UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

**Fibrados hiperbólicos e a Conjectura
Gromov-Lawson-Thurston**

Philippe Valdecy Chiovetto

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Philippe Valdeci Chiovetto

Fibrados hiperbólicos e a Conjectura Gromov-Lawson-Thurston

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências
Matemáticas e de Computação – ICMC-USP,
como parte dos requisitos para obtenção do título
de Mestre em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR
DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira

USP – São Carlos
Outubro de 2020

Philippe Valdeci Chiovetto

Hyperbolic Bundles and the Gromov-Lawson-Thurston Conjecture

Dissertation submitted to the Institute of Mathematics
and Computer Sciences – ICMC-USP – in accordance
with the requirements of the Mathematics Graduate
Program, for the degree of Master in Science.
EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Carlos Henrique Grossi Ferreira

USP – São Carlos
October 2020

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho foi realizado com o apoio financeiro do CNPq, processo número 131522/2018-3, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

RESUMO

CHIOVETTO, P. V. **Fibrados hiperbólicos e a Conjectura Gromov-Lawson-Thurston**. 2020. 39 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Um importante problema em aberto em geometria hiperbólica é saber quando um fibrado de discos sobre uma superfície orientável possui métrica completa de curvatura constante negativa. A conjectura Gromov-Lawson-Thurston diz que um fibrado de discos $M \rightarrow S$ sobre uma superfície fechada conexa orientável S de gênero $g \geq 2$ admite tal métrica se, e somente se, $|eM/\chi S| \leq 1$. No artigo ([ANANIN; CHIOVETTO, 2018](#)), construímos novos exemplos nos quais $|eM/\chi S| = \frac{3}{5}$, melhorando assim a maior cota superior conhecida anteriormente ($|eM/\chi S| = \frac{1}{2}$, devida a Feng Luo ([LUO, 1992](#)) e obtida em 1992). Nesta dissertação, apresentamos o artigo ([ANANIN; CHIOVETTO, 2018](#)).

Palavras-chave: Geometria Hiperbólica, Fibrados de disco, Conjectura de Gromov-Lawson-Thurston, Número de Euler.

ABSTRACT

CHIOVETTO, P. V. **Hyperbolic Bundles and the Gromov-Lawson-Thurston Conjecture**. 2020. 39 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

An important open problem in hyperbolic geometry is to decide whether a disc bundle over an orientable surface can be equipped with a complete metric of constant negative curvature. The Gromov-Lawson-Thurston Conjecture says that a disk bundle $M \rightarrow S$ over a closed orientable surface S of genus $g \geq 2$ admits such metric if, and only if, $|eM/\chi S| \leq 1$. On the article ([ANANIN; CHIOVETTO, 2018](#)), we build new bundles $M \rightarrow S$ satisfying $|eM/\chi S| = \frac{3}{5}$, thus improving the former maximum known bound ($|eM/\chi S| = \frac{1}{2}$, due to Feng Luo ([LUO, 1992](#)) and obtained in 1992). In this thesis, we present the paper ([ANANIN; CHIOVETTO, 2018](#)).

Keywords: Hyperbolic Geometry, Disk Bundles, Gromov-Lawson-Thurston Conjecture, Euler's number.

SUMÁRIO

1	ELEMENTOS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA	13
1.1	Prefácio	13
1.2	Introdução	13
1.2.1	<i>A conjectura de Gromov, Lawson e Thurston</i>	13
1.2.2	<i>Resultados conhecidos</i>	14
1.2.3	<i>Resultado principal</i>	14
1.3	Geometria hiperbólica	15
1.3.1	<i>Espaço tangente e métrica</i>	15
1.3.2	<i>Geometria e objetos lineares em $\mathbb{P}_R V$</i>	16
1.3.3	<i>Isometrias de H_R^4</i>	19
2	FIBRADOS HIPERBÓLICOS	21
2.1	Construção geral	21
2.2	O Teorema Poliedral de Poincaré	25
2.3	Realização da construção	26
	REFERÊNCIAS	39

ELEMENTOS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA

1.1 Prefácio

Essa dissertação consiste de uma tradução do artigo ([ANANIN; CHIOVETTO, 2018](#)) com adendo de algumas figuras que facilitam a compreensão/visualização dos fatos, bem como das principais ferramentas, técnicas e abordagens usadas ao longo do artigo. O próprio preprint (aceito para publicação) também encontra-se anexado à dissertação. Ele consiste da aplicação das ferramentas desenvolvidas em ([ANANIN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011](#)) para a construção de novas variedades hiperbólicas reais cuja topologia é a de fibrados de disco $M \rightarrow S$ sobre uma superfície fechada orientável S . A conjectura de Gromov-Lawson-Thurston ([GROMOV; LAWSON; THURSTON, 1988](#)) afirma tais fibrados devem satisfazer a desigualdade $|eM/\chi S| \leq 1$, onde eM é o número de Euler do fibrado enquanto χS é a característica de Euler da superfície. Nesse artigo, construímos novos exemplos satisfazendo $|eM/\chi S| = \frac{3}{5}$. Este é atualmente o maior valor conhecido para $|eM/\chi S|$, sendo que a melhor cota anterior, devida a Feng Luo ([LUO, 1992](#)), data de 1992.

1.2 Introdução

1.2.1 A conjectura de Gromov, Lawson e Thurston

Topologicamente ou diferencialmente, todo fibrado de discos abertos $M \rightarrow S$ sobre uma superfície conexa, fechada e orientável pode ser completamente caracterizado por dois números: a característica de Euler χS da superfície e o número de Euler eM do fibrado, isto é, o número de auto-interseções de uma seção do fibrado. Note que, tomando um recobrimento finito não-ramificado de S e fazendo o pullback do fibrado, o valor de $eM/\chi S$ se preserva. A conjectura Gromov-Lawson-Thurston ([GROMOV;](#)

LAWSON; THURSTON, 1988, p. 28) sugere um critério numérico para decidir quando um fibrado admite geometria hiperbólica completa de curvatura constante:

Conjectura (GLT). Um fibrado de discos $M \rightarrow S$ sobre uma superfície fechada conexa orientável S de gênero $g \geq 2$ admite uma métrica completa de curvatura constante negativa se, e somente se, $|eM/\chi S| \leq 1$.

Em (ANANIN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011), esta conjectura foi estendida (com a mesma cota) para o caso hiperbólico complexo, em que as curvaturas seccionais não são constantes (variam, digamos, no intervalo $[-4, -1]$, dependendo da normalização utilizada). No que se segue, “variedade hiperbólica” significa “variedade com métrica completa de curvatura constante negativa”.

1.2.2 Resultados conhecidos

A melhor cota superior provada para a conjectura GLT foi feita por Misha Kapovich (KAPOVICH, 1993). Kapovich mostrou que $|eM| \leq \exp\left(\exp(10^8|\chi S|)\right)$ para qualquer variedade hiperbólica de dimensão 4 homotopicamente equivalente a uma superfície orientável fechada (sem usar o fato que ela admite uma estrutura de fibrado de discos; nesse caso, eM é o número de auto-interseções do gerador de H_2M representado pela equivalência homotópica $S \rightarrow M$). Vale mencionar que, nessas hipóteses, Nicolaas H. Kuiper (KUIPER, 1990) construiu exemplos com $|eM/\chi S| > \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$. Na outra direção, os melhores resultados conhecidos são de N. H. Kuiper (KUIPER, 1988) e de Feng Luo (LUO, 1992). Em (KUIPER, 1988, Teorema 6, p.68), foi construída uma série de fibrados de discos admitindo geometria hiperbólica com qualquer valor racional de $|eM/\chi S|$ no intervalo $[0, \frac{1}{3}]$. F. Luo construiu um exemplo para o qual $|eM/\chi S| = \frac{1}{2}$ (valor maximal antes do nosso artigo). Como a superfície do exemplo de F. Luo tem gênero 2, tomando um recobrimento finito não-ramificado de S , temos exemplos satisfazendo a relação $|eM/\chi S| = \frac{1}{2}$ com S de gênero arbitrário $g \geq 2$.

1.2.3 Resultado principal

Usando as ideias em (ANANIN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011) e uma abordagem livre de coordenadas para a geometria hiperbólica exposta em (ANANIN; GROSSI, 2011a) e (ANANIN; GROSSI, 2012), construímos 3 novos exemplos de fibrados de discos satisfazendo $|eM/\chi S| = \frac{3}{5}$.

Dois deles têm $eM = 12$ com S de gênero 11. O terceiro tem $eM = 24$ com S de gênero 21. Os dois primeiros vêm de um poliedro cujos ângulos entre faces de codimensão 1 são todos retos; há 84 faces de codimensão 1 e 21 ciclos de faces de codimensão 2. O terceiro é parecido: há 164 faces de codimensão 1 e 41 ciclos de faces de codimensão 2.

Na realidade, construímos 3 orbifolds com recobrimentos de grau 4 que são as variedades acima. Cada orbifold vem de um poliedro P cujos ângulos entre faces de codimensão 1 são retos e que é simétrico com relação a uma isometria elíptica regular r (de ordem 24 nos 2 primeiros exemplos e de ordem 44 no terceiro). As identificações de faces desse poliedro são reflexões nas faces totalmente geodésicas de codimensão 1. Para outros exemplos de tipo similar, veja o Teorema 2.3.1.

1.3 Geometria hiperbólica

Nessa seção, seguindo (ANANIN; GROSSI, 2011a), apresentaremos uma breve abordagem (projetiva) sem coordenadas para a geometria hiperbólica bem como definições sintéticas para os objetos riemanianos que iremos utilizar. Essa abordagem permite, muitas vezes, simplificar os cálculos, evitando a complexidade inerente à escolha de um sistema arbitrário de coordenadas. Além disso, é mais elegante e permite, na nossa visão, um maior entendimento geométrico dos objetos envolvidos.

1.3.1 Espaço tangente e métrica

Seja V um espaço linear real de dimensão finita com uma forma bilinear simétrica não-degenerada. Denotamos por $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ a projetivização real de V . Faremos uma identificação de $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$, $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$, com o espaço de transformações lineares $\text{Lin}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}p, V/\mathbb{R}p)$.

Seja f uma função suave definida num aberto $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$, $p \in U$, com valores em $\mathbb{R}$. Seja $\varphi \in \text{Lin}(\mathbb{R}p, V)$ uma aplicação $\mathbb{R}$ -linear. A partir dessa φ , obtemos a derivação t_{φ} em p definida pela regra

$$t_{\varphi}f := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \tilde{f}(p + s\varphi(p)),$$

onde $\tilde{f}$ é o levantamento de f para um aberto de $V^{\times} := V \setminus \{0\}$, $\tilde{f} = f \circ \pi$. Como $\pi(p) = \pi(rp)$ para todo $r \in \mathbb{R}$, t_{φ} não depende da escolha do representante de p ; é automático verificar que t_{φ} é uma derivação. Além disso, note que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \tilde{f}(p + s(\varphi(p) + rp)) &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \tilde{f}(p(1+sr) + s\varphi(p)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \tilde{f}\left(p + \frac{s}{1+sr}\varphi(p)\right) = \\ &= \left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \tilde{f}(p + \lambda\varphi(p)) = t_{\varphi}f, \end{aligned}$$

já que $\left. \frac{d\lambda}{ds} \right|_{s=0} = 1$ para $\lambda := \frac{s}{1+sr}$. Em outras palavras, podemos considerar $\varphi \in \text{Lin}(\mathbb{R}p, V/\mathbb{R}p)$ pois $t_{\varphi}f$ não depende da escolha de representante para $\varphi(p) \in V/\mathbb{R}p$.

