Soluções de equilíbrio de EDPs usando base de Chebyshev

Edward Luís de Araújo

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Edward Luís de Araújo

Soluções de equilíbrio de EDPs usando base de Chebyshev

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
Dezembro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A658s Araújo, Edward Luís de
 Soluções de equilíbrio de EDPs usando base de
Chebyshev / Edward Luís de Araújo; orientador Marcio
Fuzeto Gameiro. - São Carlos - SP, 2016.
 98 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. EDPs. 2. Chebyshev. 3. Equilíbrio.
4. Alen-Cahn. 5. Swift-Hohenberg. I. Gameiro, Marcio
Fuzeto, orient. II. Título.

Edward Luís de Araújo

Equilibrium solutions for PDEs using Chebyshev basis

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro

USP – São Carlos
December 2016

*Este trabalho é dedicado à memória dos meus avós,
Edward Vieira de Araújo e
Terezinha Rodrigues de Araújo.*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só foi possível graças ao estímulo, incentivo e colaboração de algumas pessoas a quem devo algumas palavras de reconhecimento, seja pela atuação direta ou indireta nesta etapa ou nas anteriores que permitiram que eu chegasse até aqui.

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde, sabedoria, paciência e força para não desistir mesmo diante de tantas dificuldades. A todos os santos que não cessaram de interceder por mim, durante esse doutorado foram tantas novenas que eu até perdi a conta.

Aos professores Dr. Waldemar Donizete Bastos, Dr. Jaime Angulo Pava e Dra. Sueli Irene Costa pelas cartas de recomendação e ao ICMC/USP por ter me aceito como aluno deste programa.

À FACIP/UFU por ter permitido o meu afastamento para ingressar no doutorado e especialmente aos professores do curso de matemática desta unidade que mesmo na ausência de professores substitutos, como no primeiro semestre de 2014, mantiveram o meu afastamento. À secretária Roberta Lisboa por sempre ter me ajudado com as questões técnicas do afastamento e da bolsa prodoutoral. Ela sempre esteve mais atenta aos prazos do que eu mesmo.

Ao Prof. Dr. Marcio Fuzeto Gameiro, pela orientação, pelas sugestões, pela escolha do tema, pela confiança e sobretudo pela enorme paciência que sempre teve comigo, nem eu teria tanta assim, a sua contribuição neste trabalho vai literalmente da capa até as referências bibliográficas.

A todos os meus professores desta e das etapas anteriores que contribuíram para o meu aprendizado e serviram de exemplos para mim. Agradeço especialmente à Prof. Dra Denise de Mattos a quem eu considero a melhor professora do mundo por ter tornado o conteúdo de Topologia Algébrica acessível e atraente, graças as suas explicações extremamente claras e detalhadas. Eu achei nunca aprenderia esse conteúdo direito.

Ao meu pai e comandante Jorge Luíz de Araújo, por sempre ter feito o possível para que prosseguisse nos estudos. Sempre acreditou no papel transformador da educação e não ficou apenas na crença, se empenhou para fazer o melhor que podia para mim neste sentido. Foi meu primeiro professor, quem me ensinou os valores e princípios que eu sigo até hoje. A minha tia Ana Maria Rodrigues de Araújo por também ter tido um papel importante na minha educação e pela paciência de ouvir as minhas reclamações do doutorado pelo telefone. Aos meus avós Edward Vieira de Araújo e Terezinha Rodrigues de Araújo por também terem contribuído na minha formação.

À Capes pelo apoio financeiro através da Bolsa Prodoutoral. Ao amigo Fernando Akira Kurokawa por ter colhido pessoalmente com urgência a assinatura com o pró-reitor de pesquisa em São Paulo, sem a qual eu não teria conseguido a bolsa.

Aos companheiros de doutorado, Giuliano Angelo Zugliani por ter sido o meu “monitor” na disciplina de EDP principalmente, mas também em Análise Funcional 2, ao Rafael Borro pela contribuição num trabalho de EDP, a Jaqueline Ferreira pelos estudos em EDO. Ao Matheus Cheque Bortolan pelos sábios conselhos no início do doutorado e por ter contribuído direta ou indiretamente com tantas listas de exercícios.

Aos companheiros de sala de estudo Carlos Henrique Tognon, Andrea de Jesus Sacramento, Juliana Theodoro de Lima, Henry José Gullo Mercado e Fausto Lira, pessoas com quem compartilhei tantos momentos de alegria e também os de dificuldade.

Aos integrantes do grupo de pesquisa Camila Leão Cardozo, Mário Prado e Victor Nolasco pelas críticas e sugestões.

Aos amigos Germano Abud de Rezende pela contribuição com os erros do latex e pelo incentivo mesmo à distância e a Francineide Lopes de Araújo por ter várias vezes emprestado livros da biblioteca para mim quando eu estava suspenso e também pelo apoio.

RESUMO

DE ARAÚJO, E. L. **Soluções de equilíbrio de EDPs usando base de Chebyshev**. 2016. [98](#) f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

Este trabalho apresenta um método numérico rigoroso para encontrar soluções de equilíbrio para equações diferenciais parciais usando base de Chebyshev. Aplicações do método são apresentadas para a equação de Allen-Cahn e Swift-Hohenberg.

Palavras-chave: EDPs, Chebyshev, Equilíbrio, Allen-Cahn, Swift-Hohenberg.

ABSTRACT

DE ARAÚJO, E. L. **Soluções de equilíbrio de EDPs usando base de Chebyshev**. 2016. [98](#) f. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

This work presents a rigorous numerical method to find equilibrium solutions to partial differential equations using Chebyshev basis. Applications are presented to the Allen-Cahn and Swift-Hohenberg equations.

Key-words: PDEs, Chebyshev, Equilibria, Allen-Cahn, Swift-Hohenberg.

SUMÁRIO

1	PRELIMINARES	19
1.1	Métodos Espectrais e Polinômios de Chebyshev	19
1.2	Matriz Quase Inversa	25
1.2.1	<i>Matriz Quase Inversa de Ordem 1</i>	26
1.2.2	<i>Matriz Quase Inversa de Ordem 2</i>	26
1.2.3	<i>Matriz Quase Inversa de Ordem 4</i>	27
1.3	Produto de Kronecker	28
1.4	Continuação Rigorosa Para Equilíbrio de EDPs	29
2	SOLUÇÕES DE EQUÍLIBRIO PARA EQUAÇÕES UNIDIMENSIONAIS	33
2.1	Continuação Rigorosa e Polinômios Radiais	33
2.2	Problema de Dirichlet Para a Equação de Allen-Cahn	39
2.2.1	<i>Cálculo de Y_k</i>	46
2.2.2	<i>Cálculo de Z_k</i>	47
2.3	Problema de Valor de Fronteira Para a Equação de Swift-Hohenberg	54
2.3.1	<i>Cálculo de Y_k</i>	61
2.3.2	<i>Cálculo de Z_k</i>	61
3	SOLUÇÕES DE EQUÍLIBRIO PARA EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS	71
3.1	Problema de Dirichlet Para a Equação de Allen-Cahn	71
3.1.1	<i>Cálculo de Y_k</i>	78
3.1.2	<i>Cálculo de Z_k</i>	78
4	CONCLUSÃO	89
	REFERÊNCIAS	91
	APÊNDICE A ESTIMATIVAS ANALÍTICAS	95
A.1	Estimativa Gerais	95
A.2	Refinamento Para o Caso $k \in F_M$	96
A.3	Estimativa Uniforme Para o Caso $k \notin F_M$	98

INTRODUÇÃO

Neste trabalho pretendemos estender o método da continuação rigorosa para encontrar soluções de equilíbrio de equações diferenciais parciais (EDPs) dependentes de um parâmetro, utilizando séries de Chebyshev. O método da continuação rigorosa foi introduzido em (GAMEIRO; LESSARD, 2010) no contexto de séries de Fourier para calcular curvas de soluções de equilíbrio de EDPs dependente de um único parâmetro, tal método se baseia em duas noções fundamentais o famoso algoritmo predictor-corretor (KELLER, 1987) e a noção dos polinômios radiais. A ideia central do método é combinar as aproximações numéricas obtidas a partir do algoritmo predictor corretor com cálculos rigorosos feitos no computador usando aritmética de intervalo e estimativas analíticas, esse método numérico rigoroso verifica através da noção dos polinômios radiais que a solução de equilíbrio calculada numericamente para o sistema de dimensão finita via projeção de Galerkin pode ser usada para definir explicitamente um conjunto que contém uma única solução no sentido do rigor matemático para o problema original em dimensão infinita. O método tem uma parte teórica que é a verificação do clássico Teorema do Ponto Fixo de Banach e uma parte computacional, onde o computador é utilizado tanto para obter as aproximações numéricas do algoritmo predictor-corretor, como também para verificar as hipóteses do Teorema através das desigualdades via polinômios radiais, apenas na verificação das desigualdades é utilizada a aritmética de intervalo. Assim, os resultados obtidos são provas matemáticas completamente rigorosas realizadas com o auxílio do computador. Nas últimas décadas diversas provas assistidas por computador foram apresentadas para provar existência de soluções de EDPs não lineares, veja por exemplo ((BREUER; MCKENNA; PLUM, 2003), (DAY *et al.*, 2005), (DAY; LESSARD; MISCHAIKOW, 2007), (MAIER-PAAPE *et al.*, 2008), (NAKAO; HASHIMOTO; KOBAYASHI, 2007), (ZGLICZYNSKI; MISCHAIKOW, 2001)). Estas provas são baseados em argumentos topológicos locais como o fato do Índice de Conley numa pequena vizinhança isolante da solução ser não nulo ou em um argumento de aplicação contração, ambos dependem do fato que a parte linear da EDP governa ao menos localmente o comportamento do sistema e surgiram para responder o quão suficientemente precisa é uma solução aproximada da solução original do problema.

A abordagem dos polinômios radiais que é crucial no método da continuação rigorosa foi introduzida em (DAY; LESSARD; MISCHAIKOW, 2007) no contexto do método semirrigoroso da continuação validada, que foi melhorado em (GAMEIRO; LESSARD; MISCHAIKOW, 2008) para encontrar equilíbrios de EDPs definidas em domínios espaciais unidimensionais dependentes de um parâmetro, em (GAMEIRO; LESSARD, 2010) utilizou tal abordagem para estender as ideias do método para o contexto da rigorosidade e para encontrar equilíbrios

de EDPs em domínios de dimensão superior. Desde o surgimento desta abordagem vários trabalhos tem sido publicados utilizando os polinômios radiais não apenas no contexto de encontrar equilíbrios de EDPs, mas também para encontrar, por exemplo, soluções periódicas de equações diferenciais ordinárias (EDOs), órbitas de conexão de EDOs, a forma normal de Floquet de uma matriz fundamental de solução de uma equação diferencial linear não autônoma, solução periódica de equações diferenciais com retardo (EDRs), solução periódica no tempo de (EDPs). Em (GAMEIRO; LESSARD; PUGLIESE, 2016) é apresentado um método numérico rigoroso construtivo para calcular variedades suaves definidas implicitamente por operadores não-lineares de dimensão infinita. Calcula-se uma triangulação simplicial de uma variedade usando um método de continuação multi-parâmetro em uma projeção de dimensão finita. A triangulação é então utilizado para construir mapas locais e um atlas da variedade no domínio de dimensão infinita do operador. A idéia por trás da construção dos mapas suaves é usar os polinômios radiais para verificar as hipóteses do princípio contração uniforme ao longo de um simplexo. No artigo (BREDEN; LESSARD; JAMES, 2016) é desenvolvido um procedimento para calcular expansões polinomiais de alta ordem de variedades instáveis local para equilíbrios de equações diferenciais, em (CASTELLI; LESSARD; JAMES, 2015) um método para calcular rigorosamente a decomposição da forma normal de Floquet da matriz fundamental de solução de um sistema de EDOs lineares com coeficientes periódicos é apresentado, em (BERG *et al.*, 2015) é desenvolvido um método computacional rigoroso para encontrar soluções heteroclínicas de um sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem, em (LESSARD; JAMES; REINHARDT, 2014) é introduzido um método para provar a existência de órbitas de conexão sela-a-sela entre equilíbrios de campos vetoriais de primeira ordem, além disso, obtêm-se informações precisas sobre a localização e transversalidade das órbitas, em (KISS; LESSARD, 2012) é apresentado um método para provar a existência de soluções periódicas de equações diferenciais com retardo com várias defasagens de tempo.

Um método computacional rigoroso vai além do padrão de uma análise teórica a posteriori de cálculos numéricos. O campo do rigor numérico visa o desenvolvimento de teoremas matemáticos formulados de tal forma que as hipóteses podem ser rigorosamente verificadas em um computador. A abordagem requer uma configuração a priori, que permite que a análise teórica e os cálculos numéricos trabalhem juntos: a escolha do espaço funcional, a escolha das funções da base, a projeção Galerkin, as estimativas analíticas, e os parâmetros computacionais devem todos trabalhar lado a lado para limitar os erros devido a aproximação, o arredondamento e truncamento, e isso deve ser suficientemente bem feito para que o teorema seja provado e uma genuína prova assistida pelo computador obtida.

O nosso método consiste basicamente de quatro etapas. A primeira é utilizar a ideia do método espectral, ou seja, expandir a solução do problema utilizando a base de Chebyshev, substituir a expansão na EDP e definir uma função $f : X \rightarrow W$ entre espaços de Banach de modo que as soluções do problema original correspondam as soluções de $f(x) = 0$. A segunda etapa consiste em encontrar uma solução aproximada $\bar{x}$ para o problema $f(x) = 0$. Na terceira etapa

definimos um operador do tipo Newton $T : X \longrightarrow X$ tal que as soluções de $f(x) = 0$ estejam em correspondência com os pontos fixos de T , ou seja, $T(x) = x$. Na quarta e última etapa usar os polinômios radiais que serão definidos no Capítulo 2 para encontrar uma bola fechada B centrada em $\bar{x}$ tal que $T : B \longrightarrow B$ seja uma contração.

Na segunda etapa do nosso método, para calcular uma aproximação da solução de $f(x) = 0$ de uma projeção finita de f fizemos uma adaptação do método eficiente utilizado em (LIU; YE; WANG, 2011), para encontrar solução numérica de EDPs lineares utilizando séries de Chebyshev e a técnica quase inversa apresentada em (JULIEN; WATSON, 2009), multiplicamos os dois lados de $f(x) = 0$ pela matriz quase inversa, para condicionar o problema.

No contexto do campo de rigor numérico, métodos similares usando séries de Fourier são amplamente utilizados para calcular soluções de equações diferenciais que requerem soluções periódicas, como soluções de equações diferenciais periódicas no tempo ((BAKER; DELLNITZ; JUNGE, 2005), (BERG; LESSARD, 2008)), soluções estacionárias de equações diferenciais parciais com periodicidade ou condições de fronteira de Neumann ((GAMEIRO; LESSARD, 2010), (NAKAO; HASHIMOTO; KOBAYASHI, 2007), (ZGLICZYNSKI; MISCHAIKOW, 2001), (MAIER-PAAPE *et al.*, 2008)), soluções periódicas no tempo de equações diferenciais de retardo ((LESSARD, 2010), (ZALEWSKI, 2009)) e conjuntos invariantes de dimensão infinita (DAY; JUNGE; MISCHAIKOW, 2004). As séries de Chebyshev já foram utilizadas para obter provas rigorosas assistidas por computador de existência de órbitas de conexão em ((LESSARD; REINHARDT, 2014), (BERG *et al.*, 2015), (GAMEIRO; LESSARD; RICAUD, 2016)), de soluções de problemas de valor de fronteira (CORREC; LESSARD, 2015), de soluções de problema de valor inicial em (LESSARD; REINHARDT, 2014).

O nosso objetivo neste trabalho é calcular rigorosamente soluções de equilíbrio de EDPs unidimensionais e bidimensionais não lineares, com não linearidade polinomial usando séries de Chebyshev. É importante observar que o caso unidimensional resulta no problema de encontrar soluções de uma EDO e em (LESSARD; REINHARDT, 2014) foi apresentado um método rigoroso para calcular soluções de EDOs não lineares usando séries de Chebyshev e consequentemente os problemas de valor inicial e problemas de valor de fronteira associados a estas EDOs, no entanto a abordagem dos métodos são diferentes no seguinte aspecto, enquanto nós trabalhamos diretamente com a equação diferencial, considerando a expansão da solução e das suas derivadas de qualquer ordem em séries de Chebyshev para obter o problema equivalente da forma $f(x) = 0$ em (LESSARD; REINHARDT, 2014) eles consideram a equação integral associada, para obter o problema equivalente. Se por um lado num primeiro momento o nosso método possa parecer um pouco mais complicado porque a expansão das derivadas da solução usando Chebyshev não são tão imediatas como no caso de Fourier e no método de (LESSARD; REINHARDT, 2014) que considera o problema integral esta dificuldade no contexto de Chebyshev não é considerada, o nosso método é mais vatajoso porque podemos considerar problemas de valor de fronteira com condições de fronteira mais gerais, como a condição de Robin em (LIU; YE; WANG, 2011)

(que não é um método numérico rigoroso), enquanto no método de (LESSARD; REINHARDT, 2014) isso não é possível, além disso no nosso método não necessitamos transformar EDOs de ordem superior num sistema de EDOs de primeira ordem como é feito no método de (LESSARD; REINHARDT, 2014), o que aumenta naturalmente o custo computacional.

Este trabalho é organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos para o entendimento dos demais capítulos, falamos sobre métodos espectrais, polinômios de Chebyshev, matriz quase inversa, produto de Kronecker e continuação rigorosa para equilíbrios de EDPs. No Capítulo 2 tratamos de soluções de equilíbrio para equações unidimensionais, no início do capítulo detalhamos o método da continuação rigorosa e os polinômios radiais com as devidas adaptações para o nosso problema e depois aplicamos o nosso método inédito para as equações de Allen-Cahn e Swift-Hohenberg. No Capítulo 3 tratamos das soluções de equilíbrio para problemas bidimensionais e aplicamos o método para a equação de Allen-Cahn 2d. Para completude do trabalho apresentamos as estimativas analíticas no Apêndice A e no Capítulo 4 discutimos os resultados obtidos.

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos a teoria básica necessária para o desenvolvimento dos capítulos posteriores deste trabalho. Algumas demonstrações serão omitidas, mas indicaremos precisamente onde encontrá-las. Começamos com o importante método espectral utilizado para encontrar soluções de equações diferenciais.

1.1 Métodos Espectrais e Polinômios de Chebyshev

Nesta seção apresentaremos a ideia básica dos métodos espectrais para a resolução de equações diferenciais e equações integrais em geral e dedicaremos especial atenção ao método espectral associado aos polinômios de Chebyshev que foi utilizado neste trabalho.

A ideia básica dos métodos espectrais é assumir que uma função desconhecida $u = u(x)$ pode ser aproximada por uma série truncada de funções bases $\{\psi_k(x)\}$, ou seja,

$$u(x) \approx u_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \psi_k(x), \quad (1.1)$$

quando esta série é substituída numa equação da forma

$$L(u) = g(x), \quad (1.2)$$

onde L denota o operador diferencial ou integral, o resultado é chamado de função residual como em (BOYD, 2001) e é definido por

$$R(x; a_0, a_1, \dots, a_m) := L(u_m) - g. \quad (1.3)$$

Naturalmente a função residual é identicamente nula para a solução exata de (1.2) e o grande desafio do método é escolher a série de coeficientes $\{a_k(x)\}$ ou equivalentemente as funções bases $\{\psi_k(x)\}$ tais que a função residual seja minimizada. Os métodos espectral e pseudoespectral diferem principalmente em relação as estratégias de minimização. A escolha adequada das

funções bases depende da geometria do problema, como domínio da função u , condição inicial ou condições de fronteira associadas à equação (1.2).

Geralmente as condições inicial e de fronteira não são a maior complicação para métodos espectrais. Se as condições de fronteira pedem uma solução espacialmente periódica por exemplo, então os coeficientes de Fourier são a escolha natural para os coeficientes $\{a_k(x)\}$ e consequentemente a série de Fourier minimiza a função residual, pois as funções bases são todas periódicas e satisfazem as condições de fronteira individualmente e automaticamente.

Para problemas não periódicos, objeto de estudo no nosso trabalho, os polinômios de Chebyshev são a escolha natural para funções bases, eles não satisfazem condições de fronteira apropriadas, mas é fácil adicionar restrições explícitas tal como

$$\sum_{k=0}^m a_k \psi_k(1) = \alpha \quad (1.4)$$

para as equações algébricas obtidas da minimização da função residual de modo que a restrição $u(1) = \alpha$ seja satisfeita pela solução aproximada.

Observamos que em 1.1 consideramos uma função de uma variável real, mas a ideia do método espectral se estende de modo natural para funções de duas ou mais variáveis. No restante da seção definiremos e veremos as principais propriedades dos polinômios de Chebyshev.

Definição 1. Os polinômios de Chebyshev são definidos para $m \in \mathbb{N}$ por

$$T_m(x) = \cos(m \arccos(x)), \quad (1.5)$$

onde $x = \cos(\theta)$, com $\theta \in [0, \pi]$ e $x \in [-1, 1]$.

Assim, os polinômios de Chebyshev nada mais são do que funções cosseno depois de uma mudança de variável independente. Esta propriedade justifica o seu emprego na aproximação de problemas de valor de fronteira não periódicos. Além disso, a transformação $x = \cos(\theta)$ permite adaptar facilmente muitos resultados relativos a teoria de Fourier aos polinômios de Chebyshev.

A próxima proposição lista as propriedades mais imediatas relativas aos polinômios de Chebyshev.

Proposição 1. Os polinômios de Chebyshev satisfazem as seguintes propriedades

- (i) $T_m(\pm 1) = (\pm 1)^m$;
- (ii) $|T_m(x)| \leq 1$, para $-1 \leq x \leq 1$;
- (iii) $T'_m(x) = \frac{m \sin(m\theta)}{\sin(\theta)}$;
- (iv) $|T'_m(x)| \leq m^2$, para $-1 \leq x \leq 1$;

$$(v) \quad T'_m(\pm 1) = (\pm 1)^{m+1} m^2.$$

Demonstração. Consulte (CANUTO *et al.*, 2007). □

No que segue mostraremos como é a expansão de uma função desconhecida e de suas derivadas usando polinômios de Chebyshev. Começamos observando que os polinômios de Chebyshev satisfazem a importante relação de ortogonalidade

$$\langle T_m(x), T_n(x) \rangle_\omega = \int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \omega(x) dx = \frac{c_m \pi}{2} \delta_{mn}, \quad (1.6)$$

onde $\delta_{mn} = 1$ se $m = n$ e $\delta_{mn} = 0$ caso contrário, $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ é uma função peso e

$$c_m = \begin{cases} 2, & \text{se } m = 0, \\ 1, & \text{se } m \geq 1. \end{cases} \quad (1.7)$$

que é análoga à relação de ortogonalidade satisfeita pela base de Fourier.

A expansão de Chebyshev de uma função $u \in L^2_\omega([-1, 1])$, que é o clássico espaço $L^2([-1, 1])$ com o peso ω é dado por

$$u(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m T_m(x), \quad (1.8)$$

onde

$$\hat{u}_m = \frac{2}{\pi c_m} \int_{-1}^1 u(x) T_m(x) \omega(x) dx, \quad (1.9)$$

$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e c_m é definido em (1.7).

O segredo para obter a expansão de Chebyshev da derivada primeira de u é a seguinte relação trigonométrica

$$2\sin(\theta)\cos(m\theta) = \sin((m+1)\theta) - \sin((m-1)\theta), \quad (1.10)$$

que associada ao item (iii) da Proposição 1 produz

$$2T_m(x) = \frac{T'_{m+1}(x)}{m+1} - \frac{T'_{m-1}(x)}{m-1}, \quad \forall m > 1. \quad (1.11)$$

O seguinte lema mostra a expressão da derivada do polinômio de Chebyshev em termos da base de Chebyshev.

Lema 1. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $T_m(x) = \cos(m \arccos(x))$ um polinômio de Chebyshev para $x \in [-1, 1]$, então

$$T'_m(x) = 2m \sum_{\substack{k=0 \\ (k+m) \text{ ímpar}}}^{m-1} \frac{1}{c_k} T_k(x). \quad (1.12)$$

Demonstração. Utilizando a relação (1.11) para $m > 1$, consideremos os seguintes casos

(i) Se m é ímpar, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{k=0 \\ (k+m) \text{ ímpar}}}^{m-1} \frac{1}{c_k} T_k(x) &= \frac{1}{c_0} T_0(x) + T_2(x) + T_4(x) + T_6(x) + \cdots + T_{m-1}(x) \\
 &= \frac{1}{c_0} T_0(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{T'_3(x)}{3} - \frac{T'_1(x)}{1} \right] + \cdots + \frac{1}{2} \left[\frac{T'_m(x)}{m} - \frac{T'_{m-2}(x)}{m-2} \right] \\
 &= \frac{1}{2} T_0(x) - \frac{1}{2} T'_1(x) + \frac{T'_m(x)}{2m} = \frac{T'_m(x)}{2m},
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

pois $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$.

(ii) Se m é par, temos

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{k=0 \\ (k+m) \text{ ímpar}}}^{m-1} \frac{1}{c_k} T_k(x) &= \frac{1}{c_1} T_1(x) + T_3(x) + T_5(x) + T_7(x) + \cdots + T_{m-1}(x) \\
 &= T_1(x) + \frac{1}{2} \left[\frac{T'_4(x)}{4} - \frac{T'_2(x)}{2} \right] + \cdots + \frac{1}{2} \left[\frac{T'_m(x)}{m} - \frac{T'_{m-2}(x)}{m-2} \right] \\
 &= T_1(x) - \frac{1}{4} T'_2(x) + \frac{T'_m(x)}{2m} = \frac{T'_m(x)}{2m},
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

pois $T_1(x) = x$ e $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

De (1.13) e (1.14) segue o resultado. $\square$

Proposição 2. Seja $u \in L^2_\omega([-1, 1])$ então a expansão de Chebyshev da sua derivada é dada por

$$u'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m^{(1)} T_m(x), \tag{1.15}$$

onde

$$\hat{u}_m^{(1)} = \frac{2}{c_m} \sum_{\substack{p=m+1 \\ (p+m) \text{ ímpar}}}^{\infty} p \hat{u}_p. \tag{1.16}$$

Demonstração. Derivando (1.8) e utilizando o Lema 1, obtemos

$$u'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m T'_m(x) = \sum_{\substack{m=0 \\ (p+m) \text{ ímpar}}}^{\infty} \hat{u}_m \left[2m \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{c_p} T_p(x) \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{2}{c_m} \sum_{\substack{p=m+1 \\ (p+m) \text{ ímpar}}}^{\infty} p \hat{u}_p \right] T_m(x), \tag{1.17}$$

donde segue o resultado. $\square$

O procedimento utilizado na demonstração acima foi utilizado para obter os coeficientes de Chebyshev das derivadas de ordem superior. Nos próximos corolários explicitamos os coeficientes de Chebyshev até a derivada de quarta ordem que foi utilizado neste trabalho.

