SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 10.12.2001

Assinatura:

Teoria métrica de curvas reais e complexas¹

Alexandre César Gurgel Fernandes

Orientadora: *Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

USP – São Carlos
Dezembro de 2001

¹ Este trabalho foi completamente financiado pelo CNPq

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Maria Aparecida Soares Ruas

Prof. Dr. Abramo Hefez

Abramo Hefez

Prof. Dr. Marcio Gomes Soares

Marcio Gomes Soares

Prof. Dr. Lev Birbrair

Lev Birbrair

Prof. Dr. Marcelo José Saia

Marcelo José Saia

*Aos meus pais,
Sílvia e Lenir.*

Agradecimentos

A Deus pelas infinitas bênçãos recebidas durante a realização deste trabalho inclusive a graça de ser papai.

Aos meus pais, Sílvio e Lenir, às minhas irmãs, Alessandra, Aline e Amanda por estarem do meu lado em todas as situações difíceis que enfrentei.

À minha esposa, Claudia, pelo interesse neste projeto, pelas observações a respeito de minha postura profissional, que foram fundamentais neste trabalho e pelas inúmeras vezes em que se dispôs a ficar algumas horas da madrugada ouvindo-me falar de resultados obtidos (a maioria incorretos).

À minha professora e orientadora Dra. Maria Aparecida Soares Ruas por me introduzir com bastante mestria e de forma muito rápida na Teoria de Singularidades, por várias leituras e correções deste trabalho e pelo trabalho de orientação.

Ao professor Dr. Lev Birbrair por me incentivar a estudar Teoria métrica de singularidades, dividir comigo a sua enorme experiência neste assunto e, finalmente, por ter me acompanhado até hoje em se tratando de amizade e profissão.

Ao ICMC e ao Grupo de Singularidades pelo excelente suporte técnico dado.

Seja louvado o nome de Jesus!!!

Resumo

Neste trabalho abordamos o problema de classificação de conjuntos singulares sob o ponto de vista métrico. Como resultado principal, apresentamos um teorema de classificação de germes de curvas complexas, munidos da métrica euclidiana induzida, módulo homeomorfismos bi-Lipschitz. A estratégia usada para a obtenção deste resultado foi o estudo do contato de arcos reais convenientes nessas curvas.

Abstract

In this work we approach the problem of classification of singular sets under the metric viewpoint. As the main result, we present a theorem of classification of germs of complex curves, equipped with the induced Euclidean metric, module bi-Lipschitz homeomorphisms. The used strategy for the attainment of this result was the study of the contact of convenient real arcs in these curves.

Sumário

Introdução	2
1 Preliminares	4
1.1 Conjuntos e aplicações semi-algébricas	4
1.2 Conjuntos e aplicações subanalíticas	5
1.3 Subespaços euclidianos, aplicações bi-Lipschitz e o Teorema de Kirszbraun	6
1.4 Expoentes característicos de Puiseux	7
1.5 Projeções gerais	9
2 Teoria métrica de curvas reais	10
2.1 Semicomplexo de Hölder	11
2.2 Sobre o tipo Lipschitz de curvas reais	13
2.3 Sobre famílias de curvas reais	17
2.4 Sobre famílias de curvas reais quase-homogêneas	25
3 Teoria métrica de curvas complexas	29
3.1 Arcos de Teste	31
3.2 Caso irreduzível	32
3.3 Caso reduzível	41
3.4 Tipo bi-Lipschitz de curvas complexas	44
4 bi-Lipschitz trivialidade de funções	48
4.1 Um resultado do tipo Kuo	50

Introdução

A partir de resultados de S. Lojasiewicz sobre propriedades métricas de conjuntos semi-analíticos, desenvolveram-se alguns trabalhos, iniciados por S. Lojasiewicz e seus alunos, tendo como objetivo principal o estudo de conjuntos singulares sob o ponto de vista métrico, originando então o que hoje é conhecida como teoria métrica de singularidades. Como referência mais recente, essa teoria tem como autores mais ativos, T Mostowski, A. Parusinski, L. Birbrair, K Kurdyka, P. Orro, Y. Yomdim, dentre outros.

Em [2], L. Birbrair classifica completamente os germes de superfícies semi-algébricas (singulares), munidos da métrica geodésica intrínseca, módulo homeomorfismos bi-Lipschitz. Nesta direção, surge naturalmente a pergunta: como classificar os germes de superfícies (singulares), munidos da métrica euclidiana induzida, módulo homeomorfismos bi-Lipschitz ?

Uma estratégia para responder à pergunta acima seria a redução do problema de classificação de superfícies ao problema de classificação de curvas, isto é, estamos apostando na existência de curvas "características" que detectem completamente o comportamento métrico dessas superfícies. Aqui, resolvemos o problema de classificação de curvas complexas (caso bem particular de superfícies reais) usando essa estratégia. Claramente, esta abordagem, diante da pergunta inicial, exige uma análise acurada dos germes de curvas a qual fazemos no Capítulo 2. Mais especificamente, neste capítulo, classificamos completamente o "tipo bi-Lipschitz" de curvas e, como consequência dessa classificação, obtemos resultados de caracterização de famílias de curvas bi-Lipschitz triviais.

O Capítulo 3 contém os principais resultados de [11]. Aqui, apresentamos uma

classificação completa dos germes de curvas complexas planas, munidos da métrica euclidiana induzida, módulo homeomorfismos bi-Lipschitz. Ainda neste capítulo, apresentamos uma rápida discussão a respeito de curvas espaciais.

No Capítulo 4, introduzimos, rapidamente, o problema da $\mathcal{R}$ -bi-Lipschitz equivalência de germes de aplicações e apresentamos um teorema de bi-Lipschitz determinação para a classe dos germes com singularidade isolada.

Capítulo 1

Preliminares

Sejam A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $a \in A$ e sejam $f, g : (A, a) \rightarrow \mathbb{R}$, 0 germes de funções não negativas. Denotamos $f \lesssim g$ quando existe uma vizinhança U de a em $\mathbb{R}^n$ e uma constante K tal que $f(x) \leq Kg(x)$, $\forall x \in A$. Denotamos $f \approx g$ quando ocorre $f \lesssim g$ e $g \lesssim f$. Finalmente, denotamos

$$f \ll g \text{ quando } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ e } f \gg g \text{ quando } \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

1.1 Conjuntos e aplicações semi-algébricas

Dizemos que um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é *semi-algébrico* (*semi-analítico*) se existem polinômios (funções analíticas) $f_{ij}, g_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$ tais que

$$A = \bigcup_{i=1}^p \{x \in \mathbb{R}^n : f_{ij} = 0, g_{ij} > 0, 1 \leq j \leq q\}.$$

Um fato, que não é óbvio, é que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é semi-algébrico, então existem subvariedades $A_1, \dots, A_m$ de $\mathbb{R}^n$, conexas, semi-algébricas tais que $A = \cup_i A_i$ ([5]). Definimos a *dimensão* de A como o máximo das dimensões das variedades $A_1, \dots, A_m$.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ semi-algébrico. Dizemos que uma aplicação $F : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ é *semi-algébrica* se o seu gráfico é um subconjunto semi-algébrico de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Teorema 1.1.1. (Tarski-Seidenberg) Seja $\Pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ a projeção canônica. Se $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é semi-algébrico, então $\Pi(A)$ é semi-algébrico.

O teorema acima permite afirmar que a classe dos conjuntos semi-algébricos é estável por operações booleanas e aplicações semi-algébricas. Quanto à classe dos conjuntos semi-analíticos, não podemos afirmar o mesmo, por conta disso se faz necessário o estudo sobre conjuntos subanalíticos.

1.2 Conjuntos e aplicações subanalíticas

As definições e resultados destacados nesta seção podem ser encontrados em [6]. Seja X um espaço analítico real. Um subconjunto $A \subset X$ é dito *subanalítico em* $x \in X$, se existe uma vizinhança U de x em X e uma família $\{f_{ij} : 1 \leq i \leq k, j = 1, 2\}$ de morfismos analíticos próprios: $Y_{ij} \rightarrow X|_U$, em que Y_{ij} é espaço analítico real, tais que

$$A \cap U = \bigcup_{i=1}^k (\text{Im}(f_{i1}) - \text{Im}(f_{i2})).$$

Dizemos que A é um subconjunto *subanalítico em* X quando A é subanalítico em cada ponto de X .

A classe dos conjuntos subanalíticos é a menor classe de subconjuntos de espaços analíticos contendo os conjuntos semi-analíticos e estável por morfismos próprios e operações booleanas.

Teorema 1.2.1. *Sejam X e Y dois espaços analíticos reais, $\Pi : X \times Y \rightarrow X$ a projeção canônica. Se V é um subconjunto compacto subanalítico em Y , e $A \subset X \times V$ um subconjunto subanalítico em $X \times Y$, então $\Pi(A)$ é subanalítico em X .*

Esse teorema é o análogo do Tarski-Seidenberg para o caso subanalítico.

Sejam K, L subconjuntos subanalíticos respectivamente nos espaços analíticos X, Y . Dizemos que uma aplicação contínua $F : K \rightarrow L$ é *subanalítica* se o seu gráfico $\text{Graf}(F)$ é um subconjunto subanalítico em $X \times Y$.

O Lema a seguir é o que chamamos de Decomposição de Puiseux de uma função subanalítica.

Lema 1.2.2. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subanalítica tal que $f(0) = 0$ e $f(t) \neq 0$ para cada $t \neq 0$ numa vizinhança de 0. Então, existe um racional positivo α e uma*

função subanalítica $h : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $h(0) \neq 0$ e $f(t) = t^\alpha h(t)$ para cada $t \in [0, \epsilon)$.

1.3 Subespaços euclidianos, aplicações bi-Lipschitz e o Teorema de Kirszbraun

Nesta tese, salvo menção em contrário, consideramos $\mathbb{R}^n$ munido da métrica euclidiana e entendemos por *subespaço euclidiano* os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ munidos da métrica induzida.

Sejam (X_1, d_1) e (X_2, d_2) espaços métricos. Uma aplicação $F : X_1 \rightarrow X_2$ é chamada *Lipschitz* se existe um número $c > 0$ tal que

$$d_2(F(x), F(y)) \leq c d_1(x, y), \quad \forall x, y \in X_1.$$

Nesse caso dizemos também que F é *c-Lipschitz*. Dizemos que F é *bi-Lipschitz* quando F é Lipschitz e possui uma inversa Lipschitz.

A definição de homeomorfismo bi-Lipschitz acima é uma relação de equivalência sobre os subespaços de $\mathbb{R}^n$. Sobre esses mesmos subespaços, temos naturalmente outra relação, a qual dizemos que detecta o *tipo bi-Lipschitz* dos subespaços de $\mathbb{R}^n$. De fato, sejam X_1 e X_2 subespaços de $\mathbb{R}^n$, então X_1 possui o mesmo *tipo bi-Lipschitz* de X_2 se existe um homeomorfismo bi-Lipschitz $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi(X_1) = X_2$.

Observação 1.3.1. Como nos interessamos em classificar subespaços euclidianos módulo homeomorfismos bi-Lipschitz, não fazemos distinção entre a métrica euclidiana e qualquer outra métrica equivalente a esta.

O Teorema de Kirszbraun considera o problema de extensão de funções Lipschitz. Kirszbraun, como caso particular de um resultado sobre extensão de contrações de um espaço vetorial $V \rightarrow \mathbb{R}$, obteve uma prova para o fato que aplicações c -Lipschitz $Y \rightarrow \mathbb{R}$, em que Y é subespaço métrico de X , se estendem a aplicações c -Lipschitz $X \rightarrow \mathbb{R}$. Esta prova é baseada em métodos de indução transfinita. Em 1934, E. McShane obtém uma nova prova para esse fato, sugerindo uma fórmula explícita

para a extensão (cf. [20]). A seguir, apresentamos uma versão fraca do Teorema de Kirszbraun, já enunciado com a fórmula de McShane(cf. [10])

Teorema 1.3.2. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço euclidiano e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação c -Lipschitz. Então,*

$$F(z) = \sup_{x \in X} (f(x) - c|x - z|), \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

é uma extensão c -Lipschitz de f .

Segue-se que se f depende continuamente de alguns parâmetros $u = (u_1, \dots, u_p)$; isto é, $f(x, u)$, $x \in X$, é contínua como função das variáveis (x, u) e é c -Lipschitz com respeito a x com c independente de u , então f possui uma extensão c -Lipschitz $F(x, u)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Agora, se v é um campo de vetores c -Lipschitz definido em X e dependendo continuamente de alguns parâmetros u , então podemos aplicar o Teorema de Kirszbraun para cada uma das funções coordenadas v e obter uma extensão $c\sqrt{n}$ -Lipschitz V de v a $\mathbb{R}^n$. Essa construção pode ser encontrada em [23].

Observação 1.3.3. A fórmula de McShane, apresentada no teorema acima, é muito bem-vinda, não só por apresentar uma nova prova para o Teorema de Kirszbraun. Com efeito, a partir de (1.1), podemos concluir que se f é semi-algébrica (subanalítica), então a sua extensão F vem semi-algébrica (subanalítica).

A seguinte proposição, provada em [12], justifica a nossa escolha por trabalhar, no capítulo que trata da teoria métrica de curvas complexas, com homeomorfismos subanalíticos bi-Lipschitz e não apenas homeomorfismos bi-Lipschitz.

Proposição 1.3.4. *Seja $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ homeomorfismo subanalítico. Então, h é bi-Lipschitz se, e somente se, para cada par de curvas analíticas $\alpha_1, \alpha_2 : [0, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$,*

$$\text{ord}_t \|h(\alpha_1(t)) - h(\alpha_2(t))\| = \text{ord}_t \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\| .$$

1.4 Expoentes característicos de Puiseux

Seja $(C, 0)$ um germe de curva analiticamente irredutível em $\mathbb{C}^2$ (*Ramo*), a menos de uma mudança analítica de coordenadas, podemos supor que $(C, 0)$ tem uma

parametrização do tipo abaixo:

$$\begin{aligned}x &= t^m \\y &= t^n + a_2 t^{n_2} + \dots\end{aligned}\tag{1.2}$$

em que m é a multiplicidade de $(C, 0)$, m não divide o inteiro n e $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. A série de potências fracionárias $y(x^{\frac{1}{m}})$ é conhecida como *Parametrização de Newton-Puiseux* de $(C, 0)$ e todas as outras parametrizações de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ são obtidas da parametrização acima via $x^{\frac{1}{m}} \mapsto wx^{\frac{1}{m}}$ em que w é raiz m -ésima da unidade. Observo que estamos admitindo que 0 seja uma singularidade de C

Denotamos $\beta_0 = m$ e $\beta_1 = n$. Seja $e_1 = (\beta_1, \beta_0)$ o máximo divisor comum desses dois inteiros. Agora, definimos β_2 como o menor expoente aparecendo em $y(t)$ que não é divisível por e_1 . Definimos $e_2 = (e_1, \beta_2)$; temos $e_2 < e_1$, e continuamos esse processo. Supondo já definido $e_i = (e_{i-1}, \beta_i)$, definimos β_{i+1} como o menor expoente aparecendo em $y(t)$ que não é divisível por e_i . Como a sequência de inteiros positivos

$$m > e_1 > \dots > e_i > \dots$$

é estritamente decrescente, existe um inteiro g tal que $e_g = 1$. De posse desses dados, podemos reescrever (1.2) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}x &= t^m \\y &= t^{\beta_1} + a_{\beta_1+e_1} t^{\beta_1+e_1} + \dots + a_{\beta_1+k_1 e_1} t^{\beta_1+k_1 e_1} \\&+ a_{\beta_2} t^{\beta_2} + a_{\beta_2+e_2} t^{\beta_2+e_2} + \dots + a_{\beta_q} t^{\beta_q} + a_{\beta_q+e_q} t^{\beta_q+e_q} + \dots \\&+ a_{\beta_g} t^{\beta_g} + a_{\beta_g+1} t^{\beta_g+1} + \dots\end{aligned}$$

tal que, por construção os coeficientes de t^{β_i} ; $i \geq 1$ são distintos de zero. Definimos os inteiros m_i e n_i pelas igualdades:

$$\begin{aligned}e_{i-1} &= n_i e_i \\ \beta_i &= m_i e_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq g\end{aligned}$$

e observamos que podemos reescrever a expansão de y em potências fracionárias de x da seguinte forma:

$$y(x^{\frac{1}{m}}) = a_{\beta_1} x^{\frac{m_1}{n_1}} + a_{\beta_1+e_1} x^{\frac{m_1+1}{n_1}} + \dots + a_{\beta_1+k_1 e_1} x^{\frac{m_1+k_1}{n_1}}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{\beta_2} x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + a_{\beta_2 + e_2} x^{\frac{m_2 + 1}{n_1 n_2}} + \dots + a_{\beta_q} x^{\frac{m_q}{n_1 n_2 \dots n_q}} + a_{\beta_q + e_q} x^{\frac{m_q + 1}{n_1 n_2 \dots n_q}} + \dots \\
& + a_{\beta_g} x^{\frac{m_g}{n_1 n_2 \dots n_g}} + a_{\beta_g + 1} x^{\frac{m_g + 1}{n_1 n_2 \dots n_g}} + \dots
\end{aligned} \tag{1.3}$$

A seqüência de inteiros $\beta(C) = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g)$ é conhecida como a *seqüência de expoentes característicos de C* , e a seqüência $(m_1, n_1) \dots (m_g, n_g)$ é conhecida como a *seqüência de pares característicos de C* .