Considere a aplicação

$$t : \text{Lin}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}p, V/\mathbb{R}p) \rightarrow T_p \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V, \quad \varphi \mapsto t_{\varphi}.$$

Vamos mostrar que t é um isomorfismo linear. Para provar a linearidade de t , é suficiente provar que

$$v_p f := \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(p + sv)$$

para $v, p \in V$ e f função suave local definida em uma vizinhança de p , é linear em v . Como f é derivável no ponto p , existem uma função linear $D_p f \in \text{Lin}(V, V)$ e uma função ϕ com valores reais tais que $f(p + h) = f(p) + (D_p f)(h) + \phi(h)$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(h)}{|h|} = 0$ para $h \in V$ suficientemente pequeno (no sentido de uma norma qualquer em V). Tomando $h = sv$ (para s suficientemente pequeno), temos

$$f(p + sv) = f(p) + sD_p f(v) + \phi(sv),$$

de onde segue que

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(p + sv) = D_p f(v).$$

Como $\dim \text{Lin}(\mathbb{R}p, V/\mathbb{R}p) = \dim T_p \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$, resta provar que t é injetiva. Suponha $t_\varphi = 0$. Se a reta $p + s\varphi(p)$ não passa pela origem, é fácil construir uma função f definida em uma vizinhança aberta de $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ tal que

$$t_\varphi f = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \tilde{f}(p + s\varphi(p)) \neq 0$$

uma contradição. Logo, a reta em questão passa pela origem, ou seja, $\varphi(p) \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $\varphi = 0$, concluindo a demonstração.

Podemos reescrever a identificação na forma $T_p \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V = \text{Lin}(\mathbb{R}p, p^\perp)$ quando $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ é um ponto não-isotrópico, i.e., quando $\langle p, p \rangle \neq 0$.

A identificação acima permite introduzir de modo natural uma métrica pseudo-riemanniana fora dos pontos isotrópicos do espaço projetivo. De fato, seja $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ um ponto não-isotrópico e sejam $t_{\varphi_1}, t_{\varphi_2} \in \text{Lin}(\mathbb{R}p, p^\perp)$. Definimos a *métrica pseudo-riemanniana* em pontos não-isotrópicos de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ por

$$\langle t_{\varphi_1}, t_{\varphi_2} \rangle_p := \pm \frac{\langle \varphi_1(p), \varphi_2(p) \rangle}{\langle p, p \rangle}. \quad (1.1)$$

Note que esta fórmula é bem definida para p no espaço projetivo e que a mesma é suave quando p varia entre pontos não-isotrópicos.

1.3.2 Geometria e objetos lineares em $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$

Um ponto importante nessa abordagem para geometrias projetivas é a decomposição do espaço projetivo baseada nos sinais de seus pontos. O *sinal* de um ponto $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ é o sinal de $\langle p, p \rangle$; note que este é bem definido pois, escolhendo outro representante $rp \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V, r \in \mathbb{R}$, temos $\langle kp, kp \rangle = r^2 \langle p, p \rangle$. Deste modo, decompomos $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} V$ em 3 partes disjuntas, os pontos positivos, negativos e isotrópicos:

$$BV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V \mid \langle p, p \rangle > 0\}, \quad EV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad SV := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$$

Os pontos de SV formam o *absoluto* de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ que separa EV de BV .

Como estamos interessados apenas no modelo projeto do espaço hiperbólico de dimensão 4, deste ponto em diante fixamos o sinal $- - - +$ para o espaço linear V . É fácil ver que, nesse caso, BV é uma bola aberta de dimensão 4 limitada pelo absoluto, que é uma esfera de dimensão 3. De fato, considere uma base ortogonal b_1, b_2, b_3, b_4, b para V com $\langle b_i, b_i \rangle = -1$ e $\langle b, b \rangle = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$. Dado $p \in EV$, podemos assumir que p admite um representante com coordenadas $p = (x_1, x_2, x_3, x_4, 1)$ nessa base. Agora, $\langle p, p \rangle > 0$ significa $\sum x_i^2 < 1$. Nesta bola aberta, a métrica 1.1 é riemanniana, pois a forma induzida em $p^\perp$, com $p \in BV$, é negativo-definida. Além disso, a métrica em EV é de curvatura negativa constante -1 (ANANIN; GROSSI, 2011a) e, assim, iremos nos referir a BV como o espaço hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ de dimensão 4. Denotamos por $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4} := \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cup SV$ a união do espaço hiperbólico com seu absoluto. Em geral, consideramos a extensão natural para o absoluto dos objetos geométricos definidos a seguir (geodésicas, planos e hiperplanos) como parte destes objetos.

Neste modelo para a geometria hiperbólica, uma *geodésica* nada mais é do que uma reta projetiva passando por EV , ou seja, a curva $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}W \cap \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4}$, onde $W \leq V$ é um subespaço $\mathbb{R}$ -linear de dimensão 2 tal que a forma restrita a W tem assinatura $-+$. A verificação que esta definição corresponde de fato às geodésicas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ pode ser encontrada em (ANANIN; GROSSI, 2011a). Toda geodésica intercepta o absoluto em dois pontos distintos chamados de *vértices* da geodésica. Além disso, é claro que há um único segmento de geodésica ligando dois pontos distintos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$.

Dada uma geodésica g , podemos construir um *hiperciclo* desta geodésica. Um hiperciclo é uma curva equidistante da geodésica, isto é, cada um de seus pontos está a uma mesma distância de g . Ainda que o hiperciclo se aproxime do absoluto mantendo distância constante à geodésica, os vértices de g e do hiperciclo são os mesmos (caso contrário, a distância entre os pontos de um hiperciclo e de g deveria crescer à medida que nos aproximássemos do absoluto).

Sejam $p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e seja $\tilde{p} \in EV$ o ponto na geodésica $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}p + \mathbb{R}q)$ que é ortogonal a p . Então, o segmento de geodésica $c(t)$ ligando p e q admite um levantamento da forma $c_0(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)\tilde{p}$ com $\langle p, p \rangle = 1$, $\langle \tilde{p}, \tilde{p} \rangle = -1$ e $t \in [0, a]$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Por (ANANIN; GROSSI, 2011a, Lema 4.1.4), o vetor tangente $c'(t)$ à curva $c(t)$ é dado pela transformação linear

$$c'(t) : c_0(t) \mapsto \pi[c(t)]\dot{c}_0(t),$$

onde $\pi[c(t)]$ denota a projeção na componente $c(t)^\perp$ da decomposição ortogonal $V = c_0(t) + c_0(t)^\perp$. Como $\langle c_0(t), \dot{c}_0(t) \rangle = 0$, temos $\pi[c(t)]\dot{c}_0(t) = \dot{c}_0(t)$. Portanto, o comprimento $\ell(c)$ do segmento de geodésica em questão é

$$\ell(c) = \int_0^a |\dot{c}_0(t)| dt = \int_0^a dt = a$$

pois $\langle c_0(t), c_0(t) \rangle = 1$. Observando que

$$\frac{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle} = \langle p, \cosh(a)p + \sinh(a)\tilde{p} \rangle^2 = \cosh^2(a)$$

obtemos $\ell(c) = a = \operatorname{arccosh} \sqrt{\operatorname{ta}(p, q)}$, onde

$$\operatorname{ta}(p, q) := \frac{\langle p, q \rangle \langle q, p \rangle}{\langle p, p \rangle \langle q, q \rangle} \quad (1.2)$$

é a *tância* entre os pontos p e q . Em outras palavras, a distância hiperbólica entre $p, q \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ é uma função monótona do invariante algébrico $\operatorname{ta}(p, q)$. Como veremos, a tância possui várias aplicações práticas e, via de regra, é mais simples utilizar tância ao invés de distância.

Outro tipo de objetos lineares importantes em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ são os *planos* e *hiperplanos*, isto é, os subespaços da forma $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}W \cap \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$ com $W \leq V$ de dimensão 3 (no caso de planos) ou de dimensão 4 (no caso de hiperplanos). Note que tanto planos quanto hiperplanos são *totalmente geodésicos*, isto é, dados quaisquer dois pontos no plano/hiperplano, a geodésica ligando tais pontos está contida no hiperplano.

Observação 1.3.1. Existe uma dualidade entre pontos em EV e hiperplanos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que é muito útil e simplificadora na descrição dos hiperplanos. Podemos contruí-la do seguinte modo: dado um ponto $p \in EV$, fazendo a projetivização do espaço ortogonal a p no nível linear, ganhamos um hiperplano $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}p^{\perp}$ no nível projetivo. De modo análogo, dado um hiperplano $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}W \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$, considerando o espaço ortogonal a W , ganhamos um ponto $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}W^{\perp} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V$, chamado *ponto polar* do hiperplano.

Podemos usar a tância entre pontos polares para chegar num critério de interseção de hiperplanos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. As posições relativas possíveis para dois hiperplanos em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ são: (1) concorrentes, isto é, interceptam-se em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ (a interseção é um plano de assinatura $- - +$); (2) assintóticos, isto é, interceptam-se no absoluto SV de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ (a interseção é um plano de assinatura $- - 0$); (3) ultra-paralelos, isto é, não se interceptam em $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4}$ (e, neste caso, por razões dimensionais, necessariamente interceptam-se em BV : a interseção é um plano de assinatura $- - -$).

Proposição 1.3.1. *Sejam H_1, H_2 hiperplanos distintos em $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4}$ com respectivos pontos polares $p, q \in EV$. Então*

- $\operatorname{ta}(p, q) > 1$ se, e somente se, H_1, H_2 são ultra-paralelos;
- $\operatorname{ta}(p, q) = 1$ se, e somente se, H_1, H_2 são assintóticos;
- $\operatorname{ta}(p, q) < 1$ se, e somente se, H_1, H_2 são concorrentes.

Demonstração. O fato que H_1, H_2 são ultra-paralelos significa que $p^\perp \cap q^\perp$ tem assinatura $---$ ou, equivalentemente, que $(p^\perp \cap q^\perp)^\perp$ tem assinatura $-+$. Como $H_1 \neq H_2$, os pontos p, q formam uma base para $(p^\perp \cap q^\perp)^\perp$. Pelo critério de Sylvester, a matriz de gram

$$G = \begin{bmatrix} \langle p, p \rangle & \langle p, q \rangle \\ \langle q, p \rangle & \langle q, q \rangle \end{bmatrix}$$

de p, q tem determinante negativo, o que é equivalente a $\text{ta}(p, q) > 1$.

