**CLASSIFICAÇÃO E TOPOLOGIA
DE VARIEDADES SINGULARES
PARAMETRIZADAS POR
MULTIGERMES**

ROBERTA GODOI WIK ATIQUE

Orientador:

Prof. Dr. David Mond

Co-orientadora:

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

*Tese apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas de São Carlos da Universida-
de de São Paulo, como parte dos requisitos
necessários para obtenção do título de Dou-
tor em Ciências - Área: Matemática.*

USP - São Carlos

Março - 1998

A Mariana

Agradeço a ti, ó Deus, pelas bênçãos que tens derramado sobre nossas vidas, em especial pela conclusão deste trabalho.

*Por que estás abatida, ó minha alma?
Por que te perturbas dentro de mim?
Espera em Deus, pois ainda o louvarei,
a ele, meu auxílio e Deus meu.*

Salmo 42:5.

*Grandes cousas fez o Senhor por nós;
por isso, estamos alegres.*

Salmo 126:3.

AGRADECIMENTOS

Ao Evandro, o meu agradecimento todo especial pelo apoio sempre presente, por ter me suportado quando estava insuportável, por ter deixado tudo aqui e me acompanhado até a Inglaterra.

Aos meus pais, com muito carinho, por tudo que sempre fizeram por mim.

Tive a honra de trabalhar com dois nomes importantes em Teoria de Singularidades. Mais do que isto, encontrei dois amigos que me ensinaram, incentivaram e colaboraram decisivamente para a realização deste trabalho. Aos meus orientadores David Mond e Maria Aparecida Soares Ruas meu mais sincero agradecimento.

À Miriam e Camilo pela acolhida em Coventry.

Aos colegas do Departamento de Matemática do ICMSC-USP.

Ao Mathematics Institute da Universidade de Warwick, Inglaterra.

À CAPES.

RESUMO

Neste trabalho obtemos a classificação dos multigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ bem como resultados sobre sua topologia. Para estes multigerms mostramos que o complementar do conjunto de bifurcação é um espaço de Eilenberg-MacLane. Para alguns multigerms de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ de codimensão 1 e coposto 1, mostramos que sua forma real admite uma perturbação real cujo discriminante tem o mesmo tipo de homotopia que seu correspondente complexo.

ABSTRACT

In this work we obtain the classification of simple multigerms of maps from 2-space to 3-space and also some results about their topology. For some codimension 1 and corank 1 multigerms from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^p$, we show that we can find a real form and a real perturbation such that the inclusion of the real discriminant in that of the complexification induces an isomorphism on the vanishing homology.

Sumário

1	Introdução	1
2	Classificação de multigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$	5
2.1	Introdução	5
2.2	Resultados Gerais	7
2.3	Classificação de bigermes	18
2.4	Classificação de trigerms	27
2.5	Adjacências	35
2.5.1	Adjacências de bigermes	35
2.5.2	Adjacências de trigerms	36
3	A topologia do complementar do conjunto de bifurcação	37
3.1	Introdução	37
3.2	O conjunto de bifurcação	38
4	A topologia da imagem de uma perturbação estável	45
4.1	Introdução	45
4.2	Método Goryunov-Mond	46
4.3	O número de Milnor da imagem de certos monogermes e tri- germs	50

4.4	Invariantes	55
4.4.1	Bigerms	56
4.4.2	Trigerms	59
5	Multigerms de $\mathcal{A}_e$-codimensão 1	61
5.1	Introdução	61
5.2	Aumentação	62
5.3	Classificação de alguns multigerms de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 . . .	70
5.4	Topologia	86
6	Multigerms de $\mathcal{A}_e$-codimensão arbitrária	98
6.1	Introdução	98
6.2	Resultados gerais	99
6.3	Topologia da aumentação	100

Capítulo 1

Introdução

Classificar germes e encontrar formas normais é um problema clássico em teoria de singularidades. O conhecimento das formas normais permite estudar o comportamento de tais germes, em especial, sua topologia.

Uma outra questão é encontrar formas reais para germes complexos e para suas perturbações de modo que o discriminante real tenha o mesmo tipo de homotopia que seu correspondente complexo.

Este trabalho tem por objetivo explorar os conceitos acima para multigerms. Assim, obtemos a classificação dos multigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ bem como resultados sobre sua topologia. Para estes multigerms mostramos que o complementar do conjunto de bifurcação é um espaço de Eilenberg-MacLane, $K(\pi, 1)$. Para multigerms de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, $n \geq p$, de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e coposto 1, mostramos que as mudanças na topologia do discriminante complexo resultante de uma deformação do germe, podem ser observadas no correspondente real.

A classificação dos multigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$, que é obtida no Capítulo 2, completa a classificação dos germes simples iniciada por D.Mond.

Em [26] Mond classifica os monogermes simples de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ e obtem resultados parciais para bigermes. Em particular, Mond dá a lista dos monogermes simples, que vale também para o caso complexo.

Nosso método de classificação consiste em mostrar que a $\mathcal{A}$ -classificação de multigermes de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ se reduz à classificação de germes de funções definidas em $\mathbb{C}^{n+1}$, segundo o subgrupo $\mathcal{K}_V$ do grupo de contato $\mathcal{K}$.

No caso dos trigermes mostramos que existe uma forma normal dada por germes de funções numa variedade com bordo. Assim, a $\mathcal{A}$ -classificação de tais trigermes é equivalente à classificação (devida a V.I. Arnold) de germes de funções numa variedade com bordo com respeito a um subgrupo do grupo $\mathcal{K}$. Este fato é importante visto que alguns monogermes são obtidos destas mesmas funções.

No Capítulo 3 mostramos que o complementar do conjunto de bifurcação de um multigermes simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ é um espaço de Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$. Este resultado foi obtido por V.V. Goryunov em [3] para os monogermes simples.

Dado um multigermes f de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, finitamente determinado, $(n, n+1)$ no domínio das boas dimensões segundo Mather, podemos construir uma fibração definida na imagem de um desdobramento versal de f com valores no complementar do conjunto de bifurcação. A fibra tem o tipo de homotopia de um bouquet de n -esferas. O número de esferas no bouquet é chamado número de Milnor da imagem de f .

Os monogermes da forma $(x, y^2, yp(x, y^2))$ e os trigermes simples possuem o mesmo conjunto de bifurcação, a saber o discriminante da correspondente função do bordo. Logo surge a questão: qual a relação entre as fibrações acima descritas? No Capítulo 4 mostramos que as fibras são homotópicas. Para isto usamos o método desenvolvido por D. Mond e V.V. Goryunov, que

utiliza seqüências espectrais, para calcular o número de Milnor da imagem de um germe.

Os resultados acima descritos estão reunidos no artigo *On the classification of multigerms of maps from $\mathbb{C}^2$ to $\mathbb{C}^3$ under $\mathcal{A}$ -equivalence*, que foi submetido para publicação no Quarterly Journal of Mathematics, da Universidade de Oxford, Inglaterra.

Em sua tese de doutorado na Universidade de Warwick, T.Cooper classifica multigerms de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ de coposto 1 e $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Ele também prova que tais multigerms têm número de Milnor da imagem igual a 1 e possuem formas reais com boas perturbações reais. Resultados análogos foram obtidos por D.Mond para monogerms de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, $n \geq p$, de coposto 1 e $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, substituindo imagem por discriminante. O método de Cooper consiste na aumentação, que é um processo através do qual se obtém novos multigerms de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 a partir de multigerms também de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Ele obtém uma classificação de multigerms primitivos (não aumentados) de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ e mostra que alguns resultados sobre a topologia de germes podem ser estendidos para suas aumentações. No Capítulo 5 descrevemos as técnicas acima, que são utilizadas para mostrar que multigerms de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, $n \geq p$, de coposto 1 e $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 são quasihomogêneos, logo têm número de Milnor do discriminante igual a 1, e possuem formas reais com boas perturbações reais. Estes resultados reforçam a conjectura de que todas as singularidades de codimensão 1 possuem formas reais com boas perturbações reais, e estão reunidos no preprint *Vanishing topology of codimension 1 multigerms over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$* .

Um resultado central do Capítulo 5 mostra que o discriminante de uma perturbação estável da aumentação é a suspensão do discriminante de uma perturbação estável do germe. No Capítulo 6 definimos aumentação para

multigerms de codimensão arbitrária e mostramos um resultado análogo ao acima descrito.

Capítulo 2

Classificação de multigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$

2.1 Introdução

Nosso objetivo neste capítulo é obter a lista completa dos multigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$.

A lista dos monogermes simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ obtida por D.Mond em [26] é a seguinte:

<i>Monogermes</i>	$\mathcal{A}_e - \text{codim}$	<i>Nome</i>
$f(x, y) = (x, y, 0)$	0	<i>Imersão</i>
$f(x, y) = (x, y^2, xy)$	0	<i>Cross-cap (S_0)</i>

<i>Monogermes</i>	$\mathcal{A}_e - \text{codim}$	<i>Nome</i>
$f(x, y) = (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y), \quad k \geq 1$	k	S_k
$f(x, y) = (x, y^2, x^2y + y^{2k+1}), \quad k \geq 2$	k	B_k
$f(x, y) = (x, y^2, xy^3 + x^ky), \quad k \geq 3$	k	C_k
$f(x, y) = (x, y^2, x^3y + y^5)$	4	F_4
$f(x, y) = (x, y^3, xy + y^{3k-1}), \quad k \geq 2$	k	H_k

Existem 5 multigerms de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, que são:

1. S_1 .
2. Contato não transversal de duas folhas imersas.
3. Intersecção de cross-cap e plano imerso.
4. Intersecção quadrupla.
5. Intersecção de 3 folhas imersas, duas a duas transversais onde cada folha tem contato do tipo A_1 com a intersecção das outras duas.

Em [18], C.Hobbs e N.Kirk obtêm a lista de multigerms simples de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ usando um método diferente.

2.2 Resultados Gerais

Seja S um subconjunto de $\mathbb{C}^n$. Consideremos o conjunto das aplicações analíticas $U \rightarrow \mathbb{C}^p$ cujo domínio U é uma vizinhança de S em $\mathbb{C}^n$. Neste conjunto introduzimos a seguinte relação de equivalência: duas aplicações $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}^p$ são equivalentes se existir uma vizinhança W de S em $\mathbb{C}^n$ tal que $f|_W = g|_W$. As classes de equivalência são chamadas **multigerms** de f em S e denotadas por $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(S))$. Quando S consiste de um único elemento tais classes também são chamadas de **monogermes**. Usaremos o termo **germe** de uma maneira mais geral, podendo significar um monogerme ou multigerme.

Consideraremos S um conjunto finito, ou seja, $S = \{z_1, \dots, z_r\}$. É suficiente estudar multigerms onde $f(S) = \{0\}$, uma vez que a classificação de multigerms com $f(S)$ finito e não unitário se reduz a este caso. O germe de f em z_i será chamado de **ramo** e denotado por $f^{(i)} : (\mathbb{C}^n, z_i) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

Dois multigerms $f, g : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ são ditos $\mathcal{A}$ -equivalentes se existirem germes de difeomorfismos $\varphi^{(i)} : (\mathbb{C}^n, z_i) \rightarrow (\mathbb{C}^n, z_i)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ tais que $f^{(i)} \circ \varphi^{(i)} = \psi \circ g^{(i)}$, $i = 1, \dots, r$. Isto significa que para cada ramo podemos escolher uma mudança de coordenada na fonte enquanto que na meta a mesma mudança de coordenada deve ser aplicada para todos.

Um multigerme $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é dito $\mathcal{A}$ -simple se existe um número finito de classes de $\mathcal{A}$ -equivalência tal que se f pertence a uma família $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, S \times \{\lambda_0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^d, 0)$, $F(x, \lambda) = (f_\lambda(x), \lambda)$, $f_{\lambda_0} = f$, então para qualquer $(w_1, \dots, w_r, \lambda)$ numa vizinhança suficientemente pequena de $S \times \{\lambda_0\}$, o multigerme de f_λ em $\{w_1, \dots, w_r\}$ pertence a uma destas classes de equivalência.

Seja $\mathcal{O}_n$ o anel local dos germes de funções analíticas $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ e

$\mathcal{M}_n$ seu ideal maximal ($f \in \mathcal{M}_n$ se $f(0)=0$). O conjunto dos monogermes $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}^p$, denotado por $\mathcal{O}(n, p)$, é um $\mathcal{O}_n$ -módulo livre de posto p . O submódulo consistindo dos germes que satisfazem $f(0) = 0$ é dado por $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$. Assim o conjunto dos multigermes $f: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é isomorfo à soma direta de r cópias de $\mathcal{M}_n \cdot \mathcal{O}(n, p)$.

O espaço tangente a $f: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ segundo o grupo $\mathcal{A}$ é dado por (ver C.T.C.Wall [35]):

$$T\mathcal{A}f = tf(\mathcal{M}_n\theta(n)_S) + \omega f(\mathcal{M}_p\theta(p)) \subseteq \mathcal{M}_n\theta(f)$$

onde $\theta(n)$ consiste dos germes em 0 de campos vetoriais em $\mathbb{C}^n$, $\theta(n)_S$ é a soma direta de r -cópias de $\theta(n)$ e $\theta(f)$ consiste dos germes em 0 de campos vetoriais ao longo de f . Neste caso $\theta(f)$ é a soma direta de $\theta(f^{(i)})$, onde $f^{(i)}$ é ramo de f , e pode ser identificado com a soma direta de r -cópias de $\mathcal{O}(n, p)$. O espaço tangente estendido é dado por

$$T\mathcal{A}_e f = tf(\theta(n)_S) + \omega f(\theta(p)) \subseteq \theta(f)$$

e a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f é dada por

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(f)}{T\mathcal{A}_e f} = \dim_{\mathbb{C}} N\mathcal{A}_e f$$

onde $N\mathcal{A}_e f = \frac{\theta(f)}{T\mathcal{A}_e f}$ é chamado de espaço normal a f .

Seja $\mathcal{R}$ o grupo dos germes de difeomorfismos $\psi: (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$.

Consideremos $(\mathcal{X}, 0)$ um germe de um espaço analítico em $(\mathbb{C}^p, 0)$ e seja $I \subseteq \mathcal{O}_p$ um ideal que define $\mathcal{X}$, ou seja, o ideal dos germes de funções que se anulam em $\mathcal{X}$. Denotamos por $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ o subgrupo de $\mathcal{R}$ consistindo dos germes $\psi \in \mathcal{R}$ tais que $\psi^*(I) = I$, ou seja, $\psi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Este grupo tem sido estudado por vários autores. As principais referências são: W.Bruce and M.Roberts [9], J.Damon [12], S.Izumiya and S.Matsuoka [19] e R.Pellikaan [31].

Definimos $\mathcal{K}$ (grupo de contato) como o grupo dos germes de difeomorfismos $H : (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}, 0)$, $H(y, t) = (\psi(y), \tilde{H}(y, t))$ onde $\psi \in \mathcal{R}$ e $\tilde{H}(y, 0) = 0$. Este grupo age em $\mathcal{O}_p$ da seguinte maneira: se $h_1, h_2 \in \mathcal{O}_p$, h_1 e h_2 são $\mathcal{K}$ -equivalentes se existir $H \in \mathcal{K}$ tal que $H(y, h_1(y)) = (\psi(y), h_2(\psi(y)))$, em outras palavras H leva o gráfico de h_1 no gráfico de h_2 . Podemos também definir o grupo $\mathcal{K}$ como sendo o produto semi-direto de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{R}$ (onde $\mathcal{C}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos H como acima onde ψ é a identidade). Ou seja $\mathcal{K} = \mathcal{R} \cdot \mathcal{C}$. Denotamos por $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ o subgrupo de $\mathcal{K}$ dado por $\mathcal{K}_{\mathcal{X}} = \mathcal{R}_{\mathcal{X}} \cdot \mathcal{C}$, em outras palavras $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ é o grupo dos germes de difeomorfismos H como acima onde $\psi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

Seja $\mathcal{R}^{(k)} = \{\psi \in \mathcal{R} / \psi = id \pmod{\mathcal{M}_p^{k+1}}\}$ e $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}^{(k)} = \mathcal{R}_{\mathcal{X}} \cap \mathcal{R}^{(k)}$. O conjunto dos k -jatos de elementos de $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ é dado por $J^k \mathcal{R}_{\mathcal{X}} = \mathcal{R}_{\mathcal{X}} / \mathcal{R}_{\mathcal{X}}^{(k)}$. Segundo R.Pellikaan [31], $J^k \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ é um grupo de Lie que age algebricamente na variedade diferenciável $J^k(p, 1)$. Definimos $J^k \mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ analogamente.

O resultado seguinte reduz a $\mathcal{A}$ -classificação de multigerms para a $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -classificação de germes de funções.

Teorema 2.2.1 *Dados $\tilde{S} = \{z_1, \dots, z_{r-1}\}$ e $S = \tilde{S} \cup \{z_r\}$ subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ e $f : (\mathbb{C}^n, \tilde{S}) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um multigermo finitamente $\mathcal{A}$ -determinado, consideremos $g, \tilde{g} : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ multigerms finitamente $\mathcal{A}$ -determinados tais que $g^{(i)} = \tilde{g}^{(i)} = f^{(i)}$ para $i = 1, \dots, r-1$. Então g e $\tilde{g}$ são $\mathcal{A}$ -equivalentes se, e somente se, h e $\tilde{h}$ são $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -equivalentes onde $h, \tilde{h} \in \mathcal{O}_{n+1}$ são equações reduzidas que definem as imagens de $g^{(r)}$ e $\tilde{g}^{(r)}$ respectivamente e $\mathcal{X}$ é a imagem de f .*

Prova Seja $\mathcal{R}_{\tau}$ o grupo dos germes de difeomorfismos $\varphi : (\mathbb{C}^n, z_{\tau}) \rightarrow (\mathbb{C}^n, z_{\tau})$.

Então g é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\tilde{g}$ se, e somente se, $g^{(r)}$ é $(\mathcal{R}_r \times \mathcal{R}_{\mathcal{X}})$ -equivalente a $\tilde{g}^{(r)}$.

Se $g^{(r)}$ é $(\mathcal{R}_r \times \mathcal{R}_{\mathcal{X}})$ -equivalente a $\tilde{g}^{(r)}$ então existem $\psi \in \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ e $\varphi \in \mathcal{R}_r$ tais que $\psi \circ g^{(r)} = \tilde{g}^{(r)} \circ \varphi$. Portanto $(\tilde{h} \circ \psi)^{-1}(0) = h^{-1}(0)$. Segundo C.Gibson [14, p.145], $\tilde{h} \circ \psi$ é $\mathcal{C}$ -equivalente a h . Como $\psi \in \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$, temos que $\tilde{h}$ é $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -equivalente a h .

Reciprocamente, $\tilde{h}$ $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -equivalente a h implica que existe $\phi \in \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ tal que $h \circ \phi$ é $\mathcal{C}$ -equivalente a $\tilde{h}$. Assim, $(\phi^{-1} \circ g^{(r)})(\mathbb{C}^n) = \tilde{g}^{(r)}(\mathbb{C}^n)$. Segue da unicidade da normalisação [24, Theorem 4.23] que $\phi^{-1} \circ g^{(r)}$ é $\mathcal{R}_r$ -equivalente a $\tilde{g}^{(r)}$. Portanto $g^{(r)}$ é $(\mathcal{R}_r \times \mathcal{R}_{\mathcal{X}})$ -equivalente a $\tilde{g}^{(r)}$. $\square$

Para a classificação de multigerms, usaremos a técnica infinitesimal desenvolvida por J.Mather [23, Lemma 3.1].

Proposição 2.2.2 (Lema de Mather) *Seja G um grupo de Lie que age numa variedade diferenciável M , e seja S uma subvariedade de M que satisfaz as seguintes propriedades:*

- (1) *Para qualquer $x \in S$, $T_x G \cdot x \supseteq T_x S$;*
- (2) *A dimensão de $G \cdot x$ independe de $x \in S$;*
- (3) *S é conexa.*

Então S está contida numa única G -órbita. $\square$

Nosso objetivo é determinar as $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -órbitas em $\mathcal{O}_p$ usando o resultado acima. Para isto precisaremos do $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -espaço tangente e de um critério para $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -determinação finita, ver [9] e [19].

Lema 2.2.3 *Seja $h \in \mathcal{O}_p$. Então*

$$T\mathcal{R}_{\mathcal{X},e} h = \{\xi \cdot h / \xi \in \text{Der}(\log \mathcal{X})\} = th(\text{Der}(\log \mathcal{X}))$$

$$T\mathcal{R}_{\mathcal{X}} h = \{\xi \cdot h / \xi \in \mathcal{M}_p \theta(p) \cap \text{Der}(\log \mathcal{X})\}$$

onde $\text{Der}(\log \mathcal{X}) = \{\xi \in \theta(p) / \xi \cdot \bar{h} \in I, \forall \bar{h} \in I\}$ e $I \subseteq \mathcal{O}_p$ é um ideal que define $\mathcal{X}$. $\square$

Usaremos o programa Macaulay [8] para calcular $\text{Der}(\log \mathcal{X})$ onde necessário.

O resultado seguinte é análogo ao que J.Bruce e M.Roberts obtêm em [9].

Proposição 2.2.4 *Se $\mathcal{M}_p^{k+1} \subset \mathcal{M}_p T\mathcal{R}_{\mathcal{X}} h + \mathcal{M}_p^{k+2}$ então h é $k - \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -determinado.*

Prova A prova é análoga ao caso $\mathcal{R}$, ver C.Gibson [14, p.117].

Consideremos $\bar{h} \in \mathcal{O}_p$ tal que $j^k h(0) = j^k \bar{h}(0)$. Temos de mostrar que $\bar{h}$ é $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -equivalente a h .

Como $\mathcal{O}_p$ é um espaço vetorial, podemos ligar h e $\bar{h}$ por uma reta:

$$h_t(y) = H(y, t) = h(y) + t(\bar{h}(y) - h(y)) \quad t \in [0, 1]$$

h_t é uma família a 1-parâmetro de germes com $h_0 = h$ e $h_1 = \bar{h}$. Mostraremos que quaisquer dois germes desta família são $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -equivalentes.

Seja $\hat{h} = \bar{h} - h \in \mathcal{M}_p^{k+1}$. Então $h_t(y) = h(y) + t\hat{h}(y)$.

Se existir $\phi(y, t) = \phi_t(y) = (\phi_{t,1}(y), \dots, \phi_{t,p}(y))$ tal que $h_t \circ \phi_t = h$ então a proposição segue.

Se $h_t \circ \phi_t = h$ então $\frac{d}{dt}(h_t \circ \phi_t) = \frac{d}{dt}h = 0$. Portanto

$$\sum_{i=1}^p \frac{\partial h}{\partial y_i}(\phi_t(y)) \cdot \frac{d\phi_{t,i}}{dt}(y) + \sum_{i=1}^p t \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i}(\phi_t(y)) \cdot \frac{d\phi_{t,i}}{dt}(y) + (\hat{h} \circ \phi_t)(y) = 0$$

Seja $u = \phi_t(y)$ e $\xi(y, t) = \xi_t(y) = (\xi_{t,1}(y), \dots, \xi_{t,p}(y))$ tal que $\xi_t(\phi_t(y)) = \frac{d\phi_t}{dt}(y)$. Portanto

$$\sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial h}{\partial y_i}(u) \cdot \xi_{t,i}(u) + t \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i}(u) \cdot \xi_{t,i}(u) \right) = -\hat{h}(u)$$

$$\sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial h}{\partial y_i} + t \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i} \right) \cdot \xi_{t,i} = -\hat{h}$$

$$\sum_{i=1}^p \frac{\partial H}{\partial y_i} \cdot \xi_{t,i} = -\hat{h}$$

Se existir ξ , consideremos ξ como um campo vetorial que depende de t e portanto ϕ_t é o fluxo (com a condição inicial $\phi_0 = id$). Se $\xi_t \in \text{Der}(\log \mathcal{X})$ então $\phi_t \in \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ para t suficientemente pequeno (ver Pellikaan [31, Remark 2.17]). Assim, para t suficientemente pequeno, h_t é $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -equivalente a h . Mas podemos provar este fato para qualquer $t_0 \in \mathbb{C}$, ou seja, para todo $s \in \mathbb{C}$ existe uma vizinhança U_s de s em $\mathbb{C}$ tal que h_s é $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -equivalente a h_t para todo $t \in U_s$. Como 0 e 1 podem ser ligados por uma reta em $\mathbb{C}$, podemos concluir que $\tilde{h} = h_1$ está na $\mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -órbita de h . E portanto h é $k - \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ -determinado.

Resta mostrar a existência de ξ .

Existe um homomorfismo natural entre os anéis $\mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_{p+1}$. Se I é um ideal em $\mathcal{O}_p$, denotaremos sua imagem em $\mathcal{O}_{p+1}$ por I^e (ideal estendido, ver M. Atiyah [7]).

Consideremos

$$A = \left\{ \sum \frac{\partial H}{\partial y_i}(y, t) \cdot \xi_{t,i}(y) / \xi_t \in \text{Der}(\log \mathcal{X}) \quad \forall t \right\}$$

Temos que A é um ideal em $\mathcal{O}_{p+1}$.

Afirmamos que $(T\mathcal{R}_{\mathcal{X}}h)^e \subset A + (\mathcal{M}_p^e)^{k+1}$. De fato, se $\eta \cdot h \in T\mathcal{R}_{\mathcal{X}}h$ então

$$\sum \frac{\partial H}{\partial y_i}(y, t) \cdot \eta_i(y) = \sum \left(\frac{\partial h}{\partial y_i}(y) + t \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i}(y) \right) \cdot \eta_i(y) =$$

$$= \sum \frac{\partial h}{\partial y_i}(y) \cdot \eta_i(y) + t \sum \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i}(y) \cdot \eta_i(y)$$

Portanto $\eta \cdot h = \sum \frac{\partial H}{\partial y_i}(y, t) \cdot \eta_i(y) - t \sum \frac{\partial \hat{h}}{\partial y_i}(y) \cdot \eta_i(y)$ e a afirmação segue pois $\hat{h} \in \mathcal{M}_p^{k+1}$ e $\eta_i \in \mathcal{M}_p$.