1.5 Projeções gerais

Seja $(C, 0)$ um germe de curva analítica espacial (reduzida) definida por um ideal $I \subset \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_d\}$. Consideremos uma projeção linear $p : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^2$. Seja M o espaço de todas as projeções, pensado como um subespaço do espaço das matrizes $d \times 2$. Equipemos M com a topologia complexa (ou de Zariski). A projeção linear p é dita uma *projeção plana geral* para C em 0 , se para qualquer seqüência de pares $(a_i, b_i) \in (\mathbb{C} \setminus 0) \times (\mathbb{C} \setminus 0)$ tendendo a $(0, 0)$, a direção limite das retas secantes $\overline{a_i b_i}$ (para qualquer subsequência) não está contido no núcleo de p .

Observação 1.5.1. Em [28], B. Teissier observa que projeções gerais para C em 0 , ocorrem genericamente. Além disso, B. Teissier prova que $p(C)$ define um germe de curva analítica plana (reduzida) e p , quando restrita a C , define um homeomorfismo bi-Lipschitz.

Capítulo 2

Teoria métrica de curvas reais

O seguinte exemplo

$$X_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy(x - y)(x - ty) = 0\} \quad t > 1 \quad (2.1)$$

devido a H. Whitney (1965), motivou autores como D. Trotman, B. Teissier, T.C. Kuo, T. Mostowski e muitos outros a considerar o estudo de conjuntos singulares módulo relações de equivalências mais fracas do que diferenciáveis e mais fortes do que topológicas, pois para cada par de números reais $t > s > 1$ temos que X_t não é C^1 equivalente a X_s , isto é, não existe um difeomorfismo $C^1 \phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\phi(X_t) = (X_s)$. Este fenômeno indica uma grande rigidez no problema de classificação do ponto de vista diferenciável. Por outro lado, a família

$$C_m = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^{2m+1} = x^2\}, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

mostra quão flexível é o problema de classificação topológica de conjuntos singulares. Com efeito, para cada par de inteiros positivos $m \neq n$ temos um homeomorfismo $\phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\phi(C_m) = C_n$.

De forma nada surpreendente, mostramos que a família (2.1) define uma única classe módulo uma relação bi-Lipschitz, isto é, para cada par de números reais $t > s > 1$ temos um homeomorfismo bi-Lipschitz $\phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\phi(X_t) = X_s$. Isto indica que, comparada à relação diferenciável, a relação métrica acima não é tão rígida. Por outro lado, a família (2.2) tem seus elementos dois a dois não

equivalentes módulo a relação métrica acima. T. Mostowski [22], A. Parusinski [24], L. Birbrair [2] são alguns nomes que consideram o problema de classificação métrica de singularidades.

Este capítulo é destinado exclusivamente ao estudo de conjuntos singulares de dimensão real 1, vistos como subespaços euclidianos, módulo homeomorfismos bi-Lipschitz. De forma superficial, subdividimos este capítulo da seguinte forma. Na primeira seção deste capítulo, listamos alguns resultados de classificação de curvas reais os quais estão no artigo [3]. Observo que as idéias apresentadas nesta seção são fundamentais para o desenvolvimento desta tese. Na segunda seção, resolvemos o problema de caracterização do tipo bi-Lipschitz de curvas reais demonstrando que o semicomplexo de Hölder (cf. [3]) é um invariante completo para esse problema. Na terceira seção, apresentamos um teorema de caracterização de famílias de curvas bi-Lipschitz triviais. Ainda na terceira seção, abordamos o problema de trivialização bi-Lipschitz de famílias de curvas semi-algébricas por desdobramentos bi-Lipschitz semi-algébricos e, nessa direção, obtemos um teorema que caracteriza completamente famílias de curvas planas por tais desdobramentos. Na quarta seção, aplicamos os resultados da seção anterior para o estudo de famílias quase-homogêneas.

2.1 Semicomplexo de Hölder

Os resultados apresentados nesta seção, exceto a Proposição 2.1.2, estão publicados em [3].

Seja (X, x) um germe de subconjunto semi-algébrico em $\mathbb{R}^p$, de dimensão real 1, com semi-ramos $X = \bigcup_{i \in I} X_i$. Definimos para cada par de semi-ramos X_i, X_j , o seguinte número:

$$\text{sh}(X_i, X_j) = \text{ord}_r[\text{dist}(X_i \cap S_r(x), X_j \cap S_r(x))]$$

em que $S_r(x)$ denota a esfera $\{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| = r\}$.

Lema 2.1.1. $\text{sh}(X_i, X_j) = \text{ord}_r[\text{dist}(X_i - B_r(x), X_j - B_r(x))]$, $\forall i \neq j$, em que $B_r(x)$ denota a bola aberta $\{y \in \mathbb{R}^p : \|x - y\| < r\}$.

A proposição abaixo está provada na primeira seção do Capítulo 3.

Proposição 2.1.2. *Seja $F : (X, 0) \rightarrow \mathbb{R}^p$ o germe de uma aplicação semi-algébrica tal que sua restrição a cada X_i é Lipschitz. Denotemos por $x_i(r)$ o ponto na interseção $X_i \cap S_r(0)$. Se*

$$\|F(x_i(r)) - F(x_j(r))\| \lesssim \|x_i(r) - x_j(r)\|, \quad \forall i, j,$$

então F é o germe de uma aplicação Lipschitz.

Teorema 2.1.3. *Sejam (X, x) e (Y, y) germes de subconjuntos semi-algébricos, de dimensão real 1, equipados com a métrica euclidiana induzida e com semi-ramos $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ e $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$. Então, existe $F : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ bi-Lipschitz se, e somente se, existe uma bijeção $\phi : I \rightarrow J$ tal que $\text{sh}(X_i, X_j) = \text{sh}(Y_{\phi(i)}, Y_{\phi(j)})$, para cada par $i \neq j \in I$.*

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor $x = 0 = y$. Suponhamos que $F : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ seja uma aplicação bi-Lipschitz. Sejam $0 < c_1 \leq c_2$ constantes de Lipschitz de F . Como F é um homeomorfismo, temos que I e J possuem a mesma quantidade de elementos e para cada $i \in I$ existe um único $\phi(i) \in J$ tal que $(F(X_i), 0) = (Y_{\phi(i)}, 0)$. Isto é, $\phi : I \rightarrow J$ definida como acima é uma bijeção.

Sejam $m = \text{sh}(X_i, X_j)$ e $n = \text{sh}(Y_{\phi(i)}, Y_{\phi(j)})$. Consideremos também $r^m h(r)$ e $r^n g(r)$ as decomposições de Puiseux de

$$\text{ord}_r[\text{dist}(X_i - B_r(0), X_j - B_r(0))] \quad \text{e} \quad \text{ord}_r[\text{dist}(Y_{\phi(i)} - B_r(0), Y_{\phi(j)} - B_r(0))]$$

respectivamente. Como F é bi-Lipschitz com constantes $0 < c_1 \leq c_2$,

$$\|p\| \geq r \Rightarrow \|F(p)\| \geq c_1 r$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} r^m h(r) &= \|x_i(r) - x_j(r)\| \\ &\geq \frac{1}{c_2} \|F(x_i(r)) - F(x_j(r))\| \\ &= \frac{1}{c_2} (c_1 r)^n g(c_1 r). \end{aligned}$$

Com isso, mostramos que $m \leq n$. Simetricamente, podemos mostrar que $n \leq m$ e, portanto, $m = n$.

Reciprocamente, suponhamos $I = J$ e $\text{sh}(X_i, X_j) = \text{sh}(Y_i, Y_j)$ para cada $i \neq j$. Definamos $F : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$ por: dado $x \in X_i \cup S_r(0)$, seja $F(x)$ o ponto na interseção $Y_i \cap S_r(0)$. Segue imediatamente da Proposição 2.1.2 que F é o germe de uma aplicação bi-Lipschitz. ■

2.2 Sobre o tipo Lipschitz de curvas reais

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, subconjuntos semi-algéblicos de dimensão real 1, e sejam $x \in X$, $y \in Y$.

Nesta seção, procuramos responder à seguinte pergunta: quando existe um germe de aplicação semi-algéblica bi-Lipschitz $F : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y)$ tal que $F(X) = Y$?

Sejam $(X, x), (Y, y) \subset \mathbb{R}^n$ germes de curvas semi-algéblicas, com semi-ramos $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ e $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$. Para efeito de simplicidade, nas demonstrações e em alguns resultados auxiliares deste capítulo, escrevemos $\text{sh}(X, x) = \text{sh}(Y, y)$ para indicar que existe uma bijeção $\phi : I \rightarrow J$ tal que $\text{sh}(X_i, x_i) = \text{sh}(Y_{\phi(i)}, y_{\phi(i)})$, para cada par $i \neq j \in I$.

Segue do Teorema 2.1.3 que $\text{sh}(X, x) = \text{sh}(Y, y)$ é uma condição necessária para que exista um germe de aplicação semi-algéblica bi-Lipschitz $F : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y)$ tal que $F(X) = Y$. Nesta seção, mostramos que tal condição, é também suficiente.

Respondemos à pergunta formulada no início desta seção em duas etapas. Na primeira etapa, a qual tem início a seguir, respondemos essa pergunta para o caso de curvas planas e, na segunda etapa, concluimos o resultado para o caso geral.

Denotamos o primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ por $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$ e dada uma função $f : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos $T_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ e } y = f(x)\}$. Quando $f(x) = x^\alpha$, denotamos $T_\alpha = T_f$.

Lema 2.2.1. *Sejam $f : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semi-algéblica com decomposição de Newton-Puiseux em $x = 0$, dada por $f(x) = x^\alpha h(x)$ com $h(0) > 0$. Consideremos o*

seguinte germe de aplicação semi-algébrica $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$; para cada $(x, y) \in Q$, é definido por:

$$F(x, y) = \begin{cases} (x, \frac{y}{h(x)}) & \text{se } 0 \leq y \leq f(x) \\ (x, y - f(x) + x^\alpha) & \text{se } 0 \leq f(x) \leq y \end{cases}$$

e, fora de Q , F é definido como o germe da aplicação identidade. Então, F é um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz tal que $(F(T_f), 0) = (T_\alpha, 0)$ e fora do quadrante Q coincide com a aplicação identidade.

Prova. É claro que F define um germe de homeomorfismo semi-algébrico tal que $(F(T_f), 0) = (T_\alpha, 0)$. Também é claro que F é bi-Lipschitz fora do domínio: $\{(x, y) \in Q; 0 \leq y \leq f(x)\}$. Mas, nesse domínio, a Proposição 4.1 de [2] mostra que F é bi-Lipschitz. ■

O Lema 2.2.1 é fundamental para a solução que apresentamos para o problema de classificação do tipo semi-algébrico bi-Lipschitz de curvas reais. Os resultados que apresentamos nesta seção, foram obtidos quando visitei a Universidade de Valladolid em Abril-Maio de 2001 e formam parte de um artigo, ainda em preparação, junto com o Professor Dr. Lev Birbrair, sobre classificação bi-Lipschitz de singularidades (o-minimais) de dimensão real 1 e 2.

Observação 2.2.2. Como consequência do Lema 2.2.1, temos que se $f, g : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções semi-algébricas, com os mesmos primeiros expoentes de Newton-Puiseux em $x = 0$, então existe um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $F(T_f) = T_g$.

Lema 2.2.3. *Sejam $f_i, g_i : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ funções semi-algébricas, com $f_i(0) = g_i(0) = 0$ e $i = 1, \dots, m$. Sejam também, $X = \bigcup \text{Graf}(f_i)$ e $Y = \bigcup \text{Graf}(g_i)$. Se $\text{sh}(X, 0) = \text{sh}(Y, 0)$, então existe um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $F(X) = Y$ e, fora do quadrante Q , F coincide com a aplicação identidade.*

Prova. Provamos o resultado acima por indução sobre $m \geq 1$. Antes, podemos fazer algumas considerações sem perda de generalidade. Por exemplo, podemos supor $0 \equiv f_m \leq \dots \leq f_1$ e $0 \equiv g_m \leq \dots \leq g_1$. O caso em que $m = 2$, segue imediatamente do Lema 2.2.1. Agora, suponhamos $m > 2$ e, por indução, suponhamos que o resultado seja válido para $m-1$. Novamente, pelo Lema 2.2.1, podemos supor $f_{m-1} = h = g_{m-1}$. Então, sejam $\tilde{X} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \text{Graf}(\tilde{f}_i)$, $\tilde{Y} = \bigcup_{i=1}^{m-1} \text{Graf}(\tilde{g}_i)$, $\tilde{f}_i = f_i - h$ e $\tilde{g}_i = g_i - h$, $i = 1, \dots, m-1$. Por hipótese de indução, existe um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz $\tilde{F} : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\tilde{F}(\tilde{X}) = \tilde{Y}$ e, fora de Q , $\tilde{F}$ coincide com a aplicação identidade.