A demonstração dos demais itens é análoga. $\square$

1.3.3 Isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$

As isometrias não-idênticas de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que preservam orientação podem ser classificadas em 3 tipos. As isometrias *elípticas*, que possuem um ponto fixo em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$; as isometrias *parabólicas*, que possuem exatamente um ponto fixo e este fica no absoluto SV ; e as isometrias *hiperbólicas*, que possuem exatamente dois pontos fixos, ambos em SV (RATCLIFFE, 2019, p. 136). Além disso, o grupo de isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que preservam a orientação pode ser naturalmente identificado com o grupo de Lie $\text{SO}(1, 4)$ (RATCLIFFE, 2019, Teorema 3.2.3, Corolário 3), isto é, com grupo ortogonal especial relativo à forma bilinear simétrica de assinatura $----+$. Nessa dissertação, trabalharemos apenas com isometrias elípticas e, dentre estas, apenas com as *regulares*, as quais definimos a seguir.

Suponha que uma isometria elíptica I possui exatamente um ponto fixo p o qual, necessariamente, pertence a $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Note que o fato de p ser ponto fixo de I significa que um representante $p \in V$ é autovetor de I . Assim, é fácil ver que o subespaço linear $p^\perp$ é I -estável. A isometria I será chamada de *regular* se $p^\perp$ admite uma decomposição ortogonal $p^\perp = W_1 \oplus W_2$ em subespaços I -estáveis W_1, W_2 de dimensão 2. Cada subespaço W_i tem assinatura $--$ e, portanto, $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} W_1^\perp$ e $\mathbb{P}_{\mathbb{R}} W_2^\perp$ são planos totalmente geodésicos I -estáveis passando pelo ponto fixo p . Tomando uma base ortonormal p_1, p_2 para W_1 e uma base ortonormal p_3, p_4 para W_2 , obtemos uma base ortonormal p_1, p_2, p_3, p_4, p para V na qual a isometria I tem a forma em blocos

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com $A, B \in \text{SO}(2)$.

FIBRADOS HIPERBÓLICOS

2.1 Construção geral

Nesta seção, construiremos fibrados de disco sobre uma superfície fechada orientável utilizando as ferramentas e abordagens desenvolvidas no capítulo anterior. Esta construção consiste, grosso modo, em obter um poliedro $P \subset \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4}$ com identificação de faces de modo que o grupo G gerado pelas identificações de faces seja discreto pois terá P como um domínio fundamental para sua ação em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Além disso, P possuirá naturalmente duas fibrações, uma por discos e outra por circunferências; estas fibrações serão as ferramentas utilizadas para mostrar que $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4/G$ é topologicamente (ou diferenciavelmente) um fibrado de discos sobre uma superfície orientável fechada e proporcionarão um mecanismo para calcular o número de Euler deste fibrado.

Começamos a construção fixando uma isometria elíptica regular r de ordem n em $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Denotamos por P_1 e P_2 seus planos r -estáveis totalmente geodésicos (vide a Subseção 1.3.3). Estes planos se interceptam ortogonalmente no único ponto $b \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ que é fixado por r . Em seguida, escolhemos um hiperplano genérico (vide a Subseção 1.3.2) totalmente geodésico $H_0 \subset \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4}$, onde $\overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4} := \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cup SV$ (vide o início da Subseção 1.3.2).

Geometricamente, isto é, a menos de isometria, o par (r, H_0) é determinado pelas distâncias de b às interseções $H_0 \cap P_1$ e $H_0 \cap P_2$. Deste modo, tal par pode ser descrito por 2 parâmetros reais x_1, x_2 responsáveis por essas distâncias. Depois, utilizando a isometria elíptica regular r , criamos as cópias $H_i := r^i H_0$ do hiperplano H_0 . As condições que os planos $C_i := H_i \cap H_{i+1} \not\subset \partial \overline{\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4}$ e que os outros pares de hiperplanos H_i e H_j , $i - j \neq \pm 1$, são ultra-paralelos, é equivalente, pelo Lema 2.3.1, à um numero finito de inequações lineares em x_1, x_2 . Assim, chegamos numa região convexa $R \subset \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$. No que segue, assumimos $(x_1, x_2) \in R$.

Interceptando os semiespaços fechados limitados pelos H_i 's que contêm o ponto

b , ganhamos um poliedro convexo P limitado por cilindros sólidos fechados $B_i \subset H_i$ e por um pedaço $\partial_1 P \subset \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ do absoluto limitado por um toro $T \subset \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$. Por sua vez, o cilindro sólido B_i é limitado dentro de H_i pelos planos ultraparalelos totalmente geodésicos C_{i-1}, C_i e por um cilindro em T ; tais cilindros formam o toro T . Denotando $\partial_0 P := \bigcup_{i=1}^n B_i$, vemos que $\partial_0 P$ é um toro sólido limitado por T e que $\partial P = \partial_0 P \sqcup_T \partial_1 P$.

Todo cilindro sólido B_i é fibrado por planos totalmente geodésicos chamados de *slices* de B_i . Com efeito, o segmento geodésico Γ_i , que liga os pontos mais próximos de C_{i-1} e C_i , lista as fibras em questão: por qualquer $p \in \Gamma_i$, temos, dentro de H_i , um plano totalmente geodésico ortogonal à Γ_i . Note que C_{i-1} e C_i estão entre os slices; eles são os slices inicial e final de B_i . Denotamos por M_i o slice médio de B_i , isto é, aquele que passa pelo ponto médio de Γ_i .

Todo cilindro sólido B_i também é fibrado por hiperciclos fechados, chamados *strings* de B_i . Eles podem ser descritos como se segue. Seja F um plano totalmente geodésico tal que $\Gamma_i \subset F \subset H_i$. A interseção $F \cap B_i$ é limitada em F pelas geodésicas $F \cap C_{i-1}$ e $F \cap C_i$, ambas ortogonais à Γ_i , e por dois arcos no absoluto. Uma *string* de B_i é o segmento de hiperciclo, dentro de algum F , equidistante da geodésica contendo o segmento Γ_i . Tanto o segmento Γ_i quanto os dois arcos no absoluto mencionados

são considerados strings de B_i . Claramente, a reflexão σ_i no slice M_i de B_i estabiliza qualquer string s de B_i , trocando os pontos inicial $s \cap C_{i-1}$ e final $s_i \cap C_i$ da string.

Tome um ponto $q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$ e seja $q_0 \in s_n \subset B_n$ a string de B_n que contém q_0 . Então $q_{n-1} := \sigma_n q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ é o ponto de s_n em C_n . Em seguida, tomamos a string s_{n-1} de B_{n-1} tal que $q_{n-1} \in s_{n-1} \subset B_{n-1}$, e assim por diante. Ao terminar esse processo, temos uma curva simples $s := s_1 \cup s_2 \cdots \cup s_n$ cujo bordo consiste dos pontos $q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$ e $q'_0 := \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$, onde $\partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap B_i \supset s_i$ é string de B_i para todo $1 \leq i \leq n$. Chamamos tal curva $s \subset T$ de *string de P gerada por $q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$* .

Lema 2.1.1. *Se H_0 é ortogonal a P_1 (em termos dos parâmetros x_1, x_2 isto significa que $x_2 = 0$), então qualquer string de P é fechada e contrátil em $\partial_1 P$ e, além disso, $\partial_1 P$ é um toro sólido. O fibrado de slices de $\partial_0 P$, nesse caso, pode ser estendido para P , ou seja, P é uma 4-bola fechada que admite uma decomposição em produto de discos topológicos fechados, $P \simeq D_1 \times D_2$, tais que $\partial_0 P = \partial D_1 \times D_2$.*

Demonstração. A demonstração segue (ANANIN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011, Lema 2.25, p. 4317). Quando H_0 é ortogonal a P_1 , a interseção $D_1 := P \cap P_1$ é um n -ágono geodésico regular centrado em b no plano hiperbólico P_1 . O poliedro P é simplesmente a união de todos planos totalmente geodésicos ortogonais a P_1 (cada um desses é, topologicamente, um disco fechado D_2) que passa por um ponto de D_1 . Os slices de $\partial_0 P$ são construídos sobre os pontos do bordo ∂D_1 . Deste modo, estendemos para P o fibrado de slices de $\partial_0 P$.

A isometria σ_1 é a extensão trivial da reflexão no ponto médio do lado correspondente de D_1 . Portanto, a isometria $\sigma_1 \dots \sigma_n$ é uma extensão trivial de uma isometria elíptica de P_1 com ponto fixo $C_0 \cap P_1$. Em outras palavras, a restrição $\sigma_1 \dots \sigma_n|_{C_0}$ é a identidade, implicando que toda string de P é fechada.

Para visualizar a contração de uma string fechada $s \subset T$ em $\partial_1 P$, basta contrair o n -ágono Q mantendo b como centro e mantendo a simetria com relação à isometria r .

O fato que $\partial_1 P$ é um toro sólido segue do lema de Dehn. $\square$

Se qualquer string do poliedro P é fechada, dizemos que P é fibrado. Como vimos, isto é equivalente à $\sigma_1 \dots \sigma_n|_{C_0} = 1_{C_0}$. Denotando $\sigma := \sigma_0$, temos que $\sigma_i = r^i \sigma r^{-i}$ e $\sigma_1 \dots \sigma_n = (r\sigma)^n$ pois $r^n = 1$. Como C_0 é $r\sigma$ -estável, concluímos que P é fibrado se, e somente se, $r\sigma|_{C_0}$ é uma isometria elíptica de C_0 cuja ordem divide n .

Segue da convexidade da região R (vide Lema 2.3.1) e do Lema 2.1.1 que $\partial_1 P$ é um toro sólido. Por (ANANIN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011, Lema 2.19, p. 4312), P é topologicamente uma 4-bola fechada e o fibrado de slices de $\partial_0 P$ pode ser estendido para P .

Suponha que P é fibrado. Considere duas strings disjuntas $s, s' \subset T$ de P . Como s e s' são contráteis dentro de P ao longo de discos $D, D' \subset P$, $s = \partial D$ e $s' = \partial D'$, é possível calcular o número algébrico de interseções entre D e D' . Esse número eP (claramente independente da escolha de s, s') é o *número de Euler* do poliedro fibrado P .

Suponha que um poliedro fibrado P está munido de isometrias que identificam suas faces B_i de codimensão 1 e que as condições do teorema poliedral de Poincaré são satisfeitas (veja, por exemplo, (ANANIN; GROSSI, 2011b) e Subseção 2.2). Chamaremos tais isometrias de isometrias identificadoras de faces. Então obtemos um fibrado de discos M sobre um orbifold S de dimensão 2 e eP é o número de Euler desse fibrado de discos pois as isometrias identificadores de faces preservam os fibrados de slices e de strings dos B_i 's. (Para uma exposição de fibrados sobre orbifolds, vide (BONAHOM; SIEBENMANN, 1985). Outra opção é colar algumas cópias de P formando um poliedro fundamental para uma variedade e notar que tanto eP quanto χS ficam multiplicados pelo número de cópias tomadas).

Uma curva fechada $c \subset T$ que gera o grupo $H_1(\partial_0 P, \mathbb{Z})$ é dita trivializante se $[c] = 0$ em $H_1(\partial_0 P, \mathbb{Z})$. No caso do Lema 2.1.1, toda string de P é trivializante.