Corolário 1. Seja $u \in L^2_\omega([-1, 1])$ então a expansão de Chebyshev da sua derivada segunda é dada por

$$u''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m^{(2)} T_m(x), \quad (1.18)$$

onde

$$\hat{u}_m^{(2)} = \frac{1}{c_m} \sum_{\substack{p=m+2 \\ (p+m) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - m^2) \hat{u}_p. \quad (1.19)$$

Demonstração. Segue do Lema 1 e da Proposição 2. $\square$

Corolário 2. Seja $u \in L^2_\omega([-1, 1])$ então a expansão de Chebyshev da sua derivada terceira é dada por

$$u'''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m^{(3)} T_m(x), \quad (1.20)$$

onde

$$\hat{u}_m^{(3)} = \frac{1}{c_m} \sum_{\substack{p=m+3 \\ (p+m) \text{ ímpar}}}^{\infty} p \left[\left(\frac{m^2}{2} - \frac{p^2}{2} \right)^2 - \left(\frac{m^2}{2} + \frac{p^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] \hat{u}_p. \quad (1.21)$$

Demonstração. Segue do Lema 1 e da Proposição 2. $\square$

Corolário 3. Seja $u \in L^2_\omega([-1, 1])$ então a expansão de Chebyshev da sua derivada quarta é dada por

$$u^{(4)}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m^{(4)} T_m(x), \quad (1.22)$$

onde

$$\hat{u}_m^{(4)} = \frac{1}{c_m} \sum_{\substack{p=m+4 \\ (p+m) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3 - 4p)^2}{24} - \frac{(m^3 - 4m)^2}{24} + \frac{m^2 p^2}{8} (m^2 - p^2) \right] \hat{u}_p. \quad (1.23)$$

Demonstração. Segue do Lema 1 e da Proposição 2. $\square$

Outra maneira de obter os coeficientes de Chebyshev da expansão das derivadas é através da relação de recorrência de três termos. De (1.11), obtemos para o caso da derivada de primeira ordem

$$2m\hat{u}_m = c_{m-1}\hat{u}_{m-1}^{(1)} - \hat{u}_{m+1}^{(1)}, \quad \forall m \geq 1, \quad (1.24)$$

fazendo a mudança de variáveis $k = m - 1$ em (1.24) e reescrevendo em função de m , obtemos

$$c_m\hat{u}_m^{(1)} = 2(m+1)\hat{u}_{m+1} + \hat{u}_{m+2}^{(1)}, \quad \forall m \geq 0, \quad (1.25)$$

o que produz (1.16). A generalização de (1.24) que pode ser encontrada em (CANUTO *et al.*, 2006)

$$c_m\hat{u}_m^{(q)} = 2(m+1)\hat{u}_{m+1}^{(q-1)} + \hat{u}_{m+2}^{(q)}, \quad \forall m \geq 0. \quad (1.26)$$

Definição 2. A matriz diferencial de ordem p denotada por D_x^p ou simplesmente por D^p no caso unidimensional é a matriz tal que

$$\hat{u}^{(p)} = D_x^p * \hat{u}, \quad (1.27)$$

onde $\hat{u}^{(p)} = (\hat{u}_0^{(p)}, \dots, \hat{u}_{m-1}^{(p)})^t$ é o vetor dos coeficientes de Chebyshev da derivada de ordem p e $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1})^t$ é o vetor dos coeficientes de Chebyshev de uma expansão truncada de uma função u de comprimento m .

Tudo o que foi dito sobre método espectral para uma função de uma variável pode ser estendido de maneira natural para funções de duas ou mais variáveis reais. No caso de funções de duas variáveis, por exemplo, podemos considerar a base formada pelo produto dos polinômios de Chebyshev, ou seja, $\{T_m(x) \cdot T_n(y)\}$, tal base, também satisfaz a seguinte relação de ortogonalidade

$$\begin{aligned} \langle T_{m_1}(x)T_{n_1}(y), T_{m_2}(x)T_{n_2}(y) \rangle_{\omega} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{m_1}(x)T_{n_1}(y)T_{m_2}(x)T_{n_2}(y) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dx dy \\ &= \frac{c_{m_1}\pi}{2} \delta_{m_1 m_2} \frac{c_{n_1}\pi}{2} \delta_{n_1 n_2}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

onde $\delta_{mn} = 1$ se $m = n$ e $\delta_{mn} = 0$ caso contrário.

A expansão de Chebyshev de uma função $u \in L_{\omega}^2([-1, 1] \times [-1, 1])$ é

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_{(m,n)} T_m(x) T_n(y), \quad (1.29)$$

onde

$$\hat{u}_m = \frac{2}{\pi c_m} \frac{2}{\pi c_n} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u(x) T_m(x) T_n(y) \omega(x) \omega(y) dx dy, \quad (1.30)$$

$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\omega(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ são funções pesos e c_m foi definido em (1.7). No que segue apresentamos para exemplificar e fixar a notação a expansão de Chebyshev de duas derivadas parciais de segunda ordem de uma função duas variáveis que pode ser encontrada em (DANG-VU; DELCARTE, 1993)

$$u_{xx}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_{(m,n)}^{(2)_x} T_m(x) T_n(y), \quad (1.31)$$

onde

$$\hat{u}_{(m,n)}^{(2)_x} = \frac{1}{c_m} \sum_{\substack{p=m+2 \\ (p+m) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - m^2) \hat{u}_{(p,n)} \quad (1.32)$$

e

$$u_{yy}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_{(m,n)}^{(2)_y} T_m(x) T_n(y), \quad (1.33)$$

onde

$$\hat{u}_{(m,n)}^{(2)_y} = \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{q=n+2 \\ (q+n) \text{ par}}}^{\infty} q(q^2 - n^2) \hat{u}_{(m,q)}. \quad (1.34)$$

1.2 Matriz Quase Inversa

Nesta seção definiremos e apresentaremos as principais propriedades da matriz quase-inversa. A aplicação desta técnica foi decisiva no nosso trabalho na etapa de encontrar uma aproximação numérica para uma solução de uma EDP descrita no método dos polinômios radiais. A matriz de diferenciação associada aos coeficientes de Chebyshev são mal condicionadas, o que dificulta a convergência do método de Newton.

Definição 3. A matriz D_x^{-p} de ordem p é chamada de matriz quase inversa associada à matriz diferencial D_x^p na direção espacial x , se $D_x^{-p} * D_x^p = I_x^{(p)}$ e $D_x^p * D_x^{-p} = I_x^{(-p)}$, onde $*$ denota o produto usual de matrizes, $I_x^{(p)}$ denota a matriz identidade com as p primeiras linhas nulas e $I_x^{(-p)}$ denota a matriz identidade com as p últimas linhas nulas.

O índice x da matriz quase inversa será omitido quando estivermos nos referindo ao caso unidimensional, além disso enfatizamos os seguintes fatos em relação a definição 3.

Observação 1. Seja D_x^{-p} a matriz quase inversa associada à matriz diferencial D_x^p , então:

- (i) D_x^{-p} não é a inversa da matriz D_x^p no sentido usual porque D_x^p é uma matriz singular;
- (ii) Uma condição necessária para a definição da quase inversa é que a matriz D_x^{-p} tenha as p primeiras linhas e as p últimas colunas nulas.

A próxima proposição lista as principais propriedades da matriz quase inversa.

Proposição 3. A estrutura dos polinômios da base de Chebyshev é traduzida naturalmente para a representação quase inversa de tal modo que existe uma estrutura bem definida entre operadores de diferentes ordens, ou seja,

- (i) $D_x^2 = D_x^1 * D_x^1$;
- (ii) $D_x^{-p} = I_x^{(p)} * (D_x^{-1})^p * I_x^{(-p)}$;
- (iii) $D_x^{-p} * D_x^q \equiv I_x^{(p)} * D_x^{-p+q}$.

Demonstração. Consulte (JULIEN; WATSON, 2009). □

No que segue explicitaremos as expressões dos elementos não nulos das matrizes quase inversa de ordem um, dois e quatro que serão utilizadas no nosso trabalho. Observe que para propósitos meramente numéricos poderíamos simplesmente utilizar o item (ii) da Proposição 3.

1.2.1 Matriz Quase Inversa de Ordem 1

Dividindo ambos os lados de (1.24) por m , obtemos

$$\hat{u}_m = \frac{c_{m-1}}{2m} \hat{u}_{m-1}^{(1)} - \frac{1}{2m} \hat{u}_{m+1}^{(1)} \quad \forall m \geq 1 \quad (1.35)$$

e considerando $\hat{u}^{(1)} = (\hat{u}_0^{(1)}, \dots, \hat{u}_{M-1}^{(1)})^t$ o vetor dos coeficientes de Chebyshev da derivada de ordem um e $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{M-1})^t$ o vetor dos coeficientes de Chebyshev de uma projeção finita de comprimento M , temos a seguinte relação matricial

$$\hat{u} = D_x^{-1} * \hat{u}^{(1)}, \quad (1.36)$$

que é a relação inversa de (1.27) da Definição 2 para o caso $p = 1$ e motiva a seguinte definição.

Definição 4. A matriz quase inversa $D^{-1} = (d_{i,j})$ é uma matriz tridiagonal dada por

$$\begin{cases} d_{m,m-1} = \frac{c_{m-1}}{2m}, \\ d_{m,m+1} = -\frac{e_{m+2}}{2m}, \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq m \leq M, \quad (1.37)$$

onde $e_m = 1$ para $m \leq M$ e $e_m = 0$ para $m > M$. Os demais elementos da matriz são nulos.

1.2.2 Matriz Quase Inversa de Ordem 2

Fazendo a mudança de variáveis $k = m + 2$ em (1.26) para $q = 2$ e reescrevendo em função de m , obtemos

$$c_{m-2} \hat{u}_{m-2}^{(2)} - \hat{u}_m^{(2)} = 2(m-1) \hat{u}_{m-1}^{(1)}, \quad \forall m \geq 2, \quad (1.38)$$

e substituindo (1.26) em (1.35), temos

$$c_{m-2} \hat{u}_{m-2}^{(2)} - \hat{u}_m^{(2)} = 2(m-1) \left[\frac{2m}{c_{m-1}} \hat{u}_m + \frac{1}{c_{m-1}} \hat{u}_{m+1}^{(1)} \right] \quad \forall m \geq 2. \quad (1.39)$$

Como $c_{m-1} = 1$ para $m \geq 2$ segue que

$$c_{m-2} \hat{u}_{m-2}^{(2)} - \hat{u}_m^{(2)} - 2(m-1) \hat{u}_{m+1}^{(1)} = 4m(m-1) \hat{u}_m, \quad \forall m \geq 2. \quad (1.40)$$

Agora, substituindo (1.26) em (1.40), obtemos

$$c_{m-2} \hat{u}_{m-2}^{(2)} - \hat{u}_m^{(2)} - 2(m-1) \left[\frac{c_m}{2(m+1)} \hat{u}_m^{(2)} - \frac{1}{2(m+1)} \hat{u}_{m+2}^{(2)} \right] = 4m(m-1) \hat{u}_m \quad (1.41)$$

para todo $m \geq 2$. Agrupando os termos semelhantes e dividindo ambos os lados de (1.41) por

$$\frac{c_{m-2}}{4m(m-1)} \hat{u}_{m-2}^{(2)} - \frac{2m}{(m+1)4m(m-1)} \hat{u}_m^{(2)} + \frac{(m-1)}{(m+1)4m(m-1)} \hat{u}_{m+2}^{(2)} = \hat{u}_m \quad (1.42)$$

para todo $m \geq 2$ e considerando $\hat{u}^{(1)} = (\hat{u}_0^{(1)}, \dots, \hat{u}_{M-1}^{(1)})^t$ o vetor dos coeficientes de Chebyshev da derivada de ordem 1 e $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{M-1})^t$ o vetor dos coeficientes de Chebyshev de uma projeção finita de comprimento M , temos a seguinte relação matricial

$$\hat{u} = D_x^{-2} * \hat{u}^{(2)}, \quad (1.43)$$

que é a relação inversa de (1.27) da Definição 2 para o caso $p = 2$ e motiva a seguinte definição.

Definição 5. A matriz quase inversa $D^{-2} = (d_{i,j})$ é uma matriz pentadiagonal dada por

$$\begin{cases} d_{m,m-2} = \frac{c_{m-2}}{4m(m-1)}, \\ d_{m,m} = -\frac{e_{m+2}}{2(m^2-1)}, \quad \text{para } 2 \leq m \leq M, \\ d_{m,m+2} = \frac{e_{m+4}}{4m(m+1)}, \end{cases} \quad (1.44)$$

onde $e_m = 1$ para $m \leq M$ e $e_m = 0$ para $m > M$. Os demais elementos da matriz são nulos.

Observamos que embora a Definição 5 esteja por exemplo em (DANG-VU; DELCARTE, 1993) o entendimento do procedimento descrito nas Subseções 1.2.1 e 1.2.2 é importante para explicitar os termos não nulos das matrizes quase-inversa de ordem superior a dois que não encontramos na literatura.

1.2.3 Matriz Quase Inversa de Ordem 4

Utilizando a relação de recorrência de três termos generalizada (1.26) e procedimento análogo ao descrito nas subseções 1.2.1 e 1.2.2, obtemos a expressão dos termos não nulos da matriz quase inversa de ordem quatro que é apresentada na próxima definição.

Definição 6. A matriz quase inversa $D^{-4} = (d_{i,j})$ é uma matriz nonadiagonal dada por

$$\begin{cases} d_{m,m-4} = \frac{c_{m-4}}{16(m-3)(m-2)(m-1)m}, \\ d_{m,m-2} = \frac{-1}{4(m-3)(m-1)m(m+1)} e_{m+2}, \\ d_{m,m} = \frac{3}{8(m-2)(m-1)(m+1)(m+2)} e_{m+4}, \quad \text{para } 4 \leq m \leq M, \\ d_{m,m+2} = \frac{-1}{4(m-1)m(m+1)(m+3)} e_{m+6}, \\ d_{m,m+4} = \frac{1}{16m(m+1)(m+2)(m+3)} e_{m+8}, \end{cases} \quad (1.45)$$

onde $e_m = 1$ para $m \leq M$ e $e_m = 0$ para $m > M$. Os demais elementos da matriz são nulos.

1.3 Produto de Kronecker

Nesta seção introduziremos o produto de Kronecker de matrizes e apresentaremos as suas principais propriedades que são encontradas em (LAUB, 1948). O produto de Kronecker de matrizes é utilizado, por exemplo, no método da colocação espectral para discretizar os operadores diferenciais em problemas multi-dimensionais e constitui uma ferramenta essencial no nosso trabalho.

Definição 7. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ matrizes reais. O produto de Kronecker das matrizes A e B indicado por $A \otimes B$ é a matriz

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}. \quad (1.46)$$

A mesma definição continua válida se A e B forem matrizes complexas.

A próxima proposição relaciona o produto usual de matrizes com o produto de Kronecker.

Proposição 4. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times s}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $D \in \mathbb{R}^{s \times t}$ matrizes reais. Então

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \in \mathbb{R}^{mr \times pt}. \quad (1.47)$$

Demonstração. Da definição 7 segue que

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(C \otimes D) &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1p}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & \cdots & c_{np}D \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}c_{k1}BD & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}c_{kp}BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}c_{k1}BD & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}c_{kp}BD \end{bmatrix} \\ &= AC \otimes BD. \end{aligned} \quad (1.48)$$

□

Uma consequência imediata da Proposição 4 é o seguinte corolário.

Corolário 4. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ matrizes reais não singulares, então

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. \quad (1.49)$$

Demonstração. Da Proposição 4 temos

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I \otimes I = I = I \otimes I = (A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B),$$

donde segue o resultado. $\square$

A próxima proposição mostra como utilizar o produto de Kronecker para discretizar o operador diferencial. Consideraremos apenas o operador diferencial de segunda ordem nos casos unidimensional e bidimensional.

Proposição 5. Seja u uma função de classe C^2 de uma ou duas variáveis. Se $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1})^t$, $\hat{u}^{(1)} = (\hat{u}_0^{(1)}, \dots, \hat{u}_{m-1}^{(1)})^t$ e $\hat{u}^{(2)} = (\hat{u}_0^{(2)}, \dots, \hat{u}_{m-1}^{(2)})^t$ são vetores de projeções finitas dos coeficientes da expansão de Chebyshev de u , u_x e u_{xx} no caso unidimensional (1D) e $\hat{u}$ é o vetor coluna formado pelas linhas da matriz $(\hat{u}_{i,j})_{i,j=0}^{m-1,n-1}$ dos coeficientes de Chebyshev de u no caso bidimensional (2D), então temos as seguintes discretizações na linguagem matricial:

- (i) 1D $u_{xx}(x) \rightarrow D_x^2 * \hat{u}$;
- (ii) 2D $u_{xx}(x,y) \rightarrow (D_x^2 \otimes I_y) * \hat{u}$;
- (iii) 2D $u_{xy}(x,y) \rightarrow (D_x^1 \otimes D_y^1) * \hat{u}$;
- (iv) 2D $u_{yy}(x,y) \rightarrow (I_x \otimes D_y^2) * \hat{u}$;

onde $*$ denota o produto usual de matrizes.

Demonstração. Segue da Definição 2. $\square$

1.4 Continuação Rigorosa Para Equilíbrio de EDPs

Nesta seção apresentaremos a ideia básica do método de continuação rigorosa para obter soluções de equilíbrio de equações diferenciais. O método é dividido basicamente em quatro etapas.

- **Primeira Etapa:** Determinamos f de modo que $u_t = 0 \Leftrightarrow f(x, \lambda) = 0$.

Nesta etapa consideramos uma equação diferencial parcial dependente de um parâmetro

$$u_t = E(u, \lambda), \quad \text{com } \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.50)$$

e supomos que $E(\cdot, \lambda)$ seja um operador densamente definido em um espaço de Hilbert H , explicitamente dado por

$$u_t = L(u, \lambda) + \sum_{n=2}^q \xi_n u^n, \quad (1.51)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ é um parâmetro, $L = L(\cdot, \lambda) : D(L) \subset H \longrightarrow H$, $\xi_n = \xi_n(\lambda)$ são os coeficientes do polinômio da não linearidade de grau q e H tem uma base ortogonal $\psi_{k \in \mathbb{Z}^d}$ que é independente do parâmetro. Utilizamos o mesmo procedimento descrito no método espectral, supomos que

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \psi_k \quad (1.52)$$

e substituímos u na equação (1.51) obtendo um problema da forma

$$f(x, \lambda) = 0, \quad (1.53)$$

onde $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ e $f : X \longrightarrow V$ é um operador não linear entre espaços de Banach. Daí encontrar uma solução de equilíbrio de (1.51) é equivalente a encontrar os coeficientes da expansão $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ que satisfazem (1.53).

- **Segunda Etapa:** Utilizamos o computador para obter uma solução aproximada $\bar{x}$ do problema (1.53).
- **Terceira Etapa:** Definimos um operador dependente de um parâmetro $T_\lambda : X \longrightarrow X$ de modo que o problema de encontrar uma solução de (1.53) seja equivalente a encontrar um ponto fixo do operador T_λ . O operador é definido em torno da aproximação numérica $\bar{x}$.
- **Quarta Etapa:** Utilizamos a abordagem dos polinômios radiais para encontrar uma bola B fechada centrada em $\bar{x}$ que contenha uma solução exata de (1.53), isto é feito verificando que o operador $T : B \longrightarrow B$ é uma contração e aplicando o Teorema do ponto Fixo de Banach que é equivalente ao Corolário 5 escrito na linguagem dos polinômios radiais. As hipóteses do Corolário 5 são verificadas utilizando aritmética de intervalo o que garante o rigor do método.

Um dos métodos mais eficientes para calcular curvas de soluções de uma família de funções contínuas parametrizadas dependentes de um parâmetro como em (1.53) é utilizar técnicas de continuação de caminho. Neste trabalho utilizamos o clássico algoritmo previsor-corretor de (KELLER, 1987). O método é inicializado tomando x_0 e λ_0 tais que $f(x_0, \lambda_0) \approx 0$, em seguida aplicamos os seguintes passos:

- **Passo Previsor:** Calculamos $\dot{x}_0$ o vetor tangente à curva $f(x, \lambda) = 0$ no ponto (x_0, λ_0) . Consideramos $\lambda_1 = \lambda_0 + h$ e $\tilde{x}_1 = x_0 + h\dot{x}_0$, onde h é o tamanho do passo.
- **Passo Corretor:** Aplicamos o método de Newton em $(\tilde{x}_1, \lambda_1)$ e obtemos (x_1, λ_1) tal que $f(x_1, \lambda_1) \approx 0$.

Repetimos o procedimento para (x_1, λ_1) . Vale observar que em cada etapa do método previsor diminuimos ou aumentamos o tamanho do passo h de acordo com a ordem de convergência do método de Newton no passo corretor, ou seja, se em uma etapa o método de Newton demorar

a convergir diminuimos o tamanho do passo h e aplicamos Newton novamente. O método de continuação é ilustrado na seguinte figura, onde S denota a curva de solução de $f(x, \lambda) = 0$.

Figura 1 – Algoritmo Previsor-Corretor

Em cada etapa do método corretor bem sucedida, calculamos todos os polinômios radiais e checamos a existência de um raio que torne simultaneamente todos os polinômios radiais negativos, se tal raio é encontrado temos uma prova assistida pelo computador de existência e unicidade de solução de equilíbrio para a EDP e prosseguimos o método da continuação, se o raio não é encontrado, inicialmente aumentamos os valores dos parâmetros computacionais da aproximação e aplicamos o método novamente, se o raio é obtido prosseguimos o método, caso contrário encerramos o método.

SOLUÇÕES DE EQUÍLBRIO PARA EQUAÇÕES UNIDIMENSIONAIS

Neste capítulo descreveremos o método da continuação rigorosa e dos polinômios radiais da Seção 1.4 e utilizaremos o método para encontrar soluções de equilíbrio para a equação de Allen-Cahn e Swift-Hohenberg e obter uma prova rigorosa de existência e unicidade locais para cada valor do parâmetro destas equações.

2.1 Continuação Rigorosa e Polinômios Radiais

O método da continuação rigorosa tem dois aspectos essenciais a parte da continuação de soluções que é baseada no clássico algoritmo de continuação previsor-corretor (KELLER, 1987) e a parte rigorosa da solução que é baseada na noção dos polinômios radiais (GAMEIRO; LESSARD, 2010), cuja construção é a combinação das estimativas analíticas apresentadas no Apêndice A com uma versão computacional do Teorema do Ponto Fixo de Banach aplicado em subconjuntos de X^s que é definido por

$$X^s = \{x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}; x_k \in \mathbb{R}; \|x\|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{\omega_k^s |x_k|\} < \infty\}, \quad (2.1)$$

onde $s \geq 1$ e

$$\omega_k^s := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ |k|^s, & \text{se } k \neq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

que consiste das sequências cujas caudas decaem algebricamente de acordo com a taxa s . Para aplicar o teorema o seguinte lema é fundamental.

Lema 2. O espaço $X^s = \{x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}; x_k \in \mathbb{R}; \|x\|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{\omega_k^s |x_k|\} < \infty\}$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja ℓ^∞ o espaço das sequências limitadas $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ com a norma

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |x_k|. \quad (2.3)$$

Como $\omega_k^s \geq 1$, nós temos $\|x\|_\infty \leq \|x\|_s$ e consequentemente $X^s \subset \ell^\infty$, donde concluímos que X^s é um subespaço vetorial. Considerando uma sequência $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X^s , nós definimos uma nova sequência $\{\bar{x}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por

$$\bar{x}^n := \{\omega_k^s x_k^n\}_{k \in \mathbb{Z}^d}. \quad (2.4)$$

Do fato de $x^n \in X^s$ implica que $\bar{x}^n \in \ell^\infty$. Como $\{\bar{x}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X^s , dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que para todo $m, n \geq N$, nós temos $\|x^m - x^n\|_s < \varepsilon$, então

$$\|\bar{x}^m - \bar{x}^n\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k^s |x_k^m - x_k^n| = \|x^m - x^n\|_s < \varepsilon. \quad (2.5)$$

Logo, $\{\bar{x}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em ℓ^∞ , portanto convergente, pois ℓ^∞ é um espaço completo. Seja $\bar{x} \in \ell^\infty$ o limite, ou seja, $\bar{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}^n$, onde o limite é na norma ℓ^∞ . Considerando $x := \{\bar{x}_k / \omega_k^s\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, temos $\|x\|_s = \|\bar{x}\|_\infty < \infty$, e assim $x \in X^s$. Além disso,

$$\|x^n - x\|_s := \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \omega_k^s |x_k^n - x_k| = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |\bar{x}_k^n - \bar{x}_k| = \|\bar{x}^n - \bar{x}\|_\infty \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Assim, $x^n \rightarrow x$ na norma de X^s e segue que X^s é completo. □

A filosofia do método da continuação rigorosa consiste inicialmente em encontrar uma aproximação numérica para um zero de (1.53), posteriormente utilizar tal aproximação para transformar (1.53) em um problema de ponto fixo equivalente e finalmente usar o problema de ponto fixo para provar a existência e unicidade locais de um equilíbrio em uma vizinhança da aproximação inicialmente obtida. Para obter a aproximação numérica é necessário reduzir o problema de dimensão infinita (1.53) num problema de dimensão finita. Isto é feito via projeção de Galerkin.

