
Representações do grupo de tranças por
automorfismos de grupos

Pavel Jesus Henríquez Pizarro

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Representações do grupo de tranças por automorfismos de grupos

Pavel Jesus Henríquez Pizarro

Orientador: Prof. Dr. Jose Eduardo Prado Pires de Campos

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Dezembro de 2011

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H518
r Henriquez Pizarro, Pavel Jesus
Representações do grupo de tranças por
automorfismos de grupos / Pavel Jesus Henriquez
Pizarro; orientador Jose Eduardo Prado Pires de
Campos -- São Carlos, 2011.
123 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Teoria de Tranças. 2. Teoria de Nós. 3.
Topologia. 4. Grupos Livres. 5. Grupoides. I. Prado
Pires de Campos, Jose Eduardo, orient. II. Título.

”Não estamos na terra para sofrer eternamente, mas sim, para que nosso Espírito evolua, por isso a necessidade de tantas provas que muitas vezes nos faz sofrer. Porém, dentro de cada um de nós, existe uma grande força interior, capaz de fazer nos continuar a jornada, enfrentando qualquer obstáculo que apareça. Uma força que nos impulsiona para descoberta que somos capazes de atravessar as tormentas e ir em busca de um novo horizonte. De que se uma pedra nos atinge, saberemos que a dor se fará presente sim, mas também passará, e de que podemos superar o sofrimento e com fé uma nova porta se abrirá. Não esqueçam essa força interior, ela está em nós e quando confiarmos em nosso potencial, veremos como muito iremos realizar, como as mudanças virão e novos horizontes também. Acredite, a força interior pulsa em nós. Hoje e sempre...”

Agradecimentos

Quero começar agradecendo a Deus, que através do meu espírito, me dá força e vontade para fazer tudo o que eu quero sem ter duvidar. Por isso, que eu posso hoje escrever estes agradecimentos que simboliza o final do meu trabalho e que ironicamente, se coloca no começo. Sou muito grato à vida (isto é, Deus) por ter me permitido percorrer esta grande viagem que me fortaleceu como amigo, como filho, como irmão, como pai, como homen, e evidentemente, como matemático.

Agradeço a minha família toda, pois sempre estiveram nos momentos que eu precisei para me dar força, compreensão e paz. Govinda, Paloma e filhos, por sua alegria inesgotável. À minha mãe por suas palavras sempre sábias. À meu pai por sua compreensão. Aos meus irmãos Tania e Pablo, porque sempre estiveram aqui comigo. Aos meus *papadres* por seu apoio incondicional em todo momento.

Em especial, agradeço a uma mulher que faz parte do grande pilar que me firma, que é a grande luz que ilumina meu caminho e que me dá força nos momentos difíceis. Porque foi através do seu apoio que eu pude acabar com esta tarefa. Agradeço a esta mulher, que é a mãe do meus filhos, por confiar em mim (e portanto, nela). Por isso Maria Mónica, muito obrigado.

Aos meus filhos, alegria da minha vida, bênção sagrada, motivação para seguir este caminho e nunca desistir, a eles agradeço por seu amor incondicional e me motivar a construir este trabalho.

Agradeço três grandes professores e pessoas que eu conheci:

- Primeiramente, o professor Jose Eduardo Prado Pires de Campos, meu orientador. Grande companheiro de trabalho que me ajudou em todo momento que foi preciso com minhas dúvidas matemáticas e existenciais. A ele agradeço por ter uma enorme paciência e compreensão comigo, como matemático ou como pessoa, e também porque muito pude aprender com ele;

- o segundo, o professor Oziride Manzonileto, pois ele solucionou muitas dúvidas e esteve disponível, mesmo, nem sendo meu orientador, de me ajudar com algum problema matemático com total confiança, de me passar um jris para eu expor meus conflitos na louça que ele tem na sala dele;
- e o terceiro, mas não por isso menos importante, o professor Jesus Juyumaya, agradeço por ter apresentado a teoria de nós e de como estes se representam por fechos de tranças, quando eu era apenas um graduando. Agora posso dizer que aquela matéria da graduação foi só uma introdução de uma pequena parte da teoria.

Agradeço também a todos os professores com os quais eu tive a oportunidade de conviver, pois com eles aprendi muito mais da matemática e me enriqueci matematicamente.

Aos meus amigos da USP, mestrandos e doutorandos do ICMC, pois com eles estudei e aprendi constantemente e porque sempre estiveram presentes para o que eu necessitasse.

Aos meus amigos do Alojamento, porque sempre alegraram os meus dias e diminuíram a saudade de casa.

Agradeço o importante apoio de CAPES-Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela bolsa de mestrado que me permitiu estudar em ótimas condições, o qual provocou em mim um desempenho muito bom. Agradeço a FAFESP-Fundação de Amparo e Pesquisa do Estado de São Paulo, projeto tematico número: 08/57607-6.

Resumo

A partir de um grupo H e um elemento h em H , nós definimos uma representação $\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(H^{*n})$, onde B_n denota o grupo de trança de n cordas, e H^{*n} denota o produto livre de n cópias de H . Chamamos a ρ a representação de tipo Artin associada ao par (H, h) . Nós também estudamos varios aspectos de tal representação.

Primeiramente, associamos a cada trança β um grupo $\Gamma_{(H,h)}(\beta)$ e provamos que o operador $\Gamma_{(H,h)}$ determina um grupo invariante de enlaçamentos orientados. Então damos uma construção topológica da representação de tipo Artin e do invariante de enlaçamentos $\Gamma_{(H,h)}$, e provamos que a representação é fiel se, e somente se, h é não trivial.

Abstract

From a group H and a element $h \in H$, we define a representation $\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(H^{*n})$, where B_n denotes the braid group on n strands, and H^{*n} denotes the free product of n copies of H . We call ρ the Artin type representation associated to the pair (H, h) . Here we study various aspects of such representations.

Firstly, we associate to each braid β a group $\Gamma_{(H,h)}(\beta)$ and prove that the operator $\Gamma_{(H,h)}$ determines a group invariant of oriented links. We then give a topological construction of the Artin type representations and of the link invariant $\Gamma_{(H,h)}$, and we prove that the Artin type representations are faithful if and only if h is nontrivial.

Sumário

Introdução	1
1 Grupos Livres	3
1.1 Definição e Propriedades Básicas	3
1.2 Construção de Grupos Livres e suas Propriedades	5
1.3 Geradores e Relatores	10
1.4 Produtos Livres	14
1.5 Push-Out e Extensões HNN	16
2 Grupóides	21
2.1 Definição e Propriedades	21
2.2 Homomorfismos de Grupóides	25
2.3 Extensões de Homomorfismos	27
2.4 Push-Out de Grupóides	28
3 Elementos de Topologia e Topologia Algébrica	43
3.1 Topologia Fraca e Topologia Quociente	43
3.2 Adjuntando Espaços mediante Funções	45
3.3 Caminhos e Homotopias	46
3.4 O Grupóide Fundamental e o Grupo Fundamental	49
3.5 O Teorema de Seifert-Van Kampen	53
3.6 Complexo CW	57
4 Tranças Geométricas de Artin e Enlaçamentos	59
4.1 Tranças Geométricas	59
4.2 Representação de Tranças por Automorfismos de Grupos Livres	65

4.3	Construindo Enlaçamentos a partir de Tranças	68
4.4	Representando um Enlaçamento pelo Fecho de uma Trança	70
4.5	Equivalência Combinatória de Tranças Fechadas	72
4.5.1	Uma deformação do tipo \mathcal{R}	72
4.5.2	Uma deformação do tipo \mathcal{W}	72
4.6	O Grupo de um Enlaçamento	75
4.7	Algumas Definições da Teoria de Nós	77
5	A Representação do Tipo Artin do Grupo das Tranças	79
5.1	Definição e Propriedades Elementares	80
5.2	Enlaçamentos e Invariantes de Enlaçamentos	83
5.3	Construção Topológica do Invariante de Enlaçamentos	85
5.4	Fidelidade da Representação de Tipo Artin	100
5.5	Alguns Exemplos	104

Introdução

Em 1925, Artin introduziu o estudo de tranças, o qual se relaciona com o estudo de nós e enlaçamentos. Os resultados importantes obtidos por Artin foram seus teoremas da apresentação e da representação, que fornecem uma apresentação para o grupo das tranças no disco e de uma representação destas no grupo dos automorfismos (à direita) de um grupo livre em n geradores.

A teoria de tranças se desenvolveu em várias direções com os trabalhos de Alexander, Markov, Wada e outros. A teoria básica pode ser encontrada em [2], e para uma rápida introdução pode se ver [3].

Neste trabalho, o principal objetivo é estudar uma representação do grupo de tranças no grupo dos automorfismos de um produto livre de n cópias de um grupo arbitrário. Veremos que esta nova representação generaliza as representações dadas por Artin em 1925 e por Wada em 1992 (ver [8]). Provaremos que esta nova representação é fiel e, usando-a, construiremos um novo invariante de enlaçamentos.

Primeiramente, precisamos falar de grupos livres, conteúdo estudado no capítulo 1 (ver [1]). Na sequência, capítulo 2, estudamos grupóides e aplicamos este conteúdo no capítulo 3 para obter resultados importantes sobre grupos fundamentais. O capítulo 4 é uma introdução básica à teoria das tranças. E por último, no capítulo 5, expomos e demonstramos os principais resultados deste trabalho (ver [5]).

Grupos Livres

Em muitas aplicações da teoria de grupos e, especificamente, no cálculo de grupos fundamentais de espaços relacionados a enlaçamentos, os grupos são descritos por "relações definidoras", ou, como diremos mais tarde, encontrando uma "apresentação" dos grupos. O estudo das apresentações de grupos, deve começar com uma descrição do grupo livre para entender como se constróem estas apresentações.

1.1 Definição e Propriedades Básicas

Seja G um grupo e X um conjunto de geradores de G . Certamente, o produto de um elemento de X com seu inverso sempre será e_G , o elemento neutro de G , qualquer que seja X e G , por exemplo, $abaa^{-1}b^{-1}a^{-1} = e_G$. Produtos de outro tipo, como abc , ou ba , serão e_G , dependendo da escolha de X e G . Vamos estudar aqueles pares (G, X) onde o grupo G satisfaz só, e somente só, os axiomas básicos de grupos que todos os grupos satisfazem. Aqueles grupos serão chamados de grupos livres.

Seja (G, X) um par com aquela propriedade. Considere um grupo H e uma função $f : X \rightarrow H$. A função f se estende a um único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$. De fato, defina para $g = x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, com x_{i_r} em X e ε_r em $\{-1, 1\}$, para $r = 1, \dots, n$,

$$\varphi(g) = f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n}$$

Afirmamos que $\varphi(g)$ não depende da forma como g foi expresso. Suponhamos $g = x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{i_m}^{\delta_m}$

com x_{i_k} em X e δ_k em $\{-1, 1\}$, para $k = 1, \dots, m$. Então

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{j_m}^{-\delta_m} \dots x_{i_1}^{-\delta_1} = e_G \quad (1.1.1)$$

Logo,

$$\varphi(x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n} x_{j_m}^{-\delta_m} \dots x_{i_1}^{-\delta_1}) = f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n} f(x_{j_m})^{-\delta_m} \dots f(x_{i_1})^{-\delta_1} = e_H \quad (1.1.2)$$

Assim, $\varphi(g)$ depende só de g e não da forma como g foi escrito. Portanto, φ está bem definida. É claro que φ é um homomorfismo e que restrita a X é igual a f . Além disso, φ está unicamente determinada pela escolha das imagens dos elementos de X . Neste caso, vamos dizer que f **se estende de forma natural** para G .

Agora, suponha que X é um subconjunto de um grupo G tal que qualquer aplicação $f : X \rightarrow H$ se estende, de maneira única, a um homomorfismo de G em H . Se $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n} = e_G$, como f se estende a um homomorfismo de G em H , $f(x_{i_1})^{\varepsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\varepsilon_n} = e_H$. Da arbitrariedade do grupo H e da aplicação f , isto equivale a dizer que o produto de elementos de $X \cup X^{-1}$ é e_G só quando o produto associado através de f , no grupo correspondente, também é a identidade para todo grupo H e aplicação f . Isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.1.1. *Seja X um conjunto, G um grupo e $i : X \rightarrow G$ uma aplicação. O par (G, i) é chamado **livre sobre X** se, para qualquer grupo H e aplicação $f : X \rightarrow H$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $f = \varphi \circ i$.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & H \\ i \downarrow & \nearrow \exists! \varphi & \\ G & & \end{array} \quad (1.1.3)$$

Por exemplo, o grupo trivial é livre sobre o conjunto vazio \emptyset , pois qualquer função do \emptyset num grupo H , se estende ao homomorfismo trivial. O grupo aditivo \mathbb{Z} é livre sobre um conjunto com um elemento $\{x\}$, onde a aplicação $i : \{x\} \rightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $i(x) = 1$, de fato, seja f uma aplicação de $\{x\}$ em um grupo H e escreva $f(x) = a$. Estendendo f de maneira natural para \mathbb{Z} , obtemos $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow H$ definida por $\varphi(n) = a^n$. Este homomorfismo é único, pois se existir outro homomorfismo φ' de \mathbb{Z} em H com as propriedades de φ , então $f(x) = \varphi \circ i(x) = \varphi' \circ i(x)$. Logo, $\varphi(1) = \varphi'(1) = a$, como 1 é gerador de \mathbb{Z} temos que $\varphi = \varphi'$ sobre \mathbb{Z} , e portanto, φ é único.

Proposição 1.1.2. *Seja (G_1, i_1) livre sobre X . Então, outro par (G_2, i_2) é livre sobre X , se e somente se, existe um isomorfismo $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ tal que $\phi \circ i_1 = i_2$.*

Demonstração. Primeiro suponha que existe um isomorfismo ϕ de G_1 em G_2 tal que $\phi \circ i_1 = i_2$. Seja H um grupo e $f : X \rightarrow H$ uma aplicação qualquer. Então, existe um único homomorfismo $\varphi : G_1 \rightarrow H$ tal que $f = \varphi \circ i_1$. É claro que o homomorfismo $\psi : G_2 \rightarrow H$ definido por $\psi = \varphi \circ \phi^{-1}$ é único e satisfaz $f = \psi \circ i_2$. Portanto, (G_2, i_2) é livre sobre X .

Reciprocamente, suponha que (G_2, i_2) é livre sobre X . Pela definição de grupo livre sobre X , existem dois homomorfismos únicos, $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ e $\psi : G_2 \rightarrow G_1$ tais que $i_2 = \phi \circ i_1$ e $i_1 = \psi \circ i_2$ (ver (1.1.4)). Logo, $\phi \circ \psi \circ i_2 = i_2$ e $\psi \circ \phi \circ i_1 = i_1$. Por outro lado, é claro que $i_1 = Id_{G_1} \circ i_1$ e $i_2 = Id_{G_2} \circ i_2$. Da unicidade na definição de grupo livre temos $\psi \circ \phi = Id_{G_1}$ e $\phi \circ \psi = Id_{G_2}$. Portanto, ϕ é um isomorfismo que satisfaz $i_2 = \phi \circ i_1$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_2} & G_2 \\ i_1 \downarrow & \nearrow \exists! \varphi & \\ G_1 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & \nearrow \exists! \psi & \\ G_2 & & \end{array} \quad (1.1.4)$$

□

Proposição 1.1.3. *Seja (F, i) um grupo livre sobre um conjunto X , então i é injetora.*

1.2 Construção de Grupos Livres e suas Propriedades

Seja X um conjunto. Defina $M(X)$ como o conjunto que contém todas as seqüências finitas $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ de elementos de X , com $n \geq 0$. No caso $n = 0$, a seqüência é vazia e escrevemos $()$. Defina uma multiplicação em $M(X)$ por

$$(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \cdot (x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_{j_1}, \dots, x_{j_m}) \quad (1.2.1)$$

Esta multiplicação é associativa e tem elemento neutro, a saber, a palavra vazia, que denotaremos por 1. Assim, $(M(X), \cdot)$ tem estrutura de monóide¹, e será chamado de **monóide livre** em X .

¹Um monóide é um conjunto G com uma operação de $G \times G$ em G , associativa e com elemento neutro. A diferença entre um monóide e um grupo, é que no monóide nem todo elemento precisa ter inverso.

Observação 1.2.1. A aplicação $x \mapsto \{x\}$ é injetora, portanto, identificando x com (x) temos que todo elemento do monóide livre em X é produto de elementos de X .

Observação 1.2.2. É possível que o conjunto X tenha algum elemento que já é uma sequência de outros elementos de X , e nós queremos diferenciar entre os elementos de X e $M(X)$. Para solucionar isto, identifica-se X com o conjunto X' , formado pelos elementos da forma $\{x\}$, com x em X . Logo, definimos o monóide livre de X sendo $M(X')$. Ignoraremos este detalhe no futuro.

Construção:

Vamos construir um grupo livre sobre um conjunto arbitrário X . Considere um conjunto \bar{X} em bijeção com X por meio da aplicação $x \mapsto \bar{x}$, e tal que $X \cap \bar{X} = \emptyset$. Em geral, os elementos de \bar{X} são denotados por x^{-1} , e o símbolo x^1 corresponde a x . Os elementos de $M(X \cup \bar{X})$ serão chamados **palavras** sobre X , e denotaremos por wu o produto $w \cdot u$ em $M(X \cup \bar{X})$. Se w é uma palavra $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ sobre X , entenderemos por **comprimento** de w , denotado por $l(w)$ ou $|w|$, o número de elementos de $X \cup \bar{X}$ que aparecem na escrita de w , isto é, $l(w) = n$. Os elementos $x_{i_r}^{\varepsilon_r} \in X$ são chamados **letras** de w .

Seja w a palavra $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ sobre X . Diremos que w é **reduzida**, se ela é a palavra vazia ou, se para cada $r = 1, \dots, n-1$, $i_r \neq i_{r+1}$ ou $i_r = i_{r+1}$ mas $\varepsilon_r \neq -\varepsilon_{r+1}$. Suponha que w não seja reduzida e escolha um r tal que $i_{r+1} = i_r$ e $\varepsilon_{r+1} = -\varepsilon_r$. Seja w' a palavra obtida de w eliminando o produto $x_{i_r}^{\varepsilon_r} x_{i_{r+1}}^{\varepsilon_{r+1}}$ na escrita de w . Dizemos que w' é obtida de w por **redução elementar**. Se w'' é outra palavra sobre X , obtida por uma sequência de reduções elementares de w , dizemos que w'' é obtida de w por **redução**.

Exemplo 1.2.3. Seja w a palavra $abc^{-1}cb^{-1}ba$. As palavras $abb^{-1}ba$ e $abc^{-1}ca$, são obtidas de w por redução elementar, e a palavra aba é obtida de w por redução.

Dadas duas palavras w e w' sobre X , escrevemos $w \approx w'$ quando w for idêntica a w' ou, se existe uma sequência finita de palavras w_1, \dots, w_k , para algum inteiro positivo k tal que w_1 é w , w_k é w' e, para cada $1 \leq j < k$, w_{j+1} é obtido de w_j por redução elementar, ou vice-versa. É fácil ver que \approx é uma relação de equivalência sobre $M(X \cup \bar{X})$. Denotemos por $F(X)$ o conjunto das classes de equivalência de $M(X \cup \bar{X})$ sob \approx e denotemos por $[w]$, a classe da palavra w . Definamos um produto em $F(X)$ por $[u] \cdot [w] = [uw]$. As seguintes observações mostram que o produto \cdot em $F(X)$ está bem definido.

Observação 1.2.4. *Sejam u, v, w, w' palavras em X .*

- *Se $w \approx w'$ então $uwv \approx uw'v$. De fato, sem perda de generalidade, suponhamos que w_1, \dots, w_k é uma sequência de palavras sobre X com $w_1 = w$, $w_k = w'$ e w_{j+1} obtida por redução elementar de w_j , ou viceversa, para todo $1 \leq j < k$. Logo, a sequência uw_1v, \dots, uw_kv , mostra que $uwv \approx uw'v$.*
- *Se $u \approx u'$ e $w \approx w'$ então $uw \approx u'w'$. De fato, ambas são equivalentes a uw' .*

Assim, o produto \cdot em $F(X)$ está bem definido.

Proposição 1.2.5. *$(F(X), \cdot)$ é um grupo.*

Demonstração. A propriedade associativa é clara. O elemento neutro em $F(X)$ é a classe da palavra vazia, denotada por 1. Dada a classe da palavra $x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_r}^{\epsilon_r}$ em $F(X)$, consideremos a classe da palavra $x_{i_r}^{-\epsilon_r} \dots x_{i_1}^{-\epsilon_1}$. É claro que o produto dessas classes é 1 e, portanto, cada classe em $F(X)$ tem inverso. \square

Seja $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_r}^{\epsilon_r}$ uma palavra sobre X e definamos $i : X \rightarrow F(X)$ por $i(x) = [x]$. Como $[w] = [x_{i_1}^{\epsilon_1}] \dots [x_{i_r}^{\epsilon_r}]$, segue que, $[w] = i(x_{i_1}^{\epsilon_1}) \dots i(x_{i_r}^{\epsilon_r})$. Portanto, a imagem de X sob i gera $F(X)$, ou seja, todo elemento de $F(X)$ é um produto de elementos de $i(X)$. Com estas notações, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.2.6. *$(F(X), i)$ é livre sobre X .*

Demonstração. Seja G um grupo e $f : X \rightarrow G$ uma aplicação arbitrária. Estenda f para $\bar{f} : M(X \cup \bar{X}) \rightarrow G$ por

$$\bar{f}(x_{i_1}^{\epsilon_1} \dots x_{i_n}^{\epsilon_n}) = f(x_{i_1})^{\epsilon_1} \dots f(x_{i_n})^{\epsilon_n}$$

Segue que, se w' é uma palavra sobre X obtida por redução elementar de outra palavra w , então $\bar{f}(w') = \bar{f}(w^{-1})$, assim, se w'' é uma palavra sobre X obtida por redução de w , então $\bar{f}(w'') = \bar{f}(w)$.

Defina $\varphi : F(X) \rightarrow G$ por $\varphi([w]) = \bar{f}(w)$. Pelo que vimos acima, φ está bem definida. Além disso, φ é um homomorfismo pela definição de \bar{f} , e claramente, $\varphi \circ i = f$. Como $i(X)$ gera $F(X)$, φ está determinada de forma única. Segue que $(F(X), i)$ é livre sobre X . \square

Como as reduções elementares decrescem o comprimento de cada palavra, é natural pensar que através de reduções elementares acharemos uma palavra reduzida, mas, é única? Isso é o que responde o teorema da forma normal para grupos livres apresentado a seguir, o qual não iremos demonstrar.

Teorema 1.2.7 (Forma Normal para Grupos Livres). *Existe uma, e somente uma palavra reduzida em cada classe de equivalência de $F(X)$.*

O teorema acima fornece outra prova do seguinte resultado.

Corolário 1.2.8. *A aplicação $i : X \rightarrow F(X)$ definida por $i(x) = [x]$, é injetora.*

Geralmente,

- Vamos considerar o conjunto X como um subconjunto de $F(X)$ e a função i como a inclusão, conseqüentemente, trocaremos $i(x)$ por simplesmente x .
- Vamos escolher como representante de cada classe em $F(X)$ a palavra reduzida associada em $M(X \cup \bar{X})$.
- Vamos diferenciar explicitamente quando estejamos trabalhando com elementos de $M(X \cup \bar{X})$ ou $F(X)$, como segue.

Notação: Denotaremos por

- $w \equiv w'$, quando w e w' sejam palavras idênticas em $M(X \cup \bar{X})$.
- $w = w'$, quando w e w' definam o mesmo elemento em $F(X)$, isto é, w e w' sejam equivalentes.

Observação 1.2.9. *Sejam u e v palavras reduzidas, então existe somente uma seqüência de reduções elementares que podem ser aplicadas a uv para obter uma palavra reduzida.*

Demonstração. De fato, seja $u \equiv x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ e $v \equiv x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_m}^{\delta_m}$. Tome $s \geq 0$ o número total de termos tais que para $0 \leq r \leq s$ temos

$$i_{n+1-r} = j_r \text{ e } \varepsilon_{n+1-r} = -\delta_r \quad (1.2.2)$$

Para $r = 1, \dots, s$, da única forma possível, elimine os termos $x_{n+1-r}^{\varepsilon_{n+1-r}} x_r^{\delta_r}$ em uv , obtendo a palavra

$$x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_{n-s}}^{\varepsilon_{n-s}} x_{j_s}^{\delta_s} \dots x_{j_m}^{\delta_m} \quad (1.2.3)$$

a qual é reduzida. \square

Observação 1.2.10. *É possível definir $F(X)$ como o conjunto das palavras reduzidas, e o produto \cdot de duas palavras u e v como a palavra reduzida obtida de uv .*

Proposição 1.2.11. *$F(X)$ é isomorfo a $F(Y)$ se, e somente se, $|X| = |Y|$*

Definição 1.2.12. *Um grupo G é chamado **livre**, se é isomorfo a $F(X)$ para algum conjunto X . Se $i : F(X) \rightarrow G$ é um isomorfismo, então chamamos ao conjunto $i(X)$ **base** de G e dizemos que G é livre em $i(X)$.*

Segue da proposição 1.2.11 e da definição 1.2.12 a seguinte observação.

Observação 1.2.13.

- (i) *Se A é uma base de G e α é um automorfismo de G , então $\alpha(A)$ também é uma base de G .*
- (ii) *Se A e B são bases de um mesmo grupo, então $|A| = |B|$.*
- (iii) *Toda bijeção entre as bases A e B de G , se estende de forma natural para um automorfismo de G .*

A observação 1.2.13 permite dar a seguinte definição.

Definição 1.2.14. *A cardinalidade de uma base de um grupo livre G é chamada o **posto** de G*

Proposição 1.2.15. *Seja X um subconjunto de um grupo G . São equivalentes:*

- (1) *G é um grupo livre com base X*
- (2) *Todo elemento de G se escreve de maneira única como $x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, para algum $n \geq 0$, x_{i_r} em X e $\varepsilon_r = \pm 1$, onde $\varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$.*

(3) X gera G e e_G não é igual a qualquer produto $x_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, x_{i_n}^{\varepsilon_n}$, com $n > 0$, x_{i_r} em X e $\varepsilon_r = \pm 1$, onde $\varepsilon_{r+1} \neq -\varepsilon_r$ se $i_{r+1} = i_r$.

Corolário 1.2.16. *Seja X conjunto gerador de G e seja $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos que é um a um em G e tal que $\varphi(G)$ é livre com base $\varphi(X)$. Então, G é livre com base X .*

Corolário 1.2.17. *Seja G livre com base X e seja Y um subconjunto de X . Então o subgrupo de G gerado por Y , $\langle Y \rangle$, é livre com base Y .*

Corolário 1.2.18. *Seja F livre com base $\{x, y\}$. Seja $\varphi : F \rightarrow \mathbb{Z}$ o homomorfismo definido por $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(y) = 0$. Então, $\ker(\varphi)$ é livre com base $A = \{x^{-i}y^i : i \in \mathbb{Z}\}$.*

Proposição 1.2.19. *Grupos livres são livres de torsão, isto é, todo elemento de G tem ordem infinita.*

Proposição 1.2.20. *Seja F um grupo livre e g e h elementos em F . Se $gh = hg$ então $\langle g, h \rangle$ é cíclico, isto é, existe um elemento u em F e inteiros r e s tais que $g = u^r$ e $h = u^s$.*

1.3 Geradores e Relatores

Proposição 1.3.1. *Todo grupo G é quociente de algum grupo livre.*

Demonstração. Considere a aplicação identidade de G , $Id_G : G \rightarrow G$. Esta aplicação se estende a outra aplicação $\varphi : F(G) \rightarrow G$ tal que $Id_G = \varphi \circ i$, onde $i : G \rightarrow F(G)$ é definida por $i(g) = [g]$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{Id_G} & G \\ \downarrow i & \nearrow \exists! \varphi & \\ F(G) & & \end{array}$$

Portanto, φ é sobrejetora. Segue o resultado do teorema do homomorfismo. \square

Definição 1.3.2. *Seja G um grupo, X um conjunto e $\varphi : F(X) \rightarrow G$ um epimorfismo.*

Então:

- (1) X é chamado conjunto de **símbolos geradores** (sob φ) para G .
- (2) A família $\varphi(X) = \{\varphi(x) : x \in X\}$ é chamado um **conjunto de geradores** de G .
- (3) $\ker(\varphi)$ é chamado **conjunto de relatores** de G (sob φ).
- (4) Dadas duas palavras quaisquer $u \equiv x_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots x_{i_n}^{\varepsilon_n}$ e $v \equiv x_{j_1}^{\delta_1} \dots x_{j_m}^{\delta_m}$ tais que uv^{-1} está no kernel de φ , pondo $a_i = \varphi(x_i)$, dizemos que $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_n}^{\varepsilon_n} = a_{j_1}^{\delta_1} \dots a_{j_m}^{\delta_m}$ é uma **relação** em G .

Definição 1.3.3. *Para todo subconjunto S de um grupo H , o fecho normal $\langle S \rangle^H$ em H do subgrupo $\langle S \rangle$ é chamado o **conjunto das consequências** de S em H , ou simplesmente, o subgrupo normal de H gerado por S .*

Definição 1.3.4. *Seja G um grupo, X um conjunto e $\varphi : F(X) \rightarrow G$ um epimorfismo. Se $\ker(\varphi)$ é o conjunto das consequências de algum subconjunto R de $F(X)$ (isto é, $\ker(\varphi) = \langle R \rangle^{F(X)}$), então chamamos a R um **conjunto de relatores definidores** de G (sob φ). Diremos que uma relação $u = v$ em G é uma **consequência** de relatores definidores se uv^{-1} (relator associado) é uma consequência de relatores definidores.*

Definição 1.3.5. *Uma **apresentação** $\langle X; R \rangle^\varphi$ de G , consiste de um conjunto X , um epimorfismo $\varphi : F(X) \rightarrow G$ e um conjunto R de relatores definidores de G sob φ . Dizemos que o grupo G é **apresentado** por $\langle X; R \rangle^\varphi$ e escrevemos $G = \langle X; R \rangle^\varphi$.*

As vezes omitiremos na escrita colocar φ , em especial quando φ for a aplicação natural de $F(X)$ em $F(X)/\langle R \rangle^{F(X)}$ ou quando φ for injetora sobre X . Quando X e R forem finitos, diremos que $\langle X; R \rangle^\varphi$ é uma **apresentação finita** de G e que G é um grupo **finitamente apresentado**.

Exemplo 1.3.6.

- (1) $F(X)$ tem apresentação $\langle X; R \rangle^\varphi$ com R vazio. Neste caso, φ é a função identidade de $F(X)$.

(2) A apresentação $\langle x, y; xy^2 = y^3x, yx^2 = x^3y \rangle$ apresenta o grupo trivial.

Demonstração. Observe que

$$xy^4x^{-1} = (xy^2x^{-1})^2 = y^6 \quad (1.3.1)$$

então

$$x^2y^4x^{-2} = xy^6x^{-1} = (xy^2x^{-1})^3 = y^9 \quad (1.3.2)$$

Segue que

$$y^9 = x^2y^4x^{-2} = yx^2y^4x^{-2}y^{-1} = yx^2y^{-1}y^4yx^{-2}y^{-1} = x^3y^4x^{-3} \quad (1.3.3)$$

portanto, $x^2y^4x^{-2} = x^3y^4x^{-3}$. Logo $y^4 = xy^4x^{-1} = y^6$ e assim $y^2 = 1$. Segue que $y = x = 1$. \square

Teorema 1.3.7 (Von Dyck). *Seja $G = \langle X; R \rangle^\varphi$ e $f : X \rightarrow H$ uma função em algum grupo H . Seja $\xi : F(X) \rightarrow H$ o homomorfismo associado a f . Se $\xi(r) = 1$ para todo r em R , então existe um homomorfismo $\psi : G \rightarrow H$ tal que $f(x) = \psi \circ \varphi(x)$ para todo x em X . Além disso, se $f(X)$ gera H então ψ é um epimorfismo.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & H \\ \downarrow i & \nearrow \xi & \uparrow \exists \psi \\ F(X) & \xrightarrow{\varphi} & G \end{array}$$

Corolário 1.3.8. *A inclusão $i : X \rightarrow X \cup Y$ induz um homomorfismo de $\langle X; R \rangle^\varphi$ em $\langle X \cup Y; R \cup S \rangle^\psi$ para todo subconjunto S de $F(X \cup Y)$.*

A seguinte proposição é um caso particular do teorema do homomorfismo, e é possível prová-la usando o teorema de Von-Dyck.

