

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Introdução à determinação, medida e categoria

Gustavo Henrique Labegalini Boska

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em
Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Gustavo Henrique Labegalini Boska

Introdução à determinação, medida e categoria

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Matemática. *EXEMPLAR DE DEFESA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
Julho de 2021

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

L116i Labegalini Boska, Gustavo Henrique
Introdução à determinação, medida e categoria /
Gustavo Henrique Labegalini Boska; orientador
Leandro Fiorini Aurichi. -- São Carlos, 2021.
156 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2021.

1. Teoria descritiva de conjuntos. 2. Jogos
infinitos. 3. Determinação. 4. Propriedade perfeita.
5. Categoria de Baire. I. Fiorini Aurichi, Leandro,
orient. II. Título.

Gustavo Henrique Labegalini Boska

Introduction to determinacy, category and measure

Dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP – in accordance with the requirements of the Mathematics Graduate Program, for the degree of Master in Science.
EXAMINATION BOARD PRESENTATION COPY

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Leandro Fiorini Aurichi

USP – São Carlos
July 2021

À Deus minha mãe.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“Just so you know Jeff,
you’re now creating six different timelines.”
(Abed Gubi Nadir)*

RESUMO

BOSKA, G. H. L. **Introdução à determinação, medida e categoria.** 2021. 189 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

Esta dissertação discute alguns tópicos de teoria descritiva de conjuntos. Os assuntos abordados são árvores, seu espaço de ramos, jogos infinitos e sua determinação, em particular abordamos os teoremas de Gale-Stewart e da determinação de Borel. Em seguida a dissertação discute espaços poloneses, categoria topológica e suas interações com medida e combinatória, com interesse especial nas propriedades perfeita, de Baire e Lebesgue-mensurabilidade. Por fim, o texto aborda as consequências de alguns jogos topológicos sobre as propriedades perfeita e de Baire para subconjuntos de espaços poloneses.

Palavras-chave: Teoria descritiva de conjuntos, determinação, árvore, ramos, Jogo de Gale-Stewart, Teorema de Gale-Stewart, Teorema da Determinação de Borel, Propriedade perfeita, Propriedade de Baire, Baire-mensurável, Lebesgue-mensurável, Medida e categoria, Vitali, Bernstein, Lusin, Espaços poloneses, Jogo *, Jogo de Banach Mazur, Jogo de Choquet, Axioma da determinação.

ABSTRACT

BOSKA, G. H. L. **Introduction to determinacy, category and measure**. 2021. 189 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2021.

This dissertation discusses some topics of descriptive set theory. The subjects of interest are trees and their branch spaces, infinite games and their determinacy, in particular the theorems of Gale-Stewart and of Borel determinacy. Next the text develop some basic topological aspects of polish spaces, topological category and its interactions with measure and combinatorics, with special interest on the perfect property, Baire and Lebesgue measurability. Finally, we focus on consequences of determinacy, of three particular topological games, over the the perfect and Baire properties of subsets of polish spaces.

Keywords: Descriptive set theory, Determinacy, Trees, Branches, Gale-Stewart Game, Gale-Stewart Theorem, Borel determinacy theorem, Perfect property, Baire property, Baire-measurability, Lebesgue-measurability, Measure and Category, Vitali, Bernstein, Lusin, Polish spaces, * Game, Banach Mazur Game, Choquet Game, Determinacy axiom.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Diagrama aproximado das dependências do Capítulo 1 Árvores. Destacados por [·] tópicos mais usadas nos capítulos subsequentes. A seção sobre estrutura de reticulado é usada apenas para a caracterização da plenitude do functor ramo.	iii
Figura 2 – Jogos como árvores.	iv
Figura 3 – Diagrama aproximado das dependências do Capítulo 2 Jogos e Determinação. Linhas tracejadas indicam dependência fraca. As seções centrais do diagrama são a espinha dorsal do capítulo.	v
Figura 4 – Relacionamento entre algumas propriedades.	viii
Figura 5 – Diagrama aproximado das dependências dos capítulos Capítulo 3 Resultados preliminares e sua importância em outros segmentos do texto.	ix
Figura 6 – Diagrama aproximado das dependências do Capítulo 5 Medida e categoria. Para construirmos um conjunto de Vitali Perfeito, vamos precisar de algumas seções do apêndice. Na seção dos conjuntos de Bernstein, contruímos um conjunto de Vitali de Bernstein.	x
Figura 7 – Usando o axioma da escolha, construimos uma série de exemplos. Estes exemplos testemunham que as classes dos conjuntos perfeitos, Lebesgue-mensuráveis e Baire-mensuráveis não colapsam uma sobre a outra.	xi
Figura 8 – Diagrama aproximado das dependências do Capítulo 6 Aplicações da determinação.	xii
Figura 9 – Propriedades.	xiii
Figura 10 – Algumas possíveis rotas de leitura.	xiv
Figura 11 – Rota da propriedade perfeita.	xv
Figura 12 – Rota da propriedade de Baire.	xvi

Figura 13 – Caso particular $I \doteq \{0, 1\}$ do produto. Estão implícitos os quantificadores $\forall \varphi_0, \varphi_i \exists ! \varphi$	xviii
Figura 14 – Árvore de compactos da reta \mathbb{R}	2
Figura 15 – O ordinal $h(T)$, indexando os níveis da árvore T . O mapa $\cdot \upharpoonright \theta$, caracterizando T vista como functor (Sistema Inverso). O tronco da árvore até altura α	4
Figura 16 – Aberto básico de $[T]$. Aqui estamos imaginando a linha horizontal como sendo $[T]$, cadeias maximais.	5
Figura 17 – À esquerda, um ramo não isolado α e um conjunto aderente de ramos. À direita, um ramo isolado β e $t \in \beta$ tal que $\Sigma(t) = \{\beta\}$. Note que t não tem sucessores que bifurcam.	8
Figura 18 – Definição do mapa injetivo $\alpha \in 2^\omega \mapsto T_\alpha$ árvore perfeita.	9
Figura 19 – Comutatividade dos morfismos de um cone e setas entre cones.	14
Figura 20 – Exemplo de morfismo próprio, função não monótona e função monótona com ramo fora do domínio. Note que $\varphi \upharpoonright \alpha$ não é cofinal em nenhum dos dois ramos candidatos a $[\varphi](\alpha)$, que ficaria com valor ‘ambíguo’.	20
Figura 21 – Boa definição de $[\varphi] : D_\varphi \rightarrow [T_2]$ (Proposição 1.3.1).	21
Figura 22 – Dois elementos e o ínfimo $\wedge \{a, b\}$	25
Figura 23 – Árvore bifurcando em altura limite. Note que $a \wedge b$ não está bem definido. A cadeia $P \doteq \omega \subset T$ não tem supremo.	27
Figura 24 – Dois morfismos próprios com a mesma função ramo.	27
Figura 25 – Diagramas comutativos de alguns morfismos envolvidos na demonstração.	29
Figura 26 – Alguns elementos da árvore subjacente do jogo da velha.	37
Figura 27 – Uma estratégia de I	40
Figura 28 – Posição t . Subárvore associada T_t . Alvo do jogo \mathcal{G} . Intersecção entre os ramos de T_t e o alvo X do jogo original, definindo o alvo de I no subjogo \mathcal{G}_t	47
Figura 29 – Diagrama esquemático do segundo caso na demonstração.	48
Figura 30 – Diagrama do jogo construído na Proposição 2.5.1, mostrando que $\text{Det}(\omega^\omega)$ não é fechado com relação a complementação.	52
Figura 31 – A árvore \tilde{T} do jogo \tilde{G} , candidato a k -cobertura de \mathcal{G}	55

Figura 32 – Diagrama comutativo de cone \bar{T} e morfismos relevantes.	60
Figura 33 – Diagrama indicando as árvores que vão sendo fixadas na pilha de coberturas. Leia da direita para a esquerda.	61
Figura 34 – Um ramo através do esquema f e um de seus níveis	68
Figura 35 – Vamos denotar $\mathcal{A}f \doteq \bigcup_{\alpha \in [T]} \text{Br}(f, \alpha)$ e $\mathcal{B}f \doteq \bigcap_{\gamma \in h(T)} \text{level}(f, \gamma)$	68
Figura 36 – Construção do esquema de Cantor do Teorema 3.3.3.	75
Figura 37 – Se X é métrico, as arestas no diagrama acima	79
Figura 38 – Um conjunto A e exemplos de pontos na projeção e coprojeção.	82
Figura 39 – Hierarquia de subconjuntos de poloneses.	83
Figura 40 – Diagrama comutativo com os espaços, vizinhanças e pontos envolvidos.	114
Figura 41 – Usando o axioma da escolha, as classes dos conjuntos perfeitos, Lebesgue-mensuráveis e Baire-mensuráveis não colapsam uma sobre a outra.	115
Figura 42 – Uma árvore, sua restrição aos níveis ímpares e sua restrição aos níveis pares.	132
Figura 43 – Valor de $\theta(n)(i)$ para alguns pares. A partir da diagonal, temos sequências convergentes.	170
Figura 44 – A compacidade das componentes permite que uniformizemos U , obtendo uma vizinhança retangular $A \times B$ de $k_1 \times k_2$	174

LISTA DE SÍMBOLOS

Succ — Operador que toma sucessores de elemento de árvores.

$h(\cdot)$ — Altura de um elemento de árvore.

level — Nível de uma árvore.

$T \upharpoonright \gamma$ — Tronco de uma árvore, ou seja, restrição à elementos de altura menor que essa

$A^{<\omega}$ — Sequências finitas de elementos do conjunto em questão. Sinônimo de A^* , onde $*$ denota o operador de Kleene, o conjunto de palavras infinitas sobre o alfabeto A , usado na computação.

$t \triangleleft \alpha$ — A sequência / ramo α estende t , elemento de árvore.

$[\cdot]$ — Ramos ou corpo de árvore ou sub-árvore de árvore fixada.

$\langle \rangle$ — Raiz de uma árvore. Posição inicial de um jogo. Sequência vazia, elemento neutro do grupo livre gerado por uma lista de caracteres.

(T, X) — Um par determinando uma árvore e um subconjunto de seus ramos. Um jogo.

$S_{\mathcal{G}}$ — Estratégias de um jogo \mathcal{G} .

$[CH]$ — A hipótese do contínuo

$\text{PSP}(\Gamma)$ — A classe pontual Γ tem a propriedade perfeita.

BP — Propriedade de Baire.

\mathbb{D} — No Seção B.5, dado X espaço subentendido define-se $\mathbb{D}_n \doteq \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : \exists i \neq j (x_i = x_j)\}$

$J(R)$ — No Seção B.5, $J(R) \subset \mathcal{K}X$ é o conjunto de compactos R -independentes (Definição B.5.1)

SUMÁRIO

I	ÁRVORES E JOGOS	1
1	ÁRVORES	1
1.1	Introdução	2
1.2	Espaço topológico dos ramos	5
1.2.1	<i>Propriedades topológicas</i>	6
1.2.2	<i>O lema de König, o axioma da escolha dependente, limites inversos e compacidade</i>	12
1.3	Propriedade Functorial	18
1.3.1	<i>Subárvores Próprias</i>	24
1.3.2	<i>Último Ancestral Comum</i>	25
1.3.3	<i>Imagens, fidelidade e plenitude</i>	27
1.4	Boa Fundação	31
2	JOGOS E DETERMINAÇÃO	37
2.1	Introdução	37
2.2	Equivalência e dualidade	41
2.3	Determinação	42
2.3.1	<i>Um jogo não determinado</i>	44
2.4	Teorema de Gale-Stewart	46
2.5	Teorema da Determinação de Borel	51
II	TEORIA DESCRITIVA DE CONJUNTOS	63
3	RESULTADOS PRELIMINARES	65
3.1	Introdução	65
3.2	Esquemas de Conjuntos	67

3.3	Espaços Poloneses e uma caracterização do espaço de Cantor	71
4	REGULARIDADE E PROPRIEDADES	77
4.1	Regularidade	77
4.1.1	<i>A Hierarquia de Borel</i>	78
4.1.2	<i>Analíticos</i>	81
4.2	Propriedades e estrutura	84
4.2.1	<i>Hipótese do contínuo</i>	85
4.2.2	<i>Propriedade perfeita</i>	87
4.2.3	<i>Categorias topológicas e a propriedade de Baire</i>	91
4.2.3.1	<i>Localização</i>	95
5	MEDIDA E CATEGORIA	103
5.1	Introdução	103
5.2	Teorema de Kuratowski-Ulam	107
5.3	Aplicações a grupos topológicos	110
5.4	Irregularidade na medida, na topologia e na combinatória	115
5.4.1	<i>Conjuntos de Vitali</i>	115
5.4.2	<i>Conjuntos de Bernstein</i>	119
5.4.3	<i>Conjuntos de Lusin e Sierpinski</i>	125
III	CONSEQUÊNCIAS DA DETERMINAÇÃO	129
6	APLICAÇÕES DA DETERMINAÇÃO	131
6.1	Introdução	131
6.1.1	<i>Aplicações na lógica</i>	133
6.2	O Jogo * e a propriedade perfeita	135
6.2.1	<i>Propriedade perfeita para analíticos</i>	139
6.3	O jogo de Choquet e espaços de Baire	142
6.3.1	<i>O jogo forte de Choquet</i>	146
6.3.2	<i>Uma caracterização de espaços poloneses</i>	147
6.4	O jogo de Banach-Mazur e a propriedade de Baire	150
6.4.1	<i>Propriedade de Baire para analíticos</i>	154

6.5	Axioma da determinação	156
	REFERÊNCIAS	159
	Índice	163
	APÊNDICE A TEORIA DE CONJUNTOS	169
A.1	Cardinalidade	169
A.2	Árvores	170
	APÊNDICE B TOPOLOGIA	171
B.1	Bases e Enumerabilidade	171
B.2	Metrizabilidade, Completude e Compacidade	172
B.3	Hiper-espaço de Vietoris	174
B.3.1	<i>A Métrica de Hausdorff e Propriedades Herdadas</i>	176
B.4	Categorias Topológicas	178
B.5	Relações magras e conjuntos independentes	179
	APÊNDICE C MEDIDA	183
C.1	Teorema do Isomorfismo de Borel	185
	ANEXO A PÁGINAS INTERESSANTES NA INTERNET	189

INTRODUÇÃO

Várias teorias matemáticas envolvem **famílias de subconjuntos** satisfazendo certa axiomática. Na teoria da medida estes são os conjuntos mensuráveis, formando uma σ -álgebra. Na topologia a família dos abertos, satisfazendo os axiomas de espaços topológicos. Em álgebra, temos as subestruturas, como gradações ou subgrupos de um grupo. Na combinatória, complexos simpliciais abstratos e matroides seguem a mesma fundamentação.

Frequentemente, precisamos começar por conjuntos **regulares**. Conjuntos simples, de fácil descrição e que **codificam** tão bem toda a estrutura que, de alguma forma, que podemos **recuperar** o modelo original a partir deles. Na teoria medida, estes serão conjuntos geradores. Na topologia, os abertos básicos. Na álgebra conjuntos geradores. Na álgebra linear (e matroides), as bases.

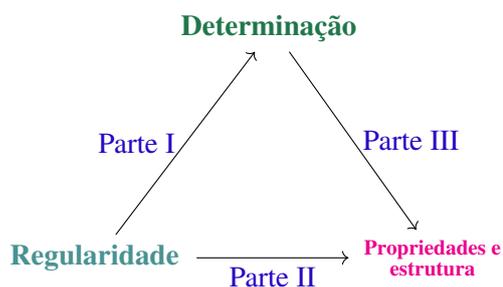
Estes conjuntos costumam ter boas **propriedades e estrutura**. Bases e famílias geradores tem menos elementos que toda a topologia ou σ -álgebra. As bases de um matroide e símlices maximais caracterizam completamente um matroide/complexo simplicial. Valores de uma transformação linear dependem apenas de sua avaliação numa base. Funções simples assumem um número finito de valores e tem uma integral simples de se definir.

Note que estes conjuntos armazenam informação suficiente sobre a estrutura. Desse modo, podemos recuperá-la ou aproximar conjuntos mais complexos através de um processo de aproximação, ou regularização. Funções mensuráveis positivas podem ser aproximadas por funções simples. Abertos podem ser aproximados por bases. Vetores quaisquer são combinações lineares de vetores da base. Através destes processos,

caso sejam bem comportados, preservam boas propriedades para estes conjuntos mais complicados.

Vamos considerar agora outro aspecto de um conjunto, assim como os matroides, de natureza combinatória: A **determinação**. Suponha que temos uma maneira bem definida de usar um conjunto X como parâmetro para gerar um jogo, entre dois jogadores. Este parâmetro é $X = \{ \text{conjunto de posições finais que indicam vitória para um certo jogador} \}$. Dizemos que um jogo é **determinado** quando algum jogador tem estratégia vencedora. Sob o axioma da escolha, existem parâmetros X que dão origem a jogos não determinados. Definimos então que, quando o parâmetro X gera um jogo determinado, X é **determinado**.

O conteúdo abordado na dissertação poderia ser resumido nos seguintes esquemas de resultado:



- Regulares geram jogos determinados.
- Regulares têm boas propriedades.
- Conjuntos que geram jogos determinados têm boas propriedades.
- Estas noções aparecem, de maneira associada e rica em paralelos e interdisciplinaridade, na topologia, teoria da medida e na combinatória.

Parte I

Começamos por árvores, seus ramos e diferentes disfarces em diferentes áreas. Na álgebra e em sistemas dinâmicos¹, as árvores aparecem como o grafo de Cayley do grupo livre de palavras geradas por um alfabeto. No limite, vemos que este grafo contém raios, ou **ramos**. Estes ramos podem ser munidos de uma topologia através de várias motivações. Encontramos uma na teoria dos grafos, outra em categoria, topologia clássica e algébrica², e todas elas coincidem sob certas condições de enumerabilidade. Caracterizamos algumas propriedades topológicas deste espaço em termos de características combinatórias destas árvores. Discutimos também o caráter functorial da construção deste espaço, sua fidelidade e plenitude.

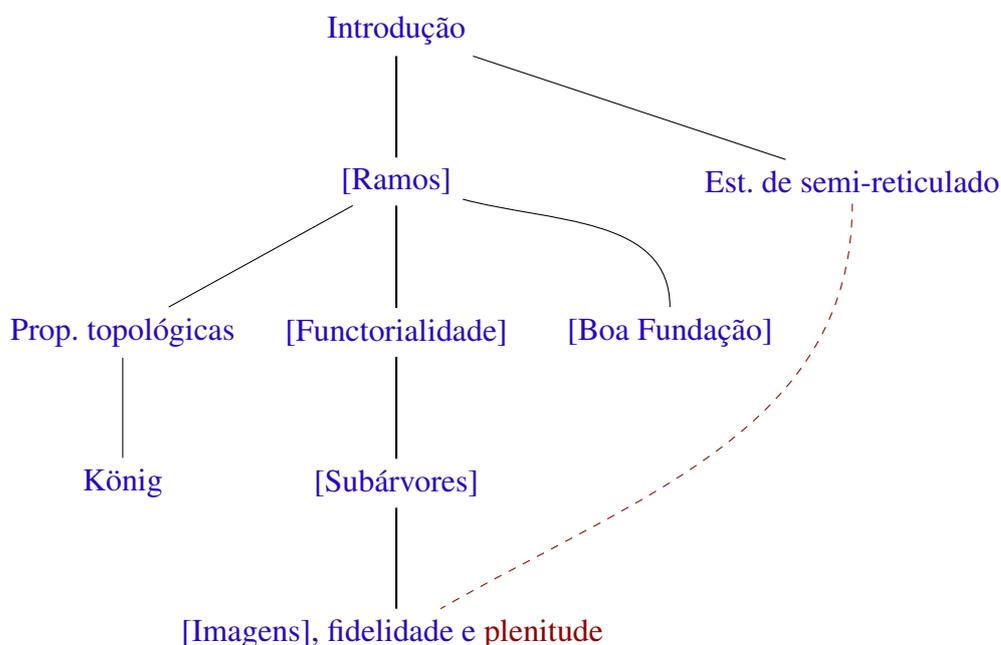


Figura 1 – Diagrama aproximado das dependências do Capítulo 1 Árvores. Destacados por [·] tópicos mais usadas nos capítulos subsequentes. A seção sobre estrutura de reticulado é usada apenas para a caracterização da plenitude do functor ramo.

Seguimos com um capítulo sobre jogos. Abordamos no texto apenas jogos entre

¹ Sistemas iterados de funções.

