caso 3.

Conclusão do Caso 3: supondo $\mathcal{R}(\gamma_k) < 0$, com a hipótese $\int_{t_o}^{\infty} t\psi(t)dt < \infty$, temos que: $y^k \in \mathcal{D}_{n_k}$.

Fica assim demonstrado o Lema 2.3. □

HIPÓTESES SOBRE A FUNÇÃO $f(t,x)$

Dada uma matriz $A(t)$, $n \times n$, $A(t) = (A^1(t),\ldots,A^N(t))$, diremos que uma função f, definida em $J \times X$ com valores em

X satisfaz a hipótese H_2 se:

f é contínua em $J \times X$ e

existe uma função h, contínua, tal que

$||f(t,x)|| \leq h(t)||x||$ para $t \geq t_o \geq 1$ e $x \in X$, e

$\int_{t_o}^{\infty} h(t)t^{s+1}\ell n t dt < \infty$, sendo s+1 a maior ordem dos blocos de A(t).

RESPOSTA AO PROBLEMA P_1

O próximo lema já estabelece uma relação entre soluções dos sistemas:

(H) $\dot{y} = A(t)y$

(P) $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$

Lema 2.4. Seja A(t) *matriz* $n \times n$ *satisfazendo a hipótese* H_1 *e seja* s+1 *a ordem máxima dos blocos de* A(t). *Seja* f(t,x) *satisfazendo a hipótese* H_2. *Seja* $y(t) \neq 0$ *solução de* (H) *satisfazendo:*

$$(2.37) \quad \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{\mathcal{R}(\alpha_q)t}} < \infty$$

onde α_q *é o elemento constante da diagonal do bloco* $A^q(t)$, ℓ *é um inteiro e* $0 \leq \ell \leq s$. *Então, existe uma família de soluções* x(t) *de* (P), *dependendo de pelo menos* p *parâmetros, satisfazendo:*

$$\frac{x(t)-y(t)}{t^{\ell} e^{\mathcal{R}(\alpha_q)t}} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^{\infty}(J,X).$$

Observação: o número p é construido como no Lema 2.2, aplicado no caso ao sistema (2.38) que aparecerá na demonstração. Se $p = 0$, a expressão *família de soluções dependendo de pelo menos p parâmetros* deve ser entendida como *pelo menos uma solução.*

Prova:

Os elementos diagonais de $A^k(t)$ são da forma

$$a^k_{i,i}(t) = \alpha_k + \lambda_k(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_k)$$

onde $\int_{t_o}^{t} R(\lambda_k(\tau))d\tau$ é limitada em J. Observamos, contudo, que não há perda de generalidade em supor

$$a^k_{i,i}(t) = \alpha_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n_k;\ k = 1, 2, \ldots, N)$$

Para verificar este fato, faremos a seguinte mudança de variáveis:

$$y^k_j = e^{\int_{t_o}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau}\, \tilde{y}^k_j, \quad x^k_j = e^{\int_{t_o}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau}\, \tilde{x}^k_j$$

respectivamente nos sistemas (H) e (P). Temos

$$\tilde{y}^k_j = e^{-\int_{t_o}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau}\, y^k_j, \quad (j = 1, 2, \ldots, n_k).$$

donde

$$\dot{\tilde{y}}^k_j = e^{-\int_{t_o}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau}\, \dot{y}^k_j - e^{-\int_{t_o}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau}\, \lambda_k(t) y^k_j$$

Daí,

$$\dot{\tilde{y}}_j^k = e^{-\int_{t_o}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau} [a_{j,1}^k(t)y_1^k + \ldots + a_{j,j-1}^k(t)y_j^k + \alpha_k(t)y_j^k]$$

e portanto,

$$\dot{\tilde{y}}_j^k = (a_{j,1}^k(t) \ \ldots \ a_{j,j-1}^k(t) \ \alpha_k \ 0 \ \ldots \ 0) \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^k \\ \vdots \\ \tilde{y}_j^k \\ \vdots \\ \tilde{y}_{n_k}^k \end{bmatrix}$$

donde obtemos o sistema

$$\dot{\tilde{y}} = \tilde{A}(t)\tilde{y}$$

onde $\tilde{A}(t)$ é a matriz que se obtém fazendo $\lambda_k = 0$ em $A(t)$ e

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1^1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_{n_1}^1 \\ \vdots \\ \tilde{y}_1^N \\ \vdots \\ \tilde{y}_{n_N}^N \end{bmatrix}$$

De maneira inteiramente análoga obtemos:

$$\dot{\tilde{x}}_j^k = (a_{j,1}^k(t) \; \ldots \; a_{j,j-1}^k(t) \;\; \alpha_k \;\; 0 \; \ldots \; 0) \begin{bmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_j^k \\ \vdots \\ x_{n_k}^k \end{bmatrix} +$$

$$+ \; f_j^k(t,x) e^{-\int_{t_o}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau}$$

donde obtemos o sistema:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{f}(t,\tilde{x})$$

onde

$$\tilde{f}(t,\tilde{x}) = e^{-\int_{t_o}^{t} \lambda_k(\tau)d\tau} f(t,x)$$

Verificaremos agora que a função $\tilde{f}(t,\tilde{x})$ satisfaz hipóteses semelhantes às de f. Temos:

$$||\tilde{f}(t,\tilde{x})|| = e^{-\int_{t_o}^{t} R(\lambda_k(\tau))d\tau} ||f(t,x)|| \leq$$

$$\leq e^{-\int_{t_o}^{t} R(\lambda_k(\tau))d\tau} h(t)||x|| \overset{(*)}{=} e^{-\int_{t_o}^{t} R(\lambda_k(\tau))d\tau} h(t) \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} |x_i^j|$$

$$= h(t) e^{-\int_{t_o}^{t} R(\lambda_k(\tau))d\tau} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_j} e^{\int_{t_o}^{t} R(\lambda_j(\tau))d\tau} |\tilde{x}_i^j| \leq$$

$$\leq Lh(t)||\tilde{x}||$$

Na última desigualdade foi usado o fato de que $e^{\int_{t_o}^{t} R(\lambda_j(\tau))d\tau}$ é limitada pois $\int_{t_o}^{t} R(\lambda_j(\tau))d\tau$ é limitada. Na passagem indicada por (*) utilizamos uma particular norma de X, mas os resultados que obteremos a seguir independem da particular norma de X pois todas são equivalentes. Decorre, então, que

$$||\tilde{f}(t,x)|| \leq \tilde{h}(t)||\tilde{x}||$$

onde $\tilde{h} = Lh$ e portanto $\tilde{h}$ é contínua e $\int_{t_o}^{\infty} h(t)t^{s+1}\ell n t dt < \infty$. Logo, $\tilde{f}$ satisfaz a hipótese H_2.