Proposição 1.3.9. *Seja R um subconjunto de um grupo A e seja $\xi : A \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos com $\xi(R) = \{1\}$, então existe um homomorfismo $\psi : A/\langle R \rangle^A \rightarrow H$ tal que $\xi = \psi \circ \pi$ onde $\pi : A \rightarrow A/\langle R \rangle^A$ é o homomorfismo natural.*

É possível que um grupo tenha várias apresentações, as seguintes definições e o posterior teorema esclarecem esta questão.

Seja G um grupo apresentado por $\langle X; R \rangle^\varphi$. Para $S \subset \langle R \rangle^{F(X)} = \ker(\varphi)$, a apresentação $\langle X; R \cup S \rangle^\varphi$ também é uma apresentação de G , pois $\langle R \cup S \rangle^{F(X)} = \ker(\varphi)$. Diremos então que a apresentação $\langle X; R \cup S \rangle^\varphi$ provém de $\langle X; R \rangle^\varphi$ por uma **transformação geral de Tietze do tipo I**, e que $\langle X; R \rangle^\varphi$ provém de $\langle X; R \cup S \rangle^\varphi$ por uma **transformação geral de Tietze do tipo I'**. Quando $|S| = 1$, nos referimos a transformações **simples** de Tietze.

Seja Y um conjunto disjunto de X . Escolha para cada elemento y de Y , um elemento u_y em $F(X)$. Defina $\psi : F(X \cup Y) \rightarrow G$ por $\psi(x) = \varphi(x)$ para x em X e $\psi(y) = \varphi(u_y)$ para y em Y . Então $\langle X \cup Y; R \cup \{yu_y^{-1} : y \in Y\} \rangle^\psi$ também apresenta G . De fato, seja $N = \langle R \cup \{yu_y^{-1} : y \in Y\} \rangle^{F(X \cup Y)}$, ψ induz um epimorfismo $\pi : F(X \cup Y)/N \rightarrow G$ definido por $wN \mapsto \varphi(w)$, pois $\psi(R \cup \{yu_y^{-1} : y \in Y\}) = \{1\}$. Do teorema de Von-Dyck, existe um epimorfismo $\xi : G \rightarrow F(X \cup Y)/N$ tal que $\xi \circ \varphi(x) = xN$ para todo x em X . Claramente $\pi \circ \xi$ é a identidade. Observe que dado y em Y ,

$$\xi \circ \pi(yN) = \xi \circ \psi(y) = \xi \circ \varphi(u_y) = u_y N = yN$$

Portanto $\xi \circ \pi$ é o homomorfismo identidade de $F(X \cup Y)/N$. Segue o resultado. Dizemos então que $\langle X \cup Y; R \cup \{yu_y^{-1} : y \in Y\} \rangle^\psi$ provém de $\langle X; R \rangle^\varphi$ por uma **transformação geral de Tietze do tipo II** e que $\langle X; R \rangle^\varphi$ provém de $\langle X \cup Y; R \cup \{yu_y^{-1} : y \in Y\} \rangle^\psi$ por uma **transformação geral de Tietze do tipo II'**. Quando $|Y| = 1$ nos referimos a transformações **simples**.

Teorema 1.3.10. *Duas apresentações quaisquer de um mesmo grupo podem ser obtidas uma da outra mediante uma sequência de transformações gerais de Tietze. Se ambas as apresentações são finitas então cada uma pode ser obtida da outra por uma sequência de transformações simples de Tietze.*

Proposição 1.3.11. *Seja G finitamente gerado e $\langle Y; S \rangle^\psi$ uma apresentação de G . Então existe um subconjunto finito de Y que gera G (sob ψ).*

Proposição 1.3.12. *Sejam $\langle X; R \rangle^\varphi$ e $\langle Y; S \rangle^\psi$ duas apresentações de um mesmo grupo G . Se X, R e Y são finitos então existe $S_1 \subset S$ tal que G é apresentado por $\langle Y; S_1 \rangle^\psi$*

1.4 Produtos Livres

Nesta seção vamos generalizar o conceito de grupo livre e suas propriedades.

Definição 1.4.1. *Seja $\{G_\alpha\}$ uma família de grupos, G um grupo e para cada α , seja $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$ um homomorfismo. $(G, \{i_\alpha\})$ é chamado **produto livre** da família $\{G_\alpha\}$ se para todo grupo H e família de homomorfismos $f_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ existe um único homomorfismo $f : G \rightarrow H$ tal que $f_\alpha = f \circ i_\alpha$, para todo α .*

$$\begin{array}{ccc} G_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & H \\ i_\alpha \downarrow & \nearrow \exists! f & \\ G & & \end{array}$$

Proposição 1.4.2. *Se $(G, \{i_\alpha\})$ e $(H, \{j_\alpha\})$ são ambos produtos livres de uma família de grupos $\{G_\alpha\}$, então existe um único isomorfismo $f : G \rightarrow H$ tal que $f \circ i_\alpha = j_\alpha$, para todo α .*

Teorema 1.4.3. *Toda família de grupos $\{G_\alpha\}$ tem um produto livre.*

Demonstração. Suponhamos que para cada α , G_α é apresentado por $\langle X_\alpha : R_\alpha \rangle^{\varphi_\alpha}$. Assuma, sem perda de generalidade, que $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, para todo $\alpha \neq \beta$. Seja

$$G = F(\cup_\alpha X_\alpha) / \langle \cup_\alpha R_\alpha \rangle^{F(\cup_\alpha X_\alpha)} \quad (1.4.1)$$

G é apresentado por $\langle \cup_\alpha X_\alpha : \cup_\alpha R_\alpha \rangle^\varphi$, onde $\varphi : F(\cup_\alpha X_\alpha) \rightarrow G$ é a aplicação natural. Pelo corolário do teorema de Von Dyck, para cada α , a inclusão $\tilde{i}_\alpha : X_\alpha \rightarrow \cup_\alpha X_\alpha$ induz um homomorfismo $i_\alpha : G_\alpha \rightarrow G$. Vamos provar que $(G, \{i_\alpha\})$ é o produto livre da família de grupos $\{G_\alpha\}$.

Seja H um grupo e para cada α , seja $f_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$ um homomorfismo. Queremos encontrar um homomorfismo $f : G \rightarrow H$ tal que $f \circ i_\alpha = f_\alpha$. De fato, f_α induz um homomorfismo

$$\psi_\alpha = f_\alpha \circ \varphi_\alpha : F(X_\alpha) \rightarrow H$$

tal que $\psi_\alpha(R_\alpha) = \{1\}$, para todo α . Defina o homomorfismo

$$\psi : F(\cup_\alpha X_\alpha) \rightarrow H$$

por $\psi(x) = \psi_\alpha(x)$, para todo $x \in X_\alpha$. É claro que $\psi(\cup_\alpha R_\alpha) = \{1\}$, portanto, do teorema de Von Dyck, existe $f : G \rightarrow H$ tal que $\psi = f \circ \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} F(\cup_\alpha X_\alpha) & \xrightarrow{\psi} & H \\ & \searrow \varphi & \uparrow \exists f \\ & & G \end{array} \quad (1.4.2)$$

Observe que para cada α , $(i_\alpha \circ \varphi_\alpha)(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$, para todo $x_\alpha \in X_\alpha$.

$$\begin{array}{ccccc} F(X_\alpha) & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & G_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & H \\ \downarrow & & \downarrow i_\alpha & \nearrow f & \\ F(\cup_\alpha X_\alpha) & \xrightarrow{\varphi} & G & & \end{array} \quad (1.4.3)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(i_\alpha(\varphi_\alpha(x_\alpha))) &= f(\varphi(x_\alpha)) \\ &= \psi(x_\alpha) \\ &= \psi_\alpha(x_\alpha) \\ &= f_\alpha(\varphi_\alpha(x_\alpha)), \forall x_\alpha \in X_\alpha \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

Como $\varphi_\alpha(X_\alpha)$ gera G_α , temos $f \circ i_\alpha = f_\alpha$, para todo α . Além disso, f é única pois $\cup_\alpha (i_\alpha \circ \varphi_\alpha)(X_\alpha)$ gera G . \square

Quando G é o produto livre de uma família $\{G_\alpha\}_\alpha$, escrevemos $G = *_\alpha G_\alpha$. Quando o conjunto que percorre α seja $\{1, \dots, n\}$, escrevemos $G = G_1 * \dots * G_n$.

Exemplo 1.4.4. O grupo livre $F(X)$ é o produto livre da família de grupos cíclicos

$$\{\langle x \rangle : x \in X\}$$

Teorema 1.4.5 (Forma Normal). *Seja $(G, \{i_\alpha\})$ o produto livre de uma família de grupos $\{G_\alpha\}$. Então,*

- (1) *Para cada α , i_α é um monomorfismo.*
- (2) *Considerando i_α como a inclusão, cada elemento não trivial de G é escrito de maneira única como $g_1 \dots g_n$, com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$ para algum α_i , $g_i \neq 1$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $\alpha_r \neq \alpha_{r+1}$ para todo $r < n$.*

Proposição 1.4.6. *Seja $\{G_\alpha\}$ uma família de subgrupos de um grupo G . São equivalentes:*

- (i) *G é o produto livre da família $\{G_\alpha\}$.*
- (ii) *Cada elemento de G é escrito de maneira única como um produto $g_1 \dots g_n$, com $n \geq 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$, e $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.*
- (iii) *G é gerado pelos subgrupos G_α e 1 não pode ser escrito como um produto $g_1 \dots g_n$, com $n > 0$, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $g_i \neq 1$, e $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$.*

1.5 Push-Out e Extensões HNN

Definição 1.5.1. *Sejam G_0, G_1, G_2 grupos e sejam $i_1 : G_0 \rightarrow G_1$ e $i_2 : G_0 \rightarrow G_2$ homomorfismos. Seja G um grupo, e sejam $j_1 : G_1 \rightarrow G$, $j_2 : G_2 \rightarrow G$ homomorfismos. Dizemos que (G, j_1, j_2) é o **push-out** de (i_1, i_2) se as seguintes condições se verificam:*

- (i) $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$;
- (ii) *Para cada grupo H e homomorfismos $\varphi_r : G_r \rightarrow H$, $r = 1, 2$, com $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $\varphi_r = \varphi \circ j_r$, $r = 1, 2$.*

Assim, dizemos que temos um **quadrado** (ou **diagrama**) **push-out**:

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & G \end{array}$$

Usualmente faremos referência ao push-out mencionando apenas o grupo G em vez do trio (G, j_1, j_2) .

Proposição 1.5.2. *O push-out G na definição, é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Seja (L, l_1, l_2) outro push-out de (i_1, i_2) . Pela definição anterior, existe um único homomorfismo $\alpha : G \rightarrow L$ tal que $\alpha \circ j_1 = l_1$ e $\alpha \circ j_2 = l_2$, e por outro lado, existe um único homomorfismo $\beta : L \rightarrow G$ tal que $\beta \circ l_1 = j_1$ e $\beta \circ l_2 = j_2$. Logo, $\alpha \circ \beta \circ l_i = l_i$, para $i = 1, 2$. Como Id_L também satisfaz esta propriedade, temos $Id_L = \alpha \circ \beta$. Analogamente $Id_G = \beta \circ \alpha$. Segue o resultado. \square

Teorema 1.5.3. *Todo par (i_1, i_2) como na definição 1.5.1, tem um push-out.*

Demonstração. Suponhamos que o grupo G_r seja apresentado por $\langle X_r; R_r \rangle^{\xi_r}$, para $r = 1, 2$, com $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Seja Y um conjunto gerador de G_0 e escolhamos para cada y em Y um elemento w_{yr} em $F(X_r)$ tal que

$$i_r(y) = \xi_r(w_{yr}), \text{ para } r = 1, 2.$$

Seja G o grupo apresentado por $\langle X_1 \cup X_2; R_1, R_2, \{w_{y1}^{-1}w_{y2}\} \rangle$. Assim, para $r = 1, 2$, temos aplicações naturais $j_r : G_r \rightarrow G$, induzidas pelas inclusões de X_r em $X_1 \cup X_2$ e portanto G é gerado por $j_1(G_1) \cup j_2(G_2)$. Desta forma, pode existir no máximo um homomorfismo saindo de G com valores especificados em $j_1(G_1) \cup j_2(G_2)$.

Para $r = 1, 2$, seja $\varphi_r : G_r \rightarrow H$ um homomorfismo em um grupo H tal que $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2$. Logo, para $r = 1, 2$, φ_r define um homomorfismo $\psi_r : F(X_r) \rightarrow H$ que é trivial em R_r . Pelo teorema de Von-Dick, o homomorfismo de domínio $F(X_1 \cup X_2)$ que é ψ_r em X_r define um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ que satisfaz $\varphi_r = \varphi \circ j_r$, para $r = 1, 2$. Segue que G é o push-out procurado. \square

Observação 1.5.4. *O teorema 1.5.3 fornece uma apresentação para um push-out de grupos.*

Exemplo 1.5.5. *Se G_2 é trivial então o push-out é o grupo quociente $G_1 / \langle i_1(G_0) \rangle^{G_1}$.*

Quando i_1 e i_2 forem homomorfismos injetores, chamamos ao push-out G **produto livre amalgamado de G_1 e G_2 com G_0 amalgamado**. Neste caso, geralmente consideramos G_0 como um subgrupo de G_1 e G_2 e i_1, i_2 como inclusões. A notação usual para esta situação é $G_1 *_{G_0} G_2$. Às vezes, por conveniência, usa-se a seguinte notação: $G_1 *_{G_0=H_0} G_2$ onde $G_0 \subseteq G_1, H_0 \subseteq G_2, i_1$ é a inclusão e i_2 é um isomorfismo entre G_0 e H_0 . Para maior precisão, pode-se mencionar o isomorfismo específico de G_0 em H_0 .

Em 1949 Graham Higman, B. H. Neumann e Hanna Neumann, no artigo intitulado "*Embedding Theorems for Groups*", introduziram uma construção relacionada a produtos livres amalgamados, a qual mais tarde foi chamada Extensão HNN. Vamos apresentar uma construção padrão de uma extensão HNN em vez de usar a propriedade universal de sua definição original.

Sejam G e A grupos. Sejam i_0 e i_1 monomorfismos de A em G e seja P um grupo cíclico infinito com gerador p que não é um gerador de G . Consideremos o grupo normal

$$N = \langle p^{-1}i_0(a)pi_1(a)^{-1} : a \text{ é gerador de } A \rangle^{G*P} \quad (1.5.1)$$

O grupo $(G * P)/N$ é chamado **extensão HNN do grupo base G com letra estável p e subgrupos associados $i_0(A)$ e $i_1(A)$** . Usualmente consideraremos A um subgrupo de G e i_0 como sendo a inclusão e escreveremos

$$(G * P)/N = \langle G, p; p^{-1}Ap = i_1(A) \rangle \quad (1.5.2)$$

Observação 1.5.6. *Suponhamos que G seja apresentado por $\langle X; R \rangle^\varphi$ com $p \notin X$. Seja Y um subconjunto de $F(X)$ e seja $\xi : Y \rightarrow F(X)$ uma aplicação injetora. Seja $A = \langle \varphi(Y) \rangle$ e $B = \langle \varphi \circ \xi(Y) \rangle$. Se ξ induz um isomorfismo de A em B então a extensão HNN tem apresentação*

$$\langle X, p; R, p^{-1}yp = \xi(y), y \text{ em } Y \rangle$$

É possível estender o conceito de extensão HNN para uma família de grupos $\{A_\alpha\}$ e de monomorfismos $\{i_{0\alpha}\}$ e $\{i_{1\alpha}\}$ de A_α em G . Seja P o grupo livre sobre um conjunto $\{p_\alpha\}$. Neste caso, a extensão HNN é

$$H = G * P / \langle p_\alpha^{-1}i_{0\alpha}(a_\alpha)p_\alpha = i_{1\alpha}(a_\alpha) : a_\alpha \text{ gerador de } A_\alpha, \forall \alpha \rangle^{G*P} \quad (1.5.3)$$

Se considerarmos a mesma construção acima mas com os homomorfismos $i_{0\alpha}$ e $i_{1\alpha}$ não

sendo monomorfismos, falaremos de uma **pseudo extensão HNN**.

Exemplo 1.5.7.

1. O grupo livre com base $\{p_\alpha\}$ é uma extensão HNN do grupo trivial com letras estáveis p_α .
2. Seja A um subgrupo de um grupo G . É possível formar a extensão HNN

$$\langle G, k; k^{-1}ak = a, a \text{ gerador de } A \rangle$$

3. O grupo apresentado por $\langle a, b; a^{-1}ba = b^2 \rangle$ é a extensão HNN do grupo cíclico $\langle b \rangle$ com letra estável a e subgrupos associados $\langle b \rangle$ e $\langle b^2 \rangle$.

Proposição 1.5.8. *Seja H a extensão HNN de G com letras estáveis $\{p_\alpha\}$ e com subgrupos associados $i_{0\alpha}(A_\alpha)$ e $i_{1\alpha}(A_\alpha)$. O homomorfismo inclusão de G em $G * P$ induz um homomorfismo $j : G \rightarrow H$, o qual é um monomorfismo.*

A propriedade universal das extensões HNN é dada na seguinte proposição.

Proposição 1.5.9. *Sejam G e K grupos e seja φ um homomorfismo de G em K . Suponhamos que K tem elementos k_α tais que*

$$k_\alpha^{-1}\varphi(i_{0\alpha}(a_\alpha))k_\alpha = \varphi(i_{1\alpha}(a_\alpha)) \quad (1.5.4)$$

para todo α e para todo $a_\alpha \in A_\alpha$. Seja H a extensão HNN de G com letras estáveis $\{p_\alpha\}$ e subgrupos associados $i_{0\alpha}(A_\alpha)$ e $i_{1\alpha}(A_\alpha)$. Então existe um único homomorfismo $\psi : H \rightarrow K$ tal que $\psi \circ j = \varphi$ e $\psi(p_\alpha) = k_\alpha$, para todo α .

Grupóides

Neste capítulo vamos estudar as propriedades de grupóides que serão de utilidade no estudo de um invariante de enlaçamentos no capítulo 5. Em particular, nosso interesse está no estudo de três tipos diferentes de push-out de grupóides que são aplicados para obter corolários do teorema de Van-Kampen e assim, calcular grupos fundamentais de certos espaços topológicos.

2.1 Definição e Propriedades

Definição 2.1.1. *Uma multiplicação parcial sobre um conjunto G é uma função de algum subconjunto X de $G \times G$ em G . Denotamos a imagem de (x, y) em X sob esta multiplicação parcial por $x \cdot y$, ou simplesmente xy . Dizemos que xy está definido quando (x, y) está em X .*

Definição 2.1.2. *Um elemento e em G é uma identidade de G com respeito a uma multiplicação parcial \cdot , se $ex = x$ e $ye = y$ sempre que ex e ye estão definidos.*

Definição 2.1.3. *Um grupóide G é um conjunto com uma multiplicação parcial tal que*

- (1) *(Associatividade) Se um dos elementos $(ab)c$ ou $a(bc)$ está definido, então o outro também está definido e são iguais. Além disso, se ab e bc estão definidos então $(ab)c$ (e $a(bc)$) está definido.*

(2) (*Existência de identidades*) Para todo a em G existem identidades e e f em G , tais que ea e af são definidos.

(3) (*Existência de inverso*) Para todo a em G e, e e f como em (2), existe um elemento em G que denotaremos por a^{-1} tal que $aa^{-1} = e$ e $a^{-1}a = f$.

Observação 2.1.4. Se e e f são identidades tais que ef está definido então $e = f$.

Demonstração. Isto é claro pois pela definição de identidade $f = ef = e$. □

Exemplo 2.1.5.

(i) Todo grupo é um grupóide.

(ii) Seja $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de grupos. Para cada λ e μ em Λ , consideremos o conjunto

$$G_{\lambda\mu} = \{f : X_\lambda \rightarrow X_\mu / f \text{ é uma bijeção}\}$$

Então $G = \bigcup_{\lambda, \mu \in \Lambda} G_{\lambda\mu}$ é um grupóide sob a composição de funções.

As propriedades mais simples de grupóides são muito similares áquelas de grupos, com algumas modificações necessárias, já que a multiplicação em um grupóide G nem sempre está definida.

Observação 2.1.6. Para cada elemento a em G pode existir só uma identidade e tal que ea está definido. Analogamente, pode existir só uma identidade f tal que af está definido.

Demonstração. Suponhamos que e_1 é outra identidade tal que e_1a está definido. Logo, $e(e_1a)$ está definido pois $e_1a = a$, assim, pela propriedade associativa, ee_1 está definido. O resultado segue da observação 2.1.4. O outro caso é análogo. □

Observação 2.1.7. O inverso a^{-1} de um elemento a em G é único.

Demonstração. Suponhamos que a' é outro inverso de a tal que $a'a = e$ e $aa' = f$, onde e e f são identidades de a . Suponhamos também que $a^{-1}a = e$ e $aa^{-1} = f$, então

$$a' = a'f = a'(aa^{-1}) = (a'a)a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1}$$

□

Observação 2.1.8. *A equação $ax = b$ tem solução somente se $a^{-1}b$ está definido. Neste caso, $a^{-1}b$ é a única solução.*

Demonstração. Suponhamos que $a^{-1}b$ está definido. Logo, $a(a^{-1}b)$ está definido e é igual a $(aa^{-1})b = eb = b$, pois aa^{-1} está definido e igual a e . Logo, $a^{-1}b$ é solução de $ax = b$. Reciprocamente, suponha que existe um x em G tal que $ax = b$. Como $a^{-1}a$ está definido e é igual a uma identidade f , segue que $(a^{-1}a)x = fx$ está definido e é portanto igual a x . Assim, $a^{-1}(ax)$ está definido e é igual a x , mas $ax = b$, logo $a^{-1}b = x$. \square

Observação 2.1.9. *A equação $ya = b$ tem solução se, e somente se, ba^{-1} está definido. Neste caso, a solução é única e é igual a ba^{-1} .*

Demonstração. É analoga à anterior. \square

Observação 2.1.10. *Todo elemento e tal que $ee = e$ é uma identidade.*

Demonstração. Existe uma identidade f para o elemento e tal que ef está definido e $ef = e$. Segue que $ee = ef = e$. Como a equação $ex = e$ tem solução única segue que $e = f$, que é uma identidade. \square

Observação 2.1.11. *ab está definido se, e somente se, existe uma identidade f tal que af e fb estão definidos.*

Demonstração. Se af e fb estão definidos então $a(fb)$ está definido e é igual a ab . Reciprocamente, se ab está definido, considere a identidade f tal que af está definido, então $(af)b$ está definido e portanto $a(fb)$ está definido. Assim, fb está definido. \square

Observação 2.1.12. *Se um grupóide G tem só uma identidade, então para todo a e b em G , ab está sempre definido, e portanto, G é um grupo.*

Definição 2.1.13. *Chamaremos as identidades de um grupóide G de **vértices** de G . Seja a em G e e e f identidades tais que ea e af estão definidos. Dizemos que a é uma **seta** de e a f , e que e é o **vértice inicial** (ou, o **começo**) de a , e que f é o **vértice final** (ou simplesmente, **final**) de a . Denotamos o conjunto dos vértices do grupóide G por $V(G)$.*

Definição 2.1.14. *Seja V um conjunto qualquer.*

- (1) $D(V)$ será o grupóide cujo conjunto de vértices é V e tal que para cada v e w em V distintos, existe uma única seta de v a w , mas não existe seta de w a v .
- (2) $T(V)$ será o grupóide com conjunto de vértices igual a V e tal que para cada v e w em V existe uma única seta de v a w .

A multiplicação parcial definida sobre estes conjuntos é a justaposição de setas. $D(V)$ é chamado **grupóide discreto** sobre V e $T(V)$ é chamado o **grupóide árvore** sobre V .

Definição 2.1.15. Um subgrupóide H de um grupóide G é um subconjunto de G tal que

- (1) Se a e b estão em H com ab definido, então ab está em H .
- (2) Se $a \in H$, então $a^{-1} \in H$.

Observação 2.1.16. Seja H subgrupóide de G . Se a está em H e e e f são identidades tais que ea e af estão definidos, então e e f estão em H .

Demonstração. Como H é subgrupóide de G , então a^{-1} está em H . Portanto, aa^{-1} e $a^{-1}a$ estão em H . Assim e e f estão em H . \square

Exemplo 2.1.17.

- (i) Seja G um grupo, então todo subgrupo de G é também um subgrupóide.
- (ii) A interseção de qualquer coleção de subgrupóides de um grupóide é um subgrupóide.
- (iii) Para um conjunto V , o grupóide discreto $D(V)$ é um subgrupóide do grupóide árvore $T(V)$.

Definição 2.1.18. Seja G um grupóide e S um subconjunto de $V(G)$. Definamos G_S como sendo o conjunto das setas de G que começam e acabam em S . Então G_S é um subgrupóide chamado **subgrupóide completo** de G com conjunto de vértices S . Em particular, se $S = \{e\}$ escrevemos G_e em vez de $G_{\{e\}}$. Neste caso, G_e tem só uma identidade e portanto, G_e é um grupo (observação 2.1.12), que chamaremos grupo vértice de G em e .

Observação 2.1.19. *O conjunto G_S , como na definição 2.1.18, é de fato um subgrupóide de G .*

Demonstração. Claramente G_S é um subconjunto de G . Sejam a e b setas em G_S com ab definido. Então ab é uma seta que começa e acaba em S , portanto ab está em G_S . Além disso, a^{-1} também é uma seta que começa e acaba em S . \square

Seja G um grupóide e e e f em $V(G)$. Definimos uma relação \equiv em $V(G)$ por

$$e \equiv f \Leftrightarrow \text{existe uma seta em } G \text{ de } e \text{ a } f$$

Evidentemente, \equiv é uma relação de equivalência em $V(G)$. Vamos chamar as classes de equivalência de $V(G)$ sob \equiv **componentes de G** e denotaremos por $[v]$ a classe do vértice v em G .

Definição 2.1.20. *Seja G um grupóide.*

- (1) G é dito **conexo** se existe uma única componente de G .
- (2) G é chamado **totalmente desconexo** se cada componente consiste de um único vértice.

Exemplo 2.1.21. *Sendo V um conjunto não vazio, $T(V)$ é conexo e $D(V)$ é totalmente desconexo*

2.2 Homomorfismos de Grupóides

Considere um grupóide G e uma seta a em G começando em e e acabando em f . Defina $a_{\#} : G_e \rightarrow G_f$ por $a_{\#}(g) = a^{-1}ga$. $a_{\#}$ é um isomorfismo entre os grupos G_e e G_f que satisfaz:

- (1) Se b é outra seta em G começando em f e acabando em algum outro vértice de G , então $(ab)_{\#} = b_{\#} \circ a_{\#}$.
- (2) Se e é uma identidade de G , então $e_{\#}$ é o homomorfismo identidade de G_e .
- (3) $(a_{\#})^{-1} = (a^{-1})_{\#}$ é o homomorfismo inverso de $a_{\#}$.

Note que se c é uma seta em G_e , então $c_{\#}$ é a conjugação por c no grupo G_e . Segue que se b é uma seta em G de e a f , então $a_{\#}$ e $b_{\#}$ são homomorfismos conjugados. Isto é claro, pois para g em G_e

$$\begin{aligned} a_{\#}(g) &= a^{-1}ga \\ &= a^{-1}bb^{-1}gbb^{-1}a \\ &= (b^{-1}a)^{-1}b_{\#}(g)(b^{-1}a) \end{aligned}$$

Como $a_{\#}$ é um isomorfismo de grupos, segue a seguinte proposição.

Proposição 2.2.1. *Se e e f são vértices numa mesma componente, então G_e e G_f são isomorfos. Em particular, os grupos vértice de um grupóide conexo são isomorfos.*

Definição 2.2.2. *Sejam G e H grupóides e $\varphi : G \rightarrow H$ uma função. Dizemos que φ é um **homomorfismo de grupóides** (ou simplesmente, **homomorfismo**) se sempre que ab estiver definido então $\varphi(a)\varphi(b)$ está definido e vale $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$.*

Observação 2.2.3. *Seja $\varphi : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupóides. Se e é uma identidade em G então $\varphi(e)$ é uma identidade em H . Em particular, φ induz uma função de $V(G)$ em $V(H)$ que também será denotada por φ .*

Demonstração. Seja e uma identidade de G , logo, existe uma seta a em G tal que $ea = a$, e então, existe uma identidade f tal que $af = a$. Logo,

$$ee = aa^{-1}aa^{-1} = afa^{-1} = aa^{-1} = e$$

Portanto, ee está definido. Como φ é um homomorfismo, segue que $\varphi(e)\varphi(e)$ está definido e é igual a $\varphi(e)$. Da observação 2.1.10, $\varphi(e)$ é uma identidade. \square

Observação 2.2.4. *Se a é uma seta de e a f então $\varphi(a)$ é uma seta de $\varphi(e)$ a $\varphi(f)$ e $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$.*

Demonstração. Temos que $ea = a$ e $af = a$. Segue que $\varphi(e)\varphi(a) = \varphi(a)$ e $\varphi(a)\varphi(f) = \varphi(a)$. Como $\varphi(e)$ e $\varphi(f)$ são identidades segue que $\varphi(a)$ é uma seta de $\varphi(e)$ a $\varphi(f)$.

Como $aa^{-1} = e$, $a^{-1}a = f$ e φ é um homomorfismo, segue que $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = \varphi(e)$ e $\varphi(a^{-1})\varphi(a) = \varphi(f)$. Como o inverso é único, $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$. \square

2.3 Extensões de Homomorfismos

Agora passamos a estudar extensões de funções para homomorfismos de grupóides. Aprenderemos a estender homomorfismos de grupos para homomorfismos de grupóides. Faremos uma aplicação disto no estudo de push-out de grupóides (seção 2.4).

Observação 2.3.1. *Se V e W são conjuntos, então toda função de V a W induz homomorfismos de $D(V)$ em $D(W)$, e de $T(V)$ em $T(W)$.*

Demonstração. Para uma seta a de v a v em $D(V)$, escolha como imagem de a a única seta a' em $D(W)$ de $f(v)$ a $f(v)$. Para uma seta a de v a w em $T(V)$, escolha como imagem de a a única seta a' em $T(W)$ de $f(v)$ a $f(w)$. É fácil ver que isto define os homomorfismos procurados. \square

Proposição 2.3.2. *Seja G um grupóide e seja W um conjunto. Então, toda função $\varphi : V(G) \rightarrow W$ estende-se, de maneira única, a um homomorfismo $\phi : G \rightarrow T(W)$.*

Demonstração. Dados os vértices e e f em G , então $\varphi(e)$ e $\varphi(f)$ são vértices de $T(W)$. Portanto, para cada seta g em G de e a f , defina $\phi(g)$ como sendo a única seta em $T(W)$ de $\varphi(e)$ a $\varphi(f)$. Afirmamos que ϕ assim definida é um homomorfismo de grupóides. De fato, sejam a e b setas em G tal que ab é definido. Existem vértices e , f e d tais que ea , af , fb e bd estão definidos (pela observação 2.1.11). Logo, $\phi(a)$ é a única seta em $T(W)$ de $\varphi(e)$ a $\varphi(f)$ e $\phi(b)$ é única seta em $T(W)$ de $\varphi(f)$ a $\varphi(d)$. Logo, $\phi(a)\phi(b)$ e $\phi(f)\phi(b)$ estão definidos. Como $\varphi(f)$ é um vértice, segue que $\phi(a)\phi(b)$ está definido e além disso, $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$ pois $\phi(a)\phi(b)$ é uma seta em $T(W)$ de $\varphi(e)$ a $\varphi(d)$. \square

A demonstração da seguinte proposição é análoga à anterior.