² Respectivamente, espaço de extremidades de grafos localmente finitos, limite inverso, topologia de subespaço do espaço produto usais e compactificação de Freudenthal.

dois jogadores, sem empate e com informação perfeita. Em outras palavras, os jogadores *I* e *II* jogam alternadamente em cada rodada, até que cheguemos a um estado final do jogo, que significa vitória para exatamente um dos dois jogadores. Vamos modelar estes jogos como árvores :

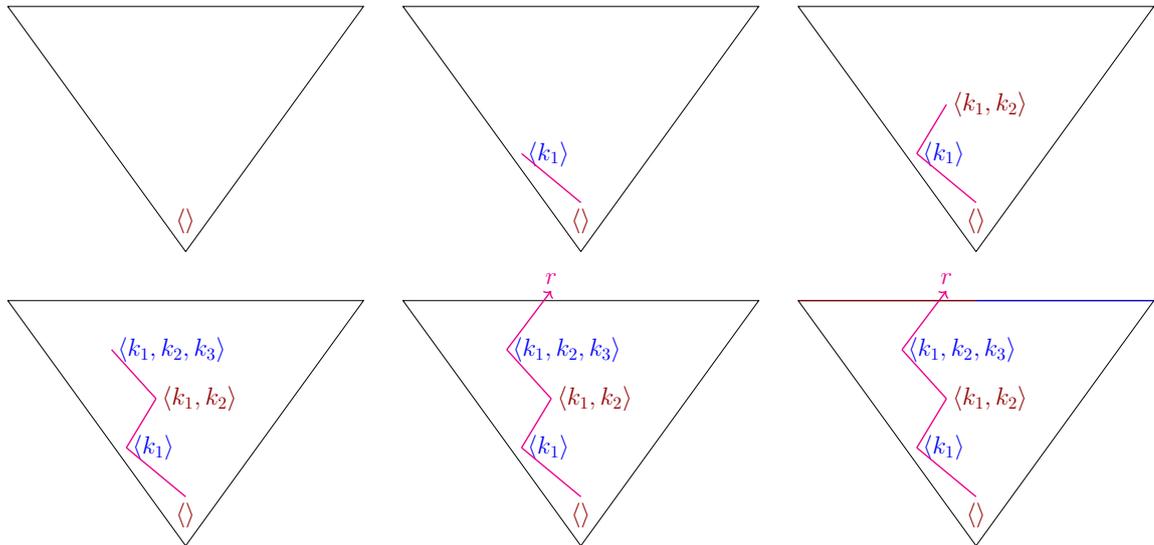


Figura 2 – Jogos como árvores.

- Começamos na posição inicial $\langle \rangle$.
- O jogador *I* seleciona uma de suas opções k_1 , movendo o tabuleiro para um dos estados disponíveis.
- O jogador *II* seleciona k_2 , uma de suas jogadas legais a partir desta posição.
- O jogador *I* joga k_3 .
- Ao fim do jogo temos r , um estado final (ramo).
- **Critério de vitória** : particionamos os estados finais em dois : vitória para *I* ou vitória para *II*.

Uma estratégia do jogador *I* é uma forma **bem definida** (\exists) que este jogador usará para reagir a **todas** (\forall) as jogadas de *II*. Análogo para o jogador *II*. Suponha que,

ao jogar de acordo com uma estratégia fixada, um jogador sempre vence, para quaisquer que sejam os movimentos adversários. Dizemos que esta estratégia é **vencedora**. Note que a **determinação** depende da partição do espaço de ramos da árvore fixada como critério de vitória. Esta parte tenta estabelecer que partições **regulares** resultam em jogos **determinados**. De fato, mesmo que não tenhamos empates em nossos jogos, existem jogos onde nenhum dos jogadores sabe vencer (**Corolário 2.3.2**). Estabelecemos o **teorema de Gale-Stewart**, que afirma que partições delimitadas por **abertos e fechados** do espaço de ramos geram jogos **determinados**, e o **Teorema da determinação de Borel** que estende este resultado para subconjuntos **Borelianos** do espaço de ramos.

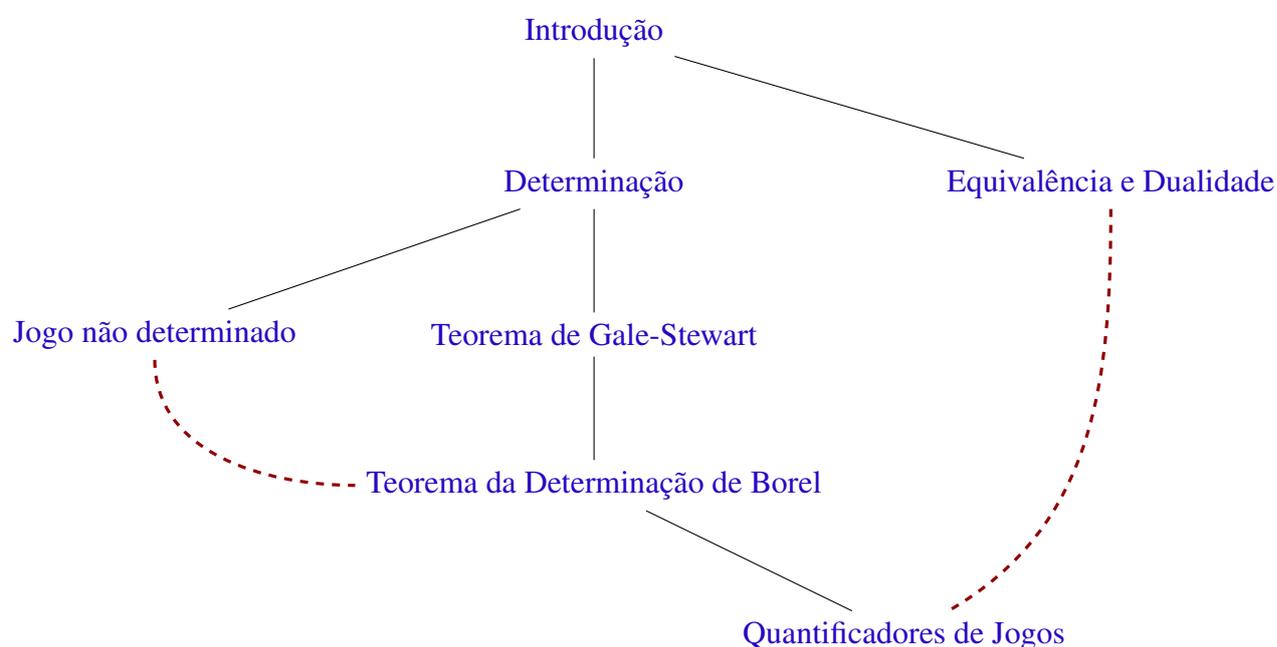


Figura 3 – Diagrama aproximado das dependências do **Capítulo 2 Jogos e Determinação**. Linhas tracejadas indicam dependência fraca. As seções centrais do diagrama são a espinha dorsal do capítulo.

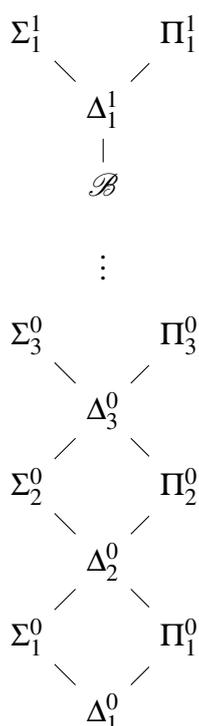
Parte II

Na segunda parte, abordamos teoria descritiva básica. Começamos com alguns resultados sobre árvores de conjuntos e suas aplicações, introduzindo o operador de Souslin. A intenção desta seção é de construir, através de certas árvores de conjuntos, funções contínuas com boas propriedades. Atamos um nó com a [Parte I](#), caracterizando espaços zero-dimensionais ultrametrizáveis como espaços de ramos de árvores. Em seguida, discutimos espaços poloneses e algumas propriedades quase universais do espaço de Cantor e do espaço de Baire nesta subcategoria de espaços topológicos. Concluímos esta seção usando árvores de conjuntos para demonstrar o teorema de Brouwer, que caracteriza o espaço de Cantor como o único espaço completamente metrizável, zero-dimensional, segundo enumerável, compacto e sem pontos isolados³. Seguimos para o teorema do isomorfismo de Borel, que afirma que espaços poloneses tem, a menos de bijeção bimensurável⁴, **apenas dois tipos** de **Borelianos**: enumeráveis e espaços de Cantor.

Introduzimos formalmente a noção de **regularidade** usada na dissertação. Vamos considerar famílias de subconjuntos, chamadas de **classes pontuais**, de espaços completamente metrizáveis e separáveis.

³ De onde podemos concluir que seu conjunto de compactos não vazios, munidos de métrica de Hausdorff, é também homeomorfo ao próprio espaço de Cantor

⁴ isomorfismos na categoria de espaços mensuráveis



Um exemplo são os abertos do espaço X , denotados por $\Sigma_1^0(X)$, e os fechados, chamados de $\Pi_1^0(X)$. Conjuntos mais complexos são construídos com um processo de indução transfinita. Definimos elementos de Σ_α^0 como reuniões enumeráveis de elementos de Π_γ^0 , com $\gamma < \alpha$. Elementos de Σ_2^0 , por exemplo, são os F_σ . A classe Π_α^0 é definido como a classe dos complementos dos elementos de Σ_α^0 . A intersecção entre os dois é denotada por Δ_α^0 . Podemos mostrar que estas classes de conjuntos formam uma hierarquia cumulativa. Ao fim de ω_1 passos esse processo passa por todos os Borelianos de X . Isto oferece uma estratificação dos Borelianos, denotados por \mathcal{B} , em classes cumulativas de complexidade crescente. Definimos também os conjuntos analíticos, denotados por Σ_1^1 .

Usando estas ideias, é possível classificar funções Borel-mensuráveis $f : X \rightarrow Y$ em **classes de mensurabilidade**. Intuitivamente, analisamos como a inversa $f^{-1} : \mathcal{B}(Y) \rightarrow \mathcal{B}(X)$ aumenta a complexidade de conjuntos simples, ou seja, verificamos a classe de complexidade de $f^{-1}(A)$.

Partimos para as **propriedades e estruturas** de interesse. Vamos dizer que uma classe de conjuntos satisfaz uma propriedade se todos os seus elementos a satisfazem. Começaremos pela já conhecida **hipótese do contínuo** (CH), passando pelo teorema de Ulam, que afirma que qualquer medida $\mu : \mathcal{P}(\aleph_1) \rightarrow [0, 1]$ ⁵ que satisfaz $\mu(\{x\}) = 0$ é nula. Em particular, sob a hipótese do contínuo, a reta e o intervalo unitário não têm medidas satisfazendo as hipóteses do teorema. Partimos para a versão topológica da hipótese do contínuo, a **propriedade perfeita** (PSP). Dizemos que um subespaço $S \subset X$ tem a propriedade perfeita quando podemos inserir uma cópia $\mathcal{C} \hookrightarrow S$ do espaço de Cantor. Mostramos que **os fechados e G_δ 's** de poloneses têm **essa propriedade**, e concluímos com isso que vale a hipótese do contínuo nestas classes pontuais.

⁵ Aqui \aleph_1 indica a menor cardinalidade maior que $|\mathbb{N}|$.

Outra propriedade de importância será a **propriedade de Baire** (BP). Estes serão o análogo topológico dos **Lebesgue-mensuráveis**. Essa σ -álgebra fornece os paralelos e transferência de resultados entre topologia e medida, e por isso os chamaremos de **Baire-mensuráveis**. Um exemplo é o Teorema de Lusin, que afirma que dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-mensurável, então para qualquer $\delta > 0$ existe uma contínua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que difere de f em um conjunto com medida $< \delta$. Seu análogo topológico é, de certo modo, mais forte: seja $f : X \rightarrow Y$ Baire-mensurável, se Y é segundo enumerável então f é contínua em todo ponto de X , exceto por um conjunto $S \subset X$ magro (análogo de conjunto de medida nula). Alguns relacionamentos entre as propriedades e regularidade são delimitados aqui.

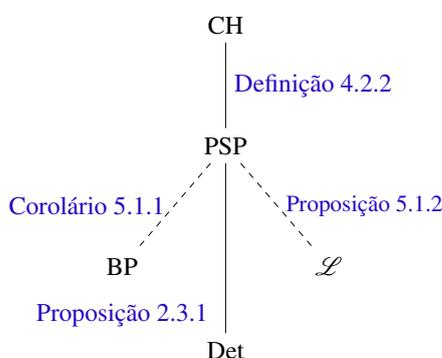


Figura 4 – Relacionamento entre algumas propriedades.

Passamos para o capítulo sobre a dualidade entre teoria da medida e categoria topológica. Muitas analogias estão espalhadas pelo texto depois da introdução dos Baire-mensuráveis, mas nesta seção os teoremas de Fubini e de Steinhaus-Weil são o foco. Abstraindo algumas technicalidades, o teorema de Fubini afirma que um subconjunto do produto de espaços mensuráveis tem medida nula se, e somente se, suas seções quase-sempre têm medida nula. Seu análogo topológico, o **Teorema de Kuratowski-Ulam**, afirma que um subconjunto do produto de espaços topológicos é magro se, e somente se, suas seções são quase sempre magras.

Temos também o **Teorema de Steinhaus-Weil** mensurável e seu análogo topológico, o **Teorema de Pettis**. Mais uma vez omitindo as hipóteses, estes teoremas afirmam

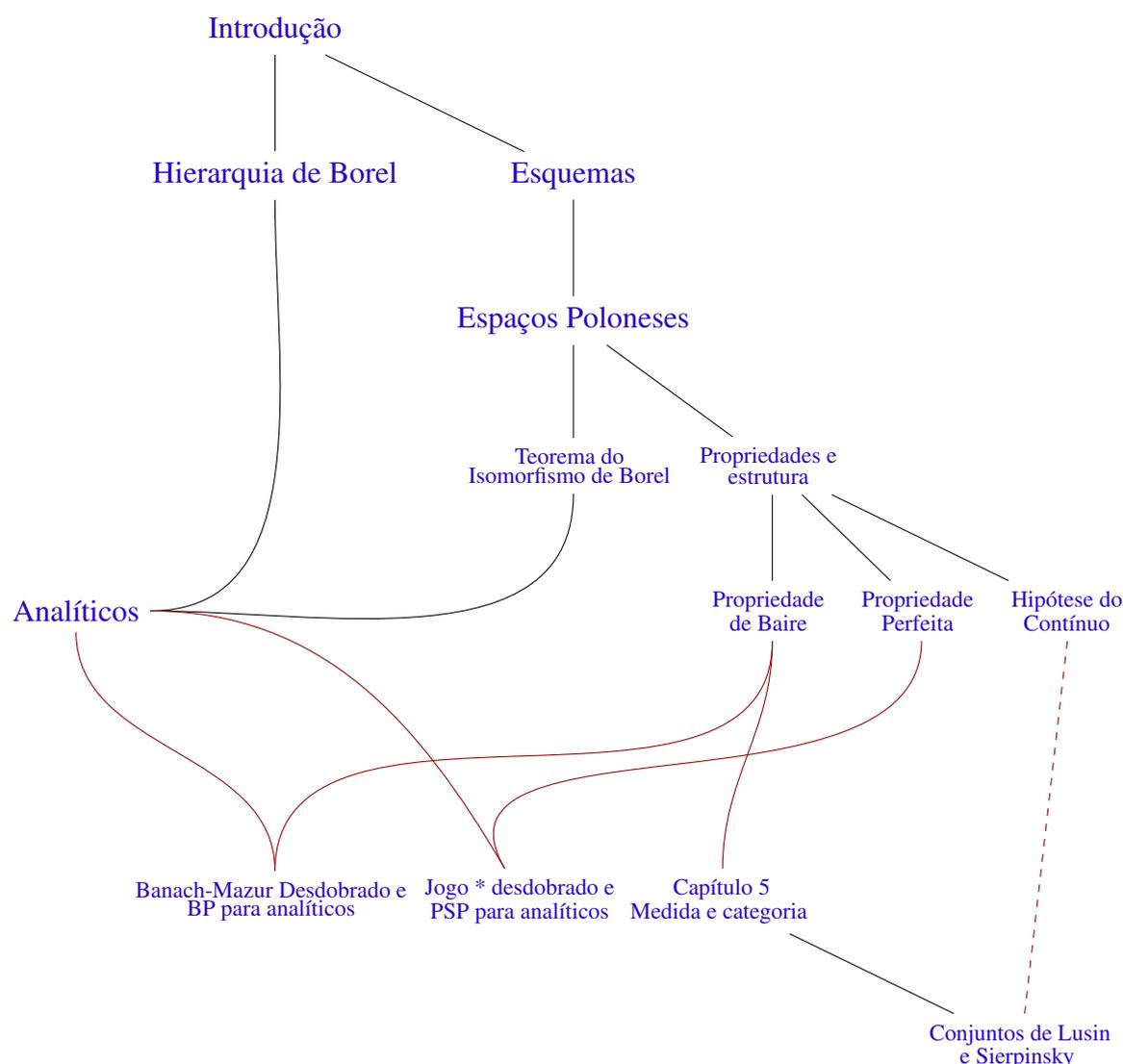


Figura 5 – Diagrama aproximado das dependências dos capítulos **Capítulo 3 Resultados preliminares** e sua **importância** em outros segmentos do texto.

que se um subconjunto $A \subset G$ é mensurável (no sentido de Lebesgue ou de Baire) e não desprezível (medida positiva ou não magro), então $A \cdot A^{-1}$ contém uma vizinhança da identidade. Em particular, no caso da medida de Lebesgue em $(\mathbb{R}, +)$, se temos um conjunto de medida positiva A , então a subtração $A - A$ deve conter uma vizinhança de 0. A versão mensurável deste teorema é precisamente a obstrução para que os bem conhecidos **conjuntos de Vitali** sejam Lebesgue-mensuráveis. A versão topológica será,

da mesma forma, a obstrução para que **os mesmos conjuntos** sejam Baire-mensuráveis. Isso motiva o início de um série de construções de conjuntos que exibem irregularidade do ponto de vista da Lebesgue-mensurabilidade, Baire-mensurabilidade, determinação e combinatória (no sentido de teoria de Ramsey), incluindo também os conjuntos de Bernstein, de Lusin e de Sierpinski.

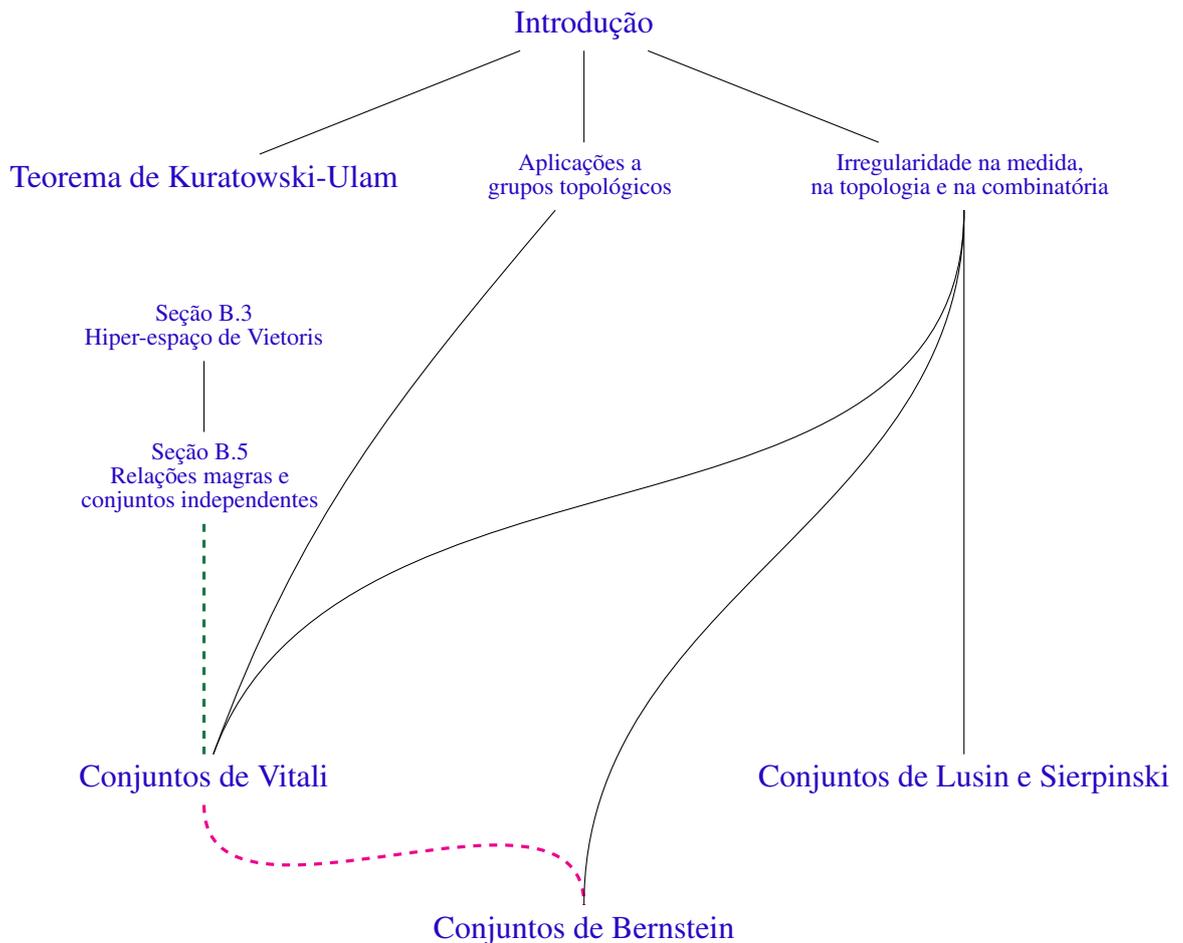


Figura 6 – Diagrama aproximado das dependências do Capítulo 5 Medida e categoria. Para construirmos um conjunto de Vitali Perfeito, vamos precisar de algumas seções do apêndice. Na seção dos conjuntos de Bernstein, contruímos um conjunto de Vitali de Bernstein.