Tomemos, $\Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $\Phi(x, y) = (x, y - h(x))$. Assim, $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ dada por $F = \Phi^{-1} \circ \tilde{F} \circ \Phi$ é um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz tal que $(F(X), 0) = (Y, 0)$ e F coincide com a aplicação identidade fora de Q . ■

Observação 2.2.4. Sejam $c > 0$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \text{ e } 0 \leq y \leq cx\}$. Então, $\Phi : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$, dada por $\Phi(x, y) = (cx - y, y)$, é uma aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz tal que $\Phi(K) = Q$. Com isso, podemos reenunciar o Lema 2.2.3 da seguinte forma:

Lema 2.2.5. *Sejam $f_i, g_i : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ funções semi-algébricas, com $f_i(0) = g_i(0) = 0$ e $i = 1, \dots, m$. Sejam também, $X = \bigcup \text{Graf}(f_i)$, $Y = \bigcup \text{Graf}(g_i)$, $c > 0$ e $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \text{ e } 0 \leq y \leq cx\}$ cone contendo X e Y . Se $\text{sh}(X, 0) = \text{sh}(Y, 0)$, então existe um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $F(X) = Y$ e, fora do cone K , F coincide com a aplicação identidade.*

Lema 2.2.6. *Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ curvas semi-algébricas e sejam $x \in X$, $y \in Y$. Se $\text{sh}(X, x) = \text{sh}(Y, y)$, então existe um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz $F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $F(X) = Y$.*

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor $x = 0 = y \in \mathbb{R}^2$. Por hipótese, $\text{sh}(X, 0) = \text{sh}(Y, 0)$. Portanto, o número t de semi-retas reais tangentes a $(X, 0)$ coincide com o número de semi-retas reais tangentes a $(Y, 0)$. Separemos os semi-ramos de

$(X, 0)$, respectivamente $(Y, 0)$, em cones $K_1^X, \dots, K_t^X$, respectivamente $K_1^Y, \dots, K_t^Y$, os quais possuem interseção somente na origem, de tal maneira que dois semi-ramos de $(X, 0)$, respectivamente de $(Y, 0)$, estão em um mesmo cone se, e somente se, possuem o mesmo vetor unitário tangente na origem. Como $sh(X, 0) = sh(Y, 0)$, podemos enumerar os cones de forma que:

$$sh(X \cap K_i^X, 0) = sh(Y \cap K_i^Y, 0)$$

para cada $i = 1, \dots, t$. Agora, pelo Lema 2.2.5, para cada $i = 1, \dots, t$, temos um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz

$$F_i : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

tal que $(F_i(X \cap K_i^X)) = Y \cap K_i^Y$ e F_i coincide com a aplicação identidade fora do cone K_i^X . Então, seja

$$F : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

dada por: $F(x, y) = F_i(x, y)$ caso exista i tal que $(x, y) \in K_i^X$ e $F(x, y) = (x, y)$ no caso contrário. Temos que F é um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz tal que $(F(X), 0) = (Y, 0)$. ■

Teorema 2.2.7. *Sejam $(X, x), (Y, y) \subset \mathbb{R}^n$ germes de curvas semi-algébricas, com semi-ramos $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ e $Y = \bigcup_{j \in J} X_j$. Se existe uma bijeção $\phi : I \rightarrow J$ tal que $sh(X_i, X_j) = sh(Y_{\phi(i)}, Y_{\phi(j)})$, para cada par $i \neq j \in I$, então existe um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz $F : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y)$ tal que $F(X) = Y$.*

Prova. Provaremos este teorema por indução sobre o número $n \geq 2$. O Caso $n = 2$ segue imediatamente do Lema 2.2.6. Então, sejam $n \geq 2$ e $(X, x), (Y, y)$ germes de curvas semi-algébricas em $\mathbb{R}^{n+1}$ tais que $sh(X, x) = sh(Y, y)$. Suponhamos, por hipótese de indução, que o teorema seja verdadeiro para germes de curvas semi-algébricas em $\mathbb{R}^n$. Sem perda de generalidade, podemos supor $x = y = 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Sejam $\Pi_1, \Pi_2 : \mathbb{R}^{n+1}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$ projeções genéricas tais que

$$sh(\Pi_1(X), 0) = sh(X, 0) \quad \text{e} \quad sh(\Pi_2(Y), 0) = sh(Y, 0).$$

Então, temos germes de funções semi-algébricas bi-Lipschitz

$$f_1 : (\Pi_1(X), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0) \quad f_2 : (\Pi_2(Y), 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

tais que $\text{Graf}(f_1) = X$ e $\text{Graf}(f_2) = Y$. Pelo Teorema de Kirszbraun, existem extensões semi-algébricas bi-Lipschitz $\phi_1, \phi_2 : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ de f_1, f_2 respectivamente. Agora, consideremos os seguintes germes de aplicações semi-algébricas bi-Lipschitz $F_1, F_2 : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ dados por

$$F_i(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1} - \phi_i(z_1, \dots, z_n)), \quad i = 1, 2.$$

Temos $\tilde{X}, \tilde{Y}$ curvas semi-algébricas em $\mathbb{R}^n$ tais que

$$(F_1(X), 0) = (\tilde{X} \times 0, 0) \quad (F_2(Y), 0) = (\tilde{Y} \times 0, 0).$$

Daí,

$$\text{sh}(\tilde{X}, 0) = \text{sh}(X, 0) = \text{sh}(Y, 0) = \text{sh}(\tilde{Y}, 0).$$

Logo, por hipótese de indução, existe um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz $\tilde{F} : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tal que $\tilde{F}(\tilde{X}) = \tilde{Y}$. Finalmente, sejam $F, F_3 : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, 0)$ dadas por

$$F_3(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = (\tilde{F}(z_1, \dots, z_n), z_{n+1})$$

e $F = F_2^{-1} \circ F_3 \circ F_1$. Assim, F é um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz tal que $F(X) = Y$. ■

2.3 Sobre famílias de curvas reais

Definição 2.3.1. Seja Y um subconjunto semi-algébrico de $\mathbb{R}^p$. Uma *família de germes de conjuntos semi-algébricos em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ sobre Y* é um germe X em $\{0\}^n \times Y$ de subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ tal que o germe de X em cada ponto $(0, t)$ é semi-algébrico. Denotamos $\Pi : \mathbb{R}^n \times Y \rightarrow Y$ projeção canônica e $X_t = X \cap \Pi^{-1}(t)$.

Dizemos que X é *topologicamente (respect. bi-Lipschitz) trivial ao longo de Y* se existe um germe de homeomorfismo (respect. homeomorfismo bi-Lipschitz)

$$H : (\mathbb{R}^n \times Y, \{0\}^n \times Y) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times Y, \{0\}^n \times Y)$$

tal que $\Pi \circ H = \Pi$ e $H(X) = X_{t_0} \times Y$ para algum $t_0 \in Y$.

Observação 2.3.2. Seja X uma família de germes de curvas semi-algébricas pela origem de $\mathbb{R}^n$, ao longo de um intervalo I . Dizer que $\text{sh}(X_t, 0)$ é constante significa dizer que existem $\delta > 0$ e $m \geq 1$ tais que para cada $t \in I$ temos uma quantidade m de semi-ramos de $(X_t, 0)$

$$X_t^1, \dots, X_t^m$$

e existem $0 < K_1 \leq K_2$ e uma coleção $\alpha_{i,j}$ de números racionais tais que

$$x_i(r, t) - x_j(r, t) = r^{\alpha_{i,j}} d_{i,j}(r, t)$$

em que $K_1 \leq \|d_{i,j}(r, t)\| \leq K_2$, $\forall (r, t) \in [0, \delta] \times I$ e $x_i(r, t)$ é o ponto na interseção de X_t^i com a esfera de raio r e centro na origem.

De acordo com as considerações acima, temos claramente que para que uma família de curvas X_t pela origem de $\mathbb{R}^n$ seja bi-Lipschitz trivial é necessário que $\text{sh}(X_t, 0)$ seja constante.

Exemplo 2.3.3. (Kite singularities [19])

Sejam $1 < k < l < m$ e consideremos

$$X_t = \{(x, y) : y^{2k} = x^{2m+1} + tx^{2l+1}\}.$$

Temos que: $\text{sh}(X_t, 0) = \frac{2l+1}{2k}$ para $t \neq 0$ e $\text{sh}(X_0, 0) = \frac{2m+1}{2k}$. Portanto, para qualquer intervalo não degenerado I de $\mathbb{R}$ contendo 0, a família X_t não é bi-Lipschitz trivial ao longo desse intervalo. Por outro lado, é bem conhecido que essa família é Whitney equisingular.

O exemplo acima deixa clara a diferença entre estratificações de Whitney e estratificações bi-Lipschitz. Pois, estratificações de Whitney oferecem o bom comportamento de pares de estratos de dimensões distintas enquanto para que uma estratificação

seja bi-Lipschitz trivial, também devemos ter o bom comportamento de pares de estratos de mesma dimensão. E, para o caso de família de curvas, esse bom comportamento de pares de estratos de mesma dimensão vai ser obtido a partir de hipóteses sobre $\text{sh}(X_t, 0)$.

Proposição 2.3.4. *A família (2.1) de quatro retas de H . Whitney é bi-Lipschitz trivial.*

Prova. Consideremos $X = \{(x, y, z) : xy(x - y)(x - zy) = 0, z > 1\}$. Para cada $t > 1$, seja $X_t = \{(x, y, z) \in X : z = t\}$. Consideremos os seguintes subconjuntos de X :

- $X^0 = \{(x, y, z) \in X : x = 0\};$
- $X^1 = \{(x, y, z) \in X : y = 0\};$
- $X^2 = \{(x, y, z) \in X : x = y\};$
- $X^3 = \{(x, y, z) \in X : x = zy\}.$

Definamos $V : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, campo de vetores em X , da seguinte forma:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} (0, 0, 1) & \text{se } (x, y, z) \notin X^3 \\ (y, 0, 1) & \text{se } (x, y, z) \in X^3 \end{cases}.$$

É claro que V é um campo tangente a cada X^i ; $i = 0, 1, 2, 3$. Nesse momento, consideramos $\mathbb{R}^3$ equipado da métrica da soma.

Afirmção. Para cada $t > 1$, $V_t := V(\cdot, t)$ é um campo $k(t)$ -Lipschitz, com $k(t)$ contínua em t .

Com efeito, sejam $P = (x, y, t)$ e $Q = (a, b, t)$ pontos de X . Se $P, Q \notin X^3$, então $V(P) = V(Q)$. Assim, podemos supor que $P \in X^3$, isto é, $P = (ty, y, t)$.

- Se $Q \in X^0$, então $\|V(P) - V(Q)\| \leq t^{-1}\|P - Q\|;$
- Se $Q \in X^1$, então $\|V(P) - V(Q)\| \leq \|P - Q\|;$
- Se $Q \in X^2$, então $\|V(P) - V(Q)\| \leq (t - 1)^{-1}\|P - Q\|;$

- $Q \in X^0$, então $\|V(P) - V(Q)\| \leq (t+1)^{-1}\|P - Q\|$.

Assim, temos V_t um campo $k(t)$ -Lipschitz para $k(t) = \max\{1, (1-t)^{-1}\}$. Fica provada a afirmação acima.

Seja I um intervalo compacto em $(1, +\infty)$. Pela afirmação acima, V_t é um campo k -Lipschitz com a constante k independentemente de t . Usando o Teorema de Kirzbraun, temos uma extensão $W : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de V tal que para cada $t \in I$, $W_t := W(\cdot, t)$ é um campo k -Lipschitz. Agora, como V é tangente a X , temos que o fluxo de W nos dá uma trivialização bi-Lipschitz de X ao longo de I . ■

Teorema 2.3.5. *Seja X uma família de germes de curvas semi-algébricas pela origem de $\mathbb{R}^n$, ao longo de um intervalo I . Se X é Whitney equisingular ao longo de I e $\text{sh}(X_t, 0)$ é constante, então X é bi-Lipschitz trivial ao longo de I .*

Prova. Como X é Whitney equisingular ao longo de $I = [0, a]$, podemos considerar V um campo de vetores, integrável, sobre X ; V coincide com $\frac{\partial}{\partial t}$ sobre o t -eixo e seu fluxo ϕ sobre X satisfaz: $\|\phi_t(x)\| = \|x\|$, $\forall (x, t)$ (cf. [16]). Usando a notação da observação acima, isto significa que $x_i(r, t) = x_i(r, 0)$, $\forall i$. Então ,

$$\begin{aligned} \|V_t(x_i(r, t)) - V_t(x_j(r, t))\| &= r^{\alpha_{i,j}} \left\| \frac{\partial}{\partial t} d_{i,j}(r, t) \right\| \\ &\leq K \|x_i(r, t) - x_j(r, t)\|. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 2.1.2, segue que, para cada $t \in I$, V_t é um campo Lipschitz com uma constante que não depende de t . Com isso, podemos usar o Teorema de Kirszbraun para estender V a um campo de vetores Lipschitz sobre $\mathbb{R}^n \times I$ e tomar o seu fluxo para obter uma trivialização bi-Lipschitz de X . ■

Observação 2.3.6. No Teorema 2.3.5 é suficiente pedirmos que a família X_t seja c -regular no sentido de K. Bekka [1], uma vez que X_t c -regular ao longo de I ainda é suficiente para garantir a existência de ϕ_t satisfazendo $\|\phi_t(x)\| = \|x\|$, $\forall (x, t)$.

Lev Birbrair, em conversa particular, apontou-me para a dificuldade de se estabelecer teoremas de existência e caracterização de estratificações semi-algebricamente

bi-Lipschitz triviais. Pois, a integração de campos semi-algébicos não fornece aplicações semi-algébicas. A seguir, apresentamos um resultado de caracterização de famílias de curvas planas semi-algébicamente bi-Lipschitz triviais.

Definição 2.3.7. Seja Y um subconjunto semi-algébico de $\mathbb{R}^p$. Uma *família de germes de conjuntos semi-algébicos em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ sobre Y* é um germe X em $\{0\}^n \times Y$ de subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ tal que o germe de X em cada ponto $(0, t)$ é semi-algébico. Denotamos por $\Pi : \mathbb{R}^n \times Y \rightarrow Y$ a projeção canônica e $X_t = X \cap \Pi^{-1}(t)$.

Dizemos que X é *semi-algébicamente bi-Lipschitz trivial ao longo de Y* se existe um germe de homeomorfismo semi-algébico bi-Lipschitz

$$H : (\mathbb{R}^n \times Y, \{0\}^n \times Y) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times Y, \{0\}^n \times Y)$$

tal que $\Pi \circ H = \Pi$ e $H(X) = X_{t_0} \times Y$ para algum $t_0 \in Y$.

Observação 2.3.8. Seja X uma família semi-algébica de germes de curvas semi-algébicas planas, pela origem de $\mathbb{R}^2$, ao longo de um intervalo compacto I de $\mathbb{R}$. É um fato que, para cada $t \in I$ existe uma vizinhança da origem U_t em $\mathbb{R}^2$ tal que $X_t \cap U_t$ tem os seus semi-ramos, na origem, dados por gráficos de funções semi-algébicas convexas. Em particular, estas funções, quando não são identicamente nulas, não se anulam em pontos desse domínio. Nesse caso, diremos que $X_t \cap U_t$ tem uma *estrutura de gráfico* (na origem).

Definição 2.3.9. Seja X uma família semi-algébica de germes de curvas semi-algébicas planas, pela origem de $\mathbb{R}^2$, ao longo de um intervalo compacto I de $\mathbb{R}$. Dizemos que X tem *estrutura uniforme de gráfico* (na origem), se existe uma vizinhança U da origem em $\mathbb{R}^2$ tal que para cada $t \in I$, $U \cap X_t$ tem uma estrutura de gráfico (na origem).

Dado um germe de curva semi-algébica $(X, 0)$, seu cone tangente, que denotamos por $c(X)$, é o conjunto formado pelas semi-retas tangentes a $(X, 0)$.

Lema 2.3.10. *Seja X uma família semi-algébica de germes de curvas semi-algébicas pela origem de $\mathbb{R}^2$, ao longo de um intervalo $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$, tal que a família de $c(X_t)$*

associada a X é trivial. Se X é topologicamente trivial, ao longo de I , então X possui uma estrutura uniforme de gráfico (na origem).

Prova. Seja B uma bola em torno da origem de $\mathbb{R}^2$ tal que $X_a \cap B$ possua estrutura de gráfico (na origem). Como X é topologicamente trivial, ao longo de I , podemos supor que B é suficientemente pequena tal que para cada aberto $V \subset B$, em torno da origem, temos: para cada $t, s \in I$, existe um homeomorfismo $\phi_{t,s} : V \rightarrow V$; $\phi_{t,s}(X_t \cap V) = (X_s \cap V)$ e $\phi_{t,s}(0) = 0$.

Tomemos $[0, \delta]$ o maior intervalo contido na projeção ortogonal de $X_t \cap B$ sobre a sua semi-reta real tangente l , $\forall t$. Observemos que $0 < \delta$, pois caso contrário, usando a compacidade de I , mostraríamos que, para algum t , $X_t \cap B$ intersectaria a reta ortogonal a l e isto contradiz o fato de termos um homeomorfismo $\phi : B \rightarrow B$ tal que $\phi(X_a \cap B) = X_t \cap B$. Agora tomemos $V = B \cap [-\delta, \delta] \times \mathbb{R}$. Então, dado t , qualquer reta vertical contida em V intersecta X_t .