Proposição 2.3.3. *Seja G um grupóide e seja W um conjunto. Toda aplicação $\psi : W \rightarrow V(G)$ se estende, de maneira única, a um homomorfismo $\Psi : D(W) \rightarrow G$.*

Proposição 2.3.4. *Sejam G e H grupóides e seja S um subconjunto de $V(G)$. Então todo homomorfismo $\psi : G_S \rightarrow H$ se estende (de maneira não necessariamente única) a um homomorfismo $\Psi : G \rightarrow H$.*

Demonstração. Para cada vértice u de G tal que $[u] \cap S \neq \emptyset$ escolha uma seta fixa x_u de algum ponto de S a u , e se u está em S escolha x_u sendo uma identidade.

Seja g uma seta em G de um vértice v a um vértice w (caso exista). Se $[v]$ intercepta S então $[w]$ também intercepta S e portanto, $x_v g$ e $g x_w^{-1}$ estão definidos e assim $x_v g x_w^{-1}$ também está definido e está em G_S . Defina então $\Psi(g) = \psi(x_v g x_w^{-1})$. Escolha h em $V(H)$ fixo, se $[v] \cap S = \emptyset$, defina $\Psi(g) = h$. Isto implica $\Psi(v) = \Psi(w) = h$. Evidentemente, Ψ estende ψ pois dada uma seta g em G_S de e a f , então $x_e = e$ e $x_f = f$. Assim, $\Psi(g) = \psi(g)$.

Para mostrar que Ψ é um homomorfismo suponha que a e b são setas em G tais que ab está definido. Então, existem vértices e, f e d tais que ea, af, fb e bd estão definidos. Suponha que $[e]$ intercepta S , logo, $x_e a x_f^{-1}$ e $x_f b x_d^{-1}$ estão em G_S , e portanto, $\psi(x_e a x_f^{-1}) \psi(x_f b x_d^{-1})$ está definido pois ψ é um homomorfismo. Segue que $\Psi(a) \Psi(b)$ está definido e é igual a $\Psi(ab)$. O caso em que $[e]$ não intercepta S é trivial. Portanto, Ψ é um homomorfismo. \square

Observação 2.3.5. *Na proposição anterior, a extensão do homomorfismo ψ não é única pois podem existir varias setas começando em S chegando em algum vértice v de G , aliás, uma vez feita a escolha das setas x_v e de h em $V(H)$, a extensão Ψ fica unicamente determinada.*

2.4 Push-Out de Grupóides

Definição 2.4.1. *Sejam G_0, G_1 e G_2 grupóides e $i_1 : G_0 \rightarrow G_1$ e $i_2 : G_0 \rightarrow G_2$ homomorfismos. Suponha que existe um grupóide G e homomorfismos $j_1 : G_1 \rightarrow G$ e $j_2 : G_2 \rightarrow G$. O trio (G, j_1, j_2) é chamado **push-out** de (i_1, i_2) se as seguintes condições se verificam:*

$$(1) \quad j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2.$$

(2) *Para qualquer grupóide H e homomorfismos $\varphi_1 : G_1 \rightarrow H$ e $\varphi_2 : G_2 \rightarrow H$ tais que $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2$, existe um único homomorfismo $\varphi : G \rightarrow H$ tal que $\varphi_1 = \varphi \circ j_1$ e $\varphi_2 = \varphi \circ j_2$.*

Note que, no caso de um push-out, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_0 & & \\
 & i_1 \swarrow & & \searrow i_2 & \\
 G_1 & & G & & G_2 \\
 & j_1 \rightarrow & & \leftarrow j_2 & \\
 & \searrow \varphi_1 & \downarrow \exists! \varphi & \swarrow \varphi_2 & \\
 & & H & &
 \end{array} \tag{2.4.1}$$

O diagrama (2.4.1) é chamado **diagrama push-out de grupóides**.

Observação 2.4.2. O trio (G, j_1, j_2) é único a menos de isomorfismo.

A demonstração da observação 2.4.2 é igual à demonstração da observação 1.5.2.

Observação 2.4.3. Um push-out de grupóides no qual os grupóides são grupos, é um push-out de grupos. Por outro lado, todo push-out de grupos é um push-out de grupóides.

Por conveniência, dado um grupóide N com pelo menos dois vértices a e b , denotaremos por N_{ab} o conjunto das setas em N de a a b .

Observação 2.4.4. Seja N um grupóide conexo com $V(N) = \{a, b\}$. Dada uma seta u em N de a a b fixa, temos

$$\begin{aligned}
 N_{ab} &= \{nu : n \in N_a\} \\
 N_{ba} &= \{u^{-1}n : n \in N_a\} \\
 N_b &= \{u^{-1}nu : n \in N_a\}
 \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Demonstração. Basta observar que

- (i) Se n está em N_{ab} então $n = nu^{-1}u$.
- (ii) Se n está em N_{ba} então $n = u^{-1}un$.
- (iii) Se n está em N_b então $n = u^{-1}unu^{-1}u$.

□

Definição 2.4.5. Nas condições da observação 2.4.4, diremos que N_{ab} , N_{ba} e N_b são definidos em função de N_a e da seta u .

Os push-out de importância para nós têm a propriedade adicional

$$V(G_0) = V(G_1) \cap V(G_2) \text{ e } V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$$

e os homomorfismos serão as extensões das inclusões destes conjuntos nos outros. Push-out's com esta propriedade são chamados **push-out's ponteados**.

A seguinte proposição é usada frequentemente nos exemplos posteriores.

Proposição 2.4.6. *Seja N um grupóide conexo com $V(N) = \{a, b\}$. Seja M outro grupóide conexo e $\psi : N_a \rightarrow M_{\psi(a)}$ um homomorfismo de grupos. Seja u uma seta em N de a a b . Se x for uma seta em M de $\psi(a)$ a um vértice y de M , então*

$$\Psi(n) = \begin{cases} \psi(n) & , \text{ se } n \in N_a \\ x & , \text{ se } n = u \end{cases} \quad (2.4.3)$$

define um homomorfismo $\Psi : N \rightarrow M$ que é único.

Demonstração. Para n em N_a defina

$$\begin{aligned} \Psi(nu) &= \psi(n)x \\ \Psi(u^{-1}n) &= x^{-1}\psi(n) \\ \Psi(u^{-1}nu) &= x^{-1}\psi(n)x \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Demonstraremos que Ψ é um homomorfismo. De fato, sejam m e n em N tal que mn está definido, isto é, existe um vértice entre eles. Portanto, ou ma e an estão definidos, ou mb e bn estão definidos. Faremos o caso ma e an definidos pois o caso mb e bn definidos é análogo. Suponha então, ma e an definidos.

- (1) Se m e n estão em N_a então $\Psi(m) = \psi(m)$ e $\Psi(n) = \psi(n)$, e portanto $\Psi(m)\Psi(n)$ está definido e é igual a $\Psi(mn)$.
- (2) Se m está em N_a e n está em N_{ab} , então $\Psi(m)$ está em $M_{\psi(a)}$ e $n = n'u$ para algum n' em N_a . Portanto, $\Psi(n) = \psi(n')x$ começa em $\psi(a)$. Portanto, $\Psi(m)\Psi(n)$ está definido e

$$\begin{aligned}
\Psi(m)\Psi(n) &= \psi(m)\psi(n')x \\
&= \psi(mn')x \\
&= \Psi(mn'u) \\
&= \Psi(mn)
\end{aligned}$$

(3) Se m está em N_{ba} e n está em N_{ab} então existem n' e n'' em N_a tais que $m = u^{-1}n'$ e $n = n''u$. Portanto, $\Psi(m)$ acaba em $\psi(a)$ e $\Psi(n)$ começa em $\psi(a)$. Logo, $\Psi(m)\Psi(n)$ está definido e

$$\begin{aligned}
\Psi(m)\Psi(n) &= x^{-1}\psi(n')\psi(n'')x \\
&= x^{-1}\psi(n'n'')x \\
&= \Psi(u^{-1}n'n''u) \\
&= \Psi(mn)
\end{aligned}$$

(4) Se m está em N_{ba} e n está em N_a , então existe n' em N_a tal que $m = u^{-1}n'$. Como $\Psi(m)$ acaba em $\psi(a)$, $\Psi(m)\Psi(n)$ está definido e

$$\begin{aligned}
\Psi(m)\Psi(n) &= x^{-1}\psi(n')\psi(n) \\
&= x^{-1}\psi(n'n) \\
&= \Psi(u^{-1}n'n) \\
&= \Psi(mn)
\end{aligned}$$

□

Daqui para a frente, vamos definir homomorfismos de grupóides como em (2.4.3) e (2.4.4), mas só escreveremos a forma (2.4.3).

A seguir, três exemplos que serão utilizados no capítulo 3.

Exemplo 2.4.7. *Seja G um grupóide conexo com $V(G) = \{a, b\}$. Considere os homomorfismos inclusão $i_1 : D(a, b) \rightarrow G$ e $i_2 : D(a, b) \rightarrow T(a, b)$. Então existe um grupóide H e homomorfismos $j_1 : G \rightarrow H$ e $j_2 : T(a, b) \rightarrow H$ tais que (H, j_1, j_2) é o push-out de*

(i_1, i_2) .

$$\begin{array}{ccc} D(a, b) & \xrightarrow{i_2} & T(a, b) \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j_2 \\ G & \xrightarrow{j_1} & H \end{array}$$

Demonstração. Seja x em $T(a, b)$ a seta de a a b e seja u em G uma seta de a a b fixa. Defina o grupóide H como segue:

- (1) $V(H) = \{a, b\}$
- (2) $H_a = G_a * \langle t \rangle$, com t de ordem infinita.
- (3) H_b, H_{ab} e H_{ba} são definidos em função de H_a e da seta u , como em (2.4.2).

A multiplicação parcial em H é dada pela juxtaposição de setas. Observe que G está incluído em H $G_a \subset G_b$ e G_b, G_{ab} e G_{ba} são definidos em função de G_a e u , como em (2.4.2).

Defina $j_1 : G \rightarrow H$ por $j_1(g) = g$. Defina $j_2 : T(a, b) \rightarrow H$ por $j_2(x) = tu$. É claro que $j_2(a) = a$ e $j_2(b) = b$.

Vamos mostrar que (H, j_1, j_2) é o push-out de (i_1, i_2) . Seja K um grupóide e sejam $\varphi : G \rightarrow K$ e $\psi : T(a, b) \rightarrow K$ homomorfismos tais que

$$D(a, b) \xrightarrow{i_1} G \xrightarrow{\varphi} K \quad \text{e} \quad D(a, b) \xrightarrow{i_2} T(a, b) \xrightarrow{\psi} K$$

são homomorfismos iguais. Portanto, $\varphi(a) = \psi(a)$ e $\varphi(b) = \psi(b)$. Escreva $k = \psi(x)$ correspondente à seta em K de $\varphi(a)$ a $\varphi(b)$.

Defina, estendendo de forma natural, o homomorfismo $\theta : H_a \rightarrow K_{\varphi(a)}$ por

$$\theta(g) = \begin{cases} \varphi(g) & , \text{ se } g \in G_a \\ k\varphi(u)^{-1} & , \text{ se } g = t \end{cases}$$

Defina $\theta(u) = \varphi(u)$. Pela proposição 2.4.6, θ é um homomorfismo. É evidente que

$\varphi = \theta \circ j_1$, pois G está incluído em H . Para provar que $\psi = \theta \circ j_2$, observe que

$$\begin{aligned}\theta(j_2(x)) &= \theta(tu) \\ &= k\varphi(u)^{-1}\varphi(u) \\ &= k\end{aligned}$$

Agora, provaremos que θ é único. Seja $\theta_1 : H \rightarrow K$ outro homomorfismo tal que $\varphi = \theta_1 \circ j_1$ e $\psi = \theta_1 \circ j_2$. É claro que $\theta = \theta_1$ sobre G_a como subconjunto de H , pois $\theta_1 \circ j_1 = \theta \circ j_1$. Além disso,

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \theta_1(tu)\varphi(u)^{-1} \\ &= \theta_1(j_2(x))\varphi(u)^{-1} \\ &= \psi(x)\varphi(u)^{-1} \\ &= \theta(t)\end{aligned}$$

pois $\theta_1(u) = \varphi(u)$ e θ_1 é um homomorfismo. Segue então que $\theta = \theta_1$ sobre H_a , e pela proposição 2.4.6, $\theta = \theta_1$ sobre H . \square

O seguinte exemplo é uma generalização do exemplo anterior, e sua aplicação no capítulo 3 é muito importante.

Exemplo 2.4.8. *Sejam G e H grupóides com $V(G) = \{a, b\} = V(H)$. Suponha H conexo e considere K um grupóide desconexo com $V(K) = \{a, b\}$, $K_a = H_a$ e $K_b = H_b$. Seja $i_1 : K \rightarrow H$ o homomorfismo inclusão e $i_2 : K \rightarrow G$ um homomorfismo qualquer. Então existe um grupóide L e homomorfismos $j_1 : H \rightarrow L$ e $j_2 : G \rightarrow L$ tais que (L, j_1, j_2) é o push-out de (i_1, i_2)*

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i_1} & H \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G & \xrightarrow{j_2} & L \end{array}$$

Demonstração. Observe que o homomorfismo i_2 pode ser visto como dois homomorfismos $\alpha : H_a \rightarrow G_a$ e $\beta : H_b \rightarrow G_b$ pois K é desconexo. Como H é conexo, escolha uma seta u em H de a a b e defina $\beta' : H_a \rightarrow G_b$ por $\beta'(h) = \beta(u^{-1}hu)$.

Vamos construir L conexo e com $V(L) = \{a, b\}$. Portanto, uma vez determinado L_a , escolhemos uma seta x em L de a a b e definimos L_{ab} , L_{ba} e L_b em função de L_a e a seta x (como na observação 2.4.4).

Quando G for desconexo, definimos L_a como sendo o push-out dos homomorfismos α e β' .

$$\begin{array}{ccc} H_a & \xrightarrow{\alpha} & G_a \\ \beta' \downarrow & & \downarrow \lambda \\ G_b & \xrightarrow{\lambda'} & L_a \end{array}$$

Note que a existência dos homomorfismos λ e λ' está garantida pelo teorema 1.5.3.

Se G for conexo, escolhemos uma seta v em G de a a b e definimos $\beta'' : H_a \rightarrow G_a$ por $\beta''(h) = v\beta(u^{-1}hu)v^{-1}$. Definimos L_a sendo a (pseudo) extensão HNN de G_a associada aos subgrupos $\alpha(H_a)$ e $\beta''(H_a)$, isto é,

$$L_a = G_a * \langle t \rangle / \langle t^{-1}\beta''(h)t = \alpha(h) : h \in H_a \rangle \quad (2.4.5)$$

Seja M um grupóide qualquer e $\theta : H \rightarrow M$ e $\epsilon : G \rightarrow M$ homomorfismos tais que

$$K \xrightarrow{i_1} H \xrightarrow{\theta} M \quad \text{e} \quad K \xrightarrow{i_2} G \xrightarrow{\epsilon} M$$

são homomorfismos iguais, isto é, $\theta \circ i_1 = \epsilon \circ i_2$.

Suponha que G é desconexo. O homomorfismo ϵ , pode ser visto como dois homomorfismos $\varphi : G_a \rightarrow M_{\varphi(a)}$ e $\psi : G_b \rightarrow M_{\psi(b)}$. Note que $\theta = \varphi \circ \alpha$ sobre H_a e $\theta = \psi \circ \beta$ sobre H_b . Escreva $w = \theta(u)$. Para h em H_a temos

$$\begin{aligned} \psi(\beta'(h)) &= \psi(\beta(u^{-1}hu)) \\ &= \theta(u^{-1}hu) \\ &= w^{-1}\varphi(\alpha(h))w \end{aligned}$$

Portanto, $(w^{-1})_{\#} \circ \psi \circ \beta' = \varphi \circ \alpha$ sobre H_a .

$$\begin{array}{ccccc}
 H_a & \xrightarrow{\alpha} & G_a & & \\
 \beta' \downarrow & & \downarrow \lambda & \searrow \varphi & \\
 G_b & \xrightarrow{\lambda'} & L_a & \xrightarrow{\exists! \mu} & M_{\varphi(a)} \\
 & \searrow \psi & & \nearrow (w^{-1})_{\#} & \\
 & & & & M_{\psi(b)}
 \end{array} \tag{2.4.6}$$

Como (L_a, λ, λ') é o push-out de (α, β') , então existe um único homomorfismo $\mu : L_a \rightarrow M_{\varphi(a)}$ tal que $\varphi = \mu \circ \lambda$ e $(w^{-1})_{\#} \circ \psi = \mu \circ \lambda'$.

Defina

$$\xi : G \rightarrow L \text{ por } \xi(g) = \begin{cases} \lambda(g) & , \text{ se } g \in G_a \\ x_{\#}(\lambda'(g)) & , \text{ se } g \in G_b \end{cases}$$

e

$$\tau : H \rightarrow L \text{ por } \tau(h) = \begin{cases} \lambda(\alpha(h)) & , \text{ se } h \in H_a \\ x & , \text{ se } h = u \end{cases}$$

ξ é um homomorfismo, pois λ e $x_{\#} \circ \lambda'$ são homomorfismos, e τ é um homomorfismo pela proposição 2.4.6. Observe que ξ e τ não dependem de θ nem ϵ .

Estenda μ para o homomorfismo $\mu : L \rightarrow M$ por $\mu(x) = w$ (ver proposição 2.4.6). Afirmamos que (L, τ, ξ) é o push-out de (i_1, i_2) . De fato, para h em H_a arbitrário, temos

$$\begin{aligned}
 \xi(i_2(h)) &= \xi(\alpha(h)) \\
 &= \lambda(\alpha(h)) \\
 &= \tau(h) \\
 &= \tau(i_1(h))
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \xi(i_2(u^{-1}hu)) &= \xi(\beta(u^{-1}hu)) \\
 &= \xi(\beta'(h)) \\
 &= x_{\#}(\lambda'(\beta'(h))) \\
 &= x^{-1}\lambda(\alpha(h))x \\
 &= \tau(u^{-1}hu) \\
 &= \tau(i_1(u^{-1}hu))
 \end{aligned}$$

Portanto, $\tau \circ i_1 = \xi \circ i_2$. Para mostrar que $\theta = \mu \circ \tau$, basta considerar h em H_a e ver que

$$\begin{aligned}
 \mu(\tau(h)) &= \mu(\lambda(\alpha(h))) \\
 &= \varphi(\alpha(h)) \\
 &= \theta(h)
 \end{aligned}$$

e que $\mu(\tau(u)) = \mu(x) = \theta(u)$, e aplicar a proposição 2.4.6. Agora, mostraremos que $\epsilon = \mu \circ \xi$. Seja g em G_a , então

$$\begin{aligned}
 \mu(\xi(g)) &= \mu(\lambda(g)) \\
 &= \varphi(g) \\
 &= \epsilon(g)
 \end{aligned}$$

Seja g em G_b , então

$$\begin{aligned}
 \mu(\xi(g)) &= \mu(x^{-1}\lambda'(g)x) \\
 &= w^{-1}\mu(\lambda'(g))w \\
 &= w^{-1}(w^{-1})_{\#}(\psi(g))w \\
 &= \psi(g) \\
 &= \epsilon(g)
 \end{aligned}$$

Finalmente, mostraremos que μ é único. Seja $\mu_1 : L \rightarrow M$ um homomorfismo tal que

$\mu_1 \circ \tau = \theta$ e $\mu_1 \circ \xi = \epsilon$. Observe que para g em G_a temos

$$\begin{aligned}\mu_1(\lambda(g)) &= \mu_1(\xi(g)) \\ &= \epsilon(g) \\ &= \varphi(g)\end{aligned}$$

e que para g em G_b temos

$$\begin{aligned}\mu_1(\lambda'(g)) &= \mu_1(xx_{\#}(\lambda'(g))x^{-1}) \\ &= \mu_1(x)\mu_1(\xi(g))\mu_1(x)^{-1} \\ &= \mu_1(\tau(u))\epsilon(g)\mu_1(\tau(g))^{-1} \\ &= w\psi(g)w^{-1} \\ &= (w^{-1})_{\#}(\psi(g))\end{aligned}$$

Portanto, $\mu_1 = \mu$ sobre L_a . Além disso, $\mu_1(x) = \mu(x) = w$, pela proposição 2.4.6, $\mu_1 = \mu$ em L .

Agora, suponha G conexo. Escolha uma seta v em G de a a b , e defina $\beta'' : H_a \rightarrow G_a$ por $\beta''(h) = v\beta'(h)v^{-1}$. Agora o homomorfismo $\epsilon : G \rightarrow M$ é definido por um homomorfismo $\varphi : G_a \rightarrow M_{\varphi(a)}$ e um elemento $y = \epsilon(v)$ em $M_{\varphi(a)\theta(b)}$. Assim, ϵ fica definido em G como em (2.4.4) (ver proposição 2.4.6). Usando que $\epsilon \circ i_1 = \theta \circ i_2$, temos para h em H_a

$$\begin{aligned}\theta(u^{-1}hu) &= \epsilon(\beta(u^{-1}hu)) \\ &= y^{-1}\epsilon(\beta''(h))y \\ &= y^{-1}\varphi(\beta''(h))y\end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(\alpha(h)) = (yw^{-1})^{-1}\varphi(\beta''(h))(yw^{-1})$, para todo h em H_a . Pela propriedade universal das extensões HNN (proposição 1.5.9), existe um único homomorfismo $\mu : L_a \rightarrow M_{\varphi(a)}$ tal que $\mu \circ j = \varphi$ e $\mu(t) = yw^{-1}$, onde $j : G_a \rightarrow L_a$ é o homomorfismo

induzido pela inclusão $G_a \hookrightarrow G_a * \langle t \rangle$.

$$\begin{array}{ccc} G_a & \xrightarrow{\varphi} & M_{\varphi(a)} \\ j \downarrow & \nearrow \exists! \mu & \\ L_a & & \end{array}$$

Estenda μ a um homomorfismo $\mu : L \rightarrow M$ por $\mu(x) = w$ (isto está garantido pela proposição 2.4.6). Considere os homomorfismos

$$\xi : G \rightarrow L \text{ definido por } \xi(g) = \begin{cases} j(g) & , \text{ se } g \in G_a \\ tx & , \text{ se } g = v \end{cases}$$

e

$$\tau : H \rightarrow L \text{ definido por } \tau(h) = \begin{cases} j(\alpha(h)) & , \text{ se } h \in H_a \\ x & , \text{ se } h = u \end{cases}$$

ξ e τ são homomorfismos pela proposição 2.4.6, e não dependem de θ nem ϵ . Afirmamos que (L, τ, ξ) é o push-out de (i_1, i_2) . De fato, se h está em H_a

$$\begin{aligned} \tau(i_1(h)) &= \tau(h) \\ &= j(\alpha(h)) \\ &= \xi(\alpha(h)) \\ &= \xi(i_2(h)) \end{aligned}$$

e se h está em H_b , existe h' em H_a tal que $h = u^{-1}h'u$ em H , assim

$$\begin{aligned}
\tau(i_1(h)) &= \tau(h) \\
&= \tau(u^{-1}h'u) \\
&= x^{-1}j(\alpha(h'))x \\
&= x^{-1}t^{-1}j(\beta''(h'))tx \\
&= \xi(v^{-1}\beta''(h')v) \\
&= \xi(\beta(u^{-1}h'u)) \\
&= \xi(\beta(h)) \\
&= \xi(i_2(h))
\end{aligned}$$

Portanto, $\tau \circ i_1 = \xi \circ i_2$.

Para mostrar que $\theta = \mu \circ \tau$, considere h em H_a e observe que

$$\mu(\tau(h)) = \mu(j(\alpha(h))) = \varphi(\alpha(h)) = \theta(h)$$

e $\mu(\tau(u)) = \mu(x) = \theta(u)$. De maneira análoga, para mostrar que $\epsilon = \mu \circ \xi$, observe que dado g em G_a , temos

$$\mu(\xi(g)) = \mu(j(g)) = \varphi(g) = \epsilon(g)$$

e $\mu(\xi(v)) = \mu(tx) = y = \epsilon(v)$.

Agora, demonstraremos que o homomorfismo μ é único. Suponha exista um homomorfismo $\mu_1 : L \rightarrow M$ tal que $\mu_1 \circ \tau = \theta$ e $\mu_1 \circ \xi = \epsilon$. Observe que para g em G_a , como subconjunto de L , temos

$$\mu(g) = \mu(j(g)) = \varphi(g) = \epsilon(g) = \mu_1(\xi(g)) = \mu_1(j(g)) = \mu_1(j(g)) = \mu_1(g)$$

e

$$\mu(t) = yw^{-1} = \mu_1(\xi(v))\mu_1(\tau(u))^{-1} = \mu_1(tx)\mu_1(x)^{-1} = \mu_1(t)$$

Portanto, $\mu = \mu_1$ sobre L_a . É fácil ver que $\mu(x) = \mu_1(x)$, assim, $\mu = \mu_1$ sobre L (proposição 2.4.6). \square

O seguinte exemplo é usado para obter um corolário do Teorema de Seifert-Van Kampen que será de muita importância devido a suas aplicações.

Exemplo 2.4.9. *Suponha que temos um push-out pontado de grupóides*

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ G_2 & \xrightarrow{j_2} & G_3 \end{array}$$

isto é, $V(G_0) = V(G_1) \cap V(G_2)$, $V(G_3) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e, i_1 , i_2 , j_1 e j_2 são os homorfismos inclusão. Seja $S_3 \subset V(G_3)$. Para $r = 0, 1, 2$, seja $S_r = S_3 \cap V(G_r)$ e suponha que S_r intercepta a cada componente de G_r . Para $r = 0, 1, 2, 3$, seja $H_r = (G_r)_{S_r}$, então temos o quadrado push-out

$$\begin{array}{ccc} H_0 & \xrightarrow{i_1} & H_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ H_2 & \xrightarrow{j_2} & H_3 \end{array}$$

Supondo, além das hipóteses anteriores, que G_r é conexo para $r = 0, 1, 2$, (portanto, G_3 é conexo também), e dado a em $V(G_0)$, temos um quadrado push-out de grupos

$$\begin{array}{ccc} (G_0)_a & \xrightarrow{i_1} & (G_1)_a \\ i_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ (G_2)_a & \xrightarrow{j_2} & (G_3)_a \end{array}$$

Demonstração. Seja H um grupóide e para $r = 1, 2$, considere homomorfismos

$\varphi_r : H_r \rightarrow H$ tais que $\varphi_1 \circ i_1 = \varphi_2 \circ i_2$.

$$\begin{array}{ccccc} & & H_0 & & \\ & i_2 \swarrow & & \searrow i_1 & \\ H_2 & \xrightarrow{j_2} & H_3 & \xleftarrow{j_1} & H_1 \\ & \searrow \varphi_2 & & \swarrow \varphi_1 & \\ & & H & & \end{array}$$

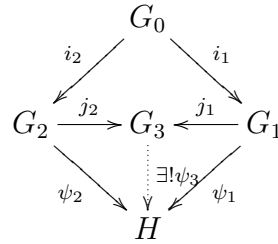
Vamos estender os homomorfismos φ_1 e φ_2 de maneira adequada para homomorfismos

$\psi_1 : G_1 \rightarrow H$ e $\psi_2 : G_2 \rightarrow H$ tais que $\psi_1 \circ i_1 = \psi_2 \circ i_2$. Para cada vértice v em G_r escolha uma seta x_{rv} saindo de S_r e chegando em v , e se v está em S_r escolha $x_{rv} = v$, para $r = 1, 2$. A existência de x_{rv} está garantida, pois S_r intercepta a cada componente de G_r .

Dado v em $V(G_0)$, considere a seta x_{0v} em G_0 de algum ponto de S_0 a v . Para $r = 1, 2$, escreva $x_{rv} = i_r(x_{0v})$ em G_r , e defina para uma seta g em G_r de a a b a função

$$\psi_r(g) = \begin{cases} \varphi_r(x_{ra}gx_{rb}^{-1}) & , \text{ se } a, b \notin S_r \\ \varphi_r(x_{ra}g) & , \text{ se } a \notin S_r, b \in S_r \\ \varphi_r(gx_{rb}^{-1}) & , \text{ se } a \in S_r, b \notin S_r \\ \varphi_r(g) & , \text{ se } a, b \in S_r \end{cases}$$

Pela proposição 2.3.4, ψ_r é um homomorfismo, para $r = 1, 2$. Além disso, pela definição de ψ_r e a escolha das setas x_{rv} , é fácil ver que $\psi_1 \circ i_1 = \psi_2 \circ i_2$.



Como (G, j_1, j_2) é o push-out de (i_1, i_2) , existe um único homomorfismo $\psi_3 : G_3 \rightarrow H$ tal que $\psi_3 \circ j_1 = \psi_1$ e $\psi_3 \circ j_2 = \psi_2$. Considere o homomorfismo $\varphi_3 = \psi_3|_{H_3}$, então, é claro que $\varphi_3 \circ j_1 = \varphi_1$ e $\varphi_3 \circ j_2 = \varphi_2$.

Queremos provar que φ_3 é único. Seja $\varphi : H_3 \rightarrow H$ um homomorfismo tal que $\varphi \circ j_1 = \varphi_1$ e $\varphi \circ j_2 = \varphi_2$. Estenda φ para o homomorfismo $\psi : G_3 \rightarrow H$, definindo para uma seta g em G_3 de a a b

$$\psi(g) = \begin{cases} \varphi(x_{3a}gx_{3b}^{-1}) & , \text{ se } a, b \notin S_3 \\ \varphi(x_{3a}g) & , \text{ se } a \notin S_3, b \in S_3 \\ \varphi(gx_{3b}^{-1}) & , \text{ se } a \in S_3, b \notin S_3 \\ \varphi(g) & , \text{ se } a, b \in S_3 \end{cases}$$

onde $x_{3v} = j_r(x_{rv})$ para cada vértice v em $V(G_3)$ e $r = 1, 2$. É fácil ver que $\psi \circ j_r = \psi_r$

para $r = 1, 2$, portanto, $\psi = \psi_3$. Segue que $\varphi_3 = \varphi$.

□

Elementos de Topologia e Topologia Algébrica

3.1 Topologia Fraca e Topologia Quociente

Lema 3.1.1 (Da Colagem).

(i) Sejam X e Y conjuntos. Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de subconjuntos de X tais que $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$. Seja $\{f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y/\alpha \in \Lambda\}$ uma família de funções tais que $f_\alpha|_{X_\alpha \cap X_\beta} = f_\beta|_{X_\alpha \cap X_\beta}$, para todo α e β em Λ . Então, existe uma única função $f : X \rightarrow Y$ tal que $f|_{X_\alpha} = f_\alpha$, para todo α em Λ .

(ii) Nas mesmas hipóteses de (i). Suponha que X e Y são espaços topológicos, e que f_α é contínua para todo α em Λ . Além disso, suponha que, ou existe um número finito de X_α 's e que são fechados em X , ou que cada X_α é aberto. Então $f : X \rightarrow Y$ como em (i), é contínua.

Definição 3.1.2. Seja $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma coleção de espaços topológicos de um conjunto X . Defina

$$\tau = \{A \subset X : A \cap X_\alpha \in \tau_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\} \quad (3.1.1)$$

τ é uma topologia sobre X chamada **topologia fraca** em X induzida por $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Na definição 3.1.2, se $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$, para todo α, β em Λ com $\alpha \neq \beta$, então o espaço X (com a topologia fraca) é conhecido como a **união disjunta** da família de espaços $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ e seria denotado por

$$X = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \quad (3.1.2)$$

Se, em vez de ter que a família $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ é disjunta, nós temos que $X_\alpha \cap X_\beta = \{p\}$ para algum ponto p em X e para todo α e β em Λ com $\alpha \neq \beta$, então X é dito ser **junção** da família de espaços $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ em p e é denotada por

$$X = \bigvee_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha \quad (3.1.3)$$

Definição 3.1.3. *Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ uma família de conjuntos qualquer. Considere o conjunto*

$$X = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \{\alpha\} \times X_\alpha \quad (3.1.4)$$

X é chamado **união disjunta livre** da família de conjuntos $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$.