Lema 2.1.2. (ANANIN; GROSSI; GUSEVSKII, 2011, Observação 2.22, p. 4314) *Seja P um poliedro fibrado, seja $s \subset T$ uma string de P e seja $c \subset T$ uma curva trivializante de P . Então $eP = \#(s \cap c)$. Em outras palavras, $[s] = eP \cdot [g]$ no grupo $H_1(\partial_1 P, \mathbb{Z})$, onde $g := \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$.*

Agora temos uma ferramenta para calcular o número de Euler eM . Dado um poliedro fibrado com isometrias identificadores de faces satisfazendo as condições do teorema poliedral de Poincaré, podemos deformá-lo em um que é “plano” (aquele com o qual lidamos no Lema 2.1.1), pois a região R é convexa. No começo da deformação, o número de Euler eP de um poliedro “plano” é igual a zero pelos Lemas 2.1.1 e 2.1.2. Durante a deformação, contamos quantas vezes o poliedro se torna fibrado, isto é, quantas vezes a string do poliedro fecha. É claro que, nessa contagem, há sinais que devem ser levados em conta. Então, seria mais adequado dizer que o número de Euler do poliedro fibrado no fim da deformação é igual ao “número algébrico” de vezes que

ele foi fibrado ao longo da deformação, incluindo o momento final e não incluindo o momento inicial “plano”.

Aplicamos este método no final da demonstração do Teorema 2.3.1; lá, a conta é simples pois a deformação escolhida gera uma evolução monótona da string.

2.2 O Teorema Poliedral de Poincaré

O Teorema Poliedral de Poincaré (TPP) é uma ferramenta para construir uma variedade ou orbifold M com uma geometria específica (prescrita). No caso que consideramos, começamos com o grupo de Lie $SO(1,4)$, que é o grupo de isometrias de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, uma variedade riemanniana de dimensão 4. Seja P um poliedro de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ construído seguindo a receita de 2.1 e seja $G \leq SO(1,4)$ o subgrupo gerado pelas isometrias identificadoras de faces de P . Seja $S := \{s \in S \mid s \text{ é uma face de } P\}$ e I_s a isometria identificadora de face para cada $s \in S$. Um *ciclo de arestas* é a sequência $s_1, \dots, s_{n-1}$ tal que $s_i = I_{s_{i-1}} s_{i-1}$, i é um inteiro módulo n e $n \in \mathbb{N}$ é o menor valor de n tal que $s_0 = s_n$. Se:

1. as isometrias identificadoras de faces mandam interior(no sentido topológico) de P para o exterior(complementar, no sentido de conjuntos) de P ;
2. a soma de ângulos internos de cada ciclo de arestas é igual à 2π (no nosso caso, arestas são faces de codimensão 2);
3. duas faces que possuem uma aresta em comum não podem se tornar arbitrariamente próximas fora de uma vizinhança aberta daquela aresta.

O (TPP) garante que o grupo gerado pelas isometrias que identificam as faces é discreto e que, portanto, $M := \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 / G$ é um orbifold com a geometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. No caso em consideração a condição 3 é automática pois as faces do poliedro são totalmente geodésicas.

Nessa dissertação, apresentaremos apenas a ideia de uma demonstração de (TPP) para o caso que consideramos, a demonstração completa para um caso mais geral pode ser encontrada em (ANANIN; GROSSI, 2011b).

Essa demonstração consiste em tesselar $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ usando o poliedro P . Para isto construiremos um espaço J que será tesselado pelo poliedro P por construção e ao mesmo tempo um recobrimento regular para $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$. Deste modo, como $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ é simplesmente conexo teremos a tesselação para $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ procurada.

Fazemos o produto formal $G \times P$ e quocientamos pela relação de equivalência $\sim$ que cola as cópias por meio das isometrias conjugadas a isometria de colagem, mais formalmente, $(g, x) \sim (h, y) \Leftrightarrow x \in s \text{ para algum } s \in S, I_s x = y \text{ e } h^{-1}g = I_s$. A demonstração se resume em provar que a aplicação $J \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4, (g, x) \mapsto gx$, onde $J := (G \times P)/\sim$, é um recobrimento regular.

Como no nosso caso as faces de P estão contidas em hiperplanos de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, as cópias de P obtidas através das isometries identificadores de faces não se interceptam, pois o fato que os hiperplanos dividem $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ em setores convexos (cada hiperplano é totalmente geodésico em um espaço de curvatura constante) juntamente com a condição 1 garantem que as colagens são bem comportadas. Logo, basta entender o que acontece nos arestas das cópias. Novamente, como os hiperplanos são totalmente geodésicos, o ângulo entre as faces ao longo de uma aresta em comum é constante. Deste modo, a condição 2 garante a tesselação em torno das arestas do poliedro (caso a soma de ângulos internos de cada ciclo de vértices não fosse 2π , teríamos faces se sobrepondo mesmo nos casos em que a soma é múltipla de 2π , o que resultaria em um recobrimento ramificado).

2.3 Realização da construção

Esta seção, de caráter mais técnico, consiste da realização da construção geral descrita acima. Aqui, obteremos concretamente os poliedros fundamentais e calcularemos o número de Euler dos fibrados de discos correspondentes.

Como no Capítulo 1, seja b_1, b_2, b_3, b_4, b uma base ortonormal de assinatura $- - - - +$ em um espaço linear real V com forma bilinear simétrica $\langle -, - \rangle$. Lembramos que o espaço hiperbólico real $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, seu absoluto $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e $\overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \sqcup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ podem ser identificados respectivamente com

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle > 0\}, \quad \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle = 0\}, \quad \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle \geq 0\}$$

Escolhemos alguns números $k, m, n \in \mathbb{N}$ tais que n é par e $1 < k < m < \frac{n}{2}$. Sejam

$$r := \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_m & -s_m & 0 \\ 0 & 0 & s_m & c_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_0 := \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ 0 \\ \sqrt{x_2} \\ 0 \\ \sqrt{x_1 + x_2 - 1} \end{bmatrix},$$

onde $c_i := \cos \frac{2i\pi}{n}$, $s_i := \sin \frac{2i\pi}{n}$ e $x_1 > 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 > 1$. Então r é uma isometria elíptica regular cujo (único) ponto fixo é $b \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ e o ponto p_0 pertence a $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \setminus \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$; tanto r quanto p_0 estão escritos na base acima. Claramente, $r^n = 1$, $r \in SOV$, e $\langle p_0, p_0 \rangle = -1$. Para todo $i \in \mathbb{Z}$, denotamos

$$p_i := r^i p_0 = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & 0 & 0 \\ s_i & c_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{mi} & -s_{mi} & 0 \\ 0 & 0 & s_{mi} & c_{mi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ 0 \\ \sqrt{x_2} \\ 0 \\ \sqrt{x_1 + x_2 - 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i \sqrt{x_1} \\ s_i \sqrt{x_1} \\ c_{mi} \sqrt{x_2} \\ s_{mi} \sqrt{x_2} \\ \sqrt{x_1 + x_2 - 1} \end{bmatrix},$$

e

$$g_i := \langle p_0, p_i \rangle = (1 - c_i)x_1 + (1 - c_{mi})x_2 - 1.$$

Seja $H_i \subset \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ o hiperplano totalmente geodésico cujo ponto polar é p_i , ou seja, correspondente ao subespaço linear real $p_i^\perp \leq V$. Seja $C_i := H_i \cap H_{i+1}$.

Lema 2.3.1. *As condições $C_i \not\subset \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ e $H_i \cap H_j = \emptyset$ para todos i, j tais que $i - j \not\equiv_n \pm 1$ são equivalentes às inequações*

$$x_1 > 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1 + x_2 > 1, \quad (1 - c_i)x_1 + (1 - c_{mi})x_2 > 2 > (1 - c_1)x_1 + (1 - c_m)x_2 \quad (2.1)$$

para todo $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$. A região convexa $R \subset \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ dada por essas inequações é não-vazia pois contém o segmento $A := \left(\frac{2}{1-c_2}, \frac{2}{1-c_1}\right) \times 0 \subset R$.

Demonstração. A condição $C_i \not\subset \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ significa que a forma restrita a $\mathbb{R}_{p_i} + \mathbb{R}_{p_{i+1}}$ tem assinatura $--$, isto é, que $\det \begin{bmatrix} \langle p_i, p_i \rangle & \langle p_i, p_{i+1} \rangle \\ \langle p_{i+1}, p_i \rangle & \langle p_{i+1}, p_{i+1} \rangle \end{bmatrix} > 0$ pelo critério de Sylvester. Considerando que $\langle p_k, p_k \rangle = -1$ para todo k , a condição em questão é portanto equivalente a $-1 < \langle p_i, p_{i+1} \rangle < 1$. Analogamente, a condição $H_i \cap H_j = \emptyset$ é equivalente a $\langle p_i, p_j \rangle \in [-1, 1]$, pois isto significa que a assinatura da forma em $\mathbb{R}_{p_i} + \mathbb{R}_{p_j}$ é $-+$. Como $0 \leq g_i + 1$ e $0 < g_1 + 1$, utilizando a simetria relacionada à ação de r , chegamos nas desigualdades 2.1. Para $x_2 = 0$, as inequações ficam $1 < x_1$ e $(1 - c_1)x_1 < 2 < (1 - c_2)x_1$; reescrevendo, temos, $1 < \frac{2}{1-c_2} < x_1 < \frac{2}{1-c_1}$ com $-1 < c_2 < c_1$. $\square$

No que se segue, assumimos $(x_1, x_2) \in R$.

Obviamente, $C_i \cap C_j = \emptyset$, a menos que $i \equiv_n j$. Portanto, os planos ultraparalelos $C_{i-1}, C_i \subset H_i \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ limitam no hiperplano H_i um cilindro sólido B_i , e tais cilindros, por sua vez, formam um toro sólido $\partial_0 P := \bigcup_{i=1}^n B_i$ limitado por um toro $T \subset \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$, como afirmado na seção 2.1.

Todos os C_i 's estão no mesmo semi-espaço fechado de $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ limitado por um hiperplano H_j , pois, caso contrário, existiria algum C_{i-1} e C_i , disjuntos de H_j , em diferentes semi-espaços, o que causaria uma interseção impossível $H_i \cap H_j \neq \emptyset$.

Seja P a interseção dos semi-espaços fechados limitados por H_i que contêm o ponto b ; os B_i 's são as faces de codimensão 1 de P e, os C_i 's, as de codimensão 2. Pelo Lema 2.1.1, $\partial_1 P$ é um toro sólido e $\partial P = \partial_0 P \sqcup_T \partial_1 P$ é um 4-bola fechada.

Seja σ a reflexão no slice médio M_0 de B_0 e τ a reflexão em H_0 . Claramente, $\sigma_i := r^i \sigma r^{-i}$ é a reflexão no slice médio M_i de B_i e $\tau_i := r^i \tau r^{-i}$ é a reflexão em H_i .

Lema 2.3.2. *Suponha que $g_1 = 0$, isto é, que*

$$(1 - c_1)x_1 + (1 - c_m)x_2 = 1$$

Então $(\tau_{i+1}\tau_i)^2 = 1$ para todo i e o poliedro $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cap P$ com as isometrias identificadores de faces τ_i (que identifica a face B_i de codimensão 1 com si mesma) satisfaz as condições do teorema poliedral de Poincaré.