Ao longo do capítulo, vamos usar alguns desses conjuntos para construir um exemplo não trivial em cada uma das 8 combinações das propriedades, perfeita de Baire e mensurabilidade no sentido de Lebesgue.

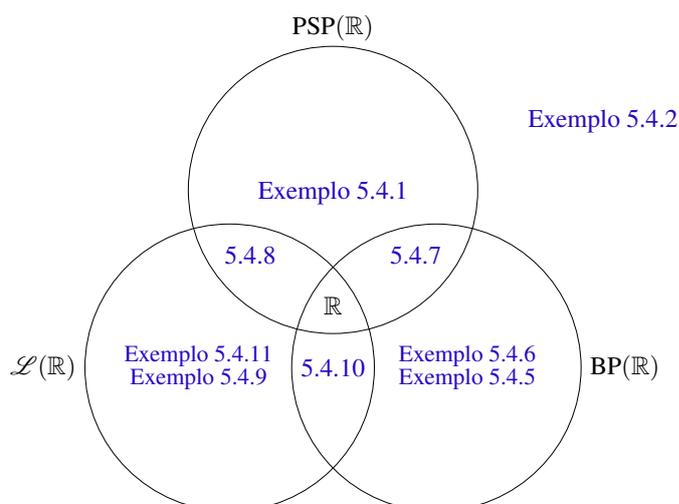


Figura 7 – Usando o axioma da escolha, construímos uma série de exemplos. Estes exemplos testemunham que as classes dos conjuntos perfeitos, Lebesgue-mensuráveis e Baire-mensuráveis não colapsam uma sobre a outra.

Parte III

Ao fim, estudamos alguns jogos topológicos que caracterizam a propriedades perfeita, espaços poloneses e de espaços de Baire e, por fim, Baire-mensurabilidade. Mais especificamente, cada um desses jogos recebe um conjunto como parâmetro. A determinação do jogo, gerado por este conjunto, tem consequências sobre a satisfação das propriedades mencionadas pelo conjunto parâmetro. Ao combinar resultados da primeira parte com estas caracterizações, obtemos boas propriedades para conjuntos regulares.

Começamos pelo **jogo ***, que toma um conjunto como parâmetro. A **determinação** deste jogo que caracteriza, sob certas hipóteses, a **propriedade perfeita** sobre este conjunto. Combinado com o teorema da determinação de Borel, vamos concluir que conjuntos de Borel tem a propriedade perfeita. Em seguida, uma versão alterada do mesmo jogo nos fornece a **propriedade perfeita para analíticos**.

Em seguida, vamos analisar o **jogo de Choquet**. A **determinação** deste jogo caracteriza os **espaços de Baire**⁶. O jogo de Choquet e sua versão forte motivam a

⁶ Espaços que **não** são a reunião enumerável de conjuntos cujos fechos têm interior vazio.

definição dos **espaços Choquet** e **espaços fortemente Choquet**, que apesar de serem hipóteses mais fracas que completude, fornecem propriedades parecidas. Terminamos a seção com uma caracterização, através desse jogo, de espaços poloneses.

Por fim, analisamos o **jogo de Banach-Mazur**. Este jogo também toma um conjunto como parâmetro, e a **determinação** do jogo resultante está atada com a satisfação da **propriedade de Baire** pelo conjunto parâmetro. Mais uma vez, usando uma versão alterada deste jogo, estabelecemos a **propriedade de Baire para analíticos**.

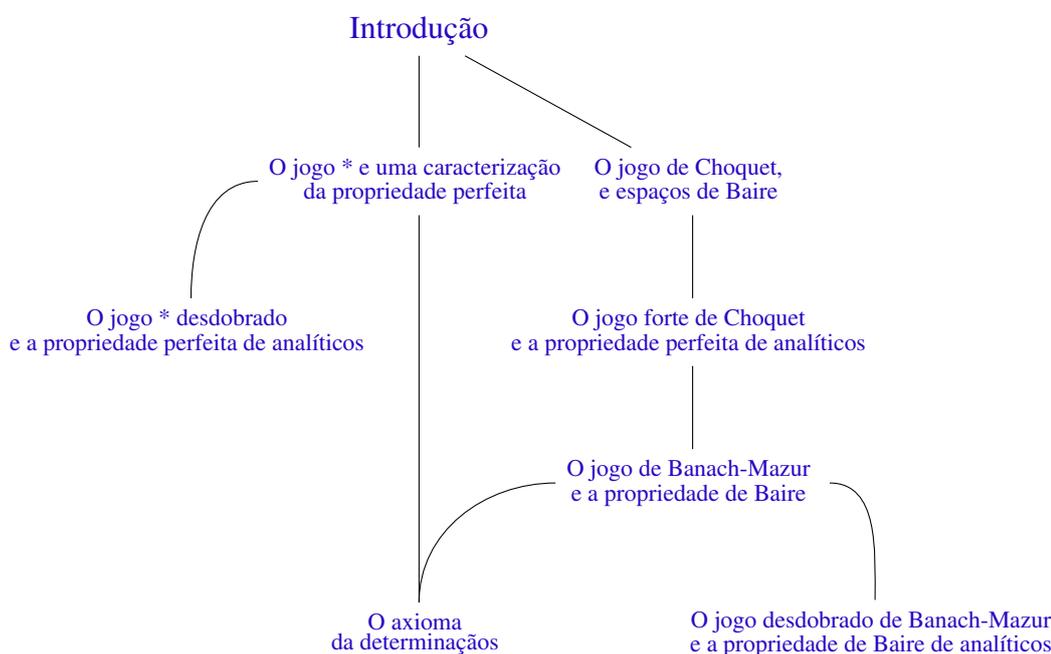


Figura 8 – Diagrama aproximado das dependências do Capítulo 6 Aplicações da determinação.

Estes resultados são válidos sob ZFC, o que quer dizer que estas propriedades não são destruídas facilmente em construções matemáticas usuais. Ou seja, começando de conjuntos abertos e nos restringindo às operações de reunião e intersecção enumeráveis, complementação e imagem por função contínua, podemos ter esperança de que este conjunto ainda mantém uma boa estrutura. Como foi discutido nos capítulos anteriores, se incluímos o axioma da escolha no nosso sistema então não podemos ter esperança que **todos** os subconjuntos tenham esta estrutura. Abandonando o axioma da escolha,

mantendo apenas um de seus fragmentos⁷, podemos⁸ impor o axioma de que todo jogo de certo tipo é determinado. Sob esta hipótese, nos valendo das caracterizações anteriores, todos os subconjuntos da reta teriam a propriedade perfeita e são Baire-mensuráveis. Sob este axioma, nenhuma demonstração usada para o estabelecimento destes resultados pode evocar o axioma da escolha (o que introduziria uma inconsistência ao sistema).

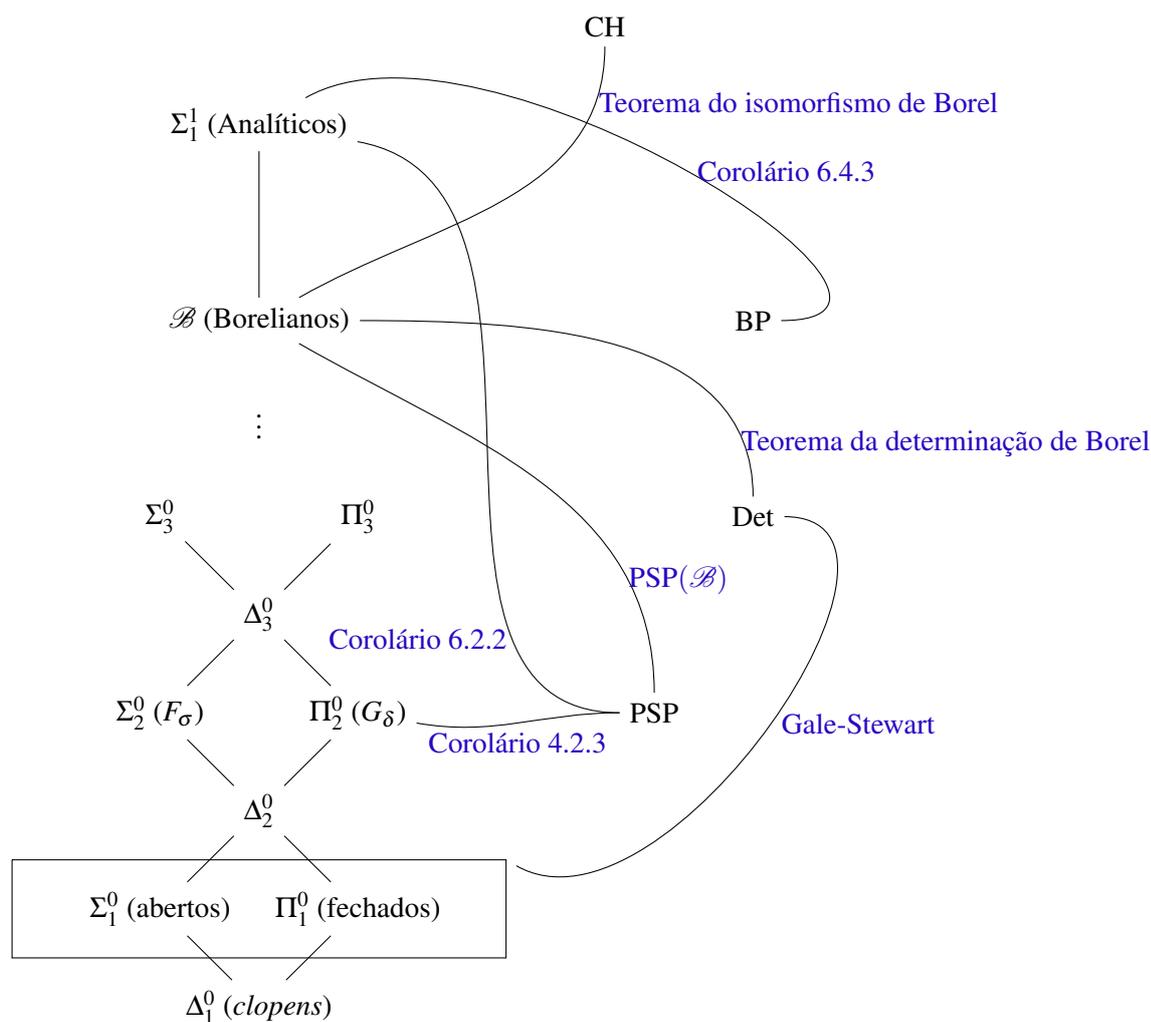


Figura 9 – Propriedades.

⁷ o axioma dependente da escolha

⁸ (LARSON, 2004), (KECHRIS, 1984) e (MARTIN; STEEL, 1989).

Algumas rotas

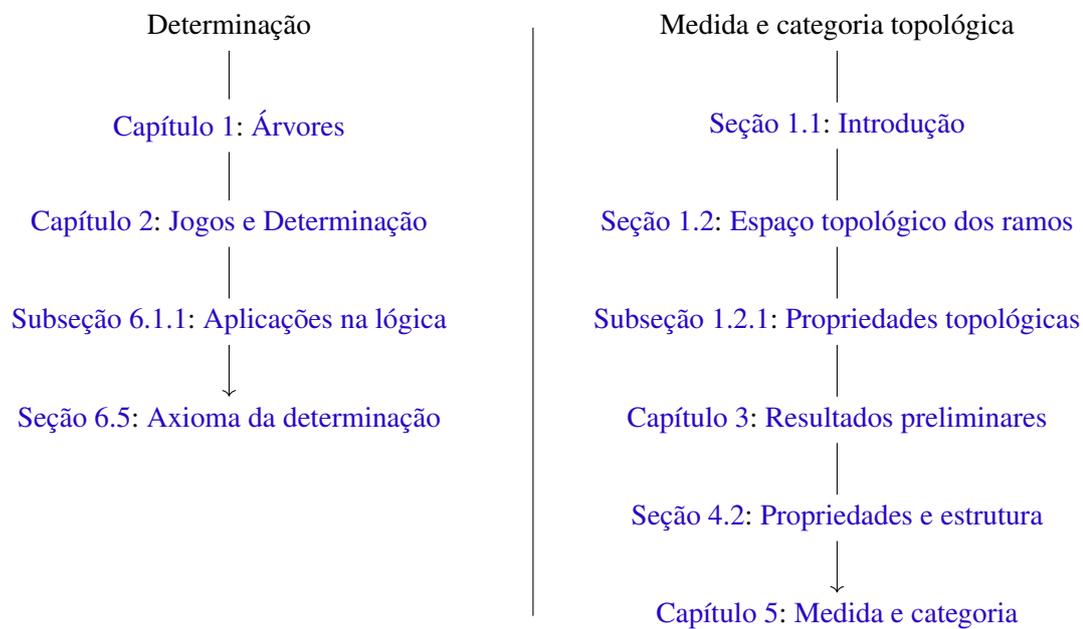


Figura 10 – Algumas possíveis rotas de leitura.

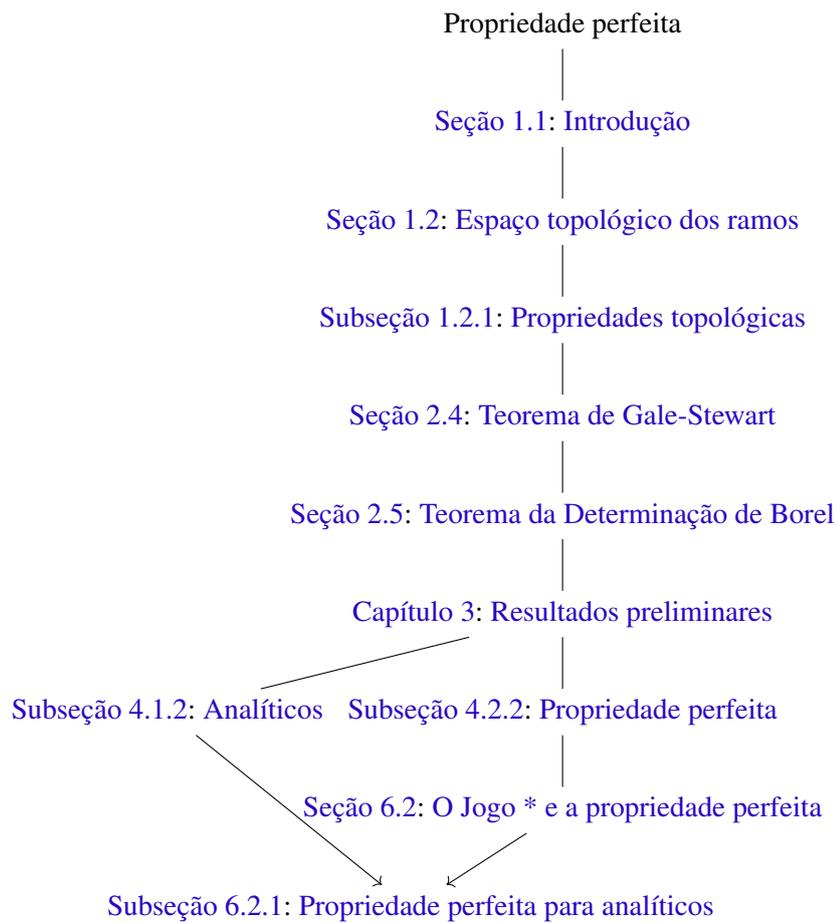


Figura 11 – Rota da propriedade perfeita.

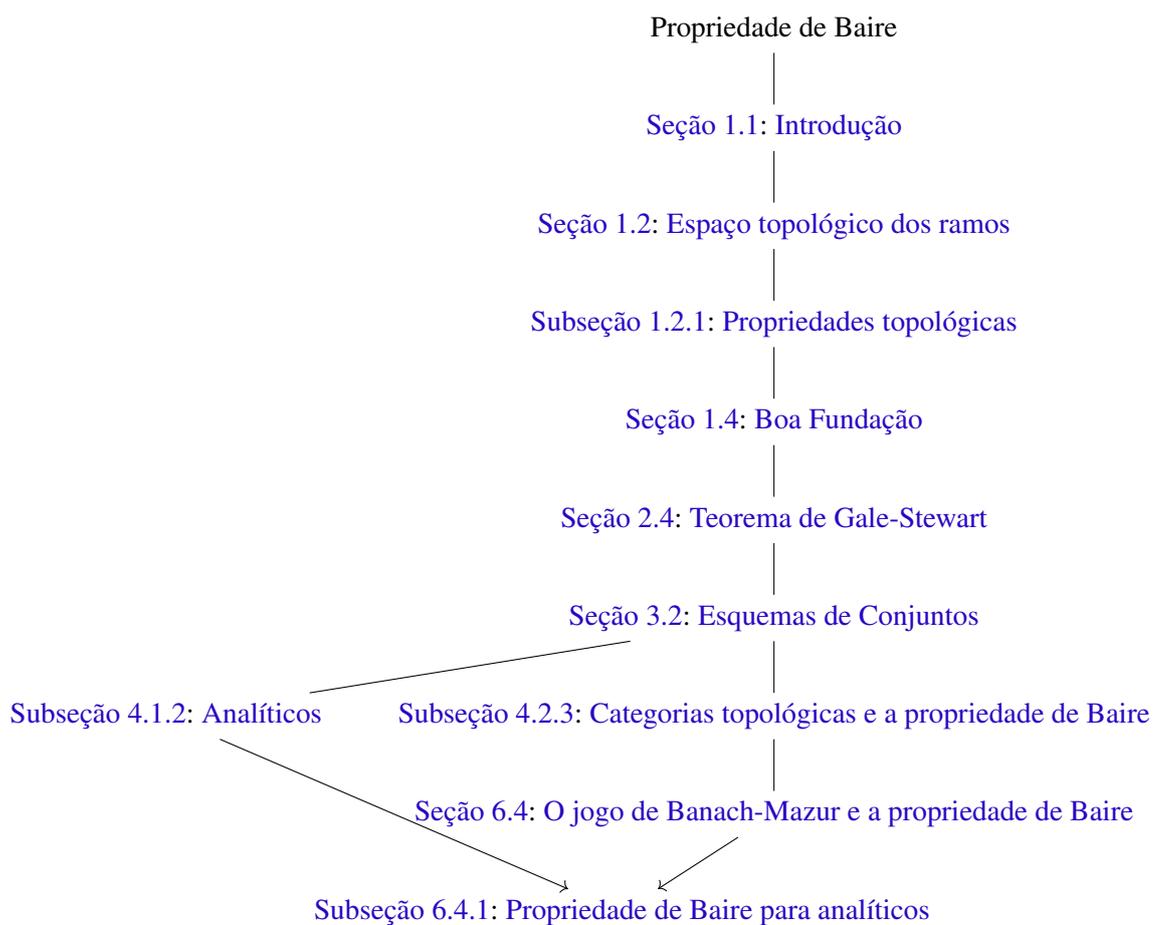


Figura 12 – Rota da propriedade de Baire.

Preliminares

Categorias

Uma **Categoria** é uma classe de **objetos** e para cada par (A, B) de objetos temos $\text{hom}(A, B)$ conjunto dos **morfismos** entre A e B . Dados três objetos existe \circ definida $\circ : \text{hom}(A, B) \times \text{hom}(B, C) \rightarrow \text{hom}(A, C)$ levando $(f, g) \mapsto g \circ f$ com propriedade associativa esperada. Cada objeto A tem uma **identidade** $\text{id}_A \in \text{hom}(A, A)$ inverso bilateral das operações \circ de composta definidas em $\text{hom}(A, B) \times \text{hom}(B, C) \rightarrow \text{hom}(A, C)$ e $\text{hom}(B, A) \times \text{hom}(A, C) \rightarrow \text{hom}(B, C)$, para quaisquer B, C . Um **objeto final** $A \in \mathbf{C}$ é objeto tal que, para qualquer objeto $B \in \mathbf{C}$ existe e é único $f \in \text{hom}(B, A)$.