Observação 3.1.4. *Podemos fornecer a uma união disjunta livre de conjuntos a topologia fraca, sempre que tais conjuntos sejam espaços topológicos. Neste caso, vamos nos referir ao espaço como **espaço da união disjunta livre**.*

Observação 3.1.5. *Na definição 3.1.2, um conjunto C é fechado em X com a topologia fraca τ se, e somente se, $C \cap X_\alpha$ é fechado em τ_α , para todo α em Λ . Em particular, se cada (X_α, τ_α) é uma espaço T_1 , então (X, τ) também é T_1 .*

Proposição 3.1.6. *Seja $X = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ com a topologia fraca e Y um espaço topológico qualquer. Então, uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua, se e somente se, $f|_{X_\alpha}$ é contínua com a topologia de X_α , para todo α em Λ .*

Definição 3.1.7. *Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação sobrejetora. Defina*

$$\tau_Y = \{B \subset Y : p^{-1}(B) \in \tau\} \quad (3.1.5)$$

τ_Y é uma topologia em Y chamada **topologia quociente** (ou da identificação) sobre Y induzida por p .

Definição 3.1.8. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função contínua e sobrejetora $p : X \rightarrow Y$ é chamada **aplicação de identificação** quando a topologia em Y é a topologia quociente induzida por p .*

Proposição 3.1.9. *Se $p : X \rightarrow Y$ é uma aplicação sobrejetora, contínua e aberta (ou fechada), então p é uma identificação.*

Seja X um espaço topológico e \equiv uma relação de equivalência em X . Seja Y o conjunto das classes de equivalência dos elementos de X sob a relação \equiv . Considere a aplicação natural $p : X \rightarrow Y$ definida por $p(x) = \bar{x}$, onde \bar{x} é a classe de equivalência de x . p é sobrejetora, portanto, podemos dar a Y a topologia quociente. Vamos denotar este espaço topológico por X/\equiv , e vamos chamá-lo de **espaço obtido de X por identificação dos pontos de cada classe de equivalência** sob \equiv .

Proposição 3.1.10. *Seja \equiv uma relação de equivalência sobre um conjunto X . Seja Z um conjunto qualquer e $f : X \rightarrow Z$ uma função contínua. Seja Y o conjunto quociente X/\equiv e seja $p : X \rightarrow Y$ a projeção natural.*

(i) *Então, existe uma função $g : Y \rightarrow Z$ tal que $f = g \circ p$ se, e somente se, $f(x_1) = f(x_2)$, sempre que $x_1 \equiv x_2$.*

(ii) *Sejam X e Z espaços topológicos e seja Y com a topologia da identificação. Seja g como em (i), então g é contínua se, e somente se, f é contínua.*

Proposição 3.1.11. *Seja X um espaço compacto e Y um espaço de Hausdorff. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua e bijetora então f é um homeomorfismo.*

Proposição 3.1.12. *Se X é compacto então X/\equiv é compacto.*

Proposição 3.1.13. *Seja X um espaço compacto e Y um espaço Hausdorff. Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Então Y tem a topologia da identificação.*

3.2 Adjuntando Espaços mediante Funções

Sejam X e Y espaços topológicos e A um sub-espaço de X . Seja $f : A \rightarrow Y$ uma função contínua. Construa o espaço, denotado por $Y \cup_f X$, a partir do espaço $X \dot{\cup} Y$

mediante uma identificação dos pontos a com $f(a)$, para todo a em A . O espaço $Y \cup_f X$ é chamado **espaço obtido adjuntando X a Y mediante f** . Observe que as classes de equivalência de $X \dot{\cup} Y$ sob esta identificação, são os conjuntos da forma

- $\{y\} \cup f^{-1}\{y\}$, para y em $f(A)$.
- $\{x\}$ quando x está em $(X \setminus A) \dot{\cup} (Y \setminus f(A))$

Vamosnos referir a estes conjuntos mediante algum representante, assim, escreveremos $\{y\} \cup f^{-1}\{y\}$ simplesmente por y ou, x , quando y for a imagem de x sob f , e x por $\{x\}$ quando x esteja em $(X \setminus A) \dot{\cup} (Y \setminus f(A))$.

Teorema 3.2.1. *Sejam X e Y espaços topológicos e A um sub-espaço de X . Seja $f : A \rightarrow Y$ uma função contínua e considere $\pi : X \dot{\cup} Y \rightarrow Y \cup_f X$ a projeção natural. Então, Y é mergulhado em $Y \cup_f X$ como um conjunto fechado, e X é mergulhado em $Y \cup_f X$ como um conjunto aberto.*

Proposição 3.2.2. *Seja $f : X \rightarrow Y$ a aplicação identificação de espaços topológicos. Seja Z um espaço localmente compacto. Então, $F : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ dada por $F(x, z) = (f(x), z)$ é uma identificação.*

A proposição 3.2.2 é importante para construir homotopias entre caminhos (ver definições 3.3.1 e 3.3.2) do espaço $Y \cup_f X$.

3.3 Caminhos e Homotopias

Definição 3.3.1. *Um caminho num espaço X é uma aplicação contínua $f : [0, 1] \rightarrow X$.*

(i) Se $f(t) = x_0$, para todo $t \in [0, 1]$, então chamamos a f **caminho constante** em x_0 . Neste caso denotaremos f por e_{x_0} .

(ii) Se $f(0) = a$ e $f(1) = b$, dizemos que f é um caminho de a até b , ou um caminho com **ponto inicial** a e com **ponto final** b , ou começando em a e terminando em b .

(iii) Se $f(0) = f(1) = a$, f é chamado **laço** em X baseado em a .

Definição 3.3.2. *Sejam $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ dois caminhos em X de a até b . Suponha que exista uma aplicação contínua $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que*

$$F(t, 0) = f(t) \quad , 0 \leq t \leq 1$$

$$F(t, 1) = g(t) \quad , 0 \leq t \leq 1$$

e

$$\left. \begin{array}{l} F(0, u) = a \\ F(1, u) = b \end{array} \right\} 0 \leq u \leq 1$$

então, dizemos que f é **homotópico por caminhos** a g . A aplicação F é chamada **homotopia por caminhos** entre f e g . Quando f for homotópico por caminhos a g , escreveremos $f \simeq g$.

Proposição 3.3.3. *Ser homotópico por caminhos é uma relação de equivalência.*

Vamos denotar a classe de homotopia de um caminho f em X por $[f]$, isto é,

$$[f] = \{g : g \text{ é um caminho em } X \text{ com } g \simeq f\} \quad (3.3.1)$$

Definição 3.3.4. *Sejam $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ caminhos num espaço X tais que $f(1) = g(0)$. Definimos o caminho $f * g : [0, 1] \rightarrow X$ por*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t - 1) & , \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

$f * g$ é chamado o **caminho produto** (ou simplesmente, **produto**) entre f e g . Dizemos que $f * g$ **está definido** sempre que $g(0) = f(1)$.

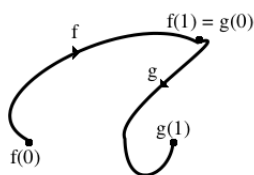


Figura 3.1: O caminho produto dos caminhos f e g .

Proposição 3.3.5. *O produto $*$ satisfaz*

(1) $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$, para caminhos f, g e h tais que $f * g$ e $g * h$ estejam definidos.

(2) $e_a * f \simeq f \simeq f * e_b$, quando f for um caminho de a até b .

Definição 3.3.6. *Seja $f : [0, 1] \rightarrow X$ um caminho de a até b . Definimos $\bar{f} : [0, 1] \rightarrow X$ por $\bar{f}(t) = f(1 - t)$. \bar{f} é chamado **caminho inverso** de f .*

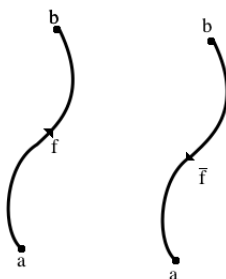


Figura 3.2: O caminho inverso de f .

Observação 3.3.7. *Sejam f e g caminhos tais que $f * g$ está definido, então $\overline{g * f}$ está definido e $\overline{f * g} = \overline{g} * \overline{f}$. Além disso, $\overline{\bar{f}} = f$.*

Lema 3.3.8. *Seja f um caminho de a até b . Então, $f * \bar{f} \simeq e_a$ e $\bar{f} * f \simeq e_b$*

Lema 3.3.9. *Sejam f, f', g e g' caminhos tais que $f * f'$ e $g * g'$ estão definidos. Se $f \simeq g$ e $f' \simeq g'$ então $f * f' \simeq g * g'$.*

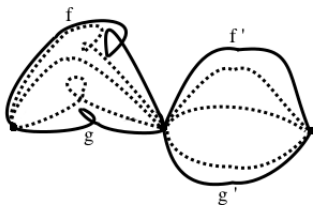


Figura 3.3: $f * f' \simeq g * g'$

3.4 O Grupóide Fundamental e o Grupo Fundamental

Já vimos que o conjunto dos caminhos num espaço topológico X pode ser dotado de uma multiplicação parcial, a saber, o produto $*$ de caminhos (ver definição 3.3.4). Sob esta multiplicação não há inversos. O máximo que podemos conseguir em X , é que para cada caminho f existe um caminho \bar{f} tal que $f * \bar{f}$ e $\bar{f} * f$ são homotópicos a caminhos constantes (lema 3.3.8). Isto sugere que $*$ induz uma multiplicação parcial sobre as classes de equivalência de caminhos em X que é associativa, tem identidades e inversos.

Denotemos por $\Upsilon(X)$ o conjunto de todas as classes de homotopia por caminhos de caminhos em X , isto é,

$$\Upsilon(X) = \{[f] : f : [0, 1] \rightarrow X \text{ é um caminho em } X\} \quad (3.4.1)$$

Dotemos $\Upsilon(X)$ de uma multiplicação parcial $*$ definida por $[f] * [g] = [f * g]$. Este produto está definido para aqueles caminhos tais que $f * g$ esteja definido. Então

(1) Se $([f] * [g]) * [h]$ ou $[f] * ([g] * [h])$ está definido, então o outro também está definido e são iguais. Além disso, se $[f] * [g]$ e $[g] * [h]$ estão definidos então $([f] * [g]) * [h]$ (e, $[f] * ([g] * [h])$) está definido.

(2) Sendo f um caminho de a até b temos

$$(2.1) \quad [e_a] * [f] = [f] \text{ e } [f] * [e_b] = [f] \text{ (ver proposição 3.3.5).}$$

$$(2.2) \quad [f] * [\bar{f}] = [e_a] \text{ e } [\bar{f}] * [f] = [e_b], \text{ ou seja, } [f]^{-1} = [\bar{f}] \text{ (ver lema 3.3.8).}$$

Portanto, $(\Upsilon(X), *)$ tem estrutura de grupóide, e é chamado **grupóide fundamental do espaço X** .

O conjunto dos vértices de $\Upsilon(X)$ é um subconjunto de $\Upsilon(X)$ em bijeção com X , é por isso que vamos considerar como conjunto de vértices de $\Upsilon(X)$ o próprio X . O grupo vértice de $\Upsilon(X)$ em um vértice a em X , é denotado por $\pi_1(X, a)$ e é chamado **grupo fundamental de X baseado em a** , e corresponde ao conjunto das classes de homotopia dos laços em X baseados em a , isto é,

$$\pi_1(X, a) = \{[f] : f : [0, 1] \rightarrow X \text{ é um laço em } X \text{ baseado em } a\} \quad (3.4.2)$$

As componentes do grupóide $\Upsilon(X)$ são as componentes conexas por caminhos de X . Em particular, X é conexo por caminhos, se e somente se, $\Upsilon(X)$ é um grupóide conexo.

Neste caso, $\pi_1(X, a)$ é isomorfo a $\pi_1(X, b)$ para todo a e b em X . De fato, seja λ um caminho em X de a até b . Definamos $\lambda_{\#} : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b)$ por $\lambda_{\#}[f] = [\bar{\lambda}] * [f] * [\lambda]$. É fácil ver que $\lambda_{\#}$ é um isomorfismo.

Quando X for conexo por caminhos, vamos denotar o grupo $\pi_1(X, a)$ simplesmente por $\pi_1(X)$, para todo a em X , pois este grupo não depende do ponto base.

Sejam X e Y espaços topológicos e $\varphi : X \rightarrow Y$ uma função contínua. Se f e g são caminhos homotópicos em X , então $\varphi \circ f$ e $\varphi \circ g$ são caminhos homotópicos em Y mediante a homotopia $\varphi \circ F$, onde F é uma homotopia entre f e g . Portanto, a aplicação $\varphi_* : \Upsilon(X) \rightarrow \Upsilon(Y)$ definida por $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$ está bem definida. É fácil ver que φ_* é um homomorfismo. φ_* é chamado **homomorfismo induzido por φ** . Note que se $\varphi(a) = b$, então φ_* induz um homomorfismo de $\pi_1(X, a)$ em $\pi_1(Y, b)$, que também denotaremos por φ_* .

Proposição 3.4.1.

(1) Sejam $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow Z$ funções contínuas. Então $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

(2) Seja $Id_X : X \rightarrow X$ a função identidade de X . Então $(Id_X)_* = Id_{\Upsilon(X)}$.

Corolário 3.4.2. Se X e Y são espaços homeomorfos então $\Upsilon(X)$ e $\Upsilon(Y)$ são grupóides isomorfos e, $\pi_1(X, a)$ e $\pi_1(Y, b)$ são grupos isomorfos, onde b é a imagem de a sob o homeomorfismo dado.

Proposição 3.4.3. Sejam X e Y espaços topológicos. Então, $\Upsilon(X \times Y)$ é isomorfo a $\Upsilon(X) \times \Upsilon(Y)$ e $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ é isomorfo a $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$.

Definição 3.4.4. Sejam φ e ψ aplicações contínuas de X em Y . Dizemos que φ é **homotópica** a ψ se existe uma aplicação contínua $\phi : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que

$$\left. \begin{array}{l} \phi(x, 0) = \varphi(x) \\ \phi(x, 1) = \psi(x) \end{array} \right\} \text{para todo } x \text{ em } X \quad (3.4.3)$$

Dizemos que ϕ é uma **homotopia** de φ a ψ e escrevemos $\varphi \simeq \psi$.

Proposição 3.4.5. Homotopia de aplicações contínuas de um espaço X num espaço Y é uma relação de equivalência.

Definição 3.4.6. *Sejam X e Y espaços topológicos. Seja C subconjunto de X e $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ funções contínuas. Se existir uma homotopia $\phi : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de φ a ψ tal que para todo $c \in C$ e $t \in [0, 1]$ temos*

$$\phi(c, t) = \varphi(c) = \psi(c) \quad (3.4.4)$$

então dizemos que φ e ψ são **homotópicas relativamente a C** , e escrevemos $\varphi \simeq \psi.\text{rel}C$. A aplicação ϕ é chamada **homotopia relativa a C** entre φ e ψ .

Definição 3.4.7. *Uma aplicação contínua $\varphi : X \rightarrow Y$ é chamada **equivalência de homotopia** entre os espaços X e Y , se existir uma aplicação contínua $\psi : Y \rightarrow X$ tal que $\psi \circ \varphi \simeq Id_X$ e $\varphi \circ \psi \simeq Id_Y$. Dizemos que o espaço X é **homotopicamente equivalente a Y** , e que ψ é **inversa homotópica** de φ .*

Observação 3.4.8. *Ser homotopicamente equivalente é uma relação de equivalência sobre os espaços topológicos.*

Observação 3.4.9. *Suponha que X é homotopicamente equivalente a Y . Então:*

(i) $\Upsilon(X)$ é isomorfo a $\Upsilon(Y)$.

(ii) Se X for conexo por caminhos, então Y é conexo por caminhos.

Definição 3.4.10. *Um espaço X é chamado **simplesmente conexo** se é conexo por caminhos e $\pi_1(X)$ é trivial.*

Seja X simplesmente conexo, então todo laço é homotópico ao laço constante, portanto, dois caminhos qualquer em X de a até b são homotópicos. Assim, existe uma única classe de homotopia de caminhos de a até b , para todo a e b em X . Em outras palavras, $\Upsilon(X)$ é o grupóide árvore sobre o conjunto de vértices X .

Definição 3.4.11. *Dizemos que um espaço X é **contrátil** a um ponto a , se existe uma aplicação contínua $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que*

$$\left. \begin{array}{l} F(x, 0) = x \\ F(x, 1) = a \end{array} \right\} \text{ para todo } x \text{ em } X \quad (3.4.5)$$

Proposição 3.4.12. *Seja X um espaço e a um ponto em X . São equivalentes:*

- (i) X é contrátil a a .
- (ii) A inclusão $\{a\} \rightarrow X$ e a aplicação trivial $X \rightarrow \{a\}$ são homotopicamente inversas.
- (iii) X é homotopicamente equivalente a $\{a\}$.

Observação 3.4.13. *Segue da proposição anterior, que um espaço topológico X contrátil a um ponto a , é simplesmente conexo.*

Definição 3.4.14. *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada um **mergulho** se $f : X \rightarrow f(X)$ é um homeomorfismo.*

Definição 3.4.15. *Sejam X e Y espaços topológicos. Sejam $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ mergulhos.*

- (i) Diremos que φ e ψ são **isotópicos** se existir um mergulho $F : X \times I \rightarrow Y \times I$ tal que

$$F(x, t) = (f(x, t), t), \text{ para } 0 \leq t \leq 1 \text{ e } x \in X$$

com $f(x, 0) = \varphi(x)$ e $f(x, 1) = \psi(x)$, para todo $x \in X$. F é chamada **isotopia** entre φ e ψ .

- (ii) Seja C um sub-espaço topológico de X . Diremos que φ e ψ são **isotópicos relativamente a C** se existir uma isotopia F entre φ e ψ tal que

$$F(c, t) = \varphi(c) = \psi(c), \text{ para todo } c \in C$$

- (iii) Diremos que φ e ψ são **ambiente isotópicos** se existir um mergulho

$H : Y \times I \rightarrow Y \times I$ com

$$H(y, t) = (h(y, t), t), \text{ para } 0 \leq t \leq 1 \text{ e } y \in Y$$

satisfazendo as seguintes condições:

(1) $\psi(x) = h(\varphi(x), 1)$, para todo $x \in X$

(2) $h(y, 0) = y$, para todo $y \in Y$.

H é chamada **isotopia ambiente**.

Proposição 3.4.16. *Isotopia de mergulhos de um espaço X num espaço Y é uma relação de equivalência.*

3.5 O Teorema de Seifert-Van Kampen

Teorema 3.5.1 (Seifert-Van Kampen). *Sejam X_1 e X_2 sub-espacos de um espaco X , e seja X a união dos interiores de X_1 e X_2 . Então, as inclusões induzem o diagrama push-out de grupóides*

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon(X_1 \cap X_2) & \longrightarrow & \Upsilon(X_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Upsilon(X_2) & \longrightarrow & \Upsilon(X) \end{array} \quad (3.5.1)$$

Usando o exemplo 2.4.9 do capítulo 2, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.5.2. *Com as mesmas hipóteses do teorema anterior, seja V um subconjunto de X tal que $V \cap X_1$, $V \cap X_2$ e $V \cap X_1 \cap X_2$ intercepta cada componente conexa por caminho de X_1 , X_2 e $X_1 \cap X_2$, respectivamente. Então, as inclusões induzem um diagrama push-out de grupóides*

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon(X_1 \cap X_2)_{V \cap X_1 \cap X_2} & \longrightarrow & \Upsilon(X_1)_{V \cap X_1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Upsilon(X_2)_{V \cap X_2} & \longrightarrow & \Upsilon(X)_V \end{array} \quad (3.5.2)$$

Corolário 3.5.3. *Nas mesmas hipóteses do teorema 3.5.1, suponha X_1 , X_2 e $X_1 \cap X_2$ conexos por caminhos e considere um ponto a em $X_1 \cap X_2$. Então as inclusões induzem um push-out de grupos*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_1 \cap X_2, a) & \longrightarrow & \pi_1(X_1, a) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X_2, a) & \longrightarrow & \pi_1(X, a) \end{array} \quad (3.5.3)$$

Exemplo 3.5.4. *Seja $X = S^1$, $a = (1,0)$ e $b = (-1,0)$. Seja $X_1 = S^1 \setminus \{(0,-1)\}$ e $X_2 = S^1 \setminus \{(0,1)\}$. Não é possível aplicar o corolário 3.5.3, pois $X_1 \cap X_2$ não é conexo por caminhos, não obstante, $X_1 \cap X_2$ consiste de duas componente conexas por caminhos contráteis, uma contendo a e a outra b . Além disso, X_1 e X_2 também são contráteis, portanto, $\Upsilon(X_1)_{\{a,b\}}$ e $\Upsilon(X_2)_{\{a,b\}}$ são grupóides árvore sobre o conjunto $\{a,b\}$, enquanto que $\Upsilon(X_1 \cap X_2)_{\{a,b\}}$ é o grupóide discreto sobre $\{a,b\}$. Segue do corolário 3.5.2, que as inclusões induzem um diagrama push-out de grupóides*

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon(X_1 \cap X_2)_{\{a,b\}} & \longrightarrow & \Upsilon(X_1)_{\{a,b\}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Upsilon(X_2)_{\{a,b\}} & \longrightarrow & \Upsilon(S^1)_{\{a,b\}} \end{array}$$

Finalmente, pelo exemplo 2.4.7 (ver demonstração), $\pi_1(S^1, a) = \langle t \rangle$, com t de ordem infinita.

Observação 3.5.5. *O homomorfismo induzido pela inclusão $A \hookrightarrow X$ não é sempre injetor.*

Demonstração. De fato, é fácil ver que $\pi_1(D^2) = \{0\}$, portanto, a inclusão $S^1 \hookrightarrow D^2$ induz o homomorfismo $\mathbb{Z} \rightarrow \{0\}$ o qual é claramente não injetor. \square

Definição 3.5.6. *Seja A um subespaço de um espaço topológico X .*

- (i) *A é chamado um **retrato** de X , se existe uma aplicação contínua $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$, para todo a em A . A aplicação r é chamada uma **retração**.*
- (ii) *A é chamado **retrato por deformação** de X , se $i \circ r \simeq Id_X$, onde $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão, e tal homotopia é relativa ao conjunto A ; isto é, existe uma homotopia $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$ entre $i \circ r$ e Id_X tal que*

$$F(a, t) = a, \text{ para todo } a \in A \text{ e } t \in [0, 1]$$

Observação 3.5.7. *Se A é um retrato de X mediante uma retração r , então $r \circ i = Id_A$, onde $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão.*

Proposição 3.5.8.

- (1) Se A é um retrato de X e a é um ponto de A , então a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ induz um monomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$.
- (2) Se A é um retrato por deformação de X e a é um ponto de A , então a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$.
- (3) Se A é um retrato por deformação de X então a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ induz um isomorfismo $i_* : \Upsilon(A) \rightarrow \Upsilon(X)$.

Proposição 3.5.9. *Seja X_1 e X_2 espaços qualquer. Seja A um retrato por deformação de X_2 e seja $f : A \rightarrow X_1$ uma aplicação contínua. Então X_1 é um retrato por deformação do espaço $X_1 \cup_f X_2$.*

Exemplo 3.5.10. *Seja X um espaço conexo por caminhos. Sejam A_1 e A_0 subespaços conexos por caminhos de X tais que existe um homeomorfismo $\varphi : A_0 \rightarrow A_1$. Considere o subespaço $A_0 \times \{0, 1\}$ de $A_0 \times [0, 1]$ e defina a função contínua $f : A_0 \times \{0, 1\} \rightarrow X$ por*

$$f(a, 0) = a \quad e \quad f(a, 1) = \varphi(a) \quad (3.5.4)$$

Seja

$$Y = X \cup_f (A_0 \times [0, 1]) \quad (3.5.5)$$

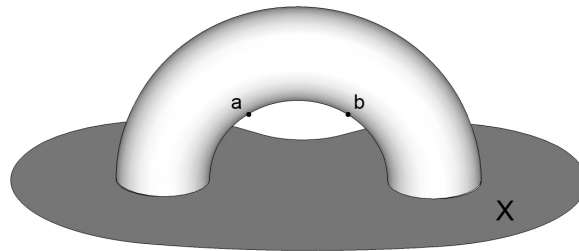


Figura 3.4: Espaço Y

Então,

$$\pi_1(Y) \simeq \pi_1(X) * \langle t \rangle / \langle t^{-1} a t = \varphi_*(a) : a \in \pi_1(A_0) \rangle^N \quad (3.5.6)$$

com t de ordem infinita e $N = \pi_1(X) * \langle t \rangle$.

Demonstração. Considere

$$Y_1 = A_0 \times (0, 1); \quad Y_2 = Y \setminus (A_0 \times \{\frac{1}{2}\}); \quad Y_0 = Y_1 \cap Y_2 \quad (3.5.7)$$

Com as notações do exemplo 2.4.8 temos

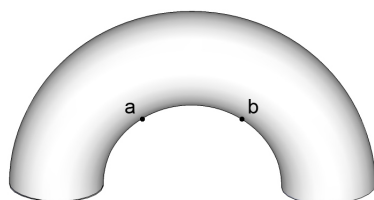


Figura 3.5: Espaço Y_1

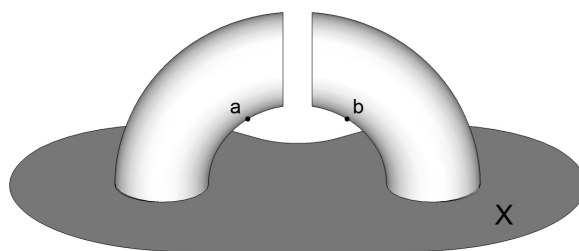


Figura 3.6: Espaço Y_2

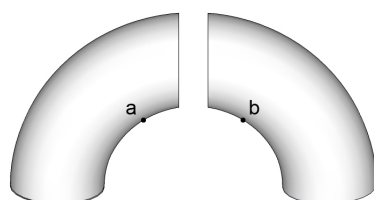


Figura 3.7: Espaço Y_0

(i) $a = (a_0, \frac{1}{3})$ e $b = (a_0, \frac{2}{3})$, com a_0 em A_0 .

(ii) $K = \Upsilon(Y_0)_{\{a,b\}}$, $H = \Upsilon(Y_1)_{\{a,b\}}$ e $G = \Upsilon(Y_2)_{\{a,b\}}$

Observe que $A_0 \dot{\cup} A_0$, A_0 e X são retratos por deformação de Y_0 , Y_1 e Y_2 , respectivamente. Portanto,

$$\Upsilon(Y_0) \simeq \Upsilon(A_0) \times \Upsilon(A_0); \quad \Upsilon(Y_1) \simeq \Upsilon(A_0); \quad \Upsilon(Y_2) \simeq \Upsilon(X) \quad (3.5.8)$$

Usando estas identificações temos que qualquer caminho em Y_1 de a até b é homotopicamente nulo em A_0 . Também, um caminho em Y_2 de a até b é homotópico a um caminho

X de a até $\varphi(a_0)$. Portanto, os homomorfismos α e β'' do exemplo 2.4.8 correspondem à identidade de $\pi_1(A_0)$ e φ_* , respectivamente. Portanto,

$$\pi_1(Y) \simeq \pi_1(X) * \langle t \rangle / \langle t^{-1}at = \varphi_*(a) : a \in \pi_1(A_0) \rangle^N$$

com t de ordem infinita e $N = \pi_1(X) * \langle t \rangle$. \square

Um caso particular do exemplo anterior é o seguinte.

Exemplo 3.5.11. *Seja X um espaço conexo por caminhos e $\varphi : X \rightarrow X$ um homeomorfismo. Considere o espaço*

$$Y = X \cup_f (X \times [0, 1])$$

onde $f : X \times \{0, 1\} \rightarrow X$ é definida por $f(x, 0) = x$ e $f(x, 1) = \varphi(x)$. Y também é conexo por caminhos. Então, pelo exemplo 3.5.10, temos (a extensão HNN)

$$\pi_1(Y) \simeq \pi_1(X) * \langle t \rangle / \langle t^{-1}at = \varphi_*(a) : a \in \pi_1(X) \rangle^N$$

com t de ordem infinita e $N = \pi_1(X) * \langle t \rangle$

3.6 Complexo CW

Nesta seção vamos apresentar as definições e propriedades básicas dos espaços chamados complexos CW.

Definição 3.6.1. *Um espaço C é chamado **n-célula**, se é homeomorfo ao interior do disco n -dimensional D^n . Vamos nos referir a um espaço por (simplesmente) **célula**, quando este for uma n -célula, para algum $n \geq 0$.*

Proposição 3.6.2. *Os conjuntos interiores de D^m e D^n são homeomorfos, se e somente se, $m = n$.*

Definição 3.6.3. *Dada uma n -célula, vamos chamar ao número n de **dimensão da célula**.*

Pela proposição 3.6.2, a dimensão de uma célula está bem definida.

Definição 3.6.4. Uma decomposição em células de um espaço X , é uma família

$$\mathfrak{S} = \{e_\alpha : e_\alpha \text{ é uma célula}, \alpha \in \Lambda\}$$

tal que

$$X = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Lambda} e_\alpha \quad (3.6.1)$$

O n -esqueleto de X associado à decomposição em células \mathfrak{S} , é o subespaço

$$X^n = \bigcup_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \dim(e_\alpha) \leq n}} e_\alpha \quad (3.6.2)$$

Definição 3.6.5. Seja X um espaço topológico de Hausdorff e \mathfrak{S} uma decomposição em células de X . O par (X, \mathfrak{S}) é chamado **complexo CW**, se as seguintes condições estão satisfeitas:

- (1) Para cada n -célula e_α em \mathfrak{S} , existe uma aplicação contínua $\phi_{e_\alpha} : D^n \rightarrow X$ que aplica a fronteira S^{n-1} em X^{n-1} e tal que sua restrição ao interior de D^n é um homeomorfismo cuja imagem é e_α .
- (2) Para toda célula e_α em \mathfrak{S} , o fecho $\overline{e_\alpha}$ intercepta um número finito de células em \mathfrak{S} .
- (3) Um subconjunto A de X é fechado, se e somente se, $A \cap \overline{e_\alpha}$ é fechado em X , para cada célula e_α em \mathfrak{S} .

Intuitivamente, um complexo CW é um espaço formado colando espaços homeomorfos a discos n dimensionais.

Tranças Geométricas de Artin e Enlaçamentos

4.1 Tranças Geométricas

Seja \mathbb{E}^3 o espaço euclidiano 3-dimensional. Identificamos \mathbb{E}^3 com \mathbb{R}^3 escolhendo um sistema de coordenadas (x, y, z) no qual o eixo Z aponta verticalmente para baixo (ver figura 4.1). Considere dois planos paralelos em \mathbb{E}^3 com a z -ésima coordenada constante, $z = z_0$ e $z = z_1$, com $z_0 < z_1$. Chamaremos ao plano $z = z_0$ **plano superior** e ao plano $z = z_1$ **plano inferior**. Considere n pontos P_1, \dots, P_n sobre uma reta no plano superior e projete-os ortogonalmente sobre o plano inferior, obtendo os pontos P'_1, \dots, P'_n .

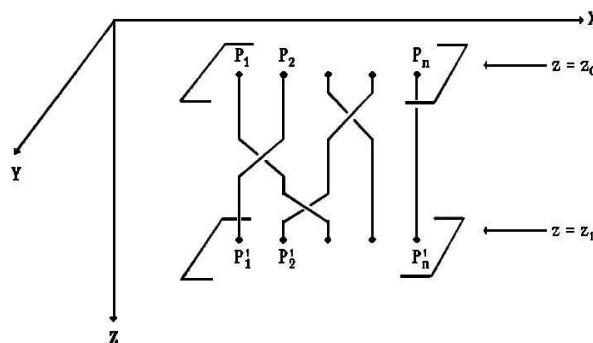


Figura 4.1: Uma trança geométrica em \mathbb{E}^3 .

Definição 4.1.1. *Uma trança geométrica de n-cordas (ou, n-trança) β é um sistema*

de arcos mergulhados $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ em \mathbb{E}^3 , onde o i -ésimo arco \mathcal{A}_i conecta o ponto P_i do plano superior ao ponto $P'_{\tau(i)}$ no plano inferior, para alguma permutação τ do conjunto $\{1, \dots, n\}$, satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Cada arco \mathcal{A}_i intercepta cada plano paralelo intermediário entre os planos superior e inferior exatamente uma vez;
- (ii) Os arcos $\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n\}$ interceptam cada plano paralelo intermediário entre os planos superior e inferior em exatamente n pontos distintos.

A permutação τ é chamada **permutação da trança**. O arco \mathcal{A}_i é chamado de **i -ésima corda da trança**.