Dado $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, nós denotamos sua parte finita de tamanho m e sua correspondente parte infinita de tamanho m respectivamente por

$$x_{F_m} := \{x_k\}_{k \in F_m} \quad \text{e} \quad x_{I_m} := \{x_k\}_{k \in I_m}, \quad (2.7)$$

onde $F_m = \{k \in \mathbb{Z}; |k| < m\}$ e $I_m = \{k \in \mathbb{Z}; |k| \geq m\}$. Uma projeção de Galerkin de f em (1.53) de dimensão m dada por $f^{(m)} := \{f_k^{(m)}\}_{k \in F_m}$, onde $f_k^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\begin{aligned} f_k^{(m)}(x_{F_m}, \lambda) &:= f_k((x_{F_m}, 0_{I_m}), \lambda) \\ &= \sum_{n=0}^p \zeta_n x_k^{(n)} + \sum_{n=2}^q \xi_n \left(\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ k_j \in F_m}} x_{k_1} \cdots x_{k_n} \right) \quad \forall k \in F_m, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde supomos que a parte linear da equação diferencial tem ordem p e que a igualdade $\zeta_n = \lambda$ ou $\xi_n = \lambda$ é válida para pelo menos um valor do índice n . Nesta etapa fixamos o valor do parâmetro $\lambda = \lambda_0$ e encontramos numericamente o vetor $\bar{x}_{F_m}$ tal que $f^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$. Para encontrar a aproximação numérica utilizamos o método de Newton no Matlab e pelo fato da matriz $Df^{(m)}(x_{F_m}^0, \lambda_0)$ para um chute inicial $x_{F_m}^0$ ser mal condicionada adotamos uma adaptação da estratégia apresentada em (LIU; YE; WANG, 2011) para encontrar solução numérica de EDP's lineares usando o método espectral de Chebyshev combinado com a técnica quase inversa. Para isso escrevemos (2.8) na forma matricial,

$$f^{(m)}(a_{F_m}, \lambda_0) = \left(\sum_{n=0}^p \zeta_n D^n \right) * a + \sum_{n=2}^q \xi_n a^n, \quad (2.9)$$

onde D^0 denota a matriz identidade, D^n para $n \geq 1$ é a matriz diferencial definida na seção 1.1, o símbolo $*$ denota o produto usual de matrizes, $a = (a_0, \dots, a_{m-1})^t = (x_0, \dots, x_{m-1})^t$, $a^n = ((a * \dots * a)_0, \dots, (a * \dots * a)_{m-1})$ e

$$a_k^n = \underbrace{(a * \dots * a)_k}_{n \text{ vezes}} := \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ k_j \in F_m}} a_{k_1} \dots a_{k_n}. \quad (2.10)$$

Utilizando a relação

$$a_k := \begin{cases} \hat{u}_k, & \text{se } k = 0, \\ \frac{\hat{u}_k}{2}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

e $a_{-k} = a_k \forall k \geq 1$ ainda reescrevemos (2.8) como

$$\hat{f}^{(m)}(\hat{u}_{F_m}, \lambda_0) = \left(\sum_{n=0}^p \zeta_n D^n \right) * \hat{u} + \sum_{n=2}^q \xi_n \hat{u}^n, \quad (2.12)$$

onde $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1})^t$, $\hat{u}^n = (a_0^n, 2a_1^n, \dots, 2a_{m-1}^n)^t$, $a^n = (a_0^n, \dots, a_{m-1}^n)^t$. Posteriormente consideramos a matriz de transformação S que será explicitada nos problemas das seções 2.2 e 2.3 e expressa a relação entre os coeficientes de Chebyshev de uma função e os coeficientes de Galerkin (combinação linear dos coeficientes de Chebyshev)

$$\hat{u} = S * \tilde{u}, \quad (2.13)$$

onde $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1})^t$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{m-(p+1)}, 0, \dots, 0)^t$ e as últimas p componentes nulas é para que o produto anterior faça sentido já que S é uma matriz de ordem m . Reescrevemos (2.9) e consequentemente (2.8) como segue

$$\tilde{f}^{(m)}(\tilde{u}_{F_m}, \lambda_0) = \left(\sum_{n=0}^p \zeta_n D^n \right) * (S * \tilde{u}) + \sum_{n=2}^q \xi_n \hat{u}^n. \quad (2.14)$$

Finalmente multiplicamos ambos os lados de (2.14) pela matriz quase inversa de maior ordem, ou seja,

$$D^{-p} * \tilde{f}^{(m)}(\tilde{u}_{F_m}, \lambda_0) = D^{-p} * \left[\left(\sum_{n=0}^p \zeta_n D^n \right) * (S * \tilde{u}) + \sum_{n=2}^q \xi_n \tilde{u}^n \right] \quad (2.15)$$

e encontramos $\tilde{\tilde{u}}_{F_m}$ tal que $D^{-p} * \tilde{f}^{(m)}(\tilde{\tilde{u}}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$ com maior facilidade haja vista que pelas propriedades da matriz quase inversa a última função obtida na linguagem matricial é praticamente diagonal. Assim, retornando à função original encontramos $\bar{x}_{F_m}$ tal que $f^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$. Definimos

$$\bar{x} := (\bar{x}_{F_m}, 0_{I_m}) \in X^s \quad (2.16)$$

e assumimos que $f(\bar{x}, \lambda_0) \approx 0$ e utilizamos $\bar{x}$ para definir um problema de ponto fixo equivalente para (1.53). Inicialmente supomos que a matriz Jacobiana $Df^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)$ é não singular e tomamos a aproximação $A_m \approx [Df^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)]^{-1}$. Definimos o operador A no espaço de sequências de modo que ele atue como uma aproximação para a inversa de $Df(\bar{x}, \lambda_0)$. Para $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, ele é definido componente a componente por

$$[A(x)]_k := \begin{cases} [A_m(x_{F_m})]_k, & \text{se } k \in F_m, \\ \zeta_p^{-1} [D^{-p}x]_k, & \text{se } k \in F_M - F_m, \\ 0, & \text{se } k \notin F_M, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde D^{-p} é a matriz quase inversa de ordem p que corresponde a ordem da maior derivada. Utilizando (2.17) nós definimos

$$T(x) = T_{\lambda_0}(x) := x - Af(x, \lambda_0). \quad (2.18)$$

Nós queremos encontrar um único ponto fixo de T no interior da bola fechada $B(\bar{x}, r)$ em X^s . A bola fechada centrada na origem e raio r é dada por

$$B(r) := B(0, r) = \left[-\frac{r}{\omega_k^s}, \frac{r}{\omega_k^s} \right]. \quad (2.19)$$

A bola fechada centrada em $\bar{x}$ de raio r é

$$B(\bar{x}, r) = \bar{x} + B(r). \quad (2.20)$$

Para mostrar que T é uma contração nós precisamos das limitações Y_k e Z_k para todo $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$|[T(\bar{x}) - \bar{x}]_k| \leq Y_k \quad (2.21)$$

e

$$\sup_{b, c \in B(0, r)} |[DT(\bar{x} + b)c]_k| \leq Z_k. \quad (2.22)$$

O próximo lema pode ser encontrado em (GAMEIRO; LESSARD, 2010) é fundamental para o nosso propósito de obter existência e unicidade de equilíbrio e é válido para o caso d dimensional.

Lema 3. Fixado o valor do parâmetro $\lambda = \lambda_0$. Se existir $r > 0$ tal que

$$\|Y + Z\|_s < r, \quad (2.23)$$

onde $Y := \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ e $Z := \{Z_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ satisfazem (2.21) e (2.22) respectivamente, então existe um único $\tilde{x} \in B(\bar{x}, r)$ tal que $f(\tilde{x}, \lambda_0) = 0$. Além disso, $\tilde{x}$ está no interior da bola $B(\bar{x}, r)$.

Demonstração. Dados $k \in \mathbb{Z}^d$ e $x, y \in B(\bar{x}, r)$ temos pelo Teorema do Valor Médio

$$T_k(x) - T_k(y) = DT_k(z)(x - y) \quad (2.24)$$

para algum $z \in \{tx + (1 - t)y; t \in [0, 1]\} \subset B(\bar{x}, r)$. Logo,

$$|T_k(x) - T_k(y)| = \left| DT_k(z) \frac{r(x - y)}{\|x - y\|_s} \right| \frac{1}{r} \|x - y\|_s \leq \frac{Z_k}{r} \|x - y\|_s \quad (2.25)$$

e temos

$$|T_k(x) - \bar{x}_k| \leq |T_k(x) - T_k(\bar{x})| + |T_k(\bar{x}) - \bar{x}_k| \leq Y_k + Z_k. \quad (2.26)$$

Assim,

$$\|T(x) - \bar{x}\|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \{\omega_k^s |T_k(x) - \bar{x}_k|\} \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \{\omega_k^s |Y_k + Z_k|\} = \|Y + Z\|_s < r, \quad (2.27)$$

o que mostra que $T(x) \in B(\bar{x}, r)$ e segue que $T : B(\bar{x}, r) \rightarrow B(\bar{x}, r)$. De (2.25), temos

$$\|T(x) - T(y)\|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \{\omega_k^s |T_k(x) - T_k(y)|\} \leq \left(\frac{\|Z\|_s}{r} \right) \|x - y\|_s \quad (2.28)$$

e como $Y_k \geq 0$, segue que $\|Z\|_s \leq \|Y + Z\|_s < r$. Portanto, a constante de Lipschitz de T em $B(\bar{x}, r)$ é estimada por $(\|Z\|_s / r) < 1$, e T é uma aplicação contração. Como operador A^{-1} é invertível, os zeros de f correspondem a pontos fixos de T . A aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach resulta na existência de um único $\tilde{x} \in B(\bar{x}, r)$ tal que $T(\tilde{x}) = \tilde{x}$, ou equivalentemente que $f(\tilde{x}, \lambda_0) = 0$ e de (2.27) segue que $\tilde{x}$ é um ponto interior da $B(\bar{x}, r)$. $\square$

Para calcular os limites superiores Y_k e Z_k nós inicialmente escolhemos $M \in \mathbb{N}^d$ tal que $M \geq q(m - 1) + 1$, onde a desigualdade é componente a componente para o caso d dimensional, ou seja,

$$M_i \geq q(m_i - 1) + 1 \quad (2.29)$$

para todo $1 \leq i \leq d$, onde q é o grau do polinômio da não linearidade em (1.51). De (2.18) nós temos $T(\bar{x}) - \bar{x} = Af(\bar{x}, \lambda_0)$ e consequentemente $|[T(\bar{x}) - \bar{x}]_k| = |[Af(\bar{x}, \lambda_0)]_k|$. Como $\bar{x}_k = 0 \forall k \notin F_m$, conseguimos obter $f_k(\bar{x}, \lambda_0) = 0$ para cada $k \notin F_m$. Assim, definimos $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ por

$$Y_k := \begin{cases} |[A_m(f^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0))]_k|, & \text{se } k \in F_m, \\ |[\zeta_p^{-1} D^{-p} f(\bar{x}, \lambda_0)]_k|, & \text{se } k \in F_M - F_m, \\ 0, & \text{se } k \notin F_M. \end{cases} \quad (2.30)$$

A melhor estimativa para definir os limites superiores Z_k , nós mostramos explicitamente como calculá-las nas seções 2.2 e 2.3 para o caso de uma não-linearidade cúbica. Assim, como ocorreu para os limites superiores Y_k , nós podemos encontrar um limite uniforme para todo $k \notin F_M$ daí necessitamos calcular Z_k apenas para $k \in F_M$. Observamos que o cálculo do limite uniforme é inspirado no Lema 3.4 de (GAMEIRO; LESSARD, 2010), mas o cálculo para o caso de solução não periódica que desenvolvemos neste trabalho é bem mais complicado de ser generalizado, de qualquer forma mostramos explicitamente como obter o limitante uniforme nas seções 2.2 e 2.3. Nesta etapa do método pretendemos provar o seguinte resultado.

Lema 4. Se $k \notin F_M$ então existe um limite uniforme superior $\tilde{Z}_M$, independente de k tal que

$$\sup_{b,c \in B(r)} |[DT(\bar{x}+b)c]_k| \leq \tilde{Z}_M. \quad (2.31)$$

Demonstração. Veja nas seções 2.2 e 2.3. □

Usando o Lema 4 nós definimos $\{Z_k\}_{k \notin F_M}$ por

$$Z_k := \frac{r}{\omega_k^s} \tilde{Z}_M, \quad (2.32)$$

onde $\tilde{Z}_M$ é um polinômio em r independente de k . Para definir $\{Z_k\}_{k \in F_M}$, que também são polinômios em r , nós precisamos calcular os limites superiores para $|[DT(\bar{x}+b)c]_k|$ o que é feito nas seções 2.2 e 2.3. Para verificar a existência de um raio r satisfazendo as hipóteses do Lema 3 nós utilizamos os polinômios radiais definidos em (GAMEIRO; LESSARD, 2010) como segue

Definição 8. (Polinômios Radiais)

(i) se $k \in F_M$ definimos

$$p_k(r) := Y_k + Z_k - \frac{r}{\omega_k^s}, \quad (2.33)$$

os polinômios radiais finito.

(ii) se $k \notin F_M$ definimos

$$\tilde{p}_M(r) := \tilde{Z}_M - 1, \quad (2.34)$$

o polinômio radial da cauda.

O próximo resultado é consequência dos lemas 3 e 4.

Corolário 5. Suponha que a condição (2.31) do Lema 4 seja satisfeita e considere os polinômios radiais $\{p_k\}_{k \in F_M}$ e $\tilde{p}_M$ dados por (2.33) e (2.34), respectivamente. Se existir $r > 0$ tal que $p_k(r) < 0$ para todo $k \in F_M$ e $\tilde{p}_M(r) < 0$, então existe um único $\tilde{x} \in B(\bar{x}, r)$ tal que $f(\tilde{x}, \lambda_0) = 0$. Além disso, $\tilde{x}$ é um ponto interior de $B(\bar{x}, r)$.

Demonstração. Para $k \in F_M$, a hipótese $p_k(r) < 0$ significa que

$$\omega_k^s |Y_k + Z_k| < r. \quad (2.35)$$

Para $k \notin F_M$, temos $Y_k = 0$ e $\tilde{p}_M(r) < 0$, donde segue que

$$\omega_k^s |Y_k + Z_k| = \omega_k^s \tilde{Z}_M < r. \quad (2.36)$$

Assim temos,

$$\|Y + Z\|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} \{\omega_k^s |Y_k + Z_k|\} = \max\{\max_{k \in F_M} \{\omega_k^s |Y_k + Z_k|\}, r \tilde{Z}_m\} \quad (2.37)$$

e o resultado segue do Lema 3. $\square$

No início desta seção mencionamos que o método da continuação rigorosa tem dois ingredientes essenciais o clássico algoritmo da continuação predictor-corretor e a construção dos polinômios radiais. Agora, que já sabemos construir os polinômios radiais finalizaremos esta seção lembrando o algoritmo da continuação e estabelecendo a relação deste com os polinômios radiais. O passo inicial do algoritmo predictor-corretor é obter uma aproximação de solução u_0 para o valor do parâmetro λ_0 dentro de uma tolerância prescrita, o passo predictor do algoritmo produz uma aproximação de equilíbrio $\tilde{u}_1$ próxima do valor do parâmetro λ_1 e o passo corretor, frequentemente baseado num operador tipo Newton, tem $\tilde{u}_1$ como entrada e produz novamente dentro de uma tolerância prescrita uma solução u_1 em λ_1 . Em cada passo do algoritmo de continuação, nós construímos os polinômios radiais definidos em (2.33) e (2.34) e checamos a existência de $r > 0$ tal que $p_k(r) < 0$ para todo $k \in F_M$ e $\tilde{p}_M(r) < 0$. Se num determinado passo da continuação obtemos sucesso, temos uma prova de existência e unicidade locais de uma verdadeira solução de equilíbrio para a EDP original (1.50) e passamos para o passo seguinte. Observamos que o cálculo das soluções e dos raios em cada passo do algoritmo são feitos usando métodos numéricos padrões somente o cálculo dos coeficientes dos polinômios radiais e das desigualdades polinomiais são feitos usando aritmética de intervalo. O procedimento descrito neste parágrafo produz uma prova assistida pelo computador de existência de soluções que é chamado de continuação rigorosa para equilíbrio de EDP's.

2.2 Problema de Dirichlet Para a Equação de Alen-Cahn

Nesta seção aplicaremos o método da continuação rigorosa para a equação de Alen-Cahn unidimensional

$$\begin{cases} v_t = \varepsilon^2 \Delta v + v - v^3 & \text{em } (0, 1), \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

onde $\varepsilon > 0$. A equação em (2.38) está intimamente relacionada com a equação de Cahn-Hilliard que foi introduzida em (CAHN; HILLIARD, 1958) como um modelo para descrever o processo de separação de fases em ligas de ferro que contém dois metais.

Neste trabalho estamos interessados em obter soluções de equilíbrio de (2.38). Assim, basta resolvermos o seguinte problema

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta v + v - v^3 = 0 & \text{em } (0, 1), \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

ou seja, encontrar soluções para o problema de valor de fronteira (PVF) com condições de Dirichlet.

Fazendo a mudança de variáveis $x = 2y - 1$, temos $y = \frac{x+1}{2}$ e reescrevendo a equação de Allen-Cahn com a mudança

$$v(y) = v\left(\frac{x+1}{2}\right) = u(x), \quad (2.40)$$

obtemos o seguinte problema que é equivalente ao PVF (2.39)

$$\begin{cases} 4\varepsilon^2 \Delta u + u - u^3 = 0 & \text{em } (-1, 1), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Agora multiplicando todos os termos da equação em (2.41) por $\lambda := \frac{1}{\varepsilon^2}$, obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} 4u_{xx} + \lambda u - \lambda u^3 = 0 & \text{em } (-1, 1), \\ u(-1) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.42)$$

que é equivalente ao problema (2.41).

Como $x \in [-1, 1]$ e buscamos uma solução não periódica convém expressarmos a solução do problema (2.42) em termos de uma base de Chebyshev $\{T_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, onde os polinômios $T_k(x)$ de Chebyshev são definidos em (1.5). Além disso, para que as condições de contorno sejam cumpridas pelos elementos da base convém considerarmos uma base onde cada elemento é uma combinação linear dos polinômios de Chebyshev $\{T_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, neste caso consideraremos a base $\{\Phi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, onde

$$\Phi_k(x) = T_k(x) - T_{k+2}(x), \quad (2.43)$$

pois de (1.5) segue que os polinômios de Chebyshev satisfazem $T_k(1) = 1$ e $T_k(-1) = (-1)^k$.

Agora, suponha que $u \in L^2_\omega([-1, 1])$ e

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k \Phi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k (T_k(x) - T_{k+2}(x)) = \tilde{u}_0 T_0(x) + \tilde{u}_1 T_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (\tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-2}) T_k(x), \quad (2.44)$$

o que define a relação entre os coeficientes de Chebyshev $\{\hat{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e os coeficientes de Galerkin $\{\tilde{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ da solução u como segue

$$\hat{u}_k := \begin{cases} \tilde{u}_k, & \text{se } k \in \{0, 1\}, \\ \tilde{u}_k - \tilde{u}_{k-2}, & \text{se } k \geq 2, \end{cases} \quad (2.45)$$

onde $\hat{u}_k$ é definido em (1.9).

No que segue trabalharemos com a expansão de Chebyshev (1.8) da função u , observando que da expressão (2.44) e da relação (2.45) segue que se os coeficientes de Chebyshev da função u estiverem determinados então a solução u estará determinada.

Começamos definindo os coeficientes

$$a_k := \begin{cases} \hat{u}_k, & \text{se } k = 0, \\ \frac{\hat{u}_k}{2}, & \text{se } k \geq 1. \end{cases} \quad (2.46)$$

Além disso, observe que da paridade da função cosseno, temos

$$T_{-k}(x) = \cos(-k\theta) = \cos(k\theta) = T_k(x) \quad \forall k \geq 1. \quad (2.47)$$

Definindo $c_{-k} = c_k \forall k \geq 1$, onde c_k é definido em (1.7) podemos estender os coeficientes a_k para $k \in \mathbb{Z}$ de modo natural definindo $a_{-k} = a_k \forall k \geq 1$.

De (2.46) podemos escrever

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x) = a_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x) = a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k T_k(x) \\ &= a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + a_k) T_k(x) = a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) \\ &= a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} T_{-k}(x) = a_0 \cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) + \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j T_j(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cos(k\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \left(\frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k 2 \frac{e^{ik\theta}}{2} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Logo, a expansão em série de Chebyshev do termo não linear da equação de Allen-Cahn é análoga à expansão de Fourier, ou seja,

$$\begin{aligned} (u(x))^3 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x) \right)^3 = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T_k(x) \right)^3 \\ &= \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} a_{k_1} T_{k_1}(x) \right) \left(\sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{k_2} T_{k_2}(x) \right) \left(\sum_{k_3 \in \mathbb{Z}} a_{k_3} T_{k_3}(x) \right) \\ &= \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} a_{k_1} e^{ik_1\theta} \right) \left(\sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{k_2} e^{ik_2\theta} \right) \left(\sum_{k_3 \in \mathbb{Z}} a_{k_3} e^{ik_3\theta} \right) \\ &= \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_3 \in \mathbb{Z}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} e^{ik_1\theta} e^{ik_2\theta} e^{ik_3\theta} = \sum_{k_i \in \mathbb{Z}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} e^{i(k_1+k_2+k_3)\theta} \\ &= \sum_{k_i \in \mathbb{Z}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} T_{k_1+k_2+k_3}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a * a * a)_k T_k(x), \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde

$$(a * a * a)_k := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}. \quad (2.50)$$

De (1.18) e (1.19) temos a expansão de Chebyshev de $u'' = u_{xx}$ que é a expressão do Laplaciano unidimensional, agora estenderemos a expansão para o conjunto $\mathbb{Z}$, assim como fizemos com a expansão de u e u^3 . De (1.19) e (2.46) temos

$$\hat{u}_k^{(2)} := \frac{1}{c_k} \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) \hat{u}_p = \frac{1}{c_k} \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) 2a_p = 2 \frac{1}{c_k} \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) a_p =: 2a_k^{(2)} \quad (2.51)$$

para $k \geq 1$. Assim definimos

$$a_k^{(2)} := \begin{cases} \hat{u}_k^{(2)}, & \text{se } k = 0, \\ \frac{\hat{u}_k^{(2)}}{2}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases} \quad (2.52)$$

e $a_{-k}^{(2)} = a_k^{(2)} \forall k \geq 1$.

Agora, substituindo (2.48), (2.49) e (1.18) na equação do PVF (2.42) e observando atentamente (2.51) e (2.52), obtemos

$$4 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(2)} T_k(x) \right) + \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T_k(x) - \lambda \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a * a * a)_k T_k(x) = 0 \quad (2.53)$$

e note que não precisamos nos preocupar com as condições de fronteira do PVF (2.42) neste momento, pois elas já estão implícitas na base definida em (2.43). Utilizando o produto interno definido em (1.6), obtemos

$$\left\langle 4 \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^{(2)} T_m(x) \right), T_k(x) \right\rangle_{\omega} = 4a_k^{(2)} \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega}, \quad (2.54)$$

$$\left\langle \lambda \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m T_m(x), T_k(x) \right\rangle_{\omega} = \lambda a_k \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega} \quad (2.55)$$

e

$$\left\langle \lambda \sum_{k_i \in \mathbb{Z}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} T_{k_1+k_2+k_3}(x), T_k(x) \right\rangle_{\omega} = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} \lambda a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega}. \quad (2.56)$$

Utilizando a linearidade do produto interno e o fato de $\langle 0, T_k(x) \rangle_{\omega} = 0$ de (2.53), (2.54), (2.55) e (2.56) obtemos

$$4a_k^{(2)} \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega} + \lambda a_k \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega} - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} \lambda a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega} = 0 \quad (2.57)$$

e simplificando temos

$$4a_k^{(2)} + \lambda a_k - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} \lambda a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} = 0. \quad (2.58)$$

Definimos o operador $f(a, \lambda) = (f_k(a, \lambda))_{k \in \mathbb{Z}}$, componente a componente por

$$f_k(a, \lambda) := 4a_k^{(2)} + \lambda a_k - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} \lambda a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3}. \quad (2.59)$$

De (2.58) e (2.59) segue que encontrar uma solução do PVF (2.42) é equivalente a encontrar uma solução de

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (2.60)$$

Dado $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, nós denotamos sua parte finita de tamanho m e sua correspondente parte infinita de tamanho m respectivamente por

$$x_{F_m} := \{x_k\}_{k \in F_m} \quad \text{e} \quad x_{I_m} := \{x_k\}_{k \in I_m}, \quad (2.61)$$

onde $F_m = \{k \in \mathbb{Z}; |k| < m\}$ e $I_m = \{k \in \mathbb{Z}; |k| \geq m\}$. Agora, consideremos uma projeção de Galerkin de (2.59) de dimensão m dada por $f^{(m)} := \{f_k^{(m)}\}_{k \in F_m}$, onde $f_k^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\begin{aligned} f_k^{(m)}(x_{F_m}, \lambda) &:= f_k((x_{F_m}, 0_{I_m}), \lambda) \\ &= 4x_k^{(2)} + \lambda x_k - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in F_m}} \lambda x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} \quad \forall k \in F_m. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Fixamos o valor do parâmetro $\lambda = \lambda_0$ e encontramos numericamente o vetor $\bar{x}_{F_m}$ tal que $f^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$. Para isso adotamos uma adaptação da estratégia apresentada em (LIU; YE; WANG, 2011), primeiramente escrevemos (2.62) na forma matricial

$$f^{(m)}(a_{F_m}, \lambda_0) = 4D^2 * a + \lambda_0 a - \lambda_0 a^3, \quad (2.63)$$

onde $a = (a_0, \dots, a_{m-1})^t = (x_0, \dots, x_{m-1})^t$, $a^3 = ((a * a * a)_0, \dots, (a * a * a)_{m-1})$ (com a notação estabelecida em (2.10)), D^2 é a matriz diferencial definida na Seção 1.1 e $*$ denota o produto usual de matrizes. Utilizando (2.46) e (2.52) segue que (2.63) ainda pode ser escrita em termos da base de Chebyshev, como

$$\hat{f}^{(m)}(\hat{u}_{F_m}, \lambda_0) = 4D^2 * \hat{u} + \lambda_0 \hat{u} - \lambda_0 \hat{u}^3 = (4D^2 + \lambda_0 I) \hat{u} - \lambda_0 \hat{u}^3, \quad (2.64)$$

onde $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1})^t$, $\hat{u}^3 = (a_0^3, 2a_1^3, \dots, 2a_{m-1}^3)^t$, onde $a^3 = (a_0^3, \dots, a_{m-1}^3)^t = ((a * a * a)_0, \dots, (a * a * a)_{m-1})^t$. A relação (2.45) pode ser escrita no caso finito em linguagem matricial como segue

$$\hat{u} = S * \tilde{u}, \quad (2.65)$$

onde $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1})^t$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{m-3}, 0, 0)^t$. Note que adicionamos as componentes $\tilde{u}_{m-2} = \tilde{u}_{m-1} = 0$, pois S é uma matriz de ordem m definida por

$$S = E^{(0)} - E^{(-2)}, \quad (2.66)$$

onde $E^{(k)} = (e_{ij}^k)$ é definida para $k \in \mathbb{Z}$ por

$$e_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j + k, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (2.67)$$

De (2.64) e (2.65) podemos rescrever (2.63) em termos da base de Galerkin definida em (2.43)

$$\tilde{f}^{(m)}(\tilde{u}_{F_m}, \lambda_0) = 4D^2 * (S * \tilde{u}) + \lambda_0(S * \tilde{u}) - \lambda_0 \hat{u}^3 = (4D^2 + \lambda_0 I) * S * \tilde{u} - \lambda_0 \hat{u}^3. \quad (2.68)$$

Para obter $\bar{x}_{F_m}$ tal que $\tilde{f}^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$, utilizamos o método de Newton no Matlab e pelo fato da matriz D^2 ser mal condicionada, utilizamos a matriz quase inversa D^{-2} associada com D^2 que é definida em (1.45), multiplicamos ambos os lados de (2.68) pela matriz D^{-2} e utilizando a definição 3, obtemos

$$\begin{aligned} D^{-2} * \tilde{f}^{(m)}(\tilde{u}_{F_m}, \lambda_0) &= D^{-2} * (4(D^2 + \lambda_0 I) * (S * \tilde{u}) - \lambda_0 \hat{u}^3) \\ &= (4 * I^{(2)} + \lambda_0 D^{-2}) * (S * \tilde{u}) - \lambda_0 D^{-2} * \hat{u}^3 \end{aligned} \quad (2.69)$$

e finalmente consideramos a função

$$\tilde{g}^{(m-2)}(\tilde{u}_{F_{m-2}}, \lambda_0) = A * \tilde{u} - \lambda_0 \hat{y}^3, \quad (2.70)$$

onde a matriz A é obtida da matriz $(4 * I^{(2)} + \lambda_0 D^{-2}) * S$ excluindo as suas duas primeiras linhas e as duas últimas colunas e $\hat{y}^3$ é obtido do produto $D^{-2} * \hat{u}^3$ onde eliminamos as duas primeiras linhas e as duas últimas colunas da matriz D^{-2} e as duas últimas componentes do vetor $\hat{u}^3$, antes de efetuar o produto. Também eliminamos as duas últimas componentes nulas do vetor $\tilde{u}$ para que o produto $A * \tilde{u}$ esteja bem definido.

Nesta etapa duas questões naturais surgem:

(i) encontrar uma raiz da função definida em (2.70) é equivalente a encontrar uma raiz para a função definida em (2.68)?

(ii) por que é mais fácil encontrar uma raiz (2.70) é menos dispendioso do que encontrar uma raiz de (2.68)?

Antes de respondermos a estas questões observamos que a dúvida (i) surge pelo fato da matriz D^{-2} ser singular, além disso observamos que a matriz $I^{(2)}$ que é uma matriz identidade com as duas primeiras linhas nulas é obtida tomando-se combinações lineares das linhas de D^2 (uma matriz triangular superior com diagonal principal e superior nulas). Esta ação de transformar

D^2 em $I^{(2)}$ é expressa através da matriz D^{-2} que é tridiagonal e com as duas primeiras linhas e as duas últimas colunas nulas. A estrutura praticamente diagonal de D^{-2} e diagonal de $I^{(2)}$ revela a razão do menor custo para encontrar a raiz de (2.70) em (ii). Ao eliminarmos as duas primeiras linhas e duas últimas colunas da matriz D^{-2} eliminamos a sua singularidade por isso temos a equivalência em (i), temos a liberdade de eliminar duas linhas neste caso porque as condições de fronteira já estão implícitas na base.