Um **functor** entre \mathbf{C} e \mathbf{D} , denotado por $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, leva objetos A em objetos $F(A)$ e, para cada par (A, B) de objetos está bem definido $F|_{A,B} : \text{hom}(A, B) \rightarrow \text{hom}(F(A), F(B))$ com $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ e $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$. Dizemos que F é **fiel** quando $F|_{A,B}$ é injetora e **pleno** quando $F|_{A,B}$ é sobrejetora.

Exemplo 0.0.1. *Vamos trabalhar especialmente com as seguintes categorias:*

- (i) **Sets**, a **categoria dos conjuntos**, cujos morfismos são funções.
- (ii) Pré-ordens (P, \leq) . Objetos são elementos $p \in P$ e dois objetos p, q tem no máximo 1 morfismo entre si quando $p \leq q$. A existência de \circ e a transitividade de \leq são a mesma coisa.
- (iii) **Ord**, os **números ordinais** com funções monótonas.
- (iv) **Tree** árvores, como ordens, cujos morfismos são monótonas próprias ([Definição 1.3.1](#)).
- (v) **Top**, a **categoria dos espaços topológicos** munidos de morfismos contínuos.
- (vi) **Polish**, a **categoria dos poloneses**, espaços completamente metrizáveis munidos de base enumerável. Os morfismos são ainda funções contínuas.
- (vii) **Measble** a **categoria dos espaços mensuráveis** (A, \mathcal{A}) , cujos morfismos são as funções mensuráveis.

O \mathbf{C} -produto de uma família de objetos $\{X_i\}_{i \in I}$ é um objeto X , chamado de **produto**, e morfismos $\pi_i \in \text{hom}(X, X_i)$, ditas **projeções**, tais que pra qualquer objeto A , tuplas de morfismo $(\varphi_i) \in \prod \text{hom}(A, X_i)$ correspondem ao morfismo $\varphi \in \text{hom}(A, X)$ univocamente com a propriedade $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$. Chama-se um morfismo f de **monomorfismo** é a versão categoria de injetividade: Diz-se que o morfismo f é **monomorfismo** se $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ quando as compostas da primeira equação fazem sentido. O conceito dual é o de **epimorfismo**, a versão categórica de sobrejetoras. Os monomorfismos em um objeto específico são chamados **sub-objetos**. **Isomorfismos** são morfismos que tem inversa bilateral.

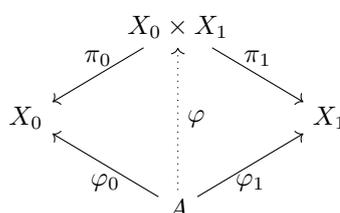


Figura 13 – Caso particular $I \doteq \{0, 1\}$ do produto. Estão implícitos os quantificadores $\forall \varphi_0, \varphi_1 \exists! \varphi$.

A categoria oposta de \mathbf{C} é a categoria de mesmos objetos que considera cada morfismo $f \in \text{hom}(A, B)$ como $f^{\text{op}} \in \text{hom}(B, A)$, identificando $(g \circ f)^{\text{op}}$ com $f^{\text{op}} \circ g^{\text{op}}$. Invertendo as setas do diagrama do produto, temos enunciado a propriedade universal do **coproduto**. Esse tipo de observação se chama **dualização**. Dualizar uma ordem, ou estrutura sobre uma ordem, por exemplo, é enxergar (P, \leq) como categoria e inverter as setas, ou seja, trabalhar em (P, \geq) .

Conjuntos

Vamos trabalhar sob a fundamentação metamatemática de $[ZF] + [DC]$ em geral, onde $[DC]$ se refere ao **axioma da escolha dependente** (Definição 1.2.4). Vamos estudar algumas consequências de $[AD]$, o **axioma da determinação**. Como o **axioma da escolha** é inconsistente com este axioma (Teorema 2.3.2, Corolário 2.3.2), as árvores de demonstração (no sentido de (DALEN, 2004)) das consequências do axioma da determinação, discutidos na Seção 6.5, **não podem** usar o axioma da escolha, pois introduziríamos uma contradição à teoria. Infelizmente alguns usos do axioma da escolha são muito tácitos. Por isso, em algumas demonstrações, se faz uma construção lenta,

fazendo menção explícita aos (esquemas de) axiomas que estão sendo evocados. Vamos nos ancorar em (LARSON, 2004), (KECHRIS, 1984) e (MARTIN; STEEL, 1989) com relação a questões de (equi)consistência.

Por exemplo, do axioma do vazio, temos \emptyset e do axioma do infinito a existência de um conjunto indutivo S que satisfaz $\emptyset \in S \wedge \forall x \in S (x \cup \{x\} \in S)$, fórmula que diz que S é indutivo. Das partes existe $\mathcal{P}S$, o conjunto de suas partes e da seleção seus subconjuntos indutivos. Também da seleção, existe o conjunto dos que pertencem a todos os indutivos, o menor indutivo, que vamos denotar por ω , o primeiro ordinal infinito de Von Neumann, isomorfo aos naturais como modelo de teoria de ordem. Chamando sugestivamente \emptyset de 0, elementos de ω são do tipo $n + 1 = n \cup \{n\}$, em particular $2 = \{0, 1\}$. O conjunto usual dos **números naturais** $\mathbb{N} \doteq \{1, 2, \dots\}$, da aritmética, também será usado em algumas construções.

O Teorema de Cantor-Schröder, que diz que dois **Set**-monomorfismos entre dois objetos em direções distintas implica na existência de um isomorfismo entre estes objetos.

Teorema 0.0.1 (Schröder-Bernstein). *Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ injetoras, deve haver $h : A \rightarrow B$ bijetora.*

Demonstração. A demonstração se encontra no [Teorema C.0.1](#) □

Vale o mesmo teorema na categoria dos espaços mensuráveis (\mathcal{M}). Fixemos uma notação para operações básicas sobre **famílias de subconjuntos** de um conjunto fixado:

Definição 0.0.1 (Operações básicas sobre conjuntos). Seja $X \neq \emptyset$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, definimos as operações básicas

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_s &\doteq \left\{ \bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} \text{ finito} \right\} \\ \mathcal{F}_d &\doteq \left\{ \bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} \text{ finito} \right\} \\ \mathcal{F}_\sigma &\doteq \left\{ \bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} \text{ enumerável} \right\} \\ \mathcal{F}_\delta &\doteq \left\{ \bigcap \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \wedge \mathcal{A} \text{ enumerável} \right\}\end{aligned}$$

$$\neg \mathcal{F} \doteq \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$$

De fato, $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}X$ é **álgebra** se $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_s = \neg \mathcal{F} = \mathcal{F}$. Dizemos que \mathcal{F} é uma **σ -álgebra** de subconjuntos se $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e $\mathcal{F}_\delta = \mathcal{F}_\sigma = \neg \mathcal{F} = \mathcal{F}$. Um **ideal** sobre X é uma família \mathcal{I} fechada com relação a reuniões finitas tal que $X \notin \mathcal{I}$ e se $A \subset B \in \mathcal{I}$ então $A \in \mathcal{I}$. Substituindo reuniões finitas por enumeráveis na definição anterior temos definição de **σ -ideal**. Dualizando as definições acima, temos respectivamente as definições de **filtro** e **σ -filtro**.

O conceito de órbita é extremamente usual em sistemas dinâmicos e álgebra. A definição basicamente nos dá, dada $\varphi : X \rightarrow X$ ação qualquer sobre um conjunto, uma função $\mathcal{O} : \omega \rightarrow X$ tal que $\mathcal{O}(n) = \varphi^n(x)$ (segue diretamente de indução sobre os naturais). Gostaríamos de estender tal definição para o caso transfinito, ou seja, em algum senso, *iterar uma função um número ordinal de vezes* e obter φ^γ para⁹ $\gamma < \alpha \in \mathbf{Ord}$, uma **órbita transfinita**. Vamos fazer isso no contexto de conjuntos ordenados, então cabem algumas definições. Seja (P, \leq) uma ordem. Uma **cadeia** de P é um subconjunto $C \subset P$ totalmente ordenado. O supremo, denotado por $\bigvee S$ ou $\sup S$, de um subconjunto $S \subset P$ é a menor cota superior, ou seja, o mínimo do conjunto $\{p \in P : \forall s \in S (s \leq p)\}$. Dualmente, temos o **ínfimo** de S , denotado por $\bigwedge S$ ou $\inf S$.

Teorema 0.0.2 ((MOSCHOVAKIS, 1994)). *Considere P ordem tal que toda cadeia tem supremo. Seja $\varphi : P \rightarrow P$ monótona expansiva¹⁰ e α ordinal. Dado $p \in P$ qualquer, existe e é única uma função $\mathcal{O} : \alpha \rightarrow P$ monótona tal que*

$$\mathcal{O}(\gamma) = \begin{cases} p & \text{se } \gamma = 0 \\ \varphi(\mathcal{O}(\alpha)) & \text{se } \gamma = \alpha + 1 \\ \mathcal{O}(\alpha) = \sup_{\gamma < \alpha} \mathcal{O}(\gamma) & \alpha \text{ limite} \end{cases}$$

⁹ A notação $\alpha \in \mathbf{Ord}$ não quer dizer que \mathbf{Ord} é conjunto, de fato não é (Paradoxo de Burali-Forti). Significa apenas que α é bem ordenado por $\in |_\alpha$.

¹⁰ $p \leq \varphi(p)$

Note que podemos nos desfazer¹¹ da hipótese de expansividade se P tiver mínimo e tomarmos $p \doteq \min P$. Denota-se em geral a cadeia $\{\mathcal{O}(\gamma) : \gamma < \alpha\} \doteq \mathcal{O}_\varphi(p)$ a órbita transfinita de p por φ .

Teorema 0.0.3 (Hartog). *Dado um conjunto X , $\alpha = \{\beta \in \text{Ord} : \beta \hookrightarrow X\}$ é um conjunto. Em particular, é ordinal que não pode ser incluído injetivamente em X .*

Demonstração. A demonstração se encontra no [Teorema A.1.2](#) □

O ordinal α definido acima se chama **número de Hartog** de X , $\text{Hart}(X)$. **Cardinais** são ordinais κ que não assumem bijeção com segmentos iniciais próprios. Note que $\kappa < \text{Hart}(\kappa)$. Se houvesse bijeção entre $f : \text{Hart}(\kappa) \rightarrow \alpha$ e um de seus segmentos iniciais, isomorfo ao ordinal $\alpha < \text{Hart}(\kappa)$, temos então $f \upharpoonright \kappa : \kappa \rightarrow \alpha$ bijeção, em particular injeção, e $\alpha \hookrightarrow \kappa$ pois $\alpha < \text{Hart}(\kappa)$, contrariando que κ é cardinal. Nesse caso $\text{Hart}(\kappa)$ é cardinal, que denota-se por $\kappa+$, com $\kappa+ \not\hookrightarrow \kappa$, logo $\kappa \leq \kappa+$ é expansiva. Se um cardinal é do tipo $\kappa+$ o chamamos de **cardinal sucessor**, **cardinal limite** caso contrário. Seja $\kappa = \sup_{\gamma < \alpha} \kappa_\gamma$ onde cada κ_γ é cardinal, este é de fato um ordinal e dado $\theta \in \kappa$, $\theta < \kappa_\gamma$, houvesse bijeção $\kappa \rightarrow \theta$ sua restrição ao cardinal κ_γ contradiz o fato de que κ_γ é cardinal. Podemos então¹² definir a órbita transfinita de Hart, que chamaremos de \aleph_α , começando de $\aleph_0 \doteq \omega$ e tomando $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+}$ e o supremo das imagens anteriores em cardinais limite. De fato, \aleph_α de ordinal sucessor/limite α é cardinal sucessor/limite. Dizemos que um conjunto X tem cardinalidade κ se κ é o menor ordinal que tem bijeção com X . Dizer que todo X tem cardinalidade é afirmar que todo conjunto assume boa ordem, um equivalente do axioma da escolha.

Topologia

Espaços topológicos formam uma estrutura extra sobre **Sets** com a intenção de dar noção abstrata de proximidade. Munimos conjunto de família de subconjuntos τ chamados **abertos** satisfazendo axiomas usuais. Seus complementares são chamados **fechados** e a intersecção destas classes são os *clopen*. Chama-se conjuntos de τ_δ de G_δ

¹¹ Demonstração também via indução transfinita.

¹² Note que os cardinais formam uma **classe** bem ordenada, mas eles não são um conjunto, logo esta aplicação configura um certo abuso.

e $(\neg\tau)_\sigma$ de F_σ . Se pontos podem ser separados por abertos, dizemos que o espaço é **Hausdorff**. As setas dessa categoria são funções cujas imagens inversas de abertos são abertos, chamadas **funções contínuas**.

Temos com estas informações a categoria dos espaços topológicos **Top**. **Abertos locais** de $A \subset X$ é a intersecção de abertos de X com A e munem A de **Topologia** induzida. Uma **inclusão** é uma injeção contínua sobre a imagem munida de topologia induzida. A menor topologia que torna as **Set**-projeções do **Set**-produto formam o **Top**-produto. Forma-se o **produto topológico**. Dualmente temos **soma** topológicas.

Se todo aberto é reunião de elementos de uma família de abertos \mathcal{B} , esta é chamada de **sub-base**. Intersecções finitas de sub-básicos são ditos **básicos**. Se houver métrica $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ cujas bolas formam base de uma topologia este espaço é dito **metrizável** e, se tal métrica for completa, **completamente metrizável**. Considere $X \doteq \prod_{i \in \omega} X_i$ com X_i metrizáveis. Assuma todas as métricas limitadas. Tome a métrica $d \doteq \sum 2^{-k} d_i$ e temos que X é metrizável.

Abertos de metrizáveis são F_σ 's, dualmente fechados de metrizáveis são G_δ 's. **Compactos** são espaços que, quando cobertos por uma quantidade arbitrária de abertos, podem de fato ser cobertos por um subconjunto finito destes abertos. Um espaço Hausdorff é dito **localmente compacto** se todo ponto tem base local de compactos.

Bases, Enumerabilidade e Dimensionalidade

O peso de um espaço topológico é a menor cardinalidade que uma de suas bases pode assumir. **Toda base tem subconjunto que é ainda uma base e tem cardinalidade igual ao peso**. Espaços **zero-dimensionais** são aqueles que tem base de *clopens*. Produto enumerável de espaços segundo enumeráveis é espaço segundo enumerável. Um espaço segundo enumerável Hausdorff tem no máximo contínuo pontos, pois fixada base \mathcal{B} enumerável, $x \in X \mapsto \{B \in \mathcal{B} : x \in B\} \hookrightarrow 2^\omega$ é injetora.

Compacidade e Completude

Um espaço é **sequencial** se aderência é caracterizada por sequências, ou seja, $x \in \bar{A} \iff \exists A \ni x_n \rightarrow x$. **Sequencialmente compactos** são espaços onde toda sequência tem subsequência convergente. **Todo compacto sequencial é sequencialmente compacto.** Seja X métrico sequencialmente compacto, dada \mathcal{C} cobertura aberta de X , deve haver $\delta > 0$, o **número de Lebesgue da cobertura**, tal que todo conjunto de diâmetro $< \delta$ está inteiramente contido em um dos elementos de \mathcal{C} . Cobertura de compactos Frechet tem número de Lebesgue, em particular, compactos metrizáveis tem número de Lebesgue. **Métrico sequencialmente compacto é compacto.** Dado $\varepsilon > 0$, um **ε -net** de um metrizável X é uma coleção finita de pontos F tal que $\bigcup_{x \in F} B(x, \varepsilon) = X$. Um espaço é dito **totalmente limitado** se para todo ε existe ε -net. **Métrico é compacto se, e somente se, é totalmente limitado e completo.** Temos o clássico equivalente ao axioma da escolha:

Teorema 0.0.4 ([AC] Tychonoff). *Produto arbitrário de espaços compactos é compacto.*

Espaços completos tem uma caracterização de extrema importância, usada silenciosamente ao longo de todo o texto:

Teorema 0.0.5 (Teorema da intersecção de Cantor). *(X, d) é completo se, e somente se, para toda sequência decrescente de fechados não vazios $F_i \subset X$ com $\text{diam}(F_i) \rightarrow 0$, $\exists ! x \in \bigcap F_i$.*

Espaços Poloneses

Definição 0.0.2 (**Espaço polonês**). (X, τ) é dito **polonês** se é completamente metrizável e separável.

Exemplo 0.0.2 (Exemplo de poloneses). *Considere os seguintes exemplos:*

(i) *Espaços enumeráveis com topologia discreta.*

(ii) *A reta \mathbb{R} real é espaço polonês, visto que é completo e separável.*

- (iii) *Produto enumerável $\prod X_i$ de poloneses X_i é polonês. Em particular são poloneses $\mathbb{H} \doteq [0, 1]^\omega$ o **Cubo de Hilbert**, $\mathcal{C} = 2^\omega$ o **espaço de Cantor**¹³ e $\mathcal{N} = \omega^\omega$ o **espaço de Baire**.*
- (iv) *A soma topológica enumerável de espaços poloneses é polonesa. De fato, sejam \mathcal{B}_i bases de X_i , $\mathcal{B} = \{\varphi_i(B) : i \in \omega \wedge B \in \mathcal{B}_i\}$ é base de $\bigoplus X_i$. Tome d como d_i entre pontos do mesmo espaço e 1 entre pontos de espaços distintos.*

Do que foi dito, a sub-categoria dos espaços poloneses **Polish** é fechada com relação a produtos e coprodutos enumeráveis. Alguns objetos de **Polish** são destacados:

Teorema 0.0.6 (Metrizável segundo enumerável é subobjeto do Cubo de Hilbert). *Todo espaço metrizável segundo enumerável pode ser incluído no cubo de Hilbert.*

Demonstração. A demonstração está no [Teorema B.2.4](#). □

Teorema 0.0.7 (Imersão em Cantor). *Espaço metrizável segundo enumerável e zero-dimensional é subobjeto $X \hookrightarrow 2^\omega$ do subespaço de Cantor, ou seja, é incluído homeomorficamente no espaço de Cantor.*

Demonstração. A demonstração está no [Teorema B.2.5](#) □

Medida

Uma **álgebra** de subconjuntos em X , como já definido, é família $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}X$ fechada com relação a complementação e reuniões finitas. Ganhamos automaticamente fechamento com relação a interseções finitas. De novo uma σ -Álgebra de X é também fechada com relação a interseções enumeráveis. Sejam \mathcal{A}_γ σ -Álgebras sobre X , $\gamma \in \kappa$, de fato, $\mathcal{A} \doteq \bigcap_{\gamma \in \kappa} \mathcal{A}_\gamma$ é σ -Álgebra sobre X . Considere $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ família qualquer, está bem definida

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}) \doteq \bigcap \{ \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \text{ é } \sigma\text{-álgebra e } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \}$$

¹³ Homeomorfo ao conjunto de cantor pelo [Teorema 3.3.3](#).

a **menor σ -álgebra** de X que contém \mathcal{E} ou **σ -álgebra gerada** por \mathcal{E} .

É necessário e suficiente, para que uma álgebra seja uma σ -Álgebra \mathcal{M} , que ela seja enumeravelmente somável apenas para cadeias crescentes de conjuntos. De fato, dada subfamília $\{A_n : n \in \omega\} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ enumerável qualquer, note que $\mathcal{B} = \{\bigcup_{k=1}^n A_k : n \in \omega\}$ é família crescente e tem mesma reunião $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{M}$.