Podemos pensar num arco em \mathbb{E}^3 como a imagem de um mergulho $\mathcal{A}_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$, onde $[0, 1]$ é o intervalo unitário. Usaremos a mesma notação para o arco e o mergulho correspondente.

É natural perguntar-se quando uma trança pode ser deformada em outra continuamente. Isto motiva a seguinte definição.

Definição 4.1.2. Duas n -tranças $\mathcal{A}^0 = \{\mathcal{A}_1^0, \dots, \mathcal{A}_n^0\}$ e $\mathcal{A}^1 = \{\mathcal{A}_1^1, \dots, \mathcal{A}_n^1\}$ com a mesma permutação τ são chamadas **equivalentes**, se existir uma homotopia através de tranças geométricas com permutação τ de \mathcal{A}^0 a \mathcal{A}^1 , em outras palavras, se existirem n aplicações contínuas

$$F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3, \quad 1 \leq i \leq n$$

satisfazendo

$$\left. \begin{array}{l} F_i(t, 0) = \mathcal{A}_i^0(t) \\ F_i(t, 1) = \mathcal{A}_i^1(t) \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.1.1)$$

e

$$\left. \begin{array}{l} F_i(0, s) = P_i \\ F_i(1, s) = P'_{\tau(i)} \end{array} \right\} 0 \leq s \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.1.2)$$

e tal que se definirmos $\mathcal{A}_i^s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ por $\mathcal{A}_i^s(t) = F_i(t, s)$, então $\mathcal{A}^s = \{\mathcal{A}_1^s, \dots, \mathcal{A}_n^s\}$ é uma n -trança geométrica (com permutação τ), para cada $0 \leq s \leq 1$.

Observação 4.1.3. Usaremos a mesma notação para uma trança e sua classe de equivalência.

Usando homotopia, se é necessário, podemos assumir que uma trança β consiste só de arcos poligonais e que os cruzamentos entre os arcos são transversais quando projetamos a trança sobre o plano em \mathbb{E}^3 contendo os pontos $P_1, \dots, P_n, P'_1, \dots, P'_n$. Uma tal projeção será chamada **projeção padrão** da n -trança β como se mostra na figura 4.2. Também podemos supor que o cruzamento dos arcos acontece em diferentes níveis e indicar quais cordas estão por cima e quais estão por baixo nos cruzamentos.

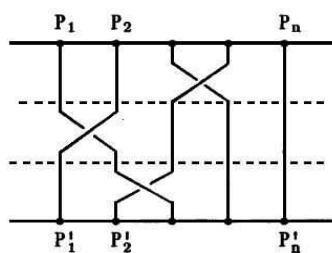


Figura 4.2: Projeção padrão de uma 5-trança

A figura 4.2 mostra um exemplo de como uma trança pode ser decomposta em tranças elementares definidas a seguir.

Definição 4.1.4. Para $1 \leq i \leq n - 1$, vamos denotar por σ_i a n -trança **geométrica elementar**, na qual a i -ésima corda cruza por cima a $(i + 1)$ -ésima corda uma única vez e todas as outras cordas vão do começo ao fim sem se cruzar.

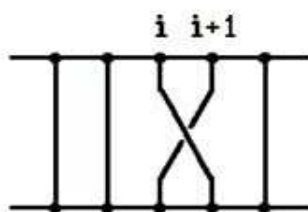


Figura 4.3: i -ésima trança elementar em B_n .

Seja B_n o conjunto das classes de equivalência de todas as tranças geométricas com n -cordas. Vamos dotar B_n de uma estrutura de grupo definindo uma multiplicação entre as n -tranças.

Sejam β_1 e β_2 duas n -tranças. Definimos o **produto** (composição) de β_1 com β_2 , denotado por $\beta_1 \cdot \beta_2$, como segue: primeiro, cole o plano inferior de β_1 com o plano superior de β_2 através dos n pontos de cada plano. Tire o plano mediante o qual as

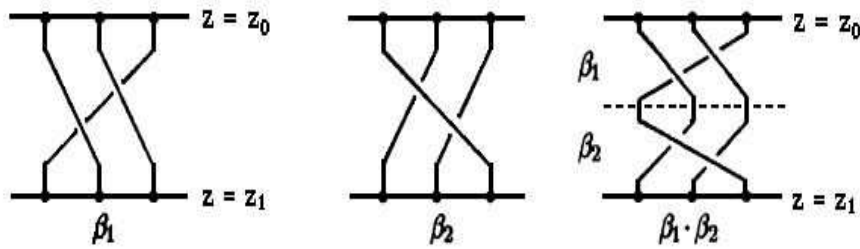


Figura 4.4: O produto de duas tranças.

tranças foram coladas e então comprima o sistema de arcos resultante até ficar entre os planos $z = z_0$ e $z = z_1$, obtendo assim a n -trança $\beta_1 \cdot \beta_2$ (veja figura 4.4).

Vamos demonstrar que o produto induzido por \cdot em B_n é um produto bem definido. Sejam $\beta_1, \beta_2, \beta'_1$ e β'_2 n -tranças geométricas tais que β_1 é equivalente a β'_1 e β_2 é equivalente a β'_2 . Afirmamos que o produto $\beta_1 \cdot \beta_2$ é equivalente ao produto $\beta'_1 \cdot \beta'_2$. De fato, seja τ a permutação associada a β_1 (e portanto, a β'_1) e sejam F_i e G_i , para $0 \leq i \leq n$, as homotopias requeridas entre os sistemas de cordas de β_1 e β'_1 , e de β_2 e β'_2 , respectivamente. Então, é claro que para $i = 1, \dots, n$, a aplicação $H_i : I \times I \rightarrow \mathbb{E}^3$ definida por

$$H_i(t, s) = \begin{cases} F_i(2t, s), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, s \in I \\ G_{\tau(i)}(2t - 1, s), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, s \in I \end{cases} \quad (4.1.3)$$

é parte das homotopias requeridas entre o sistema de cordas de $\beta_1 \cdot \beta_2$ e $\beta'_1 \cdot \beta'_2$. Portanto, o produto \cdot em B_n está bem definido.

A **n -trança trivial**, denotada por ϵ , é aquela n -trança na qual todas as cordas vão diretamente do plano superior em linha reta para o plano inferior sem cruzamentos. A projeção padrão de ϵ se mostra na figura 4.5. É fácil ver que a classe de equivalência de ϵ é o elemento neutro para o produto induzido em B_n .

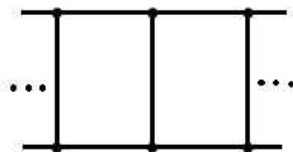
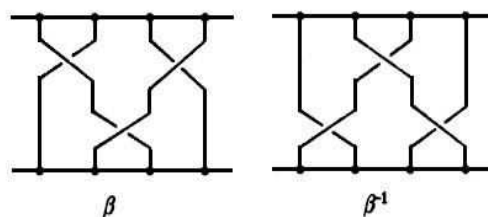


Figura 4.5: n -trança trivial.

A **trança inversa** de uma trança β , denotada por β^{-1} , é a imagem refletida num espelho da trança β , com respeito a um plano horizontal entre o plano superior e inferior, como mostra a figura 4.6.

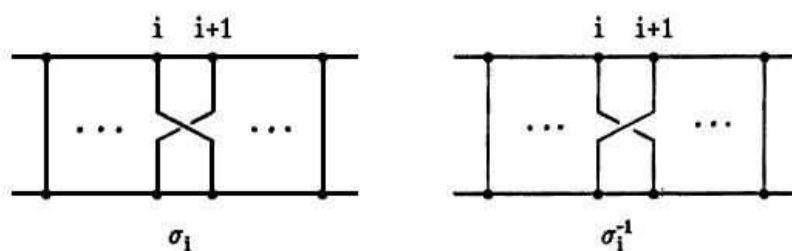
Figura 4.6: A n -trança inversa.

É claro que a classe de equivalência de β^{-1} está bem definida. De fato, suponha que F_i , para $i = 1, \dots, n$, compõem as homotopias requeridas entre os sistemas de cordas de duas n -tranças equivalentes dadas, com permutação associada τ . Então, para $i = 1, \dots, n$ a aplicação $G_i : I \times I \rightarrow \mathbb{E}^3$ definida por

$$G_i(t, s) = F_{\tau(i)}(1 - t, s) \quad (4.1.4)$$

compõe o conjunto de homotopias requeridas entre os sistemas de cordas das n -tranças inversas das n -tranças dadas. Além disso, as tranças produto $\beta \cdot \beta^{-1}$ e $\beta^{-1} \cdot \beta$ são homotópicas à trança trivial de n -cordas. Portanto, a classe de equivalência de β^{-1} é o elemento inverso em B_n da classe de equivalência da trança β .

Para uma n -trança elementar σ_i , com $1 \leq i \leq n - 1$, a trança inversa σ_i^{-1} é obtida fazendo-se com que a i -ésima corda passe por baixo da $(i + 1)$ -ésima corda em vez de por cima (veja figura 4.7).

Figura 4.7: As n -tranças σ_i e σ_i^{-1} .

Após as considerações acima, é fácil ver que (B_n, \cdot) tem estrutura de grupo. Este grupo será chamado **grupo de tranças de Artin com n -cordas**, ou simplesmente, **grupo de tranças de n -cordas**.

A figura 4.2 mostra uma 5-trança escrita como produto das tranças elementares σ_i e suas inversas (mais exatamente $\sigma_3^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2$).

É intuitivo que toda (classe de equivalência de uma) n -trança pode ser escrita como

produto de n -tranças elementares σ_i , para $0 < i \leq n - 1$, e suas n -tranças inversas σ_i^{-1} . Em outras palavras, as tranças elementares geram o grupo B_n .

Observemos algumas relações entre os elementos de B_n :

- Se $|i - j| > 1$ então a i -ésima e $(i + 1)$ -ésima corda não interferem com a j -ésima e $(j + 1)$ -ésima corda. Então, para $i, j \in \{1, \dots, n - 1\}$ temos a seguinte relação em B_n :

$$\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i, \quad |i - j| > 1 \quad (4.1.5)$$

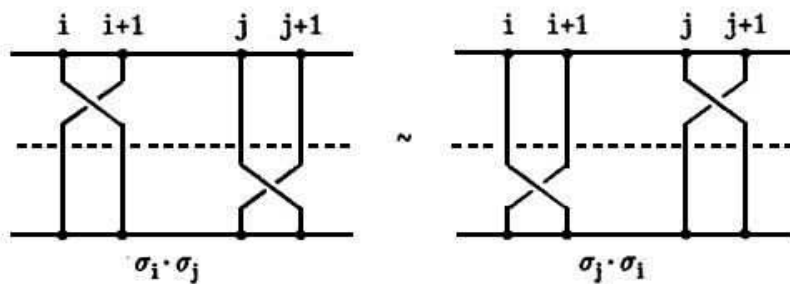


Figura 4.8: Relação em B_n .

- Observamos também que

$$\sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n - 2 \quad (4.1.6)$$

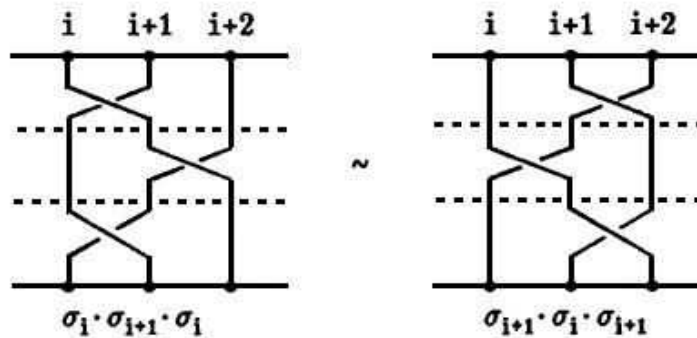


Figura 4.9: Relação em B_n .

Artin, no seu primeiro artigo sobre tranças de 1925, demonstrou que as relações (4.1.5) e (4.1.6) geram todas as relações entre os elementos de B_n . Isto não é trivial. A seguir enunciaremos o teorema de Artin, chamado *Teorema da Apresentação de Artin para o grupo Trança B_n* .

Teorema 4.1.5 (Da apresentação de Artin). *O grupo B_n das tranças geométricas com n -cordas admite uma apresentação com geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ e relações*

$$(1) \sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_j \cdot \sigma_i \text{ para } |i - j| > 1, \text{ com } i, j = 1, \dots, n - 1$$

$$(2) \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \text{ para } 1 \leq i \leq n - 2$$

4.2 Representação de Tranças por Automorfismos de Grupos Livres

O teorema a seguir foi provado por Artin em 1925 e foi um dos teoremas que deu início à teoria de representação de tranças.

Teorema 4.2.1 (Da Representação de Artin). *Seja \mathbb{F}_n um grupo livre com n geradores x_1, \dots, x_n , $n \geq 1$ fixo. Denote por $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ o conjunto dos automorfismos (à direita) de \mathbb{F}_n . Então B_n é isomorfo a um subgrupo de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ o qual consiste de todos os automorfismos $\bar{\beta}$ de \mathbb{F}_n tais que*

$$(1) (x_i)\bar{\beta} = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1}, \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

$$(2) (x_1 \dots x_n)\bar{\beta} = x_1 \dots x_n$$

onde τ é uma permutação em Σ_n e cada A_i é um elemento em \mathbb{F}_n .

Além disso, sob este isomorfismo a trança elementar σ_i , para $1 \leq i \leq n-1$, é associada ao automorfismo (à direita) $\bar{\sigma}_i$ de \mathbb{F}_n definido por

$$\bar{\sigma}_i : \begin{cases} x_i & \mapsto x_i x_{i+1} x_i^{-1} \\ x_{i+1} & \mapsto x_i \\ x_j & \mapsto x_j \end{cases}, \text{ para todo } j \neq i. \quad (4.2.1)$$

Para demonstrar este teorema se usa o seguinte lema.

Lema 4.2.2. *Suponha que ξ seja um endomorfismo (à direita) do grupo livre \mathbb{F}_n com n geradores x_1, \dots, x_n tal que*

$$(i) (x_i)\xi = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1} \text{ para } 1 \leq i \leq n$$

$$(ii) (x_1 \dots x_n)\xi = x_1 \dots x_n$$

para alguma permutação τ em Σ_n elementos A_i em \mathbb{F}_n , para $1 \leq i \leq n$. Então, existe uma única (classe de equivalência de uma) n -trança geométrica β em B_n tal que $\xi = \bar{\beta}$. Em particular, ξ é um automorfismo de \mathbb{F}_n .

Observação 4.2.3. O teorema 4.2.1 soluciona o problema de palavra em B_n , isto é, fornece um algoritmo para decidir quando um elemento em B_n representa o elemento identidade. Equivalentemente, obtemos um algoritmo para decidir quando duas tranças são equivalentes.

Usando o teorema anterior podemos dar uma nova interpretação geométrica do grupo de tranças B_n . Considere o disco unitário D^2 no plano \mathbb{E}^2 . A fronteira de D^2 é a circunferência unitária S^1 . Considere um conjunto de n pontos distintos e fixos $Q_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ no interior de D^2 . Escolha um ponto base q_0 em S^1 . Então o grupo livre em n geradores x_1, \dots, x_n pode ser identificado com o grupo fundamental de $D^2 \setminus Q_n$, isto é,

$$\mathbb{F}_n = \pi_1(D^2 \setminus Q_n, q_0) \quad (4.2.2)$$

onde cada gerador x_i é representado por um laço em D^2 baseado em q_0 o qual circula q_i no sentido anti-horário e evita os pontos q_j , para $j \neq i$, como mostra a figura 4.10.

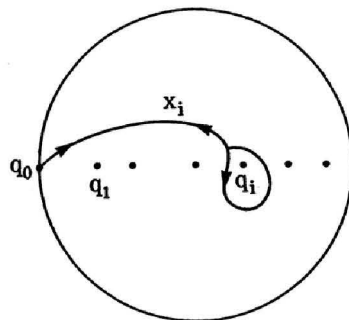
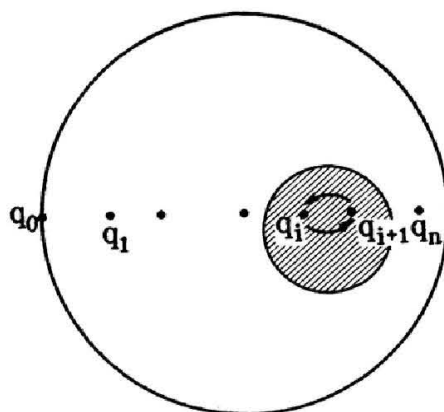


Figura 4.10: Laço representando o gerador x_i .

Seja $\mathcal{B}_n(D^2, S^1)$ o espaço dos homeomorfismos $h : D^2 \rightarrow D^2$ satisfazendo as seguintes condições:

- (1) Fixam S^1 ponto a ponto, isto é, $h(p) = p$, para todo p em S^1 .

Figura 4.11: O homeomorfismo h .

- (2) Permutam os pontos de Q_n entre si, isto é, existe uma permutação τ em Σ_n tal que $h(q_i) = q_{\tau(i)}$, para $i = 1, \dots, n$.

$\mathcal{B}_n(D^2, S^1)$ está dotado com a topologia compacto-aberta. Cada homeomorfismo $h : D^2 \rightarrow D^2$ em $\mathcal{B}_n(D^2, S^1)$ induz um automorfismo h_* de $\pi_1(D^2 \setminus Q_n, q_0)$, ou com a identificação feita, um automorfismo de \mathbb{F}_n .

Teorema 4.2.4. *O grupo de tranças B_n pode ser identificado com o grupo dos automorfismos de $\mathbb{F}_n = \pi_1(D^2 \setminus Q_n, q_0)$ induzidos pelos homeomorfismos $h \in \mathcal{B}_n(D^2, S^1)$.*

Com este teorema e outro teorema clássico de Alexander de 1923 (conhecido por o *Truque de Alexander*) é possível construir, de uma maneira diferente, uma n -trança geométrica.

Teorema 4.2.5 (O truque de Alexander). *Seja D^n a bola unitária no espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{E}^n e seja a $n - 1$ -esfera $S^{n-1} = \partial(D^n)$ sua fronteira. Então todo homeomorfismo $h : D^n \rightarrow D^n$, que fixa S^{n-1} ponto a ponto, é isotópico à aplicação identidade de D^n , sob uma isotopia que fixa S^{n-1} ponto a ponto. Se $h(0) = 0$, então a isotopia pode ser escolhida fixando 0 em D^n .*

Seja $h : D^n \rightarrow D^n$ um homeomorfismo em $\mathcal{B}_n(D^2, S^1)$. Pelo teorema anterior, existe uma aplicação contínua

$$H : D^2 \times I \longrightarrow D^2 \times I$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Para todo t em I , H aplica o nível $D^2 \times \{t\}$ homeomorficamente sobre si mesmo;

- (ii) Os subespaços $D^2 \times \{0\}$ e $S^1 \times I$ são fixados ponto a ponto;
- (iii) $H|_{D^2 \times \{1\}}$ define o homeomorfismo dado h em $\mathcal{B}_n(D^2, S^1)$.

A imagem de $Q_n \times I$ sob H é uma n -trança geométrica de B_n .

4.3 Construindo Enlaçamentos a partir de Tranças

Seja β uma trança geométrica em \mathbb{E}^3 . Colocamos a projeção padrão da trança β no plano \mathbb{E}^2 de forma horizontal.

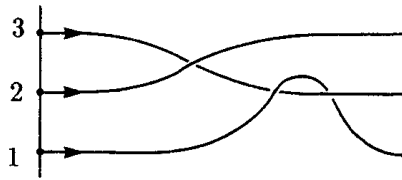


Figura 4.12: Projeção de uma 3-trança $\beta = \sigma_2 \sigma_1^2$.

Seja l um eixo vertical colocado atrás da trança β nesta nova projeção. Feche a trança β ao redor do eixo l identificando os pontos iniciais e finais da trança β . O resultado é chamado **fecho da trança** β .

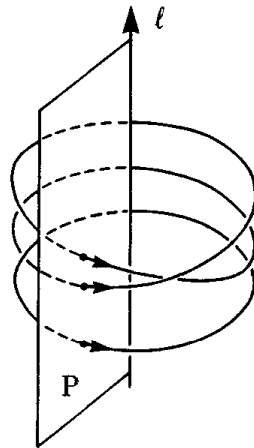


Figura 4.13: O fecho da trança β .

Dotamos às cordas da n -trança β de uma orientação tal que na projeção da trança o sentido é de esquerda a direita. Esta orientação das cordas induz uma orientação no fecho da trança β . Também dotamos o eixo l de uma orientação tal que quando um ponto se movimenta pelo fecho da trança em direção positiva, este gira ao redor do eixo l segundo a *regra da mão direita*. Reciprocamente, se tomarmos o fecho da trança β e fizermos um

corde ao longo de um semi-plano P determinado por l e esticamos o resultado, obtemos a n -trança β .

Definição 4.3.1. *Seja m um inteiro positivo. Um **enlaçamento** (ou **link**) de m componentes V em \mathbb{E}^3 é a união de m curvas poligonais, fechadas, simples, mutuamente disjuntas. V também será chamado m -enlaçamento. Quando $m = 1$, V é chamado **nó**. Cada curva poligonal fechada simples disjunta das outras curvas é chamada **componente** de V .*

Definição 4.3.2. *Os segmentos de reta do enlaçamento V são chamados **arestas** e seus pontos inicial e final são chamados **vértices**. Usaremos a notação $[ab]$ para denotar a aresta do enlaçamento V com vértices a e b ,*

Seja V um enlaçamento em \mathbb{E}^3 e seja $[ab]$ uma aresta de V . Seja c um ponto em \mathbb{E}^3 diferente de a e de b . Denote por $\Delta(a, b, c)$ o triângulo possivelmente degenerado com vértices a , b e c . Suponha que $\Delta(a, b, c)$ intercepta o enlaçamento V exatamente na aresta $[ab]$, isto é,

$$V \cap \Delta(a, b, c) = [ab]$$

Neste caso, dizemos que a **deformação elementar** $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ab}^c$ é aplicável a V , e construímos um novo enlaçamento, denotado por $\mathcal{E}_{ab}^c V$, e definido por

$$\mathcal{E}_{ab}^c = (V \setminus [ab]) \cup [ac] \cup [cb]$$

Em outras palavras, obtemos $\mathcal{E}_{ab}^c V$ por uma deformação de V ao longo de um triângulo $\Delta(a, b, c)$ removendo $[ab]$ e substituindo-o pelas arestas $[ac]$ e $[cb]$.

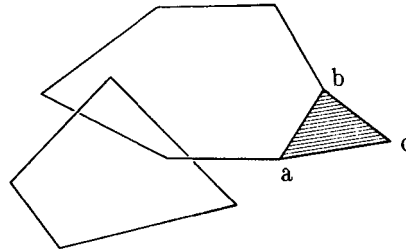


Figura 4.14: O enlaçamento $\mathcal{E}_{ab}^c V$.

Reciprocamente, se $[ac]$ e $[cb]$ são arestas consecutivas num enlaçamento V' em \mathbb{E}^3 tal que

$$V' \cap \Delta(a, b, c) = [ac] \cup [cb]$$

então podemos realizar a **deformação elementar inversa**, denotada por $\mathcal{E}^{-1} = (\mathcal{E}_{ab}^c)^{-1}$, sobre V' , substituindo as arestas $[ac]$ e $[cb]$ por $[ab]$

Como já foi indicado, nos referiremos a ambos \mathcal{E}_{ab}^c e sua inversa $(\mathcal{E}_{ab}^c)^{-1}$ como deformação elementar.

Definição 4.3.3. *Dois enlaçamentos V e V' em \mathbb{E}^3 são ditos serem **combinatoriamente equivalentes** se um deles pode ser transformado no outro mediante uma sequência finita de deformações elementares.*

Observação 4.3.4. *Dois enlaçamentos V e V' em \mathbb{E}^3 são combinatorialmente equivalentes se, e somente se, são isotópicos ambiente em \mathbb{E}^3 , isto é, existe uma família contínua de homeomorfismos $h_t : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$ sobre \mathbb{E}^3 , com $0 \leq t \leq 1$, tal que $h_0 = Id_{\mathbb{E}^3}$ é a aplicação identidade e tal que $h_1(V) = V'$.*

Em outras palavras, a observação 4.3.4 diz que a equivalência de enlaçamentos em \mathbb{E}^3 corresponde à noção intuitiva de ser capaz de deformar um enlaçamento V continuamente em outro enlaçamento V'

4.4 Representando um Enlaçamento pelo Fecho de uma Trança

O teorema principal apresentado nesta seção conecta a noção de enlaçamento com a de trança.

Considere um enlaçamento V em \mathbb{E}^3 . Seja l uma reta fixa em \mathbb{E}^3 , chamada **eixo**, que não intercepta o enlaçamento V .

Definição 4.4.1. *O enlaçamento V é dito estar em **posição geral** com respeito à reta l se nenhuma das arestas de V é coplanar com a reta l .*

Lema 4.4.2. *Todo enlaçamento é combinatorialmente equivalente a um enlaçamento em posição geral.*

Observação 4.4.3. *Pelo lema anterior, agora trabalharemos só com enlaçamentos em posição geral com respeito a um eixo l .*

Seja V um enlaçamento em \mathbb{E}^3 dotado de uma orientação, isto é, cada componente de V está orientada. Considere um eixo l também orientado. Estas orientações nos permitem dividir as arestas de V em positivas e negativas. Vamos chamar uma aresta $[ab]$ de **positiva** se fixando um ponto em $[ab]$, distinto de a e b , o semi-plano P determinado pelo eixo l e o ponto fixo, gira em torno de l satisfazendo a regra da mão direita quando o ponto fixo se movimenta ao longo de $[ab]$ no sentido da orientação do enlaçamento V . Neste caso escrevemos $[ab] > 0$. Uma aresta $[ab]$ é chamada **negativa**, se o semi-plano P gira em torno de l segundo a regra da mão esquerda, quando o ponto fixo em $[ab]$ se movimenta no sentido da orientação do enlaçamento V . Neste caso escrevemos $[ab] < 0$.

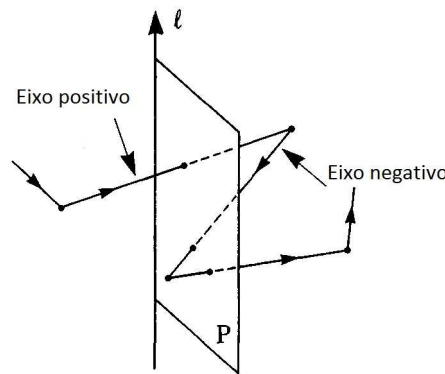


Figura 4.15: Eixo positivo e eixo negativo.

Definição 4.4.4. A **altura** de um enlaçamento V em \mathbb{E}^3 é o número de arestas negativas em V . Este número será denotado por $h(V)$.

Lema 4.4.5. Um enlaçamento V em \mathbb{E}^3 é o fecho de uma trança, se e somente se, admite uma orientação e um eixo l orientado tais que as arestas de V sejam todas positivas.

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 4.4.6. Uma **trança fechada** em \mathbb{E}^3 é um enlaçamento orientado V em \mathbb{E}^3 , que admite um eixo orientado l com respeito ao qual todas as arestas de V são positivas.

Pelo lema 4.4.5 as tranças fechadas são exatamente os enlaçamentos em \mathbb{E}^3 que foram obtidos fechando tranças. Denotaremos por $\widehat{\beta}$ a trança fechada obtida da trança β em B_n .

Teorema 4.4.7 (Alexander, 1923). Todo enlaçamento V em \mathbb{E}^3 é combinatoriamente equivalente a uma trança fechada.

4.5 Equivalência Combinatória de Tranças Fechadas

Nesta seção vamos apresentar o teorema de Andrey Andreyevich Markov sobre equivalência combinatoria de tranças fechadas. Este teorema foi apresentado por Markov em 1935, mas a primeira demonstração completa deste teorema não foi apresentada até o ano 1974 por Joan Birman, no seu livro "*Braids, Links and Mappings Class Groups*".

Seja V um trança fechada (orientada) com eixo l (orientado). Todas as arestas de V são positivas com respeito à orientação de l . Vamos descrever dois tipos de deformação simples sobre as arestas positivas que pode ser aplicado a V .

4.5.1 Uma deformação do tipo \mathcal{R}

Suponha que $[ab] > 0$ é uma aresta positiva em V , e seja c um ponto de \mathbb{E}^3 tal que

$$\Delta(a, b, c) \cap V = [ab]$$

e $[ac] > 0$ e $[cb] > 0$ com respeito a l . Então a deformação elementar \mathcal{E}_{ab}^c é aplicável a V . Em $V' = \mathcal{E}_{ab}^c V$ a aresta $[ab] > 0$ foi substituída por duas arestas, $[ac] > 0$ e $[cb] > 0$. A deformação \mathcal{E}_{ab}^c e sua inversa são chamadas **deformações do tipo \mathcal{R}** .

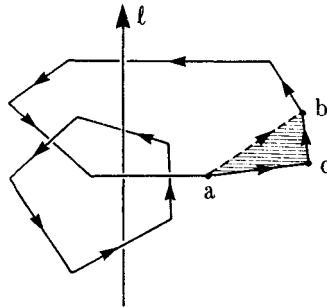


Figura 4.16: Deformação tipo \mathcal{R} .

Uma deformação do tipo \mathcal{R} remove uma aresta positiva e a substitui por duas novas arestas positivas, ou viceversa.

4.5.2 Uma deformação do tipo \mathcal{W}

Suponha que $[ad] > 0$ é uma aresta positiva em V , e seja b um ponto em \mathbb{E}^3 tal que

$$\Delta(a, d, b) \cap V = [ad]$$

e tal que uma das arestas $[ab]$ ou $[bd]$ é positiva e a outra negativa com respeito ao eixo l . Então a deformação elementar \mathcal{E}_{ab}^c é aplicável a V . Em $V' = \mathcal{E}_{ab}^c V$, removemos a aresta positiva $[ad]$ de V e a substituímos por duas novas arestas $[ab]$ e $[bd]$, uma positiva e a outra negativa com respeito ao eixo l . Suponha que $[bd]$ é negativa. Seja c um ponto em \mathbb{E}^3 tal que

$$\Delta(b, d, c) \cap V' = [bd]$$

e $[bc] > 0$ e $[cd] > 0$ com respeito ao eixo l . Então a deformação elementar \mathcal{E}_{ab}^c é aplicável a V' . Assim, combinando as duas deformações elementares \mathcal{E}_{ad}^b e \mathcal{E}_{bd}^c , obtemos a trança fechada

$$V'' = \mathcal{E}_{bd}^c \mathcal{E}_{ad}^b V = (V \setminus [ad]) \cup [ab] \cup [bc] \cup [cd]$$

na qual substituímos a aresta $[ad]$ em V por três novas arestas positivas $[ab]$, $[bc]$ e $[cd]$.

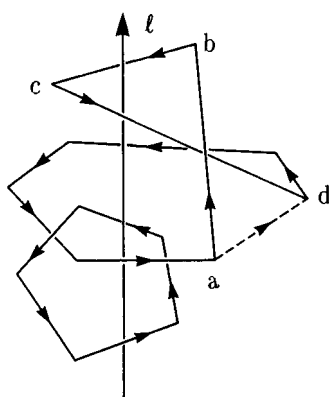


Figura 4.17: Deformação tipo \mathcal{W} com $[bd]$ negativo.

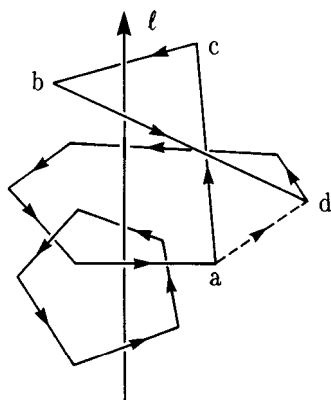


Figura 4.18: Deformação tipo \mathcal{W} com $[bd]$ positivo.

Com estes dois tipos de movimentos a nossa disposição, vamos apresentar duas versões do teorema de Markov, a versão geométrica e a versão algébrica.