Por hipótese $\mathcal{M}_p^{k+1} \subset \mathcal{M}_p T\mathcal{R}_{\mathcal{X}}h + \mathcal{M}_p^{k+2}$, então

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_p^{k+1})^e &\subset \mathcal{M}_p^e(T\mathcal{R}_{\mathcal{X}}h)^e + (\mathcal{M}_p^{k+2})^e \\ &\subset \mathcal{M}_p^e(A + (\mathcal{M}_p^e)^{k+1}) + (\mathcal{M}_p^{k+2})^e \\ &\subset \mathcal{M}_{p+1}A + \mathcal{M}_{p+1}(\mathcal{M}_p^e)^{k+1} \end{aligned}$$

aplicando o Lema de Nakayama (ver M.Atiyah [7])

$$(\mathcal{M}_p^{k+1})^e \subset \mathcal{M}_{p+1}A \subset A$$

Portanto $\hat{h} \in A$, ou seja, existe $\xi(y, t) = \xi_t(y)$, $\xi_t \in \text{Der}(\log \mathcal{X})$, tal que $\sum \frac{\partial H}{\partial y_i}(y, t) \cdot \xi_{t,i}(y) = -\hat{h}(y)$. $\square$

Proposição 2.2.5 *Se $\mathcal{M}_p^{k+1} \subset \mathcal{M}_p T\mathcal{R}_{\mathcal{X}}h + \mathcal{M}_p^{k+2} + h^* \mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_p$ então h é $k - \mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -determinado.*

Prova Como na Proposição acima, a prova segue análoga ao caso $\mathcal{K}$ (ver [33]). $\square$

Nosso objetivo a seguir é encontrar uma relação entre as $\mathcal{A}_e$ -codimensões de f e g e a $\mathcal{K}_{\mathcal{X},e}$ -codimensão de h .

Teorema 2.2.6 *Dados $\tilde{S} = \{z_1, \dots, z_{r-1}\}$ e $S = \tilde{S} \cup \{z_r\}$ subconjuntos de $\mathbb{C}^n$, consideremos $f : (\mathbb{C}^n, \tilde{S}) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um multigerme finitamente*

$\mathcal{A}$ -determinado e $g : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ satisfazendo $g^{(i)} = f^{(i)}$ para $i = 1, \dots, r-1$ e $g^{(r)}$ é uma imersão. Se $h \in \mathcal{O}_{n+1}$ é uma equação reduzida que define a imagem de $g^{(r)}$ e $\mathcal{X}$ é a imagem de f , então a seguinte sequência é exata

$$0 \rightarrow NK_{\mathcal{X},e} h \rightarrow N\mathcal{A}_e g \rightarrow N\mathcal{A}_e f \rightarrow 0$$

A prova do Teorema 2.2.6 é baseada nos seguintes lemas.

Definição 2.2.7 *Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável C^∞ . Seja $\eta : Y \rightarrow TY$ um campo vetorial em Y . Dizemos que η admite um levantamento se existir $\xi : X \rightarrow TX$, campo vetorial em X , tal que $\omega f(\eta) = tf(\xi)$, em outras palavras, $\eta(f(x)) = df(\xi(x))$.*

Lema 2.2.8 *Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um multigerme finitamente $\mathcal{A}$ -determinado. Então o conjunto dos campos vetoriais que admitem levantamentos é igual a $\text{Der}(\log(\mathcal{X}))$ onde $\mathcal{X}$ é a imagem de f .*

Prova Consideremos $\eta \in \text{Der}(\log \mathcal{X})$.

Como f é finitamente determinado, f é estável fora da origem; e as singularidades estáveis não isoladas são os cruzamentos normais. Logo podemos escolher um representante $f : U \subseteq (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ onde as únicas singularidades da imagem $f(U) \setminus \{0\}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ são cruzamentos normais.

Seja $\mathcal{X}_0$ o conjunto dos pontos onde $\mathcal{X}$ é C^∞ , $\mathcal{X}_1$ o conjunto dos pontos em $\mathcal{X}$ que são cruzamentos normais e $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{X}_0 \cup \mathcal{X}_1)$.

Em $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{X}_2)$ existe um único ξ tal que $tf(\xi) = \omega f(\eta)$. Como a codimensão de $f^{-1}(\mathcal{X}_2)$ em $\mathbb{C}^n$ é maior ou igual a 2, segue pelo Teorema de Hartog que ξ estende a um campo vetorial em $\mathbb{C}^n$. Como a equação $tf(\xi) = \omega f(\eta)$ vale em $\mathbb{C}^n \setminus f^{-1}(\mathcal{X}_2)$, uma vez que f é estável, ela vale em $\mathbb{C}^n$.

Reciprocamente, suponhamos que η admita um levantamento. Seja $y \in \mathcal{X}_0$. Então $f^{-1}(y)$ consiste de um único ponto x e $\eta(y) = df(\xi(x))$. Logo η é tangente a $\mathcal{X}$ e portanto $\eta \in \text{Der}(\log \mathcal{X})$. $\square$

Lema 2.2.9 *Com as mesmas hipóteses do Teorema 2.2.6, a seguinte sequência é exata.*

$$0 \rightarrow \frac{\theta(g^{(r)})}{tg^{(r)}(\theta(n)) + \omega g^{(r)}(\text{Der}(\log \mathcal{X}))} \rightarrow N\mathcal{A}_e g \rightarrow N\mathcal{A}_e f \rightarrow 0$$

Prova Temos que

$$N\mathcal{A}_e g = \frac{\theta(f) \oplus \theta(g^{(r)})}{T\mathcal{A}_e g}$$

Seja $A = T\mathcal{A}_e g \cap (0 \oplus \theta(g^{(r)}))$. Segue do Lema 2.2.8 que

$$\begin{aligned} \frac{0 \oplus \theta(g^{(r)})}{A} &\cong \frac{0 \oplus \theta(g^{(r)})}{0 \oplus (tg^{(r)}(\theta(n)) + \omega g^{(r)}(\text{Der}(\log \mathcal{X}))} \cong \\ &\frac{\theta(g^{(r)})}{tg^{(r)}(\theta(n)) + \omega g^{(r)}(\text{Der}(\log \mathcal{X}))} \end{aligned}$$

A inclusão de $0 \oplus \theta(g^{(r)})$ em $\theta(g)$ induz uma aplicação injetora

$$\psi : \frac{0 \oplus \theta(g^{(r)})}{A} \rightarrow N\mathcal{A}_e g$$

A projeção de $\theta(g) = \theta(f) \oplus \theta(g^{(r)})$ em $\theta(f)$ induz uma aplicação sobrejetora

$$\phi : N\mathcal{A}_e g \rightarrow N\mathcal{A}_e f$$

Resta mostrar que $\text{Im}\psi = \ker\phi$.

Como $\phi \circ \psi = 0$ temos $\text{Im}\psi \subset \ker\phi$.

Reciprocamente, seja $(\omega, \nu) \in \theta(g) = \theta(f) \oplus \theta(g^{(r)})$ e $[\omega, \nu]$ sua imagem no quociente $N\mathcal{A}_e g$. Suponhamos $\phi[\omega, \nu] = 0$. Então $\omega \in T\mathcal{A}_e f$, ou seja, $\omega = tf(\xi) + \omega f(\eta)$ onde $\xi \in \theta(n)_{\bar{s}}$ e $\eta \in \theta(n+1)$. Logo $(\omega, \nu) =$

$(tf(\xi) + \omega f(\eta), \omega g^{(r)}(\eta)) + (0, \nu - \omega g^{(r)}(\eta)) \in [\omega, \nu] = [(0, \nu - \omega g^{(r)}(\eta))] \in \text{Im}\psi$.
 Portanto $\ker \phi \subset \text{Im}\psi$. $\square$

Lema 2.2.10 *Com as mesmas hipóteses do Teorema 2.2.6,*

$$\frac{\theta(g^{(r)})}{tg^{(r)}(\theta(n)) + \omega g^{(r)}(\text{Der}(\log \mathcal{X}))} \cong NK_{\mathcal{X},e}h$$

Prova Sejam $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ as coordenadas em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^{n+1}$ respectivamente. Como $g^{(r)}$ é uma imersão, após uma mudança de coordenadas podemos supor que $g^{(r)}(x) = (x, \lambda(x))$. Então $h(y) = y_{n+1} - \lambda(y_1, \dots, y_n)$.

Para facilitar a notação, denotemos $T = tg^{(r)}(\theta(n)) + \omega g^{(r)}(\text{Der}(\log \mathcal{X}))$.

Seja $\omega \in \theta(h)$. Definimos $\phi : \theta(h) \rightarrow \theta(g^{(r)})$ por $\phi(\omega) = (0, \dots, 0, \omega(g^{(r)}))$.

Temos que $\phi(TK_{\mathcal{X},e}h) \subset T$. De fato, se $\omega \in TK_{\mathcal{X},e}h$ então

$$\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i \frac{\partial h}{\partial y_i} + h \cdot \nu$$

onde $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}) \in \text{Der}(\log \mathcal{X})$ e $\nu \in \theta(h)$. Consideremos $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \theta(n)$ dado por $\xi_i(x) = -\eta_i(x, \lambda(x))$ para $i = 1, \dots, n$. Logo $\phi(\omega) = tg^{(r)}(\xi) + \omega(\eta) \in T$. Portanto temos uma aplicação bem definida

$$\phi : NK_{\mathcal{X},e}h \rightarrow \frac{\theta(g^{(r)})}{T}$$

Se $\omega \in \theta(h)$ denotemos por $[\omega]$ sua imagem em $NK_{\mathcal{X},e}h$. Suponhamos $\phi[\omega] = 0$. Logo existem $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n) \in \theta(n)$ e $\hat{\eta} = (\hat{\eta}_1, \dots, \hat{\eta}_{n+1}) \in \text{Der}(\log \mathcal{X})$ tais que

$$(0, \dots, 0, \omega(g^{(r)})) = tg^{(r)}(\hat{\xi}) + \omega g^{(r)}(\hat{\eta})$$

ou seja,

$$(0, \dots, 0, \omega(g^{(r)})) = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n, \sum_{i=1}^n \hat{\xi}_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}) + \hat{\eta}(g^{(r)})$$

portanto

$$\omega(g^{(r)}) = \hat{\eta}_{n+1}(g^{(r)}) - \sum_{i=1}^n \hat{\eta}_i(g^{(r)}) \frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

Segue que $\hat{\nu} = \omega - \eta_{n+1} + \sum \eta_i \frac{\partial \lambda}{\partial y_i}$ é uma equação que define a imagem de $g^{(r)}$. Assim $\hat{\nu} \in h^* \mathcal{M}_1$ e $\omega \in T\mathcal{K}_{\mathcal{X},e}h$. Portanto ϕ é injetora

Temos que ϕ é sobrejetora pois dado $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}) \in \theta(g^{(r)})$, seja $\rho(y) = \zeta_{n+1}(y_1, \dots, y_n) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial y_i} \zeta_i(y_1, \dots, y_n) \in \theta(h)$. Então

$$(0, \dots, 0, \rho(g^{(r)})) = (\zeta_1, \dots, \zeta_{n+1}) - (\zeta_1, \dots, \zeta_n, \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \zeta_i)$$

e portanto $\phi[\rho] = [\zeta]$. □

Corolário 2.2.11 *Com as mesmas hipóteses do Teorema 2.2.6, se f é estável então $N\mathcal{K}_{\mathcal{X},e}h$ é isomorfo a $N\mathcal{A}_e g$.* □

Observação 2.2.12 Teorema 2.2.6 não é verdadeiro se $g^{(r)}$ não é imersão. Por exemplo seja $f(x, y) = (x, x, y)$ e $g^{(2)}(x, y) = (x, y^2, xy)$. Então se g é um bigerme cujos ramos são f e $g^{(2)}$, g tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e $h(X, Y, Z) = Z^2 - X^2Y$ tem $\mathcal{K}_{\mathcal{X},e}$ -codimensão infinita.

Para calcular a $\mathcal{A}$ -codimensão temos o seguinte resultado devido a Leslie Wilson [18].

Proposição 2.2.13 *Seja $S = \{z_1, \dots, z_r\}$ e $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um multi-germe $\mathcal{A}$ -finito. Se f é estável a $\mathcal{A}_e$ -codimensão é zero. Se a $\mathcal{A}_e$ -codimensão é estritamente maior que zero então temos a seguinte relação:*

$$\mathcal{A}_e - \text{codimensão} = \mathcal{A} - \text{codimensão} + r(p - n) - p$$

□

2.3 Classificação de bigermes

No que segue denotaremos por (x, y) e (X, Y, Z) as coordenadas em $\mathbb{C}^2$ e $\mathbb{C}^3$ respectivamente.

O seguinte resultado foi obtido por David Mond [26].

Proposição 2.3.1 (i) *Seja f um bigerme ($|S| = 2$) de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$, onde cada ramo é uma imersão. Então f é $\mathcal{A}$ -equivalente a*

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y)) \end{cases}$$

onde φ é chamada **função de contato**.

(ii) *Dois bigermes da forma (i) são $\mathcal{A}$ -equivalentes se, e somente se, as funções φ correspondentes são $\mathcal{K}$ -equivalentes.* $\square$

Corolário 2.3.2 *Um bigerme da forma dada pela Proposição 2.3.1(i) é simples se, e somente se, a função de contato φ correspondente é simples, ou seja φ é uma das seguintes (ver [4]):*

$$A_k : \varphi(x, y) = x^2 + y^{k+1} \quad k \geq 1$$

$$D_k : \varphi(x, y) = x^2 y + y^{k-1} \quad k \geq 4$$

$$E_6 : \varphi(x, y) = x^3 + y^4$$

$$E_7 : \varphi(x, y) = x^3 + xy^3$$

$$E_8 : \varphi(x, y) = x^3 + y^5$$

$\square$

Consideraremos agora os bigermes onde um dos ramos é um cross-cap.

Proposição 2.3.3 *Seja $f : (\mathbb{C}^2, S) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um bigerme onde um dos seus ramos é um cross-cap. Então f é $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos seguintes ($k \geq 1$):*

$$(a) \quad [S_0 A_0](k) : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x^k, x, y) \end{cases} \quad \mathcal{A}_e - \text{codimens\~ao } k$$

$$(b) \quad [S_0 A_k](1) : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x, x^{k+1}, y) \end{cases} \quad \mathcal{A}_e - \text{codimens\~ao } k + 1$$

$$(c) \quad [S_0 A_k](k + 1) : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x, y, y^{k+1}) \end{cases} \quad \mathcal{A}_e - \text{codimens\~ao } k + 2$$

Prova I. Classifica\~ao.

Seja $\mathcal{X}$ a imagem de um cross cap. Suponhamos $\mathcal{X} = \{(X, Y, Z)/Z^2 - X^2Y = 0\}$. Ent\~ao $\text{Der}(\log \mathcal{X}) = \langle (X, -2Y, 0), (0, 2Z, X^2), (X, 0, Z), (Z, 0, XY) \rangle \theta(3)$.

Segue do Teorema 2.2.1 que as $\mathcal{A}$ -classes de tais bigermes s\~ao dadas pelas $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -classes em $\mathcal{O}_3$.

Consideremos primeiramente a a\~cao de $G = J^1 \mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ em $M = J^1(3, 1)$. Seja $\sigma = aX + bY + cZ$ um elemento em M . Segue do Lema 2.2.3 que

$$T_{\sigma} J^1 \mathcal{K}_{\mathcal{X}} \cdot \sigma = \langle aX, aZ, bY, bZ, cZ \rangle \mathcal{O}_3(\text{mod } \mathcal{M}_3^2)$$

Seja $S = \{\sigma \in M/a \neq 0, b \neq 0\}$. Segue do Lema de Mather que S est\~a contida numa \~unica G -\~orbita.

Prosseguindo desta maneira obtemos 5 \~orbitas em $J^1(3, 1)$: aquelas de

$$X - Y, \quad X, \quad Y, \quad Z, \quad 0$$

Se $h(X, Y, Z) = X - Y$, segue de 2.2.5 que h é $1 - \mathcal{K}_X$ -determinado e tem $\mathcal{K}_{X,e}$ -codimensão 1.

Consideremos agora germes cujo 1-jato é X, Y ou Z .

Sejam

$$\begin{aligned}\sigma_1(X, Y, Z) &= X + \sum_{i+j+l=k} \alpha_{i,j,l} X^i Y^j Z^l \\ \sigma_2(X, Y, Z) &= Y + \sum_{i+j+l=k} \beta_{i,j,l} X^i Y^j Z^l \\ \sigma_3(X, Y, Z) &= Z + \sum_{i+j+l=k} \gamma_{i,j,l} X^i Y^j Z^l\end{aligned}$$

elementos em $J^k(3, 1)$.

Então

$$\begin{aligned}T_{\sigma_1} J^k \mathcal{K}_X \cdot \sigma_1 &= \langle X, \alpha_{0,k,0} Y^k, Z \rangle \mathcal{O}_3(\text{mod } \mathcal{M}_3^{k+1}) \\ T_{\sigma_2} J^k \mathcal{K}_X \cdot \sigma_2 &= \langle \beta_{k,0,0} X^k, Y, Z \rangle \mathcal{O}_3(\text{mod } \mathcal{M}_3^{k+1}) \\ T_{\sigma_3} J^k \mathcal{K}_X \cdot \sigma_3 &= \langle X^2, XY, \gamma_{0,k,0} Y^k, Z \rangle \mathcal{O}_3(\text{mod } \mathcal{M}_3^{k+1})\end{aligned}$$

Analogamente temos as seguintes $J^k \mathcal{K}_X$ -órbitas em $J^k(3, 1)$: aquelas de $X - Y^k, Y - X^k, Z - Y^k$ ($k \geq 2$).

Sejam

$$\begin{aligned}h_1(X, Y, Z) &= X - Y^k \\ h_2(X, Y, Z) &= Y - X^k \\ h_3(X, Y, Z) &= Z - Y^k\end{aligned}$$

segue de 2.2.5 que h_i é $k - \mathcal{K}_X$ -determinado para $i = 1, 2, 3$. Também h_1 e h_2 têm $\mathcal{K}_{X,e}$ -codimensão k e h_3 tem $\mathcal{K}_{X,e}$ -codimensão $k + 1$.

Portanto as $\mathcal{A}$ -classes de tais bigermes e suas codimensões seguem dos Teoremas 2.2.1 e 2.2.6. Resta mostrar que se h tem 1-jato igual a 0, h não pode ser simples. De fato, seja M o espaço das formas quadráticas em $\mathbb{C}^3$. A dimensão de M é 6. Se $\sigma \in M$ então

$$\dim T_\sigma J^2 \mathcal{K}_X \sigma \leq 5$$

Portanto a dimensão das órbitas de $J^2\mathcal{K}_X$ em M é menor que a dimensão de M . Logo as órbitas formam uma família continua em M . Consequentemente, h não é $\mathcal{K}_X$ -simples.

Este argumento de contar dimensões foi usado por V.I.Arnold [4][Lema 4.2] para mostrar que o coposto de um germe de função simples não excede 2.

II. Os bigermes classificados em I são simples:

(a) O espaço tangente a $[S_0A_0](k)$ segundo o grupo $\mathcal{A}$ é dado por

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 - \{y^2, \dots, y^{2k-2}\} & \mathcal{M}_2 - \{x, \dots, x^{k-1}\} \\ \mathcal{M}_2 - \{y\} & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 - \{y, \dots, y^{2k-1}\} & \mathcal{M}_2 \end{pmatrix} + \mathbb{C} \left\{ \begin{pmatrix} y^{2i} & 0 \\ 0 & 0 \\ y^{2i+1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y^{2i} & x^i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_{i=1, \dots, k-1}.$$

Usando o Teorema da Versalidade [35, p.499] temos que um desdobramento $\mathcal{A}$ -versal de $[S_0A_0](k)$ é dado por

$$f_u : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2 + u_k y, xy + u_{k+1} y) \\ (x, y) \mapsto (x^k + u_{k-1} x^{k-1} + \dots + u_1 x, x, y) \end{cases}$$

Se $u_k \neq 0$ ou $u_{k+1} \neq 0$ então f_u consiste de duas imersões que são transversais. Portanto f_u é $\mathcal{A}$ -equivalente ao ponto duplo ordinário:

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \end{cases}$$

Suponhamos $u_k = u_{k+1} = 0$. Então $h(X, Y, Z) = X - u_1 Y - \dots - u_{k-1} Y^{k-1} - Y^k$ é uma equação que define a imagem do segundo ramo de f_u .

Se $u_1 = \dots = u_{i-1} = 0$ e $u_i \neq 0$ então $j^i h(0) = X - u_i Y^i$. Segue da classificação que h é $\mathcal{K}_X$ -equivalente a $X - Y^i$.

Portanto f_u é $\mathcal{A}$ -equivalente a $[S_0 A_0](i)$, para $i < k$.

(b) O espaço tangente a $[S_0 A_k](1)$ segundo o grupo $\mathcal{A}$ é dado por

$$\left(\begin{array}{cc} \mathcal{M}_2 & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 - \{y, x, x^2, \dots, x^k\} & \mathcal{M}_2 - \{x, \dots, x^k\} \\ \mathcal{M}_2 - \{y\} & \mathcal{M}_2 \end{array} \right) + \mathbb{C} \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ x^i & x^i \\ 0 & 0 \end{array} \right) \right\}_{i=1, \dots, k}$$

Logo, um desdobramento $\mathcal{A}$ -versal de $[S_0 A_k](1)$ é dado por

$$g_u : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2 + u_{k+1}y, xy + u_{k+2}y) \\ (x, y) \mapsto (x, x^{k+1} + u_k x^k + \dots + u_1 x, y) \end{cases}$$

Se $u_{k+1} \neq 0$ ou ($u_{k+2} \neq 0$ e $u_1 \neq 0$) então g_u consiste de duas imersões transversais.

Suponhamos $u_{k+1} = u_1 = 0$ e $u_{k+2} \neq 0$. Então g_u consiste de duas imersões que são tangentes na origem. Portanto g_u é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y)) \end{cases}$$

onde

$$\varphi(x, y) = \frac{y^2}{(x + u_{k+2})^2} - x^{k+1} - u_k x^k - \dots - u_2 x^2$$

Segundo C.Gibson [14, p.129, Teorema 4.6], φ é $\mathcal{R}$ -equivalente a $x^\ell + y^2$ onde $\ell \leq k+1$. Portanto g_u é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$[A_{\ell-1}] : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^\ell) \end{cases}$$

Também, análogo a (a), temos que g_u é $\mathcal{A}$ -equivalente a $[S_0 A_i](1)$, para algum $i < k$, ou a $[S_0 A_0](1)$.

(c) O espaço tangente a $[S_0A_k](k+1)$ segundo o grupo $\mathcal{A}$ é dado por

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_2 - \{y, y^3, \dots, y^{2k-1}\} & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 - \{y\} & \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{M}_2 - \{x, y, y^2, \dots, y^{2k}\} & \mathcal{M}_2 - \{y, y^2, \dots, y^k\} \end{pmatrix} + \\ + \mathbb{C} \left\{ \begin{pmatrix} y^{2i-1} & 0 \\ 0 & 0 \\ y^{2i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ y^{2i} & y^i \end{pmatrix} \right\}_{i=1, \dots, k}$$

Logo, um desdobramento $\mathcal{A}$ -versal de $[S_0A_k](k+1)$ é dado por

$$\tilde{f}_u : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2 + u_{k+1}y, xy + u_{k+2}x + u_{k+3}y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, y^{k+1} + u_k y^k + \dots + u_1 y) \end{cases}$$

Se $u_{k+2} \neq 0$ ou $u_{k+3} \neq 0$ ou $(u_{k+1} \neq 0$ e $u_1 \neq 0)$ então $\tilde{f}_u$ consiste de duas imersões transversais.

Suponhamos $u_{k+2} = u_{k+3} = u_1 = 0$ e $u_{k+1} \neq 0$. Então $\tilde{f}_u$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y)) \end{cases}$$

onde $\varphi(x, y) = x\phi(y) - y^{k+1} - u_k y^k - \dots - u_2 y^2$. Como $j^2\varphi(0) = \frac{xy}{u_{k+1}} - u_2 y^2$, φ é $\mathcal{R}$ -equivalente a $x^2 - y^2$. Portanto $\tilde{f}_u$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $[A_1]$.

Analogamente, $\tilde{f}_u$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $[S_0A_i](i+1)$, $i < k$, ou $\tilde{f}_u$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $[S_0A_1](1)$. $\square$

Observação 2.3.4 O bigerme $[S_0A_0](k)$ é $\mathcal{A}$ -equivalente ao bigerme classificado por D.Mond [26]:

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (y^2, xy + y^{2k+1}, x) \end{cases}$$

É o único bigerme em 2.3.3 cujos ramos são transversais.

Definição 2.3.5 Dizemos que a $\mathcal{A}$ -classe L de singularidades é adjacente à $\mathcal{A}$ -classe K , e denotamos por $L \rightarrow K$, se todo multigerme $f \in L$ pode ser deformado em um multigerme em K por uma perturbação arbitrariamente pequena. Isto é equivalente a dizer que K especializa L . Assim, as $\mathcal{A}$ -classes às quais L é adjacente são aquelas que aparecem num desdobramento $\mathcal{A}$ -versal de qualquer multigerme em L .

Proposição 2.3.6 Seja $f : (\mathbb{C}^2, S) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um bigerme simples onde um dos seus ramos é S_k ($k \geq 0$), então f é $\mathcal{A}$ -equivalente a

$$[S_k A_0] : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y) \\ (x, y) \mapsto (0, x, y) \end{cases}$$

Prova Seguiremos a prova de 2.3.3.