Verificaremos agora que dada uma solução $y(t) \neq 0$ de (H) satisfazendo

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} < \infty,$$

a solução $\tilde{y}(t)$ correspondente pela mudança de variáveis também satisfaz as mesmas hipóteses. Provaremos ainda que se existir uma família de soluções $\tilde{x}(t)$ do sistema $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{f}(t,\tilde{x})$ satisfazendo a tese, relativamente a $\tilde{y}$ a família $x(t)$ correspondente pela mudança de variáveis também satisfaz a tese.

Seja $y(t) \neq 0$ solução de (H) satisfazendo (2.37). Então,

$$||\tilde{y}(t)|| = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} e^{-\int_{t_o}^{t} R(\lambda_k(\tau))d\tau} |y_i^k(t)|$$

Portanto, lembrando que $\int_{t_o}^{t} R(\lambda_k(\tau))d\tau$ é limitada,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{||\tilde{y}(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} \leq L_1 \cdot \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_k} \overline{\lim} \frac{|y_i^k(t)|}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} < \infty.$$

Se $\tilde{x}(t)$ é uma família de soluções de $\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}(t)\tilde{x} + \tilde{f}(t,\tilde{x})$ dependendo de pelo menos p parâmetros satisfazendo

$$\frac{||\tilde{x}(t)-\tilde{y}(t)||}{t^{\ell}e^{\mathcal{R}(\alpha_q)t}} \in \mathcal{D}$$

a família correspondente $x(t)$ também dependerá de pelo menos p parâmetros. Além disso,

$$\frac{||x(t)-y(t)||}{t^{\ell}e^{\mathcal{R}(\alpha_q)t}} = \frac{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_k}|x_j^k(t)-y_j^k(t)|}{t^{\ell}e^{\mathcal{R}(\alpha_q)t}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{n_k} e^{\int_{t_o}^{t}\mathcal{R}(\lambda_k(\tau))d\tau}|\tilde{x}_j^k(t)-\tilde{y}_j^k(t)|}{t^{\ell}e^{\mathcal{R}(\alpha_q)t}} \leq$$

$$\leq L_2\frac{||\tilde{x}(t)-\tilde{y}(t)||}{t^{\ell}e^{\mathcal{R}(\alpha_q)t}}$$

Logo,

$$\frac{||x(t)-y(t)||}{t^{\ell}e^{\mathcal{R}(\alpha_q)t}} \in \mathcal{D}$$

Conclusão: podemos supor que $a_{i,i}^k(t) = \alpha_k$ para $k = 1, 2, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots, n_k$.

Seja $y(t)$ solução não nula de (H) satisfazendo (2.37). Seja

$$z(t) = \frac{x(t)-y(t)}{t^{\ell}e^{\beta t}}$$

onde $x(t)$ satisfaz (P) e $\beta = \mathcal{R}(\alpha_q)$.

Temos então que

$$\dot{z} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]z + g(t,z)$$

onde

$$B(t) = A(t)-\beta I = \mathrm{diag}(B^1(t), \ldots, B^N(t))$$

com $B^k(t) = A^k(t)-\beta I$, $k = 1, \ldots, N$ e

$$g(t,z) = f(t,t^{\ell}e^{\beta t}z+y(t))t^{-\ell}e^{-\beta t}$$

De fato:

$$\dot{z} = \frac{t^{\ell}e^{\beta t}[\dot{x}-\dot{y}]-[x-y](\ell t^{\ell-1}e^{\beta t}+\beta t^{\ell}e^{\beta t})}{t^{2\ell}e^{2\beta t}}$$

$$\dot{z} = \frac{t^{2\ell}e^{2\beta t}[A(t)\frac{x-y}{t^{\ell}e^{\beta t}} + \frac{f(t,t^{\ell}e^{\beta t}z+y(t))}{t^{\ell}e^{\beta t}}] - \frac{x-y}{t^{\ell}e^{\beta t}}t^{\ell}e^{\beta t}(\ell t^{\ell-1}e^{\beta t}+\beta t^{\ell}e^{\beta t})}{t^{2\ell}e^{2\beta t}}$$

$$\dot{z} = A(t)z - \frac{z(\ell t^{\ell-1}+\beta t^{\ell})}{t^{\ell}} + g(t,z)$$

$$\dot{z} = [A(t)-\beta I - \frac{\ell}{t}I]z + g(t,z)$$

que é o que queríamos verificar.

Para que o lema fique demonstrado, precisamos mostrar que existe uma família de soluções $z(t)$ de

$$(2.38)\quad \dot{z} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]z + g(t,z)$$

dependendo de pelo menos p parâmetros tal que $z \in \mathcal{D}$.

Como $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \frac{||y(t)||}{t^{\ell}e^{\beta t}} < \infty$ segue que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$||y(t)|| \leq ct^{\ell}e^{\beta t}, \quad \text{para todo} \quad t \geq t_o$$

Temos então que:

$$||g(t,z)|| = ||f(t,t^{\ell}e^{\beta t}z(t)+y(t))||.|t^{-\ell}e^{-\beta t}| =$$

$$= t^{-\ell}e^{-\beta t}||f(t,t^{\ell}e^{\beta t}z+y(t))|| \le$$

$$\le t^{-\ell}e^{-\beta t}h(t)||t^{\ell}e^{\beta t}z+y(t)|| \le$$

$$\le t^{-\ell}e^{-\beta t}h(t)t^{\ell}e^{\beta t}||z||+t^{-\ell}e^{-\beta t}||y(t)||h(t) \le$$

$$\le h(t)[||z||+c]$$

Seja $\varphi : J \to R$ uma função tal que:

φ é contínua em J;

$\varphi(t) \ge 1$ para todo $t \ge t_o$;

$\varphi(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$

$$\int_{t_o}^{\infty} h(t)\varphi(t)t^{s+1}\ell n t dt < \infty$$

Como $\varphi(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$, temos que $\frac{1}{\varphi(t)} \to 0$ quando $t \to \infty$. Logo, existe $\overline{T} \ge t_o$ tal que

$$\frac{1}{\varphi(t)} < \frac{\rho}{2K} \quad \text{para } t > \overline{T}$$

onde ρ e K são dados no Teorema 1.1.

Seja $\psi(t) = [\rho+c]h(t)\varphi(t)$. Consideremos a função $\tilde{g} = g\chi_{[\overline{T},\infty)}$. Observemos que $\tilde{g}$ é nula em $[t_o,\overline{T})$ e coincide com g em $[\overline{T},\infty)$. Portanto,

$$||\tilde{g}(t,x)|| \le h(t)[||x||+c]$$

Vamos considerar o sistema:

$$\dot{y} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]y \tag{2.39}$$

Aplicaremos agora o Teorema 1.1 ao sistema

$$(2.40)\quad \dot{x} = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]x + \tilde{g}(t,x)$$

Observamos que os elementos da diagonal principal de $B^k(t)$ são dados por

$$\gamma_k = \alpha_k - \beta \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

e satisfazem

$$\mathcal{R}(\gamma_1) \geq \ldots \geq \mathcal{R}(\gamma_{q-1}) > \mathcal{R}(\gamma_q) = \ldots = \mathcal{R}(\gamma_{q+r-1}) =$$
$$= 0 > \mathcal{R}(\gamma_{q+r}) \geq \ldots \geq \mathcal{R}(\gamma_N).$$

Estamos nas condições da observação feita com relação ao significado do número p.