Por contradição, suponhamos que uma curva $X_t \cap B$ possua um semi-ramo, na origem, que não seja gráfico sobre sua tangente l . Isto é, temos uma reta r_1 vertical (reta ortogonal a l) tal que, se r_1 intersecta esse semi-ramo o faz mais de uma vez. Então, tomemos um aberto $V \subset B$ em torno da origem tal que $r_1 \cap V \subset \partial V$. Observe que isso contradiz o fato de existir um homeomorfismo $\phi_{a,t} : V \rightarrow V$; $\phi_{a,t}(X_a \cap V) = (X_t \cap V)$ e $\phi_{a,t}(0) = 0$ pois, como $X_a \cap V$ possui uma estrutura de gráfico (na origem), $r_1 \cap B$ intersecta cada semi-ramo de $X_a \cap V$ (na origem) uma, e somente uma, vez.

Também, por contradição, e tomando retas horizontais (retas paralelas a uma determinada tangente l), podemos provar que para cada $t \in I$ os semi-ramos da curva X_t (na origem), com tangente l , ou bem coincidem com l ou não intersectam l . ■

Definição 2.3.11. Uma família semi-algébrica X de germes de curvas semi-algébricas pela origem de $\mathbb{R}^n$ topologicamente trivial ao longo de um intervalo $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ é *ct-regular* se a família de cones tangentes $c(X_t)$ é semi-algebricamente topologicamente trivial.

Exemplo 2.3.12. (Teissier, 1974)

A seguinte família de curvas planas pela origem de $\mathbb{R}^2$

$$X_t : y^3 = x^5 + tx^2 \quad (2.3)$$

não possui uma estrutura uniforme de gráfico (na origem), embora possua tipo topológico constante. Vale observar que, para cada t , X_t possui dois semi-ramos reais pela origem com contato igual a 1.

Exemplo 2.3.13. A seguinte família de germes de curvas planas

$$\cos(t + \frac{\pi}{2})x + \sin(t + \frac{\pi}{2})(x^2y + y^3) = 0$$

sugerida por R.N.A. dos Santos [26], é topologicamente trivial, mas não é ct-regular.

Notação. Uma função $f : I \times [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ define uma família de funções $f_t : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}; \forall t \in I, f_t(x) = f(x, t)$. E, denotamos

$$T_f = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T_{f_t}\}.$$

Lema 2.3.14. *Seja $f : I \times [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semi-algébrica tal que, para cada $t \in I$, f_t é uma função não negativa com decomposição de Newton-Puiseux em $x = 0$ dada por $f_t(x) = x^\alpha h_t(x)$. Então ,*

$$F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0)$$

dada por $F(x, y, t) = (F_t(x, y), t)$ em que

$$F_t(x, y) = \begin{cases} (x, \frac{y}{h_t(x)}) & \text{se } 0 \leq y \leq f_t(x) \\ (x, y - f_t(x) + x^\alpha) & \text{se } 0 \leq f_t(x) \leq y \end{cases}$$

é um germe de aplicação semi-algébrica bi-Lipschitz tal que $\Pi \circ F = \Pi$ e $F(T_f) = T_\alpha \times \mathbb{R}$. Além disso, para cada $t \in I$, F_t coincide com a aplicação identidade fora do quadrante Q .

Como aplicação do Lema 2.3.14, vejamos o seguinte exemplo. Consideremos a seguinte família de germes de curvas semi-algébricas planas, pela origem de $\mathbb{R}^2$:

$$X_t : x^6 - y^4 + tx^3y^2 = 0.$$

Mostremos que essa família é semi-algebricamente bi-Lipschitz trivial ao longo de qualquer intervalo $I = [-a, a]$, $a > 0$. Por simetria, podemos considerar

$$X_t : x^6 - y^4 + tx^3y^2 = 0 ; x \geq 0.$$

Temos $X_t \cap \{x = 1\} = \{(1, g(t)), (1, -g(t))\}$, em que g é uma função semi-algébrica, contínua, tal que $g(0) > 0$. Como X_t é homogêneo com relação aos pesos $wt(x) = 2$ e $wt(y) = 3$, temos que os semi-ramos de X_t na origem são parametrizados por

$$(s^2, s^3g(t)) : (s^2, -s^3g(t)) ; s \geq 0.$$

Ou ainda, temos que os semi-ramos de X_t na origem são dados pelos gráficos

$$y = x^{\frac{3}{2}}g(t) : y = -x^{\frac{3}{2}}g(t) ; x \geq 0.$$

Após considerarmos a seguinte mudança de coordenadas bi-Lipschitz

$$(x, y, t) \mapsto (x, y + x^{\frac{3}{2}}g(t), t)$$

temos que X_t pode ser visto como os gráficos

$$y = 0 : y = 2x^{\frac{3}{2}}g(t) ; x \geq 0.$$

isto é, $X_t = T_{f_t}$ em que $f_t(x) = 2x^{\frac{3}{2}}g(t)$. Segue do Lema 2.3.14, que a família $X = \{(x, y, t) : (x, y) \in X_t\}$ é semi-algebricamente bi-Lipschitz trivial ao longo de I .

Teorema 2.3.15. *Sejam X e Y duas famílias de germes de curvas semi-algébricas pela origem de $\mathbb{R}^2$, ct-regulares ao longo de um intervalo I e topologicamente equivalentes. Se $\text{sh}(X_t, 0) = \text{sh}(Y_t, 0)$, $\forall t \in I$, então X e Y são semi-algebricamente bi-Lipschitz equivalentes. Em particular, se X é ct-regular, topologicamente trivial e $\text{sh}(X_t, 0)$ é constante, então X é semi-algebricamente bi-Lipschitz trivial.*

Prova. Idêntica à prova dada para o Lema 2.2.6, aplicando aqui a versão do Lema 2.2.5 para famílias. ■

2.4 Sobre famílias de curvas reais quase-homogêneas

Seja $(a_1, \dots, a_n)$ uma n -upla de inteiros positivos primos entre si. Associada a $(a_1, \dots, a_n)$ temos a seguinte ação :

$$t \cdot p := (t^{a_1} p_1, \dots, t^{a_n} p_n) \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R}^* \text{ e } p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Definição 2.4.1. Uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $F = (f_1, \dots, f_m)$ é *quase-homogênea* de tipo $(a_1, \dots, a_n : d_1, \dots, d_m)$ se $F(t \cdot p) = (t^{d_1} f_1(p), \dots, t^{d_m} f_m(p))$ para cada $t \in \mathbb{R}$ e $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$.

O exemplo das quatro retas de H. Whitney (2.1) é um exemplo de uma família de conjuntos singulares definidos como zeros de uma família de aplicações homogêneas que apresenta modalidade para o problema de classificação módulo difeomorfismos de classe C^1 . Motivados por esta observação, estaremos interessados em responder a seguinte pergunta:

Quando uma família de aplicações $F_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ quase-homogêneas define uma família de curvas quase-homogêneas $X_t = F_t^{-1}(0)$, pela origem de $\mathbb{R}^n$, bi-Lipschitz trivial ?

Exemplo 2.4.2. Consideremos $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F_t(x, y, z) = (z^3 + tx, y^3 - x^2)$. Temos que $X_t = F_t^{-1}(0)$ não define uma família, de curvas pela origem de $\mathbb{R}^3$, bi-Lipschitz trivial. Com efeito, X_0 possui os seguintes semi-ramos

$$\begin{aligned} X_0^1 &= \{(r^3, r^2, 0) : r \geq 0\} \\ X_0^2 &= \{(-r^3, r^2, 0) : r \geq 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{sh}(X_0^1, X_0^2) = \frac{3}{2}$. Por outro lado, para $t \neq 0$, X_t possui os seguintes semi-ramos

$$\begin{aligned} X_t^1 &= \{(-\frac{1}{t}r^3, r^2, r) : r \geq 0\} \\ X_t^2 &= \{(\frac{1}{t}r^3, r^2, r) : r \geq 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, $\text{sh}(X_t^1, X_t^2) = 3$. Observe que F_0 não satisfaz $\Sigma_f \cap f^{-1}(0) = \{0\}$.

Exemplo 2.4.3. Consideremos $f_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_t(x, y) = x^4 - y^6 + tx^2y^3$, de formação quase-homogênea do germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ dado por $f(x, y) = x^4 - y^6$. Vimos na seção anterior que $X_t = f_t^{-1}(0)$ define uma família de curvas, pela origem de $\mathbb{R}^2$, semi-algebricamente bi-Lipschitz trivial. Observo que f tem singularidade isolada na origem.

Seja X uma curva plana quase-homogênea com respeito aos pesos (a_1, a_2) , isto é, X é invariante pela ação (2.4), e com semi-ramos reais $X = U_{i \in I} X_i$.

Lema 2.4.4. *Se $a_1 > a_2 \geq 1$, então o cone tangente a $(X, 0)$ está contido nos eixos de coordenadas de $\mathbb{R}^2$.*

Prova. Seja S um semi-ramo de $X, 0$ e seja (p, q) um ponto em S distinto da origem. Como X é quase-homogênea com respeito aos pesos (a_1, a_2) , podemos parametrizar S por

$$S = \{(s^{a_1}p, s^{a_2}q) : s \geq 0\}.$$

Se $q \neq 0$, então o y -eixo é tangente a S , pois estamos supondo $a_1 > a_2$. Caso contrário, claramente o x -eixo é tangente a S . ■

O lema acima mostra quão previsível é o comportamento das tangentes de famílias de curvas quase-homogêneas no caso em que os pesos são distintos. O lema seguinte é fundamental para o esclarecimento do comportamento bi-Lipschitz de curvas quase-homogêneas planas.

Lema 2.4.5. *Para cada par de semi-ramos X_i e X_j de $(X, 0)$, com mesma semi-reta real tangente, $\text{sh}(X_i, X_j) = \frac{a_2}{a_1}$.*

Prova. No caso $a_2 = a_1$, isto é, no caso homogêneo nada temos a provar. Então, suponhamos $a_1 > a_2$. Como X_i e X_j são semi-ramos distintos de $(X, 0)$, pelo lema anterior temos que a semi-reta tangente real a X_i e X_j é gerada por $\pm e_2$, isto é, $(0, \pm 1)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que tal semi-reta seja gerada por $(0, 1)$. Sejam $p = (p_1, p_2) \in X_i$ e $q = (q_1, q_2) \in X_j$. Claramente, temos $p_2 \neq 0$ e $q_2 \neq 0$. Afirmamos que é possível escolher p e q nas condições acima tais que

$\frac{p_1}{(p_2)^{\frac{1}{a_2}}} \neq \frac{q_1}{(q_2)^{\frac{1}{a_2}}}$. Com efeito, se $\frac{p_1}{(p_2)^{\frac{1}{a_2}}} = \frac{q_1}{(q_2)^{\frac{1}{a_2}}}$, então troquemos p por $p' = t \cdot p$ com $t > 0$ suficientemente pequeno. Obviamente, $p' \in X_i$ e $p'_2 \neq 0$. Se tivéssemos $\frac{p'_1}{(p'_2)^{\frac{1}{a_2}}} = \frac{q_1}{(q_2)^{\frac{1}{a_2}}}$, então $t^{a_1-1} = 1$. Como $a_1 > a_2 \geq 1$, e $t > 0$ foi escolhido pequeno, temos uma contradição.

Usando que X_i e X_j são invariantes pela ação 2.4, concluímos o seguinte:

$$X_i = \{(t^{a_1}p_1, t^{a_2}p_2) : 0 \leq t\} \quad \text{e} \quad X_j = \{(t^{a_1}q_1, t^{a_2}q_2) : 0 \leq t\}.$$

Assim, se $x_i(r)$ é o ponto na interseção $X_i \cup S_r(0)$ e se $x_j(r)$ é o ponto na interseção $X_j \cup S_r(0)$, temos:

$$x_i(r) = (r, r^{\frac{a_1}{a_2}} \frac{p_2}{|p_1|^{\frac{1}{a_1}}}) \quad \text{e} \quad x_j(r) = (r, r^{\frac{a_1}{a_2}} \frac{q_2}{|q_1|^{\frac{1}{a_1}}}).$$

Agora, como $\frac{p_1}{(p_2)^{\frac{1}{a_2}}} \neq \frac{q_1}{(q_2)^{\frac{1}{a_2}}}$, temos $\text{ord}_r \|x_i(r) - x_j(r)\| = \frac{a_2}{a_1}$.

■

Teorema 2.4.6. *Seja $f_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma deformação quase-homogênea, com respeito aos pesos $a_1 \geq a_2 \geq 1$, de um germe f , definindo uma família de curvas planas $X_t = f_t^{-1}(0)$. Se f define um germe de codimensão finita na origem, então $(X_t, 0)_t$ é semi-algebricamente bi-Lipschitz trivial para t pequeno.*

Prova. Se $a_1 = a_2$, nada temos a fazer. Então, podemos supor $a_1 > a_2$. Suponhamos, primeiro, que X_0 não contenha o y -eixo. Nesse caso, para t pequeno, X_t não intersecta o y -eixo fora da origem. Portanto, para cada t pequeno, vale: X_t^i, X_t^j possuem a mesma semi-reta real tangente se, e somente se, X_0^i, X_0^j possuem a mesma semi-reta real tangente. Assim, diante do lema acima, temos: $\text{sh}(X_t^i, X_t^j) \equiv \text{sh}(X_0^i, X_0^j)$.

Agora, suponhamos que X_0 contenha o y -eixo. Nesse caso, X_t também contém o y -eixo, pois o fato de $yx^a \in \text{supp}(f)$ para algum a , implica que $x^b \notin \text{supp}(f)$ para todo b . Assim,

$$X_t^1 = \{(s, 0) : s \geq 0\} \quad \text{e} \quad X_t^1 = \{(s, 0) : s \leq 0\}$$

são semi-ramos reais de X_t para todo t pequeno. Portanto

$$\text{sh}(X_t^i, X_t^j) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } i \in \{1, 2\} \text{ ou } j \in \{1, 2\} \\ \frac{a_2}{a_1} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De qualquer forma, temos $\text{sh}(X_t^i, X_t^j) \equiv \text{const.}$

Por outro lado, segue dos resultados apresentados em [9] que a família acima é topologicamente trivial. Então, do Teorema 2.3.15, segue-se o resultado.

■

Observação 2.4.7. No capítulo sobre curvas complexas, mostramos que deformações μ -constantes $f_t : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ de f , em que μ é o número de Milnor de f , definem famílias de curvas bi-Lipschitz triviais.

Relembremos algo a respeito da determinação finita de germes de aplicações analíticas. De acordo com [31], dado um germe de aplicação analítica $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, temos que $\Sigma_F \cap F^{-1}(0) = 0$ é uma condição necessária e suficiente para que f seja $C^l - \mathcal{K}$ -determinado para cada $0 \leq l < \infty$.

A partir do Teorema 2.4.6 surge naturalmente a seguinte pergunta:

Se $F_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ é uma deformação quase-homogênea de uma aplicação quase-homogênea $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ com respeito aos pesos $a_1 > \dots > a_n > 1$ satisfazendo $\Sigma_F \cap F^{-1}(0) = 0$, então F_t define uma família de curvas $X_t = F_t^{-1}(0)$ bi-Lipschitz trivial ?

O seguinte exemplo responde negativamente a essa pergunta.

Exemplo 2.4.8. $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, z) = (y + tz^2, x^4 - z^{12})$.

Capítulo 3

Teoria métrica de curvas complexas

Em [8], E. Brieskorn observa que, se esperamos capturar informações a respeito de propriedades qualitativas locais de curvas analíticas complexas em $\mathbb{C}^2$, não devemos abordá-las de forma abstrata. Essa afirmação é justificada pelo resultado abaixo

Proposição 3.0.9. *Todo ramo de curva analítica em $\mathbb{C}^2$ é homeomorfo a $(\mathbb{C}, 0)$.*

Este resultado justifica a seguinte relação de equivalência topológica, entre germes de subconjuntos analíticos em $\mathbb{C}^d$.

Definição 3.0.10. Sejam C e D subconjuntos analíticos de $\mathbb{C}^d$ e sejam $x \in C$, $y \in D$. O germe (C, x) é *topologicamente equivalente* a (D, y) quando existe um homeomorfismo $F : (\mathbb{C}^2, x) \rightarrow (\mathbb{C}^2, y)$ tal que $F(C) = D$.