Seja $\mathcal{X}$ a imagem de S_k . Então $\text{Der}(\log \mathcal{X}) = \langle (2X, 2(k+1)Y, 3(k+1)Z), (0, 2Z, X^{2k+2} + 4X^{k+1}Y + 3Y^2), (X^{k+1} + 3Y, -2(k+1)X^kY, 0), (Z, 0, (k+1)(X^{2k+1}Y + X^kY^2)) \rangle > \theta(3)$.

Calculando o espaço tangente e aplicando o Lema de Mather temos que as $J^1\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -órbitas em $J^1(3, 1)$ são aquelas de:

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad 0$$

Se $h(X, Y, Z) = X$, então h é $1\text{-}\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -determinado e tem $\mathcal{K}_{\mathcal{X},e}$ -codimensão 1. Suponhamos $k = 1$.

Em $J^2(3, 1)$ as $J^2\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -órbitas de elementos cujo 1-jato é Y são aquelas de

$$h_{\alpha} = Y + \alpha X^2$$

Como $X^2 \notin T_{h_{\alpha}} J^2\mathcal{K}_{\mathcal{X}} h_{\alpha}$, segue que h_{α} é modal.

Em $J^2(3, 1)$ as $J^2\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ -órbitas de elementos cujo 1-jato é Z são aquelas de

$$Z - X^2, \quad Z - \beta XY$$

aqui novamente temos modalidade: afirmamos que

$$g : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 + x^2y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^2) \end{cases}$$

não é $\mathcal{A}$ -simples.

De fato, seja

$$g_u : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 + x^2y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + uy) \end{cases}$$

uma perturbação de g . Seja $h(X, Y, Z) = Z - uY - X^2$ uma equação que define o segundo ramo de g_u . Segue da classificação acima que h não é $\mathcal{K}_\mathcal{X}$ -simples. Portanto g_u não é $\mathcal{A}$ -simples. Logo g não é simples pois é adjacente a um bigerme não simples.

Se $k > 1$, como S_k é adjacente a S_1 , o único bigerme simples é $[S_k A_0]$. $\square$

Com o resultado seguinte completamos a classificação de bigermes simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$.

Proposição 2.3.7 *Um bigerme de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ onde um de seus ramos é B_k ou H_k , $k \geq 2$, não é simples.*

Prova (a) Seja $\mathcal{X}$ a imagem de $f_1(x, y) = (x, y^2, x^2y + y^5)$. Então $\text{Der}(\log \mathcal{X}) = \langle (2X, 2Y, 5Z), (X^2 + 5Y^2, -4XY, 0), (0, 2Z, X^4 + 6X^2Y^2 + 5Y^4), (Z, 0, 2X^3Y + 2XY^3) \rangle \theta(3)$.

Se $\sigma = aX + bY + cZ \in J^1(3, 1)$ então

$$T_\sigma J^1 \mathcal{K}_\mathcal{X} \cdot \sigma = \langle aX + bY, aZ, bZ, cZ \rangle \mathcal{O}_3(\text{mod } \mathcal{M}_3^2)$$

Portanto a dimensão de qualquer órbita de $J^1 \mathcal{K}_\mathcal{X}$ em $J^1(3, 1)$ é menor que a dimensão de $J^1(3, 1)$. Consequentemente um germe em $\mathcal{O}_3$ não é $\mathcal{K}_\mathcal{X}$ -simples.

Existe também um argumento geométrico. Consideremos o bigerme

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, x^2y - y^5) \\ (x, y) \mapsto (x, y, ax + by) \end{cases}$$

Consistindo do germe de uma imersão e do germe do B_2 se interceptando transversalmente. Afirmamos que a e b são parâmetros modais. Se fato, seja $\varphi \in \mathcal{R}_{\mathcal{X}}$ tal que $\varphi(\{Z - aX - bY = 0\}) = \{Z - \tilde{a}X - \tilde{b}Y = 0\}$.

Os planos $X = 0$ e $Z = 0$ são planos de simetria de $\mathcal{X}$. Como $d\varphi(0)$ leva plano de simetria em plano de simetria, $d\varphi(0)$ fixa o plano $Z = 0$, pois não podemos ter $d\varphi(0)(\{Z = 0\}) = \{X = 0\}$.

No plano $Z = 0$ temos três subespaços lineares que são preservados por $d\varphi(0)$: o cone tangente a $\mathcal{X}_{\text{sing}}$, ou seja, as retas $X \pm Y = 0$, e $d\varphi(0)(\mathbb{C})$.

Logo $\{Z - aX - bY = 0\} \cap \{Z = 0\}$ é a quarta reta e seu cross-ratio com as outras três é um invariante de $d\varphi(0)$. Portanto f não é simples.

Figura 2.1: Intersecção do B_2 com um plano

Mais geralmente, não existe bigerme simples onde um dos ramos é B_k , C_k ou F_4 pois estes últimos são adjacentes a f_1 (B_2).

(b) Seja $\mathcal{X}$ a imagem de $g_1(x, y) = (x, y^3, xy + y^5)$. Então $\text{Der}(\log \mathcal{X}) = \langle (4X, 3Y, 5Z), (X^2 + 5YZ, -3XY, 5Y^3), (5Y^3 + XZ, -3YZ, -5XY^2), (9XY^2 - 5Z^2, 3Y^3, -5X^2Y), (29X^2Y + 25Y^2Z, 18XY^2 - 15Z^2, -5X^3) \rangle \theta(3)$.

Se $\sigma = aX + bY + cZ \in J^1(3, 1)$ então

$$T_\sigma J^1 \mathcal{K}_\mathcal{X} \cdot \sigma = \langle aX + bY + cZ, 4aX + 3bY + 5cZ \rangle \mathcal{O}_3(\text{mod } \mathcal{M}_3^2)$$

Como em (a), não existe germe em $\mathcal{O}_3$ que é $\mathcal{K}_\mathcal{X}$ -simples. $\square$

2.4 Classificação de trigerme

Lema 2.4.1 *Um trigerme ($|S| = 3$) de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ cujos ramos são imersões não duas a duas tangentes, é $\mathcal{A}$ -equivalente a*

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, f_{13}(x, y)) \end{cases}$$

Prova Segue do fato que podemos escolher coordenadas na meta tais que os planos tangentes às imersões são $Y = 0$, $Z = 0$ e um outro plano que se projeta bijetivamente sobre $Z = 0$. $\square$

Seja $\mathcal{R}^\delta$ um subgrupo de $\mathcal{R}$ consistindo de germes de difeomorfismos $\varphi : (\mathbb{C}^2, 0) \mapsto (\mathbb{C}^2, 0)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, que fixa a reta $y = 0$, ou seja, $\varphi_2(x, 0) = 0$. Consideremos $\mathcal{K}^\delta = \mathcal{R}^\delta \cdot \mathcal{C}$ (produto semi-direto). Então

$$T\mathcal{K}_e^\delta f_{13} = \langle \frac{\partial f_{13}}{\partial x}, y \frac{\partial f_{13}}{\partial y}, f_{13} \rangle \mathcal{O}_2$$

O resultado seguinte mostra que a $\mathcal{A}$ -classificação de tais trigermes é equivalente à classificação de germes de funções numa variedade com bordo com respeito a $\mathcal{K}^\delta$ (ver [3], [26]).

Proposição 2.4.2 *Sejam*

$$f : \begin{cases} (x, y) \xrightarrow{f_1} (x, y, 0) \\ (x, y) \xrightarrow{f_2} (x, 0, y) \\ (x, y) \xrightarrow{f_3} (x, y, f_{13}(x, y)) \end{cases} \quad e \quad \bar{f} : \begin{cases} (x, y) \xrightarrow{\bar{f}_1} (x, y, 0) \\ (x, y) \xrightarrow{\bar{f}_2} (x, 0, y) \\ (x, y) \xrightarrow{\bar{f}_3} (x, y, \bar{f}_{13}(x, y)) \end{cases}$$

então

(i) f é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\bar{f}$ se, e somente se, f_{13} é $\mathcal{K}^\delta$ -equivalente a $\bar{f}_{13}$.

(ii) Se f é finitamente $\mathcal{A}$ -determinado

$$T\mathcal{A}_e f = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_2 \\ \mathcal{O}_2 & \mathcal{O}_2 - \{1, x, \dots, x^N\} & \mathcal{O}_2 - \{1, x, \dots, x^N\} \\ TK_e^\delta f_{13} & \mathcal{O}_2 & TK_e^\delta f_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Delta(\mathcal{O}_2 \times 0 \times \mathcal{O}_2) \end{pmatrix} + \mathbb{C} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^i \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_{13}}{\partial y} x^i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^i & x^i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_{i=0, \dots, N}$$

onde $N \in \mathbb{N}$ é tal que $x^{N+1} \frac{\partial f_{13}}{\partial y} \in TK_e^\delta f_{13}$ e $x^N \frac{\partial f_{13}}{\partial y} \notin TK_e^\delta f_{13}$, e Δ indica a diagonal de $\mathcal{O}_2 \times \{0\} \times \mathcal{O}_2$.

Prova (i) Suponhamos f $\mathcal{A}$ -equivalente a $\bar{f}$.

Então existem germes de difeomorfismos $\varphi_i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $\varphi_i = (\varphi_{i1}, \varphi_{i2})$, $i = 1, 2, 3$, e $\psi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, tais que

$$(1) \psi \circ f_1 \circ \varphi_1^{-1} = \bar{f}_1.$$

$$(2) \psi \circ f_2 \circ \varphi_2^{-1} = \bar{f}_2.$$

$$(3) \psi \circ f_3 \circ \varphi_3^{-1} = \bar{f}_3.$$

Seja $K : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, (0, 0))$ dado por $K(x, y, t) = (\varphi_3(x, y), \psi_3(x, y, t))$.

Como ψ é um difeomorfismo local, segue de (1) e (2) que $\frac{\partial \psi_3}{\partial t}(0) \neq 0$ e portanto K é um difeomorfismo local.

Segue também de (1), (2) e (3) que

$$(1') \varphi_{32}(x, 0) = 0.$$

$$(2') \psi_3(x, y, 0) = 0.$$

$$(3') K(x, y, f_{13}(x, y)) = (\varphi_3(x, y), \bar{f}_{13}(\varphi_3(x, y))).$$

Portanto f_{13} é $\mathcal{K}^\delta$ -equivalente a $\bar{f}_{13}$.

Reciprocamente, suponhamos f_{13} $\mathcal{K}^\delta$ -equivalente a $\bar{f}_{13}$. Então existe um germe de difeomorfismo

$$\begin{aligned} K : (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, (0, 0)) \\ K(x, y, t) &\mapsto (k(x, y), \theta(x, y, t)) \end{aligned}$$

satisfazendo

(a) $k : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $k(x, y) = (k_1(x, y), k_2(x, y))$, é um germe de difeomorfismo tal que $k_2(x, 0) = 0$.

$$(b) \theta(x, y, 0) = 0$$

$$(c) K(x, y, f_{13}(x, y)) = (k(x, y), \bar{f}_{13}(k(x, y))).$$

É fácil ver que

$$(a') K \circ f_1 \circ k^{-1} = \bar{f}_1.$$

$$(b') K \circ f_2 \circ \phi^{-1} = \bar{f}_2, \text{ onde } \phi(x, y) = (k_1(x, 0), \theta(x, 0, y)).$$

(b') $K \circ f_3 \circ k^{-1} = \bar{f}_3$.

Portanto f é $\mathcal{A}$ -equivalente a $\bar{f}$.

(ii) É imediato. □

Corolário 2.4.3 *Com as mesmas hipóteses de 2.4.2, NA_{ef} é isomorfo a $NK_e^\delta f_{13}$* □

Corolário 2.4.4 *Um trigerme simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ cujos ramos são imersões que não são duas a duas tangentes, é $\mathcal{A}$ -equivalente a um dos seguintes:*

$$(a) \quad [S_k] : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, y + x^{k+1}) \end{cases} \quad (k \geq 0)$$

$$(b) \quad [B_k] : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^k) \end{cases} \quad (k \geq 2)$$

$$(c) \quad [C_k] : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, xy + x^k) \end{cases} \quad (k \geq 3)$$

$$(d) \quad [F_4] : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^3 + y^2) \end{cases}$$

Prova Segue do Lema 2.4.1 e da Proposição 2.4.2 que, neste caso, a classi-

ificação é dada pela classificação de germes em $\mathcal{O}_2$ segundo a $\mathcal{K}^\delta$ equivalência, ver [1] e [26]. $\square$

Com o seguinte resultado completamos a classificação dos trigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$.

Proposição 2.4.5 *Um trigerme simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ cujos ramos são imersões duas a duas tangentes, não é simples.*

Prova Suponhamos primeiramente que as imersões têm contato A_1 .

Suponhamos, sem perda de generalidade, que uma das imersões seja a canônica. Então no plano $Z = 0$ temos 4 retas (cada par dado pelo contato de uma imersão com a canônica) e seu cross-ratio é um invariante por difeomorfismos na fonte e na meta. Portanto o trigerme não pode ser simples.

O caso geral é adjacente ao discutido acima e portanto não é simples. $\square$

A classificação de quadrigermes ($|S| = 4$) é análoga a 2.3.3 onde consideramos $\mathcal{X}$ a imagem do ponto triplo ordinário:

$$\begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (0, x, y) \end{cases}$$

Portanto temos o seguinte

Teorema 2.4.6 *A lista abaixo consiste nos multigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ segundo A equivalência.*

<i>Monogerme</i>	$\mathcal{A}_e - \text{codim}$	<i>Nome</i>
$f(x, y) = (x, y, 0)$	0	<i>Imersão</i>
$f(x, y) = (x, y^2, xy)$	0	<i>Cross - cap</i> (S_0)
$f(x, y) = (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y), \quad k \geq 1$	k	S_k
$f(x, y) = (x, y^2, x^2y + y^{2k+1}), \quad k \geq 2$	k	B_k
$f(x, y) = (x, y^2, xy^3 + x^ky), \quad k \geq 3$	k	C_k
$f(x, y) = (x, y^2, x^3y + y^5)$	4	F_4
$f(x, y) = (x, y^3, xy + y^{3k-1}), \quad k \geq 2$	k	H_k

<i>Bigerme</i>	$\mathcal{A}_e - \text{codim}$	<i>Nome</i>
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \end{cases}$	0	<i>Ponto Duplo Ordinário</i>
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^{k+1}) \end{cases}$	k	$[A_k]$
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^2y + y^{k-1}) \end{cases} \quad k \geq 4$	k	$[D_k]$

$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^3 + y^4) \end{cases}$	6	$[E_6]$
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^3 + xy^3) \end{cases}$	7	$[E_7]$
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^3 + y^5) \end{cases}$	8	$[E_8]$
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x^k, x, y) \end{cases}$	k	$[S_0A_0](k)$
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x, x^{k+1}, y) \end{cases}$	$k + 1$	$[S_0A_k](1)$
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x, y, y^{k+1}) \end{cases}$	$k + 2$	$[S_0A_k](k + 1)$
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y) \\ (x, y) \mapsto (0, x, y) \end{cases}$	$k + 1$	$[S_kA_0]$
<i>Trigerme</i>	$\mathcal{A}_e - \text{codim}$	<i>Nome</i>
$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (0, x, y) \end{cases}$	0	<i>Ponto Triplo Ordinário</i>

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, y + x^{k+1}) \end{cases} \quad k \quad [S_k]$$

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^k) \end{cases} \quad k \geq 2 \quad k \quad [B_k]$$

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, xy + x^k) \end{cases} \quad k \geq 3 \quad k \quad [C_k]$$

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, x^3 + y^2) \end{cases} \quad 4 \quad [F_4]$$

Quadrigerme

$\mathcal{A}_e$ – *codim Nome*

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (0, x, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, y + x^k) \end{cases} \quad k \quad Q_k$$

* $k \geq 1$ exceto nos casos explicitados.

* Em parênteses temos o número de pontos triplos na imagem de uma perturbação estável (ver o capítulo 4 desta tese).

2.5 Adjacências

2.5.1 Adjacências de bigermes

2.5.2 Adjacências de trigermes

Capítulo 3

A topologia do complementar do conjunto de bifurcação

3.1 Introdução

Em seus trabalhos sobre classificação de germes, V.I. Arnold mostra que, em muitos casos, o complementar do conjunto de bifurcação é um espaço de Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$.

Em [3] V.V. Goryunov mostra que no caso da classificação de monogermes simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ dada por D. Mond, este mesmo resultado vale, ou seja, o complementar do conjunto de bifurcação é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.

Neste capítulo estendemos o resultado de Goryunov para os multigerms simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ obtidos no capítulo 2. Como a classificação de alguns multigerms recai sobre os resultados de Arnold, veremos que o mesmo acontece aqui, ou seja, alguns conjuntos de bifurcação são análogos aos de Arnold e portanto já sabemos serem do tipo $K(\pi, 1)$.

3.2 O conjunto de bifurcação

O conjunto de bifurcação Σ de um germe de $(\mathbb{R}^2, S)$ em $(\mathbb{R}^3, 0)$ (ver por exemplo [3]) é o conjunto dos valores do parâmetro λ de uma deformação $\mathcal{A}_e$ -miniversal para os quais as imagens das correspondentes aplicações têm singularidades mais complicadas que em posição geral, isto é, são não estáveis. As singularidades de uma imagem em posição geral são o cross-cap e intersecções transversais de 2 ou 3 planos (pontos duplos e triplos). Como vimos no capítulo 2, existem 5 singularidades não estáveis que ocorrem estavelmente em famílias a 1-parâmetro de aplicações $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Elas correspondem a 5 componentes (no caso mais geral) de Σ . A seguir descrevemos estas componentes que denotamos por $\Sigma_1, \dots, \Sigma_5$.

Σ_1 : fusão/nascimento de 2 cross-caps. Este fenômeno ocorre com os monogermes, quando são adjacentes a S_1 .

Σ_2 : contato não transversal de dois planos imersos. Ocorre quando dois ramos não singulares se interceptam e os planos tangentes no ponto de intersecção coincidem..

Σ_3 : intersecção de cross-cap e imersão. Ocorre quando um ramo não singular intercepta um cross-cap transversalmente. Como se trata de codimensão 1, o plano imerso deve interceptar transversalmente a curva de pontos duplos do cross-cap.

Σ_4 : ponto triplo não transversal. Ocorre quando dois ramos não singulares se interceptam transversalmente e um terceiro ramo não singular intercepta esta curva de pontos duplos tangencialmente.

Σ_5 : ponto quádruplo transversal.

Definição 3.2.1 *Um espaço topológico do tipo $K(\pi, n)$ (ou um espaço de Eilenberg-MacLane), onde π é um grupo e n é um inteiro maior ou igual a 1, é um espaço Y conexo por caminhos que satisfaz $\pi_q(Y, y_0) = 0$ para $q \neq n$ e $\pi_n(Y, y_0)$ é isomorfo a π .*

Teorema 3.2.2 *O complementar do conjunto de bifurcação de um multigerme simples de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$ é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.*

Prova O resultado já é conhecido para os monogermes [3].

Sabe-se que, no caso complexo, o complementar do conjunto de bifurcação é um espaço conexo.

Para bigermes de imersões a única componente de Σ não vazia é Σ_2 . Neste caso Σ coincide com o conjunto de bifurcação da função de contato e portanto seu complementar é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$ [4].

De fato, consideremos o caso $[A_k]$. A função de contato é dada por $\varphi(x, y) = x^2 + y^{k+1}$. Seja

$$f_\lambda : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, \varphi_\lambda(x, y)) \end{cases}$$

um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -miniversal de $[A_k]$, onde $\varphi_\lambda(x, y) = x^2 + y^{k+1} + \lambda_{k-1}y^{k-1} + \dots + \lambda_1y + \lambda_0$.

Seja U_i uma vizinhança no domínio de $f_\lambda^{(i)}$. Como ambos os ramos são imersões, pontos duplos somente ocorrem quando $f_\lambda^{(1)}$ e $f_\lambda^{(2)}$ se interceptam:

$$D^2(f_\lambda) \cap (U_1 \times U_2) \cong \{(x, y) / \varphi_\lambda(x, y) = 0\}$$

Como

$$(df_\lambda^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (df_\lambda^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a intersecção de $f_\lambda^{(1)}$ e $f_\lambda^{(2)}$ não é transversal quando $x = 0$ e $\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y} = 0$.

Assim, Σ é dado por

$$\begin{cases} \varphi_\lambda(0, y) = 0 \\ \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y}(0, y) = 0 \end{cases}$$

No caso dos trigerms, o conjunto de bifurcação coincide com o conjunto de bifurcação da função do bordo.

De fato, consideremos o caso $[B_k]$. Seja

$$g_\lambda : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, p_\lambda(x, y)) \end{cases}$$

um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -miniversal de $[B_k]$, onde $p_\lambda(x, y) = x^2 + y^k + \lambda_{k-1}y^{k-1} + \dots + \lambda_1 y + \lambda_0$.

Como todos os ramos são imersões temos que Σ_1 e Σ_3 são vazios.

Σ_2 : Seja U_i uma vizinhança no domínio de $g_\lambda^{(i)}$. Pontos duplos não transversais são provenientes de $g_\lambda^{(1)}$ e $g_\lambda^{(3)}$:

$$D^2(g_\lambda) \cap (U_1 \times U_3) \cong \{(x, y) / p_\lambda(x, y) = 0\}$$

$$(dg_\lambda^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (dg_\lambda^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & \frac{\partial p_\lambda}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Logo $g_\lambda^{(1)}$ e $g_\lambda^{(3)}$ se interceptam tangencialmente quando

$$\begin{cases} p_\lambda(0, y) = 0 \\ \frac{\partial p_\lambda}{\partial y}(0, y) = 0 \end{cases}$$

Σ_4 : Temos que

$$D^2(g_\lambda) \cap (U_1 \times U_2) \cong \{(x, 0)\}$$

$$D^3(g_\lambda) \cap (U_1 \times U_2 \times U_3) \cong \{(x, 0) / p_\lambda(x, 0) = 0\}$$

Também, $(1, 0, 0)$ é um vetor tangente à imagem de $D^2(g_\lambda) \cap (U_1 \times U_2)$ e $(-2x, -\frac{\partial p_\lambda}{\partial y}, 1)$ é um vetor normal ao plano tangente à imagem de $g_\lambda^{(3)}$. Assim, $g_\lambda^{(3)}$ intercepta a curva de pontos duplos $D^2(g_\lambda) \cap (U_1 \times U_2)$ tangencialmente quando $x = 0$. Logo temos $x = 0$ e $p_\lambda(x, 0) = 0$. Portanto $\Sigma_4 = \{\lambda_0 = 0\}$.

Portanto $\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_4 = \{\mathcal{D}(p_\lambda(0, y)) = 0\} \cup \{\lambda_0 = 0\}$, onde $\mathcal{D}(p_\lambda(0, y))$ é o discriminante de $p_\lambda(0, y)$.

Logo o conjunto de bifurcação de $[B_k]$ coincide com o conjunto de bifurcação de B_k e portanto seu complementar é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$ [1].

Resta portanto mostrar para os bigermes $[S_0A_0](k)$, $[S_0A_k](1)$, $[S_0A_k](k+1)$, $[S_kA_0]$ e o quadrigerme Q_{k+1} . Mostraremos estes casos nos lemas seguintes. $\square$

Lema 3.2.3 (i) *Um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de $[S_0A_0](k)$ é dado por*

$$f_\lambda : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (p_\lambda(x), x, y) \end{cases}$$

onde $p_\lambda(x) = x^k + \lambda_{k-1}x^{k-1} + \dots + \lambda_1x + \lambda_0$.

(ii) *Um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de $[S_0A_k](1)$ é dado por*

$$f_\lambda : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x, p_\lambda(x), y) \end{cases}$$

onde $p_\lambda(x) = x^{k+1} + \lambda_kx^k + \lambda_{k-1}x^{k-1} + \dots + \lambda_1x + \lambda_0$.

(iii) *Em ambos os casos o conjunto de bifurcação tem 2 componentes: $\{\lambda_0 = 0\}$ e a outra dada pelo discriminante de p_λ . Portanto o complementar de Σ é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.*

Lema 3.2.4 (i) Um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de $[S_0 A_k](k+1)$ é dado por

$$f_\lambda : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2 + ay, xy) \\ (x, y) \mapsto (x, y, p_\lambda(y)) \end{cases}$$

onde $p_\lambda(y) = y^{k+1} + \lambda_k y^k + \lambda_{k-1} y^{k-1} + \dots + \lambda_1 y + \lambda_0$.

(ii) O conjunto de bifurcação tem 3 componentes: $\{\lambda_0=0\}$, $\{p_\lambda(-a^2/4)=0\}$ e $\{\mathcal{D}(p_\lambda(y^2 + ay)) = 0\}$.

(iii) $\mathbb{C}^{k+2} \setminus \Sigma$ é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.

Lema 3.2.5 (i) Um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de $[S_k A_0]$ é dado por

$$f_\lambda : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, yp_\lambda(x, y^2)) \\ (x, y) \mapsto (0, x, y) \end{cases}$$

onde $p_\lambda(x, y) = y + x^{k+1} + \lambda_k x^k + \lambda_{k-1} x^{k-1} + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0$.

(ii) O conjunto de bifurcação tem 2 componentes: $\{\lambda_0=0\}$ e $\{\mathcal{D}(p_\lambda(x, 0)) = 0\}$. Portanto $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \Sigma$ é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.

Lema 3.2.6 Um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de Q_{k+1} é dado por

$$f_\lambda : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (0, x, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, p_\lambda(x, y)) \end{cases}$$

onde $p_\lambda(x, y) = y + x^{k+1} + \lambda_k x^k + \dots + \lambda_1 x + \lambda_0$.

(ii) O conjunto de bifurcação tem 2 componentes: $\{\lambda_0=0\}$ e $\{\mathcal{D}(p_\lambda(x, 0)) = 0\}$. Portanto $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \Sigma$ é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.