Agora, definimos

$$g(x, \lambda) := \begin{cases} h_k^{(m)}(x, \lambda), & \text{se } k \in F_m, \\ f_k(x, \lambda), & \text{se } k \notin F_m, \end{cases} \quad (2.71)$$

onde f_k foi definida em (2.59) e $h_k^{(m)}$ denota a componente k de $h^{(m)}$ que é definida a partir de $\tilde{g}^{(m-2)}$ pela seguinte composição

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{S^{-1}} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^{m-2} & \xrightarrow{\tilde{g}^{(m-2)}} & \mathbb{R}^{m-2} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{S} & \mathbb{R}^m \\ \hat{u}_{F_m} & \mapsto & \tilde{u}_{F_m} & \mapsto & \tilde{u}_{F_{m-2}} & \mapsto & \tilde{g}^{(m-2)}(\tilde{u}_{F_{m-2}}, \lambda_0) & \mapsto & \tilde{g}^{(m)}(\tilde{u}_{F_m}, \lambda_0) & \mapsto & \hat{h}^{(m)}(\hat{u}_{F_m}, \lambda_0) \end{array} \quad (2.72)$$

onde S^{-1} é a inversa da matriz S definida em (2.66), ϕ representa o procedimento de eliminar as duas últimas coordenadas nulas do vetor, $\tilde{g}^{(m-2)}$ é definida em (2.70), ψ representa o procedimento de acrescentar as duas últimas coordenadas nulas no vetor e finalmente para obter $h^{(m)}(a_{F_m}, \lambda_0)$ em (2.71) basta utilizar a relação (2.46) no início e no final da sequência em (2.72).

Da definição da g e das considerações anteriores sobre a f segue que resolver o PVF (2.42) é equivalente a resolver a equação

$$g(x, \lambda) = 0. \quad (2.73)$$

Nós encontramos numericamente $\bar{x}_{F_m}$ tal que $h^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$ e definimos

$$\bar{x} := (\bar{x}_{F_m}, 0_{I_m}) \in X^s = \{x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}} : \|x\|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{\omega_k^s |x_k|\} < \infty\}, \quad (2.74)$$

onde $s \geq 1$ e

$$\omega_k^s := \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0, \\ |k|^s, & \text{se } k \neq 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

Assumimos que $g(\bar{x}, \lambda_0) \approx 0$ e utilizamos $\bar{x}$ para definir um problema de ponto fixo equivalente para (2.73). Para este propósito, supomos que a matriz Jacobiana $Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)$ é não singular e tomamos a aproximação $A_m \approx [Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)]^{-1}$.

Definimos o operador A no espaço de sequências de modo que ele atue como uma aproximação para a inversa de $Dg(\bar{x}, \lambda_0)$. Para $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, ele é definido componente a componente

por

$$[A(x)]_k := \begin{cases} [A_m(x_{F_m})]_k, & \text{se } k \in F_m, \\ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4k(k-1)} x_{k-2} - \frac{1}{2(k^2-1)} x_k + \frac{1}{4k(k+1)} x_{k+2} \right], & \text{se } k \notin F_m. \end{cases} \quad (2.76)$$

Utilizando (2.76) definimos

$$T(x) = T_{\lambda_0}(x) := x - Ag(x, \lambda_0). \quad (2.77)$$

Nós queremos encontrar um único ponto fixo de T no interior da bola fechada $B(\bar{x}, r)$ em X^s . A bola fechada centrada na origem e raio r é dada por

$$B(r) := B(0, r) = \left[-\frac{r}{\omega_k^s}, \frac{r}{\omega_k^s} \right]. \quad (2.78)$$

A bola fechada centrada em $\bar{x}$ de raio r é

$$B(\bar{x}, r) = \bar{x} + B(r). \quad (2.79)$$

Para mostrar que T é uma contração nós precisamos das limitações Y_k e Z_k para todo $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$|[T(\bar{x}) - \bar{x}]_k| \leq Y_k \quad (2.80)$$

e

$$\sup_{b, c \in B(0, r)} |[DT(\bar{x} + b)c]_k| \leq Z_k. \quad (2.81)$$

Os limitantes superiores Y_k e Z_k serão calculados nas duas próximas subseções.

2.2.1 Cálculo de Y_k

Para calcular os limites superiores Y_k e posteriormente Z_k nós inicialmente escolhemos $M \in \mathbb{N}$ tal que $M \geq 3(m-1) + 1$ como em (GAMEIRO; LESSARD, 2010). De (2.77) nós temos $T(\bar{x}) - \bar{x} = Ag(\bar{x}, \lambda_0)$ e consequentemente $[T(\bar{x}) - \bar{x}]_k = [Ag(\bar{x}, \lambda_0)]_k$. Como $\bar{x}_k = 0 \forall k \notin F_m$, conseguimos obter $g_k(\bar{x}, \lambda_0) = 0$ para cada $k \notin F_m$. Assim, definimos $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ por

$$Y_k := \begin{cases} |[A_m(h^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0))]_k|, & \text{se } k \in F_m, \\ \frac{1}{4} \left| \frac{1}{4k(k-1)} g_{k-2}(\bar{x}) - \frac{1}{2(k^2-1)} g_k(\bar{x}) + \frac{1}{4k(k+1)} g_{k+2}(\bar{x}) \right|, & \text{se } k \in F_m - F_m, \\ 0, & \text{se } k \notin F_m, \end{cases} \quad (2.82)$$

onde $g_k(\bar{x}) = g_k(\bar{x}, \lambda_0) \forall k \in \mathbb{Z}$ e

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4k(k-1)} g_{k-2}(\bar{x}, \lambda_0) - \frac{1}{2(k^2-1)} g_k(\bar{x}, \lambda_0) + \frac{1}{4k(k+1)} g_{k+2}(\bar{x}, \lambda_0) \right] = \\
& = \frac{1}{4} \frac{1}{4k(k-1)} [4\bar{x}_{k-2}^{(2)} + \lambda_0 \bar{x}_{k-2} - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k-2 \\ k_j \in F_m}} \lambda_0 \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} \bar{x}_{k_3}] \\
& - \frac{1}{4} \frac{1}{2(k^2-1)} [4\bar{x}_k^{(2)} + \lambda_0 \bar{x}_k - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in F_m}} \lambda_0 \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} \bar{x}_{k_3}] \\
& + \frac{1}{4} \frac{1}{4k(k+1)} [4\bar{x}_{k+2}^{(2)} + \lambda_0 \bar{x}_{k+2} - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k+2 \\ k_j \in F_m}} \lambda_0 \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} \bar{x}_{k_3}].
\end{aligned} \tag{2.83}$$

2.2.2 Cálculo de Z_k

Começamos esta subseção observando que assim como ocorreu com os limites superiores Y_k , nós podemos encontrar um limite uniforme para $k \notin F_M$, daí necessitaremos calcular Z_k apenas para $k \in F_M$. Para definir este limite superior, nós primeiramente derivamos uma fórmula geral para $[DT(\bar{x}+b)c]_k$ com $k \notin F_m$. Usando a notação

$$[(\bar{x}+b)^2 * c]_k := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in \mathbb{Z}}} (\bar{x}+b)_{k_1} (\bar{x}+b)_{k_2} c_{k_3}, \tag{2.84}$$

temos para $k \notin F_m$

$$[Dg(\bar{x}+b)c]_k = 4 \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p + \lambda_0 c_k - 3\lambda_0 [(\bar{x}+b)^2 * c]_k. \tag{2.85}$$

Agora, supondo que $k \notin F_m$ e pondo $b = ru$ e $c = rv$, para $u, v \in B(1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
[DT(\bar{x}+b)c]_k &= c_k - \frac{1}{4} \frac{1}{4k(k-1)} \left[4 \sum_{\substack{p=k \\ (p+k-2) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k-2)^2) c_p + \lambda_0 c_{k-2} - 3\lambda_0 [(\bar{x}+b)^2 * c]_{k-2} \right] \\
&+ \frac{1}{4} \frac{1}{2(k^2-1)} \left[4 \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p + \lambda_0 c_k - 3\lambda_0 [(\bar{x}+b)^2 * c]_k \right] \\
&- \frac{1}{4} \frac{1}{4k(k+1)} \left[4 \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k+2) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k+2)^2) c_p + \lambda_0 c_{k+2} - 3\lambda_0 [(\bar{x}+b)^2 * c]_{k+2} \right],
\end{aligned} \tag{2.86}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
[DT(\bar{x}+b)c]_k &= rv_k - \frac{(k+1)}{4k(k-1)(k+1)} \sum_{\substack{p=k \\ (p+k-2) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k-2)^2)rv_p \\
&\quad + \frac{2k}{4k(k-1)(k+1)} \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2)rv_p \\
&\quad + \frac{(k-1)}{4k(k-1)(k+1)} \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k+2) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k+2)^2)rv_p \\
&\quad - \lambda_0 \frac{r}{4k(k-1)} v_{k-2} + \lambda_0 \frac{r}{2(k^2-1)} v_k - \lambda_0 \frac{r}{4k(k+1)} v_{k+2} \\
&\quad + \lambda_0 \frac{3}{4k(k-1)} [\bar{x}^2 * rv + 2\bar{x} * ru * rv + r^2 u^2 * rv]_{k-2} \\
&\quad - \lambda_0 \frac{3}{2(k^2-1)} [\bar{x}^2 * rv + 2\bar{x} * ru * rv + r^2 u^2 * rv]_k \\
&\quad + \lambda_0 \frac{3}{4k(k+1)} [\bar{x}^2 * rv + 2\bar{x} * ru * rv + r^2 u^2 * rv]_{k+2}.
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Assim, de (2.87) temos,

$$\begin{aligned}
[DT(\bar{x}+b)c]_k &= r \left[v_k + \frac{-4k^3 + 4k}{4k(k-1)(k+1)} v_k \right. \\
&\quad - \lambda_0 \frac{1}{4k(k-1)} v_{k-2} + \lambda_0 \frac{1}{2(k^2-1)} v_k - \lambda_0 \frac{1}{4k(k+1)} v_{k+2} \\
&\quad + \lambda_0 \frac{3}{4k(k-1)} [\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]_{k-2} \\
&\quad - \lambda_0 \frac{3}{2(k^2-1)} [\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]_k \\
&\quad \left. + \lambda_0 \frac{3}{4k(k+1)} [\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]_{k+2} \right].
\end{aligned} \tag{2.88}$$

Agora, aplicando o Lema 8 do apêndice A em (2.88), obtemos para $k \notin F_M$

$$\begin{aligned}
|[DT(\bar{x}+b)c]_k| &\leq r\lambda_0 \left[\frac{1}{4|k||k-1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k-2}^s} + \frac{1}{2|k^2-1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_k^s} + \frac{1}{4|k||k+1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k+2}^s} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{4|k||k-1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-2}^s} + 2r\|\bar{x}\|_s \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-2}^s} + r^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-2}^s} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{2|k^2-1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_k^s} + 2r\|\bar{x}\|_s \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_k^s} + r^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_k^s} \right) \\
& + \frac{3}{4|k||k+1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+2}^s} + 2r\|\bar{x}\|_s \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+2}^s} + r^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+2}^s} \right) \Bigg], \tag{2.89}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|[DT(\bar{x}+b)c]_k| & \leq \frac{r}{\omega_k^s} \lambda_0 \left[\frac{1}{4|k||k-1|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-2}^s} \|\nu\|_s + \frac{1}{2|k^2-1|} \|\nu\|_s + \frac{1}{4|k||k+1|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+2}^s} \|\nu\|_s \right. \\
& + \frac{3}{4|k||k-1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-2}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\|_s \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-2}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-2}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \\
& + \frac{3}{2|k^2-1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\|_s \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \\
& + \left. \frac{3}{4|k||k+1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+2}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\|_s \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+2}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+2}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \right] \\
& \leq \frac{r}{\omega_k^s} \lambda_0 \left[\frac{1}{4|M||M-1|} \left(1 + \frac{2}{M-2} \right)^s + \frac{1}{2|M^2-1|} + \frac{1}{4|M||M+1|} \right. \\
& + \frac{3}{4|M||M-1|} \left(1 + \frac{2}{M-2} \right)^s \left(\|\bar{x}\|_s^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\|_s \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \\
& + \frac{3}{2|M^2-1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\|_s \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \\
& + \left. \frac{3}{4|M||M+1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\|_s \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \right] \\
& =: \frac{r}{\omega_k^s} \tilde{Z}_M, \tag{2.90}
\end{aligned}$$

onde $\tilde{Z}_M$ é um polinômio em r e independe de k .

Para definir $\{Z_k\}_{k \in F_M}$ é conveniente denotar $\tilde{A}_m := Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)$ e introduzir o operador

$$[\tilde{A}(x)]_k := \begin{cases} [\tilde{A}_m(x_{F_m})]_k, & \text{se } k \in F_m, \\ 4 \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2)x_p, & \text{se } k \notin F_m, \end{cases} \tag{2.91}$$

que atua como uma aproximação da inversa do operador A definido em (2.76). Nós então dividimos $DT(\bar{x}+b)c$ como segue

$$DT(\bar{x}+b)c = (I - A\tilde{A})c - A(Dg(\bar{x}+b) - \tilde{A})c, \quad (2.92)$$

onde o primeiro termo tem os seguintes limites:

(i) Se $k \in F_m$, temos

$$|[(I - A\tilde{A})c]_k| = |[(I - A\tilde{A})rv]_k| \leq r|[(I - A_m Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0))|\omega_{F_m}^{-s}]_k|, \quad (2.93)$$

onde $\omega_{F_m}^{-s} := \{1/\omega_k^s\}_{k \in F_m}$ e $|\cdot|$ o valor absoluto de todas as entradas da matriz.

(ii) Se $k \notin F_m$, temos

$$\begin{aligned} [(I - A\tilde{A})c]_k &= c_k - \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4k(k-1)} [\tilde{A}(c)]_{k-2} - \frac{1}{2(k^2-1)} [\tilde{A}(c)]_k + \frac{1}{4k(k+1)} [\tilde{A}(c)]_{k+2} \right] \\ &= c_k - \frac{1}{4} \frac{(k+1)}{4k(k-1)(k+1)} 4 \sum_{\substack{p=k \\ (p+k-2) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k-2)^2) c_p \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{2k}{4k(k-1)(k+1)} 4 \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p \\ &\quad - \frac{1}{4} \frac{(k-1)}{4k(k-1)(k+1)} 4 \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k+2) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k+2)^2) c_p = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Logo, definimos

$$Z_k^{(0)} := \begin{cases} |[(I - A_m Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0))|\omega_{F_m}^{-s}]_k|, & \text{se } k \in F_m, \\ 0, & \text{se } k \notin F_m. \end{cases} \quad (2.95)$$

Para o segundo termo em (2.92), nós temos

$$[Dg(\bar{x}+b)c]_k = 4 \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p + \lambda_0 c_k - 3\lambda_0 [\bar{x}^2 * c + 2\bar{x} * b * c + b^2 * c]_k \quad (2.96)$$

e

$$[\tilde{A}(c)]_k := \begin{cases} 4 \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p + \lambda_0 c_k - 3\lambda_0 \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in F_m}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} c_{k_3}, & \text{se } k \in F_m, \\ 4 \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p, & \text{se } k \notin F_m. \end{cases} \quad (2.97)$$

Agora, considerando $u, v \in B(1)$ e definindo $b = ru$ e $c = rv$, podemos expandir a expressão $[(Dg(\bar{x} + b) - \tilde{A})c]_k$ em termos de r como

$$[(Dg(\bar{x} + b) - \tilde{A})c]_k = -3\lambda_0(C_k^{(1)}r + 2C_k^{(2)}r^2 + C_k^{(3)}r^3) \quad (2.98)$$

e lembrando que $\bar{x}_{k_j} = 0$ para $k_j \notin F_m$, nós definimos

$$C_k^{(1)} := \begin{cases} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \notin F_m}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3}, & \text{para } k \in F_m, \\ -\frac{1}{3}v_k + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in \mathbb{Z}}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3}, & \text{para } k \notin F_m, \end{cases} \quad (2.99)$$

$$C_k^{(2)} := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1 \in F_m, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}}} \bar{x}_{k_1} u_{k_2} v_{k_3} \quad \text{e} \quad C_k^{(3)} := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in \mathbb{Z}}} u_{k_1} u_{k_2} v_{k_3}. \quad (2.100)$$

Agora, queremos encontrar os limites superiores, $Z_k^{(1)}$, $Z_k^{(2)}$ e $Z_k^{(3)}$, de modo que $|C_k^{(j)}| \leq Z_k^{(j)}$, para $j = 1, 2, 3$. Para isso consideremos a divisão

$$C_k^{(1)} := \begin{cases} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in F_m - F_m}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \notin F_m}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3} & \text{para } k \in F_m, \\ -\frac{1}{3}v_k + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in F_m}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \notin F_m}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3} & \text{para } k \notin F_m. \end{cases} \quad (2.101)$$

Utilizando o Lema 7 do apêndice e (2.101), obtemos

$$Z_k^{(1)} := \begin{cases} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in F_m - F_m}} |\bar{x}_{k_1}| |\bar{x}_{k_2}| \left(\frac{1}{\omega_{k_3}^s} \right) + \|\bar{x}\|_s^2 \epsilon_k^{(3)}, & \text{para } k \in F_m, \\ \frac{1}{3} \frac{1}{\omega_k^s} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in F_m}} |\bar{x}_{k_1}| |\bar{x}_{k_2}| \left(\frac{1}{\omega_{k_3}^s} \right) + \|\bar{x}\|_s^2 \epsilon_k^{(3)}, & \text{para } k \in F_m - F_m. \end{cases} \quad (2.102)$$

Para $C_k^{(2)}$ e $C_k^{(3)}$ consideremos as divisões

$$C_k^{(2)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1 \in F_m, k_2, k_3 \in F_m}} \bar{x}_{k_1} u_{k_2} v_{k_3} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1 \in F_m, k_2, k_3 \notin F_m}} \bar{x}_{k_1} u_{k_2} v_{k_3} \quad (2.103)$$

e

$$C_k^{(3)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in F_m}} u_{k_1} u_{k_2} v_{k_3} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \notin F_m}} u_{k_1} u_{k_2} v_{k_3}. \quad (2.104)$$

Novamente utilizando o Lema 7 para $k \in F_M$, obtemos

$$Z_k^{(2)} := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1 \in F_M, k_2, k_3 \in F_M}} |\bar{x}_{k_1}| \left(\frac{1}{\omega_{k_2}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k_3}^s} \right) + 2\|\bar{x}\|_s \varepsilon_k^{(3)}, \quad \text{para } k \in F_M \quad (2.105)$$

e

$$Z_k^{(3)} := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in F_M}} \left(\frac{1}{\omega_{k_1}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k_2}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k_3}^s} \right) + 3\varepsilon_k^{(3)}, \quad \text{para } k \in F_M. \quad (2.106)$$

Finalmente de (2.76), (2.90), (2.92), (2.95), (2.98) (2.105) e (2.106), obtemos

$$Z_k := \begin{cases} 3\lambda_0[|A_m|(Z_{F_m}^{(1)}r + 2Z_{F_m}^{(2)}r^2 + Z_{F_m}^{(3)}r^3)]_k + Z_k^{(0)}r, & \text{se } k \in F_m, \\ \tilde{Z}_k + 0r, & \text{se } k \in F_M - F_m, \\ \frac{r}{\omega_k^s} \tilde{Z}_M, & \text{se } k \notin F_M, \end{cases} \quad (2.107)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_k &= 3\lambda_0 \left| \frac{1}{4} \left[\frac{1}{4k(k-1)} [(Z_k^{(1)}r + 2Z_k^{(2)}r^2 + Z_k^{(3)}r^3)]_{k-2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2(k^2-1)} [(Z_k^{(1)}r + 2Z_k^{(2)}r^2 + Z_k^{(3)}r^3)]_k + \frac{1}{4k(k+1)} [(Z_k^{(1)}r + 2Z_k^{(2)}r^2 + Z_k^{(3)}r^3)]_{k+2} \right] \right| \end{aligned} \quad (2.108)$$

e $\tilde{Z}_M$ é definido por

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_M &= \lambda_0 \left[\frac{1}{4|M||M-1|} \left(1 + \frac{2}{M-2} \right)^s + \frac{1}{2|M^2-1|} + \frac{1}{4|M||M+1|} \right. \\ &\quad + \frac{3}{4|M||M-1|} \left(1 + \frac{2}{M-2} \right)^s \left(\|\bar{x}\|^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\| \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \\ &\quad + \frac{3}{2|M^2-1|} \left(\|\bar{x}\|^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\| \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \\ &\quad \left. + \frac{3}{4|M||M+1|} \left(\|\bar{x}\|^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} + 2r\|\bar{x}\| \tilde{\alpha}_M^{(3)} + r^2 \tilde{\alpha}_M^{(3)} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Assim, os polinômios radiais estão bem definidos

Definição 9. (Polinômios Radiais)

(i) se $k \in F_M$

$$p_k(r) := Y_k + Z_k - \frac{r}{\omega_k^s}. \quad (2.110)$$

(ii) se $k \notin F_M$

$$\tilde{p}_M(r) := \tilde{Z}_M - 1. \quad (2.111)$$

Finalizamos esta seção ilustrando os ramos de soluções, as aproximações de soluções e a prova rigorosa de existência e unicidade para soluções de equilíbrio para a equação de Allen-Cahn.

(a) Ramos de soluções.

(b) Soluções no ramo 1.

(c) Soluções no ramo 2.

(d) Soluções no ramo 3.

(e) Soluções no ramo 4.

(f) Soluções no ramo 5.

Figura 2 – Soluções para Allen-Cahn 1D

Teorema 1. Considere $\lambda \in \{10.3696, 10.6696, 10.9696, 11.2696, 11.5696, 11.8696, 12.1696, 12.4696, 12.7696, 13.0696\}$ no ramo 1 de solução na Figura 2(a) e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 2(b). Então existe $r \approx 10^{-12}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Demonstração. Calculamos todos os polinômios radiais e encontramos um raio $r \approx 10^{-12}$ que tornava todos os polinômios radiais negativos para $m = 100$, $M = 300$ e $s = 2$. $\square$

Nos próximos teoremas consideraremos os mesmos valores para os parâmetros m , M e s .

Teorema 2. Considere $\lambda \in \{39.9784, 40.9784, 41.9784, 42.9784, 43.9784, 44.9784, 45.9784, 46.9784, 47.9784, 48.9784\}$ no ramo 2 de solução na Figura 2(a) e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 2(c). Então existe $r \approx 10^{-12}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Teorema 3. Considere $\lambda \in \{89.3264, 90.3264, 91.3264, 92.3264, 93.3264, 94.3264, 95.3264, 96.3264, 97.3264, 98.3264\}$ no ramo 3 de solução na figura 2(a) e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 2(d). Então existe $r \approx 10^{-12}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Teorema 4. Considere $\lambda \in \{158.4137, 159.4137, 160.4137, 161.4137, 162.4137, 163.4137, 164.4137, 165.4137, 166.4137, 167.4137\}$ no ramo 4 de solução na Figura 2(a) e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 2(e). Então existe $r \approx 10^{-12}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Teorema 5. Considere $\lambda \in \{247.2401, 248.2401, 249.2401, 250.2401, 251.2401, 252.2401, 253.2401, 254.2401, 255.2401, 256.2401\}$ no ramo 5 de solução na Figura 2(a) e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 2(f). Então existe $r \approx 10^{-12}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

2.3 Problema de Valor de Fronteira Para a Equação de Swift-Hohenberg

Nesta seção aplicaremos o método da continuação rigorosa para a equação de Swift-Hohenberg unidimensional

$$\begin{cases} v_t = \lambda v + (1 + \Delta)^2 v - v^3 & \text{em } (0, l), \\ v(0) = a, \\ v(l) = b, \\ v_y(0) = v_y(l) = 0, \end{cases} \quad (2.112)$$

onde $\lambda > 0$. A equação em (2.112) foi introduzida em (SWIFT; HOHENBERG, 1977) como um modelo para o aparecimento da célula de Rayleigh-Bernard que é um tipo de convecção

natural que ocorre por exemplo numa camada horizontal plana de um fluido quando aquecido por baixo, e é um modelo largamente utilizado para a formação de padrões de convecção. O parâmetro $\lambda > 0$ é o número reduzido de Rayleigh.

Neste trabalho estamos interessados em obter soluções de equilíbrio de (2.38). Assim, basta resolvermos o seguinte problema

$$\begin{cases} \lambda v + (1 + \Delta)^2 v - v^3 = 0 & \text{em } (0, l), \\ v(0) = a, \\ v(l) = b, \\ v_y(0) = v_y(l) = 0, \end{cases} \quad (2.113)$$

ou seja, encontrar soluções para o problema de valor de fronteira (PVF).

Fazendo a mudança de variáveis $x = \frac{2y}{l} - 1$, temos $y = \frac{(x+1)l}{2}$ e reescrevendo a equação de Swift-Hohenberg com a mudança

$$v(y) = v\left(\frac{(x+1)l}{2}\right) = u(x), \quad (2.114)$$

obtemos o seguinte problema que é equivalente ao PVF (2.113)

$$\begin{cases} \frac{16}{l^4} \Delta(\Delta u) + 2 \frac{4}{l^2} \Delta u + (1 + \lambda)u - u^3 = 0 & \text{em } (-1, 1), \\ u(-1) = a, \\ u(1) = b, \\ \frac{2}{l} u_x(-1) = \frac{2}{l} u_x(1) = 0. \end{cases} \quad (2.115)$$

Como $x \in [-1, 1]$ e temos condições de fronteira não periódica convém expressarmos a solução do problema (2.115) em termos de uma base de Chebyshev $\{T_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, onde os polinômios $T_k(x)$ de Chebyshev são definidos em (1.5). Além disso, para que as condições de contorno sejam cumpridas pelos elementos da base convém considerarmos uma base onde cada elemento é uma combinação linear dos polinômios de Chebyshev $\{T_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, neste caso consideraremos a base $\{\Phi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\Phi_k(x) = T_k(x) + \alpha_k T_{k+1}(x) + \beta_k T_{k+2}(x) + \gamma_k T_{k+3}(x) + \delta_k T_{k+4}(x), \quad (2.116)$$

onde os coeficientes α_k , β_k , γ_k e δ_k serão definidos no próximo Lema.