Demonstração. Os hiperplanos H_i e H_{i+1} são ortogonais ao longo de C_i pois $\langle p_i, p_{i+1} \rangle = g_1 = 0$. Como a reflexão τ_i é dada pela regra $\tau_i : v \mapsto v + 2\langle v, p_i \rangle p_i$, a igualdade $(\tau_{i+1}\tau_i)^2 = 1$ segue diretamente de $\langle p_i, p_{i+1} \rangle = 0$ e $\langle p_i, p_i \rangle = \langle p_{i+1}, p_{i+1} \rangle = -1$.

Além disso, τ_i manda o interior de P para o exterior de P e todo ciclo geométrico de faces de codimensão 2 de P tem comprimento 4 e, portanto, ângulo total 2π . Desse modo, as condições do teorema de poliedral de Poincaré são satisfeitas (veja (ANANIN; GROSSI, 2011b, Teorema 3.2, p.303) e (ANANIN; GROSSI, 2011b, Proposição 2.1, p. 300)). $\square$

Lema 2.3.3. *Sejam $U := \mathbb{R}p_0 + \mathbb{R}p_1$ e $W := \mathbb{R}p_0 + \mathbb{R}(p_1 - p_{n-1})$. Então C_0 e M_0 correspondem respectivamente ao subespaços lineares reais $U^\perp$ e $W^\perp$. As isometrias σ e $r\sigma$ são dadas por*

$$v \mapsto v + 2\langle v, p_0 \rangle p_0 + \frac{\langle v, p_1 - p_{n-1} \rangle}{g_2 + 1} (p_1 - p_{n-1}) \quad (2.2)$$

$$r\sigma v = rv + 2\langle v, p_0 \rangle p_1 + \frac{\langle v, p_1 - p_{n-1} \rangle}{g_2 + 1} (p_2 - p_0) \quad (2.3)$$

O subespaço linear real U é $r\sigma$ -estável e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g_1 \end{bmatrix}$ é a matriz de $r\sigma|_U$ na base p_0, p_1 . O ponto $f_0 := (1 - g_1)b + \langle b, p_0 \rangle(p_0 + p_1) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$ é um ponto fixo de $r\sigma$.

Demonstração. Por definição, C_0 corresponde a $U^\perp$. Em outras palavras, C_0 corresponde a $p_0^\perp \cap (p_1 + g_1 p_0)^\perp$ e, similarmente, C_{n-1} corresponde a $p_0^\perp \cap (p_{n-1} + g_1 p_0)^\perp$, onde $p_1 + g_1 p_0, p_{n-1} + g_1 p_0 \in p_0^\perp$. Como

$$\langle p_1 + g_1 p_0, p_1 + g_1 p_0 \rangle = \langle p_1 + g_1 p_0, p_1 \rangle = g_1^2 - 1 < 0,$$

$$\langle p_{n-1} + g_1 p_0, p_{n-1} + g_1 p_0 \rangle = \langle p_{n-1} + g_1 p_0, p_{n-1} \rangle = g_1^2 - 1 < 0,$$

$$\langle p_1 + g_1 p_0, p_{n-1} + g_1 p_0 \rangle = \langle p_1 + g_1 p_0, p_{n-1} \rangle = g_1^2 + g_2 > 0,$$

o ponto médio de Γ_0 é dado por $m_0 := (p_1 + g_1 p_0) + (p_{n-1} + g_1 p_0) = p_1 + p_{n-1} + 2g_1 p_0$ e M_0 corresponde a $p_0^\perp \cap ((p_1 + g_1 p_0) - (p_{n-1} + g_1 p_0))^\perp$.

Claramente, p_0 e $p_1 - p_{n-1}$ são ortogonais. Portanto, a regra 2.2 (agindo como $v \mapsto v$ para $v \in W^\perp$ e como $v \mapsto -v$ para $v \in W$) junto com o fato que $\langle p_1 - p_{n-1}, p_1 - p_{n-1} \rangle = -2g_2 - 2$, define a isometria σ . A equação 2.3 é agora imediata e implica que igualdades $r\sigma p_0 = -p_1$ e $r\sigma p_1 = p_0 + 2g_1 p_1$ que determinam a matriz indicada.

Considerando que $rb = b$, vemos que $\langle b, p_i \rangle$ não depende de i ; portanto, $\langle f_0, p_0 \rangle = \langle f_0, p_1 \rangle = 0$. Deste modo, $g_1 < 1$ implica que

$$\langle f_0, f_0 \rangle = (1 - g_1)\langle f_0, b \rangle = (1 - g_1)^2 + 2(1 - g_1)\langle b, p_0 \rangle^2 > 0,$$

isto é, $f_0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$. Por fim,

$$\begin{aligned} r\sigma f_0 &= rf_0 - \frac{\langle f_0, p_{n-1} \rangle}{g_2 + 1}(p_2 - p_0) = (1 - g_1)b + \langle b, p_0 \rangle(p_1 + p_2) - \\ &\quad - \frac{(1 - g_1)\langle b, p_0 \rangle + \langle b, p_0 \rangle(g_1 + g_2)}{g_2 + 1}(p_2 - p_0) = (1 - g_1)b + \langle b, p_0 \rangle(p_0 + p_1) = f_0. \end{aligned}$$

□

Lema 2.3.4. *A isometria $r\sigma|_{C_0}$ de C_0 é uma rotação por ângulo α em torno de f_0 , onde*

$$\cos \alpha = \frac{(1 - c_1^2)c_m x_1 + c_1(1 - c_m^2)x_2}{(1 - c_1^2)x_1 + (1 - c_m^2)x_2}.$$

Demonstração. A isometria $r\sigma$ preserva orientação. Pelo Lema 2.3.3, a isometria $r\sigma|_U$ preserva orientação. Consequentemente, $r\sigma|_{C_0}$ também preserva orientação. Pelo Lema 2.3.3, ela tem de ser uma rotação por um ângulo α em torno de f_0 . Como $\text{tr}(r\sigma|_U) = 2g_1$ pelo Lema 2.3.3 e

$$\text{tr}(r\sigma) = \text{tr}(r) + 2g_1 + \frac{\langle p_2 - p_0, p_1 - p_{n-1} \rangle}{g_2 + 1} = 1 + 2c_1 + 2c_m + 2g_1 + \frac{g_1 - g_3}{g_2 + 1}$$

pela fórmula (2.3) do Lema 2.3.3 obtemos

$$\cos \alpha = c_1 + c_m + \frac{g_1 - g_3}{2(g_2 + 1)} = c_1 + c_m + \frac{(c_3 - c_1)x_1 + (c_{3m} - c_m)x_2}{2(1 - c_2)x_1 + 2(1 - c_{2m})x_2}.$$

Considerando que $c_2 = 2c_1^2 - 1$, $c_3 = 4c_1^3 - 3c_1$, $c_{2m} = 2c_m^2 - 1$ e $c_{3m} = 4c_m^3 - 3c_m$, temos

$$\cos \alpha = c_1 + c_m + \frac{(c_3 - c_1)x_1 + (c_{3m} - c_m)x_2}{2(1 - c_2)x_1 + 2(1 - c_{2m})x_2} = \cos \alpha = \frac{(1 - c_1^2)c_m x_1 + c_1(1 - c_m^2)x_2}{(1 - c_1^2)x_1 + (1 - c_m^2)x_2}.$$

□

Finalmente, chegamos ao resultado principal do nosso trabalho.

Teorema 2.3.1. *Suponha que a solução do sistema*

$$\begin{cases} (1 - c_1)x_1 + (1 - c_m)x_2 = 1 \\ (1 - c_1^2)(c_k - c_m)x_1 = (1 - c_m^2)(c_1 - c_k)x_2 \end{cases}$$

satisfaça as inequações $2 < (1 - c_i)x_1 + (1 - c_{mi})x_2$ para todo $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$, onde $k, m, n \in \mathbb{N}$, n é par, $1 < k < m < \frac{n}{2}$ e $c_i := \cos \frac{2i\pi}{n}$. Então existe um fibrado de discos $M \rightarrow S$ sobre uma superfície fechada conexa orientável S que admite métrica completa de curvatura constante negativa e é tal que $|eM/\chi S| = \frac{4m-4k}{n-4}$.

Demonstração. Primeiro, observamos que a solução claramente satisfaz as desigualdades $0 < x_1$, $0 < x_2$ e $(1 - c_1)x_1 + (1 - c_m)x_2 < 2$. A desigualdade $1 < x_1 + x_2$ segue da desigualdade $2 < (1 - c_1)x_1 + (1 - c_{mi})x_2$ com $i = \frac{n}{2}$ pois $c_i = -1$ e $c_{mi} = \pm 1$. Em outras palavras, temos um ponto na região R .

Seja $p(t) := (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [0, 1]$, um caminho parametrizado em R que liga um ponto no segmento $A \subset R$ (veja o Lema 2.3.1) com o ponto $p(1) = (x_1, x_2)$. A função $\alpha(t)$ é contínua e, pelo Lema 2.3.4, a função $\cos \alpha(t)$ tem a forma

$$\cos \alpha(t) = \frac{a_1 t + a_2}{a_3 t + a_4}$$

para alguns $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Pelo Lema 2.3.4,

$$\cos \alpha(0) = \frac{(1 - c_1^2)c_m x_1(0)}{(1 - c_1^2)x_1(0)} = c_m$$

e

$$\cos \alpha(1) = \frac{(1 - c_1^2)c_m x_1 + c_1(1 - c_m^2)x_2}{(1 - c_1^2)x_1 + (1 - c_m^2)x_2} = c_k$$

devido à segunda equação do sistema. Deste modo, a função $\cos \alpha(t)$ não é constante e, portanto, monótona. Consequentemente, a função $\alpha(t)$ é monótona.

Na Seção 2.1, entendemos que o poliedro $P(t)$ é fibrado se, e somente se, $r\sigma|_{c_0}$ é uma isometria periódica cuja ordem divide n , isto é, se, e somente se, $\cos \alpha(t) = c_j$ para algum $j \in \mathbb{Z}$. Como $\alpha(t)$ é monótona, $\cos \alpha(0) = c_m$ e $\cos \alpha(1) = c_k$, concluímos que $eP(1) = m - k$.

Pelo Lema 2.3.2, o poliedro $P(1)$ satisfaz as condições do teorema poliedral de Poincaré devido à primeira equação do sistema. Resta observar que a característica de Euler do correspondente orbifold S é dado por $\chi S = \frac{n}{4} - \frac{n}{2} + 1 = \frac{n-4}{4}$ (vide [Sco]). $\square$

Tomando $(k, m, n,) := (2, 5, 24)$ (ou $(k, m, n,) := (3, 6, 24)$ ou $(k, m, n,) := (5, 11, 44)$), pode-se verificar as 11 (ou 11 ou 21) inequações do teorema 2.3.1, e chegar em $|eM/\chi S| = \frac{3}{5}$.