Faremos somente a demonstração do Lema 3.2.4. Os demais são análogos.

Prova(Lema 3.2.4) (ii) Temos que Σ_1 e Σ_5 são vazios.

Σ_2 :

$$D^2(f_\lambda) \cap (U_1 \times U_2) \cong \{(x, y_1, y_2) / y_2 = y_1^2 + ay_1, p_\lambda(y_2) - xy_1 = 0\}$$

$$(df_\lambda^{(1)})_{(x, y_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y_1 + a \\ y_1 & x \end{pmatrix} \quad (df_\lambda^{(2)})_{(x, y_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \frac{dp_\lambda}{dy}(y_2) \end{pmatrix}$$

Um vetor normal ao plano tangente à imagem de $f_\lambda^{(1)}$ é $(-y_1(2y_1+a), -x, 2y_1+a)$ e um vetor normal ao plano tangente à imagem de $f_\lambda^{(2)}$ é $(0, -\frac{dp_\lambda}{dy}(y_2), 1)$. Logo $f_\lambda^{(1)}$ e $f_\lambda^{(2)}$ se interceptam tangencialmente quando $y_1 = 0$. Portanto pontos duplos não transversais ocorrem quando $p_\lambda(0) = 0$, ou seja, $\lambda_0 = 0$. Temos então $\Sigma_2 = \{\lambda_0 = 0\}$.

Σ_3 : um ponto (x_0, y_0) é um cross-cap de $f_\lambda^{(1)}$ se $2y_0 + a = 0$ e $x_0 = 0$ (ver [15, pag 179]). O ramo imersivo deve ser transversal a curva de pontos duplos do cross-cap:

$$\begin{aligned} D^2(f_\lambda) \cap (U_1 \times U_1) &\cong \{(x_1, y_1, x_2, y_2) / f_\lambda^{(1)}(x_1, y_1) = f_\lambda^{(1)}(x_2, y_2)\} \\ &= \{(0, y_1, 0, y_2) / y_1 + y_2 + a = 0\} \end{aligned}$$

Assim, $f_\lambda^{(1)}$ intercepta $f_\lambda^{(2)}$ e $f_\lambda^{(1)}$ é um cross-cap no ponto de intersecção se $2y + a = 0$ e $p_\lambda(y^2 + ay) = 0$. Portanto Σ_3 é dada por:

$$\begin{cases} 2y + a = 0 \\ p_\lambda(y^2 + ay) = 0 \end{cases}$$

Σ_4 : ponto triplo não transversal.

$$D^3(f_\lambda) \cap (U_1 \times U_1 \times U_2) \cong \{(0, y) / p_\lambda(y^2 + ay) = 0\}$$

Um vetor tangente à imagem de $D^2(f_\lambda) \cap (U_1 \times U_1)$ é dado por $(0, 2y + a, 0)$ e um vetor normal ao plano tangente à imagem de $f_\lambda^{(2)}$ é $(0, -\frac{dp_\lambda}{dy}(y^2 + ay), 1)$.

Assim a condição de não transversalidade implica que $(2y+a) \cdot \frac{dp_\lambda}{dy}(y^2+ay) = 0$. Portanto $\Sigma_4 = \{\mathcal{D}(p_\lambda(y^2+ay)) = 0\}$.

(iii) Seja P o espaço dos polinômios de grau $k+1$ com coeficiente dominante 1.

Consideremos $\varphi : \mathbb{C}^{k+2} \rightarrow \mathbb{C} \times P$ dada por

$$\varphi(z_0, z_1, \dots, z_{k+1}) = (z_0, (z - z_1) \cdots (z - z_{k+1}))$$

Temos que

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\mathbb{C} \times P \setminus \Sigma) = \{ & (z_0, z_1, \dots, z_{k+1}) / z_i \neq z_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, k+1, \\ & z_i \neq 0, \quad z_i \neq -z_0^2/4, \quad i = 1, \dots, k+1 \} \end{aligned}$$

Seja $Y = \mathbb{C} \times P \setminus \Sigma$ e $\tilde{Y} = \varphi^{-1}(\mathbb{C} \times P \setminus \Sigma)$.

Então $\varphi|_{\tilde{Y}} : \tilde{Y} \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento e portanto $\pi_n(\tilde{Y}) \cong \pi_n(Y)$ para $n \geq 2$.

Seja $\mathcal{B}_{k+1} = \{(z_1, \dots, z_{k+1}) / z_i \neq 0, z_i \neq z_j \quad \forall i \neq j\}$ e $\psi : \tilde{Y} \rightarrow \mathcal{B}_{k+1}$ dada por $\psi(z_0, z_1, \dots, z_{k+1}) = (z_1, \dots, z_{k+1})$.

Então ψ é uma fibração cujas fibras são isomorfas a $\mathbb{C}$ menos $2(k+1)$ pontos distintos. A fibra é portanto um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.

Como $\mathcal{B}_{k+1}$ é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$ (ver [30]), segue da sequência de homotopia de uma fibração [34] que $\tilde{Y}$ é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$.

Portanto $\mathbb{C}^{k+2} \setminus \Sigma$ é um espaço do tipo $K(\pi, 1)$. □

Capítulo 4

A topologia da imagem de uma perturbação estável

4.1 Introdução

Dado um multigerme f de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, finitamente determinado, $(n, n+1)$ no domínio das boas dimensões segundo Mather, podemos construir uma fibração definida na imagem de um desdobramento versal de f com valores no complementar do conjunto de bifurcação. A fibra tem o tipo de homotopia de um bouquet de n -esferas. O número de esferas no bouquet é chamado número de Milnor da imagem de f .

Os monogermes S_k , B_k , C_k e F_4 , isto é, da forma $(x, y^2, yp(x, y^2))$, e os trigermses $[S_k]$, $[B_k]$, $[C_k]$ e $[F_4]$, possuem o mesmo conjunto de bifurcação, a saber o discriminante da correspondente função do bordo (ver [3, pag.62] e a prova do Teorema 3.2.2). Logo surge a questão: qual a relação entre as fibrações acima descritas? Neste capítulo mostraremos que as fibras são homotópicas. Para isto usaremos o método desenvolvido por D.Mond e

V.V.Goryunov [16]. Na seção 4.2 trataremos deste método, com uma breve introdução sobre sequências espectrais, cuja referência é [34].

Em [27] D.Mond define os invariantes C , T e $\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$ para monogermes de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^3$, que são o número de cross-caps e pontos triplos presentes na imagem de uma perturbação estável do germe e o número de Milnor da singularidade isolada $D^2(f)/\mathbb{Z}_2$ respectivamente. Na seção 4.4 discutiremos esta questão dos invariantes para multigerms.

4.2 Método Goryunov-Mond

Um **módulo bigraduado** E sobre um anel R é uma coleção de R -módulos $E_{s,t}$ para todo par de inteiros s and t . Uma **diferencial** $d: E \rightarrow E$ de **bigrau** $(-r, r-1)$ é uma coleção de homomorfismos $d: E_{s,t} \rightarrow E_{s-r, t+r-1}$, para todo s e t , tais que $d^2 = 0$. O **módulo de homologia** $H(E)$ é o módulo bigraduado dado por

$$H_{s,t}(E) = [\ker(d: E_{s,t} \rightarrow E_{s-r, t+r-1})] / d(E_{s+r, t-r+1})$$

Uma **sequência espectral** E é uma sequência $\{E^r, d^r\}$, $r \geq 1$, tal que

- (a) E^r é um módulo bigraduado e d^r é uma diferencial de bigrau $(-r, r-1)$ em E^r .
- (b) Existe um isomorfismo $H(E^r) \cong E^{r+1}$.

Para definir o limite de uma sequência espectral, identificamos E^{r+1} com $H(E^r)$. Seja Z^1 o módulo bigraduado $Z_{s,t}^1 = \ker(d: E_{s,t}^1 \rightarrow E_{s-1,t}^1)$ e B^1 o módulo bigraduado $B_{s,t}^1 = d^1(E_{s+1,t}^1)$. Então $B^1 \subset Z^1$ e $E^2 = Z^1 / B^1$. Seja $Z(E^2)$ o módulo bigraduado $Z(E^2)_{s,t} = \ker(d^2: E_{s,t}^2 \rightarrow E_{s-2,t+1}^2)$ e $B(E^2)$ o módulo bigraduado $B(E^2)_{s,t} = d^2(E_{s+2,t-1}^2)$. Pelo Teorema do isomorfismo de

Noether, existem submódulos bigraduados Z^2 e B^2 de Z^1 contendo B^1 tais que $Z(E^2)_{s,t} = Z^2_{s,t}/B^1_{s,t}$ e $B(E^2)_{s,t} = B^2_{s,t}/B^1_{s,t}$ para todo s e t . Segue que $B^2 \subset Z^2$ e

$$B^1 \subset B^2 \subset Z^2 \subset Z^1$$

Prosseguindo por indução, obtemos submódulos

$$B^1 \subset B^2 \subset \dots \subset B^r \subset \dots \subset Z^r \subset \dots \subset Z^2 \subset Z^1$$

tais que $E^{r+1} = Z^r/B^r$. Definimos os módulos bigraduados $Z^\infty = \bigcap_r Z^r$, $B^\infty = \bigcup_r B^r$ e $E^\infty = Z^\infty/B^\infty$. O módulo bigraduado E^∞ é chamado limite da sequência espectral E , e os termos E^r da sequência espectral são aproximações sucessivas de E^∞ .

Dizemos que a sequência espectral E converge se para todo s e t existe um inteiro $r(s, t) \geq 1$ tal que para $r \geq r(s, t)$, $d^r : E^r_{s,t} \rightarrow E^r_{s-r, t+r-1}$ é trivial. Então $E^{r+1}_{s,t}$ é isomorfo a um quociente de $E^r_{s,t}$ e $E^\infty_{s,t}$ é isomorfo ao limite da sequência

$$E^{r(s,t)}_{s,t} \rightarrow E^{r(s,t)+1}_{s,t} \rightarrow \dots$$

Dizemos que uma sequência espectral **colapsa no N° termo** se $d^r = 0$ para $r \geq N$. Portanto $E^r_{s,t} = E^N_{s,t}$ e $E^\infty_{s,t} = E^N_{s,t}$.

Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \rightarrow Y$ contínua. Seja $D^k(f)$ o conjunto dos pontos k -múltiplos de f :

$$D^k(f) = \text{fecho}\{(x_1, \dots, x_k) \in X^k / f(x_1) = \dots = f(x_k), x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j\}$$

para $1 \leq k < \infty$.

O grupo simétrico S_k age em $D^k(f)$ permutando os fatores. Portanto S_k age em $H_\ell(D^k(f); \mathbb{Q})$. Se $\sigma \in S_k$, denotemos por σ^* sua ação em

$H_\ell(D^k(f); \mathbb{Q})$:

$$\begin{aligned} \sigma^*: H_\ell(D^k(f); \mathbb{Q}) &\rightarrow H_\ell(D^k(f); \mathbb{Q}) \\ [\alpha] &\mapsto [\sigma(\alpha)] \end{aligned}$$

A parte alternada é dada por:

$$Alt_k H_\ell(D^k(f); \mathbb{Q}) = \{c \in H_\ell(D^k(f); \mathbb{Q}) / \forall \sigma \in S_k, \sigma^* c = \text{sign}(\sigma) c\}$$

Existem aplicações contínuas $\varepsilon^{i,k} : D^k(f) \rightarrow D^{k-1}(f)$, $\varepsilon^{i,k}(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_k)$ para $i \leq k$.

Temos então $\varepsilon_*^{i,k} : H_\ell(D^k(f); \mathbb{Q}) \rightarrow H_\ell(D^{k-1}(f); \mathbb{Q})$ para $\ell=0, 1, \dots$

Definimos

$$\varepsilon_*^k : Alt_k H_\ell(D^k(f); \mathbb{Q}) \rightarrow Alt_{k-1} H_\ell(D^{k-1}(f); \mathbb{Q})$$

por

$$\varepsilon_*^k(c) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \varepsilon_*^{i,k}(c)$$

Proposição 4.2.1 $\varepsilon_*^{1,k} = \varepsilon_*^k$. □

Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ um multigerme finitamente $\mathcal{A}$ -determinado de coposto ≤ 1 , ou seja, cada ramo tem coposto ≤ 1 , $(n, n+1)$ no domínio das boas dimensões segundo Mather. Seja $F : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d, S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^d, (0, 0))$, $F(x, t) = (f_t(x), t)$, um desdobramento versal de f e $F : U \rightarrow V$ um representante de F (usaremos a mesma letra) que é próprio, finito a um, $F(U) \subset V$, $F^{-1}(0) \cap U = S \times \{0\}$ e $I_{\text{rel}}(F) = \{(y, t) / \text{o germe de } f_t \text{ em } f_t^{-1}(y) \cap U_t \text{ não é estável}\}$ é um subconjunto analítico de V , onde $U_t = \{x \in \mathbb{C}^n / (x, t) \in U\}$. Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$ a projeção natural. Segundo W.L.Marar [21] existem vizinhanças W e Z da origem em $\mathbb{C}^p$ e

$\mathbb{C}^d$ respectivamente, tais que $W \times Z \subset V$ e $F|_{F^{-1}(W \times Z)} : F^{-1}(W \times Z) \rightarrow W \times Z$ é um representante finito de F e a restrição da projeção $\pi : W \times Z \rightarrow Z$ a $I_{\text{rel}}(F) \cap (W \times Z)$ é própria e finita a um. Um tal representante é chamado um bom representante.

Teorema 4.2.2 ([21], Teorema 4.1) *Seja $F : F^{-1}(W \times Z) \rightarrow W \times Z$ um bom representante de um desdobramento A -versal F de f como acima. Então existem $\epsilon > 0$ e uma vizinhança $T \subset Z \subset \mathbb{C}^d$ da origem, tais que a restrição $F : F^{-1}(\pi^{-1}(T \setminus \Sigma)) \rightarrow Y \cap (B_\epsilon \times T \setminus \Sigma)$ é topologicamente localmente trivial sobre $T \setminus \Sigma$, com respeito a projeção $\pi : B_\epsilon \times (T \setminus \Sigma) \rightarrow T \setminus \Sigma$ onde B_ϵ é a bola fechada em $\mathbb{C}^p$ de centro na origem e raio ϵ , $\Sigma \subset \mathbb{C}^d$ é o conjunto de bifurcação de F e Y é a imagem de F . $\square$*

Corolário 4.2.3 ([21], Corolário 4.2) *São consequências imediatas de 4.2.2:*

- (i) *As aplicações $f_t : F^{-1}(\pi^{-1}(t)) \rightarrow Y \cap (B_\epsilon \times \{t\})$ têm o mesmo tipo topológico, para todo $t \in T \setminus \Sigma$.*
- (ii) *$\pi|_{Y \cap (B_\epsilon \times (T \setminus \Sigma))} : Y \cap (B_\epsilon \times (T \setminus \Sigma)) \rightarrow T \setminus \Sigma$ é a projeção de uma fibração localmente trivial. A fibra $Y_t = Y \cap (B_\epsilon \times \{t\})$ sobre $t \in T \setminus \Sigma$ é a imagem da aplicação f_t acima.*
- (iii) *$\pi \circ F : F^{-1}(\pi^{-1}(T \setminus \Sigma)) \rightarrow T \setminus \Sigma$ é a projeção de uma fibração localmente trivial. A fibra $X_t = F^{-1}(\pi^{-1}(t))$ é o domínio de f_t . $\square$*

Definição 4.2.4 *A aplicação $f_t : X_t \rightarrow Y_t$ é dita uma perturbação estável de f .*

Segue de [28] que Y_t tem o tipo de homotopia de um bouquet de n -esferas. O número de esferas no bouquet é chamado de **número de Milnor**

da imagem de f e denotado por $\mu_I(f)$. Portanto $\mu_I(f) = \text{rank } H_n(Y_t; \mathbb{Q})$. Para calcular a homologia de Y_t usaremos o seguinte método desenvolvido por V.V.Goryunov e D.Mond [16].

Teorema 4.2.5 *Seja f como acima. Então $H_n(Y_t; \mathbb{Q}) = \oplus_{p+q=n} E_{p,q}^\infty$, onde*

$$E_{p,q}^1 = \text{Alt}_{p+1} H_q(D^{p+1}(f_t); \mathbb{Q})$$

$$\text{e } d^1 = \varepsilon_*^{p+1} : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1.$$

□

4.3 O número de Milnor da imagem de certos monogermes e trigermes

Segue de [22] que se $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ é um monogerme finitamente $\mathcal{A}$ -determinado de coposto 1, $D^k(f_t)$ é uma fibra de Milnor de $D^k(f)$, que é uma intersecção completa com singularidade isolada de dimensão $n - k + 1$ ou vazio, quando $k \leq n + 1$, e consiste no máximo do ponto $\{0\}$ quando $k > n + 1$. Então $D^k(f_t)$ tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas. O seguinte resultado é o Teorema 2.6 de [16].

Teorema 4.3.1 *Nestas circunstâncias, a sequência espectral descrita no Teorema 4.2.5 colapsa no termo E^1 e portanto*

$$H_n(Y_t; \mathbb{Q}) \cong \oplus_{k=2}^{n+1} \text{Alt}_k H_{n-k+1}(D^k(f_t); \mathbb{Q})$$

□

Quando f é um multigerme, $D^k(f_t)$ é uma união disjunta de fibras de Milnor que correspondem às componentes conexas de $D^k(f)$.

Consideraremos o caso $n = 2$. Como monogermes da forma

$$f(x, y) = (x, y^2, yp(x, y^2))$$

e trigermes da forma

$$g : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, p(x, y)) \end{cases}$$

têm o mesmo conjunto de bifurcação, temos dois fibrados sobre o mesmo espaço base. Além disso em cada fibrado as fibras têm o tipo de homotopia de um bouquet de 2-esferas.

Teorema 4.3.2 *f e g têm o mesmo número de Milnor da imagem.*

A demonstração do teorema 4.3.2 é baseada nos seguintes lemas.

Definição 4.3.3 *O número de Milnor do bordo de p é definido como*

$$\mu_\delta(p) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{\left(\frac{\partial p}{\partial x}, y \frac{\partial p}{\partial y}\right)}$$

Observação 4.3.4 O número de Milnor do bordo de p é a $\mathcal{R}^\delta$ -codimensão de p

Lema 4.3.5 *Para o monogerme $f(x, y) = (x, y^2, yp(x, y^2))$, $\mu_I(f) = \mu_\delta(p)$.*

Prova Temos que

$$H_1(D^2(f_t)) = H_1^+(D^2(f_t)) \oplus H_1^-(D^2(f_t))$$

onde $H_1^+(D^2(f_t)) = H_1(D^2(f_t))/\mathbb{Z}_2$ é a parte invariante com respeito à involução que troca cópias de $\mathbb{C}^2$ e $H_1^-(D^2(f_t)) = \text{Alt}_2 H_1(D^2(f_t))$ é a parte alternada. Também

$$D^2(f_t) = \{(x, y, x, -y) / p_t(x, y^2) = 0\} \cong \{(x, y) / p_t(x, y^2) = 0\}$$

$$D^2(f_t)/\mathbb{Z}_2 \cong \{(x, \xi) / p_t(x, \xi) = 0\}$$

A involução que age em $D^2(f_t)$ se reduz a $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

Seja ℓ o número de pontos fixos desta ação. Portanto

$$\ell = \#\{(x, 0) / p_t(x, 0) = 0\}$$

Segue do Teorema do ponto fixo de Lefschetz que

$$\ell = 1 - \text{rank } H_1^+(D^2(f_t)) + \text{rank } H_1^-(D^2(f_t))$$

Aplicando o Teorema 4.2.5 e observando que $D^3(f_t) = \emptyset$ temos que

$$\begin{aligned} \mu_I(f) &= \text{rank } H_2(Y_t; \mathbb{Q}) \\ &= \text{rank } \text{Alt}_2 H_1(D^2(f_t); \mathbb{Q}) \\ &= \ell - 1 + \text{rank } H_1^+(D^2(f_t)) \end{aligned}$$

Como $D^2(f_t)/\mathbb{Z}_2$ é uma fibra de Milnor de $D^2(f)/\mathbb{Z}_2$ temos

$$\mu_I(f) = \ell - 1 + \mu(p)$$

Segue de [2, pag.211] que

$$\mu_\delta(p) = \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y})} + \dim \frac{\mathcal{O}_2}{(\frac{\partial p}{\partial x}, y)} = \mu(p) + \ell - 1$$

Portanto $\mu_I(f) = \mu_\delta(p)$. □

Lema 4.3.6 *Seja g o trigerme*

$$g : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, p(x, y)) \end{cases}$$

então $\mu_I(g) = \mu_\delta(p)$.

Prova Temos que

$$D^2(g_t) \cap (U_1 \times U_2) = \{(x, 0, x, 0)\} \cong \{(x, 0)\}$$

$$D^2(g_t) \cap (U_2 \times U_3) = \{(x, y, x, 0) / y = p_t(x, 0)\} \cong \{(x, y) / y = p_t(x, 0)\}$$

$$D^2(g_t) \cap (U_1 \times U_3) = \{(x, y, x, y) / p_t(x, y) = 0\} \cong \{(x, y) / p_t(x, y) = 0\}$$

$$\begin{aligned} D^3(g_t) \cap (U_1 \times U_2 \times U_3) &= \{(x, 0, x, 0, x, 0) / p_t(x, 0) = 0\} \\ &\cong \{(x, 0) / p_t(x, 0) = 0\} \end{aligned}$$

Como $D^1(g_t)$ consiste da união disjunta de 3 conjuntos abertos (U_1, U_2, U_3) , temos que $Alt_1 H_0(D^1(g_t); \mathbb{Q}) = H_0(D^1(g_t); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^3$. Denotemos por $[U_i]$, $i = 1, 2, 3$, as classes destes abertos.

Denotemos por α_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, a curva $D^2(g_t) \cap (U_i \times U_j)$. Logo $H_0(D^2(g_t); \mathbb{Q})$ é gerado pelas classes destas curvas. Denotemos estas classes por $[\alpha_{ij}]$. Portanto $Alt_2 H_0(D^2(g_t); \mathbb{Q}) = \langle [\alpha_{12}] - [\alpha_{21}], [\alpha_{13}] - [\alpha_{31}], [\alpha_{23}] - [\alpha_{32}] \rangle$.

Seja

$$\ell = \#\{(x, 0) / p_t(x, 0) = 0\}$$

Então $D^3(g_t) \cap (U_i \times U_j \times U_s)$, $i, j, s = 1, 2, 3$, consiste de ℓ pontos. Denotemos estes pontos por $P_{ijs}^1, \dots, P_{ijs}^\ell$. Assim $D^3(g_t)$ consiste de 6ℓ pontos. Portanto $H_0(D^3(g_t); \mathbb{Q})$ é gerado pelas classes destes pontos, que denotaremos da mesma maneira para facilitar a notação, e $Alt_3 H_0(D^3(g_t); \mathbb{Q}) = \langle P_{123}^1 - P_{132}^1 - P_{213}^1 + P_{231}^1 + P_{312}^1 - P_{321}^1, \dots, P_{123}^\ell - P_{132}^\ell - P_{213}^\ell + P_{231}^\ell + P_{312}^\ell - P_{321}^\ell \rangle$.

Logo a página E^1 da sequência espectral em 4.2.5 é:

$$\begin{array}{ccc}
 E_{2,0}^1 = \text{Alt}_3 H_0(D^3(g_t); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^\ell & & 0 \\
 \lambda \downarrow & & \downarrow \\
 E_{1,0}^1 = \text{Alt}_2 H_0(D^2(g_t); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^3 & & E_{1,1}^1 = \text{Alt}_2 H_1(D^2(g_t); \mathbb{Q}) \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \\
 E_{0,0}^1 = \text{Alt}_1 H_0(D^1(g_t); \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^3 & & 0
 \end{array}$$

Como

$$\lambda(P_{123}^k - P_{132}^k - P_{213}^k + P_{231}^k + P_{312}^k - P_{321}^k) = [\alpha_{23}] - [\alpha_{32}] - [\alpha_{13}] + [\alpha_{31}] + [\alpha_{12}] - [\alpha_{12}]$$

para todo $k = 1, \dots, \ell$, temos que

$$\begin{cases} \dim \text{Im } \lambda = 1 \\ \dim \ker \lambda = \ell - 1 \end{cases}$$

Como

$$\delta([\alpha_{12}] - [\alpha_{21}]) = [U_1] - [U_2]$$

$$\delta([\alpha_{13}] - [\alpha_{31}]) = [U_1] - [U_3]$$

$$\delta([\alpha_{23}] - [\alpha_{32}]) = [U_2] - [U_3]$$

segue que

$$\begin{cases} \dim \text{Im } \delta = 2 \\ \dim \ker \delta = 1 \end{cases}$$

Logo a página E^2 da sequência espectral é:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Q}^{\ell-1} & & 0 \\
 & & \\
 0 & & \text{Alt}_2 H_1(D^2(g_t); \mathbb{Q}) \\
 & & \\
 \mathbb{Q} & & 0
 \end{array}$$

Assim a sequência colapsa em E^2 e

$$H_2(Y_t; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^{\ell-1} \oplus \text{Alt}_2 H_1(D^2(g_t); \mathbb{Q})$$

Mas $\text{Alt}_2 H_1(D^2(g_t); \mathbb{Q}) \cong H_1(D^2(g_t) \cap (U_1 \times U_3); \mathbb{Q})$. Portanto

$$\mu_I(g) = \text{rank } H_2(Y_t; \mathbb{Q}) = \ell - 1 + \mu(p) = \mu_\delta(p)$$

□

4.4 Invariantes

Seja $f : (\mathbb{C}^2, S) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ um multigerme. Denotaremos também por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ o anel local $\mathcal{O}_n$ dos germes de funções analíticas de $(\mathbb{C}^n, 0)$ em $\mathbb{C}$. Assim, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}$ é a soma direta de r -cópias de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$.