Teorema 0.0.8 (Descrição via indução transfinita de álgebra gerada). *Seja $X \in \mathcal{E} \subset \mathcal{P}X$ família de subconjuntos. Considere, no [teorema de órbitas transfinitas](#), que $P \doteq \mathcal{P} \mathcal{P}X$ com ordem \subset . Considere ponto inicial $p \doteq \mathcal{E}$ e monótona expansiva $\varphi(\mathcal{A}) \doteq \mathcal{A} \cup \neg \mathcal{A} \cup (\mathcal{A})_\sigma$. De fato a σ -álgebra gerada por \mathcal{E} é dada por $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{O}(\omega_1)$.*

Demonstração. Aqui vamos precisar do [axioma da escolha](#). Começamos com a família inicial $\mathcal{O}(0) \doteq \mathcal{E} \subset \mathcal{O}(\omega_1)$. Se $A \in \mathcal{O}(\omega_1)$ então $A \in \mathcal{O}(\alpha)$ para $\alpha < \omega_1$, logo $X \setminus A \in \neg \mathcal{O}(\alpha) \subset \mathcal{O}(\alpha + 1) \subset \mathcal{O}(\omega_1)$. Dados $A_n \in \mathcal{O}(\omega_1)$, devem haver $\alpha_n < \omega_1$ com $A_n \in \mathcal{O}(\alpha_n)$. Como [cf](#) $\omega_1 = \omega_1$, $\sup \alpha_n = \alpha < \omega_1$. Neste caso $\bigcup_{n \in \omega} A_n \in ((\mathcal{O})(\alpha))_\sigma \subset \mathcal{O}(\alpha + 1) \subset \mathcal{O}(\omega_1)$. Dada uma σ -álgebra \mathcal{A} qualquer com $\mathcal{E} = \mathcal{O}(0) \subset \mathcal{A}$, mostra-se por indução que para $0 \leq \alpha < \omega_1$ tem-se $\mathcal{O}(\alpha) \subset \mathcal{A}$. \square

O teorema anterior, ao invés de usar intersecção e conseguir **existência de uma menor σ -álgebra contendo família fixada**, fecha a família inicial com respeito às operações de complementação e reunião enumerável, descrevendo de maneira transfinita todos os elementos da família. Começando com $\mathcal{E} \doteq \tau$ a topologia de um espaço topológico acabamos com a **σ -álgebra de Borel** desta topologia. No caso segundo enumerável, temos \mathcal{E} base enumerável gerando a topologia, que gera a σ -álgebra de Borel, logo $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(X)$. Temos então que $\mathcal{O}(0) = \aleph_0$ é enumerável, logo $\leq \mathfrak{c}$. Seja cada $\mathcal{O}(\xi)$, $\xi < \alpha$ tem cardinalidade menor que \mathfrak{c} . Se α é limite, $\mathcal{O}(\alpha) = \bigcup_{\xi < \alpha} \mathcal{O}(\xi)$ reunião de família de tamanho $\leq \mathfrak{c}$ de conjuntos de tamanho $\leq \mathfrak{c}$, portanto $\leq \mathfrak{c}$. Se $\alpha = \gamma + 1$, $A \in \mathcal{O}(\alpha)$ é um elemento de $\mathcal{O}(\gamma)$, é o complementar de um elemento de $\mathcal{O}(\gamma)$ ou pode ser associado à um elemento $[\mathcal{O}(\gamma)]^{\aleph_0}$, que ainda tem cardinalidade \mathfrak{c} . Temos então, sobre o [axioma da escolha](#), que $|\mathcal{B}(X)| = \mathfrak{c}$ para espaços segundo enumeráveis, como \mathbb{R} .

Alguns exemplos de subconjuntos dos Borelianos são $G_\delta \doteq \tau_\delta$ intersecções enumeráveis de abertos ou $F_\sigma = (\neg\tau)_\sigma$ reuniões enumeráveis de fechados de X . A construção oferece também *estratificação* dos Borelianos em *camadas de complexidade distintas*, onde por *complexidade* quer-se dizer o menor α onde o conjunto está em $\mathcal{O}(\alpha)$. Um pouco mais sobre isso será discutido na [Parte II](#).

Lema 0.0.1. *Seja $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ e $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{P}X_1$, $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}X_2$ duas famílias geradoras de σ -álgebras em seus respectivos conjuntos. Temos então duas órbitas $\mathcal{O}_i : \omega_1 \rightarrow \mathcal{P}^2X_i$. Se $\varphi^{-1}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{E}_1$ ¹⁴ então $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_2(\alpha)) \subset \mathcal{O}_1(\alpha)$.*

Note que o que o lema acima diz é que funções que preservam geradores preservam a **complexidade** dos conjuntos com relação a estes geradores. A demonstração se dá por indução transfinita e será omitida. No caso da hierarquia boreliana, o teorema acima nos diz que funções contínuas preservam a *complexidade* de borelianos.

Um par (X, \mathcal{B}) de um conjunto e uma σ -álgebra desse conjunto é chamado **espaço mensurável**. Uma função $f : (A, \mathcal{A}) \rightarrow (B, \mathcal{B})$ é dita **mensurável** se $\forall B \in \mathcal{B} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. De fato se $\forall B \in \mathcal{G} \quad f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, onde \mathcal{G} é gerador de \mathcal{B} , já temos mensurabilidade de f . Note que composta de funções mensuráveis é mensurável. Usando a id_A a identidade a nível de **Set**, os espaços mensuráveis formam uma categoria **Measble** cujas setas são funções mensuráveis. Uma função entre espaços topológicos $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \delta)$ é dita **Borel-mensurável** ou simplesmente **mensurável** se é mensurável com relação às σ -álgebras de Borel dos espaços. Isomorfismos desta categoria são bijeções bimensuráveis.

Definição 0.0.3 (Funções bimensuráveis). Um morfismo $f \in \text{hom}_{\text{Measble}}((A, \mathcal{A}), (B, \mathcal{B}))$ é dito **bimensurável** se é **bijeção** com inversa mensurável, ou seja, $f(A) \in \mathcal{B}$ para $A \in \mathcal{A}$.

Vale uma versão (que ainda não usa o axioma da escolha) em **Measble** dos espaços mensuráveis do teorema de Schröder-Bernstein:

¹⁴ Fossem estas famílias topologias, isso se torna afirmar que φ é contínua.

Teorema 0.0.9 (Schröder-Bernstein mensurável). *Considere $f : (A, \mathcal{A}) \hookrightarrow (B, \mathcal{B})$ e $g : (B, \mathcal{B}) \rightarrow (A, \mathcal{A})$ injeções bimensuráveis, então existe $h : (A, \mathcal{A}) \rightarrow (B, \mathcal{B})$ bimensurável.*

Demonstração. A demonstração está no [Teorema C.0.2](#) do apêndice. □

Sejam $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$ espaços e suas respectivas σ -álgebras, definimos a **σ -álgebra Produto** $\otimes \mathcal{M}_\alpha$ de $\prod X_\alpha$ como sendo a σ -álgebra $\sigma(\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) : E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\})$ gerada por imagens inversas de projeções de mensuráveis (a menor σ -álgebra que torna as **Set**-projeções mensuráveis). Este é de fato o produto da categoria de espaços mensuráveis.

A **medida exterior de Lebesgue** $m^* : \mathcal{P}\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ sobre subconjuntos $A \subset \mathbb{R}$ é $m^*(A)$ o ínfimo da soma dos comprimentos de enumeráveis intervalos I_n , onde I_n cobrem A . Os **Lebesgue-mensuráveis** $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ são conjuntos tais que, dado $\varepsilon > 0$, existe aberto G com $A \subset G$ e fechado F com $F \subset A$ tais que $m^*(G \setminus F) < \varepsilon$. Borelianos são mensuráveis. Qualquer conjunto com medida exterior nula é mensurável. Os conjuntos de medida nula formam um σ -ideal, um conceito de conjunto **pequeno**. A medida de Lebesgue é uma **medida** completa, ou seja, se N tem medida nula então $\mathcal{P}N$ é família de mensuráveis. O conjunto de Cantor $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ tem medida nula, e portanto todos os seus subconjuntos tem medida nula, logo $\mathcal{P}\mathcal{C} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Nesse caso

$$|\mathcal{B}| = \mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} = |\mathcal{P}\mathcal{C}| \leq |\mathcal{L}|$$

E portanto devem haver Lebesgue mensuráveis não Borelianos. Em geral uma **medida**, definida em um espaço mensurável (A, \mathcal{A}) , é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\mu(\emptyset) = 0$ e a medida da reunião disjunta de enumeráveis elementos de \mathcal{A} , um elemento de \mathcal{A} , é calculada como $\mu(\sum A_k) = \sum \mu(A_k)$. Se $A \subset \mathbb{R}$ é mensurável, sua **medida de Lebesgue** é definida como sua medida externa $m^*(A)$, que é igual ao ínfimo da medida exterior dos abertos que contém A ou, alternativamente, supremo dos compactos contidos em A .

Parte I

Árvores e jogos

CAPÍTULO

1

ÁRVORES

1.1 Introdução

Árvores costumam aparecer em problemas que envolvem auto-similaridade e definições recursivas. São importantes também em teoria dos grafos, onde árvores geradoras cumprem um papel importante em diversas aplicações. Começemos pela construção de um famoso subconjunto da reta como aplicação desta estrutura. Para cada sequência s finita de 0's e 1's, incluindo a sequência $\langle \rangle$ vazia, vamos associar $f(s) \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado da reta. Começamos por $f(\langle \rangle) \doteq [0, 1]$ e, definida $f(s)$ um intervalo fechado $[a, b]$ não degenerado, tome $f(s \frown 0) \doteq [a, a + \frac{b-a}{3}]$ e $f(s \frown 1) \doteq [b - \frac{b-a}{3}, b]$ intervalos fechados não degenerados. O conjunto $\bigcup_{s:\omega \rightarrow 2} \bigcap_{n \in \omega} f(s)$ é de fato o conjunto de Cantor ¹.

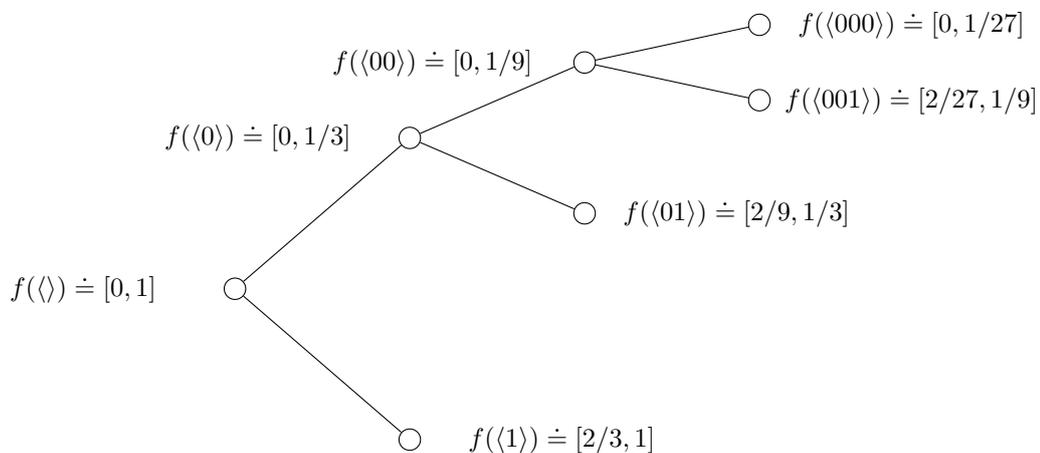


Figura 14 – Árvore de compactos da reta \mathbb{R} .

Com esta construção, pode-se ver de imediato que este conjunto é a soma topológica de duas cópias de si mesmo. Vamos estender a definição

Definição 1.1.1 (Árvores como ordens). Uma **árvore** é uma ordem parcial (T, \leq) tal que $\forall s \in T (\downarrow t \doteq \{t \in T : t < s\}$ é bem ordenado.). Vamos assumir ao longo do texto que $\exists! \min T \doteq \langle \rangle$ ², ou seja, a existência de uma raiz única, sem perda considerável de

¹ Note que este é o ponto fixo do operador de Hutchinson, associado a duas contrações do completo $[0, 1]$.

² Assim como espaços vetoriais tem elemento destacado 0, nossas árvores têm elemento destacado $\langle \rangle$, sua **raiz**.

generalidade. Os **sucessores** de $s \in T$ elemento de uma árvore é

$$\text{Succ}(s) \doteq \{t \in T : s < t \wedge \nexists u(s < u < t)\}$$

Note que não podemos ter $t < \dots < t_{n+1} < t_n < \dots < t_0$ em uma árvore, visto que haveria sequência infinita decrescente em $\downarrow t_0$, uma boa ordem. Uma **subárvore** é um subconjunto $S \subset T$ tal que $(S, \leq_T \upharpoonright_S)$ é ainda uma árvore, tem mesma raiz $\langle \rangle_S = \langle \rangle_T$ e é inferiormente fechada e direcionada³. Note que $\text{Succ}_S(t) \subset \text{Succ}_T(t)$, visto que se trata de uma subordem.

Conforme subimos uma árvore, aumentamos nossa **altura**. A altura aqui é intuitivamente o tamanho da linha que deixamos pra trás ao longo do caminho que percorremos pela árvore.

Definição 1.1.2 (Altura, nível e tronco). Está bem definida a função **altura** $h : T \rightarrow \mathbf{ON}$ tal que $h(\langle \rangle) = 0$ e

$$h(t) \doteq \sup\{h(r) + 1 : r < t\}$$

Podemos definir também $h(S) = \sup\{h(s) + 1 : s \in S\}$ para qualquer $S \subset T$. Em particular a árvore T tem uma altura $h(T)$. Temos também os níveis $\text{level} : h(T) \rightarrow \mathcal{P}(T)$, definidos por $\text{level}(\alpha) \doteq h^{-1}(\alpha)$, elementos da árvore de altura α . O **tronco** de altura β é definido por $T \upharpoonright \beta \doteq \bigcup_{\gamma < \beta} \text{level}(\gamma)$.

Exemplo 1.1.1 (Árvores de Sequência). Dado γ um ordinal e A um conjunto não vazio, está bem definido A^γ , conjunto de sequências $\gamma \rightarrow A$. Dada $t \in A^\gamma$, denotamos $|t| \doteq \gamma$ seu comprimento e para ordinal $\theta < \gamma$ está bem definida a **restrição**

$$t \upharpoonright \theta \doteq t \upharpoonright_\theta$$

Para cada t , se $\gamma < |t|$ temos $t(\gamma) \in A$, sua γ -ésima coordenada. Definimos $A^{<\alpha} \doteq \bigcup_{\gamma < \alpha} A^\gamma$. Seja α um ordinal, dizemos que $T \subset A^{<\alpha}$ é **fechado com relação**

³ Uma ordem parcial P é **inferiormente fechada** se $t \in P \implies \downarrow t \subset P$, filtros são um exemplo. Ordens **inferiormente direcionada** são tais que se $t_1, t_2 \in P$ existe $t \in P$ com $t \leq t_1, t_2$

a restrições se $t \in T \implies t \upharpoonright \gamma \in T$ para qualquer $\gamma \in \alpha$. Note que T como acima, denotado por **árvore sobre o conjunto** A , com a ordem (T, \leq) , onde $s \leq t$ se $t \upharpoonright |s| = s$, é de fato uma árvore. Quando $s \leq t$, dizemos também que t **estende** a sequência s , o que é denotado também por $s \triangleleft t$. A **árvore completa** sobre A é $A^{<\alpha}$. A árvore envolvendo a definição do conjunto de Cantor é a árvore binária completa $2^{<\omega}$. Um outro exemplo importante de árvore de sequências finitas são $\omega^{<\omega}$, árvore de sequências finitas de naturais.

Alternativamente, uma árvore de altura α é um functor $T : \alpha^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ de α^{op} , categoria posetal oposta do ordinal α em \mathbf{Set} . Dada seta $\gamma \rightarrow \theta$ (ou seja, $\gamma \geq \theta$), temos $F(\gamma) \xrightarrow{\cdot \upharpoonright \theta} F(\theta)$, mapa $x \in F(\gamma) \mapsto x \upharpoonright \theta \in F(\theta)$ dando para cada elemento do nível γ seu único ancestral do nível θ . Transformação natural entre árvores é uma coleção de funções $T(\alpha) \xrightarrow{\tau_\alpha} S(\alpha)$ entre os níveis que preservam relação de ancestralidade. Toda árvore é árvore de sequência para algum conjunto. Basta identificar $t \in T$ com $\langle \langle \rangle, t_1, \dots, t_i, \dots, t \rangle \in T^{h(t)+1} \subset T^{<h(T)}$, claramente bijeção monótona com inversa monótona $\langle \langle \rangle, t_1, \dots, t_i, \dots, t \rangle \mapsto t$.

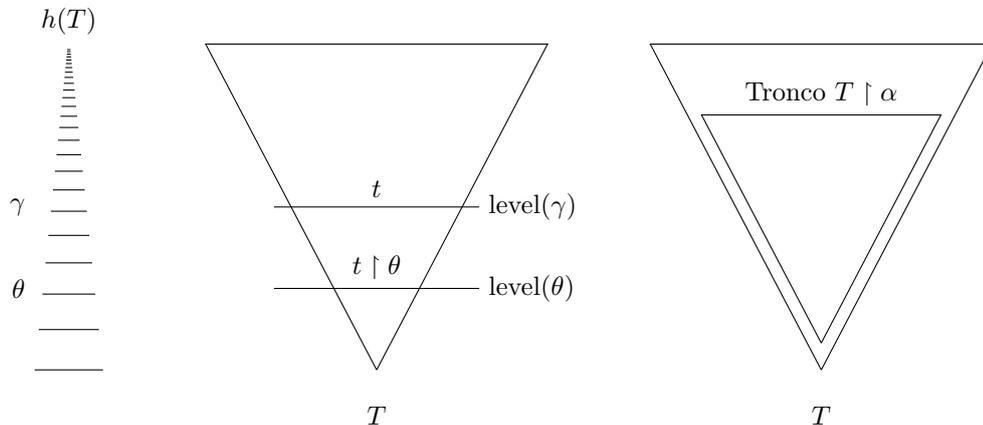


Figura 15 – O ordinal $h(T)$, indexando os níveis da árvore T . O mapa $\cdot \upharpoonright \theta$, caracterizando T vista como functor (**Sistema Inverso**). O tronco da árvore até altura α .

1.2 Espaço topológico dos ramos

Nesta seção vamos construir um espaço topológico a partir de uma árvore e estabelecer algumas conexões entre propriedades combinatórias da árvore e propriedades topológicas deste espaço. Nos restringindo a um subconjunto de monótonas (morfismos) entre árvores (ordens) vamos estabelecer também que esta construção é de fato um functor entre as árvores e a categoria de espaços topológicos. Estas funções levam ‘partidas’ de um jogo a ‘partidas’ de outro.

Definição 1.2.1 (Ramos e sua Topologia). Seja (T, \leq) uma árvore. Os **ramos** de T são $[T] = \{r \subset T : r \text{ é cadeia maximal}\}$. Podemos munir $[T]$ com topologia gerada pela base $\Sigma(t) \doteq \{r \in [T] : t \in r\}$. Mostremos que isto é uma base. Esta família cobre todos os pontos de $[T]$. Se $\Sigma(t_1) \cap \Sigma(t_2) \neq \emptyset$ então t_1 e t_2 são comparáveis, o que dá $\Sigma(t_1) \subset \Sigma(t_2)$ ou o reverso, logo a intersecção é básica.

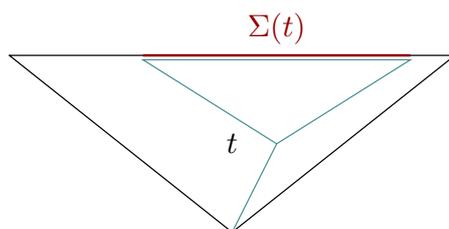


Figura 16 – Aberto básico de $[T]$. Aqui estamos imaginando a linha horizontal como sendo $[T]$, cadeias maximais.

Se todos os ramos $\alpha \in [T]$ de uma árvore tem o mesmo **comprimento** $h(\alpha) = h(T)$, então dizemos que a árvore T é **aparada**. Note que, se T é aparada e $S \subset T$ é subárvore de mesma altura $h(T)$, então $[S]$ pode ser visto naturalmente como subconjunto $[S] = \{\alpha \in [T] : \alpha \subset S\} \subset [T]$ dos ramos da árvore original.

Exemplo 1.2.1 (Espaço de ramos e a topologia produto). Seja $A \neq \emptyset$ com topologia discreta.

- Considere α um ramo de $A^{<\omega}$, árvore *aparada*. Seja $s \in \alpha$ com $s(n) = a$, como α é cadeia *toda* $r \in \alpha$ de comprimento maior que $n + 1$ terá $r(n) = a$. Para qualquer $n \in \omega$ existe $s \in \alpha$ definida em n . Vamos definir $f_\alpha \in A^\omega$ sequência infinita tal

que $\alpha = \{f_\alpha \upharpoonright n : n \in \omega\}$. Seja $n \in \omega$, tome sequência finita $s \in \alpha$ definida em n , e defina $f_\alpha(n) \doteq s(n)$. O valor de $f_\alpha(n)$ **não depende da escolha de s** . Vamos **identificar** α com f_α , o que identifica ramos de $A^{<\omega}$ com sequências infinitas A^ω .

- Sob esta **identificação**, são equivalentes:
 - $s \in \alpha$.
 - Para algum n vale $\alpha \upharpoonright n = t$.
 - $s \triangleleft \alpha$.
 - $\alpha \in \Sigma(t)$.
- Além de identificáveis, $A^\omega = \prod_{i \in \omega} A$, com topologia produto, e $[A^{<\omega}]$, como espaço de ramos, são homeomorfos.
- O espaço topológico $A^{\omega_1} = \prod_{i \in \omega_1} A$ **não é** homeomorfo ao espaço $[A^{<\omega_1}]$. Este último espaço é munido de topologia mais fina que o primeiro, pois inclui cones que fixam enumeráveis coordenadas, ao invés de apenas finitas.
- Mostraremos (**Proposição 1.2.4**) que todo espaço completamente ultrametrizável zero-dimensional é homeomorfo ao espaço de ramos de alguma árvore.

Árvores aparadas são aquelas cujos ramos interceptam todos os seus níveis. No caso $h(T) = \omega$ árvores aparadas T são aquelas em que todo elemento tem sucessor.