Claramente, a abordagem acima é mais fina do que a abordagem abstrata, no sentido que: se (C, x) é topologicamente equivalente a (D, y) , então (C, x) é homeomorfo a (D, y) . De fato, essa abordagem é estritamente mais fina do que a abstrata, por exemplo, temos que o germe de curva complexa $(C, 0)$, definido por $C : z^2 = w^3$, é homeomorfo mas não é topologicamente equivalente à reta $(\mathbb{C}, 0)$.

A classificação proposta acima foi essencialmente analisada a partir dos anos 20 do século passado. Os matemáticos K. Brauner, K. Kähler, W. Burau, O. Zariski foram responsáveis pela solução desse problema. Um bom apanhado das técnicas e resultados obtidos a respeito desse tema pode ser encontrado em [8]. Uma solução completa para o problema de classificação proposto na Definição 3.0.10 é o seguinte

Teorema 3.0.11. *Dois germes de curvas complexas são topologicamente equivalentes se, e somente se, existe uma bijeção entre seus ramos que preserva seqüência de expoentes característicos e índices de interseção de pares de ramos.*

Aqui, propomo-nos analisar germes de curvas complexas sob o ponto de vista métrico. Sendo mais específicos, consideramos germes de curvas complexas módulo homeomorfismos bi-Lipschitz. A princípio, temos bem definidas duas métricas naturais sobre subconjuntos subanalíticos de espaços euclidianos. A saber, temos a métrica euclidiana induzida e a métrica geodésica que é intrínseca do subconjunto. Por analogia à Proposição 3.0.9, apresentamos a seguinte proposição para justificar a nossa decisão por estudar tais conjuntos como subespaços métricos de espaços euclidianos.

Proposição 3.0.12. *Para qualquer ramo de curva analítica complexa (C, x) em $\mathbb{C}^2$, munido da métrica geodésica intrínseca, existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (C, x) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.*

Em [3], classificamos completamente os germes de conjuntos semi-algébricos de dimensão real 1, equipados da métrica euclidiana induzida, módulo homeomorfismos bi-Lipschitz. Em [2], L. Birbrair classifica completamente os germes de conjuntos semi-algébricos de dimensão real 2, equipados da métrica geodésica intrínseca, módulo homeomorfismos bi-Lipschitz. L. Birbrair aponta para a dificuldade de se obter uma classificação dos mesmos germes acima quando vistos como subespaços euclidianos. Aqui, consideramos a métrica euclidiana induzida e, neste contexto, apresentaremos uma classificação completa dos germes de curvas (complexas) analíticas planas com singularidade isolada. De fato, provamos o seguinte

Teorema 3.0.13. *Sejam $(X, 0)$ e $(\tilde{X}, 0)$ germes de curvas analíticas complexas planas. Existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (X, 0) \rightarrow (\tilde{X}, 0)$ se, e somente se, existe uma bijeção entre os ramos desses germes que preserva seqüência de expoentes característicos e índices de interseção de pares de ramos.*

Vale observar que a classe de germes que consideramos aqui não é formada por germes normalmente mergulhados em $\mathbb{R}^4$ (cf [4]) e, portanto, a classificação que obtemos não vem como consequência dos resultados apresentados em [2].

Os resultados deste capítulo compõem o artigo [11] que foi submetido para publicação em novembro de 2001.

3.1 Arcos de Teste

Nesta seção, relembramos o conceito de semi-complexo de Hölder de germes de curvas reais, apresentamos o conceito de arcos de teste e demonstramos um lema de grande importância para este capítulo.

Dado um germe de subconjunto semi-analítico (X, x) , em $\mathbb{R}^p$, de dimensão real 1, equipado com a métrica euclidiana induzida, para cada par de semi-ramos X_i, X_j , de (X, x) , temos o seguinte número:

$$\text{sh}(X_i, X_j) = \text{ord}_r[\text{dist}(X_i \cap S_r(x), X_j \cap S_r(x))].$$

As idéias discutidas em [3] são de fundamental importância neste capítulo, pois estas esclarecem o comportamento métrico de germes de conjuntos semi-analíticos de dimensão real 1 e o conceito de arco de teste, o qual aparece de forma contundente aqui.

Definição 3.1.1. Um *arco de teste* é um germe de conjunto semi-analítico de dimensão real 1, munido da métrica induzida, com apenas um semi-ramo real.

Lema 3.1.2. *Sejam (Γ_1, x) e (Γ_2, x) arcos de teste e $F : (\Gamma_1 \cup \Gamma_2, x) \rightarrow \mathbb{R}^p$ um germe de aplicação subanalítica tal que sua restrição a cada arco de teste Γ_i é uma aplicação Lipschitz, $i = 1, 2$. Se*

$$|F(x_1(r)) - F(x_2(r))| \lesssim |x_1(r) - x_2(r)|,$$

em que $\{x_i(r)\} = S_r(x) \cap \Gamma_i$, então F é um germe de aplicação Lipschitz.

Prova. Admitamos todas as hipóteses do lema e suponhamos, por absurdo, que a sua conclusão seja falsa. Então, pelo Lema de Seleção da Curva, existem curvas analíticas $q_1, q_2; [0, \delta) \rightarrow \Gamma$ tais que $q_i(0) = 0$, $q_i(s) \in \Gamma_i$, $\forall s$, $i = 1, 2$ e

$$|F(q_1(r)) - F(q_2(r))| \gg |q_1(r) - q_2(r)|.$$

Podemos supor que $|q_1(s)| \geq |q_2(s)|$, $\forall s$, pois caso contrário, por analiticidade, teríamos uma contradição com uma das hipóteses do lema acima. Tomando uma reparametrização, caso seja necessário, podemos supor que $|q_1(s)|$ e $|q_2(s)|$ são séries de potências fracionárias e $|q_1(s)| \geq |q_2(s)| = s$, para cada s . Assim, usando as hipóteses do lema, temos

$$\begin{aligned} |q_1(s) - q_2(s)| &\ll |F(q_1(s)) - F(x_1(s))| + |F(x_1(s)) - F(q_2(s))| \\ &\lesssim |q_1(s) - x_1(s)| + |x_1(s) - q_2(s)| \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1.1, temos

$$|x_1(s) - q_2(s)| \lesssim |q_1(s) - q_2(s)|.$$

Portanto,

$$|q_1(s) - q_2(s)| \ll |q_1(s) - x_1(s)|.$$

E, pela desigualdade triangular, temos a seguinte contradição :

$$|q_1(s) - q_2(s)| \approx |q_1(s) - x_1(s)|$$

■

3.2 Caso irredutível

Seja $(C, 0)$ um germe de curva analiticamente irredutível em $\mathbb{C}^2$ (*Ramo*), a menos de uma mudança analítica de coordenadas, podemos supor que $(C, 0)$ tem uma parametrização do tipo abaixo:

$$\begin{cases} x = t^m \\ y = t^n + a_1 t^{n_1} + \dots, \end{cases}$$

em que m é a multiplicidade de $(C, 0)$, m não divide o inteiro n e $y(t) \in \mathbb{C}\{t\}$. A série de potências fracionárias $y(x^{\frac{1}{m}})$ é conhecida como *Parametrização de Newton-Puiseux* de $(C, 0)$ e todas as outras parametrizações de Newton-Puiseux de $(C, 0)$

são obtidas da parametrização acima via $x^{\frac{1}{m}} \mapsto wx^{\frac{1}{m}}$ em que w é raiz m -ésima da unidade.

Observação 3.2.1. Quando falarmos em aplicação bi-Lipschitz, salvo mencionado contrário, estaremos considerando os espaços métricos envolvidos na questão munidos da métrica euclidiana induzida.

Exemplo 3.2.2 (Fundamental). *Sejam $C : w^2 = z^3$ e $D : w^2 = z^5$. Então não existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (C, 0) \rightarrow (D, 0)$.*

Prova. Consideremos $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ os seguintes semi-ramos em D :

$$\Sigma_1 = \{(r, r^{\frac{5}{2}}) : r \geq 0\} \quad \Sigma_2 = \{(ri, r^{\frac{5}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}) : r \geq 0\}$$

e

$$\Sigma_3 = \{(r, -r^{\frac{5}{2}}) : r \geq 0\} \quad \Sigma_4 = \{(-ri, r^{\frac{5}{2}}e^{\frac{i3\pi}{4}}) : r \geq 0\}$$

Consideremos agora:

$$\Gamma_k(r) = (re^{i\gamma_k(r)}, r^{\frac{3}{2}}e^{i\frac{3\gamma_k(r)}{2}}) \in S_r(0) \cap F(\Sigma_k); \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Decorre do Teorema 2.1.3 que

$$\|\Gamma_1(r) - \Gamma_3(r)\| \approx r^{\frac{5}{2}}.$$

Daí, podemos escolher γ_1, γ_3 tais que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_3(r)) = 4k\pi; \quad k = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Suponhamos

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_3(r)) = 0.$$

Nesse caso, temos que ocorre uma das seguintes alternativas

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_2(r)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_4(r)) = 0.$$

Suponhamos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_2(r)) = 0.$$

Em particular,

$$\|\Gamma_1(r) - \Gamma_2(r)\| \ll r.$$

Denotemos $\delta_k(r) = F^{-1}(\Gamma_k(r))$; $k = 1, 2$. Então, temos

$$\delta_1(r) = (f(r), f(r)^{\frac{5}{2}}) \quad \text{e} \quad \delta_2(r) = (g(r)i, g(r)^{\frac{5}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}})$$

em que

$$|f(r)| \approx |g(r)| \approx r.$$

E, daí,

$$\|\delta_1(r) - \delta_2(r)\| \gtrsim |f(r) - ig(r)| \approx r.$$

Por outro lado, como F é bi-Lipschitz,

$$\|\delta_1(r) - \delta_2(r)\| \approx \|\Gamma_1(r) - \Gamma_2(r)\|,$$

o que é um absurdo.

Observo que os outros casos são analisados de forma completamente análoga. ■

Observação 3.2.3. A prova exibida acima pode ser adaptada, sem o menor esforço para mostrar que não existe homeomorfismo bi-Lipschitz subanalítico entre os seguintes germes de curvas complexas planas:

$$C : w^2 = z^{2k+1} \quad \text{e} \quad D : w^2 = z^{2l+1}$$

quando $k \neq l$.

Teorema 3.2.4. *Dados $(C, 0)$ e $(\tilde{C}, 0)$ dois germes de curvas analiticamente irreduzíveis em $\mathbb{C}^2$, temos que existe $F : (C, 0) \rightarrow (\tilde{C}, 0)$ germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz se, e somente se, $\beta(C) = \beta(\tilde{C})$.*

Apresentaremos uma demonstração do teorema acima, que tem seu cerne completamente explicitado no Exemplo 3.2.2, embora as idéias apresentadas lá não resolvam este problema de uma forma imediata.

A seguir, analisaremos o comportamento métrico de pares de arcos de teste em um ramo analítico.

Seja, $(C, 0)$ um ramo com multiplicidade n e pares característicos $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$. Sejam Γ_1, Γ_2 arcos de teste em $(C, 0)$ descritos por

$$\Gamma_j(r) = (re^{i\alpha_j(r)}, y(r^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\alpha_j(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Gamma_j, \quad j = 1, 2$$

em que $y(x^{\frac{1}{n}})$ é uma parametrização de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ e α_1, α_2 são funções ângulo tomando valores no intervalo $[0, 2n\pi]$. Sejam $g(r) = \|\Gamma_1(r) - \Gamma_2(r)\|$ e $h(r) = r\|e^{i\alpha_1(r)} - e^{i\alpha_2(r)}\|$. Então, vale o seguinte

Lema 3.2.5. *Se*

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\alpha_1(r) - \alpha_2(r)) = k \in \mathbb{Z},$$

então $\text{ord}_r(g) = \min\{\text{ord}_r(h), \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}\}$ em que $j = \min\{i : \frac{k}{n_1 \dots n_i} \notin \mathbb{Z}\}$.

Prova. É suficiente observarmos a equação (1.3). ■

Observação 3.2.6. É claro que, se

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\alpha_1(r) - \alpha_2(r)) \notin \mathbb{Z},$$

então $\text{ord}_r(g) = 1$.

Com essas observações, já podemos concluir que se dois ramos $(C, 0)$ e $(D, 0)$ possuem os mesmos expoentes característicos, então existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (C, 0) \rightarrow (D, 0)$. Com efeito, decorre imediatamente dos lemas 3.1.2 e 3.2.5 que

$$F(t^n, y(t)) = (t^n, z(t))$$

define um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz de $(C, 0)$ sobre $(D, 0)$, em que $y(x^{\frac{1}{n}})$ e $z(x^{\frac{1}{\tilde{n}}})$ são parametrizações de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ e $(D, 0)$ respectivamente.

Reciprocamente, suponhamos que $F : (C, 0) \rightarrow (D, 0)$ seja um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz e sejam $y(x^{\frac{1}{n}})$ e $z(x^{\frac{1}{\tilde{n}}})$ parametrizações de Newton-Puiseux de $(C, 0)$ e $(D, 0)$ respectivamente. Sejam $n = \text{multiplicidade}(C, 0)$ e $\tilde{n} = \text{multiplicidade}(D, 0)$.

Lema 3.2.7. *Sejam Σ_1, Σ_2 arcos de teste em $(C, 0)$ descritos por*

$$\Sigma_j(r) = (re^{i\sigma_j(r)}, y(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\sigma_j(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_j, \quad j = 1, 2.$$

E sejam $\Gamma_1 = F(\Sigma_1), \Gamma_2 = F(\Sigma_2)$ arcos de teste em $(D, 0)$ descritos por

$$\Gamma_j(r) = (re^{i\gamma_j(r)}, z(r^{\frac{1}{\tilde{n}}} e^{i\frac{\gamma_j(r)}{\tilde{n}}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_j, \quad j = 1, 2.$$

Então

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_2(r)) \in n\mathbb{Z}$$

se, e somente se,

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_2(r)) \in \tilde{n}\mathbb{Z}.$$

Prova. Suponhamos que

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_2(r)) = kn ; k \in \mathbb{Z}.$$

Nesse caso, Σ_1 e Σ_2 definem dois triângulos complementares na superfície subanalítica real $(C, 0)$ cujos bordos são coincidentes e iguais a $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, mais ainda, um desses triângulos somente admite arcos de teste tangentes aos arcos Σ_1 e Σ_2 . Por outro lado, se

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_1(r) - \gamma_2(r)) = \alpha \notin \tilde{n}\mathbb{Z},$$

também temos dois triângulos complementares na superfície subanalítica real $(D, 0)$ cujos bordos são $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mas, neste caso, os dois triângulos admitem arcos de teste não tangentes a Γ_1 e Γ_2 e, portanto, temos uma contradição ao fato de F ser subanalítica bi-Lipschitz. ■

Proposição 3.2.8. $n = \tilde{n}$.

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $n > \tilde{n}$ e consideremos $\alpha_j = 2j\pi$, com $j = 0, \dots, n-1$. Seja Σ_j o semi-ramo real em $(C, 0)$ descrito por

$$\Sigma_j(r) = (re^{i\alpha_j}, y(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha_j}{n}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_j, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Seja $\widetilde{\Sigma}_j = F(\Sigma_j)$ descrito por

$$\widetilde{\Sigma}_j(r) = (re^{i\sigma_j(r)}, y(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\sigma_j(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \widetilde{\Sigma}_j, \quad j = 0, \dots, n-1$$

com $\sigma_0(r) \leq \dots \leq \sigma_{n-1}(r) \leq \sigma_0(r) + 2\tilde{n}\pi$.

Observemos que, pelo Lema 3.2.7, não é possível termos

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{n-1}(r) - \sigma_0(r)) \in \tilde{n}\mathbb{Z}.$$

Então, pelo Princípio das Gavetas, temos que existe j tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{j+1}(r) - \sigma_j(r)) = 0.$$

E, novamente, utilizamos o Lema 3.2.7, para afirmar que isto é um absurdo. ■

Sejam $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ os pares característicos de $(C, 0)$ e $(p_{\tilde{g}}, q_{\tilde{g}})$ os pares característicos de $(D, 0)$. Vale observar que $n_1 \dots n_g = n = q_1 \dots q_{\tilde{g}}$ (vide lema acima).