Como cross-cap é um fenômeno que ocorre num ramo isoladamente, temos que o número de cross-caps C , presentes na imagem de uma perturbação estável de f , é a soma dos C_i , número de cross-caps presentes na imagem de uma perturbação estável de $f^{(i)}$, para $i = 1, \dots, r$. Segundo Mond [27],

$$C_i = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\mathcal{R}_{f^{(i)}}}$$

onde $\mathcal{R}_{f^{(i)}}$ é o ideal gerado pelos menores 2×2 da matriz $df^{(i)}$.

Também segundo Mond, o número de pontos triplos T na imagem de uma perturbação estável de f é dado por

$$T = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}}{\mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}))}$$

onde $f_*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S})$ é $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}$ considerado como um $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}$ -módulo, via composição com f , e $\mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}))$ é o segundo ideal de Fitting.

Mais geralmente, define-se o k -ésimo ideal de Fitting, $\mathcal{F}_k(f_*(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}))$. Seja

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}^q \xrightarrow{\lambda} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}^q \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S} \rightarrow 0$$

uma apresentação de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}$ sobre $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}$, ou seja, uma sequência exata de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}$ -módulos, onde o morfismo α leva os elementos da base canônica de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}^q$ nos geradores $g_1, \dots, g_q$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}$, e as colunas da matriz λ são as relações entre os g_i (com coeficientes em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}$). Definimos $\mathcal{F}_k$ como o ideal em $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}$ gerado pelos menores $(q - k) \times (q - k)$ da matriz λ . Estes ideais independem da escolha da apresentação.

4.4.1 Bigermes

$$1. f = [S_0 A_0](k) : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x^k, x, y) \end{cases}$$

Temos

$$[df^{(1)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \quad e \quad [df^{(2)}] = \begin{pmatrix} kx^{k-1} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo $C_1 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}}{\langle x, y \rangle} = 1$ e $C_2 = 0$.

Como $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} / f_*^{(1)}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0})$ é dado por

$$\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}}{\langle x, y^2, xy \rangle}$$

segue do Teorema da Preparação de Malgrange (ver por exemplo [15, Teorema.3.6]) que $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ é gerado (como um $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}$ -módulo via $f^{(1)}$) por 1 e y . Via $f^{(2)}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ é gerado por 1. Logo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}$ é gerado por $(1, 0), (y, 0), (0, 1)$. As relações são:

$$XY(1, 0) - Z(y, 0) = 0$$

$$Z(1, 0) - X(y, 0) = 0$$

$$(X - Y^k)(0, 1) = 0$$

Assim, o segundo ideal de Fitting, $\mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2))$, é gerado pelos menores 1×1 da matriz

$$\begin{pmatrix} XY & -Z & 0 \\ Z & -X & 0 \\ 0 & 0 & X - Y^k \end{pmatrix}$$

Portanto $T = \dim \mathcal{O}_3 / \mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2)) = k$.

$$2. f = [S_0 A_k](1) : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x, x^{k+1}, y) \end{cases}$$

Análogo a 1., temos que $C_1 = 1$ e como $f^{(2)}$ é uma imersão, $C_2 = 0$.

Também, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}$ é gerado por $(1, 0), (y, 0), (0, 1)$. As relações são:

$$\begin{aligned} XY(1, 0) - Z(y, 0) &= 0 \\ Z(1, 0) - X(y, 0) &= 0 \\ (X^{k+1} - Y)(0, 1) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, o segundo ideal de Fitting, $\mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2))$, é gerado pelos menores 1×1 da matriz

$$\begin{pmatrix} XY & -Z & 0 \\ Z & -X & 0 \\ 0 & 0 & X^{k+1} - Y \end{pmatrix}$$

Portanto $T = \dim \mathcal{O}_3 / \mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2)) = 1$.

$$3. f = [S_0 A_k](k+1) : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, xy) \\ (x, y) \mapsto (x, y, y^{k+1}) \end{cases}$$

Analogamente temos que $C = 1$ e $T = k + 1$.

$$4. f = [S_k A_0] : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y) \\ (x, y) \mapsto (0, x, y) \end{cases}$$

Temos $C_1 = k + 1$ e $C_2 = 0$.

Via $f^{(1)}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ é gerado (como um $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}$ -módulo) por 1 e y . Via $f^{(2)}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}$ é gerado por 1. Logo $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, S}$ é gerado por $(1, 0)$, $(y, 0)$, $(0, 1)$. As relações são:

$$\begin{aligned} Z(1, 0) - (Y + X^{k+1})(y, 0) &= 0 \\ (Y^2 + X^{k+1}Y)(1, 0) - Z(y, 0) &= 0 \\ X(0, 1) &= 0 \end{aligned}$$

Assim, o segundo ideal de Fitting, $\mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2))$, é gerado pelos menores 1×1 da matriz

$$\begin{pmatrix} Z & -Y - X^{k+1} & 0 \\ Y^2 + X^{k+1}Y & -Z & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

Portanto $T = \dim \mathcal{O}_3 / \mathcal{F}_2(f_*(\mathcal{O}_2 \oplus \mathcal{O}_2)) = 1$.

5. Para os bigermes da forma

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, y, \varphi(x, y)) \end{cases}$$

é imediato que $C = T = 0$.

Concluindo, temos

	$\mathcal{A}_e - cod$	C	T
$[S_0 A_0](k)$	k	1	k
$[S_0 A_k](1)$	$k + 1$	1	1
$[S_0 A_k](k + 1)$	$k + 2$	1	$k + 1$
$[S_k A_0]$	$k + 1$	$k + 1$	1

4.4.2 Trígermes

Consideremos os trígermes da forma

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y, 0) \\ (x, y) \mapsto (x, 0, y) \\ (x, y) \mapsto (x, y, p(x, y)) \end{cases}$$

Como cada ramo é uma imersão temos que $C = 0$. É imediato que $\mathcal{O}_{\mathcal{C},s}$ é gerado (como um $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}$ -módulo) por $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Logo

$$T = \dim \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3}}{\langle Z, Y, Z - p(X, Y) \rangle} = \dim \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}}}{\langle p(X, 0) \rangle}$$

A seguir analisaremos os trígermes simples.

1. $f = [S_k]$. Neste caso $p(x, y) = y + x^{k+1}$. Logo $T = k + 1$.
2. $f = [B_k]$. Neste caso $p(x, y) = x^2 + y^k$. Logo $T = 2$.
3. $f = [C_k]$. Neste caso $p(x, y) = xy + x^k$. Logo $T = k$.
4. $f = [F_4]$. Neste caso $p(x, y) = x^3 + y^2$. Logo $T = 3$

Concluindo, temos

	$\mathcal{A}_e - cod$	C	T
$[S_k]$	k	0	$k + 1$
$[B_k]$	k	0	2
$[C_k]$	k	0	k
$[F_4]$	4	0	3

Observação 4.4.1 Para o caso de monogermes, em [27] Mond define um terceiro invariante. Como vimos, se f é finitamente determinado, $D^2(f)$ é

uma intersecção completa com singularidade isolada. Temos a ação de $\mathbb{Z}_2$ em $D^2(f)$, que consiste na permutação dos fatores. Este novo invariante é o número de Milnor da singularidade isolada $D^2(f)/\mathbb{Z}_2$, $\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$. Neste caso temos o seguinte resultado:

$$\mu_I(f) = C + T + \mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2) - 1$$

No caso dos multigerms, $D^2(f)$ não é conexo, mas uma união de intersecções completas com singularidades isoladas. Logo não fica claro qual é o invariante correspondente a $\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2)$.

Uma possível definição seria

$$\mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2) = \sum_{i=1}^r \mu(D^2(f^{(i)})/\mathbb{Z}_2) + \sum_{i < j} \mu(D^2(f) \cap (U_i \times U_j))$$

Em vários exemplos, é possível verificar que dado um número natural positivo s , $s \leq r$, tal que $f^{(i)}$ não é imersão para $i = 1, \dots, s$ e $f^{(i)}$ é imersão para $i = s + 1, \dots, r$, então vale a seguinte relação

$$\mu_I(f) = C + T + \mu(D^2(f)/\mathbb{Z}_2) - s - (r - 1)(r - 2)/2$$

Acredito que a utilização do método das sequências espectrais de Goryunov-Mond pode ser usado para a obtenção deste resultado.

Capítulo 5

Multigermes de $\mathcal{A}_e$ -codimensão

1

5.1 Introdução

Em sua tese de doutorado na Universidade de Warwick, Inglaterra, T.Cooper mostrou que os multigermes de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^{n+1}$ de coposto 1 e $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 têm número de Milnor da imagem igual a 1 e possuem formas reais com boas perturbações reais. Para multigermes de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, $n \geq p$, o número de Milnor do discriminante é maior ou igual à $\mathcal{A}_e$ -codimensão e a igualdade ocorre quando o germe é quasihomogêneo (ver [13]). Em [25] D.Mond mostra que monogermes de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, $n \geq p$, de coposto 1 e $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 possuem formas reais com boas perturbações reais. Tais monogermes são quasihomogêneos, logo possuem número de Milnor do discriminante igual a 1.

Neste capítulo, usando as técnicas de T.Cooper, estendemos o resultado obtido por D.Mond em [25] para multigermes, ou seja, mostramos que

multigerms de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$, $n \geq p$, de posto 1 e $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 são quasihomôgeneos e possuem formas reais com boas perturbações reais. Este resultado, que será descrito na secção 5.4, foi inspirado no trabalho de Cooper.

Em [10], Cooper desenvolveu um método de classificação de multigerms primitivos de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, que é essencial na demonstração dos fatos acima descritos. Logo, nas secções 5.2 e 5.3 descrevemos tal método. Na secção 5.2 trataremos da *aumentação*, que significa essencialmente em dado um multigermo de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, obter um novo multigermo também de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Nesta secção apresentamos algumas provas mais simples que as de [10]. Na secção 5.3 descrevemos a classificação de multigerms de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ primitivos (ou seja, que não são *aumentações*) de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1.

Os resultados que aqui obtivemos, juntamente com os de Cooper, numa nova versão, estão reunidos no artigo [6].

5.2 Aumentação

Seja $f: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um multigermo de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, onde S é um subconjunto finito de $\mathbb{C}^n$. Seja

$$\begin{aligned} F: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda, f_\lambda(x)) \end{aligned}$$

um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -miniversal de f . Definimos

$$\begin{aligned} A_F f: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) \\ (\lambda, x) &= (\lambda, f_{\lambda^2}(x)) \end{aligned}$$

Lema 5.2.1 Se $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é bianaalítica então existe $\beta : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ bianaalítica tal que $(\beta(t))^2 = \alpha(t^2)$.

Prova Seja $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ a expansão em série de potências de α em torno da origem. Temos que $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$. Logo $\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{i-1}$ define uma função analítica numa vizinhança da origem e $x \cdot \gamma = \alpha$. Como $\gamma(0) \neq 0$, existe um raiz quadrada δ , definida numa vizinhança de $\gamma(0)$, que é uma função analítica. Portanto definimos $\beta(x) = x \cdot (\delta \circ \gamma(x^2))$. $\square$

Proposição 5.2.2 A $\mathcal{A}$ -classe de equivalência de $A_F f$ independe da escolha do desdobramento miniversal F de f .

Prova Apresentamos aqui uma prova diferente da de [10]. Seja $\tilde{F} = id_{\mathbb{C}} \times \tilde{f}_{\lambda}$ um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de $f = \tilde{f}_0$. Então F e $\tilde{F}$ são desdobramentos equivalentes, ou seja, existem difeomorfismos

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda, \phi_{\lambda}(x)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Psi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda, \psi_{\lambda}(x)) \end{aligned}$$

e uma aplicação bianaalítica $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tais que $\alpha^*(F) = \Psi \circ \tilde{F} \circ \Phi$, ou seja,

$$(\lambda, f_{\alpha(\lambda)}(x)) = (\lambda, \psi_{\lambda}(\tilde{f}_{\lambda}(\phi_{\lambda}(x))))$$

Definimos

$$\begin{aligned} A_{\Phi} : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda, \phi_{\lambda^2}(x)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_{\Psi} : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda, \psi_{\lambda^2}(x)) \end{aligned}$$

Segue do Lema 5.2.1 que existe $\beta : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, bianalítica, tal que $\beta(\lambda)^2 = \alpha(\lambda^2)$. Logo temos que

$$\beta^*(A_F f) = A_\Psi \circ A_{\tilde{F}} f \circ A_\Phi$$

Assim, $A_F f$ e $A_{\tilde{F}} f$ são desdobramentos equivalentes e portanto são germes $\mathcal{A}$ -equivalentes. $\square$

Denotaremos por Af a $\mathcal{A}$ -classe de equivalência de $A_F f$.

Proposição 5.2.3 *Se f é $\mathcal{A}$ -equivalente a f' então $Af = Af'$.*

Prova Se f é $\mathcal{A}$ -equivalente a f' então existem germes de aplicações bianalíticas $\phi : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^n, S)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ tais que $\psi \circ f = f' \circ \phi$. Logo $F' = (\psi \times id_{\mathbb{C}}) \circ F \circ (\phi^{-1} \times id_{\mathbb{C}})$ é um desdobramento versal de f' e $(\psi^{-1} \times id_{\mathbb{C}}) \circ A_{F'} f' \circ (\phi \times id_{\mathbb{C}}) = A_F f$. Logo $A_{F'} f'$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $A_F f$ e portanto $Af = Af'$. $\square$

Definição 5.2.4 *Af é dita **augmentação** de f . Dizemos também que um multigerme é uma augmentação se é uma augmentação de algum multigerme f . Um multigerme que não é uma augmentação é dito **primitivo**.*

Exemplo 5.2.5 Os multigerms de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}^2$ são:

I. A lips: $(x, y) \mapsto (x, y^3 + x^2 y)$.

II. O rabo de andorinha: $(x, y) \mapsto (x, y^4 + xy)$.

III. O bigerme consistindo de duas dobras tangentes: $\begin{cases} (x, y) \mapsto (x, y^2) \\ (x, y) \mapsto (x, x^2 + y^2) \end{cases}$

IV. Um trigerme consistindo de três dobras cujos discriminantes são dois a dois transversais.

V. O bigerme consistindo de uma dobra e uma cúspide, com o discriminante da dobra transversal à reta tangente limite do discriminante da cúspide.

I é aumento de $y \mapsto y^3$; II é primitivo; III é aumento do bigerme consistindo de dois ramos $x \mapsto x^2$ e $\bar{x} \mapsto \bar{x}^2$; IV e V são primitivos.

Figura 5.1: Discriminantes de boas perturbações reais de germes de codimensão 1 do plano no plano

A prova apresentada por Cooper para o teorema seguinte consiste no cálculo do espaço tangente. Assim, o lema que vem imediatamente depois segue como um corolário. Apresentamos aqui uma prova usando a teoria de $\mathcal{K}_V$ -equivalência desenvolvida por J.Damon (ver [11]).

Teorema 5.2.6 *Af tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1.*

Prova O diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{p+1} \\ & & \uparrow \gamma \\ \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{A_F f} & \mathbb{C}^{p+1} \end{array}$$

onde $\gamma(\delta, y) = (\delta^2, y)$, é um pullback. Segue de [11] que a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de $A_F f$ é igual a $\mathcal{K}_{D(F),e}$ -codimensão de γ , onde $D(F)$ é o discriminante de F .

Mas o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{p+1} \\ & & \uparrow i \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^p \end{array}$$

onde i é a inclusão, é também um pullback. Assim a $\mathcal{K}_{D(F),e}$ -codimensão de i é igual a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de f e portanto é 1.

Como i é a inclusão natural, temos que

$$NK_{D(F),e}i = \frac{\theta(i)}{ti(\theta(p)) + i^*(\text{Der}(\log D(F)))} = \frac{\mathcal{O}_p}{d\lambda(i^*(\text{Der}(\log D(F))))}$$

(onde $d\lambda(i^*(\text{Der}(\log D(F))))$) é o módulo consistindo dos coeficientes de $\partial/\partial\lambda$ dos elementos de $i^*(\text{Der}(\log D(F)))$. Analogamente temos que

$$NK_{D(F),e}\gamma = \frac{\mathcal{O}_{p+1}}{d\lambda(\gamma^*(\text{Der}(\log D(F)))) + (\delta)}$$

onde o (δ) no denominador vem de $\partial\gamma/\partial\delta$. É claro que $NK_{D(F),e}i$ e $NK_{D(F),e}\gamma$ são isomorfos. $\square$

Lema 5.2.7 *Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e $F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0))$, $F(\lambda, x) = (\lambda, \tilde{F}(\lambda, x))$ um desdobramento a 1-parâmetro de f . Suponhamos F estável (como germe). Então F é versal.*

Prova Como F é estável temos que $T\mathcal{A}_e F = \theta(F)$. Logo

$$\theta(\tilde{F}) = \mathbb{C}\left\{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}\right\} + \tilde{F}^*(\mathcal{M}_p) \cdot \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda} + t\tilde{F}_x(\theta(n+1)_{S'}) + \pi_2 \omega F(\theta(p+1))$$

onde $S' = \{0\} \times S$ e π_2 é a projeção de $\theta(F)$ em $\theta(\tilde{F})$. Passando ao quociente por $\mathcal{M}_{\mathbb{C}} \theta(\tilde{F})$ temos

$$\theta(f) = \mathbb{C}\left\{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(0, x)\right\} + f^*(\mathcal{M}_p) \cdot \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(0, x) + T\mathcal{A}_e f \quad (5.1)$$

Como f tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, existe $v(x)$ tal que

$$\mathbb{C}\{v(x)\} + T\mathcal{A}_e f = \theta(f) \quad (5.2)$$

Segue de 5.1 que

$$v(x) = (a + \alpha(f)) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(0, x) \pmod{T\mathcal{A}_e f}$$

onde $a \in \mathbb{C}$ e $\alpha(f) \in \tilde{F}^*(\mathcal{M}_p)$. Como f não é estável temos que $a \neq 0$. Logo segue de 5.2 que

$$\mathbb{C}\left\{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(0, x)\right\} + T\mathcal{A}_e f = \theta(f)$$

Portanto F é versal. □

O resultado seguinte é uma recíproca do teorema acima.

Proposição 5.2.8 *Seja $G = id_{\mathbb{C}} \times g_{\lambda}$ um desdobramento estável a 1-parâmetro de um multigerme $g = g_0$ e suponhamos que $h = id_{\mathbb{C}} \times g_{\lambda^2}$ tenha $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Então g tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e G é um desdobramento versal de g . Portanto h é uma aumentoção de g .*

Prova O fato de g ter $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 segue da prova do Teorema 5.2.6. Segue do Lema 5.2.7 que G é versal. □

Dado um multigerme estável $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ seja Pf o desdobramento trivial a 1-parâmetro de f

$$\begin{aligned} Pf : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda, f(x)) \end{aligned}$$

Dizemos que um multigerme é um **prisma** se é $\mathcal{A}$ -equivalente a Pg para algum multigerme g .

Lema 5.2.9 $T\mathcal{A}_e Pf = \mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n} \frac{\partial}{\partial \lambda} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{C}} T\mathcal{A}_e f$. □

O multigerme f pode ser obtido de Pf , a menos de $\mathcal{A}$ -equivalência, como o pullback do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S & \xrightarrow{Pf} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0) \\ & \uparrow i & \\ & \mathbb{C}^p, 0 & \end{array}$$

Proposição 5.2.10 *Seja $F(\lambda, x) = (\lambda, f_\lambda(x))$ um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de um multigerme f de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Então $G(\mu, \lambda, x) = (\mu, \lambda, f_{\lambda^2+\mu}(x))$ é um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de $g = A_F f$.*

Prova Segue do Lema 5.2.7. □

Como $G(\mu, \lambda, x) = (\mu, \lambda, f_{\lambda^2+\mu}(x))$ é um desdobramento de $F(\mu, x) = (\mu, f_\mu(x))$ e F é estável, temos que G é $\mathcal{A}$ -equivalente a PF . Portanto se um multigerme é uma *aumentação*, seu desdobramento miniversal é um prisma. A recíproca também é verdadeira:

Teorema 5.2.11 *Seja g um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e suponhamos que o desdobramento miniversal G de g seja um prisma. Então g é uma *aumentação*.*

Prova Existe um único número natural ℓ e um multigerme estável h , único a menos de $\mathcal{A}$ -equivalência, tais que $G = id_{\mathbb{C}} \times g_{\lambda}$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $P^{\ell}h$ e h não é um prisma.

O seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^n, S & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}^p, 0 \\
 \downarrow & & \downarrow i \\
 \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S & \xrightarrow{id_{\mathbb{C}} \times g_{\lambda}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0) \\
 \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\
 \mathbb{C}^{\ell} \times \mathbb{C}^{n+1-\ell}, \{0\} \times S' & \xrightarrow{id_{\mathbb{C}^{\ell}} \times h} & \mathbb{C}^{\ell} \times \mathbb{C}^{p+1-\ell}, (0, 0) \\
 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \mathbb{C}^{n+1-\ell}, S' & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^{p+1-\ell}, 0
 \end{array}$$

onde i é a inclusão natural, ϕ e ψ são bianalíticas, π é a projeção natural e S' é um subconjunto de $\mathbb{C}^{n+1-\ell}$ de mesma cardinalidade que S . Cada um dos 3 retângulos do diagrama é um pullback, assim o retângulo de fora é também um pullback. A $\mathcal{A}_e$ -codimensão de g é igual a $\mathcal{K}_{D(h),e}$ -codimensão de $\pi \circ \psi \circ i$ onde $D(h)$ é o discriminante de h . Como h é estável, ele é Thom transversal assim qualquer campo vetorial em $\text{Der}(\log D(h))$ levanta, ver 6.14 de [20]. Como h não é um prisma, $\text{Der}(\log D(h)) \subseteq \mathcal{M}_{p+1-\ell}\theta(p+1-\ell)$. Assim,

$$TK_{D(h),e}(\pi \circ \psi \circ i) \subseteq TK_e(\pi \circ \psi \circ i)$$

e a $\mathcal{K}_e$ -codimensão de $\pi \circ \psi \circ i$ é 0 ou 1. Não pode ser 1 pois, neste caso, $\pi \circ \psi \circ i$ seria uma submersão e g seria estável. Logo $\pi \circ \psi \circ i$ é $\mathcal{A}$ -equivalente

a

$$(y_1, \dots, y_p) \xrightarrow{\gamma} (y_1, \dots, y_{p-\ell}, \sum_{i=p+1-\ell}^p y_i^2)$$

Sejam Φ e Ψ germes de difeomorfismos tais que $\Psi \circ (\pi \circ \psi \circ i) = \gamma \circ \Phi$.

Seja $\pi_{p+1-\ell} : \mathbb{C}^{p+1-\ell} \rightarrow \mathbb{C}$ a projeção na última coordenada. Então $d(\pi_{p+1-\ell} \circ \Psi \circ (\pi \circ \psi \circ i))(0) = 0$ e como h é transversal a $\pi \circ \psi \circ i$, $d(\pi_{p+1-\ell} \circ \Psi \circ h)(S') \neq 0$. Segue que para λ numa vizinhança de 0,

$$(\pi_{p+1-\ell} \circ \Psi \circ h)^{-1}(\lambda) \cong \mathbb{C}^{n-\ell}$$

e $(\pi_{p+1-\ell} \circ \Psi)^{-1}(\lambda) \cong \mathbb{C}^{p-\ell}$.

Definimos $h_\lambda = h|_{(\pi_{p+1-\ell} \circ \Psi \circ h)^{-1}(\lambda)} : \mathbb{C}^{n-\ell} \rightarrow \mathbb{C}^{p-\ell}$. Então $h = id_{\mathbb{C}} \times h_\lambda$ é um desdobramento de h_0 . Como o retângulo de fora do diagrama acima é um pullback, g é $\mathcal{A}$ -equivalente a $id_{\mathbb{C}^r} \times h_{\sum_{i=1}^r \lambda_i^2}$. Segue da Proposição 5.2.8 que g é uma aumentação. $\square$

5.3 Classificação de alguns multigerms de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1

Nesta secção analisaremos multigerms de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. O objetivo é mostrar que a classificação de tais multigerms se reduz a questões acerca de monogerms. Isto é análogo à secção 1 de [23] onde Mather descreve um multigerm estável em termos de monogerms estáveis. Descrevemos aqui os resultados (e quase todas as provas) do Capítulo 4 de [10].

O papel do ramos submersivos na classificação e teoria do desdobramento dos multigerms é trivial. Por esta razão "um multigerm com r ramos" significa um multigerm com r ramos não submersivos.

Dado um multigerm $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ com ramos $f^{(1)}, \dots, f^{(r)}$, definimos

$$\tau(f) = ev_0[(\omega f)^{-1}\{f^* \mathcal{M}_p \theta(f) + tf(\theta(n)_S)\}]$$

onde $ev_0 : \theta(p) \rightarrow T_0\mathbb{C}^p$ é dada por $ev_0(\eta) = \eta|_0$. Definimos também

$$\tau'(f) = ev_0[(\omega f)^{-1}\{tf(\theta(n)_S)\}]$$

Então $\tau'(f) = ev_0(\text{Der}(\log D(f)))$ onde $D(f)$ é o discriminante de f (quando $n < p$ discriminante significa imagem).

Um conjunto finito $E_1, \dots, E_r$ de subespaços vetoriais de um espaço vetorial F de dimensão finita tem **intersecção regular** (com relação a F) se

$$\text{codim}(E_1 \cap \dots \cap E_r) = \text{codim } E_1 + \dots + \text{codim } E_r$$

Lema 5.3.1 $E_1, \dots, E_r$ tem intersecção regular se, e somente se, a aplicação natural

$$F \rightarrow (F/E_1) \oplus \dots \oplus (F/E_r)$$

é sobrejetora

□

O seguinte resultado é devido a Mather [23].