Teorema 4.5.1 (Markov 1935: Versão Geométrica). *Sejam V e V' duas tranças fechadas em \mathbb{E}^3 combinatoriamente equivalentes. Então existe uma sequência finita de tranças fechadas em \mathbb{E}^3 :*

$$V = V_0, V_1, \dots, V_{r-1}, V_r = V'$$

tal que para $0 \leq i < r$, V_{i+1} é obtida de V_i pela aplicação de uma deformação do tipo \mathcal{R} ou do tipo \mathcal{W} . A recíproca é trivial.

Pelo teorema de Alexander (teorema 4.4.7) sabemos que todo enlaçamento em \mathbb{E}^3 é combinatoriamente equivalente a uma trança fechada, portanto, o teorema de Markov é um teorema sobre equivalência combinatorial de dois enlaçamentos em \mathbb{E}^3 com generalidade completa.

Por outro lado, sabemos pelo lema 4.4.5 que tranças fechadas V em \mathbb{E}^3 surgem pelo fechamento de uma trança aberta β em B_n em relação a um eixo adequado. Quando isto acontece, escrevemos $V = \widehat{\beta}$. A trança β não é única pois para um enlaçamento qualquer existem várias tranças, com diferentes número de cordas, cujo fecho é o enlaçamento. Por isso escreveremos (β, n) para denotar uma trança β em B_n . Apresentamos a seguir, a versão algébrica do teorema de Markov.

Teorema 4.5.2 (Markov 1935: Versão algébrica). *Sejam $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\beta^*}$ duas tranças fechadas em \mathbb{E}^3 , representadas pelas tranças (β, n) e (β^*, n^*) . Então $\widehat{\beta}$ é combinatoriamente equivalente a $\widehat{\beta^*}$ se, e somente se, existe uma sequência finita de movimentos*

$$(\beta, n) = (\beta_0, n_0) \rightarrow (\beta_1, n_1) \rightarrow \dots \rightarrow (\beta_{r-1}, n_{r-1}) \rightarrow (\beta_r, n_r) = (\beta^*, n^*)$$

transformando (β, n) em (β^, n^*) , tal que para $0 \leq i < r$, a trança (β_{i+1}, n_{i+1}) pode ser obtida de sua antecessora (β_i, n_i) por aplicação de um dos seguintes movimentos:*

\mathcal{M}_1 : *Substitua β_i por qualquer outra trança em B_{n_i} conjugada a β_i . Coloque $n_{i+1} = n_i$.*

\mathcal{M}_2 : *Substitua (β_i, n_i) por $(\beta_i \sigma_{n_i}^{\pm 1}, n_i + 1)$, ou, se $\beta_i = \gamma \sigma_{n_i-1}^{\pm 1}$, onde a palavra correspondente a γ envolve somente os geradores $\sigma_1, \dots, \sigma_{n_i-2}$, substitua (β_i, n_i) por $(\gamma, n_i - 1)$.*

Este teorema é fundamental no estudo dos enlaçamentos, pois permite estudar um problema topológico de classificação de enlaçamentos, a partir do estudo de um problema algébrico relacionado com tranças. Para ser mais específico, considere o conjunto

$$B_\infty = \{(\beta, n) : \beta \in B_n, n \in \mathbb{N}\}$$

B_∞ denota a união disjunta de todos os grupos de tranças. Defina sobre B_∞ a relação

$$(\beta, n) \sim (\beta^*, n^*) \Leftrightarrow \text{existe uma sequência finita } \mathcal{M} \text{ de movimentos} \\ \text{de Markov tal que } (\beta_1, n_1) \xrightarrow{\mathcal{M}} (\beta^*, n^*)$$

é fácil ver que \sim é uma relação de equivalência sobre B_∞ . Segue que as classes de equivalência das tranças sob \sim podem ser identificadas com as classes de equivalência de enlaçamentos em \mathbb{E}^3 com respeito a equivalência combinatória.

4.6 O Grupo de um Enlaçamento

Seja V um enlaçamento em \mathbb{E}^3 . Mediante a compactificação por um ponto do espaço \mathbb{E}^3 , obtemos a esfera 3-dimensional S^3 . Podemos assim considerar o enlaçamento V como um objeto em S^3 quando for conveniente. Como V é limitado e unidimensional, segue que $\mathbb{E}^3 \setminus V$ é conexo por caminhos e portanto, $S^3 \setminus V$ também é conexo por caminhos e ambos espaços tem o mesmo grupo fundamental. De fato, seja U uma vizinhança de ∞ em S^3 homeomorfa a \mathbb{R}^3 com $U \cap V = \emptyset$. Então

$$U \cap \mathbb{R}^3 = U \setminus \{\infty\} \simeq S^2$$

Portanto, U e $U \cap \mathbb{R}^3$ são simplesmente conexos. Como

$$S^3 \setminus V = U \cup (\mathbb{R}^3 \setminus V)$$

temos aplicando o teorema de Seifert-Van Kampen que $\pi_1(S^3 \setminus V) \simeq \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus V)$ (veja [6], pag. 51).

Definição 4.6.1. *Dado um enlaçamento V em \mathbb{E}^3 , vamos chamar de grupo do enlaça-*

mento V ao grupo fundamental do espaço $\mathbb{E}^3 \setminus V$ (ou, do espaço $S^3 \setminus V$). Vamos denotar

$$G(V) = \pi_1(\mathbb{E}^3 \setminus V) = \pi_1(S^3 \setminus V)$$

Observe que se dois enlaçamentos V e V' em \mathbb{E}^3 são combinatorialmente equivalentes então seus complementares $\mathbb{E}^3 \setminus V$ e $\mathbb{E}^3 \setminus V'$ são homeomorfos. Portanto, $G(V)$ e $G(V')$ são isomorfos. Temos portanto o

Lema 4.6.2. *Enlaçamentos combinatorialmente equivalentes em \mathbb{E}^3 têm grupos isomorfos.*

Observação 4.6.3. *Pelo teorema de Alexander, todo enlaçamento em \mathbb{E}^3 é combinatorialmente equivalente a um enlaçamento $\widehat{\beta}$ obtido fechando-se (ao redor de um eixo particular) uma trança β . Por isso, vamos estudar somente grupos de tranças fechadas.*

Antes de apresentar o teorema fundamental desta seção, vamos introduzir algumas notações. Seja \mathbb{F}_n um grupo livre com n -geradores x_1, \dots, x_n , para um inteiro $n \geq 1$ fixo. Para um conjunto de elementos A_1, \dots, A_n em \mathbb{F}_n e uma permutação τ em Σ_n , vamos denotar por $G(A_1, \dots, A_n; \tau)$ o grupo apresentado por

geradores: x_1, \dots, x_n

relações definidoras: $x_i = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1}$ para $1 \leq i \leq n$

Teorema 4.6.4. *Seja β uma n -trança geométrica, e suponha que o automorfismo $\overline{\beta}$ de \mathbb{F}_n , associado a β , é dado por*

$$(x_i)^{\overline{\beta}} = A_i x_{\tau(i)} A_i^{-1} \text{ para } 1 \leq i \leq n \quad (4.6.1)$$

como no teorema 4.2.1. Então o grupo $G(\widehat{\beta})$ do enlaçamento $\widehat{\beta}$ em \mathbb{E}^3 obtido fechando-se a trança β é isomorfo ao grupo $G(A_1, \dots, A_n; \tau)$, e os elementos A_1, \dots, A_n em \mathbb{F}_n e a permutação τ associada à trança β satisfazem a identidade

$$(A_1 x_{\tau(1)} A_1^{-1}) \dots (A_n x_{\tau(n)} A_n^{-1}) = x_1 \dots x_n \quad (4.6.2)$$

Reciprocamente, se os elementos A_1, \dots, A_n em \mathbb{F}_n e uma permutação τ em Σ_n satisfazem

a identidade (4.6.2), então existe uma n -trança geométrica β para a qual

$$G(\widehat{\beta}) = G(A_1, \dots, A_n; \tau)$$

Observe que uma das relações em $G(\widehat{\beta})$ do teorema anterior pode ser obtida a partir das outras. Daí o seguinte corolário.

Corolário 4.6.5. *Seja β em B_n e seja $\widehat{\beta}$ a trança fechada associada a β . Então o grupo $G(\widehat{\beta})$ do enlaçamento $\widehat{\beta}$ admite a apresentação*

$$G(\widehat{\beta}) = \langle x_1, \dots, x_n; x_1 = (x_1)\overline{\beta}, \dots, x_{n-1} = (x_{n-1})\overline{\beta} \rangle \quad (4.6.3)$$

onde x_1, \dots, x_n são os geradores do grupo livre \mathbb{F}_n e $\overline{\beta}$ é o automorfismo de \mathbb{F}_n induzido por β .

4.7 Algumas Definições da Teoria de Nós

Nesta seção vamos introduzir noções e fatos sobre o framing de um enlaçamento e sobre o número de enlaçamentos. Para uma introdução à teoria de nós veja [6].

Definição 4.7.1. *Considere um enlaçamento orientado $L = K_1 \cup \dots \cup K_m$ em S^3 . Definimos uma **vizinhança tubular** da componente K_i como sendo um mergulho $T_i : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ tal que*

$$T_i(\{0\} \times S^1) = K_i$$

Onde D^2 denota o disco unitário no plano dos números complexos \mathbb{C} .

Um **framing** de L é uma coleção $\{T_i : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3\}$ de mergulhos tais que T_i é uma vizinhança tubular de K_i , para $i = 1, \dots, m$, e

$$T_i(D^2 \times S^1) \cap T_j(D^2 \times S^1) \neq \emptyset, \text{ se } i \neq j$$

A **longitude** da componente K_i é uma curva orientada, fechada e simples λ_i em S^3 tal que

$$\lambda_i = T_i(\{1\} \times S^1)$$

Dado um nó K , identificamos $H_1(K) := H_1(S^3 \setminus K)$ com \mathbb{Z} , de maneira que $1 \in \mathbb{Z}$ é representado pelo 1-ciclo da figura 4.19.

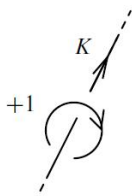


Figura 4.19: 1-ciclo.

Definição 4.7.2. *Sejam K_1 e K_2 dois nós orientados disjuntos em S^3 . Definimos o número de enlaçamentos $lk(K_1, K_2) \in \mathbb{Z}$ como a classe $[K_1] \in H_1(K_2) = \mathbb{Z}$.*

O número de enlaçamentos $lk(K_1, K_2)$ pode ser calculado a partir de qualquer projeção regular do enlaçamento $K_1 \cup K_2$ contando o sinal dos cruzamentos onde K_1 passa sobre K_2 , como se indica na figura 4.20.

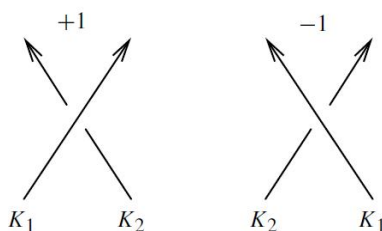


Figura 4.20: Sinal dos cruzamentos.

Dado um enlaçamento orientado $L = K_1 \cup \dots \cup K_m$ em S^3 , a menos de isotopia, existe um único framing no qual a longitude λ_i de cada componente K_i , satisfaz a seguinte condição

$$\sum_{j=1}^m lk(\lambda_i, K_j) = 0$$

Vamos nos referir a este framing como **framing preferido** de L .

A Representação do Tipo Artin do Grupo das Tranças

Neste capítulo vamos estudar uma nova representação do grupo de tranças que generaliza a representação de Artin dada em 1925 e a representação de Wada dada em 1992 (veja [8]). A partir desta representação construiremos um invariante de enlaçamentos e estudaremos algumas propriedades do mesmo. Também estudaremos uma construção topológica desta nova representação e também do novo invariante.

Neste capítulo, por simplicidade de notação, vamos usar a orientação de uma trança sendo de abaixo para acima, tal como se mostra na figura 5.1.

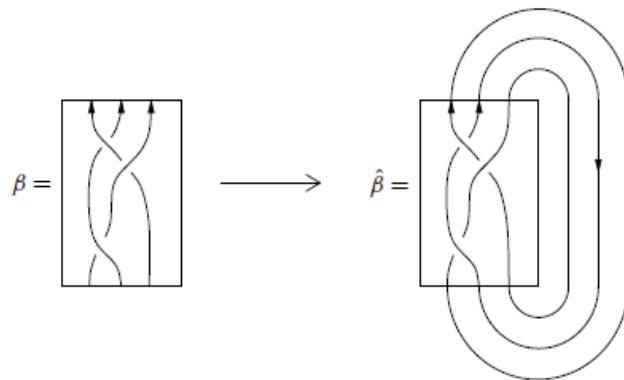


Figura 5.1: Orientação de uma trança β e seu fecho.

5.1 Definição e Propriedades Elementares

Considere B_n o grupo das tranças de n cordas gerado pelas tranças elementares $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$, as quais satisfazem as relações

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \quad , \quad k = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad , \quad |i-j| > 1 \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Fixe um grupo H e um elemento h em H . Considere n cópias H_1, \dots, H_n de H e isomorfismos $\phi_i : H \rightarrow H_i$ e escreva $h_i = \phi_i(h)$, para $i = 1, \dots, n$. Denote por H^{*n} o produto livre da família $\{H_i\}_{i=1}^n$. Para $k = 1, \dots, n-1$, seja $\tau_k : H^{*n} \rightarrow H^{*n}$ definido por

$$\tau_k : \begin{cases} \phi_k(y) & \mapsto h_k^{-1} \phi_{k+1}(y) h_k \\ \phi_{k+1}(y) & \mapsto h_k \phi_k(y) h_k^{-1} \\ \phi_j(y) & \mapsto \phi_j(y) \end{cases} \quad , \quad \text{se } j \neq k, k+1 \quad (5.1.2)$$

para y em H . Estendendo de forma natural para H^{*n} , já que todo elemento de H^{*n} se escreve como um produto de elementos da coleção $\{\phi_i(y) : y \in H, i = 1, \dots, n\}$, obtemos que τ_k é um homomorfismo. Além disso, τ_k é um automorfismo, pois o homomorfismo (argumento análogo) inverso é definido por

$$\tau_k^{-1} : \begin{cases} \phi_k(y) & \mapsto h_{k+1}^{-1} \phi_{k+1}(y) h_{k+1} \\ \phi_{k+1}(y) & \mapsto h_{k+1} \phi_k(y) h_{k+1}^{-1} \\ \phi_j(y) & \mapsto \phi_j(y) \end{cases} \quad , \quad \text{se } j \neq k, k+1 \quad (5.1.3)$$

Proposição 5.1.1. *A aplicação $\sigma_k \mapsto \tau_k$, para $k = 1, \dots, n-1$ determina uma representação $\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(H^{*n})$.*

Demonstração. Basta verificar que ρ respeita as relações de trança, isto é,

$$\begin{aligned} \tau_k \circ \tau_{k+1} \circ \tau_k &= \tau_{k+1} \circ \tau_k \circ \tau_{k+1} \quad \text{para } k = 1, \dots, n-2 \\ \tau_i \circ \tau_j &= \tau_j \circ \tau_i \quad \text{para } |i-j| > 1, i, j = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Por simplicidade de notação, escreveremos $y_i = \phi_i(y)$, para todo y em H e $i = 1, \dots, n$. Seja $k = 1, \dots, n-2$ fixo. Claramente, $\tau_k \circ \tau_{k+1} \circ \tau_k(y_j) = \tau_{k+1} \circ \tau_k \circ \tau_{k+1}(y_j)$, para $j \neq k, k+1, k+2$. Temos

$$\begin{aligned}
\tau_k \circ \tau_{k+1} \circ \tau_k(y_k) &= \tau_k \circ \tau_{k+1}(h_k^{-1}y_{k+1}h_k) \\
&= \tau_k(h_k^{-1}h_{k+1}^{-1}y_{k+2}h_{k+1}h_k) \\
&= h_k^{-1}h_{k+1}^{-1}h_k h_k^{-1}y_{k+2}h_k h_k^{-1}h_{k+1}h_k \\
&= h_k^{-1}h_{k+1}^{-1}y_{k+2}h_{k+1}h_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_k \circ \tau_{k+1} \circ \tau_k(y_{k+1}) &= \tau_k \circ \tau_{k+1}(h_k y_k h_k^{-1}) \\
&= \tau_k(h_k y_k h_k^{-1}) \\
&= h_k^{-1}h_{k+1}h_k h_k^{-1}y_{k+1}h_k h_k^{-1}h_{k+1}^{-1}h_k \\
&= h_k^{-1}h_{k+1}y_{k+1}h_{k+1}^{-1}h_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_k \circ \tau_{k+1} \circ \tau_k(y_{k+2}) &= \tau_k \circ \tau_{k+1}(y_{k+2}) \\
&= \tau_k(h_{k+1}y_{k+1}h_{k+1}^{-1}) \\
&= h_k h_k y_k h_k^{-1}h_k^{-1} \\
&= h_k^2 y_k h_k^{-2}
\end{aligned}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}
\tau_{k+1} \circ \tau_k \circ \tau_{k+1}(y_k) &= \tau_{k+1} \circ \tau_k(y_k) \\
&= \tau_{k+1}(h_k^{-1}y_{k+1}h_k) \\
&= h_k^{-1}h_{k+1}^{-1}y_{k+2}h_{k+1}h_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{k+1} \circ \tau_k \circ \tau_{k+1}(y_{k+1}) &= \tau_{k+1} \circ \tau_k(h_{k+1}^{-1}y_{k+2}h_{k+1}) \\
&= \tau_{k+1}(h_k^{-1}y_{k+2}h_k) \\
&= h_k^{-1}h_{k+1}y_{k+1}h_{k+1}^{-1}h_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{k+1} \circ \tau_k \circ \tau_{k+1}(y_{k+2}) &= \tau_{k+1} \circ \tau_k(h_{k+1}y_{k+1}h_{k+1}^{-1}) \\
&= \tau_{k+1}(h_k h_k y_k h_k^{-1}h_k^{-1}) \\
&= h_k^2 y_k h_k^{-2}
\end{aligned}$$

Portanto, demonstramos que $\tau_k \circ \tau_{k+1} \circ \tau_k = \tau_{k+1} \circ \tau_k \circ \tau_{k+1}$ para $k = 1, \dots, n-2$.

Agora vamos mostrar que $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$ para $|i-j| > 1$, onde $i, j = 1, \dots, n-1$. Sem perda de generalidade suponha $i > j+1$. Então, $\tau_i(y_j) = y_j$, $\tau_i(y_{j+1}) = y_{j+1}$, $\tau_j(y_i) = y_i$ e $\tau_j(y_{i+1}) = y_{i+1}$. Portanto é claro que

$$\tau_i \circ \tau_j(y_j) = \tau_j \circ \tau_i(y_j) \text{ e } \tau_i \circ \tau_j(y_{j+1}) = \tau_j \circ \tau_i(y_{j+1})$$

Por outro lado, para $t \neq j, j + 1$, temos

$$\tau_i \circ \tau_j(y_t) = \tau_i(y_t) = \tau_j \circ \tau_i(y_t)$$

Assim, $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$. □

Definição 5.1.2. *A representação da proposição anterior é chamada **representação de tipo Artin associada ao par** (H, h) .*

Exemplo 5.1.3. *Seja H um grupo arbitrário e suponha $h = e_H$. Então*

$$\tau_k : \begin{cases} \phi_k(y) & \mapsto \phi_{k+1}(y) \\ \phi_{k+1}(y) & \mapsto \phi_k(y) \\ \phi_j(y) & \mapsto \phi_j(y) \end{cases}, \text{ se } j \neq k, k + 1 \quad (5.1.4)$$

Defina $\Sigma : \text{Aut}(H^{*n}) \rightarrow S_n$ por $\Sigma(\tau_k) = (k \ k + 1)$. Como $S_n = \langle (i \ i + 1) : i = 1, \dots, n - 1 \rangle$ então $\Sigma \circ \rho$ é a representação por permutações do grupo de tranças cuja imagem é S_n e $\ker(\Sigma \circ \rho) = P_n$ é o subgrupo de B_n das tranças puras (Ver [3], página 19).

Exemplo 5.1.4. *Seja $H = (\mathbb{Z}, +)$ e $h = 1$. Então $H^{*n} = \mathbb{F}_n$, o grupo livre de posto n , e*

$$\tau_k : \begin{cases} x_k & \mapsto x_k^{-1} x_{k+1} x_k \\ x_{k+1} & \mapsto x_k \\ x_j & \mapsto x_j \end{cases}, \text{ se } j \neq k, k + 1 \quad (5.1.5)$$

Neste caso ρ é a clássica representação de Artin introduzida pelo mesmo em 1925.

Exemplo 5.1.5. *Outro caso interessante é quando $H = \mathbb{Z}$ e h é um inteiro diferente de 1 e 0. Este caso foi estudado por Wada em 1992 na sua construção de invariantes de enlaçamentos (ver [8]).*

Agora, passamos a estudar as diferentes propriedades da representação de tipo Artin.

Definição 5.1.6. *Seja $\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(H^{*n})$ a representação de tipo Artin associada ao par (H, h) . Seja β uma n -trança. Vamos denotar por $\Gamma(\beta) = \Gamma_{(H, h)}(\beta)$ o quociente de*

H^{*n} pelas relações

$$g = \rho(\beta)(g), \quad g \in H^{*n} \quad (5.1.6)$$

Isto é,

$$\Gamma(\beta) = H^{*n} / \langle g(\rho(\beta)(g))^{-1} : g \in H^{*n} \rangle^{H^{*n}} \quad (5.1.7)$$

Para uma n -trança β , denotamos por $\widehat{\beta}$ o enlaçamento orientado (mais precisamente, a classe de equivalência de enlaçamentos orientados) representado pelo fecho da trança, como foi definido anteriormente (Ver [2]).

5.2 Enlaçamentos e Invariantes de Enlaçamentos

Seja H um grupo, $h \in H$ e $\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(H^{*n})$ a representação de tipo Artin associada ao par (H, h) . Lembremos que $H^{*n} = H_1 * \dots * H_n$ com H_1, \dots, H_n cópias de H e $\phi_i : H \rightarrow H_i$ isomorfismos dados para $i = 1, \dots, n$.

Proposição 5.2.1. *Sejam n e m inteiros positivos. Considere duas tranças $\beta_1 \in B_n$ e $\beta_2 \in B_m$. Se $\widehat{\beta}_1 = \widehat{\beta}_2$ então $\Gamma_{(H,h)}(\beta_1) \simeq \Gamma_{(H,h)}(\beta_2)$.*

Demonstração. Queremos provar que $\Gamma_{(H,h)}$ é um invariante de enlaçamentos. Pelo teorema de Markov (teorema 4.5.2), basta provar que para uma n -trança qualquer $\beta \in B_n$, temos

$$(1) \quad \Gamma(\alpha^{-1}\beta\alpha) \simeq \Gamma(\beta), \text{ para toda } n\text{-trança } \alpha \text{ em } B_n.$$

$$(2) \quad \Gamma(\beta\sigma_n) \simeq \Gamma(\beta)$$

$$(3) \quad \Gamma(\beta\sigma_n^{-1}) \simeq \Gamma(\beta)$$

onde $\beta\sigma_n$ e $\beta\sigma_n^{-1}$ são vistas como tranças em B_{n+1} .

Observe que se β está em B_n e $n \leq m$, então a ação de β sob ρ sobre H^{*m} é trivial nos fatores livres H_{n+1}, \dots, H_m , pois a ação de σ_k é trivial sobre os fatores livres H_{n+1}, \dots, H_m , para $k = 1, \dots, n-2$. Por simplicidade de notação, escrevemos $\beta(g)$ em vez de $\rho(\beta)(g)$ e σ_k em vez de τ_k .

Para provar (1), note que, para $\beta \in B_n$, o grupo $\Gamma(\beta)$ é definido como o quociente de H^{*n} pelas relações $g = \beta(g)$ para todo $g \in H^{*n}$. Como, para $\alpha \in B_n$, a relação

$g = \alpha^{-1}\beta\alpha(g)$ é equivalente à relação $\alpha(g) = \beta(\alpha(g))$, e α é um automorfismo de H^{*n} , segue que $\Gamma(\alpha^{-1}\beta\alpha)$ é definido pelo mesmo conjunto de relações que $\Gamma(\beta)$. Portanto, os grupos $\Gamma(\alpha^{-1}\beta\alpha)$ e $\Gamma(\beta)$ são isomorfos.

Agora provaremos (2). O grupo $\Gamma(\beta\sigma_n)$ pode ser visto como o quociente de $H^{*(n+1)}$ pelas relações

$$R(i, x) : \phi_i(x) = \beta\sigma_n(\phi_i(x)) \text{ com } i = 1, \dots, n+1, x \in H$$

Observe que

$$(i) \quad \sigma_n(\phi_n(x)) = h_n^{-1}\phi_{n+1}(x)h_n$$

$$(ii) \quad \sigma_n(\phi_{n+1}(x)) = h_n\phi_n(x)h_n^{-1}$$

Portanto, $R(n+1, x)$ é equivalente a

$$R'(n+1, x) : \phi_{n+1}(x) = \beta(h_n)\beta(\phi_n(x))\beta(h_n^{-1})$$

onde $\beta(h_n)\beta(\phi_n(x))\beta(h_n^{-1}) = \beta(h_n\phi_n(x)h_n^{-1})$ está em H^{*n} . Logo, $\Gamma(\beta\sigma_n)$ é gerado pela imagen de H^{*n} . Além disso,

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \beta\sigma_n(\phi_n(x)) \\ &= \beta(h_n^{-1}\phi_{n+1}(x)h_n) \\ &= \beta(h_n^{-1})\phi_{n+1}(x)\beta(h_n) \\ &= \beta(h_n^{-1})\beta(h_n)\beta(\phi_n(x))\beta(h_n^{-1})\beta(h_n) \\ &= \beta(\phi_n(x)) \end{aligned}$$

onde, na terceira igualdade usamos que $\beta \in B_n$ e na quarta igualdade usamos $R'(n+1, x)$.

Por outro lado, a relação $R(i, x)$ é equivalente a $R'(i, x) : \phi_i(x) = \beta(\phi_i(x))$, para $i = 1, \dots, n-1$, pois σ_n é a identidade sobre os fatores livres H_1, \dots, H_{n-1} . Portanto, $\Gamma(\beta\sigma_n) \simeq \Gamma(\beta)$.

Finalmente provaremos (3). Primeiro note que para todo g em H^{*n} temos

$$g = \beta(g) \Leftrightarrow g = \beta^{-1}(g)$$

pois β é um automorfismo de H^{*n} . Logo, $\Gamma(\beta) \simeq \Gamma(\beta^{-1})$. Portanto,

$$\begin{aligned} \Gamma(\beta\sigma_n^{-1}) &\simeq \Gamma(\sigma_n\beta^{-1}) \\ &\simeq \Gamma(\beta^{-1}\sigma_n) \quad , \text{ por 1) } \\ &\simeq \Gamma(\beta^{-1}) \quad , \text{ por 2) } \\ &\simeq \Gamma(\beta) \end{aligned}$$

□

Definição 5.2.2. *Seja L um enlaçamento orientado. Definimos*

$$\Gamma_{(H,h)}(L) := \Gamma_{(H,h)}(\beta) \quad (5.2.1)$$

onde β é uma trança tal que $L = \widehat{\beta}$.

Note que a proposição 5.2.1 mostra que $\Gamma_{(H,h)}(L)$ não depende (da classe de equivalência) da trança β , ou seja, $\Gamma_{(H,h)}(L)$ está bem definido.

5.3 Construção Topológica do Invariante de Enlaçamentos

Seja X um complexo CW. Considere $P_0 \in X$ como ponto base e seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ um laço baseado em P_0 . Nesta seção vamos dar uma realização topológica da representação de tipo Artin de B_n associada ao par $(H, h) = (\pi_1(X, p_0), [\alpha])$, e a seguir deduziremos uma construção topológica do invariante de enlaçamentos $\Gamma_{(H,h)}(\cdot)$ da seção anterior.

Denote por $\mathbf{D} = D(\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2})$ o disco no conjunto dos números complexos, \mathbb{C} , centrado em $\frac{n+1}{2}$ e de raio $\frac{n+1}{2}$. Vamos construir o espaço Y obtido de \mathbf{D} fazendo n buracos em \mathbf{D} e colando uma cópia de X em cada buraco, mediante uma identificação da fronteira circular do buraco com o laço α em X . Mais precisamente: considere um número $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno (requeremos $\varepsilon < \frac{1}{8}$), e seja

$$Y' = \mathbf{D} \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n \overset{\circ}{D}(k, \varepsilon) \right) \quad (5.3.1)$$

onde $\overset{\circ}{D}(k, \varepsilon)$ denota o interior do disco centrado em k e de raio ε . Tome n -cópias X_1, \dots, X_n

de X . Para $k = 1, \dots, n$, considere $f_k : X \rightarrow X_k$ homeomorfismo e escreva $\alpha_k = f_k \circ \alpha$. Então

$$Y = \left(Y' \dot{\cup} \left(\dot{\bigcup}_{k=1}^n X_k \right) \right) / \sim \quad (5.3.2)$$

onde \sim é a identificação definida por

$$\alpha_k(t) \sim k + \varepsilon e^{2\pi it}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t \in I \quad (5.3.3)$$

Finalmente, escolha um ponto base $Q_0 \in \partial \mathbf{D}$ para Y . O seguinte resultado é uma consequência direta da construção anterior.

Lema 5.3.1. *Seja $H = \pi_1(X, P_0)$ e sejam H_1, \dots, H_n cópias de H . Então*

$$\pi_1(Y, Q_0) \simeq H_1 * \dots * H_n$$

Demonstração. Note que $\pi_1(Y, Q_0)$ não depende de Q_0 em $\partial \mathbf{D}$ pois o caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$, definido por $\gamma(t) = \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} e^{2\pi it}$ une todos os pontos de $\partial \mathbf{D}$. Agora faremos a demonstração por indução sobre n .

Suponha $n = 2$. Escreva $Y = A \cup B$ onde

$$A = \{z : \Re(z) < \frac{3}{2} + \delta\} \cap (Y' \cup X_1) \text{ e } B = \{z : \Re(z) > \frac{3}{2} - \delta\} \cap (Y' \cup X_2)$$

para algum $\delta > 0$ apropriado. Observe que $A \cap B$ é simplesmente conexo, logo, pelo teorema de Seifert-Van Kampen temos

$$\pi_1(Y) \simeq \pi_1(A) * \pi_1(B)$$

Defina $r_1 : A \rightarrow X_1$ por

$$r_1 : \begin{cases} x \mapsto x, & x \in X_1 \\ d \mapsto \frac{\epsilon}{|1-d|}(1-d) + 1, & d \in A \setminus X_1 \end{cases}$$

Observe que r_1 é contínua (lema da colagem) e que $r_1|_{X_1} = Id_{X_1}$. Portanto, X_1 é um

retrato de A . Além disso, a aplicação $F : A \times [0, 1] \rightarrow A$ definida por

$$\begin{aligned} F(d, t) &= (1 - t)d + tr_1(d) \quad , d \in A \setminus X_1, t \in [0, 1] \\ F(x, t) &= x \quad , x \in X_1, t \in [0, 1] \end{aligned}$$

é uma homotopia entre $i \circ r_1$ e Id_A relativa a X_1 , onde $i : X_1 \hookrightarrow A$ é a inclusão. Portanto, X_1 é um retrato por deformação de A . Então, pela proposição 3.5.8 temos

$$\pi_1(X, P_0) \simeq \pi_1(A, Q_0)$$

Analogamente temos

$$\pi_1(X, P_0) \simeq \pi_1(B, Q_0)$$

Portanto, $\pi_1(Y, Q_0) \simeq \pi_1(X, P_0) * \pi_1(X, P_0)$.

O caso geral segue por indução sobre n . □

Vamos mostrar que o grupo de n -tranças B_n atua sobre Y a menos de isotopia relativa à fronteira de \mathbf{D} de modo que a ação induzida sobre $\pi_1(Y)$ é a representação de tipo Artin associada ao par $(H, h) = (\pi_1(X, P_0), [\alpha])$.