Proposição 3.2.9. $m_g = p_{\tilde{g}}$

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $m_g > p_{\tilde{g}}$. Sejam Γ_0, Γ_1 os semi-ramos reais em $(C, 0)$ descritos por

$$\Gamma_0(r) = (r, y(r^{\frac{1}{n}})) \quad \Gamma_1(r) = (r, y(r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2n_1 \dots n_{g-1}\pi}{n}})).$$

Claramente, temos $\text{ord}_r \|\Gamma_0(r) - \Gamma_1(r)\| = \frac{m_g}{n}$. Consideremos $\Sigma_j = F(\Gamma_j)$; $j = 0, 1$, semi-ramos reais em $(D, 0)$ descritos por

$$\Sigma_j(r) = (re^{i\alpha_j(r)}, z(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\alpha_j(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_j, \quad j = 0, 1.$$

Como F é bi-Lipschitz, temos $\text{ord}_r \|\Sigma_0(r) - \Sigma_1(r)\| = \frac{m_g}{n}$. Assim, pelo Lema 3.2.5, temos que

$$\frac{1}{2n\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\alpha_0(r) - \alpha_1(r)) \in \mathbb{Z}.$$

Mas, isto contradiz o Lema 3.2.7. ■

Proposição 3.2.10. $n_g = q_{\bar{g}}$

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $n_g > q_{\bar{g}}$. Sejam $\gamma_j = 2jn_1 \dots n_{g-1}\pi$; $j = 1, \dots, n_g$ e Γ_j semi-ramo real em $(C, 0)$ descrito por

$$\Gamma_j(r) = (r, y(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2jn_1 \dots n_{g-1}\pi}{n}})), \quad j = 1, \dots, n_g.$$

Claramente, temos $\text{ord}_r \|\Gamma_j(r) - \Gamma_{j+1}(r)\| > 1$. Consideremos $\Sigma_j = F(\Gamma_j)$; $j = 1, \dots, n_g$, semi-ramos reais em $(D, 0)$ descritos por

$$\Sigma_j(r) = (re^{i\sigma_j(r)}, z(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\sigma_j(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_j, \quad j = 1, \dots, n_g$$

com $\sigma_0(r) \leq \dots \leq \sigma_{n-1}(r) \leq \sigma_0(r) + 2n\pi$.

Sendo $n_g > q_{\bar{g}}$ e $\text{ord}_r \|\Gamma_j(r) - \Gamma_{j+1}(r)\| > 1$, podemos garantir, a partir do Princípio das Gavetas, que existe j tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_j(r) - \sigma_{j+1}(r)) = 0.$$

Agora, observamos que a última equação contradiz o Lema 3.2.7. ■

Observemos que os argumentos usados para demonstrar a proposição acima, são suficientes para mostrarmos que $g = \bar{g}$ e $n_i = q_i$, $\forall i$. Com efeito, já provamos que valem as seguinte igualdades:

$$m(C) = n = m(D), \quad m_g = p_{\bar{g}} \quad \text{e} \quad n_g = q_{\bar{g}}.$$

Suponhamos, por absurdo, que $n_{g-1} > q_{\bar{g}-1}$. Agora, tomamos $n_{g-1}n_g$ pontos no intervalo $[2n_1 \dots n_{g-2}\pi, 2n\pi]$, a saber, $\gamma_j = 2jn_1 \dots n_{g-2}\pi$; $j = 1, \dots, n_{g-1} + n_g$ e arcos de teste em $(C, 0)$, digamos, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{n_{g-1}+n_g}$ descritos por:

$$\Gamma_j(r) = (r, y(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\gamma_j}{n}})) \in S_r(0) \cap \Gamma_j; \quad j = 1, \dots, n_{g-1}n_g.$$

Seja $\Sigma_j = F(\Gamma_j)$, arco de teste em $(D, 0)$ descrito por

$$\Sigma_j(r) = (re^{i\sigma_j(r)}, z(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\sigma_j(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_j; \quad j = 1, \dots, n_{g-1}n_g.$$

Fazendo uso dos seguintes fatos: Lema 3.2.5, $\text{ord}_r \|\Gamma_j(r) - \Gamma_{j+1}(r)\| > 1$ e Princípio das Gavetas, temos que existe um j tal que

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_{j+1}(r) - \sigma_j(r)) = 0.$$

E, finalmente, o argumento que usamos para concluir que isso gera uma contradição é o Lema 3.2.7. Então, fica claro que com um processo de indução provamos que $g = \tilde{g}$ e $n_i = q_i$, $\forall i$.

Agora, para concluir que $\beta(C) = \beta(\tilde{C})$ é suficiente mostrar que $m_i = p_i$, $\forall i$. Para isso, tomemos j como o menor índice tal que $m_j \neq p_j$. Mostremos primeiro que $j > 1$. Por absurdo, suponhamos que $m_1 > p_1$. Sejam Γ_0, Γ_1 os semi-ramos reais de $(C, 0)$ descritos por:

$$\Gamma_0(r) = (r, y(r^{\frac{1}{n}})) \quad \text{e} \quad \Gamma_1(r) = (r, y(r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2i\pi}{n}})).$$

Como $\text{ord}_r \|\Gamma_0(r) - \Gamma_1(r)\| = \frac{m_1}{n_1}$, podemos lançar mão do Lema 3.2.5 para garantir que n_1 divide o inteiro

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_0(r))$$

em que $\sigma_j(r)$ descreve o semi-ramo $\Sigma_j = F(\Gamma_j)$, isto é,

$$\Sigma_j(r) = (re^{i\sigma_j(r)}, z(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\sigma_j(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_j, \quad j = 0, 1.$$

Sabemos que não é possível que o limite acima seja um inteiro múltiplo de n . Então, para $r > 0$ suficientemente pequeno, vale

$$\sigma_0(r) \leq \sigma_2(r) \leq \sigma_1(r) \quad \text{em que} \quad \sigma_2(r) = \sigma_0(r) + 2\pi.$$

Claramente, se definimos Σ_2 como sendo o semi-ramo real de $(D, 0)$ descrito por -

$$\Sigma_2(r) = (re^{i\sigma_2(r)}, z(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\sigma_2(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_2,$$

então $sh(\Sigma_0 \cup \Sigma_2, 0) > 1$. Daí, pelo Teorema 2.1.3, temos $sh(\Gamma_0 \cup \Gamma_2, 0) > 1$, em que Γ_2 é o semi-ramo real $\Gamma_2 = F^{-1}(\Sigma_2)$, em $(C, 0)$, descrito por

$$\Gamma_2(r) = (re^{i\gamma_2(r)}, y(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\gamma_2(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Gamma_2;$$

$0 \leq \gamma_2(r) \leq 2\pi$. Como $sh(\Gamma_0 \cup \Gamma_2, 0) > 1$ e $0 \leq \gamma_2(r) \leq 2\pi$, devemos ter

$$\lim_{r \rightarrow 0} \gamma_2(r) = 0 \quad \text{ou} \quad 2\pi.$$

Mas, isto contradiz o fato dos seguintes inteiros

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\alpha_2(0) - \alpha_0(r)) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\alpha_1(0) - \alpha_2(r))$$

não serem múltiplos de n .

Então, finalmente, podemos afirmar que $j > 1$. Observo que já sabemos que vale a desigualdade $j < g$. Suponhamos por absurdo que $m_j > p_j$. Consideremos $\gamma_0 = 2n_1 \dots n_{j-1}\pi$, $\gamma_1 = 2\gamma_0$ e Γ_i semi-ramo real de $(C, 0)$ descrito por

$$\Gamma_i(r) = (r, y(r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\gamma_i}{n}})) \in S_r(0) \cap \Gamma_i; \quad i = 0, 1.$$

Seja $\Sigma_i = F(\Gamma_i)$ semi-ramo real em $(D, 0)$ descrito por

$$\Sigma_i(r) = (re^{i\sigma_i(r)}, z(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\sigma_i(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Sigma_i, \quad i = 0, 1.$$

Como $\|\Gamma_1(r) - \Gamma_0(r)\| = \frac{m_j}{n_1 \dots n_j}$, podemos, a partir do Lema 3.2.5, garantir que $n_1 \dots n_j$ divide o inteiro

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\sigma_1(r) - \sigma_0(r))$$

e, já sabemos que o inteiro acima não pode ser múltiplo de n . Portanto, para $r > 0$ suficientemente pequeno, valem as seguintes desigualdades:

$$\sigma_0(r) \leq \sigma_2(r) \leq \sigma_1(r) \quad \text{em que} \quad \sigma_2(r) = \sigma_0(r) + 2n_1 \dots n_{j-1}\pi.$$

Temos, claramente,

$$sh(\Sigma_0, \Sigma_2) = \frac{p_j}{n_1 \dots n_j} = sh(\Sigma_1, \Sigma_2)$$

e, portanto,

$$sh(\Gamma_0, \Gamma_2) = \frac{p_j}{n_1 \dots n_j} = sh(\Gamma_1, \Gamma_2),$$

em que $\Gamma_2 = F^{-1}(\Sigma_2)$. Donde, se

$$\Gamma_2(r) = (re^{i\gamma_2(r)}, y(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\gamma_2(r)}{n}})) \in S_r(0) \cap \Gamma_2$$

descreve Γ_2 , então

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_i(r) - \gamma_2(r)) \in \mathbb{Z}$$

e $n_1 \dots n_{j-1}$ divide o inteiro acima. Com efeito, caso não ocorresse a divisão afirmada, teríamos pelo Lema 3.2.5

$$\begin{aligned} \frac{p_j}{n_1 \dots n_j} &= \text{sh}(\Gamma_i, \Gamma_2) \\ &= \min\{\text{ord}_r r | e^{i\gamma_i(r)} - e^{i\gamma_2(r)}|, \frac{m_{j-1}}{n_1 \dots n_{j-1}}\} \\ &= \frac{p_{j-1}}{n_1 \dots n_{j-1}}, \quad i = 0, 1, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Como, $\gamma_0(r) \leq \gamma_2(r) \leq \gamma_1(r)$ e $|\gamma_0(r) - \gamma_1(r)| = 2n_1 \dots n_{j-1}\pi$, devemos ter

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_2(r) - \gamma_1(r)) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{r \rightarrow 0} (\gamma_2(r) - \gamma_0(r)) = 0.$$

De qualquer forma, temos uma contradição .

■

3.3 Caso redutível

Seja $(C, 0)$ um germe de curva analítica complexa em $\mathbb{C}^2$, com ramos $C = \cup_{i \in I} C_i$. Seja m_i a multiplicidade de $(C_i, 0)$; $i \in I$. Para cada par $i \neq j \in I$, por analogia com o caso de curvas reais, consideremos o seguinte número:

$$\text{sh}(C_i, C_j) = \text{ord}_r(\text{dist}(C_i \cap S_r(0), C_j \cap S_r(0))).$$

E, consideremos também,

$$\text{coinc.}(C_i, C_j) = \max\{\text{ord}_x[y_k(x^{\frac{1}{m_i}}) - z_l(x^{\frac{1}{m_j}})] \mid 1 \leq k \leq m_i, 1 \leq l \leq m_j\}$$

em que $\{y_k(x^{\frac{1}{m_i}})\}_{k=1}^{m_i}$ é o conjunto das parametrizações de Newton-Puiseux de C_i e $\{z_l(x^{\frac{1}{m_j}})\}_{l=1}^{m_j}$ é o conjunto das parametrizações de Newton-Puiseux de C_j . O número $\text{coinc.}(C_i, C_j)$ é conhecido como *coincidência* entre C_i e C_j (cf.[21]).

Lema 3.3.1.

$$\text{sh}(C_i, C_j) = \text{coinc.}(C_i, C_j), \quad \forall \quad i \neq j \quad \text{em} \quad I.$$

Prova. Sejam Γ_i, Γ_j arcos de teste em C_i e C_j , respectivamente, descritos por

$$\Gamma_k(r) = (r, \tilde{y}_k(r^{\frac{1}{m_k}})) \in \Gamma_k \cap S_r(0); \quad k = i, j,$$

em que $\tilde{y}_i(x^{\frac{1}{m_i}})$ e $\tilde{y}_j(x^{\frac{1}{m_j}})$ são parametrizações de Newton-Puiseux de C_i e C_j tais que

$$\text{coinc.}(C_i, C_j) = \text{ord}_x[\tilde{y}_i(x^{\frac{1}{m_i}}) - \tilde{y}_j(x^{\frac{1}{m_j}})].$$

Então,

$$\text{dist}(C_i \cap S_r(0), C_j \cap S_r(0)) \leq \|\Gamma_i(r) - \Gamma_j(r)\| = |\tilde{y}_i(r^{\frac{1}{m_i}}) - \tilde{y}_j(r^{\frac{1}{m_j}})|.$$

Portanto, $\text{sh}(C_i, C_j) \geq \text{coinc.}(C_i, C_j)$.

Por outro lado, temos

$$\tilde{y}_k(x^{\frac{1}{m_k}}) = h(x^{\frac{1}{m_k}}) + g_k(x^{\frac{1}{m_k}}), \quad k = i, j$$

com $\text{ord}_x[g_i(x^{\frac{1}{m_i}}) - g_j(x^{\frac{1}{m_j}})] = \min\{\text{ord}_x g_i(x^{\frac{1}{m_i}}), \text{ord}_x g_j(x^{\frac{1}{m_j}})\}$.

Sejam $\Gamma_i \subset C_i, \Gamma_j \subset C_j$ arcos de teste tais que

$$\text{dist}(C_i \cap S_r(0), C_j \cap S_r(0)) = \text{dist}(\Gamma_i \cap S_r(0), \Gamma_j \cap S_r(0)).$$

Seja

$$\Gamma_k(r) = (r e^{i\gamma_k(r)}, \tilde{y}_k(r^{\frac{1}{m_k}} e^{i\frac{\gamma_k(r)}{m_k}})) \in S_r(0) \cap \Gamma_k, \quad k = i, j.$$

$\therefore$

$$\text{ord}_r \|\Gamma_i(r) - \Gamma_j(r)\| = \min\{1 + \text{ord}_r |e^{i\gamma_i(r)} - e^{i\gamma_j(r)}|, \text{ord}_r |\tilde{y}_i(r^{\frac{1}{m_i}} e^{i\frac{\gamma_i(r)}{m_i}}) - \tilde{y}_j(r^{\frac{1}{m_j}} e^{i\frac{\gamma_j(r)}{m_j}})|\}.$$

Mas, como

$$1 + \text{ord}_r |e^{i\gamma_i(r)} - e^{i\gamma_j(r)}| \leq \text{ord}_r |h(r^{\frac{1}{m_i}} e^{i\frac{\gamma_i(r)}{m_i}}) - h(r^{\frac{1}{m_j}} e^{i\frac{\gamma_j(r)}{m_j}})|,$$

temos

$$\text{ord}_r \|\Gamma_i(r) - \Gamma_j(r)\| \leq \min\{\text{ord}_r g_i(r^{\frac{1}{m_i}} e^{i\frac{\gamma_i(r)}{m_i}}), \text{ord}_r g_j(r^{\frac{1}{m_j}} e^{i\frac{\gamma_j(r)}{m_j}})\} = \text{coinc.}(C_i, C_j).$$

Isto é, $\text{sh}(C_i, C_j) \leq \text{coinc.}(C_i, C_j)$.

Portanto, segue-se o resultado. ■

O teorema seguinte e o Corolário 3.4.4 são, para a classificação bi-Lipschitz, os análogos ao teorema apresentado em [27] p. 888 para a classificação topológica.