Lema 5. Seja $\{\Phi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ a base definida em (2.116). Para que as condições de fronteira em (2.115) sejam cumpridas devemos ter

$$\alpha_k := -\frac{(-1)^k 9a - 9b + (-1)^k 6ak - 6bk + (-1)^k ak^2 - bk^2}{8(k+2)}, \quad (2.117)$$

$$\beta_k := \frac{(-1)^k 16a + 16b - 16k + (-1)^k 8ak + 8bk + (-1)^k ak^2 + bk^2 - 32}{8(k+3)}, \quad (2.118)$$

$$\gamma_k := \frac{(-1)^k a - b + (-1)^k 2ak - 2bk + (-1)^k ak^2 - bk^2}{8(k+2)}, \quad (2.119)$$

e

$$\delta_k := -\frac{(-1)^k 4a + 4b - 8k + (-1)^k 4ak + 4bk + (-1)^k ak^2 + bk^2 - 8}{8(k+3)}. \quad (2.120)$$

Demonstração. De (1.5) segue que as propriedades $T_k(1) = 1$ e $T_k(-1) = (-1)^k$ são satisfeitas pelos polinômios de Chebyshev e de (1.12) temos $T'_k(\pm 1) = (\pm 1)^{k-1} k^2$. Assim, da condição de fronteira $u(-1) = a$ de (2.121), temos

$$\Phi_k(-1) = T_k(-1) + \alpha_k T_{k+1}(-1) + \beta_k T_{k+2}(-1) + \gamma_k T_{k+3}(x) + \delta_k T_{k+4}(-1), \quad (2.121)$$

ou seja,

$$(-1)^k + (-1)^{k+1} \alpha_k + (-1)^{k+2} \beta_k + (-1)^{k+3} \gamma_k + (-1)^{k+4} \delta_k = a \quad (2.122)$$

e fixando k par, obtemos

$$-\alpha_k + \beta_k - \gamma_k + \delta_k = a - 1. \quad (2.123)$$

Analogamente, da condição de fronteira $u(1) = b$ e de (2.121), obtemos

$$\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \delta_k = b - 1. \quad (2.124)$$

A condição de fronteira $u_x(-1) = 0$ em (2.121) produz a igualdade

$$\Phi'_k(-1) = T'_k(-1) + \alpha_k T'_{k+1}(-1) + \beta_k T'_{k+2}(-1) + \gamma_k T'_{k+3}(x) + \delta_k T'_{k+4}(-1), \quad (2.125)$$

ou seja,

$$(k+1)^2 \alpha_k - (k+2)^2 \beta_k + (k+3)^2 \gamma_k - (k+4)^2 \delta_k = k^2. \quad (2.126)$$

Analogamente, da condição de fronteira $u_x(1) = 0$ em (2.121), obtemos

$$(k+1)^2 \alpha_k + (k+2)^2 \beta_k + (k+3)^2 \gamma_k + (k+4)^2 \delta_k = -k^2. \quad (2.127)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.123), (2.124), (2.126) e (2.127), obtemos (2.117), (2.118), (2.119) e (2.120). O caso k ímpar é análogo. $\square$

Agora, suponha que $u \in L^2_\omega([-1, 1])$ e

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k \Phi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k (T_k(x) + \alpha_k T_{k+1}(x) + \beta_k T_{k+2}(x) + \gamma_k T_{k+3}(x) + \delta_k T_{k+4}(x)) \\ &= \tilde{u}_0 T_0(x) + (\tilde{u}_1 + \alpha_0 \tilde{u}_0) T_1(x) + (\tilde{u}_2 + \alpha_1 \tilde{u}_1 + \beta_0 \tilde{u}_0) T_2(x) + (\tilde{u}_3 + \alpha_2 \tilde{u}_2 + \beta_1 \tilde{u}_1 + \gamma_0 \tilde{u}_0) T_3(x) \\ &\quad + \sum_{k=4}^{\infty} (\tilde{u}_k + \alpha_{k-1} \tilde{u}_{k-1} + \beta_{k-2} \tilde{u}_{k-2} + \gamma_{k-3} \tilde{u}_{k-3} + \delta_{k-4} \tilde{u}_{k-4}) T_k(x), \end{aligned} \quad (2.128)$$

o que define a relação entre os coeficientes de Chebyshev $\{\hat{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ e os coeficientes de Galerkin $\{\tilde{u}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ da solução u

$$\hat{u}_k := \begin{cases} \tilde{u}_k, & \text{se } k = 0, \\ \tilde{u}_k + \alpha_{k-1} \tilde{u}_{k-1}, & \text{se } k = 1, \\ \tilde{u}_k + \alpha_{k-1} \tilde{u}_{k-1} + \beta_{k-2} \tilde{u}_{k-2}, & \text{se } k = 2, \\ \tilde{u}_k + \alpha_{k-1} \tilde{u}_{k-1} + \beta_{k-2} \tilde{u}_{k-2} + \gamma_{k-3} \tilde{u}_{k-3}, & \text{se } k = 3, \\ \tilde{u}_k + \alpha_{k-1} \tilde{u}_{k-1} + \beta_{k-2} \tilde{u}_{k-2} + \gamma_{k-3} \tilde{u}_{k-3} + \delta_{k-4} \tilde{u}_{k-4}, & \text{se } k \geq 4, \end{cases} \quad (2.129)$$

onde $\hat{u}_k$ é definido em (1.9). No que segue trabalharemos com a expansão de Chebyshev (1.8) da função u , observando que da expressão (2.128) e da relação (2.129) segue que se os coeficientes de Chebyshev da função u estiverem determinados então a solução u estará determinada. Além disso, utilizando a relação (2.46) estendemos a expansão de Chebyshev da derivada de quarta ordem para o conjunto dos números inteiros assim como fizemos a derivada de segunda ordem em (2.52), ou seja, definimos

$$a_k^{(4)} := \begin{cases} \hat{u}_k^{(4)}, & \text{se } k = 0, \\ \frac{\hat{u}_k^{(4)}}{2}, & \text{se } k \geq 1 \end{cases} \quad (2.130)$$

e $a_{-k}^{(4)} = a_k^{(4)} \quad \forall k \geq 1$, onde $\hat{u}_k^{(4)}$ é definido em (1.23)

Agora, substituindo (2.48), (2.49), (1.18) e (1.22) na equação do PVF (2.115) e observando atentamente (2.52) e (2.130), obtemos

$$\frac{16}{l^4} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(4)} T_k(x) \right) + 2 \frac{4}{l^2} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(2)} T_k(x) \right) + (1 + \lambda) \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T_k(x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a * a * a)_k T_k(x) = 0 \quad (2.131)$$

e note que não precisamos nos preocupar com as condições de fronteira do PVF (2.115) neste momento, pois elas já estão implícitas na base definida em (2.116). Utilizando o produto interno definido em (1.6), obtemos

$$\left\langle \frac{16}{l^4} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^{(4)} T_m(x) \right), T_k(x) \right\rangle_{\omega} = \frac{16}{l^4} a_k^{(4)} \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega}, \quad (2.132)$$

$$\left\langle \frac{8}{l^2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^{(2)} T_m(x) \right), T_k(x) \right\rangle_{\omega} = \frac{8}{l^2} a_k^{(2)} \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega}, \quad (2.133)$$

$$\left\langle (1 + \lambda) \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m T_m(x), T_k(x) \right\rangle_{\omega} = (1 + \lambda) a_k \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega} \quad (2.134)$$

e

$$\left\langle \sum_{k_i \in \mathbb{Z}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} T_{k_1+k_2+k_3}(x), T_k(x) \right\rangle_{\omega} = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} \langle T_k(x), T_k(x) \rangle_{\omega}. \quad (2.135)$$

Utilizando a linearidade do produto interno e o fato de $\langle 0, T_k(x) \rangle_\omega = 0$ de (2.131), (2.132), (2.133), (2.134) e (2.135) obtemos

$$\frac{16}{l^4}a_k^{(4)} + \frac{8}{l^2}a_k^{(2)} + (1 + \lambda)a_k - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3} = 0. \quad (2.136)$$

Definimos o operador $f(a, \lambda) = (f_k(a, \lambda))_{k \in \mathbb{Z}}$, componente a componente por

$$f_k(a, \lambda) := \frac{16}{l^4}a_k^{(4)} + \frac{8}{l^2}a_k^{(2)} + (1 + \lambda)a_k - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} a_{k_1}a_{k_2}a_{k_3}. \quad (2.137)$$

De (2.136) e (2.137) segue que encontrar uma solução do PVF (2.115) é equivalente a encontrar uma solução de

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (2.138)$$

Dado $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, nós denotamos sua parte finita de tamanho m e sua correspondente parte infinita de tamanho m respectivamente por

$$x_{F_m} := \{x_k\}_{k \in F_m} \quad \text{e} \quad x_{I_m} := \{x_k\}_{k \in I_m}, \quad (2.139)$$

onde $F_m = \{k \in \mathbb{Z}; |k| < m\}$ e $I_m = \{k \in \mathbb{Z}; |k| \geq m\}$. Agora, consideremos uma projeção de Galerkin de (2.137) de dimensão m dada por $f^{(m)} := \{f_k^{(m)}\}_{k \in F_m}$, onde $f_k^{(m)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\begin{aligned} f_k^{(m)}(x_{F_m}, \lambda) &:= f_k((x_{F_m}, 0_{I_m}), \lambda) \\ &= \frac{16}{l^4}x_k^{(4)} + \frac{8}{l^2}x_k^{(2)} + (1 + \lambda)x_k - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3} \quad \forall k \in F_m. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Fixamos o valor do parâmetro $\lambda = \lambda_0$ e encontramos numericamente o vetor $\bar{x}_{F_m}$ tal que $f^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$. Para isso adotamos uma adaptação da estratégia apresentada em (LIU; YE; WANG, 2011), primeiramente escrevemos (2.140) na forma matricial

$$f^{(m)}(a_{F_m}, \lambda_0) = \frac{16}{l^4}(D^4 * a) + \frac{8}{l^2}(D^2 * a) + (1 + \lambda_0)a - a^3, \quad (2.141)$$

onde $*$ denota o produto usual de matrizes, D^2 e D^4 são as matrizes diferenciais definidas na Seção 1.1, $a = (a_0, \dots, a_{m-1})^t = (x_0, \dots, x_{m-1})^t$ e $a^3 = ((a * a * a)_0, \dots, (a * a * a)_{m-1})$ (com a notação estabelecida em (2.10)). Utilizando (2.46), (2.52) e (2.130) segue que (2.141) ainda pode ser escrita em termos da base de Chebyshev, como

$$\hat{f}^{(m)}(\hat{u}_{F_m}, \lambda_0) = \frac{16}{l^4}(D^4 * u) + \frac{8}{l^2}(D^2 * \hat{u}) + (1 + \lambda_0) * u - \hat{u}^3, \quad (2.142)$$

onde $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1})^t$, $\hat{u}^3 = (a_0^3, 2a_1^3, \dots, 2a_{m-1}^3)^t$ e $a^3 = (a_0^3, \dots, a_{m-1}^3)^t = ((a * a * a)_0, \dots, (a * a * a)_{m-1})^t$. Expressando a relação (2.129) para o caso finito, temos

$$\hat{u} = S * \tilde{u}, \quad (2.143)$$

onde $\hat{u} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{m-1})^t$, $\tilde{u} = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{m-5}, 0, 0, 0, 0)^t$. Note que adicionamos as componentes $\tilde{u}_{m-4} = \tilde{u}_{m-3} = \tilde{u}_{m-2} = \tilde{u}_{m-1} = 0$, pois S é uma matriz de ordem m definida por

$$S := E^{(0)} + E^{(-1)}W_1 + E^{(-2)}W_2 + E^{(-3)}W_3 + E^{(-4)}W_4, \quad (2.144)$$

onde $E^{(k)} = (e_{ij}^k)$ é definida para $k \in \mathbb{Z}$ por

$$e_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j + k, \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2.145)$$

e as matrizes W_1 , W_2 , W_3 e W_4 são matrizes diagonais com entradas $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\gamma_k\}$ e $\{\delta_k\}$ respectivamente definidas em (2.117), (2.118), (2.119) e (2.120).

De (2.142) e (2.143) podemos rescrever (2.141) em termos da base de Galerkin definida em (2.116)

$$\tilde{f}^{(m)}(\hat{u}_{F_m}, \lambda_0) = \frac{16}{l^4}(D^4 * (S * \tilde{u})) + \frac{8}{l^2}(D^2 * (S * \tilde{u})) + (1 + \lambda_0) * (S * \tilde{u}) - \hat{u}^3. \quad (2.146)$$

Para obter $\bar{x}_{F_m}$ tal que $\tilde{f}^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$, utilizamos o método de Newton no Matlab e pelo fato da matriz D^2 ser mal condicionada, utilizamos matriz quase inversa D^{-4} associada com D^4 que é definida em (6), multiplicamos ambos os lados de (2.146) pela matriz D^{-4} e utilizando a definição 3, obtemos

$$\begin{aligned} D^{-4} * \tilde{f}^{(m)}(\hat{u}_{F_m}, \lambda_0) &= D^{-4} * \left(\frac{16}{l^4}(D^4 * (S * \tilde{u})) + \frac{8}{l^2}(D^2 * (S * \tilde{u})) + (1 + \lambda_0) * (S * \tilde{u}) - \hat{u}^3 \right) \\ &= \left(\frac{16}{l^4}I^{(4)} + \frac{8}{l^2}D^{-2} + (1 + \lambda_0)D^{-4} \right) * (S * \tilde{u}) - D^{-4}\hat{u}^3 \end{aligned} \quad (2.147)$$

e finalmente consideramos a função

$$\tilde{g}^{(m-4)}(\tilde{u}_{F_{m-4}}, \lambda_0) = A * \tilde{u} - \lambda_0 \hat{y}^3, \quad (2.148)$$

onde a matriz A é obtida da matriz $\left(\frac{16}{l^4}I^{(4)} + \frac{8}{l^2}D^{-2} + (1 + \lambda_0)D^{-4} \right) * S$ excluindo as suas quatro primeiras linhas e as quatro últimas colunas e $\hat{y}^3$ é obtido do produto $D^{-4} * \hat{u}^3$, onde eliminamos as quatro primeiras linhas e as quatro últimas colunas da matriz D^{-4} e as quatro últimas componentes do vetor $\hat{u}^3$, antes de efetuar o produto. Também eliminamos as quatro últimas componentes nulas do vetor $\tilde{u}$ para que o produto $A * \tilde{u}$ esteja bem definido. Agora, definimos

$$g(x, \lambda) := \begin{cases} h_k^{(m)}(x, \lambda), & \text{se } k \in F_m, \\ f_k(x, \lambda), & \text{se } k \notin F_m, \end{cases} \quad (2.149)$$

onde $h_k^{(m)}$ denota a componente k de $h^{(m)}$ que é definida a partir de $\hat{h}^{(m)}$ pela seguinte composição

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow{S^{-1}} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^{m-4} & \xrightarrow{\tilde{g}^{(m-4)}} & \mathbb{R}^{m-4} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{S} & \mathbb{R}^m \\ \hat{u}_{F_m} & \mapsto & \tilde{u}_{F_m} & \mapsto & \tilde{u}_{F_{m-4}} & \mapsto & \tilde{g}^{(m-4)}(\tilde{u}_{F_{m-4}}, \lambda_0) & \mapsto & \tilde{g}^{(m)}(\tilde{u}_{F_m}, \lambda_0) & \mapsto & \hat{h}^{(m)}(\hat{u}_{F_m}, \lambda_0) \end{array} \quad (2.150)$$

onde S^{-1} é a inversa da matriz S definida em (2.144), ϕ representa o procedimento de eliminar as quatro últimas coordenadas nulas do vetor, $\tilde{g}^{(m-4)}$ é definida em (2.148), ψ representa o procedimento de acrescentar as quatro últimas coordenadas nulas no vetor e finalmente para obter $h^{(m)}(a_{F_m}, \lambda_0)$ em (2.149) basta utilizar a relação (2.46) no início e no final da sequência em (2.150).

Da definição da g e das considerações anteriores sobre a f segue que resolver o PVF (2.115) é equivalente a resolver a equação

$$g(x, \lambda) = 0. \quad (2.151)$$

Nós encontramos numericamente $\bar{x}_{F_m}$ tal que $h^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$ e definimos

$$\bar{x} := (\bar{x}_{F_m}, 0_{I_m}) \in X^s = \{x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}; \|x\|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \{\omega_k^s |x_k|\} < \infty\}, \quad (2.152)$$

onde $s \geq 1$ e ω_k^s é definido em (2.75).

Nós assumimos que $g(\bar{x}, \lambda_0) \approx 0$, onde $\bar{x} := (\bar{x}_{F_m}, 0_{I_m}) \in X^s$ e utilizamos $\bar{x}$ para definir um problema de ponto fixo equivalente para (2.151). Para este propósito, supomos que a matriz Jacobiana $Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)$ é não singular e tomamos a aproximação $A_m \approx [Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)]^{-1}$.

Definimos o operador A no espaço de sequências de modo que ele atue como uma aproximação para a inversa de $Dg(\bar{x}, \lambda_0)$. Para $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, ele é definido componente a componente por

$$[A(x)]_k := \begin{cases} [A_m(x_{F_m})]_k, & \text{se } k \in F_m, \\ \frac{l^4}{16} [\phi(x)]_k, & \text{se } k \notin F_m, \end{cases} \quad (2.153)$$

onde

$$\begin{aligned} [\phi(x)]_k &= \frac{1}{16(k-3)(k-2)(k-1)k} x_{k-4} - \frac{1}{4(k-3)(k-1)k(k+1)} x_{k-2} + \frac{3}{8(k-2)(k-1)(k+1)(k+2)} x_k \\ &\quad - \frac{1}{4(k-1)k(k+1)(k+3)} x_{k+2} + \frac{1}{16k(k+1)(k+2)(k+3)} x_{k+4}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Utilizando (2.153) nós definimos

$$T(x) = T_{\lambda_0}(x) := x - Ag(x, \lambda_0). \quad (2.155)$$

Nós queremos encontrar um único ponto fixo de T no interior da bola fechada $B(\bar{x}, r)$ em X^s , centrada em $\bar{x}$ e de raio r definida em (2.78) e (2.79). Para isso nós precisamos dos limitantes superiores Y_k e Z_k para todo $k \in \mathbb{Z}$, satisfazendo as desigualdades (2.80) e (2.81). Os limitantes superiores Y_k e Z_k serão calculados nas duas próximas subseções.

2.3.1 Cálculo de Y_k

Assim como fizemos na Subseção 2.2.1 antes de calcularmos os limitantes superiores Y_k e Z_k escolhemos $M \in \mathbb{N}$ tal que $M \geq 3(m-1) + 1$ porque o termo não linear da equação tem grau 3 e a projeção de Galerkin tem comprimento m . De (2.155) nós temos $T(\bar{x}) - \bar{x} = Ag(\bar{x}, \lambda_0)$ e conseqüentemente $|[T(\bar{x}) - \bar{x}]_k| = |[Ag(\bar{x}, \lambda_0)]_k|$. Como $\bar{x}_k = 0 \forall k \notin F_m$, conseguimos obter $g_k(\bar{x}, \lambda_0) = 0$ para cada $k \notin F_M$. Assim, definimos $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ por

$$Y_k := \begin{cases} |[A_m(h^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0))]_k|, & \text{se } k \in F_m, \\ \frac{l^4}{16} |[\phi(g(\bar{x}, \lambda_0))]_k|, & \text{se } k \in F_M - F_m, \\ 0, & \text{se } k \notin F_M, \end{cases} \quad (2.156)$$

onde

$$\begin{aligned} [\phi(g(\bar{x}, \lambda_0))]_k = & \frac{1}{16(k-3)(k-2)(k-1)k} g_{k-4}(\bar{x}, \lambda_0) - \frac{1}{4(k-3)(k-1)k(k+1)} g_{k-2}(\bar{x}, \lambda_0) \\ & + \frac{3}{8(k-2)(k-1)(k+1)(k+2)} g_k(\bar{x}, \lambda_0) - \frac{1}{4(k-1)k(k+1)(k+3)} g_{k+2}(\bar{x}, \lambda_0) \\ & + \frac{1}{16k(k+1)(k+2)(k+3)} g_{k+4}(\bar{x}, \lambda_0). \end{aligned} \quad (2.157)$$

2.3.2 Cálculo de Z_k

Assim como ocorreu com os limites superiores Y_k , nós encontraremos um limite uniforme para Z_k com $k \notin F_M$, daí necessitamos calcular Z_k apenas para $k \in F_M$. Para definir este limite superior, nós primeiramente derivamos uma fórmula geral para $[DT(\bar{x} + b)c]_k$ com $k \notin F_m$. Usando a notação estabelecida em (2.84) temos para $k \notin F_m$

$$\begin{aligned} [Dg(\bar{x} + b)c]_k = & \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3 - 4p)^2}{24} - \frac{(k^3 - 4k)^2}{24} + \frac{k^2 p^2}{8} (k^2 - p^2) \right] c_p \right\} \\ & + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p \right] + (1 + \lambda_0) c_k - 3[(\bar{x} + b)^2 * c]_k. \end{aligned} \quad (2.158)$$

Agora, supondo que $k \notin F_m$ e pondo $b = ru$ e $c = rv$, para $u, v \in B(1)$, obtemos de (2.153) e (2.155)

$$[DT(\bar{x} + b)c]_k = c_k$$

$$\begin{aligned} & -\frac{l^4}{16}e(k-4) \left\{ \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k \\ (p+k-4) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3-4p)^2}{24} - \frac{((k-4)^3-4(k-4))^2}{24} + \frac{(k-4)^2 p^2}{8} ((k-4)^2 - p^2) \right] c_p \right\} \right. \\ & \left. + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k-2 \\ (p+k-4) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k-4)^2) c_p \right] + (1 + \lambda_0)c_{k-4} - 3\lambda_0[(\bar{x} + b)^2 * c]_{k-4} \right\} \\ & + \frac{l^4}{16}e(k-2) \left\{ \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k-2) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3-4p)^2}{24} - \frac{((k-2)^3-4(k-2))^2}{24} + \frac{(k-2)^2 p^2}{8} ((k-2)^2 - p^2) \right] c_p \right\} \right. \\ & \left. + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k \\ (p+k-2) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k-2)^2) c_p \right] + (1 + \lambda_0)c_{k-2} - 3\lambda_0[(\bar{x} + b)^2 * c]_{k-2} \right\} \\ & - \frac{l^4}{16}e(k) \left\{ \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3-4p)^2}{24} - \frac{(k^3-4k)^2}{24} + \frac{k^2 p^2}{8} (k^2 - p^2) \right] c_p \right\} \right. \\ & \left. + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p \right] + (1 + \lambda_0)c_k - 3\lambda_0[(\bar{x} + b)^2 * c]_k \right\} \\ & + \frac{l^4}{16}e(k+2) \left\{ \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+6 \\ (p+k+2) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3-4p)^2}{24} - \frac{((k+2)^3-4(k+2))^2}{24} + \frac{(k+2)^2 p^2}{8} ((k+2)^2 - p^2) \right] c_p \right\} \right. \\ & \left. + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k+2) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k+2)^2) c_p \right] + (1 + \lambda_0)c_{k+2} - 3\lambda_0[(\bar{x} + b)^2 * c]_{k+2} \right\} \\ & - \frac{l^4}{16}e(k+4) \left\{ \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+8 \\ (p+k+4) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3-4p)^2}{24} - \frac{((k+4)^3-4(k+4))^2}{24} + \frac{(k+4)^2 p^2}{8} ((k+4)^2 - p^2) \right] c_p \right\} \right. \\ & \left. + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k+6 \\ (p+k+4) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - (k+4)^2) c_p \right] + (1 + \lambda_0)c_{k+4} - 3\lambda_0[(\bar{x} + b)^2 * c]_{k+4} \right\}, \end{aligned} \quad (2.159)$$

onde

$$e(k-4) = \frac{1}{16(k-3)(k-2)(k-1)k}, \quad e(k-2) = \frac{1}{4(k-3)(k-1)k(k+1)}, \quad (2.160)$$

$$e(k) = \frac{3}{8(k-2)(k-1)(k+1)(k+2)}, \quad e(k+2) = \frac{1}{4(k-1)k(k+1)(k+3)}, \quad (2.161)$$

e

$$e(k+4) = \frac{1}{16k(k+1)(k+2)(k+3)}. \quad (2.162)$$

Assim, de (2.159) temos,

$$\begin{aligned}
[DT(\bar{x}+b)c]_k = r & \left[v_k - \frac{16k^7 - 224k^5 + 784k^3 - 576k}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_k \right. \\
& + \frac{l^2}{2} \frac{-4k^5 - 4k^4 + 52k^3 + 52k^2 - 144k - 144}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_{k-2} \\
& + \frac{l^2}{2} \frac{8k^5 - 104k^3 + 288k}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_k \\
& + \frac{l^2}{2} \frac{-4k^5 + 4k^4 + 52k^3 - 52k^2 - 144k + 144}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_{k+2} \\
& - \frac{l^4}{16} \frac{(1+\lambda_0)(k+1)(k+2)(k+3)}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_{k-4} \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{(1+\lambda_0)4(k-2)(k+2)(k+3)}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_{k-2} \\
& - \frac{l^4}{16} \frac{(1+\lambda_0)6(k-3)k(k+3)}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_k \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{(1+\lambda_0)4(k-3)(k-2)(k+2)}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_{k+2} \\
& - \frac{l^4}{16} \frac{(1+\lambda_0)(k-3)(k-2)(k-1)}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_{k+4} \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{(k+1)(k+2)(k+3)[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]_{k-4}}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
& - \frac{3l^4}{16} \frac{4(k-2)(k+2)(k+3)[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]_{k-2}}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{6(k-3)k(k+3)[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]_k}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
& - \frac{3l^4}{16} \frac{4(k-3)(k-2)(k+2)[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]_{k+2}}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} \\
& \left. + \frac{3l^4}{16} \frac{(k-3)(k-2)(k-1)[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]_{k+4}}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} \right]. \quad (2.163)
\end{aligned}$$

Agora, aplicando o Lema 8 do apêndice A em (2.163), obtemos para $k \notin F_M$

$$\begin{aligned}
|[DT(\bar{x}+b)c]_k| \leq r & \left[\frac{l^2}{2} \frac{|-4k^5 - 4k^4 + 52k^3 + 52k^2 - 144k - 144|}{16|k-3||k-2||k-1||k||k+1||k+2||k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k-2}^s} \right. \\
& + \frac{l^2}{2} \frac{|8k^5 - 104k^3 + 288k|}{16|k-3||k-2||k-1||k||k+1||k+2||k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_k^s} \\
& + \frac{l^2}{2} \frac{|-4k^5 + 4k^4 + 52k^3 - 52k^2 - 144k + 144|}{16|k-3||k-2||k-1||k||k+1||k+2||k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k+2}^s} \\
& \left. + \frac{l^4}{16} \frac{|(1+\lambda_0)(k+1)(k+2)(k+3)|}{16|k-3||k-2||k-1||k||k+1||k+2||k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k-4}^s} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{l^4}{16} \frac{|1 + \lambda_0| |k+1| |k+2| |k+3|}{16 |k-3| |k-2| |k-1| |k| |k+1| |k+2| |k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k-4}^s} \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{|1 + \lambda_0| 4 |k-2| |k+2| |k+3|}{16 |k-3| |k-2| |k-1| |k| |k+1| |k+2| |k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k-2}^s} \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{|1 + \lambda_0| 6 |k-3| |k| |k+3|}{16 |k-3| |k-2| |k-1| |k| |k+1| |k+2| |k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_k^s} \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{|1 + \lambda_0| 4 |k-3| |k-2| |k+2|}{16 |k-3| |k-2| |k-1| |k| |k+1| |k+2| |k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k+2}^s} \\
& - \frac{l^4}{16} \frac{|1 + \lambda_0| |k-3| |k-2| |k-1|}{16 |k-3| |k-2| |k-1| |k| |k+1| |k+2| |k+3|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k+4}^s} \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{1}{16 |k-3| |k-2| |k-1| |k|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-4}^s} + 2r \|\bar{x}\|_s \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-4}^s} + r^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-4}^s} \right) \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{4}{16 |k-3| |k-1| |k| |k+1|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-2}^s} + 2r \|\bar{x}\|_s \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-2}^s} + r^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k-2}^s} \right) \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{6}{16 |k-2| |k-1| |k+1| |k+2|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_k^s} + 2r \|\bar{x}\|_s \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_k^s} + r^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_k^s} \right) \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{4}{16 |k-1| |k| |k+1| |k+3|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+2}^s} + 2r \|\bar{x}\|_s \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+2}^s} + r^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+2}^s} \right) \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{1}{16 |k| |k+1| |k+2| |k+3|} \left(\|\bar{x}\|_s^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+4}^s} + 2r \|\bar{x}\|_s \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+4}^s} + r^2 \frac{\tilde{\alpha}_M^{(3)}}{\omega_{k+4}^s} \right) \Bigg], \tag{2.164}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|[DT(\bar{x} + b)c]_k| & \leq \frac{r}{\omega_k^s} \left[\frac{l^2}{2} \frac{1}{|-4k(k-1)|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-2}^s} \|v\|_s + \frac{l^2}{2} \frac{1}{|2(k^2-1)|} \|v\|_s + \frac{l^2}{2} \frac{1}{|-4k(k+1)|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+2}^s} \|v\|_s \right. \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{|1 + \lambda_0|}{16 |k-3| |k-2| |k-1| |k|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-4}^s} \|v\|_s + \frac{l^4}{16} \frac{4|1 + \lambda_0|}{16 |k-3| |k-1| |k| |k+1|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-2}^s} \|v\|_s \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{6|1 + \lambda_0|}{16 |k-2| |k-1| |k+1| |k+2|} \|v\|_s + \frac{l^4}{16} \frac{4|1 + \lambda_0|}{16 |k-1| |k| |k+1| |k+3|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+2}^s} \|v\|_s \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{|1 + \lambda_0|}{16 |k| |k+1| |k+2| |k+3|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+4}^s} \|v\|_s + \frac{3l^4}{16} \frac{(\|\bar{x}\|_s^2 + 2r \|\bar{x}\|_s + r^2)}{16 |k-3| |k-2| |k-1| |k|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-4}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{4(\|\bar{x}\|_s^2 + 2r \|\bar{x}\|_s + r^2)}{16 |k-3| |k-1| |k| |k+1|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k-2}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} + \frac{3l^4}{16} \frac{6(\|\bar{x}\|_s^2 + 2r \|\bar{x}\|_s + r^2)}{16 |k-2| |k-1| |k+1| |k+2|} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{4(\|\bar{x}\|_s^2 + 2r \|\bar{x}\|_s + r^2)}{16 |k-1| |k| |k+1| |k+3|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+2}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} + \frac{3l^4}{16} \frac{1(\|\bar{x}\|_s^2 + 2r \|\bar{x}\|_s + r^2)}{16 |k| |k+1| |k+2| |k+3|} \frac{\omega_k^s}{\omega_{k+4}^s} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \Bigg] \\
& \leq \frac{r}{\omega_k^s} \left[\frac{l^2}{2} \frac{1}{4|M||M-1|} \left(1 + \frac{2}{M-2} \right)^s + \frac{l^2}{2} \frac{1}{2|M^2-1|} + \frac{l^2}{2} \frac{1}{4|M||M+1|} \right. \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{|1 + \lambda_0|}{16 |M-3| |M-2| |M-1| |M|} \left(1 + \frac{4}{M-4} \right)^s \Bigg]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{l^4}{16} \frac{4|1+\lambda_0|}{16|M-3||M-1||M||M+1|} \left(1 + \frac{2}{M-2}\right)^s \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{6|1+\lambda_0|}{16|M-2||M-1||M+1||M+2|} + \frac{l^4}{16} \frac{4|1+\lambda_0|}{16|M-1||M||M+1||M+3|} \\
& + \frac{l^4}{16} \frac{|1+\lambda_0|}{16|M||M+1||M+2||M+3|} \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{(|\bar{x}|_s^2 + 2r|\bar{x}|_s + r^2)}{16|M-3||M-2||M-1||M|} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \left(1 + \frac{4}{M-4}\right)^s \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{4(|\bar{x}|_s^2 + 2r|\bar{x}|_s + r^2)}{16|M-3||M-1||M||M+1|} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \left(1 + \frac{2}{M-2}\right)^s \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{6(|\bar{x}|_s^2 + 2r|\bar{x}|_s + r^2)}{16|M-2||M-1||M+1||M+2|} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{4(|\bar{x}|_s^2 + 2r|\bar{x}|_s + r^2)}{16|M-1||M||M+1||M+3|} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \\
& + \frac{3l^4}{16} \frac{1(|\bar{x}|_s^2 + 2r|\bar{x}|_s + r^2)}{16|M||M+1||M+2||M+3|} \tilde{\alpha}_M^{(3)} \Big] \\
& := \frac{r}{\omega_k^s} \tilde{Z}_M,
\end{aligned} \tag{2.165}$$

onde $\tilde{Z}_M$ é um polinômio em r e independe de k .