A COUPLE OF REAL HYPERBOLIC DISC BUNDLES OVER SURFACES

SASHA ANAN'IN, PHILIPY V. CHIOVETTO

ABSTRACT. Applying the techniques developed in [AGG], we construct new real hyperbolic manifolds whose underlying topology is that of a disc bundle over a closed orientable surface. By the Gromov-Lawson-Thurston conjecture [GLT], such bundles $M \rightarrow S$ should satisfy the inequality $|eM/\chi S| \leq 1$, where eM stands for the Euler number of the bundle and χS , for the Euler characteristic of the surface. In this paper, we construct new examples that provide a maximal value of $|eM/\chi S| = \frac{3}{5}$ among all known examples. The former maximum, belonging to Feng Luo [Luo], was $|eM/\chi S| = \frac{1}{2}$.

Dedicated to Krolík

1. Introduction

Topologically or differentially, every open disc bundle $M \rightarrow S$ over a closed connected orientable surface S can be completely characterized by two numbers: the Euler characteristic χS of the surface and the Euler number eM of the bundle, i.e., the number of self-intersections of a section of the bundle. Note that, taking an unramified finite cover of S and pullbacking the bundle, one gets the same value of $|eM/\chi S|$.

The conjecture of Gromov, Lawson, and Thurston [GLT, p. 28] suggests a numerical criterion deciding whether a bundle can be equipped with a complete real hyperbolic geometry.

1.1. GLT-conjecture. A disc bundle $M \rightarrow S$ over a closed connected orientable surface S of genus $g \geq 2$ admits a complete real hyperbolic structure iff $|eM/\chi S| \leq 1$.

In [AGG], Conjecture 1.1 was extended (with the same bound) to the complex hyperbolic case.

1.2. Known results. The best proven upper bound belongs to Misha Kapovich [Kap] who showed that $|eM| \leq \exp\left(\exp(10^8|\chi S|)\right)$ for any complete real hyperbolic 4-manifold homotopically equivalent to a closed orientable surface; so, without actually using the fact that it admits a disc bundle structure. (In this case, eM stands for the self-intersection of the generator of H_2M represented by a homotopy equivalence $S \rightarrow M$.) It is worthwhile mentioning that, in such settings, Nicholaas H. Kuiper [Kui2] constructed examples with $|eM/\chi S| > \frac{2}{\sqrt{3}} > 1$.

In the other direction, the best results belong to N. H. Kuiper [Kui1] and to Feng Luo [Luo]. In [Kui1, Theorem 6, p. 68], it was constructed a series of disc bundles admitting complete real hyperbolic geometry with any rational value of $|eM/\chi S|$ in the interval $[0, \frac{1}{3}]$. (Though, we are not sure that this result is literally correct as there are a few miscalculations in the exposition.) F. Luo constructed an example with a maximal known (before our paper) value $|eM/\chi S| = \frac{1}{2}$. Since the surface S in F. Luo's example has genus 2, taking a finite unramified cover of S , one gets examples satisfying the relation $|eM/\chi S| = \frac{1}{2}$ with S of an arbitrary genus $g \geq 2$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57N16 (57M50, 57S30).

Key words and phrases. Real hyperbolic disc bundles, right-angled polyhedra, GLT-conjecture.

The second author is supported by the grant Iniciação Científica FAPESP 2014/26282-5

1.3. Main result. Using the ideas of [AGG] and a coordinate free approach to hyperbolic geometry exposed in [AGr2, AGr3], we construct 3 new examples of disc bundles with $|eM/\chi S| = \frac{3}{5}$.

Two of them have $eM = 12$ with S of genus 11. The third one has $eM = 24$ with S of genus 21. The first two come from right-angled necklace polyhedra with 84 codimension 1 faces and 21 cycles of codimension 2 faces. The third one has a similar flavor with 164 codimension 1 faces and 41 cycles of codimension 2 faces.

In fact, we construct 3 orbifolds whose 4-sheeted covers provide the above manifolds. Each orbifold comes from a right-angled necklace polyhedron P symmetric with respect to a regular elliptic isometry r of order 24 for the first 2 examples and of order 44 for the third one. The face-pairing of these polyhedra are reflections in their totally geodesic codimension 1 faces.

For other examples of disc bundles of a similar type, see Theorem 3.9.

2. Construction

We start the construction by fixing a regular elliptic isometry r of order n . Denote by P_1 and P_2 its totally geodesic r -stable planes. The planes intersect orthogonally at the unique r -fixed point b .

Next, we pick a generic totally geodesic hyperplane $H_0 \subset \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ in the real hyperbolic 4-space $\overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ considered together with its absolute (see the beginning of Section 3). Geometrically, the pair r, H_0 is given by the distances from b to the intersections $H_0 \cap P_1$ and $H_0 \cap P_2$. So, it can be described by means of 2 convenient real parameters x_1, x_2 responsible for these distances.

Then we copy the hyperplanes, $H_i := r^i H_0$. The conditions that $C_i := H_i \cap H_{i+1} \not\subset \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ and that the other pairs of hyperplanes H_i and H_j , $i - j \not\equiv_n \pm 1$, are ultraparallel, i.e., $H_i \cap H_j = \emptyset$, is equivalent by Lemma 3.1 to a finite number of inequalities linear in x_1, x_2 . Thus, we arrive at a convex region $R \subset \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$. In what follows, we assume $(x_1, x_2) \in R$.

Intersecting those closed half-spaces limited by the H_i 's that contain the point b , we get a convex polyhedron P bounded by closed solid cylinders $B_i \subset H_i$ and by a piece $\partial_1 P \subset \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ of the absolute bounded by a torus $T \subset \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$. In turn, the solid cylinder B_i is bounded inside H_i by the ultraparallel totally geodesic planes C_{i-1}, C_i and by a cylinder in T ; such cylinders form the torus T . Denoting $\partial_0 P := \bigcup_{i=1}^n B_i$, we see that $\partial_0 P$ is a solid torus bounded by T and that $\partial P = \partial_0 P \sqcup_T \partial_1 P$.

Every solid cylinder B_i is fibred by totally geodesic planes called *slices* of B_i . Indeed, the geodesic segment Γ_i that joins the closest points in C_{i-1} and in C_i lists the fibres in question: through any $p \in \Gamma_i$, we have, inside H_i , a totally geodesic plane orthogonal to Γ_i . Note that C_{i-1} and C_i are among the slices; they are the *initial* and the *final* slices. Denote by M_i the *middle slice*, i.e., the one passing through the middle point of Γ_i .

Every solid cylinder B_i is also fibred by closed geodesic segments called *strings* of B_i . They can be described as follows. Take any totally geodesic plane F such that $\Gamma_i \subset F \subset H_i$. The intersection $F \cap B_i$ is bounded in F by the geodesics $F \cap C_{i-1}$ and $F \cap C_i$, both orthogonal to Γ_i , and by two arcs on the absolute. A *string* of B_i is the segment of a line, inside F , equidistant from the geodesic containing the segment Γ_i . The segment Γ_i and the mentioned two arcs on the absolute are the geodesic strings of B_i . Clearly, the reflection σ_i in the middle slice M_i of B_i stabilizes any string of B_i and interchanges the endpoints of the string.

Pick a point $q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$ and let $q_0 \in s_n \subset B_n$ be the string of B_n that contains q_0 . Then $q_{n-1} := \sigma_n q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_{n-1}$ is the other endpoint of s_n . Next, we take the string s_{n-1} of B_{n-1} such that $q_{n-1} \in s_{n-1} \subset B_{n-1}$, and so on. Finally, we get a simple curve $s := s_1 \cup s_2 \cup \dots \cup s_n$ with the endpoints $q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$ and $q'_0 := \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$, where $\partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap B_i \supset s_i$ is a string of B_i for all $1 \leq i \leq n$. We call such a curve $s \subset T$ the *string* of P generated by $q_0 \in \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$.

2.1. Lemma (cf. [AGG, Lemma 2.25, p. 4317]). *If H_0 is orthogonal to P_1 (in terms of the parameters, this means that $x_2 = 0$), then any string of P is closed and contractible in $\partial_1 P$. So, $\partial_1 P$ is a solid torus and the slice bundle of $\partial_0 P$ is extendable to P in this case.*

Proof. When H_0 is orthogonal to P_1 , the intersection $Q := P \cap P_1$ is a regular n -gon centred at b in the hyperbolic plane P_1 . The polyhedron P is simply the union of all those totally geodesic planes orthogonal to P_1 that pass through a point of Q . The slices of $\partial_0 P$ are built over the points of the boundary ∂Q . Thus, we get the slice bundle of $\partial_0 P$ extended to P .

The isometry σ_i is the trivial extension of the reflection in the middle point of the corresponding side of Q . Hence, the isometry $\sigma_1 \dots \sigma_n$ is a trivial extension of an elliptic isometry of P_1 with the fixed point $C_0 \cap P_1$. In other words, the restriction $\sigma_1 \dots \sigma_n|_{C_0}$ is the identity, implying that any string of P is closed.

In order to visualize a contraction of a closed string $s \subset T$ in $\partial_1 P$, one can simply shrink the n -gon Q (say, keeping its r -rotational symmetry about b).

The fact that $\partial_1 P$ is a solid torus follows from the Dehn lemma ■

If any string of the polyhedron P is closed, we say that P is *fibred*. As we saw, this is equivalent to $\sigma_1 \dots \sigma_n|_{C_0} = 1_{C_0}$. Denote $\sigma := \sigma_0$. Then $\sigma_i = r^i \sigma r^{-i}$ and $\sigma_1 \dots \sigma_n = (r\sigma)^n$ because $r^n = 1$. Since C_0 is $r\sigma$ -stable, we conclude that P is fibred iff $r\sigma|_{C_0}$ is an elliptic isometry of C_0 whose order divides n .

It follows from the connectedness of the region R and from Lemmas 2.1 and 3.1 that $\partial_1 P$ is a solid torus. By [AGG, Lemma 2.19, p. 4312], P is topologically a closed 4-ball and the slice bundle of $\partial_0 P$ is extendable to P .

Suppose that P is fibred. Take a couple of disjoint strings $s, s' \subset T$ of P . Since s and s' are contractible inside P with 2-discs $D, D' \subset P$, $s = \partial D$ and $s' = \partial D'$, one can calculate the algebraic number of intersections of D and D' . This number eP (clearly independent of the choice of s, s') is the *Euler number* of the fibred polyhedron P .

Suppose that a fibred polyhedron P is equipped with face-pairing isometries for the codimension 1 faces B_i and that the conditions of Poincaré's polyhedron theorem (PPT) are satisfied (see, for example, [AGr1]). Then we obtain a disc bundle M over a 2-dimensional orbifold S and eP is the Euler number of this bundle because the (face-pairing) isometries preserve the slice bundles and the string bundles of the B_i 's. (See, for instance, [BoS] for a treatment of bundles over orbifolds. Another option is to glue a few copies of P forming a fundamental polyhedron for a manifold and to note that eP and χS get multiplied by the number of copies.)

A closed curve $c \subset T$ that generates the group $H_1(\partial_0 P, \mathbb{Z})$ is said to be *trivializing* if $[c] = 0$ in $H_1(\partial_1 P, \mathbb{Z})$. In the case considered in Lemma 2.1, any string of P is trivializing.