Teorema 3.3.2. *Dadas $(X, 0)$ e $(\tilde{X}, 0)$ curvas analíticas complexas em $\mathbb{C}^2$ com ramos $X = \cup_{i \in I} X_i$ e $\tilde{X} = \cup_{j \in J} \tilde{X}_j$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (X, 0) \rightarrow (\tilde{X}, 0)$;*
- (ii) *Existe uma bijeção $\phi : I \rightarrow J$ tal que $\beta(X_i) = \beta(\tilde{X}_{\phi(i)})$ e $\text{sh}(X_i, X_j) = \text{sh}(\tilde{X}_{\phi(i)}, \tilde{X}_{\phi(j)})$;*
- (iii) *Existe uma bijeção $\phi : I \rightarrow J$ tal que $\beta(X_i) = \beta(\tilde{X}_{\phi(i)})$ e $(X_i, X_j)_0 = (\tilde{X}_{\phi(i)}, \tilde{X}_{\phi(j)})_0$;*
- (iv) *$(X, 0)$ é topologicamente equivalente a $(\tilde{X}, 0)$;*
- (v) *existem um inteiro d , um germe de curva $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^d, 0)$ e projeções lineares $p, \tilde{p} : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^2$, ambas gerais para C em 0, tais que $p(C) = X$ e $\tilde{p}(C) = \tilde{X}$.*

Prova. (i) $\Rightarrow$ (ii) Seja $F : (X, 0) \rightarrow (\tilde{X}, 0)$ um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz. Por argumentos topológicos, podemos supor que $I = J$ e $F(X_i) = \tilde{X}_i$, $\forall i \in I$. Segue do Teorema 3.2.4 que $\beta(X_i) = \beta(\tilde{X}_i)$, $\forall i \in I$. Agora, consideremos $i \neq j \in I$ e mostremos que $\text{sh}(X_i, X_j) = \text{sh}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$. Para isso, tomemos Γ_1, Γ_2 arcos de teste em X tais que $\Gamma_i \subset X_i$, $i = 1, 2$ e

$$\text{dist}(X_i \cap S_r(0), X_j \cap S_r(0)) = \text{dist}(\Gamma_i \cap S_r(0), \Gamma_j \cap S_r(0)).$$

Observemos que $F(\Gamma_1), F(\Gamma_2)$ são arcos de teste em $\tilde{X}$ tais que $F(\Gamma_i) \subset \tilde{X}_i$, $i = 1, 2$. Daí, temos que

$$\text{dist}(\tilde{X}_i \cap S_r(0), \tilde{X}_j \cap S_r(0)) \leq \text{dist}(F(\Gamma_i) \cap S_r(0), F(\Gamma_j) \cap S_r(0)).$$

Agora, como F é bi-Lipschitz, podemos lançar mão do Teorema 2.1.3 para obter a relação

$$\text{dist}(\Gamma_i \cap S_r(0), \Gamma_j \cap S_r(0)) \approx \text{dist}(F(\Gamma_i) \cap S_r(0), F(\Gamma_j) \cap S_r(0)).$$

E, portanto, $\text{sh}(X_i, X_j) \geq \text{sh}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$.

Com um argumento completamente simétrico ao usado acima, provamos que $\text{sh}(X_i, X_j) \leq \text{sh}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$. E, assim, concluímos a igualdade desses contatos.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Suponhamos que $I = J$, $\beta(X_i) = \beta(\tilde{X}_i)$, $\forall i \in I$ e $\text{sh}(X_i, X_j) = \text{sh}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$, $\forall i \neq j \in I$. Assim, pelo Lema 3.3.1, temos que $\text{coinc.}(X_i, X_j) = \text{coinc.}(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)$, $\forall i \neq j \in I$. Em [21], M. Merle obtém uma releitura do índice de interseção dos ramos de uma curva a partir da coincidência desses ramos. Fazendo uso dessa relação, temos $(X_i, X_j)_0 = (\tilde{X}_i, \tilde{X}_j)_0$, $\forall i \neq j \in I$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Veja Teorema 3.0.11. (iv) $\Rightarrow$ (v) Veja [27] p. 888.

(v) $\Rightarrow$ (i) Sejam d , um inteiro, $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^d, 0)$ um germe de curva e $p, \tilde{p} : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^2$ projeções lineares, ambas gerais para C em 0, tais que $p(C) = X$ e $\tilde{p}(C) = \tilde{X}$. Então, $\tilde{p} \circ p^{-1} : (X, 0) \rightarrow (\tilde{X}, 0)$ é o germe de uma aplicação subanalítica bi-Lipschitz.

■

3.4 Tipo bi-Lipschitz de curvas complexas

Os resultados obtidos na seção anterior sugerem, naturalmente, as seguintes perguntas:

- (i) Dados dois germes de curvas complexas espaciais, eles são topologicamente equivalentes se, e somente se, existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz entre eles ?
- (ii) O semigrupo de uma curva espacial irredutível é um invariante métrico?

Com o objetivo de responder às perguntas acima, consideremos os seguintes germes de curvas analíticas complexas espaciais pela origem de $\mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned} X_1 & : x = t^6, \quad y = t^{14}, \quad z = t^{17} \\ X_2 & : x = t^6, \quad y = t^{14}, \quad z = t^{39} \\ X_3 & : x = t^6, \quad y = t^{14} + t^{17}, \quad z = t^{39}. \end{aligned}$$

Denotemos por $\Gamma(X_i)$ o semigrupo da curva $(X_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$. Uma projeção genérica de $(X_1, 0)$ no plano tem $(6, 14, 17)$ como seqüência de expoentes característicos e uma projeção genérica de $(X_3, 0)$ no plano tem $(6, 14, 17)$ como seqüência de expoentes característicos. Pelo Teorema 3.3.2, existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (X_1, 0) \rightarrow (X_3, 0)$, enquanto $\Gamma(X_1) = \langle 6, 14, 17 \rangle \neq \langle 6, 14, 39 \rangle = \Gamma(X_3)$. Quanto a X_2 , temos que uma projeção genérica de $(X_2, 0)$ no plano tem $(6, 14, 39)$ como seqüência de expoentes característicos, logo não existe germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (X_2, 0) \rightarrow (X_3, 0)$, por outro lado, $\Gamma(X_2) = \langle 6, 14, 39 \rangle = \Gamma(X_3)$. Estes exemplos respondem negativamente à Pergunta (ii). De fato, vimos que o semigrupo de uma curva analítica complexa espacial não tem qualquer influência no seu comportamento métrico. Quanto à Pergunta (i), vimos que a equivalência topológica de dois germes de curvas complexas espaciais não acarreta na existência de um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz entre eles, pois $(X_2, 0)$ é topologicamente equivalente a $(X_3, 0)$ (cf. Teorema 2.1 [14]). Ainda a respeito da Pergunta (i), podemos afirmar o seguinte: *a existência de um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz entre dois germes de curvas espaciais implica na equivalência topológica desses germes* (ver Corolário 3.4.2).

Lema 3.4.1. *Sejam $(X, 0)$ um germe de curva analítica complexa em $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, e $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^2$ uma projeção linear geral para X em 0 . Consideremos uma decomposição $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}$ e coordenadas (x, y) tais que $p(x, y) = x$. Então, existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\Phi(X) = p(X) \times \{0\}$. Em particular, $(X, 0)$ é topologicamente equivalente a $(p(X) \times \{0\}, 0)$ como germes de curvas em $\mathbb{C}^n$.*

Prova. Claramente, é suficiente provarmos para o caso $n = 3$. Como p é geral para X em 0 , X é o gráfico de uma função subanalítica Lipschitz $f : p(X) \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Pelo Teorema de Kirszbraun, seja $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ uma extensão subanalítica Lipschitz de f . Então, $\Phi : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ definida por $\Phi(x, y) = (x, y - F(x))$ é um germe de homeomorfismo subanalítico bi-Lipschitz tal que $\Phi(X) = p(X) \times \{0\}$. ■

Corolário 3.4.2. *Sejam $(X, 0)$ e $(Y, 0)$ germes de curvas analíticas complexas em $\mathbb{C}^n$. Se existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$, então $(X, 0)$ é topologicamente equivalente a $(Y, 0)$ em $\mathbb{C}^n$.*

Observação 3.4.3. De fato, provaremos que vale um resultado bem mais forte do que o Corolário 3.4.2. A saber, provaremos que se existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (X, 0) \rightarrow (Y, 0)$, então existe um germe de aplicação bi-Lipschitz $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $\Phi(X) = Y$.

A construção seguinte tem como objetivo demonstrar o que afirmamos na observação acima. Por analogia ao raciocínio empregado no capítulo sobre curvas reais para resolver o problema de classificação do tipo bi-Lipschitz, consideramos primeiro o caso plano, isto é, $n = 2$.

Sejam $(X, 0)$ e $(\tilde{X}, 0)$ germes de curvas analíticas complexas em $\mathbb{C}^2$. Sejam d , um inteiro, $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^d, 0)$ um germe de curva e $p, \tilde{p} : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^2$ projeções lineares, ambas gerais para C em 0, tais que $p(C) = X$ e $\tilde{p}(C) = \tilde{X}$. Como o conjunto das projeções gerais para C em 0, é um aberto de Zariski no espaço das projeções lineares $\mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^2$, temos um caminho p_t nesse espaço formado por projeções lineares gerais para C em 0 satisfazendo $p_0 = p$ e $p_1 = \tilde{p}$. Seja $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \times I : x \in X_t = p_t(C)\}$. Temos $\phi_t := p_t \circ p^{-1} : X, 0 \rightarrow X_t, 0$ bi-Lipschitz para cada $t \in I = [0, 1]$. Como I é compacto, podemos escolher constantes de Lipschitz para ϕ_t independentes de t . Então,

$$V(x, t) := \left(\frac{\partial \phi_t}{\partial t}(x, t), t \right)$$

define um campo de vetores Lipschitz sobre Ω . Pelo Teorema de Kirszbraun, V se estende a um campo Lipschitz sobre $\mathbb{C}^2 \times I$ o qual é tangente a Ω . Portanto, tomando o fluxo de V , dado pela condição $(x, t, 0) \mapsto (x, t)$, no tempo $t = 1$ obtemos um germe de aplicação bi-Lipschitz $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $F(X) = \tilde{X}$.

Corolário 3.4.4. *Dadas $(X, 0)$ e $(\tilde{X}, 0)$ curvas analíticas complexas em $\mathbb{C}^2$ com ramos $X = \cup_{i \in I} X_i$ e $\tilde{X} = \cup_{j \in J} \tilde{X}_j$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Existe um germe de aplicação bi-Lipschitz $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ tal que $F(X) = \tilde{X}$;*

- (ii) Existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (X, 0) \rightarrow (\tilde{X}, 0)$;
- (iii) Existe uma bijeção $\phi : I \rightarrow J$ tal que $\beta(X_i) = \beta(\tilde{X}_{\phi(i)})$ e $\text{sh}(X_i, X_j) = \text{sh}(\tilde{X}_{\phi(i)}, \tilde{X}_{\phi(j)})$;
- (iv) Existe uma bijeção $\phi : I \rightarrow J$ tal que $\beta(X_i) = \beta(\tilde{X}_{\phi(i)})$ e $(X_i, X_j)_0 = (\tilde{X}_{\phi(i)}, \tilde{X}_{\phi(j)})_0$;
- (v) $(X, 0)$ é topologicamente equivalente a $(\tilde{X}, 0)$;
- (vi) existem um inteiro d , um germe de curva $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^d, 0)$ e projeções lineares $p, \tilde{p} : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^2$, ambas gerais para C em 0 , tais que $p(C) = X$ e $\tilde{p}(C) = \tilde{X}$.

Corolário 3.4.5. *Sejam $(X, 0)$ e $(\tilde{X}, 0)$ germes de curvas analíticas complexas em $\mathbb{C}^n$. Se existe um germe de aplicação subanalítica bi-Lipschitz $F : (X, 0) \rightarrow (\tilde{X}, 0)$, então existe um germe de aplicação bi-Lipschitz $F : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ tal que $F(X) = \tilde{X}$.*

Prova. Idêntica à prova dada para o Corolário 3.4.2. ■

O seguinte corolário, segue imediatamente do resultado, devido a Lê-Ramanujam, o qual estabelece que o número de Milnor é um invariante completo para garantir a trivialidade topológica de famílias de hipersuperfícies complexas em $\mathbb{C}^n$; $n \neq 3$.

Corolário 3.4.6. *Seja X_t uma família de germes de curvas complexas planas ao longo de um intervalo compacto I , com equação dada por $f_t(x, y) = 0$. Se o número de Milnor $\mu(f_t)$ independe de t , então a família $\{(X_t, 0)\}$ é bi-Lipschitz trivial ao longo de I .*

Capítulo 4

bi-Lipschitz trivialidade de funções

Nos capítulos anteriores, tratamos do problema de classificação de conjuntos singulares. Uma outra questão, seria o problema de classificação de aplicações. Para o problema de classificação topológica, o seguinte resultado devido a H.C. King [17], mostra que as duas questões acima não estão distantes uma da outra.

Dizemos que uma família de germes de aplicações $f_z : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ $z \in \mathbb{R}^p$ não possui *fusão de pontos críticos* se existe um aberto U de $\mathbb{R}^n$ contendo a origem tal que, para cada z , $f_z : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma singularidade isolada na origem.

Teorema 4.0.7. *Seja $f_z : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ $z \in \mathbb{R}^p$ uma família de germes "sem fusão de pontos críticos" e suponha que exista uma família de germes de homeomorfismos g_z tais que $g_z(f_z^{-1}(0)) = f_0^{-1}(0)$. Então, existe uma família de germes de homeomorfismos $h_z : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ $z \in \mathbb{R}^p$ e uma vizinhança V de 0 em $\mathbb{R}^p$ tais que $f_z \circ h_z = f_0$, $\forall z \in V$.*

A classificação bi-analítica dos germes de aplicações analíticas, como já vimos em outra ocasião, com seguinte exemplo de H. Whitney é um projeto difícil.

$$W(x, y, t) = xy(x - y)(x - ty) \quad t > 1 \quad (4.1)$$

Relembro que o exemplo acima motiva vários autores a considerar relações de equivalência, nesse caso sobre todos os germes de aplicações analíticas, as quais são mais fortes do que homeomorfismos topológicos e mais fracas do que homeomorfismos

bi-analíticos. Em [19], por exemplo, T-C. Kuo introduz o conceito de trivialização analítica modificada (MAT) a qual induz uma relação de equivalência no conjunto de todos os germes de funções analíticas reais satisfazendo a propriedade de ser mais forte do que topológica e mais fraca do que bi-analítica. Ainda em [19], T-C. Kuo mostra o seguinte

Teorema 4.0.8. *Seja $F(x, t) = H_k(x, t) + H_{k+1}(x, t) + \dots$; $H_k(x, t) \neq 0$, em que $H_i(x, t)$ é uma forma homogênea de grau i em x . Se $H_k(x, t)$ não é degenerada em x , para $t \in I$, então $F(x, t)$ admite uma MAT ao longo do intervalo I .*

Aqui, exploramos o seguinte conceito métrico:

seja $F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \{0\} \times \mathbb{R}) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ uma família de germes de aplicações pela origem de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que F admite uma bi-Lipschitz (ou $\mathcal{R}$ -bi-Lipschitz) trivialização ao longo de um intervalo I se existem $t_0 \in I$ e um germe de homeomorfismo bi-Lipschitz $\phi : (\mathbb{R}^n \times I, \{0\} \times I) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times I, \{0\} \times I)$ preservando níveis tal que $F(\phi(x, t)) = F(x, t_0)$.

Abaixo, apresentamos um exemplo bem didático que deixa clara a diferença entre a trivialização bi-Lipschitz da família dos zeros de uma família de aplicações e a trivialização bi-Lipschitz dessa família de aplicações.

Exemplo 4.0.9. *Seja $f_t : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_t(x) = x^3 + tx$ com $t \in I = [0, 1]$. Claramente, f_t não é bi-Lipschitz trivial ao longo de I . Por outro lado, $f_t^{-1}(0) = 0$ para cada $t \in I$.*

O exemplo acima mostra que não é possível obtermos um resultado do "tipo King" para a categoria bi-Lipschitz.