1.2.1 Propriedades topológicas

Investiguemos conexões entre propriedades da árvore, como ordem, e propriedades topológicas do espaço dos ramos. Note que α é aderente ao conjunto $S \subset [T]$ se para todo elemento $t \in \alpha$ existe $\beta \in S$ tal que $t \in \beta$. Os fechados do espaço de ramos tem também uma caracterização :

Proposição 1.2.1 (Caracterização de Fechados). *Seja T árvore aparada. Os fechados de $[T]$ são exatamente os conjuntos de ramos $[S]$ de subárvores $S \subset T$ aparadas de altura $h(T)$.*

Demonstração. Seja $F \subset [T]$ fechado e considere $S_F \doteq \{t \in \alpha : \alpha \in F\}$.

- Mostremos que S_F é subárvore aparada de T , de onde temos $[S_F] \subset [T]$. Sejam $t_1 \leq t_2$ com $t_2 \in \alpha \in F$, como α é cadeia maximal, $t_1 \in \alpha$ e, assim, $t_1 \in S_F$. Temos também que $\langle \rangle \in S_F$, que é então direcionada para baixo. Note que todo $s \in S_F$ de altura $h(s) < h(T)$ tem sucessor em S_F , pois $s \in \alpha$ para algum $\alpha \in F \subset [T]$ e α intercepta todos os níveis de T .
- Mostremos que $F = [S_F]$. Claramente $F \subset [S_F]$. Suponha que exista ramo $\alpha \in [S_F] \cap ([T] \setminus F)$. Como F é fechado, deve haver vizinhança básica $\Sigma(t) \subset [T] \setminus F$ de α . Em particular, não existe $\beta \in F$ com $t \in \beta$, mas $t \in \alpha \in [S_F]$, então este β deveria existir pela definição de S_F .

Seja S sub-árvore e $F_S = [S] \subset [T]$ seu conjunto de ramos. Mostremos que F_S é fechado. Tome $\alpha \in [T] \setminus [S_F]$, então deve haver $t \in \alpha \setminus S$, logo $\alpha \in \Sigma(t) \subset [T] \setminus [S_F]$ vizinhança básica contida no complementar, mostrando que $F_S = [S] \subset [T]$ é fechado. \square

Mostremos que $[T]$ é Hausdorff para qualquer árvore. Trivial para $T = \emptyset$. Fixada $T \neq \emptyset$, sejam $\alpha, \beta \in [T]$ ramos distintos. Pela maximalidade de α e β , existem $a \in \alpha \setminus \beta$ e $b \in \beta \setminus \alpha$.

- Se $a \leq b \in \beta$, como β é ramo temos $a \in \beta$, um absurdo. Análogo para o caso $b \leq a$.
- Se $a \perp b$.
 - Suponha que exista ramo $\gamma \in \Sigma(a) \cap \Sigma(b)$. Em particular $a, b \in \gamma$ seriam comparáveis, um absurdo.
 - Os abertos $\Sigma(a) \cap \Sigma(b) = \emptyset$ são disjuntos e separam os ramos $\alpha \in \Sigma(a)$ e $\beta \in \Sigma(b)$.

O espaço de ramos é também zero-dimensional. Considere uma vizinhança básica $\Sigma(t)$. Mostremos que $\Sigma(t)$ é fechado. Para cada $\alpha \in [T] \setminus \Sigma(t)$ deve haver $a \in \alpha$ com $a \perp t$. Se este não for o caso, todos os elementos de α são comparáveis com t , mas então $t \in \alpha$, **absurdo**. Em particular $\alpha \in \Sigma(a)$, aberto básico disjunto de $\Sigma(t)$.

Considere $\alpha \in [T]$ ponto isolado. Deve haver $t \in \alpha$ com $\Sigma(t) = \{\alpha\}$. Se $h(\alpha)$ é sucessor este sempre é o caso, caso contrário, note que isso **só pode acontecer** se houver $t \in \alpha$ a partir do qual nenhum elemento se ramifica.

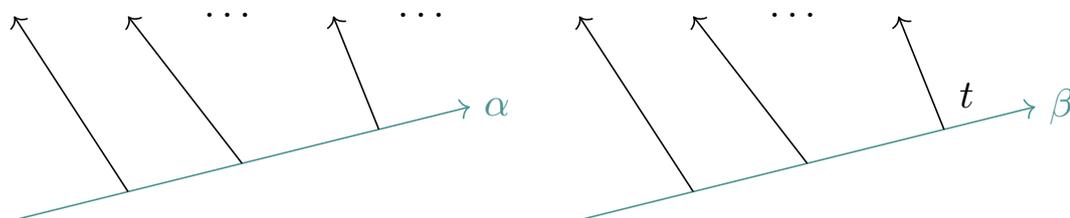


Figura 17 – À esquerda, um ramo não isolado α e um conjunto aderente de ramos. À direita, um ramo isolado β e $t \in \beta$ tal que $\Sigma(t) = \{\beta\}$. Note que t não tem sucessores que bifurcam.

De posse dessas observações, podemos mostrar a

Proposição 1.2.2 (Árvores Perfeitas). *Seja T árvore aparada.*

- (i) *Se T tem altura sucessora, então $[T]$ é discreto.*
- (ii) *O espaço $[T]$ não tem pontos isolados se, e somente se, $h(T)$ é ordinal limite e todo $t \in T$ tem descendente $s \geq t$ com mais que um sucessor $s_0, s_1 \in \text{Succ}(s)$.*
- (iii) *Uma árvore que satisfaz as propriedades do item anterior é dita **árvore perfeita**. Árvores perfeitas, aparadas e de altura ω têm uma cópia, como subordem, da árvore binária $\{0, 1\}^{<\omega} \hookrightarrow T$.*

Proposição 1.2.3 ([DC] Contando árvores perfeitas). *O conjunto de **subárvores perfeitas** de $A^{<\omega}$ tem cardinalidade \mathfrak{c} quando $2 \leq |A| \leq \aleph_0$.*

Demonstração. Existem **no máximo** \mathfrak{c} subárvores de $A^{<\omega}$. Note que $|A^{<\aleph_0}| =^4 \aleph_0$, logo $2^{|A^{<\omega}|} = 2^\omega = \mathfrak{c}$.

É fácil ver que se existem **no mínimo** \mathfrak{c} árvores perfeitas para o caso $A = 2$, então acabamos. Para mostrar isso, basta construirmos um mapa injetor $\alpha \in 2^\omega \mapsto$

⁴ Reunião enumerável de enumeráveis é enumerável.

$T_\alpha \subset A^{<\omega}$ subárvore perfeita. Basicamente, queremos a maior árvore T_s cujos elementos $s \in \text{level}(2n+1)$ dos níveis ímpares têm último termo $s(2n) = \alpha(n)$.

- Adicionamos a raiz $\langle \rangle$ e $\langle \alpha(0) \rangle$ à árvore T_α .
- Adicionamos todos os $\langle \alpha(0), 0 \rangle$ e $\langle \alpha(0), 1 \rangle$ à árvore T_α .
- Acrescentamos $\langle \alpha(0), 0, \alpha(1) \rangle$ e $\langle \alpha(0), 1, \alpha(1) \rangle$ e assim por diante.

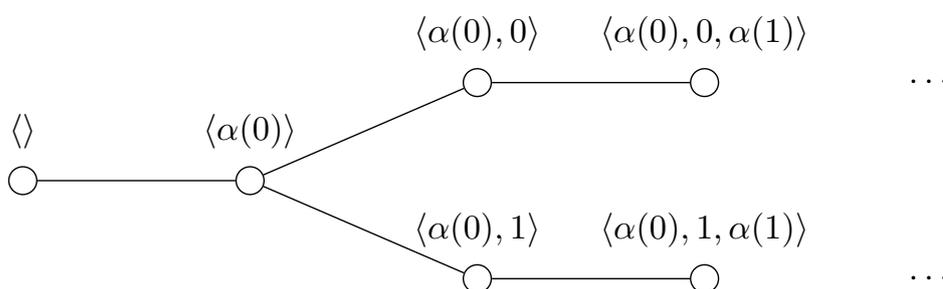


Figura 18 – Definição do mapa injetivo $\alpha \in 2^\omega \mapsto T_\alpha$ árvore perfeita.

Como nos níveis pares fornecemos bifurcação, T_α é de fato perfeita. Se $\alpha \neq \beta$, então deve haver $n \in \omega$ com $\alpha(n) \neq \beta(n)$. Para concluir injetividade do mapa definido, basta notar que as árvores T_α e T_β discordam no nível n . \square

Um **espaço ultramétrico** é um espaço métrico (X, d) onde d satisfaz axioma extra da desigualdade triangular forte $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$. Lembremos que todo ramo de árvore aparada de altura α tem, para cada $\gamma < \alpha$, exatamente um $\alpha \upharpoonright \gamma \in \text{level}_T(\gamma)$.

Proposição 1.2.4 ((BRIAN, 2010)). *Seja T árvore aparada de altura ω e (X, d) completamente ultrametrizável zero-dimensional.*

(i) *O espaço $[T]$ é completamente ultrametrizável zero-dimensional.*

(ii) *O espaço X é isomorfo ao espaço de ramos de uma árvore aparada de altura ω .*

(iii) O espaço $[T]$ não tem pontos isolados se, e somente se, T é perfeita. Como consequência direta X não tem pontos isolados apenas quando a árvore de X é perfeita.

(iv) O espaço $[T]$ é segundo enumerável se, e somente se, T é enumerável.

Demonstração. Mostremos cada um dos itens.

(i) Considere dois ramos $\alpha, \beta \in [T]$. Se são distintos devem se ramificar em algum nível, ou seja, existe $\min\{n \in \omega : \alpha \upharpoonright n \neq \beta \upharpoonright n\} \in \omega$. Tome métrica

$$d(\alpha, \beta) \doteq \begin{cases} 2^{-\min\{n \in \omega : \alpha \upharpoonright n \neq \beta \upharpoonright n\}} & \text{se } \alpha \neq \beta \\ 0 & \text{se } \alpha = \beta \end{cases}$$

Suponha que α e β não se ramificam antes do nível m e que β e γ não se ramificam antes do nível n . Seja $k \doteq \min\{m, n\}$. De fato α e γ não se ramificam antes do nível k . Essa observação fornece desigualdade forte, caracterizando d como ultramétrica. Tome t de altura n e $\alpha \in \Sigma(t)$, pela definição de d note que $B\left(\alpha, \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \Sigma(t)$, ou seja, a topologia do espaço de ramos $[T]$ é a topologia induzida por d . Usando a caracterização de completude de [Teorema 0.0.5](#), mostra-se que d é completa, notando-se que um conjunto $F \subset [T]$ tem diâmetro $< 2^{-k}$ se, e somente se, os elementos de todos os $\alpha \in F$ são iguais até o nível k .

(ii) Demonstrado no [Corolário 3.2.1](#).

(iii) Se T não é perfeita temos t cujos descendentes não se ramificam. Nesse caso um único ramo α estende este elemento e $\Sigma(t) = \{\alpha\}$. Para a volta, basta tomar ponto isolado $\alpha \in [T]$ e tomar básico $\Sigma(t) = \{\alpha\}$ e teremos que t testemunha a não perfeição de T .

(iv) Se T é enumerável, $\{\Sigma(t)\}_{t \in T}$ é base enumerável de $[T]$. Se T não é enumerável, algum de seus níveis $L \doteq \text{level}_T(n)$ não é enumerável. Fixemos \mathcal{B} uma base qualquer. Temos que $\{\Sigma(t)\}_{t \in L}$ são mais que enumeráveis abertos não vazios disjuntos, logo cada um deles deve conter um básico $\{B_t\}_{t \in L}$. Teremos que $t \in L \mapsto B_t \in \mathcal{B}$ é injeção, o que dá que \mathcal{B} não é enumerável.

□

Nem todo espaço de ramos é metrizável. Note que a altura de uma árvore e a cardinalidade de bases locais de $\alpha \in [T]$ estão diretamente ligadas.

Exemplo 1.2.2 ([AC]). Considere $T \doteq 2^{<\omega_1}$ e ponto $\alpha \in [T]$ ⁵. Por definição $\{\Sigma(\alpha \upharpoonright \gamma)\}_{\gamma \in \omega_1}$ é uma base local do ponto $\alpha \in [T]$. Observe que se $\gamma_1 < \gamma_2$, temos $\Sigma(\alpha \upharpoonright \gamma_2) \subsetneq \Sigma(\alpha \upharpoonright \gamma_1)$. De fato na primeira vizinhança a avaliação das sequências em γ_1 foi fixada em algum valor $\{0, 1\}$, alterando este valor obtemos sequência em $\Sigma(\alpha \upharpoonright \gamma_1) \setminus \Sigma(\alpha \upharpoonright \gamma_2)$.

Fosse $[T]$ primeiro enumerável, poderíamos selecionar subconjunto enumerável $n \in \omega \mapsto \gamma_n \in \omega_1$ tal que $\{\Sigma(\alpha \upharpoonright \gamma_n)\}_{n \in \omega}$ é ainda uma base. Tome $\sup_{n \in \omega} \gamma_n \doteq \xi < \omega_1$ ⁶. Note que $\Sigma(\alpha \upharpoonright \xi + 1)$ é então aberto minimal contendo α , um absurdo. Em particular, $[T]$ não é metrizável, pois metrizáveis são primeiro enumeráveis.

Definição 1.2.2 (Espaços de Baire e de Cantor). Em particular, destacam-se neste texto os metrizáveis **espaço de Baire** $\mathcal{N} \doteq [\omega^{<\omega}] = \omega^\omega$ e o **espaço de Cantor** $\mathcal{C} \doteq [2^{<\omega}] = 2^\omega$.

A propriedade associada a compacidade é a de ramificação finita.

Definição 1.2.3 (Ramificação). Considere T uma árvore.

1. Dizemos que T se **ramifica em altura limite** se houver $t \neq s$ com $h(t) = h(s)$ um ordinal limite com $\downarrow t = \downarrow s$.
2. Dizemos que T se **ramifica finitamente** se todo elemento tem finitos sucessores.

Mas vamos deixar para mostrar isso um pouco mais tarde.

⁵ O conjunto $[2^{<\omega_1}]$ pode ser identificado com 2^{ω_1} . O espaço topológico $[2^{<\omega_1}]$ não é o espaço 2^{ω_1} , munido de topologia produto.

⁶ cf $\omega_1 = \omega_1$

1.2.2 O lema de König, o axioma da escolha dependente, limites inversos e compacidade

Assumir que $[T] \neq \emptyset$, assim como assumir que $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, requer o acréscimo de algum nível de escolha aos axiomas. Nesta seção vamos estudar uma versão mais fraca do axioma da escolha e algumas de suas consequências.

Definição 1.2.4. O **axioma da escolha dependente** ($[DC]$) é a afirmação que, dada $R \subset X \times X \neq \emptyset$ relação binária com $\text{dom} R = X$, para todo $x_0 \in X$ existe função $n \in \omega \mapsto x_n \in X$ tal que $(x_n, x_{n+1}) \in R$ para qualquer $n \in \omega$.

Um uso clássico desse axioma é a definição da órbita positiva $f^n(x)$ do ponto x , onde a relação R é a própria f . Antes de usar o axioma para construir ramos, vamos discutir relações entre árvores aparadas, existência de sucessores e cuidar de algumas vacuidades.

Observação 1.2.1. Note que a árvore \emptyset é aparada por vacuidade, pois $[\emptyset] = \emptyset$. Fixemos T uma árvore **não vazia de altura** $h(T) = \omega$. Considere a propriedade sobre T dada por $\forall t \in T \text{ Succ}(t) \neq \emptyset$, ou seja, todo elemento tem sucessor. Mostremos que isto é equivalente ao fato de T ser aparada.

- Se T tem a propriedade, é fácil ver que, fixado um ramo $\alpha \in [T]$, $h(\alpha)$ é $\omega = h(T)$. Mais uma vez, todos os ramos de T tem altura ω . Note que isso pode ser satisfeito por vacuidade no caso $[T] = \emptyset$.
- Considere agora T aparada. Nesse caso **todos os seus ramos têm altura** ω . Se T não satisfaz a propriedade **então** existe $t \in T$ que não têm sucessor, mas nesse caso $(\downarrow t) \cup \{t\}$ forma ramo de altura finita, **um absurdo**.

Temos a seguinte equivalência:

Proposição 1.2.5 (Axioma da escolha dependente e ramos). *São equivalentes o axioma da escolha dependente e a afirmação de que toda árvore **aparada** de altura ω tem ramo.*

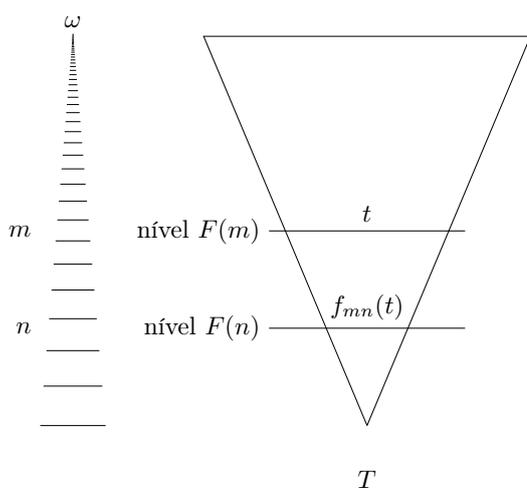
Demonstração. Suponha que toda árvore **aparada** de altura ω tem ramo. Seja R relação com $\text{dom} R = X$ e $x_0 \in X$. Construimos $T_R \subset X^{<\omega}$ com primeiro nível $\text{Succ}(\langle \rangle) \doteq \langle x_0 \rangle$ e,

indutivamente, $s = \langle x_0, a_1, \dots, a_n \rangle \in T$ como sendo $s \frown a$ tal que $a_n R a$. Define-se assim os níveis de uma subárvore de $X^{<\omega}$. Usando a hipótese e extraindo ramo de T , claramente **aparada**, temos uma sequência que testemunha [DC].

Suponha o axioma da escolha dependente. Seja T árvore **aparada** de altura ω . De fato⁷ $\text{dom}(\langle \rangle) = T$, temos então sequência infinita $\langle \rangle < t_1 < t_2 < \dots$, o que fornece ramo de T . \square

Lema 1.2.1 ([DC] König). *Seja T uma árvore de altura ω que se ramifica finitamente, então existe $r \in [T]$ ramo infinito.*

Demonstração. Do fato de que a reunião finita de conjuntos finitos é finita, o conjunto $\{t \in T : \uparrow t \text{ não é finito}\}$ é árvore **aparada** de altura ω . Pela **Proposição 1.2.5** **existe ramo infinito de T** . \square



Considere um functor $F : \omega^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Interprete cada imagem $F(n)$ como o nível $\text{level}_F(n)$ de uma árvore. Setas invertidas $m \rightarrow n$ ($n \leq m$) são levadas em funções $f_{mn} : F(m) \rightarrow F(n)$, que levam t , do nível m , em seu ancestral $f_{mn}(t)$ no nível n . A functorialidade de F se traduz então em $f_{ii} = \text{id}_{F(i)}$ e $F(i \rightarrow k) = F(j \rightarrow k) \circ F(i \rightarrow j)$, o que se traduz em $f_{ki} = f_{ji} \circ f_{kj}$.

Estas informações são exatamente as entradas da seguinte definição⁸

Definição 1.2.5 (Sistema Inverso). Seja (P, \leq) uma ordem. Um **sistema inverso** sobre a categoria \mathbf{C} é um functor $F : P^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{C}$, com P visto como categoria. Um **cone** é um objeto C munido de morfismos $X \xrightarrow{\pi_p} F(p)$ com a comutação do diagrama esquerdo de

⁷ A existência de $t \in T$ sem sucessor contradiria a hipótese de T ser **aparada**.

⁸ Adaptado de (AWODAY, 2010).

Figura 19. Definindo-se cones como objetos e setas entre cones como sendo \mathbf{C} -morfismos $\varphi \in \text{hom}(C, \tilde{C})$ tais que o diagrama direito da **Figura 19** comuta, para todo $p \in P$, temos a definição da **categoria dos cones de F** . O **limite inverso** $\lim F$ é o ⁹ cone final, caso exista.

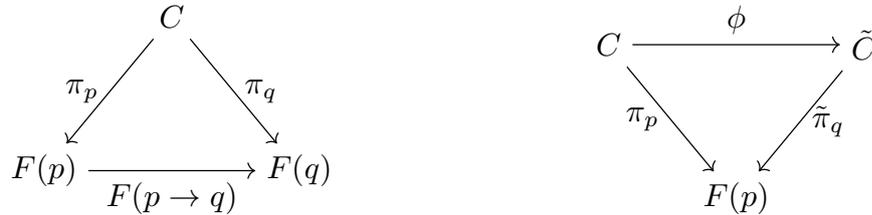


Figura 19 – Comutatividade dos morfismos de um cone e setas entre cones.