2.2. Lemma [AGG, Remark 2.22, p. 4314]. *Let P be a fibred polyhedron, let $T \supset s$ be a string of P , and let $T \supset c$ be a trivializing curve of P . Then $eP = \#s \cap c$. In other words, $[s] = eP \cdot [g]$ in the group $H_1(\partial_1 P, \mathbb{Z})$, where $g := \partial \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$ ■*

Now we get a tool to measure the Euler number eM . Given fibred polyhedron satisfying the conditions of PPT, one can deform it into a 'plane' one (dealt with in Lemma 2.1) because the region R is convex. At the beginning of the deformation, the Euler number eP of a 'plane' polyhedron equals 0 by Lemmas 2.1 and 2.2. During the deformation, we keep track of how many times the polyhedron becomes fibred, i.e., how many times the string of the polyhedron becomes closed. Of course, counting these events, we should take care of the signs. So, it is better to say that the Euler number of the fibred polyhedron at the end of the deformation equals the algebraic number of times it was fibred during the deformation, including the last moment and not including the initial 'plane' moment.

We apply this method at the end of the proof of Theorem 3.9. The count is simple there because the chosen deformation provides a monotonic evolution of a string.

3. Calculation

Let b_1, b_2, b_3, b_4, b be an orthonormal basis of signature $- - - - +$ in an $\mathbb{R}$ -linear space V equipped with a symmetric bilinear form $\langle -, - \rangle$. Then the real hyperbolic space $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, its absolute $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$, and $\overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 := \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \sqcup \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ are known to be identified respectively with

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle > 0\}, \quad \partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle = 0\}, \quad \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4 := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \mid \langle p, p \rangle \geq 0\}.$$

Pick some numbers $k, m, n \in \mathbb{N}$ such that n is even and $1 < k < m < \frac{n}{2}$. Denote by

$$r := \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_m & -s_m & 0 \\ 0 & 0 & s_m & c_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_0 := \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ 0 \\ \sqrt{x_2} \\ 0 \\ \sqrt{x_1+x_2-1} \end{bmatrix}, \quad 0 < x_1, \quad 0 \leq x_2, \quad 1 < x_1 + x_2,$$

the regular elliptic isometry of $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ with the unique fixed point $b \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ and a point $p_0 \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}V \setminus \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$, both written in the above basis, where x_1, x_2 are some real parameters subject to the displayed inequalities, $c_i := \cos \frac{2i\pi}{n}$, and $s_i := \sin \frac{2i\pi}{n}$. Clearly, $r^n = 1$, $r \in \text{SO } V$, and $\langle p_0, p_0 \rangle = -1$. For any $i \in \mathbb{Z}$, denote

$$p_i := r^i p_0 = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & 0 & 0 \\ s_i & c_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{mi} & -s_{mi} & 0 \\ 0 & 0 & s_{mi} & c_{mi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{x_1} \\ 0 \\ \sqrt{x_2} \\ 0 \\ \sqrt{x_1+x_2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_i \sqrt{x_1} \\ s_i \sqrt{x_1} \\ c_{mi} \sqrt{x_2} \\ s_{mi} \sqrt{x_2} \\ \sqrt{x_1+x_2-1} \end{bmatrix}.$$

Obviously,

$$g_i := \langle p_0, p_i \rangle = (1 - c_i)x_1 + (1 - c_{mi})x_2 - 1.$$

Denote by $H_i \subset \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ the totally geodesic hyperplane corresponding to the $\mathbb{R}$ -linear subspace $p_i^\perp \leq V$. Let $C_i := H_i \cap H_{i+1}$.

3.1. Lemma. *The conditions that $C_i \not\subset \partial\overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ and that $H_i \cap H_j = \emptyset$ for all i, j such that $i - j \not\equiv_n \pm 1$ are equivalent to the inequalities*

$$(3.2) \quad 0 < x_1, \quad 0 \leq x_2, \quad 1 < x_1 + x_2, \quad (1 - c_1)x_1 + (1 - c_m)x_2 < 2 < (1 - c_i)x_1 + (1 - c_{mi})x_2,$$

for $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$. The convex region $R \subset \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ given by the inequalities (3.2) is nonempty because it contains the segment $A := \left(\frac{2}{1-c_2}, \frac{2}{1-c_1}\right) \times 0 \subset R$.

Proof. The condition $C_i \not\subset \partial\overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ means that the form on $\mathbb{R}p_i + \mathbb{R}p_{i+1}$ is of signature $--$, i.e., that $\det \begin{bmatrix} \langle p_i, p_i \rangle & \langle p_i, p_{i+1} \rangle \\ \langle p_{i+1}, p_i \rangle & \langle p_{i+1}, p_{i+1} \rangle \end{bmatrix} > 0$ by Sylvester's criterion. Taking into account that $\langle p_k, p_k \rangle = -1$ for all k , it is equivalent to $-1 < \langle p_i, p_{i+1} \rangle < 1$. Similarly, the condition that $H_i \cap H_j = \emptyset$ is equivalent to $\langle p_i, p_j \rangle \notin [-1, 1]$ because it means that the signature of the form on $\mathbb{R}p_i + \mathbb{R}p_j$ is $-+$. Since $0 \leq g_i + 1$ and $0 < g_1 + 1$, due to the symmetry related to the action of r , we arrive at the inequalities (3.2). For $x_2 = 0$, the inequalities take the form $1 < x_1$ and $(1 - c_1)x_1 < 2 < (1 - c_2)x_1$, i.e., the form $1 < \frac{2}{1-c_2} < x_1 < \frac{2}{1-c_1}$ with $-1 < c_2 < c_1$ ■

In the sequel, we assume $(x_1, x_2) \in R$.

Obviously, $C_i \cap C_j = \emptyset$ unless $i \equiv_n j$. Therefore, the ultraparallel planes $C_{i-1}, C_i \subset H_i \simeq \overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^3$ limit in H_i a solid cylinder B_i , and these cylinders form a solid torus $\partial_0 P := \bigcup_{i=1}^n B_i$ bounded by a torus $T \subset \partial\overline{\mathbb{H}}_{\mathbb{R}}^4$ as claimed in Section 2.

All the C_i 's are in the same closed half-space of $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4$ limited by a hyperplane H_j as, otherwise, there would exist some C_{i-1} and C_i , both disjoint with H_j , in different half-spaces, which would cause an impossible intersection $H_i \cap H_j \neq \emptyset$.

Let P stand for the intersection of those closed half-spaces limited by the H_i 's that contain the point b ; the B_i 's are codimension 1 faces of P and the C_i 's are codimension 2 faces of P . By Lemma 2.1, $\partial_1 P$ is a solid torus and $\partial P = \partial_0 P \sqcup_T \partial_1 P$ is a closed 4-ball.

Denote by σ the reflexion in the middle slice M_0 of B_0 and by τ , the reflection in H_0 . Clearly, $\sigma_i := r^i \sigma r^{-i}$ is the reflection in the middle slice M_i of B_i and $\tau_i := r^i \tau r^{-i}$ is the reflection in H_i .

3.3. Lemma. *Suppose that $g_1 = 0$, i.e.,*

$$(3.4) \quad (1 - c_1)x_1 + (1 - c_m)x_2 = 1.$$

Then $(\tau_{i+1}\tau_i)^2 = 1$ for all i and the polyhedron $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cap P$ endowed with the face-pairing isometries τ_i (identifying every codimension 1 face B_i with itself) satisfies the conditions of Poincaré's polyhedron theorem.

Proof. The hyperplanes H_i and H_{i+1} are orthogonal along C_i because $\langle p_i, p_{i+1} \rangle = g_1 = 0$. As the reflection τ_i is given by the rule $\tau_i : v \mapsto v + 2\langle v, p_i \rangle p_i$, the equality $(\tau_{i+1}\tau_i)^2 = 1$ follows straightforwardly from $\langle p_i, p_{i+1} \rangle = 0$ and $\langle p_i, p_i \rangle = \langle p_{i+1}, p_{i+1} \rangle = -1$.

Since τ_i sends the interior of P into the exterior of P and every geometric cycle of codimension 2 faces of P has length 4 and, therefore, total angle 2π , the conditions of PPT are satisfied (see [AGr1, Theorem 3.2, p. 303] and [AGr1, Proposition 2.1, p. 300]) ■

3.5. Lemma. *Let $U := \mathbb{R}p_0 + \mathbb{R}p_1$ and $W := \mathbb{R}p_0 + \mathbb{R}(p_1 - p_{n-1})$. Then C_0 and M_0 correspond respectively to the $\mathbb{R}$ -linear subspaces $U^\perp$ and $W^\perp$. The isometries σ and $r\sigma$ are given by the rules*

$$(3.6) \quad v \mapsto v + 2\langle v, p_0 \rangle p_0 + \frac{\langle v, p_1 - p_{n-1} \rangle}{g_2 + 1} (p_1 - p_{n-1}),$$

$$(3.7) \quad r\sigma v = rv + 2\langle v, p_0 \rangle p_1 + \frac{\langle v, p_1 - p_{n-1} \rangle}{g_2 + 1} (p_2 - p_0).$$

The $\mathbb{R}$ -linear subspace U is $r\sigma$ -stable and $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2g_1 \end{bmatrix}$ is the matrix of $r\sigma|_U$ in the basis p_0, p_1 . The point $f_0 := (1 - g_1)b + \langle b, p_0 \rangle(p_0 + p_1) \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$ is a fixed point of $r\sigma$.

Proof. By definition, C_0 corresponds to $U^\perp$. In other words, C_0 corresponds to $p_0^\perp \cap (p_1 + g_1 p_0)^\perp$ and, similarly, C_{n-1} corresponds to $p_0^\perp \cap (p_{n-1} + g_1 p_0)^\perp$, where $p_1 + g_1 p_0, p_{n-1} + g_1 p_0 \in p_0^\perp$. Since

$$\langle p_1 + g_1 p_0, p_1 + g_1 p_0 \rangle = \langle p_1 + g_1 p_0, p_1 \rangle = -1 + g_1^2 < 0,$$

$$\langle p_{n-1} + g_1 p_0, p_{n-1} + g_1 p_0 \rangle = \langle p_{n-1} + g_1 p_0, p_{n-1} \rangle = -1 + g_1^2 < 0,$$

$$\langle p_1 + g_1 p_0, p_{n-1} + g_1 p_0 \rangle = \langle p_1 + g_1 p_0, p_{n-1} \rangle = g_2 + g_1^2 > 0,$$

the middle point of Γ_0 equals $m_0 := (p_1 + g_1 p_0) + (p_{n-1} + g_1 p_0) = p_1 + p_{n-1} + 2g_1 p_0$ and M_0 corresponds to $p_0^\perp \cap ((p_1 + g_1 p_0) - (p_{n-1} + g_1 p_0))^\perp$.

Clearly, p_0 and $p_1 - p_{n-1}$ are orthogonal. Hence, the rule (3.6) acting as $v \mapsto v$ for any $v \in W^\perp$ and as $v \mapsto -v$ for any $v \in W$ in view of $\langle p_1 - p_{n-1}, p_1 - p_{n-1} \rangle = -2g_2 - 2$ defines the isometry σ . The formula (3.7) is now immediate. It implies the equalities $r\sigma p_0 = -p_1$ and $r\sigma p_1 = p_0 + 2g_1 p_1$ providing the indicated matrix.