Consideremos os espaços de Banach:

$$\mathcal{B} = L_{\psi,0}(J,X)$$
$$\mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X)$$

Verifiquemos as hipóteses do Teorema 1.1.

(a) O par $(\mathcal{B},\mathcal{D})$ é $[B(t) - \frac{\ell}{t}I]$-admissível.

Isto é, o que provamos no Lema 2.3.

(b) Se $S = \{z \in \mathcal{D} : |z|_{\mathcal{D}} \leq \rho\} \cap C(J,X)$ e se $\overline{S}$ é a aderência de S em $C_c(J,X)$, então a aplicação

$$x \in \overline{S} \to \tilde{g}(\cdot,x(\cdot)) \in \mathcal{B}$$

é contínua.

Vamos inicialmente mostrar que se $x \in \overline{S}$ então $\tilde{g}(\cdot,x(\cdot)) \in \mathcal{B}$.

$C_c(J,X)$, com a topologia da convergência uniforme nas partes compactas é um espaço metrizável. Como $\overline{S}$ é o fecho de S em $C_c(J,X)$, dado $x \in \overline{S}$ então existe uma seqüência (x_n), $x_n \in S$ tal que

$$x_n \xrightarrow{\overline{S}} x \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Como um ponto é um conjunto compacto, segue que, para todo $t \in J$,

$$x_n(t) \to x(t)$$

Como $x_n \in S$ temos: $x_n \in \overline{B}(\rho,\mathcal{D})$ e assim, $|x_n|_{\mathcal{D}} \leq \rho$. Lembrando que a norma em $\mathcal{D}$ é dada por $|x_n|_{\mathcal{D}} = |x_n|_1 + |x_n|_\infty$ temos:

$$|x_n|_\infty \leq \rho$$

e assim,

$$||x_n(t)|| \leq \rho, \quad \text{para todo} \quad n.$$

Logo,

$$||x(t)|| \leq \rho, \quad \text{para todo} \quad t$$

e como já vimos que $||\tilde{g}(t,x)|| \leq h(t)[||x||+c]$ segue que

$$||\tilde{g}(t,x)|| \leq h(t)[\rho+c] \quad \text{para todo} \quad x \in \overline{S}.$$

Basta agora mostrarmos que $h(t) \in L_{\psi,0}(J,R)$.

Temos:

$$\psi(t) = [\rho+c]h(t)\varphi(t)$$

onde $\varphi(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Logo,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{\psi(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{[\rho+c]\psi(t)} = 0$$

donde, $h \in L_{\psi,0}(J,R)$ e portanto $\tilde{g}(\cdot,(\cdot)) \in \mathcal{B}$.

Vamos agora mostrar que a função

$$x(\cdot) \in \overline{S} \to \tilde{g}(\cdot,x(\cdot)) \in B$$

é contínua em $\overline{S}$.

Sejam dados $x \in \overline{S}$ e $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar uma vizinhança aberta de x em $\overline{S}$ tal que para todo y nesta vizinhança tenhamos:

$$|\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))| < \varepsilon$$

Sabe-se que, no espaço $C_c(E,M)$ das funções contínuas do espaço topológico E no espaço métrico M, munido da topologia da convergência uniforme nas partes compactas, a coleção dos conjuntos do tipo:

$$V(f,K,\varepsilon) = \{g \in C_c(E,M) \mid \sup_{t\in K} d(f(t),g(t)) < \varepsilon\}$$

onde $K \subset E$ é compacto e $\varepsilon > 0$, constitui um sistema fundamental de vizinhanças de f.

Voltando ao nosso problema, dado $\varepsilon > 0$ e dado $x \in \overline{S}$, iremos encontrar $\nu > 0$ e o compacto $K = [t_o,T]$ de modo que, se

$$y \in \overline{S} \text{ e } y \in V(x,K,\nu) = \{z \in C_c(J,X) \mid$$

$$\sup_{t\in K} ||z(t)-x(t)|| < \nu\}$$

então

$$|\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))|_{\mathcal{B}} < \varepsilon$$

Temos:

$$|\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))|_{\mathcal{B}} = |\chi_{[t_o,T]}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]+$$

$$+ \chi_{(T,\infty)}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]|_{\mathcal{B}} \leq$$

$$\leq |\chi_{[t_o,T]}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]|_{\mathcal{B}} +$$

(2.41)

$$+ |\chi_{(T,\infty)}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]|_{\mathcal{B}} \leq$$

$$\leq |\chi_{[t_o,T]}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]|_{\mathcal{B}} +$$

$$+ |\chi_{(T,\infty)}\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))|_{\mathcal{B}} + |\chi_{(T,\infty)}\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))|_{\mathcal{B}}$$

Mas,

$$||\chi_{(T,\infty)}(t)\tilde{g}(t,x(t))|| = \chi_{(T,\infty)}(t)||\tilde{g}(t,x(t))|| \leq$$

(2.42)

$$\leq \chi_{(T,\infty)}(t)h(t)[||x(t)||+c] \leq \chi_{(T,\infty)}(t)h(t)[\rho+c]$$

Analogamente, mostra-se que:

$$(2.43) \quad ||\chi_{(T,\infty)}(t)\tilde{g}(t,y(t))|| \leq \chi_{(T,\infty)}(t)h(t)[\rho+c]$$

Como $h \in \beta = L_{\psi,0}(J,R)$ e $\chi_{(T,\infty)}h = \begin{cases} 0 \text{ para } t_o \leq t \leq T \\ h \text{ para } t > T \end{cases}$

segue que $\chi_{(T,\infty)}h \in L_{\psi,0}(J,R)$. Deste fato, das desigualdades (2.42) e (2.43) e do fato de que

$$\beta \in H(R)$$

(veja página 1, condição (ii)) segue que

$$|\chi_{(T,\infty)}\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))|_{\mathcal{B}} \leq [\rho+c]|\chi_{(T,\infty)}h|_{\beta}$$

e

$$|\chi_{(T,\infty)}\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))|_{\mathcal{B}} \leq [\rho+c]|\chi_{(T,\infty)}h|_{\beta}$$

De (2.41) podemos escrever

$$|\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))|_{\mathcal{B}} \leq |\chi_{[t_o,T]}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]|_{\mathcal{B}}+ \tag{2.44}$$
$$+\ 2(\rho+c)|\chi_{(T,\infty)}h|_{\beta}$$