Proposição 5.3.2 O multigerme f é estável se, e somente se, cada ramo $f^{(i)}$ é estável e $\tau(f^{(1)}), \dots, \tau(f^{(r)})$ tem intersecção regular com relação a $T_0\mathbb{C}^p$. Além disso, $\tau(f) = \tau(f^{(1)}) \cap \dots \cap \tau(f^{(r)})$. □

A seguir investigaremos o significado geométrico de τ' .

Lema 5.3.3 Se $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é estável então $\tau(f) = \tau'(f)$. □

Lema 5.3.4 Se $f = id_{\mathbb{C}^m} \times g$ (ou seja, $f = P^m g$) então $\tau'(f) = T_0\mathbb{C}^m \oplus \tau'(g)$. □

Lema 5.3.5 *Se $\dim_{\mathbb{C}} \tau'(f) = m$, então existe um germe g , que não é um prisma, e difeomorfismos ϕ e ψ tais que $f = \psi \circ (id_{\mathbb{C}^m} \times g) \circ \phi$, ou seja, f é $\mathcal{A}$ -equivalente a $P^m g$ e $\tau'(f) = d\psi_0(T_0\mathbb{C}^m)$.*

Prova Suponhamos que $tf(\xi) = \omega f(\eta)$. Se $\eta(0) \neq 0$ então $\xi(s) \neq 0$ para $s \in S$ e as órbitas de ξ e η podem ser incorporadas como retas coordenadas num novo sistema de coordenadas em $(\mathbb{C}^n, S)$ e $(\mathbb{C}^p, 0)$ respectivamente; a prova do lema então se reduz ao Lema de Thom-Levine, e f é $\mathcal{A}$ -equivalente a Pg_1 para algum germe g_1 . Aplicamos o mesmo procedimento a g_1 . Após m iterações, obtemos g com $\tau'(g) = 0$ que, portanto, não é um prisma. $\square$

Proposição 5.3.6 *Sejam $f: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $g: (\mathbb{C}^m, T) \rightarrow (\mathbb{C}^q, 0)$ multigerms que não são prismas. Suponhamos que $P^k f$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $P^\ell g$. Então $|S| = |T|$, $n = m$, $p = q$, $k = \ell$ e f é $\mathcal{A}$ -equivalente a g . Além disso, se a $\mathcal{A}$ -equivalência entre $P^k f$ e $P^k g$ é dada por aplicações bianalíticas como no seguinte diagrama então $\psi(\mathbb{C}^k \times \{0\}) = \mathbb{C}^k \times \{0\}$*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S & \xrightarrow{id_{\mathbb{C}^k} \times f} & \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^p, (0, 0) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^m, \{0\} \times T & \xrightarrow{id_{\mathbb{C}^k} \times g} & \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^q, (0, 0) \end{array}$$

$\square$

Segue da Proposição 5.3.6 que, dado um multigerme f , existe uma subvariedade maximal bem definida na meta ao longo da qual f é trivial (ou seja, um prisma) conhecida como o **estrato analítico** de f , e coincide com o germe do conjunto dos pontos $y \in (\mathbb{C}^p, 0)$ tais que $f: (\mathbb{C}^n, f^{-1}(y) \cap C_f) \rightarrow (\mathbb{C}^p, y)$ é $\mathcal{A}$ -equivalente a $f: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ onde C_f é o conjunto dos pontos críticos de f . Além disso, $\tau'(f)$ é o espaço tangente ao estrato analítico de f

em 0.

Proposição 5.3.7 *Dados $f: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $g: (\mathbb{C}^n, T) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ multigermes, seja $h: (\mathbb{C}^n, S \cup T) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ o multigerme cujos ramos são os de f e g . Suponhamos que h tenha $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Se ψ é um germe de uma família a 1-parâmetro de aplicações bianalíticas em $(\mathbb{C}^p, 0)$ satisfazendo $\psi_0 = id_{\mathbb{C}^p}$ e*

$$ev_0\left(\frac{d\psi_t}{dt}\Big|_{t=0}\right) \notin \tau'(f) + \tau'(g)$$

então $H: (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times (S \cup T)) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0))$ cujos ramos são $F = id_{\mathbb{C}} \times f$ e $G = id_{\mathbb{C}} \times (\psi_\lambda \circ g)$, é um desdobramento versal de h .

Prova Seja $H(\lambda, x) = (\lambda, h_\lambda(x))$. Se $v = \frac{dh_\lambda}{d\lambda}|_{\lambda=0} \in T\mathcal{A}_e h$, então $v = th(\xi) + \omega h(\eta)$ para algum $\xi \in \theta(n)_{S \cup T}$ e $\eta \in \theta(p)$. Segue que $\omega f(\eta) = tf(-\xi)$ e $tg(-\xi) = \omega g(\eta - \frac{d\psi_t}{dt}|_{t=0})$ e portanto, $ev_0(\frac{d\psi_t}{dt}|_{t=0}) \in \tau'(f) + \tau'(g)$, que é uma contradição.

Como $\frac{dh_\lambda}{d\lambda}|_{\lambda=0} \notin T\mathcal{A}_e h$ e h tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, H é um desdobramento versal de h . □

Corolário 5.3.8 *Se $h: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, então para todo subconjunto próprio S' de S , a restrição de h ao multigerme $(\mathbb{C}^n, S') \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é estável.*

Prova Seja $S = S' \cup S''$ onde $S' \cap S'' = \emptyset$. Sejam h' e h'' os multigermes de h em S' e S'' respectivamente. Suponhamos que h' ou h'' não seja estável, digamos h' . Então h' tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e portanto não é um prisma. Segue do Lema 5.3.5 que $\tau'(h') = 0$. Como h'' não é uma submersão, podemos escolher $v \in T_0\mathbb{C}^p \setminus \tau'(h'')$. Estendemos v a um campo vetorial em $\mathbb{C}^p$ e integramos de forma a obter um germe de uma família a 1-parâmetro ψ_t de aplicações bianalíticas em $(\mathbb{C}^p, 0)$ satisfazendo as condições

da Proposição 5.3.7. Portanto H , como descrito na Proposição 5.3.7, é um desdobramento versal de h . Mas então $id_{\mathbb{C}} \times h'$ é um desdobramento versal de h' e portanto h' é estável, uma contradição. Portanto h' e h'' são estáveis. $\square$

Um conjunto finito $E_1, \dots, E_r$ de subespaços vetoriais de um espaço vetorial F de dimensão finita tem **intersecção quase regular** (com relação a F) se

$$\text{codim}(E_1 \cap \dots \cap E_r) = \text{codim } E_1 + \dots + \text{codim } E_r - 1$$

Lema 5.3.9 $E_1, \dots, E_r$ tem intersecção quase regular se, e somente se, o conúcleo da aplicação natural

$$F \rightarrow (F/E_1) \oplus \dots \oplus (F/E_r)$$

tem dimensão 1. $\square$

Proposição 5.3.10 Seja h como na Proposição 5.3.7. Então $\tau(f)$ e $\tau(g)$ tem intersecção quase regular com relação a $T_0\mathbb{C}^p$.

Prova Seja H um desdobramento versal de h . Restringindo H obtemos desdobramentos versais F de f e G de g . Como f é estável, F é equivalente a um prisma sobre f e portanto

$$T_0\mathbb{C}^p / \tau(f) \cong T_0(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p) / \tau(F)$$

Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T_0\mathbb{C}^p & \rightarrow & \frac{T_0\mathbb{C}^p}{\tau(f)} \oplus \frac{T_0\mathbb{C}^p}{\tau(g)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_0(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p) & \rightarrow & \frac{T_0(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p)}{\tau(F)} \oplus \frac{T_0(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p)}{\tau(G)} \end{array}$$

no qual a seta vertical direita é bijetiva e a seta horizontal inferior é sobrejetiva por 5.3.1 e 5.3.2. Assim, o conúcleo da seta horizontal superior tem dimensão 1. $\square$

Corolário 5.3.11 *Se h é um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 com ramos $h^{(1)}, \dots, h^{(r)}$, $r \geq 2$, então $\tau(h^{(1)}), \dots, \tau(h^{(r)})$ tem intersecção quase regular com relação a $T_0\mathbb{C}^p$.* $\square$

Corolário 5.3.12 *Seja h como na Proposição 5.3.7. Então a codimensão de $\tau(f) + \tau(g)$ em $T_0\mathbb{C}^p$ é 1.* $\square$

É natural perguntar quando podemos dizer que um multigerme de codimensão 1 é primitivo.

Proposição 5.3.13 *Seja h como na Proposição 5.3.7. Então h é uma aumento k vezes de um germe primitivo, onde $k = \dim_{\mathbb{C}}(\tau(f) \cap \tau(g))$.*

Prova Segue do Corolário 5.3.11 que podemos escolher $v \in T_0\mathbb{C}^p \setminus (\tau(f) + \tau(g))$. Consideremos o germe de uma família a 1-parâmetro ψ_t de aplicações bianalíticas em $(\mathbb{C}^p, 0)$ tal que $ev_0(\frac{d\psi_t}{dt}|_{t=0}) = v$. Temos então um desdobramento versal H de h como na Proposição 5.3.7. Se Λ é a primeira coordenada na meta $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p$ de H então $\tau(F) = \mathbb{C} \frac{\partial}{\partial \Lambda} \oplus \tau(f)$ e $\tau(G) = \mathbb{C}(\frac{\partial}{\partial \Lambda} + v) \oplus \tau(g)$. Como $\tau(H) = \tau(F) \cap \tau(G)$ segue que $\tau(H) = \tau(f) \cap \tau(g)$. Portanto, segue da Proposição 5.3.6 que H é um prisma e do Teorema 5.2.11 que h é uma aumento. $\square$

É útil analisarmos multigerms primitivos de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 pois, como veremos adiante, resultados sobre germes primitivos geralmente podem ser

generalizados para suas aumentações. No caso primitivo, Corolário 5.3.12 e Proposição 5.3.13 mostram que temos uma decomposição

$$T_0\mathbb{C}^p = \tau(f) \oplus \tau(g) \oplus \mathbb{C}v$$

Consideremos $\alpha: (\mathbb{C}^a, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $\beta: (\mathbb{C}^b, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ parametrizações dos estratos analíticos de f e g respectivamente, onde $a = \dim_{\mathbb{C}} \tau(f)$ e $b = \dim_{\mathbb{C}} \tau(g)$. Fazendo a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \psi: (\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^p, 0) \\ (x, y, \lambda) &\mapsto \alpha(x) + \beta(y) + \lambda v \end{aligned}$$

o estrato analítico de f se torna $\mathbb{C}^a \times \{0\} \times \{0\}$, o de g se torna $\{0\} \times \mathbb{C}^b \times \{0\}$ e v se torna $(0, 0, 1) \in \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$. Suponhamos, para o restante desta secção, que esta mudança de coordenada foi realizada.

Dizemos que um multigerme f é transversal a um subespaço vetorial V de $T_0\mathbb{C}^p$ se todo ramo de f é transversal a V . Nossa análise se resume em considerar dois casos: se g é ou não transversal a $\tau(f)$. Primeiramente consideremos o caso g não transversal a $\tau(f)$.

Lema 5.3.14 *Um germe estável de coposto zero é uma singularidade de Morse ou o domínio ou o co-domínio tem dimensão zero.* $\square$

Proposição 5.3.15 *Seja h como na Proposição 5.3.7. Suponhamos h primitivo e g não transversal a $\tau(f)$. Então g tem exatamente um ramo que é um prisma sobre uma singularidade de Morse ou uma imersão.*

Prova Se g tem mais de um ramo, então segue do Corolário 5.3.8 que o multigerme consistindo de f mais um ramo qualquer $g^{(i)}$ de g é estável. Assim $\tau(g^{(i)}) \cap \tau(f)$, logo $g^{(i)} \cap \tau(f)$. Como este resultado vale para todo i

temos que $g \nparallel \tau(f)$. Mas isto é uma contradição. Logo g tem exatamente um ramo.

Suponhamos que $\text{Im}(dg_0)$ contenha propriamente $\tau(g)$. Então existe uma deformação a 1-parâmetro h_t de h que fixa $\text{Im}(dg_0)$ e tal que g seja transversal a $\tau(f)$ para $t \neq 0$. Como $\tau(g)$ continua não transversal a $\tau(f)$, h_t não é estável mesmo para $t \neq 0$ e também não é equivalente a $h = h_0$. Isto é impossível pois h tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Logo $\text{Im}(dg_0) = \tau(g)$, e portanto g é um prisma sobre um germe de posto 0. Segue do Lema 5.3.14 que g é um prisma sobre uma função de Morse ou uma imersão. $\square$

Suponhamos f, g, h como na proposição acima, e suponhamos g um prisma sobre uma singularidade de Morse. Então a codimensão do seu estrato analítico é 1 e portanto $\tau(f) = \{0\}$. Logo temos uma decomposição da meta como $\mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{C}$ onde $\mathbb{C}^{p-1} \times \{0\}$ é o estrato analítico de g . Existe uma vizinhança U de 0 em $\mathbb{C}^{p-1}$ tal que para todo $u \in U$, o pullback de g ao longo da inclusão do subconjunto $\{u\} \times \mathbb{C}$ é uma singularidade de Morse e portanto após uma mudança de coordenadas na fonte podemos reduzir este pullback na forma $\sum_{i=1}^m x_i^2$. De fato, podemos dizer mais que isto. As mudanças de coordenadas na fonte dependem analiticamente de u e portanto temos uma mudança de coordenadas na fonte que reduz g à forma

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{C}^m &\rightarrow \mathbb{C}^{p-1} \times \mathbb{C} \\ (\lambda, x_1, \dots, x_m) &\mapsto (\lambda, \sum_{i=1}^m x_i^2) \end{aligned}$$

Alternativamente se g é uma imersão então sua imagem é seu estrato analítico e podemos fazer uma mudança de coordenadas na fonte de modo que g seja a inclusão de $\mathbb{C}^b$ em $\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$.

Trataremos agora o caso g transversal a $\tau(f)$. Pelo Teorema da Função Implícita podemos decompor a meta $\mathbb{C}^n$ de g em $\mathbb{C}^{n-b-1} \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$ de modo

que g preserve as últimas $b + 1$ coordenadas. Para $\lambda \in \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$, definimos $g_\lambda: \mathbb{C}^{n-b-1} \rightarrow \mathbb{C}^a$ por $g_\lambda = \pi \circ g \circ i_\lambda$ onde $i_\lambda: \mathbb{C}^{n-b-1} \rightarrow \mathbb{C}^{n-b-1} \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$ é dada por $i_\lambda(x) = (x, \lambda)$ e $\pi: \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^a$ é a projeção. Então $g = g_\lambda \times id_{\mathbb{C}^b \times \mathbb{C}}$ é um desdobramento de g_0 .

Proposição 5.3.16 *Nestas circunstâncias, a aplicação*

$$\begin{aligned} \bar{g}: \mathbb{C}^{n-b-1} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C} \\ (x, \mu) &\mapsto (g_{(0, \mu)}(x), \mu) \end{aligned}$$

onde $(0, \mu) \in \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$, é um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de g_0 .

Prova É suficiente mostrar que se $G: \mathbb{C}^{n-b-1} \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^d$ é um desdobramento de g_0 então G pode ser induzido de $\bar{g}$. Note que g_λ é o pullback de g pela inclusão γ_λ de $\mathbb{C}^a$ como $\mathbb{C}^a \times \{\lambda\} \hookrightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$. Também $\bar{g}$ é o pullback de g pela inclusão $\bar{\gamma}$ de $\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}$ como $\mathbb{C}^a \times \{0\} \times \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$. Pela Proposição 1.2 de [29], existe uma aplicação $\Gamma: \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$ tal que $\Gamma|_{\mathbb{C}^a \times \{0\}} = \gamma_0$ e tal que o pullback de g por Γ é G . Definimos

$$\begin{aligned} \bar{\omega}: \mathbb{C}^p \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C} \\ (y, \mu) &\mapsto y + (0, 0, \mu) \end{aligned}$$

Então $\bar{\omega}|_{\mathbb{C}^p \times \{0\}} = id_{\mathbb{C}^p}$ e $\bar{\omega}|_{\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}} = \bar{\gamma}$ (estamos considerando $\mathbb{C}^a$ como um subconjunto de $\mathbb{C}^p$). Analogamente definimos $\Omega: \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$ tal que $\Omega|_{\mathbb{C}^p \times \{0\}} = id_{\mathbb{C}^p}$ e $\Omega|_{\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^d} = \Gamma$.

Consideremos agora dois desdobramentos de h . Definimos $H_{\bar{\omega}}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}$ cujos ramos são $G_{\bar{\omega}} = g \times id_{\mathbb{C}}$ e $F_{\bar{\omega}}(x, \mu) = (\bar{\omega}(f(x), \mu), \mu)$, e definimos $H_{\Omega}: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^d$ com ramos $G_{\Omega} = g \times id_{\mathbb{C}^d}$ e $F_{\Omega}(x, \nu) = (\Omega(f(x), \nu), \nu)$.

Segue da Proposição 5.3.7 que $H_{\bar{\omega}}$ é um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de h e portanto existe $\alpha: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tal que H_{Ω} é isomorfo a $\alpha^* H_{\bar{\omega}}$. Note que g_0

é o pullback de g ao longo do estrato analítico de f , o desdobramento $\bar{g}$ de g_0 é o pullback do desdobramento $G_{\bar{\omega}}$ de g ao longo do estrato analítico do desdobramento $F_{\bar{\omega}}$ de f e analogamente o desdobramento G de g_0 é o pullback do desdobramento G_{Ω} de g ao longo do estrato analítico do desdobramento F_{Ω} de f . Entretanto, como estratos analíticos e pullbacks são respeitados por $\mathcal{A}$ -equivalências, para qualquer multigerme $\hat{h}$, cujos ramos são $\hat{f}$ e $\hat{g}$, a $\mathcal{A}$ -classe de equivalência do pullback de $\hat{g}$ ao longo do estrato analítico de $\hat{f}$ é determinado pela $\mathcal{A}$ -classe de equivalência de $\hat{h}$. Portanto, G pode ser induzido de $\bar{g}$ por α . $\square$

Corolário 5.3.17 *Com as mesmas hipóteses da Proposição 5.3.16, g_0 é um multigerme primitivo de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e g é um desdobramento $\mathcal{A}_e$ -versal de g_0 .* $\square$

Gostaríamos de encontrar uma forma normal para g analogamente ao caso não-transversal, mas não podemos fazer isto para um g_0 arbitrário.

Definição 5.3.18 *Uma aplicação $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^p$ é dita quasihomogênea se existem inteiros positivos $\omega_1, \dots, \omega_n$ (pesos) e $d_1, \dots, d_p$ (graus) tais que para $\mu \in \mathbb{C}$, $f(\mu^{\omega_1}x_1, \dots, \mu^{\omega_n}x_n) = (\mu^{d_1}f_1(x), \dots, \mu^{d_p}f_p(x))$. Um germe f é dito quasihomogêneo se existe um representante que é quasihomogêneo como uma aplicação. Um multigerme é quasihomogêneo se seus ramos são quasihomogêneos com os mesmos graus.*

Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um multigerme quasihomogêneo de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Quando o par (n, p) está no domínio das boas dimensões segundo Mather, existe um desdobramento versal quasihomogêneo $F = id_{\mathbb{C}} \times f_{\lambda}$ de f onde o grau do parâmetro do desdobramento não é zero. De fato, se o grau

é zero, então F é topologicamente trivial e portanto f é topologicamente estável. Mas isto é uma contradição pois nas boas dimensões, topologicamente estável é equivalente a estável. Sejam $\omega, d_1, \dots, d_p$ os graus de F e $\omega, \omega_1^{(i)}, \dots, \omega_n^{(i)}$ os pesos do i -ésimo ramo de F . Para $\mu \in \mathbb{C}$ definimos $\psi_\mu : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^p$ por $\psi_\mu(y_1, \dots, y_p) = (\mu^{d_1} y_1, \dots, \mu^{d_p} y_p)$ e $\Psi_\mu : \mathbb{C}^{p+1} \rightarrow \mathbb{C}^{p+1}$ por $\Psi_\mu(\lambda, y) = (\mu^\omega \lambda, \psi_\mu(y))$. Sejam $\phi_\mu^{(i)}$ e $\Phi_\mu^{(i)}$ os análogos destas aplicações nas fontes dos i -ésimos ramos de f e F respectivamente. Se ϕ_μ tem ramos $\phi_\mu^{(i)}$ então

$$f_{\mu^\omega \lambda} \circ \phi_\mu = \psi_\mu \circ f_\lambda$$

Lema 5.3.19 *Sejam $\bar{f}$ e $\tilde{f}$ multigerms quasihomogêneos de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ ((n, p) boas dimensões) de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1. Suponhamos f e f' $\mathcal{A}$ -equivalentes. Seja $\bar{F} = id_{\mathbb{C}^d} \times \bar{f}_\lambda$ um desdobramento versal de $\bar{f}$ com estrato analítico $\{0\} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \{0\}$ e $\tilde{F} = id_{\mathbb{C}} \times \tilde{f}_\mu$ um desdobramento miniversal de $\tilde{f}$. Então existem famílias de aplicações bianalíticas α_λ em $\mathbb{C}^n$ e β_λ em $\mathbb{C}^p$, $\lambda \in \mathbb{C}^d$, tais que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^p \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \end{array}$$

onde $\alpha(\mu, \nu, x) = (\mu, \alpha_{(\mu, \nu)}(x))$ e $\beta(\mu, \nu, y) = (\mu, \beta_{(\mu, \nu)}(y))$.

Prova Podemos supor que $\bar{f}$ e $\tilde{f}$ são quasihomogêneos como aplicações.

Sejam ϕ e ψ aplicações bianalíticas tais que $\psi \circ \bar{f} = \tilde{f} \circ \phi$. Então $F' = (id_{\mathbb{C}^d} \times \psi) \circ \bar{F} \circ (id_{\mathbb{C}^d} \times \phi)^{-1} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^p$ é um desdobramento versal de $\tilde{f}$ com estrato analítico $\{0\} \times \mathbb{C}^d \times \{0\}$.

Como $\tilde{F}$ é um desdobramento miniversal, existe uma submersão $\gamma : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ e famílias de aplicações bianalíticas $\bar{\phi}_\lambda$ em $\mathbb{C}^n$ e $\bar{\psi}_\lambda$ em $\mathbb{C}^p$, $\lambda \in \mathbb{C}^d$, tais

que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{F'} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^p \\ \downarrow \Gamma \times \bar{\phi}_\lambda & & \downarrow \Gamma \times \bar{\psi}_\lambda \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\bar{F} \times id_{\mathbb{C}^{d-1}}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^p \end{array}$$

ond $\Gamma(\mu, \nu) = (\gamma(\mu, \nu), \nu)$.

Temos que $\gamma^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{C}^{d-1}$. Então Γ é bianalítica pelo Teorema da Função Inversa. Como Γ comuta com a projeção sobre $\mathbb{C}^{d-1}$, Γ^{-1} também comuta, assim existem $\gamma', \gamma'' : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\Gamma^{-1}(\mu, \nu) = (\gamma'(\mu, \nu), \nu)$ e $\gamma' = \mu\gamma''$ onde $\mu : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}$ é a projeção na primeira coordenada. Também γ' é uma submersão e portanto γ'' é não nula numa vizinhança da origem. Temos que

$$(\gamma' \times \psi_{\sqrt{\gamma''}}) \circ (\bar{F} \times id_{\mathbb{C}^{d-1}}) = \bar{F} \circ (\gamma' \times \phi_{\sqrt{\gamma''}})$$

onde $\phi_{\sqrt{\gamma''}}$ e $\psi_{\sqrt{\gamma''}}$ são como dito antes desta proposição. Então o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{F'} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{d-1} \times \mathbb{C}^p \\ \downarrow \bar{\alpha} & & \downarrow \bar{\beta} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\bar{F}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \end{array}$$

onde $\bar{\alpha} = (\gamma' \times \phi_{\sqrt{\gamma''}}) \circ (\Gamma \times \bar{\phi}_\lambda)$ e $\bar{\beta} = ((\gamma' \times \psi_{\sqrt{\gamma''}}) \circ (\Gamma \times \bar{\psi}_\lambda))$.

A proposição segue tomando $\alpha = \bar{\alpha} \circ (id \times \phi)$ e $\beta = \bar{\beta} \circ (id \times \psi)$. $\square$

Teorema 5.3.20 *Sejam $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $g : (\mathbb{C}^n, T) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ multigermes $((n, p)$ boas dimensões). Consideremos $h : (\mathbb{C}^n, S \cup T) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ o multigerme primitivo de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 cujos ramos são os de f e g . Suponhamos que*

(a) g não é transversal a $\tau(f)$ ou, g é transversal a $\tau(f)$ e o pullback de g pelo estrato analítico de f é quasihomogêneo.

(b) f não é transversal a $\tau(g)$ ou, f é transversal a $\tau(g)$ e o pullback de f pelo estrato analítico de g é quasihomogêneo.

Então, após mudanças de coordenadas, $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}, 0)$ é um multigerme estável com estrato analítico $\mathbb{C}^a$, $g : (\mathbb{C}^n, T) \rightarrow (\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}, 0)$ é um multigerme estável com estrato analítico $\mathbb{C}^b$ e uma das seguintes afirmações valem para f (também para g trocando f e g , a e b e assim por diante)

(1) f tem somente um ramo:

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{C}^a, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}, 0) \\ x &\mapsto (x, 0, 0) \end{aligned}$$

(2) $b = 0$ e f tem somente um ramo:

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^{n-a}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}, 0) \\ (\lambda, x_1, \dots, x_{n-a}) &\mapsto (\lambda, \sum_{i=1}^{n-a} x_i^2) \end{aligned}$$

(3) existe um multigerme primitivo quasihomogêneo $\tilde{f}$ (que pode ser escolhido na A -classe de equivalência do pullback de f pelo estrato analítico de g) e um desdobramento versal $\tilde{F} = id_{\mathbb{C}} \times \tilde{f}_{\mu}$ de $\tilde{f}$ (que pode ser qualquer desdobramento miniversal de $\tilde{f}$) tal que

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^{n-a-1} \times \mathbb{C}, \{0\} \times S \times \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}, 0) \\ (\lambda, x, \mu) &\mapsto (\lambda, \tilde{f}_{\mu}(x), \mu) \end{aligned}$$

Prova O caso g não transversal a $\tau(f)$ já foi estudado após a Proposição 5.3.15. Note que neste caso a mudança de coordenadas não afeta f .