Taking $rb = b$ into account, we see that $\langle b, p_i \rangle$ is independent of i , hence, $\langle f_0, p_0 \rangle = \langle f_0, p_1 \rangle = 0$. Therefore, $g_1 < 1$ implies $\langle f_0, f_0 \rangle = (1 - g_1)\langle f_0, b \rangle = (1 - g_1)^2 + 2(1 - g_1)\langle b, p_0 \rangle^2 > 0$, i.e., $f_0 \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^4 \cap C_0$. Finally,

$$\begin{aligned} r\sigma f_0 &= rf_0 - \frac{\langle f_0, p_{n-1} \rangle}{g_2 + 1}(p_2 - p_0) = (1 - g_1)b + \langle b, p_0 \rangle(p_1 + p_2) - \\ &- \frac{(1 - g_1)\langle b, p_0 \rangle + \langle b, p_0 \rangle(g_1 + g_2)}{g_2 + 1}(p_2 - p_0) = (1 - g_1)b + \langle b, p_0 \rangle(p_0 + p_1) = f_0 \blacksquare \end{aligned}$$

3.8. Lemma. *The isometry $r\sigma|_{C_0}$ of C_0 is a rotation by a about f_0 , where*

$$\cos a = \frac{(1 - c_1^2)c_m x_1 + c_1(1 - c_m^2)x_2}{(1 - c_1^2)x_1 + (1 - c_m^2)x_2}.$$

Proof. The isometry $r\sigma$ preserves orientation. By Lemma 3.5, the isometry $r\sigma|_U$ preserves orientation. Consequently, the isometry $r\sigma|_{C_0}$ also preserves orientation. By Lemma 3.5, it has to be a rotation by some angle a about f_0 . Since $\text{tr}(r\sigma|_U) = 2g_1$ by Lemma 3.5 and

$$\text{tr}(r\sigma) = \text{tr } r + 2g_1 + \frac{\langle p_2 - p_0, p_1 - p_{n-1} \rangle}{g_2 + 1} = 1 + 2c_1 + 2c_m + 2g_1 + \frac{g_1 - g_3}{g_2 + 1}$$

by (3.7), we obtain

$$\cos a = c_1 + c_m + \frac{g_1 - g_3}{2(g_2 + 1)} = c_1 + c_m + \frac{(c_3 - c_1)x_1 + (c_{3m} - c_m)x_2}{2(1 - c_2)x_1 + 2(1 - c_{2m})x_2}.$$

Taking $c_2 = 2c_1^2 - 1$, $c_3 = 4c_1^3 - 3c_1$, $c_{2m} = 2c_m^2 - 1$, and $c_{3m} = 4c_m^3 - 3c_m$ into account, we get

$$\cos a = c_1 + c_m + \frac{(c_1^3 - c_1)x_1 + (c_m^3 - c_m)x_2}{(1 - c_1^2)x_1 + (1 - c_m^2)x_2} = \frac{(1 - c_1^2)c_m x_1 + c_1(1 - c_m^2)x_2}{(1 - c_1^2)x_1 + (1 - c_m^2)x_2} \blacksquare$$

3.9. Theorem. *Suppose that the solution of the system*

$$\begin{cases} (1 - c_1)x_1 + (1 - c_m)x_2 = 1 \\ (1 - c_1^2)(c_k - c_m)x_1 = (1 - c_m^2)(c_1 - c_k)x_2 \end{cases}$$

satisfies the inequalities $2 < (1 - c_i)x_1 + (1 - c_{mi})x_2$ for all $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$, where $k, m, n \in \mathbb{N}$, n is even, $1 < k < m < \frac{n}{2}$, and $c_i := \cos \frac{2i\pi}{n}$. Then there exists a disc bundle $M \rightarrow S$ over a closed connected orientable surface S admitting a complete real hyperbolic geometry such that $|eM/\chi S| = \frac{4m-4k}{n-4}$.

Proof. First, we observe that the solution clearly satisfies the inequalities $0 < x_1$, $0 < x_2$, and $(1 - c_1)x_1 + (1 - c_m)x_2 < 2$. The inequality $1 < x_1 + x_2$ follows from the inequality $2 < (1 - c_i)x_1 + (1 - c_{mi})x_2$ with $i = \frac{n}{2}$ because $c_i = -1$ and $c_{mi} = \pm 1$. In other words, we get a point $(x_1, x_2) \in R$ in the region R .

Let $p(t) := (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [0, 1]$, be a linearly parameterized path in R that joins a point in the segment $A \subset R$ (see Lemma 3.1) with the point $p(1) = (x_1, x_2)$. The function $a(t)$ is continuous and, by Lemma 3.8, the function $\cos a(t)$ has a form $\cos a(t) = \frac{a_1 t + a_2}{a_3 t + a_4}$ for some $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. By Lemma 3.8, $\cos a(0) = \frac{(1 - c_1^2)c_m x_1(0)}{(1 - c_1^2)x_1(0)} = c_m$ and $\cos a(1) = \frac{(1 - c_1^2)c_m x_1 + c_1(1 - c_m^2)x_2}{(1 - c_1^2)x_1 + (1 - c_m^2)x_2} = c_k$ due to the second equation of the system. Hence, the function $\cos a(t)$ is not constant and is therefore monotonic. Consequently, the function $a(t)$ is monotonic.

It was understood in Section 2 that the polyhedron $P(t)$ is fibred iff $r\sigma|_{C_0}$ is a periodic isometry whose order divides n , i.e., iff $\cos a(t) = c_j$ for some $j \in \mathbb{Z}$. Since $a(t)$ is monotonic, $\cos a(0) = c_m$, and $\cos a(1) = c_k$, we conclude that $eP(1) = m - k$.

By Lemma 3.3, the polyhedron $P(1)$ satisfies the conditions of PPT due to the first equation of the system. It remains to observe that the Euler characteristic of the corresponding orbifold S equals $\chi S = \frac{n}{4} - \frac{n}{2} + 1 = -\frac{n-4}{4}$ ■

3.10. Calculation. Taking $(k, m, n) := (2, 5, 24)$ (or $(k, m, n) := (3, 6, 24)$ or $(k, m, n) := (5, 11, 44)$), one can check the 11 (or 11 or 21) inequalities of Theorem 3.9 thus arriving at $|eM/\chi S| = \frac{3}{5}$ ■

References

- [AGG] S. Anan'in, C. H. Grossi, N. Gusevskii, *Complex hyperbolic structures on disc bundles over surfaces*, Int. Math. Res. Not. **2011** (2011), no. 19, 4295–4375, <http://arxiv.org/abs/math/0511741>
- [AGr1] S. Anan'in, C. H. Grossi, *Yet another Poincaré's polyhedron theorem*, Proc. Edinburgh Math. Soc., **54** (2011), 297–308, <http://arxiv.org/abs/math/0812.4161>
- [AGr2] S. Anan'in, C. H. Grossi, *Coordinate-free classic geometries*, Moscow Math. J. **11** (2011), no. 4, 633–655, <http://arxiv.org/abs/math/0702714>
- [AGr3] S. Anan'in, C. H. Grossi, *Differential geometry of grassmannians and the Plücker map*, Central European J. of Math. **10** (2012), no. 3, 873–884, <http://arxiv.org/abs/0907.4470>
- [BoS] F. Bonahon, L. Siebenmann, *The classification of Seifert fibered 3-orbifolds*, in *Low Dimensional Topology*, edited by R. Fenn, LMS Lecture Notes in Science **95**, New York: Cambridge University Press, 1985, 258 pp.
- [GLT] M. Gromov, H. B. Lawson Jr., W. Thurston, *Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., no. 68 (1988), 27–45
- [Kap] M. Kapovich, *On hyperbolic 4-manifolds fibered over surfaces*, preprint (1993) <http://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/eprints.html>
- [Kui1] N. H. Kuiper, *Hyperbolic 4-manifolds and tessellations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., no. 68 (1988), 47–76
- [Kui2] N. H. Kuiper, *Fairly symmetric hyperbolic manifolds*, in *Geometry and Topology of Submanifolds, II* (1990), World Sci. Publ., 165–204
- [Luo] F. Luo, *Constructing conformally flat structures on some Seifert fibred 3-manifolds*, Math. Ann. **294** (1992), no. 3, 449–458

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ICMC, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CAIXA POSTAL 668,
13566-590-SÃO CARLOS-SP, BRASIL
E-mail address: sasha_a@icmc.usp.br

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ICMC, UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, CAIXA POSTAL 668,
13566-590-SÃO CARLOS-SP, BRASIL
E-mail address: philipy.chiovetto@usp.br

REFERÊNCIAS

- ANANIN, S.; CHIOVETTO, P. V. A couple of real hyperbolic disc bundles over surfaces. **Groups, Geometry, and Dynamics**, 2018. Accepted for publication. Citado nas páginas 7, 9 e 13.
- ANANIN, S.; GROSSI, C. H. Coordinate-free classic geometries. **Moscow Math.**, v. 11, n. 4, p. 633–655, 2011. Citado nas páginas 14, 15 e 17.
- _____. Yet another poincaré’s polyhedron theorem. **Proc. Edinburgh Math. Soc.**, v. 54, p. 297–308, 2011. Citado nas páginas 24, 25 e 28.
- _____. Differential geometry of grassmannians and the plucker map. **Central European J. of Math.**, v. 10, n. 3, p. 873–884, 2012. Citado na página 14.
- ANANIN, S.; GROSSI, C. H.; GUSEVSKII, N. Complex hyperbolic structures on disc bundles over surfaces. **Int. Math. Res. Not.**, v. 2011, n. 19, p. 4295–4375, 2011. Citado nas páginas 13, 14, 23 e 24.
- BONAHOM, F.; SIEBENMANN, L. The classification of seifert fibered 3-orbifolds, in low dimensional topology. **edited by R. Fenn, LMS Lecture Notes in Science**, v. 95, p. 258, 1985. Citado na página 24.
- GROMOV, M.; LAWSON, H. B.; THURSTON, W. Hyperbolic 4-manifolds and conformally flat 3-manifolds. **Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.**, n. 65, p. 27–45, 1988. Citado nas páginas 13 e 14.
- KAPOVICH, M. On hyperbolic 4-manifolds fibered over surfaces. **preprint** <http://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/eprints.html>, 1993. Citado na página 14.
- KUIPER, N. H. Hyperbolic 4-manifolds and tessellations. **Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.**, n. 68, p. 47–76, 1988. Citado na página 14.
- _____. Fairly symmetric hyperbolic manifolds, in geometry and topology of submanifolds. **World Sci. Publ.**, II, p. 165–204, 1990. Citado na página 14.
- LUO, F. Constructing conformally flat structures on some seifert fibered 3-manifolds. **Math. Ann.**, v. 294, n. 3, p. 449–458, 1992. Citado nas páginas 7, 9, 13 e 14.
- RATCLIFFE, J. G. **Foundations of Hyperbolic Manifolds**. Switzerland: Springer Nature, 2019. v. 149. (Graduate Texts in Math., v. 149). Citado na página 19.