Definição 5.3.2. *Seja ξ em \mathbb{C} e $0 < r < R$. Uma **meia torção de Dehn** $T = T(\xi, r, R)$, é uma aplicação do plano complexo \mathbb{C} , definida por*

$$T(\xi + \rho e^{i\theta}) = \begin{cases} \xi + \rho e^{i(\theta-\pi)} & 0 \leq \rho \leq r \\ \xi + \rho e^{i(\theta-t\pi)} & r \leq \rho \leq R \text{ e } t = \frac{R-\rho}{R-r} \\ \xi + \rho e^{i\theta} & \rho \geq R \end{cases} \quad (5.3.4)$$

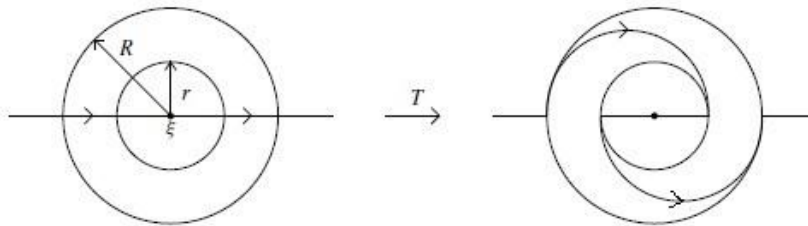


Figura 5.2: Meia torção de Dehn.

Observação 5.3.3. *A meia torção de Dehn é um homeomorfismo e sua inversa T^{-1} é dada por*

$$T^{-1}(\xi + \rho e^{i\theta}) = \begin{cases} \xi + \rho e^{i(\theta+\pi)} & , \text{ se } 0 \leq \rho \leq r \\ \xi + \rho e^{i(\theta+t\pi)} & , \text{ se } r \leq \rho \leq R \text{ e } t = \frac{R-\rho}{R-r} \\ \xi + \rho e^{i\theta} & , \text{ se } \rho \geq R \end{cases} \quad (5.3.5)$$

Para cada $k = 1, \dots, n$, seja $T_k^{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ o homeomorfismo definido por

$$T_k^{\mathbf{D}} = T(k, \varepsilon, 2\varepsilon)^{-3} \circ T(k+1, \varepsilon, 2\varepsilon)^{-1} \circ T(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon, \frac{1}{2} + 2\varepsilon) \quad (5.3.6)$$

Intuitivamente, $T_k^{\mathbf{D}}$ transforma o interior de $D(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\varepsilon)$ como segue: imagine que uma mão segura a borda do disco $D(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\varepsilon)$ e a outra segura a borda do disco $D(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon)$, logo, gira-se em sentido horário o disco $D(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ em π radianos, mexendo os pontos do interior de $D(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 2\varepsilon)$ segundo a definição da meia torção de Dhen (ver figura 5.2). Analogamente, segura-se a borda do disco $D(k+1, 2\varepsilon)$ e gira-se o disco $D(k+1, \varepsilon)$ em sentido horário em π radianos mexendo-se agora somente os pontos do interior de $D(k+1, 2\varepsilon)$. Finalmente, segura-se a borda do disco $D(k, 2\varepsilon)$ e dá-se três giros de π radianos ao disco $D(k, \varepsilon)$ em sentido antihorário. Esta é uma forma intuitiva de explicar como a aplicação $T_k^{\mathbf{D}}$ atua em \mathbf{D} . Na figura 5.3, cada seta simboliza o giro descrito uma vez.

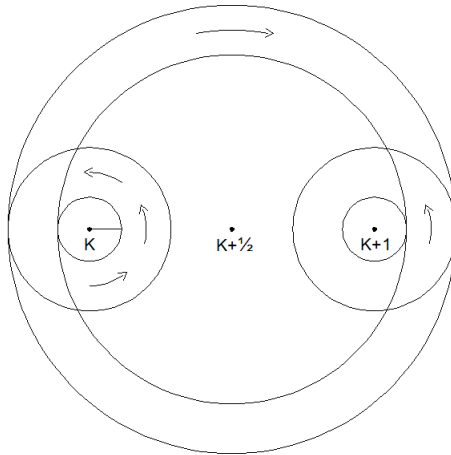


Figura 5.3: Descrição da aplicação $T_k^{\mathbf{D}}$.

Observe que $\bigcup_{j=1}^n \mathbf{D}(j, \varepsilon)$ fica invariante sob $T_k^{\mathbf{D}}$; isto é,

$$T_k^{\mathbf{D}} \left(\bigcup_{j=1}^n \mathbf{D}(j, \varepsilon) \right) = \bigcup_{j=1}^n \mathbf{D}(j, \varepsilon)$$

Portanto, sua restrição $T'_k : Y' \rightarrow Y'$ também é um homeomorfismo. Temos então a seguinte proposição.

Proposição 5.3.4. *Com as notações anteriores temos:*

(1) $T'_k T'_{k+1} T'_k$ é isotópica a $T'_{k+1} T'_k T'_{k+1}$ relativamente a $\partial \mathbf{D}$, para $k = 1, \dots, n-2$.

(2) $T'_k T'_l$ é isotópica a $T'_l T'_k$ relativamente a $\partial \mathbf{D}$, para $|k-l| > 1$.

Demonstração. Defina para cada $t \in [0, 1]$ uma aplicação $T_t = T_t(\xi, r, R) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$T_t(\xi + \rho e^{i\theta}) = \begin{cases} \xi + \rho e^{i(\theta-t\pi)} & , \text{ se } 0 \leq \rho \leq r \\ \xi + \rho e^{i(\theta-t\frac{R-\rho}{R-r}\pi)} & , \text{ se } r \leq \rho \leq R \\ \xi + \rho e^{i\theta} & , \text{ se } \rho \geq R \end{cases} \quad (5.3.7)$$

T_t é um homeomorfismo pois é contínua pelo lema da colagem e sua inversa é definida por

$$T_t^{-1}(\xi + \rho e^{i\theta}) = \begin{cases} \xi + \rho e^{i(\theta+t\pi)} & , \text{ se } 0 \leq \rho \leq r \\ \xi + \rho e^{i(\theta+t\frac{R-\rho}{R-r}\pi)} & , \text{ se } r \leq \rho \leq R \\ \xi + \rho e^{i\theta} & , \text{ se } \rho \geq R \end{cases} \quad (5.3.8)$$

que também é contínua pelo lema da colagem.

Observe que $T_0 = Id_{\mathbb{C}}$ e $T_1 = T(\xi, r, R)$.

Agora vamos demonstrar (1) e (2). Para demonstrar (1) defina a aplicação

$$h : Y' \times [0, 1] \rightarrow Y'$$

por

$$\begin{aligned}
h(\cdot, t) = & T_{1-t}(k, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_{1-t}(k+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_{1-t}(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon) \circ \\
& \circ T_{1-t}(k+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_{1-t}(k+2, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_{1-t}(k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon) \circ \\
& \circ T_{1-t}(k, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_{1-t}(k+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_{1-t}(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon) \circ \\
& \circ T_t(k+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_t(k+2, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_t(k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon) \circ \\
& \circ T_t(k, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_t(k+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_t(k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon) \circ \\
& \circ T_t(k+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_t(k+2, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_t(k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon)(\cdot)
\end{aligned} \tag{5.3.9}$$

É claro que para todo t em $[0, 1]$, $h(\cdot, t)$ é um homeomorfismo que fixa a fronteira do disco **D** ponto a ponto, e além disso, $h(\cdot, 0) = (T'_k \circ T'_{k+1} \circ T'_l)(\cdot)$ e $h(\cdot, 1) = (T'_{k+1} \circ T'_k \circ T'_{k+1})(\cdot)$.

Defina

$$H : Y' \times [0, 1] \rightarrow Y' \times [0, 1] \text{ por } H(\cdot, t) = (h(\cdot, t), t) \tag{5.3.10}$$

É claro que H é a isotopia procurada.

Analogamente, para demonstrar (2), considere $|k - l| > 1$ e defina

$$g : Y' \times [0, 1] \rightarrow Y'$$

por

$$\begin{aligned}
g(\cdot, t) = & T_{1-t}(k, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_{1-t}(k+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_{1-t}(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon) \circ \\
& T_{1-t}(l, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_{1-t}(l+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_{1-t}(l + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon) \circ \\
& T_t(l, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_t(l+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_t(l + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon) \circ \\
& T_t(k, \epsilon, 2\epsilon)^{-3} \circ T_t(k+1, \epsilon, 2\epsilon)^{-1} \circ T_t(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon)
\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

Defina

$$G : Y' \times [0, 1] \rightarrow Y' \times [0, 1] \text{ por } G(\cdot, t) = (g(\cdot, t), t) \tag{5.3.12}$$

É fácil ver que G é a isotopia procurada entre $T_k \circ T_l$ e $T_l \circ T_k$. \square

Usando a família de funções $\{T_t\}_{t \in [0,1]}$ na demonstração da proposição anterior, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 5.3.5. *Para cada $k = 1, \dots, n$, T_k é isotópica à $Id_{\mathbf{D}}$ relativamente à $\partial\mathbf{D}$.*

Observação 5.3.6. T'_k fixa $\partial\mathbf{D}$ ponto a ponto e transforma os restantes pontos de $\delta Y'$ como segue

$$T'_k(j + \epsilon e^{i\theta}) = \begin{cases} j + \epsilon e^{i\theta} & , \text{ se } j \neq k, k+1 \\ k+1 + \epsilon e^{i\theta} & , \text{ se } j = k \\ k + \epsilon e^{i\theta} & , \text{ se } j = k+1 \end{cases} \quad (5.3.13)$$

Pela observação 5.3.6, podemos estender T'_k a um homeomorfismo $T_k : Y \rightarrow Y$. Defina $T_k : Y \rightarrow Y$ para todo x em X por

$$T_k(f_j(x)) = \begin{cases} f_j(x) & , \text{ se } j \neq k, k+1 \\ f_{k+1}(x) & , \text{ se } j = k \\ f_k(x) & , \text{ se } j = k+1 \end{cases} \quad (5.3.14)$$

e $T_k|_{Y'} = T'_k$. T_k é contínua com inversa contínua (lema da colagem). Logo, T_k é um homeomorfismo. Além disso, T_k fixa ponto a ponto a fronteira do disco \mathbf{D} . Temos assim, a seguinte proposição.

Proposição 5.3.7. *Com as notações anteriores:*

- (1) $T_k \circ T_{k+1} \circ T_k$ é isotópico a $T_{k+1} \circ T_k \circ T_{k+1}$ relativamente à $\partial\mathbf{D}$, para $k = 1, \dots, n-2$.
- (2) $T_k \circ T_l$ é isotópico a $T_l \circ T_k$ relativamente à $\partial\mathbf{D}$, para $k, l = 1, \dots, n-1$ com $|k-l| > 1$.

Demonstração. Observe que para $k = 1, \dots, n-2$ e x em X temos

$$(T_k \circ T_{k+1} \circ T_k)(f_j(x)) = (T_{k+1} \circ T_k \circ T_{k+1})(f_j(x)) = \begin{cases} f_j(x) & , \text{ se } j \neq k, k+1, k+2 \\ f_{k+2}(x) & , \text{ se } j = k \\ f_{k+1}(x) & , \text{ se } j = k+1 \\ f_k(x) & , \text{ se } j = k+2 \end{cases} \quad (5.3.15)$$

Considere a aplicação

$$H : Y \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$$

sendo uma extensão da aplicação dada por (5.3.10) na demonstração da proposição 5.3.4, de maneira que para $t \in [0, 1]$ e x em X arbitrário, temos

$$H(f_j(x), t) = ((T_k \circ T_{k+1} \circ T_k)(f_j(x)), t)$$

é fácil ver que H é a isotopia requerida entre $T_k \circ T_{k+1} \circ T_k$ e $T_{k+1} \circ T_k \circ T_{k+1}$. Fica demonstrada a parte (1).

Analogamente vamos provar (2). Observe que para $k, l = 1, \dots, n-1$ com $|k-l| > 1$ temos

$$(T_k \circ T_l)(f_j(x)) = (T_l \circ T_k)(f_j(x)) = \begin{cases} f_j(x) & , \text{ se } j \neq k, k+1, l, l+1 \\ f_{k+1}(x) & , \text{ se } j = k \\ f_k(x) & , \text{ se } j = k+1 \\ f_{l+1}(x) & , \text{ se } j = l \\ f_l(x) & , \text{ se } j = l+1 \end{cases} \quad (5.3.16)$$

Defina a aplicação

$$G : Y \times [0, 1] \rightarrow Y \times [0, 1]$$

para $t \in [0, 1]$ como em (5.3.12) sobre Y' , e para x em X arbitrário por

$$G(f_j(x), t) = ((T_k \circ T_l)(f_j(x)), t)$$

É claro que G é uma isotopia entre $T_k \circ T_l$ e $T_l \circ T_k$. Segue o resultado. \square

Temos então, pelas propriedades do homomorfismo induzido por uma função contínua, que $(T_k)_*$ é um automorfismo de $\pi_1(Y, Q_0)$, para todo $k = 1, \dots, n-1$, e pela proposição anterior, este automorfismo satisfaz as relações

- (1) $(T_k)_* \circ (T_{k+1})_* \circ (T_k)_* = (T_{k+1})_* \circ (T_k)_* \circ (T_{k+1})_*$, para $k = 1, \dots, n-2$.
- (2) $(T_k)_* \circ (T_l)_* = (T_l)_* \circ (T_k)_*$, para $k, l = 1, \dots, n-1$ com $|k-l| > 1$.

Então a aplicação definida sobre B_n por $\sigma_k \mapsto (T_k)_*$, se estende para um homomorfismo $\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(Y, Q_0))$, ou seja, contruímos uma representação do grupo de tranças B_n nos automorfismos do grupo fundamental de Y com ponto base Q_0 . Agora

nosso objetivo é mostrar que esta representação ρ é a representação de tipo Artin associada ao par $(\pi_1(X, P_0), [\alpha])$.

Considere $Q_0 = \frac{n+1}{2} - i \frac{n+1}{2}$ e seja $\gamma_k : [0, 1] \rightarrow Y$ o caminho em Y de Q_0 a $f_k(P_0)$ mostrado na figura 5.4.

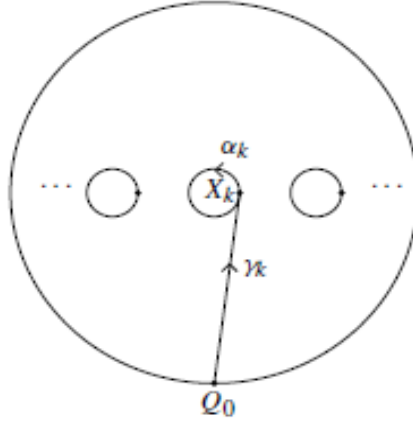


Figura 5.4: Caminho γ_k

Identifique $\pi_1(Y, Q_0)$ com $H^{*n} = H_1 * \dots * H_n$, onde $H = \pi_1(X, P_0)$ e $H_k = \pi_1(X_k, P_k)$, para $k = 1, \dots, n$, sendo o k -ésimo isomorfismo $\phi_k : H \rightarrow H_i$ definido por

$$\phi_k([\beta]) = [\gamma_k f_k(\beta) \overline{\gamma_k}] \tag{5.3.17}$$

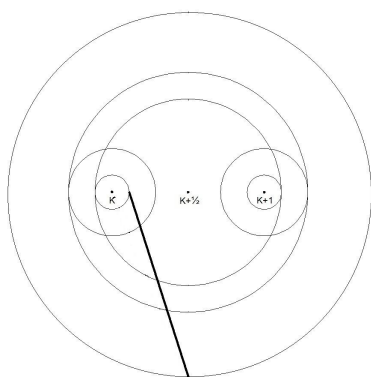
Temos assim, a seguinte proposição.

Proposição 5.3.8. *A representação $\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(\pi_1(Y, Q_0))$ descrita anteriormente coincide com a representação de tipo Artin de B_n associada ao par $(\pi_1(X, P_0), [\alpha])$.*

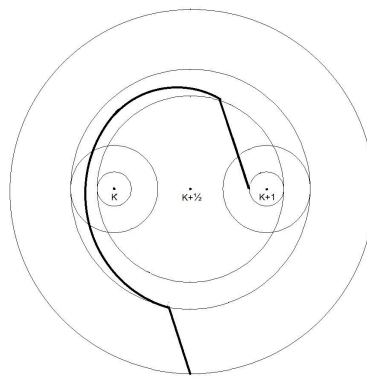
Demonstração. Seja β um caminho em X baseado em P_0 . Primeiro observe, com ajuda dos desenhos, o seguinte:

$$(a) \quad T_k(\gamma_k f_k(\beta) \overline{\gamma_k}) \simeq \gamma_k \overline{\alpha_k} \overline{\gamma_k} \gamma_{k+1} f_{k+1}(\beta) \overline{\gamma_{k+1}} \gamma_k \alpha_k \overline{\gamma_k}$$

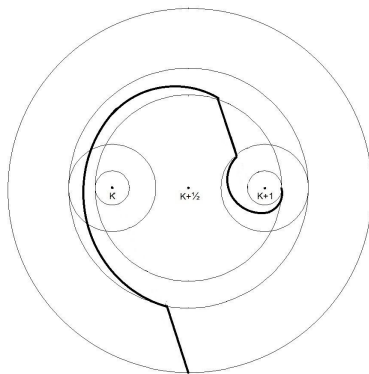
Tabela 5.1: Transformação do caminho $\gamma_k f_k(\beta) \overline{\gamma_k}$ sob a aplicação T_k .



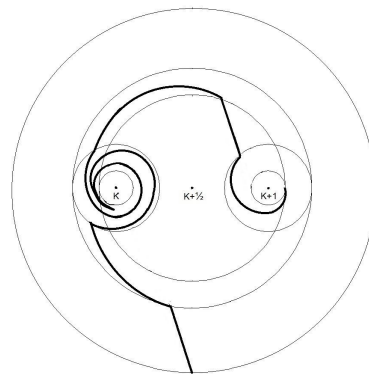
(1)
 $\gamma_k f_k(\beta) \overline{\gamma_k}$



(2)
 $T(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon)(\gamma_k f_k(\beta) \overline{\gamma_k})$



(3)
 $T(k + 1, \epsilon, 2\epsilon)^{-1}((2))$



(4)
 $T_k(\gamma_k f_k(\beta) \overline{\gamma_k})$

Onde (4) da tabela 5.1 é homotópico ao caminho da figura 5.5.

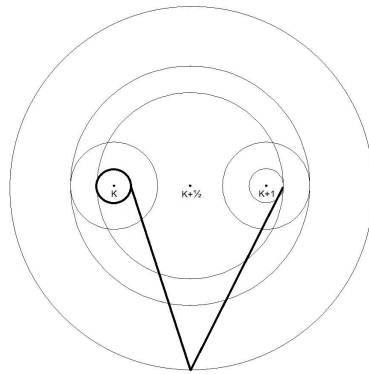


Figura 5.5: $\gamma_k \overline{\alpha_k} \overline{\gamma_k} \gamma_{k+1} f_{k+1}(\beta) \overline{\gamma_{k+1}} \gamma_k \alpha_k \overline{\gamma_k}$

(b) $T_k(\gamma_{k+1} f_{k+1}(\beta) \overline{\gamma_{k+1}}) \simeq \gamma_k \alpha_k f_k(\beta) \overline{\alpha_k} \overline{\gamma_k}$

Onde (3) da tabela 5.2 é homotópico ao caminho da figura 5.6.

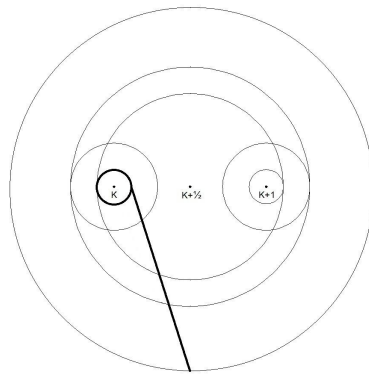
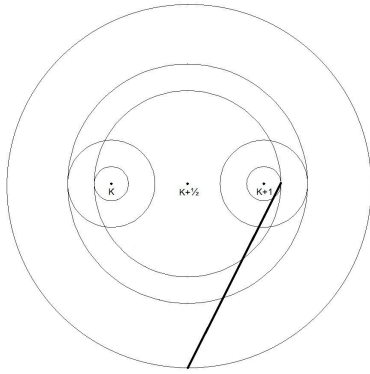
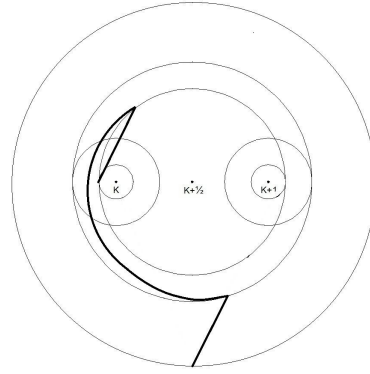


Figura 5.6: $\gamma_k \alpha_k f_k(\beta) \overline{\alpha_k} \overline{\gamma_k}$

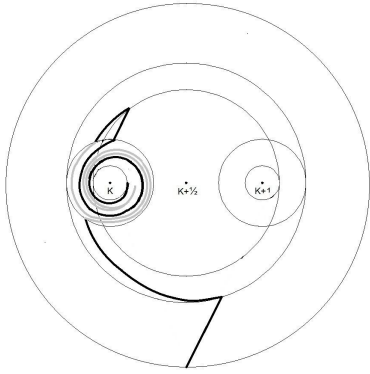
Tabela 5.2: Transformação do caminho $\gamma_{k+1}f_{k+1}(\beta)\overline{\gamma_{k+1}}$ sob a aplicação T_k .



(1)
 $\gamma_{k+1}f_{k+1}(\beta)\overline{\gamma_{k+1}}$



(2)
 $T(k + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} + 2\epsilon)(\gamma_{k+1}f_{k+1}(\beta)\overline{\gamma_{k+1}})$



(3)
 $T_k(\gamma_{k+1}f_{k+1}(\beta)\overline{\gamma_{k+1}})$

(c) $T_k(\gamma_j f_j(\beta)\overline{\gamma_j}) \simeq \gamma_j f_j(\beta)\overline{\gamma_j}$, para $j \neq k, k + 1$.

Lembrando que $\alpha_k = f_k \circ \alpha$, segue que

$$(T_k)_* : \begin{cases} \phi_k([\beta]) \mapsto \phi_k([\alpha])^{-1} \phi_{k+1}([\beta]) \phi_k([\alpha]) \\ \phi_{k+1}([\beta]) \mapsto \phi_k([\alpha]) \phi_k([\beta]) \phi_k([\alpha])^{-1} \\ \phi_j([\beta]) \mapsto \phi_j([\beta]) \end{cases} \quad , \text{ para } j \neq k, k + 1 \quad (5.3.18)$$

□

Agora vamos construir um invariante de enlaçamentos usando a representação ρ da proposição anterior. Vamos associar a um enlaçamento L o espaço $\Omega(L, X)$ obtido mediante uma "cirurgia" sobre L . Descrevemos este processo a seguir. Seja $L = K_1 \cup \dots \cup K_m$ o enlaçamento cujas componentes são os nós K_1, \dots, K_m , e considere $\{T_i : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3\}_{i=1}^m$ o framing preferido de L . Denote por $\overset{\circ}{T}_i$ o interior de $T_i(D^2 \times S^1)$ para $i = 1, \dots, m$. Considere o espaço

$$\Omega'(L) = S^3 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m \overset{\circ}{T}_i \right) \quad (5.3.19)$$

Considere m cópias X_1, \dots, X_m de X e denote por $f_i : X \rightarrow X_i$ o homeomorfismo natural e escreva $\alpha_i = f_i \circ \alpha$, para todo $i = 1, \dots, m$. Então definimos

$$\Omega(L, X) = \left(\Omega'(L) \dot{\cup} \left(\bigcup_{i=1}^m (X_i \times S^1) \right) \right) / \sim \quad (5.3.20)$$

onde \sim é a identificação dada por

$$(\alpha_i(t), \eta) \sim T_i(e^{2\pi it}, \eta), \text{ para } i = 1, \dots, m, t \in [0, 1] \text{ e } \eta \in S^1 \quad (5.3.21)$$

O seguinte teorema fornece uma segunda prova do fato que $\Gamma_{(H,h)}$ é um invariante de enlaçamentos para qualquer grupo finitamente gerado H e qualquer elemento $h \in H$.

Teorema 5.3.9. *Seja β uma trança e $\widehat{\beta}$ o fecho da trança β (ou a trança fechada associada a β). Seja X um complexo CW com ponto base P_0 . Então*

$$\pi_1(\Omega(\widehat{\beta}, X)) \simeq \Gamma_{(H,h)}(\beta) \quad (5.3.22)$$

onde $H = \pi_1(X, P_0)$ e $h = [\alpha]$, onde α é um laço em X baseado em P_0 .

Demonstração. Usemos a decomposição de S^3 em duas cópias T_1 e T_2 do toro sólido $\mathbf{D} \times \mathbf{S}^1$, de maneira que

$$S^3 = T_2 \cup_{\kappa} T_1$$

onde $\kappa : \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$ é um homeomorfismo tal que $\kappa(\partial \mathbf{D}) = S^1$ e $\kappa(S^1) = \partial \mathbf{D}$ (veja [6]).

Seja $g : T_1 \rightarrow S^3$ a função inclusão e seja $f : \mathbf{D} \times [0, 1] \rightarrow T_1 = \mathbf{D} \times S^1$ a aplicação

identificação definida por

$$f(p, t) = (p, e^{2\pi it}) \text{ para } p \in \mathbf{D} \text{ e } t \in [0, 1]$$

Note que de fato f é uma identificação pois f é sobrejetora, $\mathbf{D} \times [0, 1]$ é compacto e T_1 é espaço de Hausdorff (proposição 3.1.13).

A trança fechada $\widehat{\beta}$ é o enlaçamento orientado que é visto como a composição da trança $\beta : \{1, \dots, n\} \times [0, 1] \rightarrow D \times [0, 1]$ (tal como vimos no capítulo 4) com a aplicação $g \circ f : \mathbf{D} \times [0, 1] \rightarrow S^3$. A orientação de $\widehat{\beta}$ é induzida pela orientação do intervalo $[0, 1]$, como se mostra na figura 5.1. Agora vamos produzir um framing Λ de $\widehat{\beta}$ pela escolha de uma longitude λ_i para cada componente K_i de $\widehat{\beta}$ cuja projeção é indicada na figura 5.7 nas proximidades dos cruzamentos. É fácil ver, pela contagem dos cruzamentos, que este é o framing preferido de $\widehat{\beta}$.

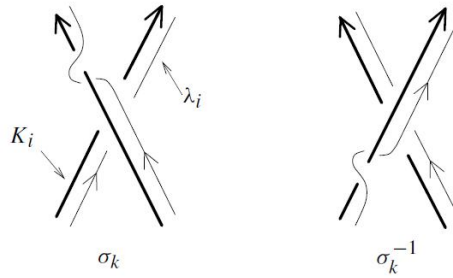


Figura 5.7: Escolhendo um framing para $\widehat{\beta}$.

Escreva $\beta = \sigma_{k_1}^{\epsilon_1} \dots \sigma_{k_r}^{\epsilon_r}$ e defina $T_\beta^{\mathbf{D}} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ por

$$T_\beta^{\mathbf{D}} = (T_{k_1}^{\mathbf{D}})^{\epsilon_1} \circ \dots \circ (T_{k_r}^{\mathbf{D}})^{\epsilon_r}$$

Analogamente, defina $T_\beta : Y \rightarrow Y$ por

$$T_\beta = T_{k_1}^{\epsilon_1} \circ \dots \circ T_{k_r}^{\epsilon_r}$$

Para $j = 1, \dots, n$, escolha $b_j = j + \epsilon \in \partial D(j, \epsilon)$ como ponto base do espaço X_j quando este é adjuntado a \mathbf{D} mediante a identificação (5.3.3).

Pelo corolário 5.3.5, $T_{k_j}^{\mathbf{D}}$ é isotópica à $Id_{\mathbf{D}}$ relativamente a $\partial \mathbf{D}$, logo pela observação

3.4.6, temos que $T_\beta^{\mathbf{D}}$ é isotópico à $Id_{\mathbf{D}}$ relativamente a $\partial\mathbf{D}$. Portanto, existe um homeomorfismo

$$U : \mathbf{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{D} \times [0, 1]$$

tal que $U(x, 0) = (x, 0)$ e $U(x, 1) = (T_\beta^{\mathbf{D}}(x), 1)$, para todo x em \mathbf{D} . Além disso, U fixa $\partial\mathbf{D} \times [0, 1]$ ponto a ponto.

Observe que U aplica o conjunto

$$\bigcup_{j=1}^n D(j, \epsilon) \times [0, 1]$$

numa vizinhança tubular (do representante) da trança β , e $g \circ f \circ U$ aplica $\{b_j \times [0, 1] : j = 1, \dots, n\}$ no framing da trança fechada $\widehat{\beta}$ equivalente àquele descrito na figura 5.7, a saber o framing preferido.

Portanto, o espaço $\Omega(\widehat{\beta}, X)$ é homeomorfo a $T'_1 \cup T_2$ onde

$$T'_1 = Y \times [0, 1] / ((x, 0) \sim (T_\beta(y), 1))$$

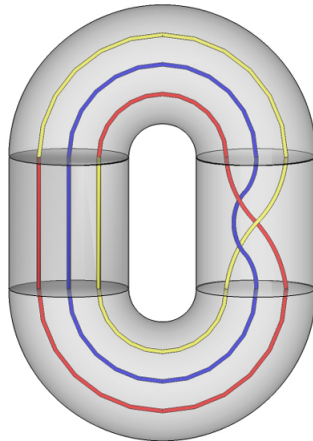


Figura 5.8: Exemplo do espaço T'_1

Pelo exemplo 3.5.11 do capítulo 3, temos (a extensão HNN):

$$\pi_1(T'_1) \simeq \pi_1(Y, Q_0) * \langle t \rangle / \langle t^{-1}xt = (T_\beta)_*(x) : x \in \pi_1(Y, Q_0) \rangle^N$$

com t de ordem infinita e onde $N = \pi_1(Y, Q_0) * \langle t \rangle$. Assim,

$$\pi_1(T'_1) \simeq \pi_1(Y, Q_0) * \langle t \rangle / \langle t^{-1}xt = \rho(\beta)(x) : x \in \pi_1(Y, Q_0) \rangle^N$$

Quando adjuntamos T'_1 a T_2 o gerador t de $\pi_1(T'_1)$ é anulado da mesma maneira como são anulados os geradores m e l de $\pi_1(S^1 \times S^1)$. Portanto, do corolário 3.5.3 e usando a notação deste capítulo, obtemos

$$\pi_1(\Omega(\widehat{\beta}, X)) \simeq H^{*n} / \langle x = \rho(\beta)(x) : x \in H^{*n} \rangle^{H^{*n}} = \Gamma_{(H,h)}(\beta)$$

□

5.4 Fidelidade da Representação de Tipo Artin

Nesta seção pretendemos demonstrar a fidelidade da representação de Artin para o caso em que o elemento h é não trivial, pois como já vimos no exemplo 5.1.3, para h trivial ρ tem como kernel ao grupo das tranças puras.

Definição 5.4.1. *Sejam G e F grupos tal que G é representado em $\text{Aut}(F)$, isto é, existe uma representação (homomorfismo) $\zeta : G \rightarrow \text{Aut}(F)$. Dizemos que a representação ζ é **fiel** se for injetora, isto é, se $\zeta(g) = \text{Id}_F$ então $g = e_G$.*

Relembramos que para um grupo H e um inteiro n positivo, denotamos por H^{*n} o produto livre $H_1 * \cdots * H_n$, onde cada fator livre H_i é uma copia de H mediante um isomorfismo dado e denotado por $\phi_i : H \rightarrow H_i$. Nosso objetivo então é demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 5.4.2. *Seja $\rho : B_n \rightarrow \text{Aut}(H^{*n})$ a representação do tipo Artin de B_n associada ao par (H, h) .*

- (1) *Se $h \neq e_H$ então ρ é fiel.*
- (2) *Se $h = e_H$ então $\ker(\rho)$ é o grupo das tranças puras e $B_n / \ker(\rho) \simeq \Sigma_n$, onde Σ_n atua por permutação dos fatores livres de H^{*n} , respeitando os isomorfismos ϕ_1, \dots, ϕ_n .*

Vamos precisar de algumas ferramentas para demonstrar a proposição anterior.

A primeira ferramenta é a seguinte.