Suponhamos g transversal a $\tau(f)$ e seja $\tilde{G} = id \times \tilde{g}_\mu$ um desdobramento miniversal de uma forma normal $\tilde{g}$ do pullback de g pelo estrato analítico de f . Então após uma mudança de coordenadas paralela ao estrato analítico de f , ver Lema 5.3.19, temos

$$\begin{aligned} g: \mathbb{C}^{n-b-1} \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C} \\ (z, \delta, \mu) &\mapsto (\tilde{g}_\mu(z), \delta, \mu) \end{aligned}$$

Note que os estratos analíticos de f e g não foram mudados.

Normalizamos agora f da mesma maneira. Temos somente que considerar o caso f transversal a $\tau(g)$, pois neste caso g é alterada. Entretanto a alteração decorre de uma mudança de coordenadas na meta paralela ao estrato analítico de g e portanto pode ser desfeita por uma mudança de coordenadas na fonte de g .

Finalmente, segue do Lema 5.3.17 que $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são primitivos. $\square$

Observação 5.3.21 Note que podemos ter g não transversal a $\tau(f)$ e f transversal a $\tau(g)$. De fato, seja h o bigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 consistindo do cross-cap, f , e plano imerso, g , se interceptando transversalmente. Sabemos que h é primitivo. Temos que g não é transversal a $\tau(f) = \{0\}$. No entanto f é transversal a $\tau(g)$, que é a imagem de g .

O Teorema 5.3.20 mostra que um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, satisfazendo certas condições, pode ser reduzido a uma forma normal. O resultado seguinte é a recíproca.

Teorema 5.3.22 *Sejam f e g multigermes satisfazendo uma das afirmações (1), (2) e (3) do Teorema 5.3.20. Se h é o multigerme cujos ramos são f e g , então h é primitivo quasihomogêneo de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1.*

Prova Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_a, y_1, \dots, y_b, \mu$ as coordenadas de $\mathbb{C}^p = \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$. Afirmamos que $\theta(h) = T\mathcal{A}_e h + \mathbb{C}\nu$, onde ν é o campo vetorial ao longo de h que é $\omega f(\frac{\partial}{\partial \mu})$ ao longo de f e 0 ao longo de g .

De fato, como $\theta(h) = \theta(f) \oplus \theta(g)$ e f e g são estáveis, temos de mostrar que $\omega f(\theta(p)) \subset T\mathcal{A}_e h + \mathbb{C}\nu$. É suficiente mostrar que $\omega f(\mathcal{M}_p \frac{\partial}{\partial \mu}) \subset T\mathcal{A}_e h$.

Um elemento arbitrário c de $\mathcal{M}_p$ é dado por

$$c = \sum_{i=1}^a \alpha_i \lambda_i + \sum_{j=1}^b \beta_j y_j + m\mu$$

onde $\alpha_i, \beta_j, m \in \mathcal{O}_p$. Portanto, temos de mostrar que $\omega f(\alpha_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial \mu})$, $\omega f(\beta_j y_j \frac{\partial}{\partial \mu})$ e $\omega f(m\mu \frac{\partial}{\partial \mu})$ pertencem a $T\mathcal{A}_e h$. Mostraremos que o primeiro e o segundo se reduzem ao último caso.

Trataremos primeiro de $\omega f(\beta_j y_j \frac{\partial}{\partial \mu})$. Se f é do tipo (1), este termo é zero. Quando f é do tipo (2), este termo não existe. Resta f do tipo (3). A aplicação $\tilde{f}: \mathbb{C}^{n-a-1} \rightarrow \mathbb{C}^b$ é induzida da aplicação estável $\tilde{F}: \mathbb{C}^{n-a-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$ pela inclusão $\gamma: \mathbb{C}^b \rightarrow \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$. Portanto a $\mathcal{K}_{D(\tilde{F})}$ -codimensão de γ é igual a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de $\tilde{f}$ que é 1. Ou seja,

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(\gamma)}{t\gamma(\theta(b)) + \gamma^* \text{Der}(\log D(\tilde{F}))} = 1$$

Mas $\gamma^* \text{Der}(\log D(\tilde{F})) \subseteq \mathcal{M}_b \frac{\partial}{\partial \mu} + t\gamma(\theta(b))$ (caso contrário existiria um elemento em $ev_0(\text{Der}(\log D(\tilde{F})) = \tau'(\tilde{F}))$ transversal à imagem de γ , e portanto $\tilde{F}$ seria um prisma sobre $\tilde{f}$, uma contradição). Logo,

$$\gamma^* \text{Der}(\log D(\tilde{F})) + t\gamma(\theta(b)) = \mathcal{M}_b \frac{\partial}{\partial \mu} + t\gamma(\theta(b))$$

Em particular, $y_j \frac{\partial}{\partial \mu} \in \gamma^* \text{Der}(\log D(\tilde{F})) + t\gamma(\theta(b))$ como um campo vetorial ao longo de γ , digamos $y_j \frac{\partial}{\partial \mu} = \eta + \eta'$ onde $\eta \in \gamma^* \text{Der}(\log D(\tilde{F}))$ e $\eta' \in t\gamma(\theta(b))$.

Retornamos agora a campos vetoriais ao longo de h . Em $\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^{n-a-1} \times \{0\}$, $\omega f(\beta_j y_j \frac{\partial}{\partial \mu}) = \omega f(\beta_j \eta) + \omega f(\beta_j \eta')$. Como $\beta_j \eta$ é levantado ao longo de f , $\omega f(\beta_j \eta) \in T\mathcal{A}_e h$, e como $\beta_j \eta'$ não tem componentes na direção $\frac{\partial}{\partial \mu}$, $\omega f(\beta_j \eta') \in T\mathcal{A}_e h$. Portanto, para mostrar que $\omega f(\beta_j y_j \frac{\partial}{\partial \mu}) \in T\mathcal{A}_e h$ é suficiente mostrar que $\omega f(m\mu \frac{\partial}{\partial \mu}) \in T\mathcal{A}_e h$ para algum $m \in \mathcal{O}_p$.

Para mostrar o segundo caso, ou seja, $\omega f(\alpha_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial \mu}) \in T\mathcal{A}_e h$, é suficiente mostrar que $\omega g(-\alpha_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial \mu}) \in T\mathcal{A}_e h$, mas isto é análogo ao primeiro caso.

Finalmente, consideremos $\omega f(m\mu \frac{\partial}{\partial \mu})$ e f do tipo (3). Podemos considerar $\tilde{f}$ e $\tilde{F}$ quasihomogêneo. Como antes temos que $\tilde{F} \circ \Phi_s = \Psi_s \circ \tilde{F}$, para todo $s \in \mathbb{C}$. Diferenciando com respeito a s temos que $t\tilde{F}(\xi) = \omega \tilde{F}(\eta)$ onde $\xi = \frac{\partial \Phi_s}{\partial s}|_{s=1}$ e $\eta = \frac{\partial \Psi_s}{\partial s}|_{s=1}$. Então $\omega f(m\mu \frac{\partial}{\partial \mu}) - t f(\frac{m \circ f}{\omega} \xi)$ não tem componente na direção $\frac{\partial}{\partial \mu}$ e portanto está em $T\mathcal{A}_e h$. Portanto $\omega f(m\mu \frac{\partial}{\partial \mu}) \in T\mathcal{A}_e h$. $\square$

Observação 5.3.23 Se substituirmos $\mathbb{C}$ por $\mathbb{R}$ e aplicações analíticas por analíticas reais, os resultados obtidos até aqui ainda valem a menos das seguintes alterações:

(a) No caso real definimos duas aumentações:

$$A_F^+(\lambda, x) = (\lambda, f_{\lambda^2}(x))$$

$$A_F^-(\lambda, x) = (\lambda, f_{-\lambda^2}(x))$$

(b) Na prova da Proposição 5.3.19, para ω ímpar, ψ não está bem definido. Consequentemente temos que definir $\alpha(\mu, \nu, x) = (-\mu, \alpha_{(\mu, \nu)}(x))$ e $\beta(\mu, \nu, y) = (-\mu, \beta_{(\mu, \nu)}(y))$ de modo que o diagrama comute.

(c) Teorema 5.3.20 é o mesmo exceto no caso (2) onde f é da forma

$$f(\lambda, x_1, \dots, x_{n-a}) = (\lambda, \sum_{i=1}^{n-a} \pm x_i^2)$$

e no caso (3) podemos considerar f da forma $f(\lambda, x, \mu) = (\lambda, \tilde{f}_{-\mu}(x), \mu)$.

5.4 Topologia

Seja $f: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ (S um conjunto finito) um multigerme finitamente $\mathcal{A}$ -determinado. No parágrafo 4.2 definimos perturbação estável de f no caso $p = n + 1$. Analogamente, segundo [13], podemos definir perturbação estável no caso $n \geq p$ trocando imagem por discriminante. Assim, se $F: U \rightarrow V$ é um bom representante de um desdobramento $F: (\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) \rightarrow (\mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^p, (0, 0))$, $F(\lambda, x) = (\lambda, f_\lambda(x))$, de f , o discriminante $D(F)$ de F é uma subvariedade analítica de V . Nesta secção consideraremos o caso $n \geq p$, (n, p) boas dimensões.

Consideremos a estratificação canônica de $D(F)$ e seja $\epsilon > 0$ tal que para todo ϵ' com $0 < \epsilon' \leq \epsilon$, todo estrato de $D(f) \cong D(F) \cap (\{0\} \times \mathbb{C}^p)$ é transversal a esfera $S_{\epsilon'} \subset \mathbb{C}^p$ de centro 0 e raio ϵ' ("stratified transverse"). Tal ϵ é chamado de **raio de Milnor** para $D(f)$. Pelo Primeiro Lema de Isotopia de Thom, $D(f) \cap B_\epsilon$ é um cone sobre o bordo $D(f) \cap S_\epsilon$. Segue que existe $\delta > 0$ tal que para $\lambda \in B_\delta \subseteq \mathbb{C}$, $D(F)$ é stratified transverse a $\{\lambda\} \times S_\epsilon$ (δ é chamado de **limite de perturbação** para F com respeito a B_ϵ). Para $\lambda \in B_\delta$, o **discriminante** de f_λ é definido por $D(f_\lambda) \cap B_\epsilon$, ou, em outras palavras, $D(F) \cap (\{\lambda\} \times B_\epsilon)$. Segue de [13] que o discriminante de f_λ tem o tipo de homotopia de um bouquet de esferas de dimensão $p - 1$. O número de esferas do bouquet é chamado **número de Milnor do discriminante** de f e denotado por $\mu_\Delta(f)$.

Dados $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p > 0$ seja $P_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_p}(0)$ o cubo

$$\{(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{C}^p / |y_i| < \epsilon_i \ \forall i\}$$

Um **pseudo raio de Milnor** para $D(f)$ é um $\epsilon > 0$ tal que para todo $\epsilon_1, \dots, \epsilon_p$ com $0 < \epsilon_i < \epsilon$ ($\forall i$), $D(f)$ é "stratified transverse" ao bordo do cubo $P_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_p}(0)$. Os resultados descritos acima ainda valem se substituirmos B_ϵ por um cubo e o discriminante definido dessa maneira é o mesmo.

Seja $\pi : D(F) \rightarrow \mathbb{C}$ a projeção no espaço dos parâmetros $\mathbb{C}$. Então π induz uma fibração localmente trivial

$$((B_\delta \setminus \{0\}) \times B_\epsilon) \cap D(F) \rightarrow B_\delta \setminus \{0\}$$

O seguinte resultado é o Lema 8.1 de [10].

Lema 5.4.1 *Sejam A, A', B, B' subespaços abertos contráteis de um espaço topológico tais que $A \cap B$ e $A' \cap B'$ são homotopicamente equivalentes e $A \cap B$ tem vizinhança tubular em A e B , e $A' \cap B'$ tem vizinhança tubular em A' e B' . Então $A \cup B$ e $A' \cup B'$ são homotopicamente equivalentes.* $\square$

Suponhamos que f tenha $\mathcal{A}_\epsilon$ -codimensão 1. Seja $F(\lambda, x) = (\lambda, f_\lambda(x))$ um representante próprio de um desdobramento miniversal de f . Para $\mu \in \mathbb{C}$ definimos $g_\mu(\lambda, x) = (\lambda, f_{\lambda^2 + \mu}(x))$. Então $G(\mu, \lambda, x) = (\mu, \lambda, f_{\lambda^2 + \mu}(x))$ é um representante próprio de um desdobramento miniversal de $g = A_F f$.

Teorema 5.4.2 *Com a notação acima o discriminante de g_μ é homotopicamente equivalente à suspensão do discriminante de f_λ .*

Prova Seja $\epsilon > 0$ um pseudo raio de Milnor para f e F e $\delta > 0$ um limite de perturbação para F com respeito a $P_{\epsilon, \dots, \epsilon}(0) \subseteq \mathbb{C}^p$.

Seja $\epsilon' > 0$ em pseudo raio de Milnor para g e $\delta' > 0$ um limite de perturbação para G com respeito a $P_{\epsilon'', \epsilon, \dots, \epsilon}(0) \subseteq \mathbb{C}^{p+1}$, onde $\epsilon'' = \min\{\epsilon, \sqrt{\delta/2}\}$.

Seja $\mu_0 \in \mathbb{C}$ satisfazendo $\mu_0 \neq 0$, $|\mu_0| < \delta'$, $|\mu_0| < \delta/2$ e $|\mu_0| < \epsilon''^2$. Então $D(g_{\mu_0}) = D(g_{\mu_0}) \cap P_{\epsilon'', \epsilon, \dots, \epsilon}(0)$ é o discriminante de g_{μ_0} . Consideremos

$$\pi : D(g_{\mu_0}) \rightarrow \mathbb{C}$$

a projeção na primeira coordenada. Logo $\pi(D(g_{\mu_0})) = B_{\epsilon''}(0)$. Temos que

(i) a fibra de π sobre $\lambda \in B_{\epsilon''}(0)$ é naturalmente homeomorfa a $D(f_{\lambda^2 + \mu_0}) \cap P_{\epsilon, \dots, \epsilon}(0)$. Como $|\mu_0| < \epsilon''^2$, as raízes quadradas de $-\mu_0$ estão em $B_{\epsilon''}(0)$. Assim, se $\lambda \in B_{\epsilon''}(0)$ e $\lambda^2 \neq -\mu_0$, $D(f_{\lambda^2 + \mu_0}) \cap P_{\epsilon, \dots, \epsilon}(0)$ é o discriminante de $f_{\lambda^2 + \mu_0}$ (pois $\lambda^2 + \mu_0 \in B_\delta(0)$).

(ii) Se a e b são as raízes quadradas de $-\mu_0$, a restrição de π a $\pi^{-1}(B_{\epsilon''}(0) \setminus \{a, b\})$ é um fibrado localmente trivial.

Figura 5.2: Discriminante de uma perturbação estável do bigerme consistindo de duas dobras tangentes

Sejam A e B subconjuntos abertos e contráteis de $B_{\epsilon''}(0)$ com intersecção contrátil e não vazia tais que $a \in A \setminus B$ e $b \in B \setminus A$. Como $D(g_{\mu_0})$ é um fibrado exceto em $\{a, b\}$, $D(g_{\mu_0})$ é homotopicamente equivalente a $\pi^{-1}(A \cup B)$.

Como $A \cap B$ é contrátil e $\pi^{-1}(A \cap B)$ é um fibrado sobre $A \cap B$, $\pi^{-1}(A \cap B)$ é homotopicamente equivalente à fibra, que é o discriminante de f_λ . Portanto temos dois subespaços, $\pi^{-1}(A)$ e $\pi^{-1}(B)$, cuja intersecção é homotopicamente equivalente ao discriminante de f_λ . Como a suspensão de um espaço pode ser dividida em dois subespaços contráteis cuja intersecção tem vizinhanças tubulares e é homotopicamente equivalente ao espaço original, pelo Lema 5.4.1 resta mostrar que $\pi^{-1}(A)$ e $\pi^{-1}(B)$ são contráteis. Em a , $\gamma(\lambda) = \lambda^2 + \mu_0$ é bianalítica assim, para $\delta'' > 0$ suficientemente pequeno temos um homeomorfismo $\Gamma : \pi^{-1}(\gamma^{-1}(B_{\delta''}(0))) \rightarrow D(F) \cap P_{\delta'', \epsilon, \dots, \epsilon}(0)$. Mas $\pi^{-1}(A \setminus \{a\})$ é um fibrado sobre $A \setminus \{a\}$ logo, para $\delta'' > 0$ suficientemente pequeno, $\pi^{-1}(A)$ é homeomorfo a $\pi^{-1}(\gamma^{-1}(B_{\delta''}(0)))$ e portanto $\pi^{-1}(A)$ é homeomorfo a $D(F) \cap P_{\delta'', \epsilon, \dots, \epsilon}(0)$. Tomando $\delta'' < \epsilon$ temos que $D(F) \cap P_{\delta'', \epsilon, \dots, \epsilon}(0)$ é um cone e portanto contrátil. Logo $\pi^{-1}(A)$ é contrátil. Analogamente, $\pi^{-1}(B)$ é contrátil. $\square$

Para obter informações sobre a topologia do discriminante de uma perturbação estável de f , consideraremos a topologia dos discriminantes de perturbações estáveis das formas normais do Teorema 5.3.20.

Proposição 5.4.3 *Seja h um multigerme primitivo de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ dado pela forma normal do Teorema 5.3.20 onde f e g são do tipo (2). Então o discriminante de uma perturbação estável de h é homotopicamente equivalente a uma 0-esfera.*

Prova Temos que $a = b = 0$ e $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_n) = \sum x_i^2$. Uma perturbação estável h_λ de h é dada por (ver Proposição 5.3.7)

$$h_\lambda : \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i^2 \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum x_i^2 + \lambda \end{cases}$$

O discriminante de h_λ é a união disjunta de dois pontos e portanto é homotopicamente equivalente a uma 0-esfera. $\square$

Proposição 5.4.4 *Seja h um multigerme primitivo de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ dado pela forma normal do Teorema 5.3.20 onde f é do tipo (3) e g é do tipo (2). Então o discriminante de uma perturbação estável de h tem o tipo de homotopia da suspensão do discriminante de uma perturbação estável de $\tilde{f}_0$.*

Prova Temos que $a = 0$ e f é um desdobramento versal de $\tilde{f}_0$. Assim, h é dado por

$$h : \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\tilde{f}_{x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_b, \sum_{i=b+1}^n x_i^2) \end{cases}$$

Pela Proposição 5.3.7 existe uma perturbação estável h_λ de h cujos ramos são f e $g_\lambda = g + (0, \lambda)$. O discriminante de h_λ é a união de dois espaços contráteis: o discriminante de f e o discriminante de g_λ . A intersecção destes conjuntos é o discriminante de $\tilde{f}_\lambda$, que é uma perturbação estável de $\tilde{f}_0$.

A proposição segue análoga ao Teorema 5.4.2. $\square$

Para tratar do caso f e g do tipo (3) precisamos de alguns resultados topológicos.

Sejam X e Y espaços topológicos. O join de X e Y , denotado por $X * Y$, é o espaço $(X \times Y \times I) / \sim$ onde $(x, y, \lambda) \sim (x', y', \lambda')$ se, e somente se, $\lambda = \lambda' = 0$ e $y = y'$ ou $\lambda = \lambda' = 1$ e $x = x'$, ver [5] e [32].

Lema 5.4.5 ([10], Lema 8.5) *Se X_1 é homotopicamente equivalente a X_2 e Y_1 é homotopicamente equivalente a Y_2 , então $X_1 * Y_1$ é homotopicamente equivalente a $X_2 * Y_2$.* $\square$

Corolário 5.4.6 *Se X_1 é homotopicamente equivalente a X_2 , então $S(X_1)$ é homotopicamente equivalente a $S(X_2)$.* $\square$

Proposição 5.4.7 *Seja h um multigerme primitivo de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^p$ dado pela forma normal do Teorema 5.3.20 onde f e g são do tipo (3), ou seja,*

$$h : \begin{cases} f(\lambda, x, \mu) = (\lambda, \tilde{f}_\mu(x), \mu) \\ g(z, \delta, \mu) = (\tilde{g}_\mu(z), \delta, \mu) \end{cases}$$

Então o discriminante de uma perturbação estável de h é homotopicamente equivalente à suspensão de $D(\tilde{f}_\mu) * D(\tilde{g}_\mu)$.

Prova Temos que $\tilde{F} : \mathbb{C}^{n-a-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$, $\tilde{F}(x, \mu) = (\tilde{f}_\mu(x), \mu)$, e $\tilde{G} : \mathbb{C}^{n-b-1} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}$, $\tilde{G}(z, \mu) = (\tilde{g}_\mu(z), \mu)$, são desdobramentos miniversais de $\tilde{f} = \tilde{f}_0$ e $\tilde{g} = \tilde{g}_0$ respectivamente. Segue da Proposição 5.3.7 que um desdobramento miniversal H de h é dado por

$$H : \begin{cases} (\nu, \lambda, x, \mu) \mapsto (\nu, \lambda, \tilde{f}_\mu(x), \mu) \\ (\nu, z, \delta, \mu) \mapsto (\nu, \tilde{g}_\mu(z), \delta, \mu + \nu) \end{cases}$$

Seja $\epsilon > 0$ um pseudo raio de Milnor para $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ e h . Sejam $P_{\tilde{f}} = P_{\epsilon, \dots, \epsilon}(0) \subseteq \mathbb{C}^b$ e $P_{\tilde{g}} = P_{\epsilon, \dots, \epsilon}(0) \subseteq \mathbb{C}^a$. Consideremos $\delta > 0$ um limite de perturbação para o desdobramento $\tilde{F}$ de $\tilde{f}$ com respeito a $P_{\tilde{f}}$ e também para o desdobramento $\tilde{G}$ de $\tilde{g}$ com respeito a $P_{\tilde{g}}$. Sejam $\epsilon' = \min\{\epsilon, \delta/2\}$ e $P_h = P_{\tilde{g}} \times P_{\tilde{f}} \times B_{\epsilon'} \subseteq \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$. Seja $\delta' > 0$ um limite de perturbação para o desdobramento H de h com respeito a P_h . Consideremos $\delta'' = \min\{\delta', \delta/2\}$ e $\nu_0 \in B_{\delta''} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}$. Para $\mu \in \mathbb{C}$ definimos $g'_\mu = \tilde{g}_{\mu - \nu_0}$ e $G' = g'_\mu \times id_{\mathbb{C}}$. Seja h' dado por

$$h' : \begin{cases} f(\lambda, x, \mu) = (\lambda, \tilde{f}_\mu(x), \mu) \\ g'(z, \delta, \mu) = (g'_\mu(z), \delta, \mu) \end{cases}$$

Temos que $D(h_{\nu_0}) \cap P_h = D(h') \cap P_h = (D(f) \cap P_h) \cup (D(g') \cap P_h)$. Como $D(f) \cap P_h$ e $D(g') \cap P_h$ são cones, logo contráteis, segue do Lema 5.4.1 que

$D(h_{\nu_0}) \cap P_h$ é homotopicamente equivalente à suspensão de $D = D(f) \cap D(g') \cap P_h$.

Para terminar a prova é suficiente mostrar que D é homotopicamente equivalente a $(D(\tilde{f}_\mu) \cap P_{\tilde{f}}) * (D(\tilde{g}_\mu) \cap P_{\tilde{g}})$. Denotaremos por $D_{\tilde{f}} = D(\tilde{f}_\mu) \cap P_{\tilde{f}}$ e $D_{\tilde{g}} = D(\tilde{g}_\mu) \cap P_{\tilde{g}}$.

A projeção $\pi_h : \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ induz uma fibração localmente trivial

$$D \cap \pi_h^{-1}(B_{\delta''} \setminus \{0, \nu_0\}) \rightarrow B_{\delta''} \setminus \{0, \nu_0\}$$

cujas fibras são homotopicamente equivalentes a $D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}}$. Note que $\pi_h^{-1}(0)$ é homotopicamente equivalente a $D_{\tilde{g}}$ (pois $D(\tilde{f}_0)$ é contrátil) e $\pi_h^{-1}(\nu_0)$ é homotopicamente equivalente a $D_{\tilde{f}}$. Observe que isto também ocorre com o join, ou seja, se considerarmos a projeção de $D_{\tilde{f}} * D_{\tilde{g}} = (D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}} \times I) / \sim$ em I , as fibras são $D_{\tilde{g}}$, $D_{\tilde{f}}$ e $D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}}$.

Sejam A e B subconjuntos abertos contráteis de $B_{\delta''} \subseteq \mathbb{C}$ com intersecção contrátil não vazia tais que $0 \in A \setminus B$ e $\nu_0 \in B \setminus A$. Analogamente ao Teorema 5.4.2 D é homotopicamente equivalente a $D \cap \pi_h^{-1}(A \cup B)$. A seguir, construiremos uma equivalência de homotopia entre $D \cap \pi_h^{-1}(A \cup B)$ e $D_{\tilde{f}} * D_{\tilde{g}}$.