Para definir $\{Z_k\}_{k \in F_m}$ é conveniente denotar $\tilde{A}_m := Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)$ e introduzir o operador

$$[\tilde{A}(x)]_k := \begin{cases} [\tilde{A}_m(x_{F_m})]_k, & \text{se } k \in F_m, \\ \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3 - 4p)^2}{24} - \frac{(k^3 - 4k)^2}{24} + \frac{k^2 p^2}{8} (k^2 - p^2) \right] x_p \right\} \\ + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) x_p \right], & \text{se } k \notin F_m, \end{cases} \tag{2.166}$$

que atua como uma aproximação da inversa do operador A definido em (2.153). Nós então dividimos $DT(\bar{x} + b)c$ como segue

$$DT(\bar{x} + b)c = (I - A\tilde{A})c - A(Dg(\bar{x} + b) - \tilde{A})c, \tag{2.167}$$

onde o primeiro termo tem os seguintes limites:

(i) Se $k \in F_m$, temos

$$|[(I - A\tilde{A})c]_k| = |[(I - A\tilde{A})rv]_k| \leq r |[(I - A_m Dh^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)) | \omega_{F_m}^{-s}]_k|, \tag{2.168}$$

onde $\omega_{F_m}^{-s} := \{1/\omega_k^s\}_{k \in F_m}$ e $|\cdot|$ o valor absoluto de todas as entradas da matriz.

(ii) Se $k \notin F_m$, temos

$$\begin{aligned}
 [(I - A\tilde{A})c]_k &= c_k - \frac{l^4}{16} \left[\frac{1}{16(k-3)(k-2)(k-1)k} [\tilde{A}(c)]_{k-4} - \frac{1}{4(k-3)(k-1)k(k+1)} [\tilde{A}(c)]_{k-2} \right. \\
 &\quad + \frac{3}{8(k-2)(k-1)(k+1)(k+2)} [\tilde{A}(c)]_k - \frac{1}{4(k-1)k(k+1)(k+3)} [\tilde{A}(c)]_{k+2} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{16k(k+1)(k+2)(k+3)} [\tilde{A}(c)]_{k+4} \right] \\
 &= r \left[v_k - \frac{16k^7 - 224k^5 + 784k^3 - 576k}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_k \right. \\
 &\quad + \frac{l^2}{2} \frac{-4k^5 - 4k^4 + 52k^3 + 52k^2 - 144k - 144}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_{k-2} \\
 &\quad + \frac{l^2}{2} \frac{8k^5 - 104k^3 + 288k}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_k \\
 &\quad \left. + \frac{l^2}{2} \frac{-4k^5 + 4k^4 + 52k^3 - 52k^2 - 144k + 144}{16(k-3)(k-2)(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3)} v_{k+2} \right] \\
 &= r \frac{l^2}{2} \left[\frac{1}{-4k(k-1)} v_{k-2} + \frac{1}{2k^2 - 1} v_k + \frac{1}{-4k(k+1)} v_{k+2} \right],
 \end{aligned} \tag{2.169}$$

onde consideramos $v \in B(1)$ e $c = rv$. Logo, definimos

$$Z_k^{(0)} := \begin{cases} [(I - A_m D h^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0)) | \omega_{F_m}^{-s}]_k, & \text{se } k \in F_m, \\ \frac{l^2}{2} \left| \frac{1}{-4k(k-1)} v_{k-2} + \frac{1}{2k^2 - 1} v_k + \frac{1}{-4k(k+1)} v_{k+2} \right|, & \text{se } k \notin F_m. \end{cases} \tag{2.170}$$

Para o segundo termo em (2.167), nós temos

$$\begin{aligned}
 [Dg(\bar{x} + b)c]_k &= \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3 - 4p)^2}{24} - \frac{(k^3 - 4k)^2}{24} + \frac{k^2 p^2}{8} (k^2 - p^2) \right] c_p \right\} \\
 &\quad + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p \right] + (1 + \lambda_0) c_k - 3[\bar{x}^2 * c + 2\bar{x} * b * c + b^2 * c]_k.
 \end{aligned} \tag{2.171}$$

e

$$[\tilde{A}(c)]_k := \begin{cases} \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3 - 4p)^2}{24} - \frac{(k^3 - 4k)^2}{24} + \frac{k^2 p^2}{8} (k^2 - p^2) \right] c_p \right\} \\ + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p \right], + (1 + \lambda_0) c_k - \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_i \in \mathbb{Z}}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} c_{k_3}, & \text{se } k \in F_m, \\ \frac{16}{l^4} \left\{ \sum_{\substack{p=k+4 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p \left[\frac{(p^3 - 4p)^2}{24} - \frac{(k^3 - 4k)^2}{24} + \frac{k^2 p^2}{8} (k^2 - p^2) \right] c_p \right\} \\ + \frac{8}{l^2} \left[\sum_{\substack{p=k+2 \\ (p+k) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k^2) c_p \right], & \text{se } k \notin F_m. \end{cases} \quad (2.172)$$

Agora, considerando $u, v \in B(1)$ e definindo $b = ru$ e $c = rv$, podemos expandir a expressão $[(Dg(\bar{x} + b) - \tilde{A})c]_k$ em termos de r como

$$[(Dg(\bar{x} + b) - \tilde{A})c]_k = -3\lambda_0(C_k^{(1)}r + 2C_k^{(2)}r^2 + C_k^{(3)}r^3) \quad (2.173)$$

e lembrando que $\bar{x}_{k_j} = 0$ para $k_j \notin F_m$, nós definimos

$$C_k^{(1)} := \begin{cases} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \notin F_m}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3}, & \text{para } k \in F_m, \\ -\frac{1}{3}(1 + \lambda_0)v_k + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in \mathbb{Z}}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3}, & \text{para } k \notin F_m, \end{cases} \quad (2.174)$$

$$C_k^{(2)} := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1 \in F_m, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}}} \bar{x}_{k_1} u_{k_2} v_{k_3} \quad \text{e} \quad C_k^{(3)} := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in \mathbb{Z}}} u_{k_1} u_{k_2} v_{k_3}. \quad (2.175)$$

Agora, queremos encontrar os limites superiores, $Z_k^{(1)}$, $Z_k^{(2)}$ e $Z_k^{(3)}$, de modo que $|C_k^{(j)}| \leq Z_k^{(j)}$, para $j = 1, 2, 3$. Para isso consideremos a divisão

$$C_k^{(1)} := \begin{cases} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in F_M - F_m}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \notin F_M}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3}, & \text{para } k \in F_m, \\ -\frac{1}{3}(1 + \lambda_0)v_k + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in F_M}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \notin F_M}} \bar{x}_{k_1} \bar{x}_{k_2} v_{k_3}, & \text{para } k \notin F_m. \end{cases} \quad (2.176)$$

Utilizando o Lema 7 e (2.176), obtemos

$$Z_k^{(1)} := \begin{cases} \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in F_M - F_m}} |\bar{x}_{k_1}| |\bar{x}_{k_2}| \left(\frac{1}{\omega_{k_3}^s} \right) + \|\bar{x}\|_s^2 \epsilon_k^{(3)}, & \text{para } k \in F_m, \\ \frac{1}{3}(1 + \lambda_0) \frac{1}{\omega_k^s} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1, k_2 \in F_m, k_3 \in F_M}} |\bar{x}_{k_1}| |\bar{x}_{k_2}| \left(\frac{1}{\omega_{k_3}^s} \right) + \|\bar{x}\|_s^2 \epsilon_k^{(3)}, & \text{para } k \in F_M - F_m. \end{cases} \quad (2.177)$$

Para $C_k^{(2)}$ e $C_k^{(3)}$ consideremos as divisões

$$C_k^{(2)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1 \in F_m, k_2, k_3 \in F_M}} \bar{x}_{k_1} u_{k_2} v_{k_3} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1 \in F_m, k_2, k_3 \notin F_M}} \bar{x}_{k_1} u_{k_2} v_{k_3} \quad (2.178)$$

e

$$C_k^{(3)} = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in F_M}} u_{k_1} u_{k_2} v_{k_3} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \notin F_M}} u_{k_1} u_{k_2} v_{k_3}. \quad (2.179)$$

Novamente utilizando o Lema 7 para $k \in F_M$, obtemos

$$Z_k^{(2)} := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1 \in F_m, k_2, k_3 \in F_M}} |\bar{x}_{k_1}| \left(\frac{1}{\omega_{k_2}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k_3}^s} \right) + 2\|\bar{x}\|_s \epsilon_k^{(3)}, \quad \text{para } k \in F_M \quad (2.180)$$

e

$$Z_k^{(3)} := \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_j \in F_M}} \left(\frac{1}{\omega_{k_1}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k_2}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k_3}^s} \right) + 3\epsilon_k^{(3)}, \quad \text{para } k \in F_M. \quad (2.181)$$

Finalmente de (2.153), (2.165), (2.167), (2.170), (2.173) (2.180) e (2.181), obtemos

$$Z_k := \begin{cases} 3\lambda_0 [A_m | (Z_{F_m}^{(1)} r + 2Z_{F_m}^{(2)} r^2 + Z_{F_m}^{(3)} r^3)]_k + Z_k^{(0)} r, & \text{se } k \in F_m, \\ \tilde{Z}_k + Z_k^{(0)} r, & \text{se } k \in F_M - F_m, \\ \frac{r}{\omega_k^s} \tilde{Z}_M, & \text{se } k \notin F_M, \end{cases} \quad (2.182)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \tilde{Z}_k = 3 \frac{l^4}{16} & \left| \frac{1}{16(k-3)(k-2)(k-1)k} [(Z_k^{(1)}r + 2Z_k^{(2)}r^2 + Z_k^{(3)}r^3)]_{k-4} \right. \\
 & - \frac{1}{4(k-3)(k-1)k(k+1)} (Z_k^{(1)}r + 2Z_k^{(2)}r^2 + Z_k^{(3)}r^3)_{k-2} \\
 & + \frac{3}{8(k-2)(k-1)(k+1)(k+2)} [(Z_k^{(1)}r + 2Z_k^{(2)}r^2 + Z_k^{(3)}r^3)]_k \\
 & - \frac{1}{4(k-1)k(k+1)(k+3)} [(Z_k^{(1)}r + 2Z_k^{(2)}r^2 + Z_k^{(3)}r^3)]_{k+2} \\
 & \left. + \frac{1}{16k(k+1)(k+2)(k+3)} [(Z_k^{(1)}r + 2Z_k^{(2)}r^2 + Z_k^{(3)}r^3)]_{k+4} \right|
 \end{aligned} \tag{2.183}$$

e $\tilde{Z}_M$ é definido em (2.165).

Finalizamos este capítulo ilustrando o ramo de soluções, as aproximações de soluções e a prova rigorosa de existência e unicidade para soluções de equilíbrio para a equação de Swift-Hohenberg.

Figura 3 – Soluções para Swift-Hohenberg

Teorema 6. Considere $\lambda \in \{0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450\}$ no ramo de solução na Figura 3(a) e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 3(b). Então existe $r \approx 10^{-13}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Demonstração. Calculamos todos os polinômios radiais e encontramos um raio $r \approx 10^{-13}$ que tornava todos os polinômios radiais negativos para $m = 100$, $M = 300$ e $s = 2$. $\square$

SOLUÇÕES DE EQUÍLBRIO PARA EQUAÇÕES BIDIMENSIONAIS

Neste capítulo utilizaremos o método da continuação rigorosa da Seção 2.1 com as devidas adaptações para o caso bidimensional para encontrar soluções de equilíbrio para a equação de Allen-Cahn.

3.1 Problema de Dirichlet Para a Equação de Allen-Cahn

Nesta seção aplicaremos o método da continuação rigorosa para a equação de Allen Cahn bidimensional

$$\begin{cases} v_t = \varepsilon^2 \Delta v + v - v^3 & \text{em } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(0, \tilde{y}) = v(1, \tilde{y}) = 0, \\ v(\tilde{x}, 0) = v(\tilde{x}, 1) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\varepsilon > 0$. A equação em (3.1) está intimamente relacionada com a equação de Cahn-Hilliard que foi introduzida em (CAHN; HILLIARD, 1958) como um modelo para descrever o processo de separação de fases em ligas de ferro que contém dois metais.

Neste trabalho estamos interessados em obter soluções de equilíbrio de (3.1). Assim, basta resolvermos o seguinte problema

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta v + v - v^3 = 0 & \text{em } (0, 1) \times (0, 1), \\ v(0, \tilde{y}) = v(1, \tilde{y}) = 0, \\ v(\tilde{x}, 0) = v(\tilde{x}, 1) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

ou seja, encontrar soluções para o problema de valor de fronteira (PVF) com condições de Dirichlet.

Fazendo as mudanças de variáveis $x = 2\tilde{x} - 1$ e $y = 2\tilde{y} - 1$ temos $\tilde{x} = \frac{x+1}{2}$ e $\tilde{y} = \frac{y+1}{2}$ respectivamente. Reescrevendo a equação de Allen-Cahn com a mudança

$$v(\tilde{x}, \tilde{y}) = v\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) = u(x, y), \quad (3.3)$$

obtemos o seguinte problema que é equivalente ao PVF (3.2)

$$\begin{cases} 4\frac{1}{\lambda}\Delta u + u - u^3 = 0 & \text{em } (-1, 1) \times (-1, 1), \\ u(-1, y) = u(1, y) = 0, \\ u(x, -1) = u(x, 1) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

onde $\lambda := \frac{1}{\varepsilon^2}$.

Como $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ e buscamos uma solução não periódica convém expressarmos a solução do problema (3.4) em termos de uma base de Chebyshev formada pelo produto $\{T_{k_1}(x) \cdot T_{k_2}(y)\}_{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2}$, onde os polinômios de Chebyshev T_k são definidos em (1.5). Além disso, para que as condições de contorno sejam cumpridas pelos elementos da base convém considerarmos uma base onde cada elemento é uma combinação linear dos polinômios de Chebyshev $\{T_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$, neste caso consideraremos a base $\{\Phi_{k_1}(x) \cdot \Phi_{k_2}(y)\}_{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2}$, onde

$$\Phi_{k_1}(x) = T_{k_1}(x) - T_{k_1+2}(x) \quad \text{e} \quad \Phi_{k_2}(y) = T_{k_2}(y) - T_{k_2+2}(y) \quad (3.5)$$

são semelhantes ao caso unidimensional e consequências das propriedades $T_k(1) = 1$ e $T_k(-1) = (-1)^k$.

Agora, suponha que $u \in L^2_\omega([-1, 1] \times [-1, 1])$ e

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \tilde{u}_{(k_1, k_2)} \Phi_{k_1}(x) \Phi_{k_2}(y) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \tilde{u}_{(k_1, k_2)} (T_{k_1}(x) - T_{k_1+2}(x)) (T_{k_2}(y) - T_{k_2+2}(y)) \\ &= \tilde{u}_{(0,0)} T_0(x) T_0(y) + \tilde{u}_{(1,0)} T_1(x) T_0(y) + \tilde{u}_{(0,1)} T_0(x) T_1(y) + \tilde{u}_{(1,1)} T_1(x) T_1(y) \\ &+ \sum_{k_1=2}^{\infty} (\tilde{u}_{(k_1,0)} - \tilde{u}_{(k_1-2,0)}) T_{k_1}(x) T_0(y) + \sum_{k_1=2}^{\infty} (\tilde{u}_{(k_1,1)} - \tilde{u}_{(k_1-2,1)}) T_{k_1}(x) T_1(y) \\ &+ \sum_{k_2=2}^{\infty} (\tilde{u}_{(0,k_2)} - \tilde{u}_{(0,k_2-2)}) T_0(x) T_{k_2}(y) + \sum_{k_2=2}^{\infty} (\tilde{u}_{(1,k_2)} - \tilde{u}_{(1,k_2-2)}) T_1(x) T_{k_2}(y) \\ &+ \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=2}^{\infty} (\tilde{u}_{(k_1, k_2)} - \tilde{u}_{(k_1-2, k_2)} - \tilde{u}_{(k_1, k_2-2)} + \tilde{u}_{(k_1-2, k_2-2)}) T_{k_1}(x) T_{k_2}(y), \end{aligned} \quad (3.6)$$

o que define a relação entre os coeficientes de Chebyshev $\{\hat{u}_{(k_1, k_2)}\}_{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2}$ e os coeficientes de Galerkin $\{\tilde{u}_{(k_1, k_2)}\}_{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2}$ da solução u como segue

$$\hat{u}_{(k_1, k_2)} := \begin{cases} \tilde{u}_{(k_1, k_2)}, & \text{se } (k_1, k_2) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}, \\ \tilde{u}_{(k_1, k_2)} - \tilde{u}_{(k_1-2, k_2)}, & \text{se } k_1 \geq 2 \text{ e } k_2 \in \{0, 1\}, \\ \tilde{u}_{(k_1, k_2)} - \tilde{u}_{(k_1, k_2-2)}, & \text{se } k_2 \geq 2 \text{ e } k_1 \in \{0, 1\}, \\ \tilde{u}_{(k_1, k_2)} - \tilde{u}_{(k_1-2, k_2)} - \tilde{u}_{(k_1, k_2-2)} + \tilde{u}_{(k_1-2, k_2-2)}, & \text{se } k_1 \geq 2 \text{ e } k_2 \geq 2, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $\hat{u}_{(k_1, k_2)}$ é definido em (1.30).

No que segue trabalharemos com a expansão de Chebyshev (1.29) da função u , observando que da expressão (3.6) e da relação (3.7) segue que se os coeficientes de Chebyshev da função u estiverem determinados então a solução u estará determinada. Começamos definindo os coeficientes

$$a_{(k_1, k_2)} := \begin{cases} \hat{u}_{(0,0)}, & \text{se } k_1 = 0 \text{ e } k_2 = 0, \\ \frac{\hat{u}_{(k_1,0)}}{2}, & \text{se } k_1 > 0, \\ \frac{\hat{u}_{(0,k_2)}}{2}, & \text{se } k_2 > 0, \\ \frac{\hat{u}_{(k_1, k_2)}}{4}, & \text{se } k_1 > 0 \text{ e } k_2 > 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

e $a_{(-k_1, -k_2)} = a_{(k_1, k_2)} \forall k_1 \geq 1$ e $\forall k_2 \geq 1$ de modo análogo ao que fizemos em (2.47) no caso unidimensional.

De (3.8) e utilizando raciocínio análogo ao empregado em (2.48)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \hat{u}_{(k_1, k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \\ &= \sum_{k_2=0}^{\infty} \hat{u}_{(0, k_2)} T_0(x) T_{k_2}(y) + \sum_{k_1=0}^{\infty} \hat{u}_{(k_1, 0)} T_{k_1}(x) T_0(y) + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \hat{u}_{(k_1, k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \\ &= 2\hat{u}_{(0,0)} 1 \cdot 1 + \sum_{k_2=1}^{\infty} \hat{u}_{(0, k_2)} 1 \cdot T_{k_2}(y) + \sum_{k_1=1}^{\infty} \hat{u}_{(k_1, 0)} T_{k_1}(x) \cdot 1 + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \hat{u}_{(k_1, k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \\ &= 2a_{(0,0)} + \sum_{k_2=1}^{\infty} 2a_{(0, k_2)} T_{k_2}(y) + \sum_{k_1=1}^{\infty} 2a_{(k_1, 0)} T_{k_1}(x) + \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} 4a_{(k_1, k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \\ &= \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{(k_1, k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{(k_1, k_2)} \cos(k_1 \theta_1) \cos(k_2 \theta_2) \\ &= \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{(k_1, k_2)} e^{ik_1 \theta} e^{ik_2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Logo, a expansão em série de Chebyshev do termo não linear da equação de Allen-Cahn é análoga

à expansão de Fourier, ou seja,

$$\begin{aligned}
 (u(x))^3 &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \hat{u}_{(k_1,k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \right)^3 = \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{(k_1,k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \right)^3 \\
 &= \left(\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} a_{(m_1,n_1)} e^{im_1\theta_1} e^{in_1\theta_2} \right) \left(\sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} a_{(m_2,n_2)} e^{im_2\theta_1} e^{in_2\theta_2} \right) \left(\sum_{m_3 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_3 \in \mathbb{Z}} a_{(m_3,n_3)} e^{im_3\theta_1} e^{in_3\theta_2} \right) \\
 &= \sum_{m_i \in \mathbb{Z}} \sum_{n_i \in \mathbb{Z}} a_{(m_1,n_1)} a_{(m_2,n_2)} a_{(m_3,n_3)} T_{m_1+m_2+m_3}(x) T_{n_1+n_2+n_3}(y) \\
 &= \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} (a * a * a)_{(k_1,k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y),
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

onde

$$(a * a * a)_{(k_1,k_2)} := \sum_{\substack{m_1+m_2+m_3=k_1 \\ n_1+n_2+n_3=k_2}}^{\infty} a_{(m_1,n_1)} a_{(m_2,n_2)} a_{(m_3,n_3)} \tag{3.11}$$

e $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. De (1.31), (1.32), (1.33) e (1.34) temos a expansão de Chebyshev de Δu , para estendermos a expansão para o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, assim como fizemos com a expansão de u e u^3 basta procedermos de modo análogo ao que fizemos em (2.51) e (2.52) utilizando a relação (3.8).

Agora, substituindo (3.9), (3.10), (1.31) e (1.33) na equação do PVF (3.4) e observando atentamente o parágrafo anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
 4 \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{(k_1,k_2)}^{(2)x} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \right) + 4 \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{(k_1,k_2)}^{(2)y} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \right) \\
 + \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{(k_1,k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) - \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} (a * a * a)_{(k_1,k_2)} T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) = 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

e note que não precisamos nos preocupar com as condições de fronteira do PVF (3.4) neste momento, pois elas já estão implícitas na base definida em (3.5). Utilizando o produto interno definido em (1.28), obtemos

$$\left\langle 4 \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} a_{(m_1,m_2)}^{(2)x} T_{m_1}(x) T_{m_2}(y) \right), T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \right\rangle_{\omega} = 4 \frac{1}{\lambda} a_{(k_1,k_2)}^{(2)x} \langle T_{k_1}(x) T_{k_2}(y), T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \rangle_{\omega}, \tag{3.13}$$

$$\left\langle 4 \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} a_{(m_1,m_2)}^{(2)y} T_{m_1}(x) T_{m_2}(y) \right), T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \right\rangle_{\omega} = 4 \frac{1}{\lambda} a_{(k_1,k_2)}^{(2)y} \langle T_{k_1}(x) T_{k_2}(y), T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \rangle_{\omega}, \tag{3.14}$$

$$\left\langle \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} a_{(m_1,m_2)} T_{m_1}(x) T_{m_2}(y), T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \right\rangle_{\omega} = a_{(k_1,k_2)} \langle T_{k_1}(x) T_{k_2}(y), T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \rangle_{\omega} \tag{3.15}$$

e

$$\left\langle \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} (a * a * a)_{(m_1, m_2)} T_{m_1}(x) T_{m_2}(y), T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \right\rangle_{\omega} = (a * a * a)_{(k_1, k_2)} \langle T_{k_1}(x) T_{k_2}(y), T_{k_1}(x) T_{k_2}(y) \rangle_{\omega} \quad (3.16)$$

onde a notação $(a * a * a)_{(k_1, k_2)}$ foi estabelecida em (3.11). Utilizando a linearidade do produto interno e o fato de $\langle 0, T_k(x) \rangle_{\omega} = 0$ de (3.12), (3.13), (3.14), (3.15) e (3.16), obtemos

$$4 \frac{1}{\lambda} \left(a_{(k_1, k_2)}^{(2)_x} + a_{(k_1, k_2)}^{(2)_y} \right) + a_{(k_1, k_2)} - \sum_{\substack{m_1 + m_2 + m_3 = k_1 \\ n_1 + n_2 + n_3 = k_2}} a_{(m_1, n_1)} a_{(m_2, n_2)} a_{(m_3, n_3)} = 0. \quad (3.17)$$

Definimos o operador $f(a, \lambda) = (f_{(k_1, k_2)}(a, \lambda))_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$, componente a componente por

$$f_{(k_1, k_2)}(a, \lambda) := 4 \frac{1}{\lambda} a_{(k_1, k_2)}^{(2)} + a_{(k_1, k_2)} - \sum_{\substack{m_1 + m_2 + m_3 = k_1 \\ n_1 + n_2 + n_3 = k_2}} a_{(m_1, n_1)} a_{(m_2, n_2)} a_{(m_3, n_3)}, \quad (3.18)$$

onde $a_{(k_1, k_2)}^{(2)} = a_{(k_1, k_2)}^{(2)_x} + a_{(k_1, k_2)}^{(2)_y}$.