Proposição 5.4.3 (Dehornoy: ver [9], [10]). *Seja $B_{[2,n]}$ o subgrupo de B_n gerado por $\sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Seja β em B_n . Então, ou β está em $B_{[2,n]}$, ou, uma das tranças β ou β^{-1} pode ser escrito como*

$$\alpha_0 \sigma_1 \alpha_1 \sigma_1 \dots \sigma_1 \alpha_l$$

onde $l \geq 1$ e $\alpha_0, \dots, \alpha_l \in B_{[2,n]}$.

A segunda ferramenta é um lema. Considere $h \neq e_H$ em H fixo e escreva $h_i = \phi_i(h)$, para $i = 1, \dots, n$.

Lema 5.4.4. *Seja $K = H_1 * \dots * H_n$. Seja μ em H^{*n} tal que a forma normal de μ respeito à decomposição $H^{*n} = H_1 * K$ começa com h_1^{-1} e termina com h_1 . Então:*

(1) *A forma normal de $\rho(\sigma_1)(\mu)$ com respeito à decomposição $H^{*n} = H_1 * K$ também começa com h_1^{-1} e termina com h_1 .*

(2) *Seja $k \in \{2, \dots, n-1\}$ e $\epsilon \in \{\pm 1\}$. A forma normal de $\rho(\sigma_k^\epsilon)(\mu)$ com respeito à decomposição $H^{*n} = H_1 * K$ também começa com h_1^{-1} e termina com h_1 .*

Demonstração. Seja v um elemento não trivial de $H_1 * H_2$. Pelo teorema da forma normal (teorema 1.4.5) podemos supor que v pode ser escrito como

$$v = \phi_1(x_1) \phi_2(y_1) \dots \phi_1(x_l) \phi_2(y_l)$$

onde $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l$ são elementos não triviais de H e $l \geq 1$. Aplicando o automorfismo $\rho(\sigma_1)$ a v obtemos

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_1)(v) &= h_1^{-1} \phi_2(x_1) h_1 h_1 \phi_1(y_1) h_1^{-1} \dots h_1^{-1} \phi_2(x_l) h_1 h_1 \phi_1(y_l) h_1^{-1} \\ &= h_1^{-1} \phi_2(x_1) h_1^2 \phi_1(y_1) h_1^{-2} \dots h_1^{-2} \phi_2(x_l) h_1^2 \phi_1(y_l) h_1^{-1} \end{aligned}$$

Portanto, a forma normal de $\rho(\sigma_1(v))$ começa com h_1^{-1} . Analogamente se demonstra que se a forma normal de v for

$$v = \phi_2(y_1) \phi_1(x_1) \dots \phi_2(y_l) \phi_1(x_l)$$

onde $x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l$ são elementos não triviais de H e $l \geq 1$, então $\rho(\sigma_1)(v)$ termina com h_1 .

Agora, suponha que a forma normal de μ com respeito à decomposição

$$H^{*n} = (H_1 * H_2) * (H_3 * \dots * H_n)$$

é da forma

$$\mu = v_0 w_1 v_1 \dots w_l v_l$$

onde v_i é um elemento não nulo de $H_1 * H_2$ e w_i é um elemento não nulo de $H_3 * \dots * H_n$, para $i = 1, \dots, l$, e $l \geq 0$. Note que esta forma normal de μ está certa, pois se for da forma $v_0 w_1 v_1 \dots w_l$ ou da forma $w_1 v_1 \dots w_l v_l$, significaria que w_1 começa com h_1^{-1} , ou que w_l termina com h_1 , o que é uma contradição. Observe que v_0 começa com h_1^{-1} e que v_l termina com h_1 pois μ começa com h_1^{-1} e termina com h_1 . Além disso, note que $\rho(\sigma_1)$ deixa invariante o conjunto $H_1 * H_2$ e que $\rho(\sigma_1)$ é a identidade sobre $H_3 * \dots * H_n$. Portanto temos

$$\rho(\sigma_1)(\mu) = \rho(\sigma_1)(v_0) w_1 \rho(\sigma_1)(v_1) \dots w_l \rho(\sigma_1)(v_l)$$

Pelas observações feitas $\rho(\sigma_1)(v_0)$ começa com h_1^{-1} e $\rho(\sigma_1)(v_l)$ termina com h_1 com respeito à decomposição $H^{*n} = H_1 * K$. Isto demonstra a parte (1).

Para provar a parte (2), considere $k \in \{2, \dots, n-1\}$ e $\epsilon \in \{\pm 1\}$. Escreva

$$\mu = h_1^{-1} w_1 v_1 \dots v_{l-1} w_l h_1$$

com v_1, \dots, v_{l-1} elementos de H_1 não nulos e $w_1, \dots, w_l \in K$ também não nulos. Note que $\rho(\sigma_k^\epsilon)$ é a identidade em H_1 e que K fica invariante sob a aplicação $\rho(\sigma_k^\epsilon)$. Logo temos

$$\rho(\sigma_k^\epsilon)(\mu) = h_1^{-1} \rho(\sigma_k^\epsilon)(w_1) v_1 \dots v_{l-1} \rho(\sigma_k^\epsilon)(w_l) h_1$$

Ficando demonstrada a parte (2). □

Já estamos em condições de demonstrar a proposição 5.4.2.

Demonstração proposição 5.4.2. Vamos demonstrar só a parte (1) pois a parte (2) já foi

vista no exemplo 5.1.3. Vamos fazer indução sobre o número n . Suponha $n = 2$. Fazendo um cálculo simples e usando indução sobre o número l , obtemos

$$\begin{aligned}\rho(\sigma_1^{2l})(h_1) &= (h_2h_1)^{-l}h_1(h_2h_1)^l, \text{ para todo } l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ \rho(\sigma_1^{2l+1})(h_1) &= (h_2h_1)^{-l}h_1^{-1}h_2h_1(h_2h_1)^l, \text{ para todo } l \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Note que se $\rho(\sigma_1^{2l}) = h_1$, para algum inteiro l não nulo, então teríamos uma contradição com o teorema da forma normal para produtos livres (teorema 1.4.5). Portanto,

$$\rho(\sigma_1^{2l})(h_1) \neq h_1$$

para todo inteiro l não nulo. Analogamente, $\rho(\sigma_1^{2l+1})(h_1) \neq h_1$, para todo inteiro l . Portanto, $\rho : B_2 \rightarrow \text{Aut}(H_1 * H_2)$ satisfaz que $\rho(\beta) \neq \text{Id}_{H_1 * H_2}$ para toda 2-trança β não trivial, ou seja, ρ é fiel.

Suponha $n \geq 3$ e que se verifica o resultado para inteiros positivos m tais que $2 \leq m \leq n - 1$. Seja β uma trança não trivial em B_n , pela proposição 5.4.3, ou β é um elemento de $B_{[2,n]}$, ou, uma das tranças β ou β^{-1} se escreve como um produto

$$\alpha_0\sigma_1\alpha_1 \dots \sigma_1\alpha_l$$

onde $\alpha_0, \dots, \alpha_l$ são elementos de $B_{[2,n]}$, para algum inteiro $l \geq 1$.

Se β está em $B_{[2,n]}$ então pela hipótese de indução, $\rho(\beta)$ não é a identidade sobre $K = H_2 * \dots * H_n$. Logo, $\rho(\beta)$ não é a identidade de $H^{*n} = H_1 * K$.

Suponha $\beta = \alpha_0\sigma_1\alpha_1 \dots \sigma_1\alpha_l$. Observe que $\rho(\sigma_1\alpha_l)(h_1) = h_1^{-1}h_2h_1$ e portanto,

$$\begin{aligned}\rho(\beta)(h_1) &= \rho(\alpha_0\sigma_1\alpha_1 \dots \sigma_1\alpha_l)(h_1) \\ &= \rho(\alpha_0\sigma_1\alpha_1 \dots \alpha_{l-1}) \circ \rho(\sigma_1\alpha_l)(h_1) \\ &= \rho(\alpha_0\sigma_1\alpha_1 \dots \alpha_{l-1})(h_1^{-1}h_2h_1)\end{aligned}$$

pelo lema 5.4.4, $\rho(\beta)(h_1)$ começa com h_1^{-1} e acaba com h_1 . Assim, $\rho(\beta)(h_1) \neq h_1$ (a igualdade contradiz o teorema da forma normal para produtos livres). Portanto $\rho(\beta) \neq \text{Id}_{H^{*n}}$.

Finalmente, se $\beta^{-1} = \alpha_0 \sigma_1 \alpha_1 \dots \sigma_1 \alpha_l$, então pelo caso anterior, $\rho(\beta^{-1}) \neq Id_{H^{*n}}$, ou seja, $\rho(\beta)^{-1} \neq Id_{H^{*n}}$, e portanto, $\rho(\beta) \neq Id_{H^{*n}}$. \square

5.5 Alguns Exemplos

Nesta seção vamos fazer alguns cálculos para exemplificar o modo de obter o grupo associado a um enlaçamento (ou nó) do presente capítulo. Seja $\rho : B_n \rightarrow Aut(H^{*n})$ a representação tipo Artin de B_n . Lembramos que H^{*n} denota o produto livre de n cópias H_1, \dots, H_n de um grupo H arbitrário, que h é um elemento arbitrário fixo em H , e que $\phi_k : H \rightarrow H_k$ é um isomorfismo, para $k = 1, \dots, n$. Denotaremos por y_k o elemento no k -ésimo fator livre H_k de H^{*n} que é imagem de um elemento y em H sob o isomorfismo ϕ_k . Com estas notações temos que o automorfismo τ_k de H^{*n} fica definido por

$$\tau_k : \begin{cases} y_k & \mapsto h_k^{-1} y_{k+1} h_k \\ y_{k+1} & \mapsto h_k y_k h_k^{-1} \\ y_j & \mapsto y_j \end{cases}, \text{ se } j \neq k, k+1$$

e seu inverso por

$$\tau_k^{-1} : \begin{cases} y_k & \mapsto h_{k+1}^{-1} y_{k+1} h_{k+1} \\ y_{k+1} & \mapsto h_{k+1} y_k h_{k+1}^{-1} \\ y_j & \mapsto y_j \end{cases}, \text{ se } j \neq k, k+1$$

Temos algumas observações óbvias:

$$\begin{aligned} \tau_k(h_k) &= h_k^{-1} h_{k+1} h_k; & \tau_k(h_{k+1}) &= h_k \\ \tau_k^{-1}(h_k) &= h_{k+1}; & \tau_k^{-1}(h_{k+1}) &= h_{k+1} h_k h_{k+1}^{-1} \end{aligned}$$

Usaremos o método dado em [3], pag. 73, para encontrar a trança cujo fecho é o enlaçamento (ou nó) em estudo.

Considere o nó trevo T .

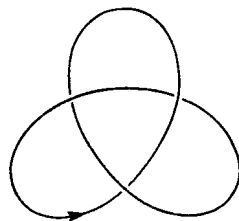


Figura 5.9: O nó Trevo T.

É fácil verificar que $T = \widehat{\sigma_1^{-3}}$. Portanto, $\rho : B_2 \rightarrow \text{Aut}(H^{*2})$ satisfaz $\rho(\sigma_1^{-3}) = \tau_1^{-3}$. Temos para y_1 em H_1

$$\begin{aligned}\tau_1^{-3}(y_1) &= \tau_1^{-2}(h_2^{-1}y_2h_2) \\ &= \tau_1^{-1}(h_2h_1^{-1}h_2^{-1}h_2y_1h_2^{-1}h_2h_1h_2^{-1}) \\ &= \tau_1^{-1}(h_2h_1^{-1}y_1h_1h_2^{-1}) \\ &= h_2h_1h_2^{-1}h_2^{-1}h_2^{-1}y_2h_2h_2h_2h_1^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_2h_1h_2^{-3}y_2h_2^3h_1^{-1}h_2^{-1}\end{aligned}$$

e para y_2 em H_2

$$\begin{aligned}\tau_1^{-3}(y_2) &= \tau_1^{-2}(h_2y_1h_2^{-1}) \\ &= \tau_1^{-1}(h_2h_1h_2^{-1}h_2^{-1}y_2h_2h_2h_1^{-1}h_2^{-1}) \\ &= \tau_1^{-1}(h_2h_1h_2^{-2}y_2h_2^2h_1^{-1}h_2^{-1}) \\ &= h_2h_1h_2^{-1}h_2h_2h_1^{-2}h_2^{-1}h_2y_1h_2^{-1}h_2h_1^2h_2^{-1}h_2h_1^2h_2^{-1}h_2^{-1}h_2h_1^{-1}h_2^{-1} \\ &= h_2h_1h_2h_1^{-2}y_1h_1^2h_2^{-1}h_1^{-1}h_2^{-1}\end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma(T)$ é quociente de $H_1 * H_2$ pelas relações

- $y_1 = h_2h_1h_2^{-3}y_2h_2^3h_1^{-1}h_2^{-1}$
- $y_2 = h_2h_1h_2h_1^{-2}y_1h_1^2h_2^{-1}h_1^{-1}h_2^{-1}$

para todo $y_k \in H_k$, com $k = 1, 2$. Como estas relações valem para todo elemento de H_1 e H_2 , temos em particular

$$h_1 = h_2h_1h_2^3h_2h_2^3h_1^{-1}h_2^{-1} \Leftrightarrow h_1h_2h_1 = h_2h_1h_2 \quad (1)$$

e

$$h_2 = h_2h_1h_2h_1^{-2}h_1h_1^2h_2^{-1}h_1^{-1}h_2^{-1} \Leftrightarrow h_1h_2h_1 = h_2h_1h_2 \quad (1)$$

Usando (1) em $y_1 = \tau_1^{-3}(y_1)$ obtemos $y_1 = h_1^{-3}h_2h_1y_2h_2^3h_1^{-1}h_2^{-1}$, que é equivalente a $h_1^3y_1h_2h_1 = h_2h_1y_2h_2^3$. Analogamente, usando (1) em $y_2 = \tau_1^{-3}(y_2)$ obtemos $y_2 = h_2^{-1}h_1h_2y_1h_1h_2^{-1}h_1^{-1}$ e portanto, $h_2y_2h_1h_2 = h_1h_2y_1h_1$. Assim, $\Gamma(T)$ é quociente de $H_1 * H_2$ pelas relações

$$(1) \quad h_1h_2h_1 = h_2h_1h_2$$

$$(2) \quad h_1^3y_1h_2h_1 = h_2h_1y_2h_2^3$$

$$(3) \quad h_2y_2h_1h_2 = h_1h_2y_1h_1$$

para todo $y_k \in H_k$, com $k = 1, 2$.

Agora vamos estudar um exemplo um pouco mais complexo. Seja M o nó Granny (ver figura 5.10).

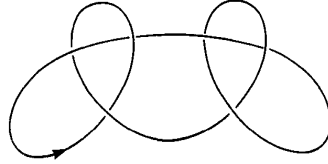


Figura 5.10: O nó Granny.

Usando o método de [3], pag. 73, obtemos que

$$M = \widehat{\beta} \text{ onde } \beta = \sigma_2^{-3} \sigma_1^{-3}$$

Aqui β é uma 3-trança e portanto $\rho : B_3 \rightarrow \text{Aut}(H^{*3})$ aplica $\beta \mapsto \tau_2^{-3} \circ \tau_1^{-3}$. Sabemos pelo trabalho feito anteriormente que

$$\tau_1^{-3} : \begin{cases} y_1 \mapsto h_2 h_1 h_2^{-3} y_2 h_2^3 h_1^{-1} h_2^{-1} \\ y_2 \mapsto h_2 h_1 h_2 h_1^{-2} y_1 h_1^2 h_2^{-1} h_1^{-1} h_2^{-1} \\ y_3 \mapsto y_3 \end{cases}$$

Agora vamos aplicar τ_2^{-3} e assim calcularemos $\Gamma(M)$. Temos,

$$\begin{aligned} \tau_2^{-3} \circ \tau_1^{-3}(y_1) &= \tau_2^{-3}(h_2 h_1 h_2^{-3} y_2 h_2^3 h_1^{-1} h_2^{-1}) \\ &= \tau_2^{-2}(h_3 h_1 h_3^{-3} h_3^{-1} y_3 h_3 h_3^3 h_1^{-1} h_3^{-1}) \\ &= \tau_2^{-2}(h_3 h_1 h_3^{-4} y_3 h_3^4 h_1^{-1} h_3^{-1}) \\ &= \tau_2^{-1}(h_3 h_2 h_3^{-1} h_1 h_3 h_2^{-4} h_3^{-1} h_3 y_2 h_3^{-1} h_3 h_2^4 h_4^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2^{-1} h_3^{-1}) \\ &= \tau_2^{-1}(h_3 h_2 h_3^{-1} h_1 h_3 h_2^{-4} y_2 h_2^4 h_3^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2^{-1} h_3^{-1}) \\ &= h_3 h_2 h_3^{-1} h_3 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1 h_3 h_2 h_3^{-1} h_3^{-4} h_3^{-1} y_3 h_3 h_3^4 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2 h_3^{-1} h_3^{-1} h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} \\ &= h_3 h_2 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1 h_3 h_2 h_3^{-6} y_3 h_3^6 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2 h_3^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tau_2^{-3} \circ \tau_1^{-3}(y_2) &= \tau_2^{-3}(h_2 h_1 h_2 h_1^{-2} y_1 h_1^2 h_2^{-1} h_1^{-1} h_2^{-1}) \\ &= \tau_2^{-2}(h_3 h_1 h_3 h_1^{-2} y_1 h_1^2 h_3^{-1} h_1^{-1} h_3^{-1}) \\ &= \tau_2^{-1}(h_3 h_2 h_3^{-1} h_1 h_3 h_2 h_3^{-1} h_1^{-2} y_2 h_1^2 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2^{-1} h_3^{-1}) \\ &= h_3 h_2 h_3^{-1} h_3 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1 h_3 h_2 h_3^{-1} h_3 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-2} y_1 \\ &\quad h_1^2 h_3 h_2 h_3^{-1} h_3^{-1} h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2 h_3^{-1} h_3^{-1} h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} \\ &= h_3 h_2 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1 h_3 h_2 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-2} y_1 h_1^2 h_3 h_2 h_3^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2 h_3^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tau_2^{-3} \circ \tau_1^{-3}(y_3) &= \tau_2^{-3}(y_3) \\
&= \tau_2^{-2}(h_3 y_2 h_3^{-1}) \\
&= \tau_2^{-1}(h_3 h_2 h_3^{-1} h_3^{-1} y_3 h_3 h_3 h_2^{-1} h_3^{-1}) \\
&= \tau_2^{-1}(h_3 h_2 h_3^{-2} y_3 h_3^2 h_2^{-1} h_3^{-1}) \\
&= h_3 h_2 h_3^{-1} h_3 h_3 h_2^{-2} h_3^{-1} h_3 y_2 h_3^{-1} h_3 h_2^2 h_3^{-1} h_3^{-1} h_3 h_2^{-1} h_3^{-1} \\
&= h_3 h_2 h_3 h_2^{-2} y_2 h_2^2 h_3^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1}
\end{aligned}$$

Agora é possível determinar $\Gamma(M)$, mas primeiro estudemos as relações $h_i = \rho(\beta)h_i$, para $i = 1, 2, 3$, pois assim poderemos simplificar tais expressões. Temos $h_3 = \rho(\beta)h_3$, equivalente a

$$h_3 = h_3 h_2 h_3 h_2^{-2} h_2 h_2^2 h_3^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1}$$

e portanto, $h_2 h_3 h_2 = h_3 h_2 h_3$, relação que será denotada por (2). Usando (2) em $h_1 = \rho(\beta)h_1$ obtemos que essas relações são ambas equivalentes a $h_1 h_2 h_1 = h_2 h_1 h_2$, relação que denotaremos por (1). Usando (1) e (2) em $y_1 = \rho(\beta)y_1$ temos

$$\begin{aligned}
y_1 &= h_2 h_3 h_2 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1 h_3 h_2 h_3^{-6} y_3 h_3^6 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2 h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} \\
&= h_2 h_1 h_3 h_2 h_3^{-6} y_3 h_3^6 h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} \\
&= h_2 h_1 h_2^{-6} h_3 h_2 y_3 h_3^6 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-1} h_2^{-1} \\
&= h_1^{-6} h_2 h_1 h_3 h_2 y_3 h_3^6 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-1} h_2^{-1}
\end{aligned}$$

Que é equivalente a $h_1^6 y_1 h_2 h_1 h_3 h_2 = h_2 h_1 h_3 h_2 y_3 h_3^6$. Analogamente, em $y_2 = \rho(\beta)y_2$ temos

$$\begin{aligned}
y_2 &= h_2 h_3 h_2 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1 h_2 h_3 h_2 h_2^{-1} h_3^{-1} h_1^{-2} y_1 h_1^2 h_3 h_2 h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} h_1^{-1} h_3 h_2 h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} \\
&= h_2 h_1 h_2 h_1^{-2} y_1 h_1^2 h_2^{-1} h_1^{-1} h_2^{-1} \\
&= h_2^{-1} h_1 h_2 y_1 h_1 h_2^{-1} h_1^{-1}
\end{aligned}$$

Que é equivalente a $h_1 h_2 y_1 h_1 = h_2 y_2 h_1 h_2$. E por último em $y_3 = \rho(\beta)y_3$ temos

$$\begin{aligned}
y_3 &= h_2 h_3 h_2^{-1} y_2 h_2 h_3^{-1} h_2^{-1} \\
&= h_3^{-1} h_2 h_3 y_2 h_2 h_3^{-1} h_2^{-1}
\end{aligned}$$

Que é equivalente a $h_2 h_3 y_2 h_2 = h_3 y_3 h_2 h_3$. Assim, o grupo $\Gamma(M)$ associado a M é o quociente de $H_1 * H_2 * H_3$ pelas relações

$$(1) \quad h_i h_{i+1} h_i = h_{i+1} h_i h_{i+1}, \text{ para } i = 1, 2.$$

$$(2) \quad h_1 h_2 y_1 h_1 = h_2 y_2 h_1 h_2$$

$$(3) \quad h_2 h_3 y_2 h_2 = h_3 y_3 h_2 h_3$$

$$(4) \quad h_1^6 y_1 h_2 h_1 h_3 h_2 = h_2 h_1 h_3 h_2 y_3 h_3^6$$

para todo $y_k \in H_k$, com $k = 1, 2, 3$.

Outro exemplo de interesse é nó Square L (ver figura 5.11).

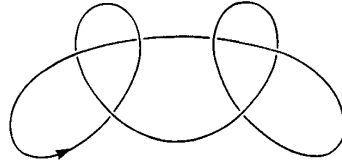


Figura 5.11: O nó Square.

Vamos calcular o grupo $\Gamma(L)$ associado ao nó L de maneira analoga à anterior. Usando o método de [3], pag. 73, obtemos que

$$L = \hat{\alpha} \text{ onde } \alpha = \sigma_2^3 \sigma_1^{-3}$$

Aqui α é uma 3-trança e portanto $\rho : B_3 \rightarrow \text{Aut}(H^{*3})$ aplica $\alpha \mapsto \tau_2^3 \circ \tau_1^{-3}$. Sabemos pelo trabalho feito anteriormente que

$$\tau_1^{-3} : \begin{cases} y_1 \mapsto h_2 h_1 h_2^{-3} y_2 h_2^3 h_1^{-1} h_2^{-1} \\ y_2 \mapsto h_2 h_1 h_2 h_1^{-2} y_1 h_1^2 h_2^{-1} h_1^{-1} h_2^{-1} \\ y_3 \mapsto y_3 \end{cases}$$

Agora vamos aplicar τ_2^3 e assim calcularemos $\Gamma(L)$. Temos,

$$\begin{aligned} \tau_2^3 \circ \tau_1^{-3}(y_1) &= \tau_2^3(h_2 h_1 h_2^{-3} y_2 h_2^3 h_1^{-1} h_2^{-1}) \\ &= \tau_2^2(h_2^{-1} h_3 h_2 h_1 h_2^{-1} h_3^{-3} h_2 h_2^{-1} y_3 h_2 h_2^{-1} h_3^3 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2) \\ &= \tau_2^2(h_2^{-1} h_3 h_2 h_1 h_2^{-1} h_3^{-3} y_3 h_3^3 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2) \\ &= \tau_2^1(h_2 h_3^{-1} h_2 h_2 h_2^{-1} h_3 h_2 h_1 h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_2^{-3} h_2 y_2 h_2^{-1} h_2^3 h_2^{-1} h_3 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_2^{-1} h_2^{-1} h_3 h_2) \\ &= \tau_2(h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_3 h_2 h_1 h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} y_2 h_2 h_3 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} h_3 h_2) \\ &= h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_2^{-1} h_2^{-1} h_3 h_2 h_2 h_2^{-1} h_3 h_2 h_1 h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_2^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_2^{-1} y_3 \\ &\quad h_2 h_2^{-1} h_3 h_2 h_2 h_2^{-1} h_3 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_2^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_2 h_2^{-1} h_3 h_2 \\ &= h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} h_3 h_2 h_3 h_2 h_1 h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} y_3 h_3 h_2 h_3 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2^{-1} h_3^{-1} h_2 h_3 h_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tau_2^3 \circ \tau_1^{-3}(y_2) &= \tau_2^3(h_2h_1h_2h_1^{-2}y_1h_1^2h_2^{-1}h_1^{-1}h_2^{-1}) \\
&= \tau_2^2(h_2^{-1}h_3h_2h_1h_2^{-1}h_3h_2h_1^{-2}y_1h_1^2h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_1^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2) \\
&= \tau_2(h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2h_2^{-1}h_3h_2h_1h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2h_2^{-1}h_3h_2h_1^{-2}y_1 \\
&\quad h_1^2h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2^{-1}h_2^{-1}h_3h_2h_1^{-1}h_2^{-2}h_3^{-1}h_2h_2^{-1}h_2^{-1}h_3h_2) \\
&= \tau_2(h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_3h_2h_1h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_3h_2h_1^{-2}y_1h_1^2h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^{-1}h_3h_2h_1^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^{-1}h_3h_2) \\
&= h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2^{-1}h_2^{-1}h_3h_2h_2h_2^{-1}h_3h_2h_1h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2^{-1}y_3 \\
&\quad h_2h_2^{-1}h_3h_2h_2h_2^{-1}h_3h_2h_1^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2h_2^{-1}h_3h_2 \\
&= h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^{-1}h_3h_2h_3h_2h_1h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^{-1}h_3h_2h_3h_2h_1^{-2}y_1 \\
&\quad h_1^2h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_3h_2h_1^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_3h_2
\end{aligned}$$

e por último,

$$\begin{aligned}
\tau_2^3 \circ \tau_1^3(y_3) &= \tau_2^3(y_3) \\
&= \tau_2^2(h_2y_2h_2^{-1}) \\
&= \tau_2(h_2^{-1}h_3h_2h_2^{-1}y_3h_2h_2^{-1}h_3^{-1}h_2) \\
&= \tau_2(h_2^{-1}h_3y_3h_3^{-1}h_2) \\
&= h_2^{-1}h_3^{-1}h_2h_2h_2y_2h_2^{-1}h_2^{-1}h_2^{-1}h_3h_2 \\
&= h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^3y_2h_2^{-3}h_3h_2
\end{aligned}$$

Usando (1) e (2) em $y_1 = \rho(\alpha)y_1$ temos

$$\begin{aligned}
y_1 &= h_2h_1h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^{-1}h_3^{-1}y_3h_3h_2h_3h_2h_1^{-1}h_2^{-1} \\
&= h_2h_1h_2^{-2}h_3^{-1}h_2^{-1}y_3h_2h_3h_2^2h_1^{-1}h_2^{-1} \\
&= h_1^{-2}h_2h_1h_3^{-1}h_2^{-1}y_3h_2h_3h_2^2h_1^{-1}h_2^{-1}
\end{aligned}$$

Que é equivalente a $h_2h_3h_1^{-1}h_2^{-1}h_1^2y_1 = y_3h_2h_3h_1^{-1}h_2^{-1}h_1^2$. Usando (1) e (2) em $y_2 = \rho(\alpha)y_2$ temos

$$\begin{aligned}
y_2 &= h_2h_1h_2h_1^{-2}y_1h_1^2h_2^{-1}h_1^{-1}h_2^{-1} \\
&= h_2^{-1}h_1h_2y_1h_1h_2^{-1}h_1^{-1}
\end{aligned}$$

Que é equivalente a $h_2y_2h_1h_2 = h_1h_2y_1h_1$. E analogamente em $y_3 = \rho(\alpha)y_3$ temos

$$\begin{aligned}
y_3 &= h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^3y_2h_2^{-3}h_3h_2 \\
&= h_2^{-1}h_3^{-1}h_2^3y_2h_3h_2h_3^{-3}
\end{aligned}$$

Que é equivalente a $h_3h_2y_3h_3^3 = h_2^3y_2h_3h_2$. Assim, o grupo $\Gamma(L)$ associado a L é o quociente de $H_1 * H_2 * H_3$ pelas relações

$$(1) \quad h_ih_{i+1}h_i = h_{i+1}h_ih_{i+1}, \text{ para } i = 1, 2.$$

$$(2) \quad h_1h_2y_1h_1 = h_2y_2h_1h_2$$

$$(3) \quad h_2^3y_2h_3h_2 = h_3h_2y_3h_3^3$$

$$(4) \quad h_2 h_3 h_1^{-1} h_2^{-1} h_1^2 y_1 = y_3 h_2 h_3 h_1^{-1} h_2^{-1} h_1^2$$

para todo $y_k \in H_k$, com $k = 1, 2, 3$

Índice Remissivo

- apresentação, 11
 - finita, 11
- base, 9
- complexo CW, 58
- conjunto
 - das consequências, 11
 - de geradores, 11
 - de relatores, 11
 - de relatores definidores, 11
- consequência, 11
- Dehn
 - meia torção de, 87
- espaço
 - contrátil, 51
 - simplesmente conexo, 51
- framing, 77
 - preferido, 78
- grupóide, 22
 - árvore, 24
 - conexo, 25
 - discreto, 24
- grupo
 - de um enlaçamento, 76
 - finitamente apresentado, 11
 - grupo livre, 9
- homotopia
 - de caminhos, 47
 - de funções, 50
 - equivalência de,, 51
- isotopia, 52
 - ambiente, 53
 - relativa, 52
- letras, 6
- livre sobre, 4
- longitude, 77
- monóide, 5
 - livre, 5
- Multiplicação Parcial, 21
- Nó
 - Granny, 106
 - Square, 108
 - Trevo, 104
- número de enlaçamentos, 78
- palavra, 6
 - comprimento, 6
- posto, 9

Push out

grupóides, 29

grupos, 17

redução, 6

elementar, 6

relação, 11

Representação de grupo, 100

fiel, 100

retrato, 54

por deformação, 54

símbolos geradores, 11

subgrupóide, 24

completo, 24

Teorema

Alexander, 71

da apresentação de Artin, 65

da representação de Artin, 65

forma normal para grupos livres, 8

Markov, versão algébrica, 75

Markov, versão geométrica, 74

Seifert-Van Kampen, 53

Von Dyck, 12

vizinhança tubular, 77

Referências Bibliográficas

- [1] D. E. COHEN - *Combinatorial Group Theory: A Topological Approach*, Cambridge University Press, 1989.
- [2] J. S. BIRMAN - *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Math. Studies 82, Princeton University Press, 1973.
- [3] V. L. HANSEN - *Braids and Coverings: Selected Topics*, Cambridge University Press, 1989.
- [4] W. S. MASSEY - *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt, Brace and World Inc., 1967.
- [5] JOHN CRISP AND LUIS PARIS - *Representations of the braid group by automorphisms of groups, invariants of links and Garside group*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 221, número 1, 1-28, setembro 2005.
- [6] DALE ROLFSEN - *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing, 1976.
- [7] V. SHPILRAIN - *Representing braids by automorphisms*, Internat. J. Algebra Comput. **11**:6 (2001), 773-777. MR 2003a:20061 Zbl 1024.20036
- [8] M. WADA - *Group invariants of links*, Topology **31**:2 (1992), 399-406. MR 94e:57014 Zbl 0758.57008
- [9] P. DEHORNOY - *Braids groups and left distributive operations*, Trans. Amer. Math. Soc. **345**:1 (1994), 115-150. MR 95a:08003 Zbl 0882.20021
- [10] P. DEHORNOY - *A fast method for computing braids*, Adv. Math. **125**:2 (1997), 200-235. MR 98b:20060 Zbl 0882.20021