Como $h \in \beta$ e β é *lean* no infinito, temos:

$$\chi_{[t_o,T]}h \to h \quad \text{quando} \quad T \to \infty \quad \text{em} \quad \beta,$$

isto é,

$$h - \chi_{[t_o,T]}h \to 0 \quad \text{quando} \quad T \to \infty \quad \text{em} \quad \beta$$

ou ainda,

$$\chi_{(T,\infty)}h \to 0 \quad \text{quando} \quad T \to \infty \quad \text{em} \quad \beta.$$

Logo, existe $T > \bar{T}$ tal que

$$|\chi_{(T,\infty)}h|_{\beta} < \frac{\varepsilon}{4(\rho+c)}$$

e portanto,

$$2(\rho+c)|\chi_{(T,\infty)}h| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Segue, então, de (2.44) que existe T tal que

$$|\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))|_{\mathcal{B}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\chi_{[t_o,T]}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]|_{\mathcal{B}} \tag{2.45}$$

Como $\tilde{g}$ é uniformemente contínua em $[\bar{T},T]\times\bar{B}(\rho,X)$, existe $\nu > 0$ tal que se

$$||(t_1,x)-(t_2,y)|| < \nu, \quad x,\ y \in \bar{B}(\rho,X) \quad \text{e} \quad t_1,t_2 \in [\bar{T},T]$$

então,

$$||\tilde{g}(t_1,x)-\tilde{g}(t_2,y)|| < \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_o,T]}|_\beta}$$

Logo, se $||x-y|| < \nu$, $x, y \in \overline{B}(\rho,X)$ e $t \in [\overline{T},T]$ então,

$$||(t,x)-(t,y)|| = |t-t| + ||x-y|| = ||x-y|| < \nu$$

e portanto,

$$||\tilde{g}(t,x)-\tilde{g}(t,y)|| < \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_o,T]}|_\beta}$$

logo, se $\sup\limits_{t\in[t_o,T]} ||x(t)-y(t)|| < \nu$, temos:

$$||x(t)-y(t)|| < \nu \quad \text{para todo} \quad t \in [t_o,T]$$

e portanto

$$||\tilde{g}(t,x(t))-\tilde{g}(t,y(t))|| < \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_o,T]}|_\beta}$$

para $t \in [\overline{T},T]$ e como

$$||\tilde{g}(t,x(t))-\tilde{g}(t,y(t))|| = 0 \quad \text{para} \quad t \in [t_o,\overline{T}]$$

temos:

$$|\chi_{[t_o,T]}(t)|\,||\tilde{g}(t,x(t))-\tilde{g}(t,y(t))|| < \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_o,T]}|_\beta}|\chi_{[t_o,T]}|$$

ou

$$||\chi_{[t_o,T]}(t)[\tilde{g}(t,x(t))-\tilde{g}(t,y(t))]|| < \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_o,T]}|_\beta}|\chi_{[t_o,T]}(t)|$$

para $x, y \in \overline{S}$ com $||x(t)-y(t)|| < \nu$ e $t \in [t_o,T]$.

Como $\chi_{[t_o,T]} \in \beta$ resulta que

$$\frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_o,T]}|_\beta}\chi_{[t_o,T]} \in \beta.$$

Da condição (ii) da página 1 podemos dizer:

$$|\chi_{[t_o,T]}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]|_{\mathcal{B}} \leq$$

$$\leq |\chi_{[t_o,T]}|_\beta \cdot \frac{\varepsilon}{2|\chi_{[t_o,T]}|_\beta} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Logo, tomando $K = [t_o,T]$ e $y \in V(x,K,\nu)$, $y \in \overline{S}$ temos que

$$|\chi_{[t_o,T]}[\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))]|_{\mathcal{B}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

De (2.45) segue que, se $y \in V(x,K,\nu)$ e $y \in \overline{S}$, então,

$$|\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))-\tilde{g}(\cdot,y(\cdot))|_{\mathcal{B}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Concluimos assim a continuidade da função $x(\cdot) \in \overline{S} \to g(\cdot,x(\cdot)) \in \mathcal{B}$, em $\overline{S}$.

(c) Existe uma constante $r > 0$ tal que $|\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))|_{\mathcal{B}} \leq r$ para toda função $x \in \overline{S}$.

Se $x \in \overline{S}$, então,

$$|\tilde{g}(\cdot,x(\cdot))|_{\mathcal{B}} = \sup_{t\geq t_o} \frac{||\tilde{g}(t,x(t))||}{\psi(t)} =$$

$$= \sup_{t\geq T} \frac{||\tilde{g}(t,x(t))||}{\psi(t)} \leq \sup_{t\geq T} \frac{h(t)[||x(t)||+c]}{\psi(t)} =$$

$$= \sup_{t\geq T} \frac{h(t)[||x(t)||+c]}{[\rho+c]h(t)\psi(t)} = \sup_{t\geq T} \frac{||x(t)||+c}{[\rho+c]\psi(t)} \leq$$

$$\leq \sup_{t\geq T} \frac{\rho+c}{(\rho+c)\psi(t)} = \sup_{t\geq T} \frac{1}{\psi(t)} \leq \frac{\rho}{2K} = r$$

A última desigualdade segue da construção de $\overline{T}$: havíamos exigido que $\overline{T}$ fosse tal que $t \geq \overline{T} \implies \frac{1}{\varphi(t)} \leq \frac{\rho}{2K}$.

(d) Existe $\lambda \in L(J,R)$ tal que $||\tilde{g}(t,x(t))|| \leq \lambda(t)$ para toda função $x \in \overline{S}$.

Seja $\lambda(t) = (\rho+c)h(t)$. Para $x \in \overline{S}$ temos:

$$||\tilde{g}(t,x(t))|| \leq h(t)[||x(t)||+c] \leq (\rho+c)h(t) = \lambda(t)$$

Estão portanto verificadas as hipóteses do Teorema 1.1.

Tomemos $\xi_o \in X_{o,\mathcal{D}}$ tal que $||\xi_o|| < \frac{\rho}{2C_o}$, onde C_o é um número referido no Teorema 1.1. Então $C_o||\xi_o|| + \frac{\rho}{2} < \rho$ e como $r = \frac{\rho}{2K}$ temos: $\frac{\rho}{2} = Kr$. Logo,

$$C_o||\xi_o|| + Kr < \rho$$

Pelo Teorema 1.1, existe solução $x(t)$ do sistema (2.40) tal que $x \in \mathcal{D}$ e $P_{o,\mathcal{D}}x(t_o) = \xi_o$.