De (3.17) e (3.18) segue que encontrar uma solução do PVF (3.4) é equivalente a encontrar uma solução de

$$f(x, \lambda) = 0. \quad (3.19)$$

Dado $a = \{a_{(k_1, k_2)}\}_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = x = \{x_{(k_1, k_2)}\}_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$, nós denotamos sua parte finita de tamanho m e sua correspondente parte infinita de tamanho m respectivamente por

$$x_{F_m} := \{x_k\}_{k \in F_m} \quad \text{e} \quad x_{I_m} := \{x_k\}_{k \in I_m}, \quad (3.20)$$

onde $k = (k_1, k_2)$, $|k| = (|k_1|, |k_2|)$, $m = (m_1, m_2)$ e $F_m = \{k \in \mathbb{Z}^2; |k| < m\}$ é tal que $F_m = F_{m_1} \times F_{m_2}$ e $F_{m_i} = \{k \in \mathbb{Z}; |k_i| < m_i\}$ para $i = 1, 2$, além disso, $I_m = \{k \in \mathbb{Z}^2; |k| \geq m\}$. Agora, consideremos uma projeção de Galerkin de (3.18) de dimensão m dada por $f^{(m)} := \{f_k^{(m)}\}_{k \in F_m}$, onde $f_k^{(m)} : \mathbb{R}^{m_1, m_2} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\begin{aligned} f_k^{(m)}(x_{F_m}, \lambda) : &= f_k((x_{F_m}, 0_{I_m}), \lambda) \\ &= 4 \frac{1}{\lambda} x_k^{(2)} + x_k - \sum_{\substack{i_1 + i_2 + i_3 = k_1 \\ j_1 + j_2 + j_3 = k_2}} x_{(i_1, j_1)} x_{(i_2, j_2)} x_{(i_3, j_3)} \quad \forall k = (k_1, k_2) \in F_m. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Fixamos o valor do parâmetro $\lambda = \lambda_0$ e encontramos numericamente o vetor $\bar{x}_{F_m}$ tal que $f^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$. Para isso adotamos uma adaptação da estratégia apresentada em (LIU; YE; WANG, 2011), primeiramente escrevemos (3.21) na forma matricial

$$f^{(m)}(a_{F_m}, \lambda_0) = 4 \frac{1}{\lambda_0} (D_x^2 \otimes I_y + I_x \otimes D_y^2) * a + a - a^3, \quad (3.22)$$

onde utilizamos (ii) e (iv) da Proposição 5, D_x^2 é a matriz diferencial definida na seção 1.1, $*$ denota o produto usual de matrizes, $\otimes$ denota o produto de Kronecker de matrizes de acordo com a definição 7, a o vetor coluna formado pelas linhas da matriz $(a_{i,j})_{i,j=0}^{m_1-1, m_2-1}$ e a^3 o vetor coluna formado pelas linhas da matriz $((a * a * a)_{i,j})_{i,j=0}^{m_1-1, m_2-1}$. Utilizando (3.8) segue que (3.22) ainda pode ser escrita em termos da base de Chebyshev, como

$$\hat{f}^{(m)}(\hat{u}_{F_m}, \lambda_0) = 4 \frac{1}{\lambda_0} (D_x^2 \otimes I_y + I_x \otimes D_y^2) \hat{u} + \hat{u} - \hat{u}^3, \quad (3.23)$$

onde $\hat{u}$ o vetor coluna formado pelas linhas da matriz $(\hat{u}_{i,j})_{i,j=0}^{m_1-1, m_2-1}$ e $\hat{u}^3$ o vetor coluna obtido a^3 mediante a relação (3.8). A relação (3.7) pode ser escrita no caso finito em linguagem matricial como segue

$$\hat{u} = (S_x \otimes S_y) * \tilde{u}, \quad (3.24)$$

onde S_x e S_y são definidas como a matriz S em (2.66) e para que o produto acima esteja bem definido acrescentamos as duas últimas linhas e as duas últimas colunas nulas na matriz $\tilde{u}$ antes de transformar as linhas desta matriz num vetor coluna.

De (3.23) e (3.24) podemos rescrever (3.22) em termos da base de Galerkin definida em (3.5)

$$\tilde{f}^{(m)}(\tilde{u}_{F_m}, \lambda_0) = 4 \frac{1}{\lambda_0} (D_x^2 \otimes I_y + I_x \otimes D_y^2) * (S_x \otimes S_y) * \tilde{u} + (S_x \otimes S_y) * \tilde{u} - \tilde{u}^3. \quad (3.25)$$

Para obter $\bar{x}_{F_m}$ tal que $\tilde{f}^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$, utilizamos o método de Newton no Matlab e pelo fato das matrizes D_x^2 e D_y^2 serem mal condicionadas, nós exploramos a técnica quase inversa de forma semelhante ao que fizemos no caso unidimensional, multiplicamos ambos os lados de (3.25) pela matriz $D_x^{-2} \otimes D_y^{-2}$ e utilizando a definição 3 e a proposição 4, obtemos

$$\begin{aligned} & (D_x^{-2} \otimes D_y^{-2}) \left[\frac{4}{\lambda_0} (D_x^2 \otimes I_y + I_x \otimes D_y^2) * (S_x \otimes S_y) * \tilde{u} + (S_x \otimes S_y) * \tilde{u} - \tilde{u}^3 \right] = \\ & = \left[\frac{4}{\lambda_0} \left(I_x^{(2)} \otimes D_y^{-2} + D_x^{-2} \otimes I_x^{(2)} \right) + (D_x^{-2} \otimes D_y^{-2}) \right] * (S_x \otimes S_y) * \tilde{u} - (D_x^{-2} \otimes D_y^{-2}) * \tilde{u}^3 \\ & = \left[\frac{4}{\lambda_0} \left((I_x^{(2)} * S_x) \otimes (D_y^{-2} * S_y) + (D_x^{-2} * S_x) \otimes (I_x^{(2)} * S_y) \right) + D_x^{-2} * S_x \otimes D_y^{-2} * S_y \right] * \tilde{u} \\ & - (D_x^{-2} \otimes D_y^{-2}) * \tilde{u}^3 = (D_x^{-2} \otimes D_x^{-2}) \tilde{f}^{(m)}(\tilde{u}_{F_m}, \lambda_0), \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde o procedimento de eliminar as duas primeiras linhas e as duas últimas colunas das matrizes é sempre realizado antes de efetuar o produto de Kronecker e finalmente consideramos a função

$$\tilde{g}^{(m_1-2, m_2-2)}(\tilde{u}_{F_{m-2}}, \lambda_0) = A * \tilde{u} - (D_x^{-2} \otimes D_y^{-2}) * \tilde{u}^3, \quad (3.27)$$

onde

$$A = \left[\frac{4}{\lambda_0} \left((I_x^{(2)} * S_x) \otimes (D_y^{-2} * S_y) + (D_x^{-2} * S_x) \otimes (I_x^{(2)} * S_y) \right) + D_x^{-2} * S_x \otimes D_y^{-2} * S_y \right]. \quad (3.28)$$

Agora, definimos

$$g(x, \lambda) := \begin{cases} h_k^{(m)}(x, \lambda), & \text{se } k \in F_m \\ f_k(x, \lambda), & \text{se } k \notin F_m, \end{cases} \quad (3.29)$$

onde f_k foi definida em (3.18) e $h_k^{(m)}$ denota a componente k de $h^{(m)}$ que é definida a partir de $\tilde{g}^{(m_1-2, m_2-2)}$ fazendo composição análoga a realizada em (2.72) considerando $\mathbb{R}^{m_1 \cdot m_2}$ e $\mathbb{R}^{(m_1-2) \cdot (m_2-2)}$.

Da definição da g e das considerações anteriores sobre a f segue que resolver o PVF (3.4) é equivalente a resolver a equação

$$g(x, \lambda) = 0. \quad (3.30)$$

Nós encontramos numericamente $\bar{x}_{F_m}$ tal que $h^{(m)}(\bar{x}_{F_m}, \lambda_0) \approx 0$. Definindo

$$\bar{x} := (\bar{x}_{F_m}, 0_{I_m}) \in X^s = \{x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}; \|x\|_s = \sup_{k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \{\omega_k^s |x_k|\} < \infty\} \quad (3.31)$$

onde $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, com $s_i \geq 1$ para $i = 1, 2$ e

$$\omega_k^s := \omega_{k_1}^{s_1} \cdot \omega_{k_2}^{s_2}. \quad (3.32)$$

Assumimos que $g(\bar{x}, \lambda_0) \approx 0$ e utilizamos $\bar{x}$ para definir um problema de ponto fixo equivalente para (3.30). Para este propósito, escolhemos $M = (M_1, M_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $M \geq 3(m-1) + 1$, onde $m = (m_1, m_2)$ e a desigualdade anterior significa que ela é satisfeita pelas duas componentes de M e m como em (2.29). Supomos que a matriz Jacobiana $Dh^{(M)}(\bar{x}_{F_M}, \lambda_0)$ é não singular e tomamos a aproximação $A_M \approx [Dh^{(M)}(\bar{x}_{F_M}, \lambda_0)]^{-1}$, onde $\bar{x}_{F_M}$, é obtido de $\bar{x}_{F_m}$, acrescentando as componentes nulas para $k \in F_M - F_m$.

Definimos o operador A no espaço de sequências de modo que ele atue como uma aproximação para a inversa de $Dg(\bar{x}, \lambda_0)$. Para $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$, ele é definido componente a componente por

$$[A(x)]_k := \begin{cases} [A_M(x_{F_M})]_k, & \text{se } k \in F_M, \\ \frac{\lambda_0}{4} [\sigma(x)]_k, & \text{se } k \notin F_M, \end{cases} \quad (3.33)$$

onde $k = (k_1, k_2)$ e $[\sigma(x)]_k$ é dado por

$$\begin{aligned} [\sigma(x)]_k = & \frac{1}{4k_1(k_1-1)} \left(\frac{1}{4k_2(k_2-1)} x_{(k_1-2, k_2-2)} - \frac{1}{2((k_2)^2-1)} x_{(k_1-2, k_2)} + \frac{1}{4k_2(k_2+1)} x_{(k_1-2, k_2+2)} \right) \\ & - \frac{1}{2(k_1^2-1)} \left(\frac{1}{4k_2(k_2-1)} x_{(k_1, k_2-2)} - \frac{1}{2((k_2)^2-1)} x_{(k_1, k_2)} + \frac{1}{4k_2(k_2+1)} x_{(k_1, k_2+2)} \right) \\ & + \frac{1}{4k_1(k_1+1)} \left(\frac{1}{4k_2(k_2-1)} x_{(k_1+2, k_2-2)} - \frac{1}{2((k_2)^2-1)} x_{(k_1+2, k_2)} + \frac{1}{4k_2(k_2+1)} x_{(k_1+2, k_2+2)} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Utilizando (3.33) e (3.34) definimos

$$T(x) = T_{\lambda_0}(x) := x - Ag(x, \lambda_0). \quad (3.35)$$

Nós queremos encontrar um único ponto fixo de T no interior da bola fechada $B(\bar{x}, r)$ em X^s . A bola fechada centrada na origem e raio r é dada por

$$B(r) := B(0, r) = \left[-\frac{r}{\omega_{k_1}^s}, \frac{r}{\omega_{k_1}^s} \right] \times \left[-\frac{r}{\omega_{k_2}^s}, \frac{r}{\omega_{k_2}^s} \right]. \quad (3.36)$$

A bola fechada centrada em $\bar{x}$ de raio r é

$$B(\bar{x}, r) = \bar{x} + B(r). \quad (3.37)$$

Para mostrar que T é uma contração nós precisamos das limitações Y_k e Z_k para todo $k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, tal que

$$|[T(\bar{x}) - \bar{x}]_k| \leq Y_k \quad (3.38)$$

e

$$\sup_{b, c \in B(0, r)} |[DT(\bar{x} + b)c]_k| \leq Z_k \quad (3.39)$$

como em (2.80) e (2.81).

Os limitantes superiores Y_k e Z_k serão calculados nas duas próximas subseções.

3.1.1 Cálculo de Y_k

Para calcular os limites superiores Y_k e posteriormente Z_k nós inicialmente escolhemos $M = (M_1, M_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $M \geq 3(m - 1) + 1$, onde $m = (m_1, m_2)$ e a desigualdade anterior significa que ela é satisfeita pelas duas componentes de M e m como em (GAMEIRO; LESSARD, 2010). De (3.35) segue que $T(\bar{x}) - \bar{x} = Ag(\bar{x}, \lambda_0)$ e consequentemente nós temos $[T(\bar{x}) - \bar{x}]_k = [Ag(\bar{x}, \lambda_0)]_k$. Como $\bar{x}_k = 0 \ \forall k \notin F_m$, conseguimos obter $g_k(\bar{x}, \lambda_0) = 0$ para cada $k \notin F_M$. Assim, definimos $Y = \{Y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ por

$$Y_k := \begin{cases} |[A_M(h^{(M)}(\bar{x}_{F_M}, \lambda_0))]_k|, & \text{se } k \in F_M, \\ 0, & \text{se } k \notin F_M. \end{cases} \quad (3.40)$$

3.1.2 Cálculo de Z_k

Assim como ocorreu com o limites superiores Y_k na subseção anterior, nós tentaremos encontrar um limite uniforme para $k \notin F_M$, daí necessitaremos calcular Z_k apenas para $k \in F_M$. Antes de provarmos a existência do limite superior, nós primeiramente derivamos uma fórmula geral para $[DT(\bar{x} + b)c]_k$ com $k \notin F_m$ e analisaremos o caso $k \in F_M$. Usando a notação

$$[(\bar{x} + b)^2 * c]_k := \sum_{\substack{k^1 + k^2 + k^3 = k \\ k^j \in \mathbb{Z}^2}} (\bar{x} + b)_{k^1} (\bar{x} + b)_{k^2} c_{k^3}, \quad (3.41)$$

onde $k = (k_1, k_2)$ e $k^j = (k_1^j, k_2^j)$ para $j = 1, 2, 3$, temos para $k \notin F_m$

$$[Dg(\bar{x} + b)c]_k = \frac{4}{\lambda_0} \left(\sum_{\substack{p=k_1+2 \\ (p+k_1) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k_1^2) c_{(p, k_2)} + \sum_{\substack{q=k_2+2 \\ (q+k_2) \text{ par}}}^{\infty} q(q^2 - k_2^2) c_{(k_1, q)} \right) + c_{(k_1, k_2)} - 3[(\bar{x} + b)^2 * c]_{(k_1, k_2)}. \quad (3.42)$$

Para definir $\{Z_k\}_{k \in F_M}$ é conveniente denotar $\tilde{A}_M := Dh^{(M)}(\bar{x}_{F_M}, \lambda_0)$ e introduzir o operador

$$[\tilde{A}(x)]_k := \begin{cases} [\tilde{A}_M(x_{F_M})]_k, & \text{se } k \in F_M, \\ \frac{4}{\lambda_0} \left(\sum_{\substack{p=k_1+2 \\ (p+k_1) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k_1^2) x_{(p, k_2)} + \sum_{\substack{q=k_2+2 \\ (q+k_2) \text{ par}}}^{\infty} q(q^2 - k_2^2) x_{(k_1, q)} \right) + c_{(k_1, k_2)}, & \text{se } k \notin F_M, \end{cases} \quad (3.43)$$

que atua como uma aproximação da inversa do operador A definido em (3.33) e (3.34). Nós então dividimos $DT(\bar{x} + b)c$ como segue

$$DT(\bar{x} + b)c = (I - A\tilde{A})c - A(Dg(\bar{x} + b) - \tilde{A})c, \quad (3.44)$$

onde o primeiro termo tem o seguinte limite para o caso $k \in F_M$

$$|(I - A\tilde{A})c|_k = |(I - A\tilde{A})rv|_k \leq r|(I - A_M Dg^{(M)}(\bar{x}_{F_M}, \lambda_0))| \omega_{F_M}^{-s}]_k, \quad (3.45)$$

onde $\omega_{F_M}^{-s} := \{1/\omega_k^s\}_{k \in F_M}$ e $|\cdot|$ o valor absoluto de todas as entradas da matriz.

Logo, definimos

$$Z_k^{(0)} := |(I - A_M Dh^{(M)}(\bar{x}_{F_M}, \lambda_0))| \omega_{F_M}^{-s}]_k \quad \text{se } k \in F_M. \quad (3.46)$$

Para o segundo termo em (3.44), nós temos

$$[Dg(\bar{x} + b)c]_k = \frac{4}{\lambda_0} \left(\sum_{\substack{p=k_1+2 \\ (p+k_1) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k_1^2) c_{(p, k_2)} + \sum_{\substack{q=k_2+2 \\ (q+k_2) \text{ par}}}^{\infty} q(q^2 - k_2^2) c_{(k_1, q)} \right) + c_{(k_1, k_2)} - 3[\bar{x}^2 * c + 2\bar{x} * b * c + b^2 * c]_{(k_1, k_2)}. \quad (3.47)$$

e

$$[\tilde{A}(c)]_k := \begin{cases} \frac{4}{\lambda_0} \left(\sum_{\substack{p=k_1+2 \\ (p+k_1) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k_1^2) c_{(p,k_2)} + \sum_{\substack{q=k_2+2 \\ (q+k_2) \text{ par}}}^{\infty} q(q^2 - k_2^2) c_{(k_1,q)} \right) + c_{(k_1,k_2)} \\ -3 \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^j \in F_m}} \bar{x}_{k^1} \bar{x}_{k^2} c_{k^3}, & \text{se } k \in F_M, \\ \frac{4}{\lambda_0} \left(\sum_{\substack{p=k_1+2 \\ (p+k_1) \text{ par}}}^{\infty} p(p^2 - k_1^2) x_{(p,k_2)} + \sum_{\substack{q=k_2+2 \\ (q+k_2) \text{ par}}}^{\infty} q(q^2 - k_2^2) x_{(k_1,q)} \right) + c_{(k_1,k_2)}, & \text{se } k \notin F_M, \end{cases} \quad (3.48)$$

Agora, considerando $u, v \in B(1)$ e definindo $b = ru$ e $c = rv$, podemos expandir a expressão $[(Dg(\bar{x} + b) - \tilde{A})c]_k$ em termos de r como

$$[(Dg(\bar{x} + b) - \tilde{A})c]_k = -3(C_k^{(1)}r + 2C_k^{(2)}r^2 + C_k^{(3)}r^3) \quad (3.49)$$

e lembrando que $\bar{x}_{k_j} = 0$ para $k_j \notin F_m$, nós definimos para $k \in F_M$

$$C_k^{(1)} := \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^1, k^2 \in F_m, k^3 \notin F_m}} \bar{x}_{k^1} \bar{x}_{k^2} v_{k^3}, \quad (3.50)$$

$$C_k^{(2)} := \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^1 \in F_m, k^2, k^3 \in \mathbb{Z}^2}} \bar{x}_{k^1} u_{k^2} v_{k^3} \quad \text{e} \quad C_k^{(3)} := \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^j \in \mathbb{Z}^2}} u_{k^1} u_{k^2} v_{k^3}, \quad (3.51)$$

onde $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ e $k^j = (k_1^j, k_2^j) \in \mathbb{Z}^2$ para $j = 1, 2, 3$. Agora, queremos encontrar os limites superiores, $Z_k^{(1)}$, $Z_k^{(2)}$ e $Z_k^{(3)}$, de modo que $|C_k^{(j)}| \leq Z_k^{(j)}$, para $j = 1, 2, 3$. Para isso consideremos a divisão

$$C_k^{(1)} := \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^1, k^2 \in F_m, k^3 \in F_M - F_m}} \bar{x}_{k^1} \bar{x}_{k^2} v_{k^3} + \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^1, k^2 \in F_m, k^3 \notin F_M}} \bar{x}_{k^1} \bar{x}_{k^2} v_{k^3} \quad \text{para } k \in F_M \quad (3.52)$$

e observando que o segundo somatório é nulo, obtemos

$$Z_k^{(1)} := \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^1, k^2 \in F_m, k^3 \in F_M - F_m}} |\bar{x}_{k^1}| |\bar{x}_{k^2}| \left(\frac{1}{\omega_{k^3}^s} \right), \quad \text{para } k \in F_M. \quad (3.53)$$

Para $C_k^{(2)}$ e $C_k^{(3)}$ consideremos as divisões

$$C_k^{(2)} = \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^1 \in F_m, k^2, k^3 \in F_M}} \bar{x}_{k^1} u_{k^2} v_{k^3} + \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^1 \in F_m, k^2, k^3 \notin F_M}} \bar{x}_{k^1} u_{k^2} v_{k^3} \quad (3.54)$$

e

$$C_k^3 = \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^j \in F_M}} u_{k^1} u_{k^2} v_{k^3} + \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^j \notin F_M}} u_{k^1} u_{k^2} v_{k^3}. \quad (3.55)$$

Utilizando o Lema 7 do apêndice para $k \in F_M$, obtemos

$$Z_k^2 := \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^1 \in F_M, k^2, k^3 \in F_M}} |\bar{x}_{k^1}| \left(\frac{1}{\omega_{k^2}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k^3}^s} \right) + 2\|\bar{x}\|_s \varepsilon_k^{(3)}, \quad \text{para } k \in F_M \quad (3.56)$$

e

$$Z_k^3 := \sum_{\substack{k^1+k^2+k^3=k \\ k^j \in F_M}} \left(\frac{1}{\omega_{k^1}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k^2}^s} \right) \left(\frac{1}{\omega_{k^3}^s} \right) + 3\varepsilon_k^{(3)}, \quad \text{para } k \in F_M. \quad (3.57)$$

Finalmente de (3.33), (3.34), (3.61), (3.44), (3.46), (3.49) (3.56) e (3.57), obtemos para

$$Z_k := 3[|A_M|(Z_{F_M}^{(1)} r + 2Z_{F_M}^{(2)} r^2 + Z_{F_M}^{(3)} r^3)]_k + Z_k^{(0)} r \quad \text{para } k \in F_M. \quad (3.58)$$

Agora que já calculamos os limites superiores Z_k para o caso $k \in F_M$, procuraremos o limite superior para o caso $k \notin F_M$. Inicialmente supondo que $k \notin F_M$ e pondo $b = ru$ e $c = rv$, para $u, v \in B(1)$, obtemos para o primeiro termo em (3.44)

$$\begin{aligned} [(I - A\tilde{A})c]_{(k_1, k_2)} &= rv_{(k_1, k_2)} - \frac{r}{4k_2(k_2 - 1)} v_{(k_1, k_2 - 2)} + \frac{r}{2((k_2)^2 - 1)} v_{(k_1, k_2)} - \frac{r}{4k_2(k_2 + 1)} v_{(k_1, k_2 + 2)} \\ &\quad - \frac{r}{4k_1(k_1 - 1)} v_{(k_1 - 2, k_2)} + \frac{r}{2((k_1)^2 - 1)} v_{(k_1, k_2)} - \frac{r}{4k_1(k_1 + 1)} v_{(k_1 + 2, k_2)} \\ &\quad - \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{4k_1(k_1 - 1)} \left[\frac{r}{4k_2(k_2 - 1)} v_{(k_1 - 2, k_2 - 2)} - \frac{r}{2((k_2)^2 - 1)} v_{(k_1 - 2, k_2)} + \frac{r}{4k_2(k_2 + 1)} v_{(k_1 - 2, k_2 + 2)} \right] \\ &\quad + \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{2((k_1)^2 - 1)} \left[\frac{r}{4k_2(k_2 - 1)} v_{(k_1, k_2 - 2)} - \frac{r}{2((k_2)^2 - 1)} v_{(k_1, k_2)} + \frac{r}{4k_2(k_2 + 1)} v_{(k_1, k_2 + 2)} \right] \\ &\quad - \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{4k_1(k_1 + 1)} \left[\frac{r}{4k_2(k_2 - 1)} v_{(k_1 + 2, k_2 - 2)} - \frac{r}{2((k_2)^2 - 1)} v_{(k_1 + 2, k_2)} + \frac{r}{4k_2(k_2 + 1)} v_{(k_1 + 2, k_2 + 2)} \right] \end{aligned} \quad (3.59)$$

e para o segundo termo em (3.44) temos

$$\begin{aligned}
[-A(Dg(\bar{x} + b - \tilde{A}))c]_{(k_1, k_2)} &= \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4k_1(k_1 - 1)} \frac{r}{4k_2(k_2 - 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1 - 2, k_2 - 2)} \\
&- \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4k_1(k_1 - 1)} \frac{r}{2((k_2)^2 - 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1 - 2, k_2)} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4k_1(k_1 - 1)} \frac{r}{4k_2(k_2 + 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1 - 2, k_2 + 2)} \\
&- \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2((k_1)^2 - 1)} \frac{r}{4k_2(k_2 - 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1, k_2 - 2)} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2((k_1)^2 - 1)} \frac{r}{2((k_2)^2 - 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1, k_2)} \\
&- \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2((k_1)^2 - 1)} \frac{r}{4k_2(k_2 + 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1, k_2 + 2)} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4k_1(k_1 + 1)} \frac{r}{4k_2(k_2 - 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1 + 2, k_2 - 2)} \\
&- \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4k_1(k_1 + 1)} \frac{r}{2((k_2)^2 - 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1 + 2, k_2)} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4k_1(k_1 + 1)} \frac{r}{4k_2(k_2 + 1)} [[\bar{x}^2 * v + 2\bar{x} * ru * v + r^2 u^2 * v]]_{(k_1 + 2, k_2 + 2)}.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Assim temos de (3.59),

$$\begin{aligned}
|[(I - A\tilde{A})c]_{(k_1, k_2)}| &\leq r \left[\frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} + \frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2 - 2}^{s_2}} + \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} \right. \\
&+ \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2 + 2}^{s_2}} + \frac{1}{4|k_1||k_1 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1 - 2}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} + \frac{1}{2|(k_1)^2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} \\
&+ \frac{1}{4|k_1||k_1 + 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1 + 2}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{4|k_1||k_1 - 1|} \left[\frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1 - 2}^{s_1} \omega_{k_2 - 2}^{s_2}} + \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1 - 2}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} + \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1 - 2}^{s_1} \omega_{k_2 + 2}^{s_2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{2|(k_1)^2 - 1|} \left[\frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2 - 2}^{s_2}} + \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} + \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2 + 2}^{s_2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{4|k_1||k_1 + 1|} \left[\frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1 + 2}^{s_1} \omega_{k_2 - 2}^{s_2}} + \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1 + 2}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} + \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\|v\|_s}{\omega_{k_1 + 2}^{s_1} \omega_{k_2 + 2}^{s_2}} \right],
\end{aligned} \tag{3.61}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|[(I - A\tilde{A})c]_{(k_1, k_2)}| &\leq \frac{r}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} \left[1 + \frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\omega_{k_2}^{s_2}}{\omega_{k_2-2}^{s_2}} + \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} + \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\omega_{k_2}^{s_2}}{\omega_{k_2+2}^{s_2}} \right. \\
&+ \frac{1}{4|k_1||k_1 - 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1}}{\omega_{k_1-2}^{s_1}} + \frac{1}{2|(k_1)^2 - 1|} + \frac{1}{4|k_1||k_1 + 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1}}{\omega_{k_1+2}^{s_1}} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{4|k_1||k_1 - 1|} \left[\frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{\omega_{k_1-2}^{s_1} \omega_{k_2-2}^{s_2}} + \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1}}{\omega_{k_1-2}^{s_1}} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{\omega_{k_1-2}^{s_1} \omega_{k_2+2}^{s_2}} \right] + \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{2|(k_1)^2 - 1|} \left[\frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\omega_{k_2}^{s_2}}{\omega_{k_2-2}^{s_2}} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} + \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\omega_{k_2}^{s_2}}{\omega_{k_2+2}^{s_2}} \right] \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{1}{4|k_1||k_1 + 1|} \left[\frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{\omega_{k_1+2}^{s_1} \omega_{k_2-2}^{s_2}} + \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1}}{\omega_{k_1+2}^{s_1}} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{\omega_{k_1+2}^{s_1} \omega_{k_2+2}^{s_2}} \right] =: \tilde{Z}_k^{(0)} r.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Agora, aplicando o Lema 8 do apêndice A em (3.60), obtemos uma boa estimativa para $k \notin F_M$ para o segundo termo em (3.44)

$$\begin{aligned}
|[-A(Dg(\bar{x} + b - \tilde{A}))c]_{(k_1, k_2)}| &\leq r \left[\frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 - 1|} \frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1-2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2-2}^{s_2}} \right. \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 - 1|} \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1-2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2}^{s_2}} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 - 1|} \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1-2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2+2}^{s_2}} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2|(k_1)^2 - 1|} \frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2-2}^{s_2}} \\
&+ \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2|(k_1)^2 - 1|} \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2}^{s_2}}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2|(k_1)^2 - 1|} \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2+2}^{s_2}} \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 + 1|} \frac{1}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1+2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2-2}^{s_2}} \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 + 1|} \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1+2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2}^{s_2}} \\
& + \left. \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 + 1|} \frac{1}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1+2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2+2}^{s_2}} \right] (||\bar{x}||_s^2 + 2r||\bar{x}||_s + r^2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
|[-A(Dg(\bar{x} + b - \tilde{A}))c]_{(k_1, k_2)}| & \leq \frac{r}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} \left[\frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 - 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1-2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2-2}^{s_2}} \right. \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 - 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1}}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1-2}^{s_1}} \tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)} \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 - 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1-2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2+2}^{s_2}} \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2|(k_1)^2 - 1|} \frac{\omega_{k_2}^{s_2}}{4|k_2||k_2 - 1|} \tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2-2}^{s_2}} \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2|(k_1)^2 - 1|} \frac{1}{2|(k_2)^2 - 1|} \tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)} \tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)} \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{2|(k_1)^2 - 1|} \frac{\omega_{k_2}^{s_2}}{4|k_2||k_2 + 1|} \tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2+2}^{s_2}} \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 + 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{4|k_2||k_2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1+2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2-2}^{s_2}} \\
& + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 + 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{2|(k_2)^2 - 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1+2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2}^{s_2}} \\
& \left. + \frac{\lambda_0}{4} \frac{3}{4|k_1||k_1 + 1|} \frac{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}}{4|k_2||k_2 + 1|} \frac{\tilde{\alpha}_{M_1}^{(3)}}{\omega_{k_1+2}^{s_1}} \frac{\tilde{\alpha}_{M_2}^{(3)}}{\omega_{k_2+2}^{s_2}} \right] =: \frac{r}{\omega_{k_1}^{s_1} \omega_{k_2}^{s_2}} \tilde{Z}_k.
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Para que o polinômio da cauda cumpra a desigualdade $\tilde{Z}_M < 1$ deveríamos ter o coeficiente $\tilde{Z}_k^0$ definido em (3.62) igual ou muito próximo de zero, mas o primeiro termo deste coeficiente é exatamente 1, portanto a soma é superior a um, o que mostra que o operador A não é uma boa aproximação para a inversa do operador Dg .