Note que dizer que $F : \omega^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ é aparada de altura ω é dizer que $F \neq \emptyset$ (não existe nível vazio) e $F(i+1 \rightarrow i)$ é sobrejetora para todo $i \in \omega$ (todo elemento têm descendente). Seja **FinSets** a **categoria de conjuntos finitos**.

Proposição 1.2.6. *Existe uma correspondência entre árvores **aparadas** de altura ω que **se ramificam finitamente** e funtores $F : \omega^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{FinSets}$ tais que $F \neq \emptyset$ e $F(n+1 \rightarrow n) = f_{n+1 n}$ é sobrejetora para todo $n \in \omega$. Sejam F e T associados por esta correspondência, então $[T] = \lim F$.*

Demonstração. Mostremos cada uma das afirmações.

- (i) Dada uma árvore T como nas hipóteses, considere o functor $F_T : \omega^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{FinSets}$, $F_T(n) = \text{level}_T(n)$ e $F_T(n \rightarrow m)(t)$ como sendo o único ascendente de t no nível m . Usando as hipóteses sobre T mostra-se facilmente que F_T está bem definida e tem as propriedades desejadas.

Por outro lado, dado functor F como nas hipóteses, considere :

$$T_F \doteq \bigcup_{n \in \omega} \left\{ x \in \prod_{i=1}^n F(1) \times \cdots \times F(n) : \forall k, j \in [1, n] (f_{k j}(x_k) = x_j) \right\}$$

⁹ Elementos finais são únicos a menos de isomorfismo. Tome dois A, B objetos finais, existem e são únicas setas $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$ e as compostas serão as únicas $A \rightarrow A$ e $B \rightarrow B$, que no caso são as identidades desses objetos.

munida de ordem de extensão. Das hipóteses sobre F , esta árvore é aparada de altura ω . Mostremos que estes dois mapas consistem em uma correspondência. A construção $T \mapsto F_T \mapsto T_{F_T}$ acaba em uma árvore isomorfa, como ordem, à árvore T . Por outro lado, (**FinSet**-isomorfismos) $\theta_n : F_{T_F}(n) \rightarrow F(n)$, formando um $[\omega^{\text{op}}, \mathbf{FinSets}]$ -isomorfismo entre estes funtores.

- (ii) Sem perda de generalidade, tome T na forma T_F acima. Interprete F como sistema inverso. Afirmamos que $([T] \subset \prod_{i \in \omega} X_i, (\pi_i)_{i \in \omega})$ é limite inverso de F . Note que

$$[T] \doteq \left\{ x \in \prod_{i \in \omega} X_i : f_{mn} \circ \pi_m(x) = \pi_n(x) \right\}$$

Da definição de \leq temos que $([T], (\pi_i)_{i \in \omega})$ é cone. Tome \tilde{C} e $\tilde{\pi}_i$ outro cone, note que deve haver $\varphi : C \rightarrow \prod_{i \in \omega} X_i$ tal que $\pi_i \circ \varphi = \tilde{\pi}_i$, o que nos dá que φ é morfismo entre cones. Esse morfismo é único da propriedade universal do produto. Só resta mostrar que, de fato, $\varphi : C \rightarrow [T]$. Seja $y = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} f_{mn} \circ \pi_m(y) &= f_{mn} \circ \pi_m \circ \varphi(x) \\ &\stackrel{\varphi \text{ é morfismo entre cones}}{=} f_{mn} \circ \tilde{\pi}_m(x) \\ &\stackrel{C \text{ é cone}}{=} \tilde{\pi}_n(x) \\ &\stackrel{\varphi \text{ é morfismo entre cones}}{=} \pi_n \circ \varphi(x) \\ &= \pi_n(y) \end{aligned}$$

Mas então $y \in [T]$, como queríamos. Temos então que $[T] \neq \emptyset$ é elemento final na categoria dos cones e, portanto, limite inverso.

□

Corolário 1.2.1 (Versão alternativa do lema de König). *Todo sistema inverso $F : \omega^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{FinSets}$ com $F \neq \emptyset$ e $F(n+1 \rightarrow n) = f_{n+1 n}$ sobrejetora para todo $n \in \omega$ tem $\lim F \neq \emptyset$.*

Observação 1.2.2. Seja T aparada de altura $\leq \omega$.

- Considere T como sistema inverso $T : h(T)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$, $T(n) \doteq \text{level}_T(n)$ cujos mapas $\text{level}(n) \xrightarrow{n \geq m} \text{level}(m)$ fornecem ancestrais. Esse sistema inverso tem limite inverso, a nível **Set**:

$$\left(\lim T \subset \prod_{n \in h(T)} \text{level}(n), \pi_n : \lim T \rightarrow \text{level}_T(n) \right)$$

Podemos considerar a topologia inicial induzida pelas π_n , considerando cada nível com topologia discreta. O espaço resultante será $[T]$.

- Podemos também considerar o conjunto de sequências

$$(s_i)_{i \in \omega} \in \prod_{n \in \omega} \text{level}(n)$$

crescentes com topologia induzida da topologia produto $\prod_{n \in \omega} \text{level}_T(n)$. O espaço resultante será $[T]$.

- Se T se ramifica finitamente, podemos ver T como grafo localmente finito, conexo e sem ciclos. Basta interpretar elementos como vértices, cada um ligado aos seus sucessores via arestas. Podemos encarar este grafo como um 1-complexo $|T|$, considerando arestas como cópias de $[0, 1]$ e identificando suas extremidades aos vértices cabíveis. Este será um espaço σ -compacto e podemos construir sua compactificação de Freudenthal. Obtem-se $\text{End}(T) = |T| \cup \Omega(T)$, a topologia de extremidades de T ¹⁰, como grafo. As extremidades $\Omega(T)$, como subespaço, será homeomorfa ao espaço $[T]$.
- Como já comentado, ultra-metrizáveis zero-dimensionais são homeomorfos ao espaço de ramos de alguma árvore.

Assim como o axioma da escolha está intimamente associado ao teorema de Tychonoff, o axioma da escolha dependente fornece um caso particular de produtividade de compacidade :

Proposição 1.2.7 (**[DC]** Tychonoff restrito). *Produto enumerável de **sequencialmente compactos** é sequencialmente compacto.*

¹⁰ (DIESTEL, 2004)

Demonstração. A demonstração desse resultado está na [Proposição A.2.1](#). \square

O que significa que o produto enumerável de compactos metrizáveis é compacto metrizável. Podemos agora mostrar:

Corolário 1.2.2 (*[DC]* Compacidade e Ramificação). *Seja T aparada de altura ω que se ramifica finitamente, então $[T]$ é compacto se, e somente se, T se ramifica finitamente.*

Demonstração. Mostremos as duas direções.

- Se T se ramifica finitamente, então todo nível é finito. Vendo T como sistema inverso, com funções f_{mn} , temos que $T(n)$ é então metrizável sequencialmente compacto. Note que

$$[T] = \bigcap_{m \geq n} \left\{ x \in \prod_{n \in \omega} T(n) : f_{mn} \circ \pi_m(x) = \pi_n(x) \right\}$$

é um fechado do compacto metrizável $\prod_{n \in \omega} T(n)$, logo $[T]$ é compacto.

- Se T não se ramifica finitamente então, em particular, deve haver nível $\text{level}(n) \geq \aleph_0$. Note que $\{\Sigma(s) : s \in \text{level}(n)\}$ é cobertura aberta não trivial de $[T]$, pois T é aparada, e não existe subcobertura finita.

\square

A demonstração anterior serve também para mostrar o caso T não aparado se ramificando finitamente. Basta anexar uma cópia de ω ao fim de ramos de altura finita e acabamos com uma árvore, agora aparada, cujo espaço de ramos é isomorfo ao espaço $[T]$.

O lema de König é também associado a princípios combinatórios. Considere a seguinte propriedade combinatória de um grafo:

Definição 1.2.6 (*k*-colorações). *Seja G grafo. Uma **k-coloração** de G é uma função $f : V(G) \rightarrow k$ dos vértices de G em $k = \{0, 1, \dots, k-1\}$ tal que $f(v_1) \neq f(v_2)$ caso v_1 e v_2 sejam adjacentes.*

Apliquemos König para mostrar uma versão mais simples do teorema de De Bruijn-Erdős (SOIFER, 2009).

Teorema 1.2.1 (De Bruijn-Erdős). *Seja G grafo com enumeráveis vértices $V(G)$. Se todo subgrafo finito de G admite k -coloração, então G admite k -coloração.*

Demonstração. Enumere $V(G) = \{v_n : n \in \omega\}$ todos os vértices de G . Considere $G_n \doteq \{v_0, \dots, v_n\}[G]$ o grafo que inclui todos estes vértices e arestas do grafo original cujas extremidades estão em $\{v_0, \dots, v_n\}$ ¹¹. Tome $L_n \doteq \{f : \{v_0, \dots, v_n\} \rightarrow k : f \text{ é } k\text{-coloração de } G_n\}$. Cada L_n é não vazio por hipótese. Note que se $f \in L_n$, então $f \upharpoonright \{v_0, \dots, v_{n-1}\} \doteq g \in L_{n-1}$. Defina $g \leq f$ ordem usual de extensão entre funções em $\bigsqcup_{n \in \omega} L_n \doteq T$. Temos que T é uma árvore de altura ω tal que todo elemento tem no máximo k sucessores. Tomando r um ramo infinito, $f \doteq \bigcup r$ será k -coloração de G . As funções de r são compatíveis, logo f é função com domínio $V(G)$. Fossem $v_k, v_m \in V(G)$ adjacentes com $f(v_k) = f(v_m)$, então $f \upharpoonright \{v_1, \dots, v_{\max\{k,m\}}\}$ não seria k -coloração, um absurdo. \square

Uma outra demonstração seria construir uma sequência de funções $f_n \in [T]$ (uso tácito do axioma dependente da escolha) tal que $f_k \upharpoonright k \in L_k$ é k -coloração para os primeiros vértices, completando a definição com uma cor qualquer $f_k(v) = c$ em $v \in V(G) \setminus \{v_0, \dots, v_k\}$. Usando agora o [Corolário 1.2.2](#) temos que $[F]$ é compacto metrizável ([Proposição 1.2.4](#)), logo sequencialmente compacto. Tome subsequência convergente $f_{n_k} \rightarrow f$. A função f será uma k -coloração. Estas ‘diferentes’ demonstrações aparecem devido às associações estabelecidas na seção.

1.3 Propriedade Functorial

Nesta sessão gostaríamos de estender, de maneira consistente, a noção de **cofinalidade**¹² para árvores (note que ordinais são árvores). Tentaremos ganhar com isso

¹¹ Chamado de grafo induzido,

¹² Uma função monótona entre ordens totais $\varphi : P \rightarrow Q$ é dita **cofinal** se $\forall q \in Q \exists p \in P : q \leq \varphi(p)$

um functor $[\cdot] : \mathbf{Tree} \rightarrow \mathbf{Top}$ que leva árvore T em seu espaço $[T]$ de ramos. Tomando $\varphi \in \text{hom}(T_1, T_2)$ função monótona e $r \in [T]$, queremos então produzir uma função contínua $[\varphi] : [T_1] \rightarrow [T_2]$ que leva ramo em ramo (‘partida de jogo’ em ‘partida de jogo’) de forma a ter propriedade functorial. Uma primeira tentativa natural seria tomar imagens dos ramos por φ . Estas imagens serão cadeias, mas não temos necessariamente maximalidade.

Definição 1.3.1 (Morfismos Próprios (TSERUNYAN, 1994/1995)). Funções monótonas $\varphi \in \text{hom}(T_1, T_2)$ são ditas **próprias no ramo** $r \in [T_1]$ se houver ramo $[\varphi](r) \in [T_2]$ tal que $\varphi : r \rightarrow [\varphi](r)$ é cofinal. Mostraremos a boa definição de $[\varphi]$ mais adiante.

Chamemos de $D_\varphi \doteq \{r \in T_1 : \varphi \text{ é própria em } r\}$. Nasce uma função $[\varphi] : D_\varphi \rightarrow [T_2]$, bem definida pela proposição acima, que chamaremos **função ramo** de φ definido em seu **domínio próprio** D_φ . Se $D_\varphi = [T_1]$, dizemos simplesmente que φ é **própria**. Uma **subárvore** $S \subset T$ é dita **subárvore própria** se sua função inclusão $S \hookrightarrow T$ é própria. Estas últimas serão as subárvores de altura $h(T)$ no caso aparado.

Imagine cada nó da árvore domínio como um pino móvel e cada relação \leq entre sucessores como um barbante entre estes pinos. Funções entre árvores posicionam os pinos da árvore domínio sobre os pinos da árvore imagem. Para que uma função seja monótona, é proibido que barbantes da árvore domínio ‘atrassem’ a árvore imagem, ou seja, liguem pinos incomparáveis ou em ordem revertida. Um dos ramos da árvore imagem está no domínio próprio de φ quando os pinos se estendem ao longo de todo um ramo da árvore imagem.

Exemplo 1.3.1 (Próprias). *Alguns exemplos:*

- (i) *Se as alturas das árvores são finitas, φ deve levar folha em folha (maximal em maximal).*
- (ii) *Sejam T_1, T_2 aparadas de altura ω e $h(\varphi(t))$ estritamente crescente com t , de fato teremos φ própria.*

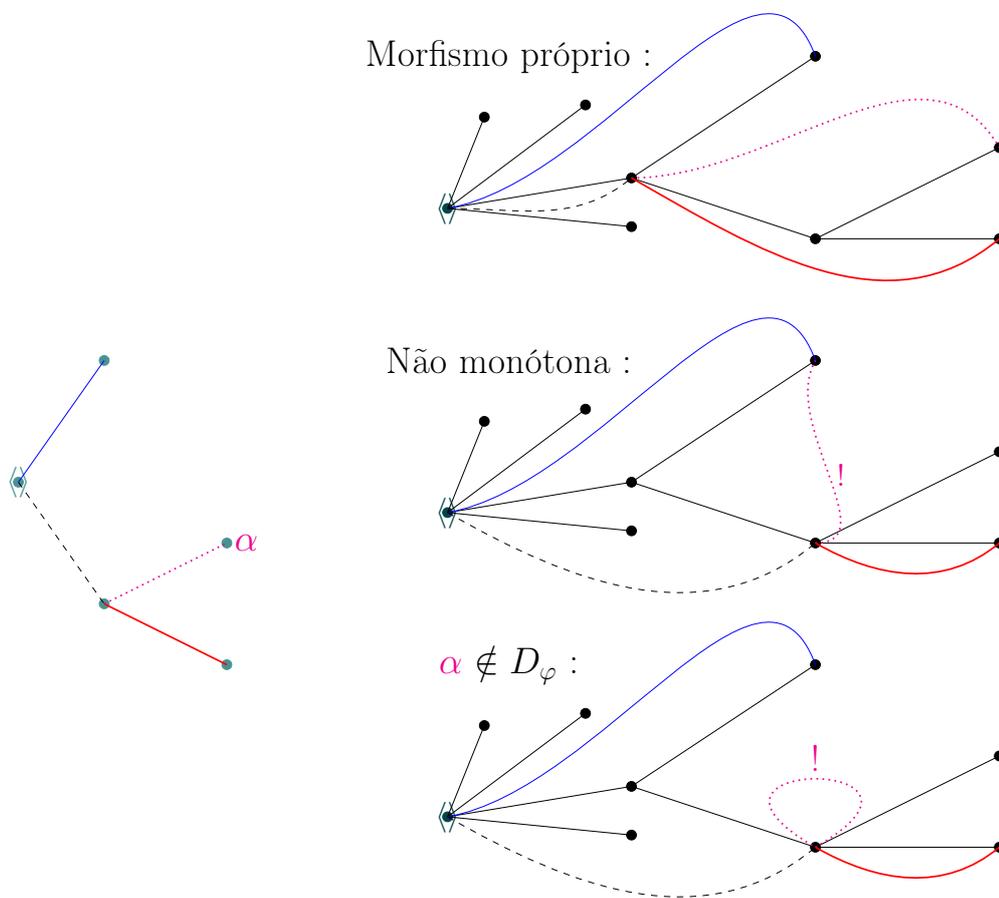


Figura 20 – Exemplo de morfismo próprio, função não monótona e função monótona com ramo fora do domínio. Note que $\varphi \upharpoonright \alpha$ não é cofinal em nenhum dos dois ramos candidatos a $[\varphi](\alpha)$, que ficaria com valor ‘ambíguo’.

- (iii) Em particular se T_1, T_2 são árvores de seqüências finitas e φ preserva comprimento de seqüência ($|\varphi(t)| = |t|$) então φ é própria.
- (iv) Funções monótonas $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ entre árvores aparadas de mesma altura que preserva níveis. Vendo árvores como funtores $T : h(T)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$, a noção de transformação natural entre estes funtores (setas entre funtores) se traduz neste tipo de morfismo.

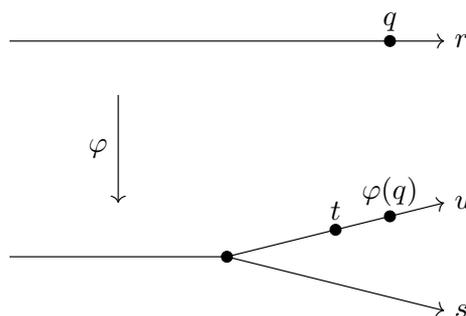


Figura 21 – Boa definição de $[\varphi] : D_\varphi \rightarrow [T_2]$ (Proposição 1.3.1).

Proposição 1.3.1 (Boa definição de $[\varphi]$). *Seja φ é própria em D_φ . O mapa $r \in D_\varphi \mapsto [\varphi](r)$ está bem definido.*

Demonstração. Seja $r \in D_\varphi$ e $s, u \in [T_2]$ dois candidatos distintos à imagem $[\varphi](r)$. Teríamos que $\varphi : r \rightarrow s, u$ cofinais. Sem perda de generalidade, vamos tomar $t \in u \setminus s$. Temos também $q \in r \mapsto \varphi(q) \geq t$, mas $\varphi(q) \notin s$, caso contrário $t \in s$, um absurdo. Temos então que $[\varphi] : D_\varphi \rightarrow [T_2]$ está bem definida. \square

Como queremos chegar a algum tipo de functorialidade, precisamos de bom comportamento sob composição e que $[\text{id}_T] = \text{id}_{[T]}$. De fato, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.3.2. *Sejam $\text{id}_T : T \rightarrow T$ a função identidade e $T_1 \xrightarrow{f_1} T_2 \xrightarrow{f_2} T_3$ morfismos próprios entre árvores.*

- (i) *A identidade é própria.*
- (ii) *Se f_1 é própria em α e f_2 é própria em $[f_1](\alpha)$, então $f_2 \circ f_1$ é própria em α e tem ramo $[f_2 \circ f_1](\alpha) = [f_2] \circ [f_1](\alpha)$.*
- (iii) *Seja $D_{f_2 \circ f_1} \doteq [f_1]^{-1}(D_{f_2})$, note que $f_2 \circ f_1$ tem função ramo bem definida $[f_2 \circ f_1] = [f_2] \circ [f_1] : D_{f_2 \circ f_1} \rightarrow [T_3]$ bem definida.*
- (iv) *Em particular, composta de funções próprias é própria.*
- (v) *Sejam f_2 e $f_2 \circ f_1$ próprias, então f_1 é própria.*

Demonstração. Demonstremos cada item.

- (i) Trivialmente $\text{id}_T : \alpha \rightarrow \text{id}_{[T]}(\alpha) = \alpha$ é função cofinal. A função ramo da identidade $[\text{id}_T] = \text{id}_{[T]}$ é a identidade dos ramos e está definida em toda $[T]$.
- (ii) De fato, $[f_2] \circ [f_1](\alpha)$ será função ramo de $f_2 \circ f_1$. Basta notar que $\alpha \xrightarrow{f_1} [f_1](\alpha) \xrightarrow{f_2} ([f_2]([f_1](\alpha)))$ será composta de cofinais, também cofinal.
- (iii) Consequência direta de (ii).
- (iv) Consequência direta de (ii).
- (v) Suponha que não, então deve haver r_1 ramo de T_1 tal que $r_1 \xrightarrow{f_1} r_2$ não é cofinal para qualquer que seja o ramo r_2 que estenda a cadeia $f_1(r_1)$. Fixe um r_2 . Por outro lado existe e é único $r_3 = [f_2 \circ f_1](r_1) \in [T_3]$ com $r_1 \xrightarrow{f_2 \circ f_1} r_3$ cofinal, mas note que isso significa que $f_2 : f_1(r_1) \rightarrow r_3$ é co-final, logo $f : r_2 \rightarrow r_3$ é cofinal. Tome $t_2 \in r_2$ tal que $f_1(t_1) < t_2$ pra todo $t_1 \in r_1$, logo $f_2(f_1(t_1)) \leq f_2(t_2)$ pra todo $t_1 \in r_1$. Note que deve haver $a \in r_1$ com $f_2(t_2) \leq f_2 \circ f_1(a)$ mas então $t_2 \leq f_1(a)$, um absurdo.