Como $\dim(X_{o,\mathcal{D}}) \geq p$ (ver Lema 2.2), podemos tomar ξ_o dependendo de pelo menos p parâmetros e assim obter uma família de soluções $x(t)$ dependendo de pelo menos p parâmetros. Como g e $\tilde{g}$ coincidem em $[\overline{T},\infty) \times E$ cada solução $x(t)$ de (2.40) é uma solução de (2.38) em $[\overline{T},\infty)$ que pode ser estendida como solução a $[t_o,\infty)$ fornecendo a solução $z(t)$ procurada. Para verificar o fato de que $x(t)$ pode ser estendida a $[t_o,\infty)$ como solução de (2.38), precisamos da seguinte formulação da Desigualdade de Gronwall:

se $u,v : [a,b] \to R_+$ *são funções contínuas tais que*

$$u(t) \leq K + \int_t^b u(s)v(s)ds, \quad K \geq 0,$$

então,

$$u(t) \le Ke^{\int_t^b v(s)ds}.$$

Consideremos $K > 0$ e seja:

$$V(t) = K + \int_t^b (u(s)v(s))ds$$

daí,

$$\dot{V}(t) = -u(t)v(t) \ge -V(t)v(t)$$

ou

$$-\frac{\dot{V}(t)}{V(t)} \le v(t)$$

e portanto

$$-\int_t^b \frac{\dot{V}(s)}{V(s)}ds \le \int_t^b v(s)ds,$$

isto é,

$$\ell n\frac{V(t)}{V(b)} \le \int_t^b v(s)ds$$

e portanto

$$V(t) \le V(b)e^{\int_t^b v(s)ds}$$

Como $u(t) \le V(t)$ e $V(b) = K$ segue

$$u(t) \le Ke^{\int_t^b v(s)ds}$$

Para o caso $K = 0$, basta fazer $K \to 0$ no caso acima.

Seja $z(t)$ a solução de (2.38) que coincide com a solução $x(t)$ de (2.40) em $[\overline{T},\infty)$.

$$\dot{z}(t) = B(t)z + g(t,z)$$

$$z(t)-z(\overline{T}) = \int_t^{\overline{T}} B(s)z(s)ds + \int_t^{\overline{T}} g(s,z(s))ds$$

Portanto, lembrando as hipóteses sobre $B(t)$ e g

$$||z(t)|| \le ||z(\overline{T})|| + \int_t^{\overline{T}} K_1||z(s)||ds +$$

$$+ \int_t^{\overline{T}} K_2[||z(s)||+c]ds = ||z(\overline{T})|| + \int_t^{\overline{T}} K_3||z(s)||ds + K_4 =$$

$$= K_5 + \int_t^{\overline{T}} K_3||z(s)||ds$$

onde $K_5 \ge 0$.

Da Desigualdade de Gronwall demonstrada acima segue que $||z(t)||$ é limitada em todo intervalo $(a,\overline{T})$ em que ela é definida, $a \ge t_o$.

Logo, $z(t)$ existe como solução em $[t_o,\overline{T}]$ e portanto em $[t_o,\infty)$ o que encerra a prova do lema. □

O próximo teorema nos dá uma resposta para o problema P_1.

Teorema 2.5. Seja $A(t)$ *uma matriz* $n \times n$ *satisfazendo a hipótese* H_1 *e* $f(t,x)$ *uma função satisfazendo a hipótese* H_2. *Seja* $y(t) \ne 0$ *solução de* (H). *Então, existe uma família de soluções* $x(t)$ *de* (P), *dependendo de pelo menos* p *parâmetros, satisfazendo:*

$$\frac{x(t)-y(t)}{||y(t)||} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X)$$

onde $J = [t_o,\infty)$ *com* $t_o > 0$.

Observação: o número p é dado pelo Lema 2.4.

Prova:

Dada a solução não nula $y(t)$ de (H), existem pelo Lema 1.3 números inteiros q e ℓ, com $1 \le q \le N$ e $0 \le \ell \le n_q - 1$ tais que:

$$0 < \varliminf_{t\to\infty} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} \le \varlimsup_{t\to\infty} \frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} < \infty$$

Segue então, do Lema 2.4, que existe uma família de soluções de (P), dependendo de pelo menos p parâmetros, satisfazendo:

$$\frac{x(t)-y(t)}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} \in \mathcal{D}$$

Como $\varliminf_{t\to\infty} \dfrac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} > 0$, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\frac{||y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} \ge c > 0 \quad \text{para todo} \quad t \in J$$

e daí,

$$\frac{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}}{||y(t)||} \le \frac{1}{c}$$

Assim,

$$\frac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||} = \frac{||x(t)-y(t)||}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} \cdot \frac{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}}{||y(t)||} \le$$

$$\le \frac{||x(t)-y(t)||}{ct^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}}$$

e como $\dfrac{x(t)-y(t)}{ct^{\ell}e^{R(\alpha_q)t}} \in \mathcal{D}$, segue a tese. □

RESPOSTA AO PROBLEMA P_2

A resposta a este problema é conseqüência do Teorema 2.5. Mas antes de formulá-la precisamos de alguns resultados.

Lema 2.6. *Suponhamos satisfeitas as hipóteses do teorema 2.5, com* $f(t,x)$ *linear em* x. *Seja* $U(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ *matriz fundamental do sistema* (H) *com* $U(t_o) = I$. *Seja* $V(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *matriz de soluções de* (P) *satisfazendo:*

$$x_i(t) = y_i(t) + o(||y_i(t)||) \quad para\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Então $V(t)$ *é matriz fundamental de* (P).

Observação: para uma demonstração do lema acima ver [5.a (Corolário 1)].

Corolário 2.7. Suponhamos satisfeitas as hipóteses do teorema 2.5, com $f(t,x)$ *linear em* x. *Seja* $U(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ *matriz fundamental de* $\dot{y} = A(t)y$ *com* $U(t_o) = I$. *Seja* $V(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *matriz de soluções de* (P) *satisfazendo*

$$\frac{x_i(t)-y_i(t)}{||y_i(t)||} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. *Então* $V(t)$ *é matriz fundamental de* (P).

Prova:

É conseqüência imediata do Lema 2.6 pois se

$$\frac{x_i(t)-y_i(t)}{||y_i(t)||} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X)$$

então

$$x_i(t) = y_i(t) + o(||y_i(t)||). \qquad \square$$

Lema 2.8. Suponhamos satisfeitas as hipóteses do teorema 2.5 com $f(t,x)$ *linear em* x. *Seja* $x(t) \neq 0$ *para* $t \geq t_o$ *solução de* (P). *Então, existe solução* $y(t)$ *de* (H) *satisfazendo:*

$$\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X).$$

Prova:

Seja $U(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ matriz fundamental de (H) com $U(t_o) = I$. Usando o teorema 2.5 construímos

$$V(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

matriz de soluções de (P) satisfazendo:

$$\frac{x_i - y_i}{||y_i||} \in \mathcal{D} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Do Corolário 2.7 segue que $V(t)$ é matriz fundamental de (P). Portanto, existem números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tais que a solução $x(t)$ satisfaz:

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t)$$

Seja $Z = \{i \mid c_i \neq 0\}$; $Z \neq \emptyset$ pois $x \not\equiv 0$. Temos também que

$$x(t) = \sum_{i \in Z} c_i x_i(t) \quad \text{para todo} \quad t \in J.$$

Consideremos a seguinte solução de (H):

$$y(t) = \sum_{i\in Z} c_i y_i(t)$$

Da prova do Corolário 3.2 de [5-b] segue que

$$(2.46) \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{||y_i(t)||}{||y(t)||} < \infty \qquad (i \in Z)$$