Como $D(g'_\mu) \cap P_{\tilde{g}} = D(G') \cap (P_{\tilde{g}} \times \{\mu\})$ e A é contrátil, existe um homeomorfismo $\alpha : D_{\tilde{g}} \times A \rightarrow D(G') \cap (P_{\tilde{g}} \times A)$ da forma $\alpha_\mu \times id_A$. Analogamente existe um homeomorfismo $\beta : D_{\tilde{f}} \times B \rightarrow D(\tilde{F}) \cap (P_{\tilde{f}} \times B)$ da forma $\beta_\mu \times id_B$.

(i) Construímos primeiramente uma equivalência de homotopia entre $D \cap (\pi_h^{-1}(A \cap B)) \subset \mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times \mathbb{C}$ e $D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset D_{\tilde{f}} * D_{\tilde{g}}$. Para isto definimos

$$\begin{aligned} \phi : D \cap (\pi_h^{-1}(A \cap B)) &\rightarrow D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (X, Y, \mu) &\mapsto (\beta_\mu^{-1}(Y), \alpha_\mu^{-1}(X), 1/2) \end{aligned}$$

Dado $c \in A \cap B$ definimos

$$\begin{aligned} \psi : D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) &\rightarrow D \cap (\pi_h^{-1}(A \cap B)) \\ (X, Y, \mu) &\mapsto (\alpha_c(Y), \beta_c(X), c) \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}\psi \circ \phi : D \cap (\pi_h^{-1}(A \cap B)) &\rightarrow D \cap (\pi_h^{-1}(A \cap B)) \\ (X, Y, \mu) &\mapsto ((\alpha_c \circ \alpha_\mu^{-1})(X), (\beta_c \circ \beta_\mu^{-1})(Y), c)\end{aligned}$$

Como $A \cap B$ é contrátil temos a homotopia $\Gamma : (A \cap B) \times I \rightarrow A \cap B$ onde $\Gamma(\mu, 0) = \mu$ e $\Gamma(\mu, 1) = c$ para todo $\mu \in A \cap B$. Logo podemos definir uma homotopia entre $\psi \circ \phi$ e a identidade:

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma} : D \cap (\pi_h^{-1}(A \cap B)) \times I &\rightarrow D \cap (\pi_h^{-1}(A \cap B)) \\ (X, Y, \mu, t) &\mapsto ((\alpha_{\Gamma(\mu, t)} \circ \alpha_\mu^{-1})(X), (\beta_{\Gamma(\mu, t)} \circ \beta_\mu^{-1})(Y), \Gamma(\mu, t))\end{aligned}$$

Para mostrar que ϕ é uma equivalência de homotopia resta construir uma homotopia entre $\phi \circ \psi$ e a identidade em $D_{\bar{f}} \times D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Temos que

$$\begin{aligned}\phi \circ \psi : D_{\bar{f}} \times D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) &\rightarrow D_{\bar{f}} \times D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (X, Y, \mu) &\mapsto (X, Y, 1/2)\end{aligned}$$

Consideremos a homotopia $\Lambda : (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times I \rightarrow (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ onde $\Lambda(\mu, 0) = \mu$ e $\Lambda(\mu, 1) = 1/2$ para todo $\mu \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Logo podemos definir

$$\begin{aligned}\bar{\Lambda} : D_{\bar{f}} \times D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times I &\rightarrow D_{\bar{f}} \times D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (\bar{X}, \bar{Y}, \mu, t) &\mapsto (\bar{X}, \bar{Y}, \Lambda(\mu, t))\end{aligned}$$

que é uma homotopia entre $\phi \circ \psi$ e a identidade.

(ii) Definimos $(D_{\bar{f}} \times D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim \subset D_{\bar{f}} * D_{\bar{g}}$ por $(X, Y, \mu) \sim (X', Y', \mu')$ se, e somente se, $X = X'$ e $\mu = \mu' = 1$. Estendemos a equivalência de homotopia construída em (i) para uma entre $D \cap \pi_h^{-1}(B)$ e $(D_{\bar{f}} \times D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim$. Para tal definimos $(D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim$ por $(Y, \mu) \sim (Y', \mu')$ se, e somente se, $\mu = \mu' = 1$, e

$$\begin{aligned}\varphi : D(G') \cap (P_{\bar{g}} \times (A \cap B)) &\rightarrow D_{\bar{g}} \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ (X, \mu) &\mapsto (\alpha_\mu^{-1}(X), 1/2)\end{aligned}$$

Como $(D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim$ é contrátil podemos estender φ a uma aplicação $\varphi_B : D(\tilde{G}) \cap (P_g \times B) \rightarrow (D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim$. Logo podemos definir

$$\begin{aligned} \phi_B : D \cap \pi_h^{-1}(B) &\rightarrow (D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim \\ (X, Y, \mu) &\mapsto (\beta_\mu^{-1}(Y), \varphi_B(Y, \mu)) \end{aligned}$$

pois podemos identificar $(D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim$ com $D_{\tilde{f}} \times [(D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim]$. Note que ϕ_B estende ϕ . Analogamente podemos estender ψ a uma aplicação $\psi_B : (D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}} \times (\frac{1}{3}, 1]) / \sim \rightarrow D \cap \pi_h^{-1}(B)$. E também analogamente temos que ϕ_B é uma equivalência de homotopia.

(iii) Analogamente a (ii) estendemos a equivalência de homotopia ϕ construída em (i) para ϕ_A entre $D \cap \pi_h^{-1}(A)$ e $(D_{\tilde{f}} \times D_{\tilde{g}} \times [0, \frac{2}{3}]) / \sim$.

Colando ϕ_A e ϕ_B obtemos a equivalência de homotopia procurada. O resultado segue do Corolário 5.4.6. $\square$

Lema 5.4.8 *Se j e k são números naturais então*

(i) $S^j * S^k$ *é homeomorfo a* S^{j+k+1} .

(ii) *A suspensão de* S^k *é homeomorfa a* S^{k+1} .

Prova Para (i) ver [5] e [32]. O item (ii) é uma consequência de (i). $\square$

Teorema 5.4.9 *Seja $h : (\mathbb{C}^n, T) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ ($n \geq p$, (n, p) boas dimensões) um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e coposto 1. Então h é quasihomogêneo.*

Prova Podemos supor h primitivo.

A prova é por indução sobre o número de ramos de h .

Se $|T| = 1$, h é quasihomogêneo por [25][Theorem 1.4].

Suponhamos que h tem mais que um ramo. Sejam $f: (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $g: (\mathbb{C}^n, \tilde{S}) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ multigerms tais que $S \cup \tilde{S} = T$ e os ramos de h são os de f e g . Por hipótese de indução, se f é transversal ao estrato analítico de g , então o pullback de f por este estrato analítico é quasihomogêneo (e analogamente trocando f por g). Podemos, portanto, aplicar o Teorema 5.3.20. Segue do Teorema 5.3.22 que h é quasihomogêneo. $\square$

Corolário 5.4.10 *Seja h como no Teorema 5.4.9. Então $\mu_\Delta(h) = 1$.*

Prova Segue de [13] que

$$\mu_\Delta(h) \geq \mathcal{A}_e - \text{codim}(h)$$

e a igualdade ocorre quando h é quasihomogêneo. Logo, o resultado é uma consequência do teorema acima. $\square$

Consideremos agora o caso real. Seja $h: (\mathbb{R}^n, T) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ($n \geq p$, (n, p) boas dimensões) um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e $H = id_{\mathbb{R}} \times h_\lambda$ um desdobramento miniversal. Existem duas escolhas (possivelmente equivalentes) para o discriminante de h_λ : uma para λ positivo e outra para λ negativo. Denotaremos por $D^+(h_\lambda)$ e $D^-(h_\lambda)$ respectivamente. Recordamos que, no caso real, h tem duas aumentações: $k = A_H^+ h$ e $\tilde{k} = A_H^- h$ com perturbações estáveis $k_\mu = id_{\mathbb{R}} \times h_{\lambda^2 + \mu}$ e $\tilde{k}_\mu = id_{\mathbb{R}} \times h_{-\lambda^2 + \mu}$ respectivamente.

Proposição 5.4.11 *Com a notação acima*

$$(i) D^+(k_\mu) \cong D^+(h_\lambda) \quad (ii) D^-(k_\mu) \cong S(D^-(h_\lambda))$$

$$(iii) D^+(\tilde{k}_\mu) \cong S(D^+(h_\lambda)) \quad (iv) D^-(\tilde{k}_\mu) \cong D^-(h_\lambda)$$

Prova Por simetria é suficiente mostrar a primeira das duas equivalências de homotopia. O caso (ii) é análogo a Proposição 5.4.2 mas se seguirmos a mesma prova em (i), como $-\mu_0$ não tem raiz quadrada real, então $D^+(k_\mu)$ é um fibrado sobre $B_{\epsilon''}(0)$ com fibra $D^+(h_\lambda)$. Mas o espaço total de um fibrado sobre um espaço contrátil é homotopicamente equivalente à fibra. $\square$

Gostaríamos de obter informações sobre a topologia do discriminante de uma perturbação estável das formas normais do Teorema 5.3.20 no caso real (ver Observação 5.3.23). Resulta que a Proposição 5.4.3 vale no caso real. Também a Proposição 5.4.4 vale numa versão ligeiramente diferente. Aqui temos de considerar os dois discriminantes da perturbação estável de h e os dois discriminantes da perturbação estável de $\tilde{f}_0$. Finalmente, se h é um multigerme real nas formas normais do Teorema 5.3.20 onde f e g são do tipo (3), então dados $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$, existem duas possibilidades para h : uma dada pela fórmula do Teorema 5.3.20 e a outra substituindo f nesta fórmula por $(\lambda, x, \mu) \mapsto (\lambda, \tilde{f}_{-\mu}(x), \mu)$ (ver Observação 5.3.23). Temos o seguinte resultado análogo à Proposição 5.4.7.

Proposição 5.4.12 *Seja h como acima. Então os possíveis discriminantes de perturbações estáveis de h são:*

$$S(D^+(\tilde{f}_\mu) * D^+(\tilde{g}_\mu)) \quad S(D^-(\tilde{f}_\mu) * D^+(\tilde{g}_\mu))$$

$$S(D^+(\tilde{f}_\mu) * D^-(\tilde{g}_\mu)) \quad S(D^-(\tilde{f}_\mu) * D^-(\tilde{g}_\mu))$$

$\square$

Definição 5.4.13 *Seja $g : (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ um germe de uma aplicação analítica real de A -codimensão finita. Suponhamos que a complexificação*

$g_{\mathbb{C},t}$ da perturbação real g_t de g defina, no domínio $U \subseteq \mathbb{C}^n$, uma perturbação estável da complexificação $g_{\mathbb{C}}$ de g . Dizemos que g_t é uma boa perturbação real se $\text{rank} H_{p-1}(D(g_t); \mathbb{Z}) = \text{rank} H_{p-1}(D(g_{\mathbb{C},t}); \mathbb{Z})$.

Teorema 5.4.14 *Seja $h: (\mathbb{C}^n, T) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ ($n \geq p$, (n, p) boas dimensões) um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1 e coposto 1. Então existe uma forma real com uma boa perturbação real.*

Prova Podemos supor h primitivo. De fato, se h possui uma forma real com uma boa perturbação real, então $D^+(h_\lambda)$ ou $D^-(h_\lambda)$ tem o tipo de homotopia de uma esfera de dimensão $p-1$. Segue da Proposição 5.4.11 que para uma de suas aumentações reais k ou $\tilde{k}$, $D^-(k_\mu)$ ou $D^+(\tilde{k}_\mu)$ tem o tipo de homotopia de uma esfera de dimensão p . Mas segue do Teorema 5.4.2 que $D(k_{\mathbb{C},\lambda}) = S(D(h_{\mathbb{C},\lambda}))$. Logo k tem uma forma real com uma boa perturbação real.

A prova é por indução sobre o número de ramos de h , analogamente à prova do Teorema 5.4.9.

O resultado para monogerme segue de [25].

Suponhamos que h tenha mais que um ramo. Como h é quasihomogêneo, podemos aplicar o Teorema 5.3.20, que consiste na classificação de multigermes primitivos. Temos então de analisar as três possíveis formas normais de h dadas por este teorema. Sejam f e g multigermes tais que os ramos de h são os de f e g . Se f e g são do tipo (2), o resultado segue da Proposição 5.4.3 que como vimos vale no caso real. Se f é do tipo (3) e g é do tipo (2), o resultado segue da Proposição 5.4.4 como acima. Finalmente, se f e g são do tipo (3), o resultado segue da Proposição 5.4.7 e Proposição 5.4.12. $\square$

Capítulo 6

Multigerms de $\mathcal{A}_e$ -codimensão arbitrária

6.1 Introdução

No Capítulo 5 definimos *aumentação* para um multigerme de $\mathcal{A}_e$ -codimensão

1. Um dos resultados mais interessantes daquele capítulo é o Teorema 5.4.2 que diz que o discriminante de uma perturbação estável da *aumentação* é homotopicamente equivalente à suspensão do discriminante de uma perturbação estável do germe inicial.

Em [17] K.Houston generaliza a definição de *aumentação* para multigerms de codimensão arbitrária e dá uma fórmula relacionando as codimensões. Na secção 6.2 descrevemos estes resultados.

Para esta definição mais geral de *aumentação* obtemos um resultado que é uma generalização do Teorema 5.4.2, que será descrito na secção 6.3. Mostraremos que é possível descrever a topologia do discriminante de uma perturbação estável da *aumentação* em termos da topologia do discriminante de

uma perturbação estável do germe.

6.2 Resultados gerais

Definição 6.2.1 *Seja $f : (\mathbb{C}^n, S) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ um multigerme onde S é um subconjunto finito de $\mathbb{C}^n$. Suponhamos que exista um desdobramento a um parâmetro*

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \{0\} \times S) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, (0, 0)) \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda, \tilde{F}(\lambda, x)) \end{aligned}$$

de f . Se $g : (\mathbb{C}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é o germe de uma função holomorfa, definimos

$$\begin{aligned} A_{F,g}f : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q, S \times \{0\}) &\rightarrow (\mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q, (0, 0)) \\ (x, z) &= (\tilde{F}(g(z), x), z) \end{aligned}$$

*$A_{F,g}f$ é dita **aumentação** de f por F e g . Também dizemos que f foi **aumentada** por F e g .*

No Capítulo 5 estudamos um tipo especial de aumentação, ou seja, quando f tem $\mathcal{A}_e$ -codimensão 1, F é miniversal e $g(z) = z^2$.

Exemplo 6.2.2 *A série $S_k : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ dada por*

$$(x, y) \mapsto (x, y^2, y^3 + x^{k+1}y)$$

*pode ser obtida da série $A_k : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $A_k(z) = z^{k+1}$, por **aumentação**. De fato, consideremos $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $f(x) = (x^2, x^3)$. Um desdobramento a 1-parâmetro de f é dado por*

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2, 0) \\ (\lambda, x) &\mapsto (\lambda, x^2, x^3 + \lambda x) \end{aligned}$$

(de fato F é miniversal). Se $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é dada por $g(z) = z^{k+1}$ então $A_{F,g}(f) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}, 0)$ é dada por

$$A_{F,g}(f)(x, z) = (x^2, x^3 + z^{k+1}x, z)$$

que é equivalente a S_k .

Exemplo 6.2.3 Seja $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $f(x) = (x^2, x^{2k+1})$. Temos que $\mathcal{A}_e\text{-codimensão}(f) = k$. Um desdobramento a 1-parâmetro de f é dado por $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$, $F(\lambda, x) = (\lambda, x^2, x^{2k+1} + \lambda x)$. Se $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é dada por $g(z) = z^2$ então $A_{F,g}(f)(x, z) = (x^2, x^{2k+1} + z^2x, z)$, que é equivalente à série B_k (ver Teorema 2.4.6).

Proposição 6.2.4 ([17], Teorema 3.3) *Suponhamos que o desdobramento F de f seja estável como germe. Então*

$$\mathcal{A}_e\text{-codim}(f) \cdot \tau(g) \leq \mathcal{A}_e\text{-codim}(A_{F,g}(f))$$

onde $\tau(g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_g}{\langle g, \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_q} \rangle}$ é o número de Tjurina de g . Além disso, se F ou g é quasihomogêneo então

$$\mathcal{A}_e\text{-codim}(f) \cdot \tau(g) = \mathcal{A}_e\text{-codim}(A_{F,g}(f))$$

□

6.3 Topologia da aumentação

Vimos na secção 5.4 que para $n \geq p$, (n, p) no domínio das boas dimensões segundo Mather e f finitamente determinado, $\mu_{\Delta}(f)$ satisfaz

$$\mu_{\Delta}(f) \geq \mathcal{A}_e\text{-codim}(f)$$

e a igualdade ocorre quando f é quasihomogêneo. Se g é quasihomogêneo, segue da Proposição 6.2.4 que

$$\mu_{\Delta}(A_{F,g}(f)) = \mathcal{A}_e\text{-codim}(A_{F,g}(f)) = \mathcal{A}_e\text{-codim}(f) \cdot \tau(g) = \mu_{\Delta}(f) \cdot \mu(g)$$

Portanto o discriminante de uma perturbação estável de $A_{F,g}(f)$ é homotopicamente equivalente ao join da fibra de Milnor de g e do discriminante de uma perturbação estável de f .

Nosso objetivo é mostrar que este resultado vale mais geralmente.

Seja $G : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q, \{0\} \times S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q, 0)$ dada por

$$G(\mu, x, z) = (\mu, \tilde{F}(g(z) + \mu, x), z)$$

Então G é um desdobramento a 1-parâmetro de $A_{F,g}(f)$.

Lema 6.3.1 *Se F é estável como germe então G também é estável.*

Prova Seja $\varphi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q, \{0\} \times S \times \{0\}) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^q, \{0\} \times S \times \{0\})$ dada por

$$\varphi(\mu, x, z) = (\mu + g(z), x, z)$$

e $\psi : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q, 0) \rightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q, 0)$ dada por

$$\psi(\mu, y, z) = (\mu - g(z), y, z)$$

Temos que φ e ψ são difeomorfismos e

$$G = \psi \circ (F \times id_{\mathbb{C}^q}) \circ \varphi$$

ou seja, G é $\mathcal{A}$ -equivalente (como germe) a $F \times id_{\mathbb{C}^q}$. Logo G é estável. $\square$

Lema 6.3.2 $D(G) = \psi(D(F \times id_{\mathbb{C}^q}))$.

Prova G é submersão se, e somente se, $F \times id_{\mathbb{C}^q}$ é submersão. $\square$

Teorema 6.3.3 *Suponhamos que o desdobramento F de f seja estável. Então o discriminante de uma perturbação estável de $A = A_{F,g}(f)$ é homotopicamente equivalente ao join do discriminante de uma perturbação estável de f e da fibra de Milnor de g .*

Prova Seja $f_\lambda(x) = \tilde{F}(\lambda, x)$ e $A_\mu(x, z) = (\tilde{F}(\mu + g(z), x), z)$. Como $D(G) = \psi(D(F \times id_{\mathbb{C}^q}))$ e $D(f_\lambda) = D(F) \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{C}^p)$ temos que

$$\begin{aligned} D(A_{\mu_0}) &= D(G) \cap (\{\mu_0\} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q) \\ &= \psi(D(F \times id_{\mathbb{C}^q})) \cap (\{\mu_0\} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q) \\ &= \{(\mu - g(z), y, z) / (\mu, y) \in D(F) \text{ e } (\mu - g(z), y, z) \in \{\mu_0\} \times \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^q\} \\ &= \{(\mu_0, y, z) / (\mu_0 + g(z), y) \in D(F)\} \\ &= \{(\mu_0, y, z) / y \in D(f_{\mu_0+g(z)})\} \end{aligned}$$

Consideremos a projeção natural

$$\pi : D(A_{\mu_0}) \rightarrow \mathbb{C}^q$$

e a composição

$$D(A_{\mu_0}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^q \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

Então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$D(A_{\mu_0}) \cap (g \circ \pi)^{-1}(B_\epsilon \setminus \{0, -\mu_0\}) \rightarrow B_\epsilon \setminus \{0, -\mu_0\}$$

é uma fibração localmente trivial cujas fibras são homotopicamente equivalentes a $D(f_\lambda) \times g^{-1}(\lambda)$. Segue analogamente à prova do Teorema 5.4.7 que $D(A_{\mu_0})$ é homotopicamente equivalente a $D(f_\lambda) * g^{-1}(\lambda)$. $\square$

Observação 6.3.4 Suponhamos que F seja um desdobramento estável de f . Se o par (n, p) está no domínio das boas dimensões segundo Mather ou g é quasihomogêneo, temos que

$$\mathcal{A}_e\text{-codim}(f) \cdot \tau(g) = \mathcal{A}_e\text{-codim}(A_{F,g}(f))$$

Assim, segue como corolário de 6.2.4 que $A_{F,g}(f)$ é finitamente determinado se, e somente se, g define uma singularidade isolada.

Um caso a ser considerado posteriormente é quando g é uma singularidade não isolada. Neste caso, se o tipo de homotopia da fibra de Milnor de g é conhecido, podemos determinar o tipo de homotopia do discriminante de uma perturbação estável de $A_{F,g}(f)$, pois, mesmo no caso $n < p$, o discriminante de uma perturbação estável de f é homotopicamente equivalente a um bouquet de esferas.

Referências Bibliográficas

- [1] V.I.Arnol'd, *Critical points of functions on manifolds with boundary*, Russian Math. Surveys 33 (1978), 99-116.
- [2] V.I.Arnol'd, *Critical points of functions on a manifold with boundary, the simple Lie groups B_k , C_k , and F_4 and singularities of evolutes*, London Math. Soc. Lecture Note Series 53 (1981), 207-224.
- [3] V.I.Arnol'd, *Dynamical Systems VIII : Singularity Theory II - Applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences 39 (1993), Springer Verlag.
- [4] V.I.Arnol'd, *Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k , D_k , E_k and Lagrangian singularities*, Functional Anal. Appl. 6 (1973), 254-272.
- [5] V.I.Arnol'd, S.M.Gusein-Zade and A.N.Varchenko, *Singularities of differentiable maps, Vol. II, Monodromy and asymptotics of integrals*, Monographs in Mathematics Vol.83 (1988), Birkhäuser.
- [6] R.Atique, T.Cooper and D.Mond, *Vanishing topology of codimension 1 multigerms over $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$* , preprint, 1997.

- [7] M.F.Atiyah and I.G.MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company (1969).
- [8] D.Bayer and M.Stillman, *Macaulay, a computer algebra system for algebraic geometry*, available by anonymous ftp from zariski.harvard.edu (login: anonymous, password: any, cd Macaulay), 1982-1990.
- [9] J.W.Bruce and M.Roberts, *Critical points of functions on analytic varieties*, Topology 27 (1988), 57-90.
- [10] T.Cooper, *Mapgerms of $\mathcal{A}_e$ -codimension one*, Ph. D. Thesis, University of Warwick, 1994.
- [11] J.Damon, *$\mathcal{A}$ -equivalence and the equivalence of sections of images and discriminants*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1462 (1991), 93-121.
- [12] J.Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of $\mathcal{A}$ and $\mathcal{K}$* , Singularities Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 40:1 (American Mathematical Society, Providence, 1983).
- [13] J.Damon and D.Mond, *$\mathcal{A}$ -codimension and the vanishing topology of discriminants*, Invent. math. 106 (1991), 217-242.
- [14] C.Gibson, *Singular points of smooth mappings*, Pitman Research Notes in Mathematics, 25 (1979).
- [15] M.Golubitsky and V.Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag (1973).
- [16] V.V.Goryunov and D.Mond, *Vanishing cohomology of singularities of mappings*, Compositio Mathematica 89 (1993), 45-80.

- [17] K.Houston, *On singularities of folding maps and augmentations*, to appear, Math. Scandinavica.
- [18] C.Hobbs and N.Kirk, *On the classification and bifurcation of multigerms of maps from surfaces to 3-space*, preprint, Oxford Brookes University, 1996.
- [19] S.Izumiya and S.Matsuoka, *Notes on smooth function germs on varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. 97 (1986), 146-150.
- [20] E.J.N.Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, London Math. Soc. Lecture Note Series 77.
- [21] W.L.Marar, *Mapping fibrations*, Manuscripta Math. 80 (1993), 273-281.
- [22] W.L.Marar and D.Mond, *Multiple point schemes for corank 1 maps*, Jour. London Math. Soc. (2) 39 (1989), 553-567.
- [23] J.N.Mather, *Stability of C^∞ -mappings IV: Classification of stable mappings by $\mathcal{R}$ -algebras*, Publ. Math. IHES 37 (1969), 223-248.
- [24] M.Miyanishi, *Algebraic Geometry*, Translations of Mathematical Monographs (136), A.M.S. (1994).
- [25] D.Mond, *How good are real pictures?*, Progress in Maths. 134, Birkhauser-Verlag (1996), 259-276.
- [26] D.Mond, *On the classification of germs of maps from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^3$* , Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 333-369.
- [27] D.Mond, *Singularities of mappings from surfaces to 3-space*, Singularity Theory, D.T,Lê, K.Saito, B.Tessier, eds, World Scientific, Singapore (1995), 509-526.

- [28] D.Mond, *Vanishing cycles for analytic maps*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1462 (1991), 221-234.
- [29] D.Mond and J.Montaldi, *Deformations of maps on complete intersections, Damon's $\mathcal{K}_V$ -equivalence and bifurcations*, London Math. Soc. LNS 201 (1991), Cambridge University Press 263-284.
- [30] P.Orlik and H.Terao, *Arrangements of Hyperplanes*, Springer-Verlag (1991).
- [31] R.Pellikaan, *Finite determinacy of functions with non-isolated singularities*, Proc. London Math. Soc. (3) 57 (1988), 357-382.
- [32] D.Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.
- [33] M.A.S.Ruas, *C^l -Determinação finita e aplicações*, Tese de Doutorado, ICMSC-USP, São Carlos, 1983.
- [34] E.H.Spanier, *Algebraic Topology*, McGraw-Hill (1966).
- [35] C.T.C.Wall, *Finite determinacy of smooth map-germs*, Bull. London Math. Soc. 13 (1981), 481-539.