Exemplo 4.0.10. (J. Briançon, J.P. Speder [7]) *Seja $f_t : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ a família definida por $f_t(x, y, z) = z^5 + xy^7 + x^{15} + ty^6z$. Em [13] os autores provam que f_t admite uma trivialização analítica modificada ao longo de qualquer intervalo que não contenha $t_0 = -15^{\frac{1}{7}}(\frac{7}{2})^{\frac{4}{3}}\frac{1}{3}$. Por outro lado, é bem conhecido que f_t não satisfaz as condições de regularidade de Whitney, portanto, não admite uma trivialização bi-Lipschitz, obtida por integração de um campo de vetores Lipschitz, ao longo de*

qualquer intervalo contendo $t = 0$. Este fato é suficiente para garantirmos que o seguinte teorema não decorre do teorema acima de T-C. Kuo.

Teorema 4.0.11. *Seja $F(x, t) = H_k(x, t) + H_{k+1}(x, t) + \dots$; $H_k(x, t) \neq 0$, em que $H_i(x, t)$ é uma forma homogênea de grau i em x . Se $H_k(x, t)$ não é degenerada em x , para $t \in I$, então $F(x, t)$ admite uma bi-Lipschitz trivialização ao longo do intervalo I .*

Nesta seção, apresentamos resultados sobre a bi-Lipschitz determinação de germes de polinômios quase-homogêneos e obtemos o teorema acima como caso particular desses resultados. As idéias que utilizamos nesta seção estão completamente contidas no artigo [25], donde podemos afirmar que os resultados seguintes vêm como exercícios diante de [25]. Contudo, optei por tê-los enunciados em minha tese, pois considero a teoria da $\mathcal{R}$ -equivalência bi-Lipschitz carente de referências.

4.1 Um resultado do tipo Kuo

Seja $C(n, p)$ o espaço de germes de aplicações suaves $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p$. Dada $f \in C(n, p)$ denotemos por $I_{\mathcal{R}}f$ o ideal de $C_n := C(n, 1)$ gerado pelos $p \times p$ menores da matriz jacobiana de f e seja $N_{\mathcal{R}}f(x) = \sum_j M_j^2$, em que os M_j são os geradores de $I_{\mathcal{R}}f$. Dizemos que $N_{\mathcal{R}}f(x)$ satisfaz uma *condição de Lojasiewicz* se existem constantes $c > 0$ e $\alpha > 0$ tais que $N_{\mathcal{R}}f(x) \geq c\|x\|^\alpha$.

Definição 4.1.1. Dada $(r_1, \dots, r_n)$ uma n -upla de inteiros positivos, para qualquer monômio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, definimos $\text{fil}(x^\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$.

Definimos uma filtração no anel C_n via a função definida por $\text{fil}(f) = \min\{\text{fil}(x^\alpha) : (\frac{\partial f}{\partial x^\alpha})(0) \neq 0\}$, para qualquer germe f em C_n . Esta definição pode ser estendida para C_{n+r} o anel de famílias a r -parâmetros de germes de funções de n -variáveis, definindo $\text{fil}(x^\alpha t^\beta) = \text{fil}(x^\alpha)$.

Para qualquer germe de aplicação $f = (f_1, \dots, f_p) \in C(n, p)$, definimos $\text{fil}(f) = (d_1, \dots, d_p)$, em que $d_i = \text{fil}(f_i)$, para cada $i = 1, \dots, p$. E denotamos, $\min \text{fil}(f) = \min\{d_1, \dots, d_p\}$.

Fixemos $(r_1, \dots, r_n; 2k)$. Definimos a função controle padrão $\rho(x)$ por $\rho(x) = x^{2\alpha_1} + \dots + x^{2\alpha_n}$, em que os α_i são escolhidos de sorte que a função ρ seja quase-homogênea de tipo $(r_1, \dots, r_n; 2k)$.

Relembramos que associada aos pesos $(r_1, \dots, r_n)$ temos a seguinte ação sobre $\mathbb{R}^n$:

$$\lambda \cdot p = (\lambda^{r_1} p_1, \dots, \lambda^{r_n} p_n).$$

Lema 4.1.2. *Sejam $h(x)$ um polinômio quase-homogêneo de tipo $(r_1, \dots, r_n; 2k)$, com $r_1 \leq \dots \leq r_n$, ρ a função controle padrão de mesmo tipo que h e $h_t(x)$ uma família de germes de funções tal que*

$$\text{fil}(h_t) \geq 2k + r_n, \quad t \in [0, 1].$$

Então, a função $\frac{h_t(x)}{\rho(x)}$ é Lipschitz.

Prova. Sem perda de generalidade, podemos supor $h_t(x)$ quase-homogênea de tipo $(r_1, \dots, r_n; d)$ com $d \geq 2k + r_n$. Consideremos $G_t(x, y) = |\rho(y)h_t(x) - \rho(x)h_t(y)|$, $m_t(x, y) = \|x - y\|\rho(x)\rho(y)$ e $M = \{(x, y, t) : G_t(x, y) = 1\}$. Como M é fechado, o número $c = \inf\{m_t(x, y) : (x, y, t) \in M\}$ é positivo. Agora, sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, suficientemente próximos da origem, tais que $x \neq 0$, $y \neq 0$ e $x \neq y$. Seja $\lambda > 0$ tal que $G_t(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = 1$, isto é,

$$G_t(x, y) = \frac{1}{\lambda^{2k+d}} \quad (4.2)$$

Por outro lado, usamos que $\lambda > 1$ e obtemos:

$$\begin{aligned} m_t(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) &= \lambda^{4k} \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y\| \rho(x) \rho(y) \\ &\leq \lambda^{4k+r_n} \|x - y\| \rho(x) \rho(y) \\ &= \lambda^{4k+r_n} m_t(x, y) \end{aligned}$$

$\therefore$

$$m_t(x, y) \geq \frac{1}{\lambda^{4k+r_n}} c. \quad (4.3)$$

Agora, como $\lambda > 1$ e $d \geq 2k + r_n$, segue de (4.2) e (4.3) que $m_t(x, y) \geq cG_t(x, y)$, ou seja,

$$\left\| \frac{h_t(x)}{\rho(x)} - \frac{h_t(y)}{\rho(y)} \right\| \leq c^{-1} \|x - y\|.$$

■

Como consequência do lema acima temos a seguinte

Proposição 4.1.3. *Seja $f_t(x) = f(x) + t\Theta(x, t)$, $t \in [0, 1]$, uma deformação de um germe de função polinomial quase-homogênea f de tipo $(r_1, \dots, r_n; d)$, com $r_1 \leq \dots \leq r_n$ e satisfazendo uma condição de Lojasiewicz $N_{\mathcal{R}}f_t(x) \geq \|x\|^\alpha$, para constantes c e α . Se $\text{fil}(\Theta) \geq d + r_n - r_1$, então f_t admite uma bi-Lipschitz trivialização ao longo de $I = [0, 1]$.*

Prova. Observamos que para cada i existe um s_i tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é quase-homogêneo de tipo $(r_1, \dots, r_n; s_i)$.

Seja $N_{\mathcal{R}}^*f$ definido por

$$N_{\mathcal{R}}^*f = \sum \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^{2\alpha_i},$$

com $\alpha_i = \frac{k}{s_i}$ e $k = m.m.c.(s_i)$. Então, $N_{\mathcal{R}}^*f$ é uma função controle quase-homogênea de tipo $(r_1, \dots, r_n; 2k)$.

O lema seguinte está provado em [25].

Lema 4.1.4. *Existem constantes $0 < c_2 < c_1$ tais que*

$$c_2\rho(x) \leq N_{\mathcal{R}}^*f_t \leq c_1\rho(x) .$$

Temos a seguinte igualdade;

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} N_{\mathcal{R}}^*f_t = df_t(W) ,$$

em que W é dado por

$$W = \sum \frac{\partial f_t}{\partial t} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^{2\alpha_i-1} \frac{\partial}{\partial x_i} .$$

Como $\text{fil} \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \right) \geq d + r_n - r_1$ e

$$\begin{aligned} \text{fil} \left(\left[\frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right]^{2\alpha_i-1} \right) &= (2\alpha_i - 1) \text{fil} \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_i} \right) \\ &= (2\alpha_i - 1)(d - r_i) \\ &= 2K - d + r_i \\ &\geq 2k - d + r_1 \end{aligned}$$

e, $\min \text{fil}(W) \geq \text{fil}(\Theta) + 2k - d + r_1 \geq 2k + r_n$.

Seja $v : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0$ o campo de vetores definido por $\frac{W}{N_{\mathcal{R}}^* f_t}$. Pelo Lema 4.1.2, temos que v é um campo Lipschitz.

A equação $(\frac{\partial f_t}{\partial t})(x, t) = (df_t)_x(x, t)(v(x, t))$ implica a bi-Lipschitz trivialidade da família $f_t(x)$ ao longo de um pequeno aberto em volta de $t = 0$. Como o mesmo argumento é verdadeiro para todo $t = t_0 \in I$, a prova está completa. ■

Observação 4.1.5. A respeito da proposição acima, se estamos no caso quase-homogêneo puro, isto é, se $r_n > r_1$, então é suficiente pedir que $N_{\mathcal{R}}^* f$ satisfaça uma condição de Lojasiewicz para obter $N_{\mathcal{R}}^* f_t$ satisfazendo uma condição de Lojasiewicz.

Observação 4.1.6. Como consequência imediata da Proposição 4.1.3, obtemos o Teorema 4.0.11 e, portanto, também vale o:

Corolário 4.1.7. *A família (4.1) é bi-Lipschitz trivial ao longo de qualquer intervalo $I = [a, b]$ com $a > 1$.*

Em [30], D. Trotman prova que a multiplicidade de funções analíticas complexas é um invariante para a bi-Lipschitz equivalência. Em outro artigo menos recente, a saber [29], D. Trotman havia provado que a multiplicidade é invariante por difeomorfismos de classe C^1 . Para justificar [30], D. Trotman comenta, de forma muito natural, que não é esperado que se duas funções f e g são bi-Lipschitz equivalentes então $f^{-1}(0)$ e $g^{-1}(0)$ são necessariamente C^1 -equivalentes. De fato, o comentário dele estava correto e o corolário acima justifica essa afirmação.

A Proposição 4.1.3 ainda vale para aplicações com singularidade isolada na origem. Embora tais aplicações ocorram raramente, não me custa enunciar o seguinte

Proposição 4.1.8. *Seja $f_t(x) = f(x) + t\Theta(x, t)$ uma deformação de um germe de aplicação polinomial quase-homogênea $f \in C(n, p)$ de tipo $(r_1, \dots, r_n; d_1, \dots, d_p)$, com $r_1 \leq \dots \leq r_n$ e com $d_1 \leq \dots \leq d_p$, satisfazendo uma condição de Lojasiewicz $N_{\mathcal{R}} f_t(x) \geq c\|x\|^\alpha$, para constantes c e α . Se $\text{fil}(\Theta_i) \geq d_i + r_n - r_1$, para todo i e $t \in [0, 1]$, então f_t admite uma bi-Lipschitz trivialização ao longo de $I = [0, 1]$.*

Substituindo o Lema 2 de [25], pelo Lema 4.1.2, na demonstração da Proposição 2.2 de [25], obtemos uma prova para a Proposição 4.1.8.

Com esses resultados em mãos, uma pergunta natural a se formular é: quão boa é a estimativa apresentada na Proposição 4.1.8 ?

Vimos no Teorema 2.4.6 que toda família quase-homogênea de curvas planas é bi-Lipschitz trivial. Seria, então, interessante saber a respeito da $\mathcal{R}$ -bi-Lipschitz trivialidade de famílias quase-homogêneas de funções de duas variáveis. Lembro que, essa pergunta não se põe no caso de mais de duas variáveis pois temos o exemplo de Briançon-Speder. O entendimento deste problema poderia trazer esclarecimentos para a questão da ocorrência ou não da modalidade em se tratando da $\mathcal{R}$ -bi-Lipschitz equivalência.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Bekka, (c)-regularité et trivialité topologique, Singularity Theory and its Applications. Warwick 1989, part I. Lectures Notes in Mathematics no 1462, p.42-62. Springer-Verlag.
- [2] L. Birbrair, *Local bi-Lipschitz classification of 2-dimensional semialgebraic sets*. Houston J. Math. 25 (1999), no. 3, 453–472.
- [3] L. Birbrair, A. Fernandes, *Metric theory of semialgebraic curves*, Rev. Mat. Complut. 13 (2000), no. 2, 369–382
- [4] L. Birbrair, T. Mostowski, *Normal embeddings of semialgebraic sets*, Michigan Math. J. 47 (2000), no. 1, 125–132.
- [5] R. Benedetti, J-J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, 'Actualités Mathématiques, Hermann, Paris (1990).
- [6] J. Bochnak, J-J. Risler, *Sur les exposants de Lojasiewicz*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), no. 4, 493–507.
- [7] J. Briançon, J. Speder, *La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, C. R. Acad. Sci., 280 (1975), Paris, 365-367.
- [8] E. Brieskorn, H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Birkhäuser Verlag (1986).
- [9] J. Damon, *Topological invariants μ -constant deformations of complete intersection singularities*. Oxford Quart. J. 158 (1989), 139-160.

- [10] Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag New York Inc., New York 1969.
- [11] A.C.G. Fernandes, *On metric theory of complex curves*, submetido para publicação (2001).
- [12] T. Fukui, S. Koike, T-C. Kuo, *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress*, Real analytic and algebraic singularities, Pitman Res. Notes Math. Ser., 381, Longman, Harlow, 1998.
- [13] T. Fukui, L. Paunescu, *Modified analytic trivialization for weighted homogeneous function-germs*, J. Math Soc. Japan, 52 (2000), no. 2, 433-446.
- [14] T. Gaffney, $\mathcal{L}^0$ -equivalence of maps, Math Proc. Phil. Soc. 128 (2000), 479-496.
- [15] E. Garcia Barroso, *Un théorème de décomposition pour les polaires génériques d'une courbe plane*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 326 (1998), no. 1, 59-62
- [16] C. Gibson, K. Wirthmüller, du Plessis A., Looijenga E. *Topological stability of smooth mappings* Lectures Notes in Mathematics, vol.552, Springer, 1976.
- [17] H.C. King, *Topological type in families of germs*, Inventiones Math. 62 (1980) 1-13.
- [18] S. Koike, *On strong C^0 -equivalence of real analytic functions*, J. Math. Soc. Japan 45 (1993), no. 2, 313-320.
- [19] T.C. Kuo, *Modified analytic trivialization of singularities*, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 605-614.
- [20] E. McShane, *Extensions of range of functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 40 (1934), 873-842.
- [21] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*, Invent. Math. 41 (1977), no. 2, 103-111.
- [22] T. Mostowski, *Lipschitz equisingularity*, Dissertationes Math. 243 (1985).

- [23] T. Mostowski, *Lipschitz stratification and Lipschitz isotopies*, preprint 2001.
- [24] A. Parusinski, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 27 (1994), no. 6, 661–696.
- [25] M.A.S. Ruas, M.J. Saia, *C^1 -determinacy of weighted homogeneous germs*, Hokkaido Mathematical Journal, vol. 26, no 1 (1997), 89-99.
- [26] R.N.A. dos Santos, *Tese de doutorado*, em preparação, ICMC-USP.
- [27] B. Teissier, *Introduction to curve singularities*, Singularity theory (Trieste, 1991), 866–893, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1995.
- [28] B. Teissier, *Variétés polaires. II. Multiplicités polaires, sections planes, et conditions de Whitney*, Algebraic geometry (La Rbida, 1981), 314–491, Lecture Notes in Math., 961, Springer, Berlin, 1982.
- [29] D. Trotman, *Bi-Lipschitz invariance of the multiplicity*, Bull. London Math. Soc. 29 (1997), no. 2, 200–204.
- [30] D. Trotman, *Multiplicity as a C^1 invariant*, Real analytic and algebraic singularities, Pitman Res. Notes Math. Ser., 381, Longman, Harlow, 1998.
- [31] C.T.C. Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bull. London Math Society 13 (1981), 481-539.