Assim, tomando $M = \max_{i\in Z} |c_i|$ temos:

$$\frac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||} = \frac{||\sum_{i\in Z} c_i[x_i(t)-y_i(t)]||}{||y(t)||} \le$$

$$\le \frac{\sum_{i\in Z} |c_i|\, ||x_i(t)-y_i(t)||}{||y(t)||} \le M \sum_{i\in Z} \frac{||x_i(t)-y_i(t)||}{||y(t)||} =$$

$$= M \sum_{i\in Z} \frac{||x_i(t)-y_i(t)||}{||y_i(t)||} \cdot \frac{||y_i(t)||}{||y(t)||}$$

De (2.46) e da continuidade de $\frac{||y_i(t)||}{||y(t)||}$ temos que, existe $\tilde{M} > 0$ tal que

$$\frac{||y_i(t)||}{||y(t)||} \le \tilde{M} \quad \text{para todo} \quad i \in Z \quad \text{e} \quad t \ge t_o.$$

Portanto,

$$\frac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||} \le M\tilde{M} \sum_{i\in Z} \frac{||x_i(t)-y_i(t)||}{||y_i(t)||}$$

donde,

$$\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}.$$

Como a relação: $x \sim y$ se $\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}$ é uma relação de equivalência (veja final do Capítulo 1), segue que

$$\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D} \qquad \square$$

O próximo teorema responde o problema P_2.

Teorema 2.9. Seja $A(t)$ *matriz* $n \times n$ *satisfazendo a hipótese* H_1 *e* $f(t,x)$ *satisfazendo a hipótese* H_2. *Seja* $x(t)$ *solução de* (P) *com* $x(t) \neq 0$ *para* $t \geq t_0$. *Então existe uma família de soluções* $y(t)$ *de* (H), *dependendo de pelo menos* $\tilde{p}$ *parâmetros tal que* $\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_0^\infty(J,X)$.

Prova:

Consideremos o sistema linear

$$(2.47) \quad \dot{\psi} = A(t)\psi + \frac{x^*(t)\psi}{x^*(t)x(t)} f(t,x(t))$$

onde x^* é a transposta conjugada de x. É claro que a solução $x(t)$ de (P) dada é solução do sistema acima.

Seja

$$D(t) = \frac{1}{x^*(t)x(t)} \begin{bmatrix} f_1(t,x(t))x^*(t) \\ \vdots \\ f_n(t,x(t))x^*(t) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Temos que

$$\frac{x^*(t)\psi}{x^*(t)x(t)} f(t,x(t)) = D(t)\psi$$

De fato:

$$D(t)\psi = \frac{1}{x^*(t)x(t)} \begin{bmatrix} f_1(t,x(t))x^*(t) \\ \vdots \\ f_n(t,x(t))x^*(t) \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$D(t)\psi = \frac{1}{x^*(t)x(t)} \begin{bmatrix} f_1(t,x(t))[x_1^*(t)\psi_1(t)+\ldots+x_n^*(t)\psi_n(t)] \\ \vdots \\ f_n(t,x(t))[x_1^*(t)\psi_1(t)+\ldots+x_n^*(t)\psi_n(t)] \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$D(t)\psi = \frac{[x_1^*(t)\psi_1(t) + \ldots + x_n^*(t)\psi_n(t)]}{x^*(t)x(t)} f(t,x(t))$$

$$D(t)\psi = \frac{x^*(t)\psi}{x^*(t)x(t)} f(t,x(t))$$

Logo, o sistema (2.47) torna-se

$$\dot{\psi} = A(t)\psi + D(t)\psi$$

Seja $k(t) = ||D(t)||$. Temos:

$$k(t) = ||D(t)|| \le \frac{1}{||x(t)||^2} \left\| \begin{bmatrix} f_1(t,x(t)) & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & f_n(t,x(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \vdots \\ x^*(t) \end{bmatrix} \right\|$$

Usando a norma da soma das normas dos componentes, no espaço das matrizes $n \times n$, temos:

$$k(t) \le \frac{1}{||x(t)||^2} \left\| \begin{bmatrix} f_1(t,x(t)) & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & f_n(t,x(t)) \end{bmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{bmatrix} x^*(t) \\ \vdots \\ x^*(t) \end{bmatrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{||x(t)||^2} [|f_1(t,x(t))| + \ldots + |f_n(t,x(t))|] n[|x_1^*(t)| + \ldots + x_n^*(t))|]$$

Como todas as normas em X são equivalentes, existe constante M tal que

$$|f_1(t,x(t))| + \ldots + |f_n(t,x(t))| \leq M||f(t,x(t))||$$

$$|x_1^*(t)| + \ldots + |x_n^*(t)| \leq M||x^*(t)|| = M||x(t)||$$

Logo,

$$k(t) \leq \frac{nM^2}{||x(t)||^2}||f(t,x(t))||.||x(t)|| \leq$$

$$\leq \frac{nM^2}{||x(t)||}h(t)||x(t)|| = nM^2h(t)$$

Assim, $k(t)$ satisfaz as mesmas hipóteses que $h(t)$.

Seja $g(t,\psi) = D(t)\psi$. O sistema (2.47) pode ser escrito

$$\dot{\psi} = A(t)\psi + g(t,\psi)$$

onde

$$||g(t,\psi)|| = ||D(t)\psi|| \leq ||D(t)||.||\psi|| = k(t)||\psi||.$$

Além disso, $g(t,\psi)$ é linear em ψ.

Consideremos os sistemas:

$$\text{(H)} \quad \dot{z} = A(t)z$$

$$\text{(2.48)} \quad \dot{\psi} = A(t)\psi + g(t,\psi)$$

Estamos nas condições do Lema 2.8. Logo, dada a solução $x(t)$ de (2.48), existe solução $z(t)$ de (H) tal que

$$\frac{x-z}{||x||} \in \mathcal{D}.$$

Consideremos agora os sistemas:

$$\dot{z} = A(t)z$$

$$\dot{y} = A(t)y$$

Estamos nas condições do Teorema 2.5 pois $\dot{y} = A(t)y + \tilde{f}(t,y)$, onde $\tilde{f}(t,y) = 0$ e portanto satisfaz a hipótese H_2. Tomando a solução $z(t)$ do primeiro referida acima, existe uma família de soluções $y(t)$ do segundo, dependendo de pelo menos $\tilde{p}$ parâmetros tal que

$$\frac{z-y}{||z||} \in \mathcal{D}$$

e como $\frac{x-z}{||x||} \in \mathcal{D}$ segue, da transitividade da relação

$x \sim y \Longleftrightarrow \frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}$, que $\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D}$

Noutras palavras: dada uma solução $x(t)$ de (P), $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_o$, existe uma família de soluções $y(t)$ de (H), dependendo de pelo menos $\tilde{p}$ parâmetros tal que $\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D}$ □