Finalizamos este capítulo com a aplicação do método para o caso $k \in F_M$ apresentando alguns ramos de equilíbrio obtidos, uma solução aproximada no ramo e a prova assistida pelo computador de existência e unicidade o para a equação de Allen-Cahn em torno da aproximação obtida. Utilizamos em todos os casos os parâmetros $m_1 = m_2 = 20$, $M_1 = M_2 = 58$ e $s = 2$. Nas demonstrações calculamos os polinômios radiais apenas para o caso $k \in F_M$, pois não obtivemos uma estimativa suficientemente precisa para o polinômio da cauda, desta forma as demonstrações estão corretas, mas como não consideramos o caso $k \notin F_M$, o método obtido é semirrigoroso. A demonstração para os polinômios p_k com $k \in F_M$ que é mais crítica, foi bem sucedida. Acreditamos que uma estimativa suficientemente precisa também possa ser obtida para o polinômio da cauda, pois os coeficientes do mesmo decaem muito rápido para valores de k suficientemente grandes, o único problema é que a aproximação da inversa do operador Df precisa ser melhorada.

Figura 4 – Alguns ramos de equilíbrios para Allen-Cahn 2D

Figura 5 – Algumas soluções para Allen-Cahn 2D

Teorema 7. Considere $\lambda = 24.7392$ correspondente ao último ponto no ramo 1 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(a). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para os seguintes valores do parâmetro $\lambda \in \{20.2392, 20.7392, 21.2392, 21.7392, 22.2392, 22.7392, 23.2392, 23.7392, 24.2392\}$ e obtivemos resultado análogo.

Teorema 8. Considere $\lambda = 54.3480$ correspondente ao último ponto no ramo 2 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(b). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para $\lambda \in \{49.8480, 50.3480, 50.8480, 51.3480, 51.8480, 52.3480, 52.8480, 53.3480, 53.8480\}$ e obtivemos resultado análogo.

Teorema 9. Considere $\lambda = 103.6960$ correspondente ao último ponto no ramo 3 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(c). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para $\lambda \in \{99.1960, 99.6960, 100.1960, 100.6960, 101.1960, 101.6960, 102.1960, 102.6960, 103.1960\}$ e obtivemos resultado análogo.

Teorema 10. Considere $\lambda = 54.3480$ correspondente ao último ponto no ramo 4 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(d). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para $\lambda \in \{49.8480, 50.3480, 50.8480, 51.3480, 51.8480, 52.3480, 52.8480, 53.3480, 53.8480\}$ e obtivemos resultado análogo.

Teorema 11. Considere $\lambda = 83.9568$ correspondente ao último ponto no ramo 5 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(e). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para o $\lambda \in \{79.4568, 79.9568, 80.4568, 80.9568, 81.4568, 81.9568, 82.4568, 82.9568, 83.4568\}$ e obtivemos resultado análogo.

Teorema 12. Considere $\lambda = 133.3049$ correspondente ao último ponto no ramo 6 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(f). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para $\lambda \in \{128.8049, 129.3049, 129.8049, 130.3049, 130.8049, 131.3049, 131.8049, 132.3049, 132.8049\}$ e obtivemos resultado análogo.

Teorema 13. Considere $\lambda = 103.6990$ correspondente ao último ponto no ramo 7 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(g). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para $\lambda \in \{99.1960, 99.6960, 100.1960, 100.6960, 101.1960, 101.6960, 102.1960, 102.6960, 103.1960\}$ e obtivemos resultado análogo.

Teorema 14. Considere $\lambda = 133.3049$ correspondente ao último ponto no ramo 8 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(h). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para $\lambda \in \{128.8049, 129.3049, 129.8049, 130.3049, 130.8049, 131.3049, 131.8049, 132.3049, 132.8049\}$ e obtivemos resultado análogo.

Teorema 15. Considere $\lambda = 182.6529$ correspondente ao último ponto no ramo 9 de equilíbrio na Figura 4 e a correspondente aproximação de solução $\bar{u}(x)$ na Figura 5(i). Então existe $r \approx 10^{-10}$ e uma única solução de equilíbrio na bola de raio r centrada na aproximação.

Observamos que também aplicamos o método para $\lambda \in \{178.1529, 178.6529, 179.1529, 179.6529, 180.1529, 180.6529, 181.1529, 181.6529, 182.1529\}$ e obtivemos resultado análogo.

CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma extensão do método da continuação rigorosa para encontrar soluções de equilíbrio de EDPs dependentes de um único parâmetro, utilizando séries de Chebyshev. Analisamos EDPs unidimensionais e bidimensionais não lineares, com não linearidade polinomial. Este método no contexto das séries de Fourier foi introduzido em (GAMEIRO; LESSARD, 2010) para EDPs multidimensionais.

No caso unidimensional, o nosso objetivo foi alcançado com êxito e pode ser comparado com o método de (LESSARD; REINHARDT, 2014) para calcular rigorosamente soluções de EDOs não lineares usando séries de Chebyshev e consequentemente os problemas de valor inicial e problemas de valor de fronteira associados a estas EDOs. No nosso método nós trabalhamos diretamente com a equação diferencial, considerando a expansão da solução e das suas derivadas de qualquer ordem em séries de Chebyshev para obter o problema equivalente da forma $f(x) = 0$ em (LESSARD; REINHARDT, 2014) eles consideram a equação integral associada, para obter o problema equivalente. Se por um lado num primeiro momento o nosso método possa parecer um pouco mais complicado porque a expansão das derivadas da solução usando Chebyshev não são tão imediatas como no caso de Fourier e no método de (LESSARD; REINHARDT, 2014) que considera o problema integral esta dificuldade no contexto de Chebyshev não é considerada, o nosso método é mais vatajoso porque podemos considerar problemas de valor de fronteira com condições de fronteira mais gerais, como a condição de Robin em (LIU; YE; WANG, 2011) (que não é um método numérico rigoroso), enquanto no método de (LESSARD; REINHARDT, 2014) isso não é possível, além disso no nosso método não necessitamos transformar EDOs de ordem superior num sistema de EDOs de primeira ordem como é feito no método de (LESSARD; REINHARDT, 2014), o que aumenta naturalmente o custo computacional. Outra vantagem da abordagem do nosso método que permite analisar diretamente a estabilidade da solução.

No caso bidimensional, obtivemos um método semirrigoroso porque a nossa aproximação para a inversa do operador $Df(x, y)$ não foi suficientemente precisa como no caso unidimensio-

nal, onde utilizamos a ideia das matrizes quase-inversa de (LIU; YE; WANG, 2011), daí não conseguimos obter o limite uniforme. A parte mais trabalhosa do método já foi desenvolvida nesta tese e resolvido este impasse, o método se estenderá naturalmente para caso bidimensional. Pretendemos resolver este problema num trabalho futuro e isso será uma enorme contribuição para o campo do rigor numérico, pois permitirá abordar um dos problemas mais ambicionados na área, que são os que consideram EDPs periódicas no espaço e não periódicos no tempo, daí a solução combinará expansão de séries de Fourier no espaço com séries de Chebyshev no tempo.

REFERÊNCIAS

- BAKER, A. W.; DELLNITZ, M.; JUNG, O. A topological method for rigorously computing periodic orbits using fourier modes. **Discrete and Continuous Dynamical Systems**, v. 13, n. 4, p. 901–920, 2005. Citado na página 17.
- BERG, J. B. van den; LESSARD, J. P. Chaotic braided solutions via rigorous numerics: Chaos in the swift–hohenberg equation. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, v. 7, n. 3, p. 988–1031, 2008. Citado na página 17.
- BERG, J. B. van den; LESSARD, J. P.; DESCHENES, A.; JAMES, J. D. M. Stationary coexistence of hexagons and rolls via rigorous computations. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, v. 14, n. 2, p. 942–979, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- BOYD, J. P. **Chebyshev and Fourier Spectral Methods**. Berlin: Dover Publications, Springer-Verlag, 2001. Citado na página 19.
- BREDEN, M.; LESSARD, J. P.; JAMES, J. D. M. Computation of maximal local (un)stable manifold patches by the parameterization method. **Indagationes Mathematicae**, v. 27, n. 1, p. 340–367, 2016. Citado na página 16.
- BREUER, B.; MCKENNA, P.; PLUM, M. Multiple solutions for a semilinear boundary value problem: a computational multiplicity proof. **Journal of Differential Equations**, v. 195, p. 243–269, 2003. Citado na página 15.
- CAHN, J. W.; HILLIARD, J. E. Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy. **Journal of Chemical Physics**, v. 28, p. 258–267, 1958. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 71.
- CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. Polynomial approximation. In: _____. **Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains**. Berlin: Springer-Verlag, 2006. cap. 2, p. 87–88. Citado na página 23.
- _____. **Spectral Methods Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics**. Berlin: Springer-Verlag, 2007. Citado na página 21.
- CASTELLI, R.; LESSARD, J.; JAMES, J. M. Analytic enclosure of the fundamental matrix solution. **Applications of Mathematics**, v. 60, n. 6, p. 617–636, 2015. Citado na página 16.
- CORREC, A.; LESSARD, J. Coexistence of nontrivial solutions of the one-dimensional ginzburg-landau equation: a computer-assisted proof. **European Journal of Applied Mathematics**, v. 26, n. 1, p. 33–60, 2015. Citado na página 17.
- DANG-VU, H.; DELCARTE, C. An accurate solution of the poisson equation by the chebyshev collocation method. **Journal of Computational Physics**, v. 104, p. 211–220, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 27.
- DAY, S.; HIRAOKA, Y.; MISCHAIKOW, K.; OGAWA, T. Rigorous numerics for global dynamics: A study of the swift-hohenberg equation. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, v. 4, n. 1, p. 1–31, 2005. Citado na página 15.

- DAY, S.; JUNGE, O.; MISCHAIKOW, K. A rigorous numerical method for the global analysis of infinite-dimensional discrete dynamical systems. **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems**, v. 3, n. 2, p. 117–160, 2004. Citado na página 17.
- DAY, S.; LESSARD, J.; MISCHAIKOW, K. Validated continuation for equilibria of pdes. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 45, n. 4, p. 1398–1424, 2007. Citado na página 15.
- GAMEIRO, M. F.; LESSARD, J.-P. Analytic estimates and rigorous continuation for equilibria of higher-dimensional pdes. **Journal of Differential Equations**, v. 249, n. 9, p. 2237–2268, 2010. Citado 9 vezes nas páginas 15, 17, 33, 36, 38, 46, 78, 89 e 95.
- GAMEIRO, M. F.; LESSARD, J.-P.; MISCHAIKOW, K. Validated continuation over large parameter ranges for equilibria of pdes. **Journal of Differential Equations**, v. 79, n. 4, p. 1368–1382, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 97.
- GAMEIRO, M. F.; LESSARD, J.-P.; PUGLIESE, A. Computation of smooth manifolds via rigorous multi-parameter continuation in infinite dimensions. **Journal of Differential Equations**, v. 16, n. 2, p. 531–575, 2016. Citado na página 16.
- GAMEIRO, M. F.; LESSARD, J.-P.; RICAUD, Y. Rigorous numerics for piecewise-smooth systems: a functional analytic approach based on chebyshev series. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 292, p. 654–673, 2016. Citado na página 17.
- JULIEN, K.; WATSON, M. Efficient multi-dimensional solution of pdes using chebyshev spectral methods. **Journal of Computational Physics**, v. 228, p. 1480–1503, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 25.
- KELLER, H. B. **Lectures on Numerical Methods In Bifurcation Problems**. Berlin: Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 15, 30 e 33.
- KISS, G.; LESSARD, J. P. Computational fixed-point theory for differential delay equations with multiple time lags. **Journal of Differential Equations**, v. 252, n. 4, p. 3093–3115, 2012. Citado na página 16.
- LAUB, A. J. Kronecker products. In: _____. **Matrix Analysis for Scientists & Engineers**. Philadelphia: Siam, 1948. cap. 13, p. 139–144. Citado na página 28.
- LESSARD, J. P. Recent advances about the uniqueness of the slowly oscillating periodic solutions of wright’s equation. **Journal of Differential Equations**, v. 248, n. 5, p. 992–1016, 2010. Citado na página 17.
- LESSARD, J. P.; JAMES, J. M.; REINHARDT, C. Computer assisted proof of transverse saddle-to-saddle connecting orbits for first order vector fields. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, v. 26, n. 2, p. 267–313, 2014. Citado na página 16.
- LESSARD, J. P.; REINHARDT, C. Rigorous numerics for nonlinear differential equations using chebyshev series. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 52, n. 1, p. 1–22, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 89.
- LIU, F.; YE, X.; WANG, X. Efficient chebyshev spectral method for solving linear elliptic pdes using quasi-inverse technique. **The Global Science Journal, Numer. Math. Theor. Meth. Appl.**, v. 4, n. 2, p. 197–215, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 17, 35, 43, 58, 75, 89 e 90.

MAIER-PAAPE, S.; MISCHAIKOW, K.; MILLER, U.; WANNER, T. Rigorous numerics for the cahn-hilliard equation on the unit square. **Revista Matemática Complutense**, v. 21, n. 2, p. 351–426, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

NAKAO, M. T.; HASHIMOTO, K.; KOBAYASHI, K. Verified numerical computation of solutions for the stationary navier-stokes equation in nonconvex polygonal domains. **Hokkaido Mathematical Journal**, v. 36, p. 777–799, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

SWIFT, J.; HOHENBERG, P. C. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. **Physical Review A**, v. 1, n. 15, p. 319–328, 1977. Citado na página 54.

ZALEWSKI, M. Computer-assisted proof of a periodic solution in a nonlinear feedback dde. **Topological Methods in Nonlinear Analysis**, v. 33, n. 2, p. 373–393, 2009. Citado na página 17.

ZGLICZYNSKI, P.; MISCHAIKOW, K. Rigorous numerics for partial differential equations: The kuramoto-sivashinsky equation. **Foundations of Computational Mathematics**, v. 1, n. 3, p. 255–288, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

ESTIMATIVAS ANALÍTICAS

Neste apêndice apresentaremos as estimativas analíticas do termo não linear da EDP como em (GAMEIRO; LESSARD, 2010), que constitui uma das etapas fundamentais do cálculo de soluções de equilíbrio de equações diferenciais parciais. Consideraremos que a parte não linear da EDP envolve termos de convolução da forma

$$(c^{(1)} * \dots * c^{(n)})_k = \sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ k \in \mathbb{Z}^d}} c_{k^1}^{(1)} \dots c_{k^n}^{(n)}, \quad (\text{A.1})$$

onde $c^{(j)} = \{c_k^{(j)}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ é uma sequência de números reais ou complexos indexadas por $k \in \mathbb{Z}^d$ e mostraremos que assumindo que cada coeficiente $c_k^{(j)}$ tende a zero com uma certa taxa de decaimento então o termo de convolução (A.1) tende a zero com a mesma taxa de decaimento. Na Seção A.1 apresentamos as estimativas gerais para (A.1). Na Seção A.2, consideramos o parâmetro computacional M e separamos (A.1) em uma soma finita de tamanho M que é calculada explicitamente e uma soma infinita que é limitada usando estimativas analíticas. Na Seção A.3 consideramos o caso $k \notin F_M$ e obtemos uma estimativa uniforme para este caso, que é extremamente importante, pois permite que a verificação do Teorema da Aplicação Contração se reduza ao caso finito.

A.1 Estimativa Gerais

Nesta seção apresentamos as estimativas gerais para o caso d -dimensional, tal generalização foi feita em (GAMEIRO; LESSARD, 2010) e as estimativas para o caso unidimensional que motivaram tal generalização também podem ser encontradas em (GAMEIRO; LESSARD, 2010). Inicialmente definimos

$$\alpha_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)}(s, M) := \prod_{j=1}^d \alpha_{k_j}^{(n)}(s_j, M_j), \quad (\text{A.2})$$

onde $\alpha_{k_j}^{(n)}(s_j, M_j)$ é definida no caso unidimensional. Os seguintes limites são dados em termos de condições de regularidade das soluções.

Lema 6. Suponha que existam $A_1, A_2, \dots, A_n$ tal que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ e cada $k \in \mathbb{Z}^d$, tem-se

$$|c_k^{(j)}| \leq \frac{A_j}{\omega_k^s}, \quad (\text{A.3})$$

então, para qualquer $k \in \mathbb{Z}^d$, temos

$$|(c^{(1)} * \dots * c^{(n)})_k| \leq \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \frac{\alpha_k^{(n)}}{\omega_k^s}. \quad (\text{A.4})$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \left| (c^{(1)} * \dots * c^{(n)})_k \right| &= \left| \sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ k^1, \dots, k^n \in \mathbb{Z}^d}} c_{k^1}^{(1)} \dots c_{k^n}^{(n)} \right| \leq \sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ k^1, \dots, k^n \in \mathbb{Z}^d}} \frac{A_1}{\omega_{k^1}^s} \dots \frac{A_n}{\omega_{k^n}^s} \\ &= \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \left(\sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ k^1, \dots, k^n \in \mathbb{Z}^d}} \frac{1}{\omega_{k^1}^s \dots \omega_{k^n}^s} \right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \left(\sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ k^1, \dots, k^n \in \mathbb{Z}^d}} \prod_{j=1}^d \frac{1}{\omega_{k_j^1}^{s_j} \dots \omega_{k_j^n}^{s_j}} \right) \\ &= \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \left(\prod_{j=1}^d \sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ k^1, \dots, k^n \in \mathbb{Z}^d}} \frac{1}{\omega_{k_j^1}^{s_j} \dots \omega_{k_j^n}^{s_j}} \right) \\ &\leq \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \prod_{j=1}^d \frac{\alpha_{k_j}^{(n)}}{\omega_{k_j}^{s_j}} = \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \frac{\alpha_k^{(n)}}{\omega_k^s}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde a última desigualdade segue do caso unidimensional. $\square$

A.2 Refinamento Para o Caso $k \in F_M$

Nesta seção apresentamos um refinamento para o limite introduzido na Seção A.1, que permite fazer cálculos explícitos. Dada a sequência $c^{(j)} = \{c_k^{(j)}\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$, nós definimos $c_{F_M}^{(j)}$, a parte finita de $c^{(j)}$, componente a componente, por

$$(c_{F_M}^{(j)}) = \begin{cases} c_k^{(j)}, & \text{se } k \in F_M; \\ 0, & \text{se } k \notin F_M \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

e consideramos a separação

$$(c^{(1)} * \dots * c^{(n)})_k = (c_{F_M}^{(1)} * \dots * c_{F_M}^{(n)})_k + \sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ \{k^1, \dots, k^n\} \not\subset F_M}} c_{k^1}^{(1)} \dots c_{k^n}^{(n)}, \quad (\text{A.7})$$

onde o primeiro termo é uma soma de convolução finita e é explicitamente calculada usando o algoritmo FFT (transformada rápida de Fourier) e aritmética de intervalo como descrito em (GAMEIRO; LESSARD; MISCHAIKOW, 2008). Os seguintes resultados são usados para limitar a soma infinita na separação acima. Começamos definindo

$$\varepsilon_k^{(n)} = \varepsilon_k^{(n)}(s, M) := \frac{\alpha_k^{(n)}}{\omega_k^s} \max_{j=1, \dots, d} \left\{ \frac{\omega_{k_j}^{s_j}}{\alpha_{k_j}^{(n)}(s_j, M_j)} \varepsilon_{k_j}^{(n)}(s_j, M_j) \right\}, \quad (\text{A.8})$$

onde $\varepsilon_{k_j}^{(n)}(s_j, M_j)$ e $\alpha_{k_j}^{(n)}(s_j, M_j)$ são definidas no caso unidimensional.

Lema 7. Suponha que a condição (A.3) seja satisfeita então para $k \in F_M$, temos

$$\left| \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = k \\ \{k^1, \dots, k^\ell\} \notin F_M}} c_{k^1}^{(1)} \dots c_{k^n}^{(n)} \right| \leq \ell \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \varepsilon_k^{(n)}. \quad (\text{A.9})$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ \{k^1, \dots, k^\ell\} \notin F_M}} c_{k^1}^{(1)} \dots c_{k^n}^{(n)} \right| \leq \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ \{k^1, \dots, k^\ell\} \notin F_M}} \frac{1}{\omega_{k^1}^s} \dots \frac{1}{\omega_{k^n}^s} \\ & \leq \ell \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \sum_{\substack{k^1 + \dots + k^n = k \\ k^1 \notin F_M}} \frac{1}{\omega_{k^1}^s} \dots \frac{1}{\omega_{k^n}^s} \\ & \leq \ell \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \max_{j_0=1, \dots, d} \left\{ \left(\prod_{j=1}^d \sum_{\substack{k_j^1 + \dots + k_j^n = k_j \\ j \neq j_0 \quad k_j^1 \dots k_j^n \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{\omega_{k_j^1}^{s_j} \dots \omega_{k_j^n}^{s_j}} \right) \sum_{\substack{k_{j_0}^1 + \dots + k_{j_0}^n = k_{j_0} \\ k_{j_0}^1 \notin F_{M_{j_0}}}} \frac{1}{\omega_{k_{j_0}^1}^{s_{j_0}} \dots \omega_{k_{j_0}^n}^{s_{j_0}}} \right\} \quad (\text{A.10}) \\ & \leq \ell \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \max_{j_0=1, \dots, d} \left\{ \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d \frac{\alpha_{k_j}^{(n)}}{\omega_{k_j}^{s_j}} \right) \varepsilon_{k_{j_0}}^{(n)} \right\} \\ & = \ell \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \frac{\alpha_k^{(n)}}{\omega_k^s} \max_{j=1, \dots, d} \left\{ \frac{\omega_{k_j}^{s_j}}{\alpha_{k_j}^{(n)}} \varepsilon_{k_j}^{(n)} \right\} = \ell \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \varepsilon_k^{(n)}, \end{aligned}$$

onde as duas últimas desigualdades são consequências do caso unidimensional. $\square$

Corolário 6. Suponha que a condição (A.3) seja satisfeita então para $k \in F_M$, temos

$$\left| (c^{(1)} * \dots * c^{(n)})_k \right| = \left| (c_{F_M}^{(1)} * \dots * c_{F_M}^{(n)})_k \right| + n \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \varepsilon_k^{(n)}. \quad (\text{A.11})$$

Demonstração. O resultado segue imediatamente de (A.7) e do Lema . $\square$

A.3 Estimativa Uniforme Para o Caso $k \notin F_M$

Nesta seção apresentamos uma estimativa uniforme para o caso $k \notin F_M$. Para $M \in \mathbb{N}$, com $M \geq 6$ e $s \geq 2$, definimos

$$\tilde{\alpha}_M^{(n)} = \tilde{\alpha}_M^{(n)}(s, M) := \max_{k=0, \dots, M} \{\alpha_k^{(n)}(s, M)\} \quad (\text{A.12})$$

e então

$$\tilde{\alpha}_M^{(n)} = \tilde{\alpha}_M^{(n)}(s, M) := \max_{j_0=1, \dots, d} \left\{ \tilde{\alpha}_{M_{j_0}}^{(n)}(s_{j_0}, M_{j_0}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d \tilde{\alpha}_{M_j}^{(n)}(s_j, M_j) \right\}. \quad (\text{A.13})$$

Assim, obtemos o seguinte lema.

Lema 8. Suponha que a condição (A.3) seja satisfeita, então para $k \notin F_M$, temos

$$|(c^{(1)} * \dots * c^{(n)})_k| \leq \left(\prod_{j=1}^n A_j \right) \frac{\tilde{\alpha}_M^{(n)}}{\omega_k^s}. \quad (\text{A.14})$$

Demonstração. Como $k \notin F_M$, existe $j_0 \in \{1, \dots, d\}$ tal que $|k_{j_0}| \geq M_{j_0}$ e $\alpha_{k_{j_0}}^{(n)} \leq \alpha_{M_{j_0}}^{(n)}$, desta forma, temos

$$\alpha_k^{(n)} = \alpha_{k_{j_0}}^{(n)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d \alpha_{k_j}^{(n)} \leq \alpha_{M_{j_0}}^{(n)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^d \tilde{\alpha}_{M_j}^{(n)} \leq \tilde{\alpha}_M^{(n)}. \quad (\text{A.15})$$

O resultado segue da estimativa geral (A.4). $\square$