$\mathcal{D}$-EQUIVALÊNCIA ENTRE DOIS SISTEMAS PERTURBADOS

Consideremos agora os sistemas:

(H) $\dot{y} = A(t)y$

(P') $\dot{x} = A(t)x + f_1(t,x)$

(P") $\dot{z} = A(t)z + f_2(t,x)$

Teorema 2.10. Seja $A(t)$ *matriz* $n \times n$ *satisfazendo a hipótese* H_1 *e* $f_i(t,x)$ *satisfazendo a hipótese* H_2 *para* $i=1,2$. *Então, valem os seguintes resultados:*

(a) *Se* $x(t)$ *é solução de* (P'), *com* $x(t) \neq 0$ *para* $t \geq t_o$, *existe uma família de soluções* $z(t)$ *de* (P"), *dependendo de pelo menos* p *parâmetros, tal que*

$$\frac{x-z}{||x||} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X)$$

(b) *Se* $z(t)$ *é solução de* (P"), *com* $z(t) \neq 0$ *para* $t \geq t_o$, *existe uma família de soluções* $x(t)$ *de* (P'), *dependendo de pelo menos* $\tilde{p}$ *parâmetros, tal que*

$$\frac{x-z}{||z||} \in \mathcal{D} = L^1(J,X) \cap L_o^\infty(J,X).$$

Prova:

Seja $x(t)$ solução de (P'), $x(t) \neq 0$ para $t \geq t_o$. Do Teorema 2.9 segue que existe pelo menos uma solução $y(t)$ de (H) tal que

$$\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D}$$

Do Teorema 2.5 segue que existe uma família de soluções $z(t)$ de (P") dependendo de pelo menos p parâmetros tal que

$$\frac{z-y}{||y||} \in \mathcal{D}$$

Como a $\mathcal{D}$-equivalência é uma relação de equivalência, segue que

$$\frac{x-z}{||x||} \in \mathcal{D}$$

A prova de (b) é simétrica. □

Como conseqüência imediata do Teorema 2.10 temos o seguinte

Corolário 2.11. Sejam satisfeitas as condições do teorema 2.10. Então os sistemas (P') *e* (P") *são D-relativamente assintoticamente equivalentes.*

Observação: na verdade o Teorema 2.10 dá mais informações que as contidas no Corolário 2.11, pois o teorema dá, para cada solução de um dos sistemas, uma estimativa sobre o número de parâmetros livres do qual depende a família de soluções procurada.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES

Sejam $A(t)$ e $B(t)$ matrizes $n \times n$, definidas para $t \geq 0$. Diremos que $A(t)$ e $B(t)$ são t-semelhantes (e denotaremos: $A(t) \sim B(t)$) se existir uma matriz $S(t)$, $n \times n$, que em $[0,\infty)$ satisfaça:

(a) $S(t)$ é contínua

(b) $S(t)$ e $S^{-1}(t)$ são limitadas

(c) $\dot{S}(t) + S(t)A(t) - B(t)S(t) = 0$

Diremos que dois sistemas:

(3.1) $\dot{x} = A(t)x$

(3.2) $\dot{y} = B(t)y$

são t-semelhantes se as matrizes $A(t)$ e $B(t)$ forem t-semelhantes.

Se os sistemas (3.1) e (3.2) são t-semelhantes e $X(t)$ é matriz fundamental de (3.1) então $Y(t) = S(t)X(t)$ é matriz fundamental de (3.2) como é fácil ver.

Diremos que o sistema $\dot{x} = A(t)x$ é redutível se a matriz $A(t)$ for t-semelhante a uma matriz constante C.

Lema 3.1. Se $A(t)$ *é periódica, com período* $\omega > 0$, *então o sistema* $\dot{y} = A(t)y$ *é redutível.*

Observação: a demonstração deste lema pode ser encontrada em [5-c].

Seja A *uma matriz* $n \times n$ *constante, e* J *uma forma canônica de Jordan. Colocando os blocos de* J *numa ordem conveniente, é fácil mostrar que* J *satisfaz a hipótese* H_1. *Consideremos os sistemas:*

(3.3) $\dot{y} = Jy$

(3.4) $\dot{x} = Jx + f(t,x)$

Teorema 3.2. Seja $f(t,x)$ *satisfazendo a hipótese* H_2 *para* $t \geq t_o \geq 0$. *Nestas condições valem os seguintes resultados:*

(a) *se* $y(t) \neq 0$ *é solução de* (3.3), *então existe uma família de soluções* $x(t)$ *de* (3.4), *dependendo de pelo menos* p *parâmetros, satisfazendo:*

$$\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}$$

(b) *se* $x(t)$ *é solução de* (3.4) *com* $x(t) \neq 0$ *para* $t \geq t_o$, *então existe uma família de soluções* $y(t)$ *de* (3.3), *dependendo de pelo menos* $\tilde{p}$ *parâmetros, tal que*

$$\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D}.$$

Prova:

Segue imediatamente dos teoremas 2.5 e 2.9. □

Seja A matriz $n \times n$ constante. Consideremos os sistemas:

(3.5) $\dot{y} = Ay$

(3.6) $\dot{x} = Ax + f(t,x)$

Teorema 3.3. Seja J *a forma canônica de Jordan de* A *e* s+1 *a maior ordem dos blocos de* J. *Seja* f(t,x) *satisfazendo a hipótese* H_2. *Nestas condições, valem os seguintes resultados:*

(a) *se* $y(t) \neq 0$ *é solução de* (3.5), *então existe uma família de soluções* x(t) *de* (3.6), *dependendo de pelo menos* p *parâmetros, satisfazendo:*

$$\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}$$

(b) *se* x(t) *é solução de* (3.6), *com* $x(t) \neq 0$ *para* $t \geq t_0$, *então existe uma família de soluções* y(t) *de* (3.5), *dependendo de pelo menos* $\tilde{p}$ *parâmetros, que satisfaz:*

$$\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D}.$$

Prova:

Existe uma matriz C, não singular, tal que $CAC^{-1} = J$ onde J é a forma canônica de Jordan de A. Suponhamos que os blocos de J já estejam colocados em disposição conveniente de modo que J satisfaça a hipótese H_1.

Façamos as seguintes mudanças de variáveis:

$\tilde{y} = Cy$ e $\tilde{x} = Cx$

Então, se y(t) e x(t) são soluções de (3.5) e (3.6) respectivamente, então $\tilde{y}$ e $\tilde{x}$ são soluções de

(3.7) $\dot{\tilde{y}} = J\tilde{y}$

(3.8) $\dot{\tilde{x}} = J\tilde{x} + \tilde{f}(t,\tilde{x})$

respectivamente, onde $\tilde{f}(t,\tilde{x}) = Cf(t,C^{-1}\tilde{x})$.

É fácil ver que $\tilde{f}$ satisfaz os mesmos tipos de hipóteses que f.

Temos também que $y(t) \neq 0$ se e somente se $\tilde{y}(t) \neq 0$ e o mesmo vale para $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$.

Do Teorema 3.2, segue que existe uma família de soluções $\tilde{x}(t)$ de (3.8), dependendo de pelo menos p parâmetros, tal que

$$\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{||\tilde{y}||} \in \mathcal{D}$$

Temos:

$$||Cy(t)|| \leq ||C||.||y(t)||$$

$$||x(t)-y(t)|| = ||C^{-1}C[x(t)-y(t)]|| \leq$$

$$\leq ||C^{-1}||.||Cx(t)-Cy(t)||$$

Concluimos então que:

$$\frac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||} \leq \frac{||C^{-1}||.||Cx(t)-Cy(t)||}{\frac{1}{||C||}||Cy(t)||} =$$

$$= \frac{||C||.||C^{-1}||.||\tilde{x}(t)-\tilde{y}(t)||}{||\tilde{y}(t)||}$$

donde,

$$\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}$$

A parte (b) é provada de maneira análoga. □

Consideremos os sistemas:

(H) $\dot{y} = A(t)y$

(P) $\dot{x} = A(t)x + f(t,x)$

Teorema 3.4. Seja $A(t)$ *matriz* $n \times n$ *redutível e* $f(t,x)$ *satisfazendo a hipótese* H_2. *Então valem os seguintes resultados:*

(a) *Seja* $y(t) \neq 0$ *solução de* (H). *Então existe uma família de soluções* $x(t)$ *de* (P), *dependendo de pelo menos* p *parâmteros, tal que:*

$$\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}.$$

(b) *Seja* $x(t) \neq 0$ *para* $t \geq t_0$ *solução de* (P). *Então existe uma família de soluções* $y(t)$ *de* (H), *dependendo de pelo menos* $\tilde{p}$ *parâmetros, tal que:*

$$\frac{x-y}{||x||} \in \mathcal{D}.$$

Observação: sendo $A(t)$ redutível existe matriz A constante tal que $A(t) \sim A$. Seja J a forma canônica de Jordan de A. O número s que aparece na hipótese H_2 do teorema acima é dado por: $s+1$ = ordem máxima dos blocos de J.

Prova:

Seja S a matriz que aparece na definição de $A(t) \sim A$. Fazendo as mudanças de variáveis:

$\tilde{y} = S(t)y$ e $\tilde{x} = S(t)x$

obtemos os sistemas:

$$\dot{\tilde{y}} = A\tilde{y}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \tilde{f}(t,\tilde{x})$$

onde $\tilde{f}(t,\tilde{x}) = S(t)f(t,S^{-1}(t)\tilde{x})$. É fácil ver que $\tilde{f}(t,\tilde{x})$ satisfaz a hipótese H_2. Estamos dentro das condições do Teorema 3.2. Assim, dada $y(t) \neq 0$ solução de (H), tomamos $\tilde{y} = S(t)y$ que é solução de $\dot{\tilde{y}} = A\tilde{y}$, também não nula. Do Teorema 3.2 segue que existe uma família de soluções $\tilde{x}(t)$ de $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + \tilde{f}(t,\tilde{x})$, dependendo de pelo menos p parâmetros, tal que:

$$\frac{\tilde{x}-\tilde{y}}{||\tilde{y}||} \in \mathcal{D}.$$

Como $S(t)$ e $S^{-1}(t)$ são limitadas, existe $M > 0$ tal que

$$||S(t)|| \leq M \quad \text{e} \quad ||S^{-1}(t)|| \leq M \qquad (t \geq t_o)$$

Assim:

$$||x(t)-y(t)|| = ||S^{-1}(t)[S(t)x(t)-S(t)y(t)]|| \leq$$

$$\leq M||S(t)x(t)-S(t)y(t)||$$

e

$$||S(t)y(t)|| \leq M||y(t)||.$$

Daí,

$$\frac{||x(t)-y(t)||}{||y(t)||} \leq \frac{M||S(t)x(t)-S(t)y(t)||}{\frac{1}{M}||S(t)y(t)||}$$

Concluimos então que

$$\frac{x-y}{||y||} \in \mathcal{D}$$

A outra parte da demonstração é análoga. □

Corolário 3.5. Seja $A(t)$ *periódica, de período* $\omega > 0$. *Então valem os resultados do teorema anterior.*

Prova:

Do Lema 3.1 segue que $A(t)$ é redutível e do Teorema 3.4 segue a tese. □

BIBLIOGRAFIA

[1] - FAEDO, S., Proprieta assintotiche delle soluzioni dei sistemi differenziali linear i omogenei, Ann. Mat. Pura Appl., 26 (1947), 207-215.

[2] - HARTMAN, P. and ONUCHIC, N., On the asymptotic integration of ordinary differential equations. Pacific J. Math., 13 (1963), 1193-1207.

[3] - LEVI, E., Sul comportamento assintotico delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari omogenei. Atti Acad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Nat., 8 (1950), 465-470; 9 (1950), 26-31.

[4] - MASSERA, J.L. and SCHÄFFER, J.J., Linear Differential Equations and Function Spaces, Academic Press, New York (1966).

[5] - ONUCHIC, N.

a) Asymptotic relationships at infinity between the solutions two systems of ordinary differential equations, J. Diff. Equations, Vol. 3, 1 (1967), 47-58.

b) Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias, Tese de Livre--Docência pela F.F.C.L. da USP (1965).

c) Equações diferenciais ordinárias: estabilidade em sistemas lineares, equivalência assintótica, Método Topológico de T. Ważewski, 3º Colóquio Brasileiro de Matemática, Fortaleza (1961).

[6] - RODRIGUES, H.M.

a) Equivalência Assintótica Relativa, Com Peso t^{μ}, Entre Dois Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias, Tese de Doutoramento pelo ICMSC-USP (1975).

b) Relative asymptotic equivalence with weight t^{μ}, between two systems of ordinary differential equations, Dynamical Systems - An International Symposium, Academic Press, Inc., Vol. 2, (1976).

c) Comportamento Assintótico de Equações Retardadas e Aplicações do Método Alternativo, Tese de Livre--Docência pelo ICMSC-USP (1978).

[7] - ROYDEN, H.L., Real Analysis, Second Edition, The Mcmillan Company, New York (1968).

[8] - SPEZAMIGLIO, A., Aplicações da Teoria de Admissibilidade ao Estudo de Equivalência Assintótica Relativa em Equações Diferenciais Ordinárias, Tese de Doutoramento pelo ICMSC-USP (1978).

[9] - SZMYDT, Z., Sur l'allure asymptotique des intégrales de certains systèmes d'équations différentialles non linéaries, Ann. Polon. Math. I, 2(1955), 253-276.

[10] - WAŻEWSKI, T., Sur un principle topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentialles ordinaires, Ann. Soc. Pol. Math. Tome 20(1947), 279-313.