□

Chegamos então ao nosso objetivo de definir uma função contínua à partir de uma função monótona:

Proposição 1.3.3 (Monótonas próprias dão origem a funções contínuas). *Seja $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ monótona com $[\varphi] : D_\varphi \rightarrow [T_2]$. Considere $D_\varphi \subset [T_1]$ com topologia de subespaço, de fato $[\varphi]$ é contínua.*

Demonstração. Se $D_\varphi = \emptyset$ não há nada a fazer. Caso contrário, tome $\alpha \in D_\varphi$ e uma vizinhança básica de sua imagem $[\varphi](\alpha) \in \Sigma(t_2)$, o que quer dizer que $t_2 \in [\varphi](\alpha)$. Da cofinalidade de $\varphi : \alpha \rightarrow [\varphi](\alpha)$ temos que $\exists t_1 \in \alpha$ com $t_2 \leq \varphi(t_1)$. Temos em particular que $\alpha \in \Sigma(t_1) \cap D_\varphi$ aberto básico relativo e

$$[\varphi](\Sigma(t_1) \cap D_\varphi) \subset \Sigma(t_2)$$

pois dado ramo $\beta \in \Sigma(t_1) \cap D_\varphi$, temos que $\varphi : \beta \rightarrow [\varphi](\beta)$ é monótona cofinal e $t_1 \in \beta$. Nesse caso $t_2 \leq \varphi(t_1) \in [\varphi](\beta)$, como $[\varphi](\beta)$ é ramo temos $t_2 \in [\varphi](\beta)$ o que significa que $[\varphi](\beta) \in \Sigma(t_2)$. \square

Corolário 1.3.1 (Functorialidade). *Do que foi dito, note que duas funções monótonas próprias $f_1 : T_1 \rightarrow T_2$, $f_2 : T_2 \rightarrow T_3$ tem função ramo $[f_2 \circ f_1] = [f_2] \circ [f_1] : D_{f_2 \circ f_1} \rightarrow [T_2]$ composta de contínuas, uma função contínua. Restringindo os morfismos entre árvores aos morfismos próprios entre elas, $[\cdot] : \mathbf{Tree} \rightarrow \mathbf{Top}$ é um functor.*

Obtemos a seguinte consequência topológica.

Proposição 1.3.4 (O espaço de Baire é G_δ do espaço de Cantor). *É possível realizar \mathcal{N} como subespaço de \mathcal{C} , removendo-se deste um subespaço denso enumerável.*

Demonstração. Considere $\varphi : \omega^{<\omega} \rightarrow 2^{<\omega}$ com $\varphi(\langle \rangle) \doteq \langle \rangle$ e

$$\varphi(s \frown n) \doteq {}^{13}\varphi(s) \frown 0^n \frown 1$$

monótona própria, pois sua altura é estritamente crescente. Vamos definir monótona própria $\psi : 2^{<\omega} \rightarrow \omega^{<\omega}$, $\psi(\langle \rangle) \doteq \langle \rangle$ que em seqüências terminando em 0 tem valor calculado como nestes exemplos (função que conta 1's):

$$\langle 1101110010 \rangle \xrightarrow{\psi} \langle 2301 \rangle$$

$$\langle 0111101111110 \rangle \xrightarrow{\psi} \langle 046 \rangle$$

e para seqüências do tipo $s \frown 1$ (terminando em 1) tem valor $\psi(s \frown 1) \doteq \psi(s)$. Claramente monótona, note que esta função é própria apenas em $D_\psi \doteq \{x \in 2^\omega : \text{frequentemente } x(n) = 0\}$. Note que $D_\psi \subset \varphi(\mathcal{N})$, logo $\psi \circ \varphi$ tem função ramo bem definida em $\omega^{<\omega}$. Pela construção $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\omega^{<\omega}}$, o que da functorialidade nos dá

$$[\psi \circ \varphi] = [\varphi] \circ [\psi] = \text{id}_{[\omega^{<\omega}]} = \text{id}_{\mathcal{N}}$$

Mas então $[\varphi] : \mathcal{N} \rightarrow D_\psi$ tem inversa contínua $[\psi] : D_\psi \rightarrow \omega^{<\omega}$ e é portanto um homeomorfismo entre \mathcal{N} e completamente metrizável $D_\psi \subset 2^\omega$. O complementar de

¹³ 0^0 deve ser interpretado como $\langle \rangle$

D_ψ é $N \doteq 2^\omega \setminus D_\psi = \{x \in 2^\omega : \text{eventualmente } x(n) = 1\}$ é subconjunto próprio e de fato enumerável, denso de 2^ω , pois dado t qualquer, estendendo a sequência com infinitos 0's temos $t \in \beta \in N$. \square

Usando o Teorema 3.3.4 e o Teorema 3.3.3, aplicando Teorema B.2.5 obteríamos também uma inclusão $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{C}$. Outra aplicação topológica é que fechados de completamente ultrametrizáveis zero-dimensionais são retratos (Proposição 3.3.1).

1.3.1 Subárvores Próprias

Vamos discutir agora um pouco sobre como subárvores se comportam com relação ao functor $[\cdot]$ e se este functor preserva relacionamentos entre estas subordens.

Proposição 1.3.5 ($[\cdot]$ preserva ordem em subárvores). *Sejam T_1, T_2 subárvores próprias $[T_1] \subset [T_2] \iff T_1 \subset T_2$. Sob qualquer uma destas hipóteses, $[T_1]$ tem topologia de subespaço de $[T_2]$.*

Demonstração. Se $T_1 \subset T_2$ está claro que $[T_1] \subset [T_2] \subset [T]$ pois T_1 -cadeias maximais serão T_2 cadeias maximais. Seja $[T_1] \subset [T_2]$ e $t \in T_1 \setminus T_2$, note que t estaria em um ramo ¹⁴ $\alpha \in [T_1] \setminus [T_2]$, um absurdo. Dada uma das hipóteses, equivalentes, uma vizinhança básica de $[T_1]$ é de fato

$$\overbrace{\Sigma_{T_1}(t)}^{\text{ab. básico de } [T_1]} = \{\alpha \in [T_1] : t \in \alpha\} = \overbrace{\Sigma_{T_2}(t)}^{\text{ab. básico de } [T_2]} \cap [T_1]$$

\square

Inclusões $S \hookrightarrow T$ de subárvores próprias são **Set**-monomorfismos, então serão **Tree**-monomorfismos.

Corolário 1.3.2 ($[\mathbf{Tree} - \text{mono}] = \mathbf{Top} - \text{mono}$). *As inclusões de subárvores próprias $S \hookrightarrow T$ em **Tree** dão origem a inclusões topológicas $[S] \hookrightarrow [T]$ em **Top**.*

¹⁴ dependendo da das características de T , precisamos de algum nível de escolha neste passo.

Estas são as subárvores cujo espaço de ramos pode ser naturalmente considerados como subespaço topológico do espaço de ramos da árvore original. Isto será importante na [Definição 2.1.2](#) sobre (quase-)estratégias.

1.3.2 Último Ancestral Comum

Vamos verificar se esta classe de ordens tem alguma estrutura de reticulado. Tomar o ínfimo teria, em particular, a interpretação ‘último ancestral em comum’ usado corriqueiramente por biólogos. Está claro que se $t \perp s$ são elementos incomparáveis, fosse $t, s \leq k$, note que $t, s \in \downarrow k$ ordem total, um absurdo, portanto $S \doteq \{k \in T : s, t \leq k\} = \emptyset$ logo a operação *join*, denotada por $t \vee s = \min S$, não está bem definida.

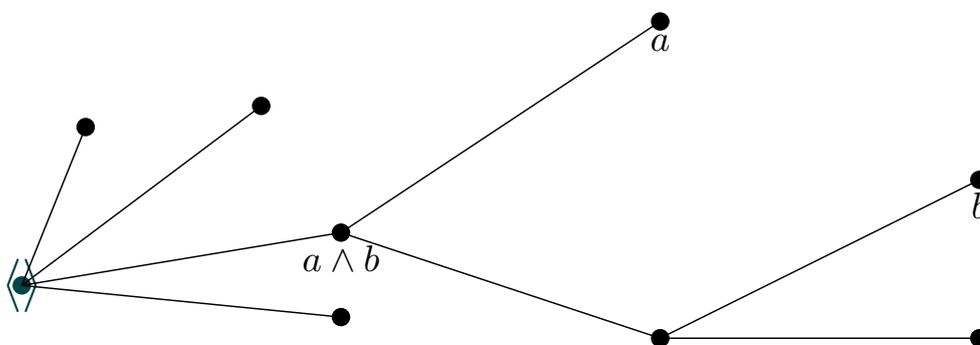


Figura 22 – Dois elementos e o ínfimo $\wedge\{a, b\}$.

O mesmo tipo de problema apareceria se não tivéssemos fixado árvores com raiz única, visto que se t é descendente de $\langle \rangle$ e $s \neq t$ de $\langle \rangle' \perp \langle \rangle$ ambos minimais, $(\downarrow s) \cap (\downarrow t) = \emptyset$. Fixar raiz única garante ao menos que T é direcionado para baixo.

Lema 1.3.1 ([AC]). *Seja T árvore aparada que não se ramifica em altura limite (Definição 1.2.3). Seja $P \subset T$ é cadeia de altura $h(P) < h(T)$ inferiormente fechado. Existe e é único t_P tal que $t_P = \bigvee P$.*

Demonstração. Como $h(P) < h(T)$, P não é cadeia maximal. Podemos então estender P ao menos com um elemento t . Nesse caso $\downarrow t \setminus P \neq \emptyset$ e portanto temos $a \doteq \min(\downarrow t \setminus P)$. Note que a é comparável com todos os elementos de P . Mostremos que a é cota superior de P . Houvesse $a < p$ teríamos que $a \in P$. Nesse caso, $P \subset \downarrow a$. De fato $P = \downarrow a$, pois se houvesse $b \in (\downarrow a) \setminus P$ teríamos a minimalidade de a contrariada. Se $h(a)$ é sucessor

$\alpha + 1$, então a tem ancestral $t_p \in P$ de altura α . Este é o máximo de P . Se a altura de a é limite então a é supremo de P .

□

Proposição 1.3.6 ([AC]). *Seja T árvore aparada. A operação $\wedge : \mathcal{P}(T) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow T$, que devolve ínfimo de conjuntos não vazios, está bem definida se T não se ramifica em altura limite.*

Demonstração. Seja $S \subset T$ subconjunto não vazio de T . Vamos mostrar que existe $\wedge S$. Considere o conjunto de cotas inferiores comuns $P \doteq \{p \in T : \forall s \in S(p \leq s)\}$. O conjunto P não é vazio, visto que a raiz $\langle \rangle$ é elemento deste conjunto. É também conjunto bem ordenado¹⁵. Se existem $t_1, t_2 \in S$ distintos, então $h(P) < h(T)$. Nesse caso S deve ser unitário para que $h(P) = h(T)$, mas unitários tem ínfimo óbvio. Aplicando o lema anterior, temos a com $P = \downarrow a$. No caso $h(a)$ sucessor teremos máximo $t_p \in P$ das cotas inferiores P , o ínfimo de S que procuramos. O caso $h(a)$ limite não pode ocorrer:

- Se $a \leq s$, para todo $s \in S$, então $a \in P$, absurdo.
- Suponha que existe $s \in S$ com $s \leq a$. Note que haveria $p \in P$ com $s < p < a$, mas p é cota inferior, um absurdo.
- Suponha que existe $s \in S$ com $s \perp a$. Como $p \leq s$ para todo $p \in P$, $P \cup \{s\}$ é cadeia. Repetindo o que fizemos em Lema 1.3.1, temos \tilde{a} com $P = \downarrow \tilde{a}$. Devemos ter que $\tilde{a} = a$, mas então $a = \tilde{a} \leq s$, outro absurdo.

□

Exemplo 1.3.2. *Considere ω munido de sua ordem usual \leq . Adicione dois pontos $T \doteq \omega \cup \{a, b\}$ e estenda \leq considerando $\forall n \in \omega n \leq a, b$ e $a \perp b$ incomparáveis. Note que T se ramifica na altura limite ω . Não existe $a \wedge b$.*

¹⁵ Seja \mathcal{B} família não vazia de boas ordens, sub-ordens de (T, \leq) . Tome $P \doteq \bigcap \mathcal{B}$. P é totalmente ordenado. Seja $A \subset P \doteq \bigcap \mathcal{B}$ não vazio. Temos que $A \subset B$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e que $m \doteq \min_B A \in B$ é o \leq -mínimo de A , único. Nesse caso $m = \min_P(A)$.

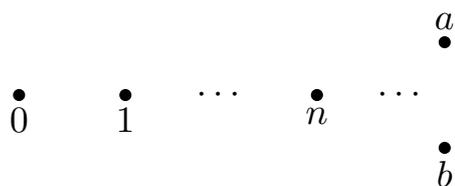
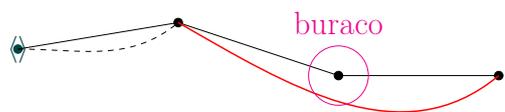


Figura 23 – Árvore bifurcando em altura limite. Note que $a \wedge b$ não está bem definido. A cadeia $P \doteq \omega \subset T$ não tem supremo.

1.3.3 Imagens, fidelidade e plenitude

O functor $[\cdot]$ **não é fiel**. Considere $\varphi, \psi : 3 \rightarrow 4$ próprias. Tome $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(2) = \psi(2) = 3$, $\varphi(1) = 1$ e $\psi(1) = 2$. Temos então $\varphi \neq \psi$ com $[\varphi](3) = [\psi](3) = 4$, única função ramo possível. Para um caso de altura limite, tome $\varphi, \psi : \omega \rightarrow \omega$, $\varphi(n) = 2n$ e $\psi(n) = 2n + 1$, ambas com $[\varphi](\omega) = [\psi](\omega) = \omega$.

Morfismo próprio φ :



Morfismo próprio ψ :

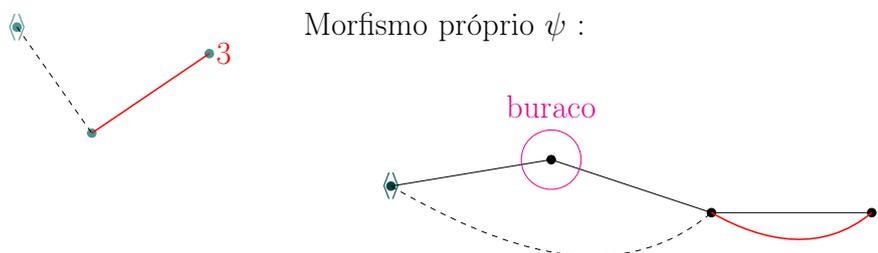


Figura 24 – Dois morfismos próprios com a mesma função ramo.

O functor $[\cdot]$ **não é pleno**. A função contínua $f \in \text{hom}([\omega] = \{\omega\}, [\omega_1] = \{\omega_1\})$ não é ramo de nenhuma monótona sob o axioma da escolha. A imagem de árvore via funções próprias não é, em geral, uma subárvore da árvore imagem. Isto por que podemos ‘pular’ alguns elementos e deixar buracos na árvore imagem para trás. Subárvores não têm estes buracos. Na próxima proposição, o item (i) tenta resolver esse problema. O item (ii) estabelece que obtemos a imagem.

Proposição 1.3.7 (Ramos de imagens). *Considere as afirmações:*

- (i) *Seja $\varphi : S \rightarrow T$ morfismo com T não se ramificando em altura limite, $\text{im } \varphi \doteq \bigcup_{s \in S} (\downarrow \varphi(s) \cup \{\varphi(s)\})$ é subárvore própria de T , imagem de S via φ .*
- (ii) *De fato $[\text{im } \varphi] = [\varphi]([S])$ como subespaço de $[T]$.*

Demonstração. Mostremos cada afirmação.

- (i) A definição faz com que esta subordem já nasça fechada para baixo e com raiz. Dados $t_1, t_2 \in \text{im } \varphi$, devem haver $s_1, s_2 \in S$ com $t_i \leq \varphi(s_i)$. Considere $t \doteq \varphi(s_1) \wedge \varphi(s_2)$. Note que $t, t_i \in \downarrow \varphi(s_i)$, logo t é comparável com ambos os t_i .
- Se $t_1 \leq t$, então $t_2 \in \downarrow \varphi(s_1) \cap \downarrow \varphi(s_2)$, logo t_1 e t_2 serão comparáveis. Basta tomar um deles como testemunha do direcionamento para baixo de $\text{im } \varphi$.
 - Se $t_2 \leq t$, teremos a mesma conclusão anterior.
 - Negando as duas hipóteses anteriores acabamos com o próprio $t \leq t_1, t_2$ testemunhando que $\text{im } \varphi$ é direcionada para baixo.

Considere $\iota : \text{im } \varphi \rightarrow T$ inclusão, monótona injetora. Para cada ramo α em S temos $[\varphi](\alpha)$ onde $\varphi : \alpha \rightarrow [\varphi](\alpha)$ é cofinal, mas então dado $\iota(\varphi(t)) = \varphi(t) \in \varphi(\alpha)$ existe \bar{t} com $\iota(\varphi(\bar{t})) = \varphi(\bar{t}) \geq \varphi(t)$ e, como esperado, $[\iota](\beta) = \beta$ nos dá função ramo $[\iota] : \text{im } \varphi \rightarrow [T]$ da inclusão, que é então própria.

- (ii) Considere $e : S \rightarrow \text{im } \varphi$, $e(s) \doteq \varphi(s)$ monótona própria. Note que $\iota \circ e = \varphi$. Considere morfismos $\tilde{\iota} : \tilde{T} \rightarrow T$ monomorfismo próprio e $\tilde{e} : S \rightarrow \tilde{T}$ própria tal que $\tilde{\iota} \circ \tilde{e} = \varphi$.

Dado $t \in \text{im}(\varphi)$ com $\iota(t) = y$ temos único $\tilde{t} \in \tilde{T}$ com $\tilde{\iota}(\tilde{t}) = y$ (comutatividades com φ). Considere o mapa $\psi : \text{im}(\varphi) \rightarrow \tilde{T}$, $t \mapsto \tilde{t} \doteq \psi(t)$ bem definido. Temos que ψ é única, já a nível **Set**, com $\tilde{\iota} \circ \psi = \iota$, e é monótona própria por [Proposição 1.3.2](#) (v).

□

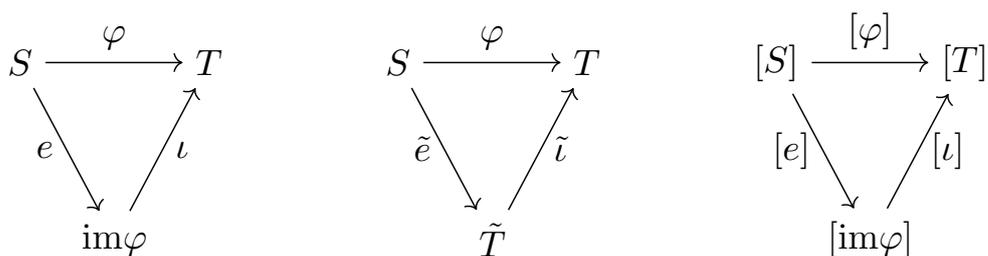


Figura 25 – Diagramas comutativos de alguns morfismos envolvidos na demonstração.

Corolário 1.3.3. *Se φ preserva altura, $\text{im } \varphi = \varphi(S)$ é a imagem usual e $[\varphi(S)] = [\varphi]([S])$.*

Vamos tentar obter agora alguns resultados afirmativos com relação à plenitude de $[\cdot]$. Para isto, vamos nos inspirar no caso ordinal: funções próprias $\text{hom}_{\text{Tree}}(\alpha, \beta)$ entre dois ordinais são funções monótonas cofinais $f : \alpha \rightarrow \beta$, com única função ramo possível $[f](\alpha) = \beta$. De fato, $\text{hom}_{\text{Tree}}(\alpha, \beta)$ é não vazio se, e somente se, $\text{cf } \beta \leq \alpha$. Se T_2 for aparada e $\text{hom}_{\text{Tree}}(T_1, T_2) \neq \emptyset$ então temos função monótona cofinal de um ramo de $\alpha \in [T_1]$ num ramo $\beta \in [T_2]$, o primeiro homeomorfo a ordinal $\leq h(T_1)$ e o último homeomorfo a $h(T_2)$, o que nos diz que $\text{cf } h(T_2) \leq h(T_1)$. Nesse caso a cofinalidade relativa entre as alturas das árvores parece oferecer obstrução quanto à existência de morfismos próprios entre elas.

Se considerarmos uma função contínua $f : [T_1] \rightarrow [T_2]$ entre espaços de ramos, encontremos também uma obstrução, puramente em termos de compatibilidade, para que um morfismo próprio $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ seja o candidato a $f = [\varphi]$. Considere dois ramos $\alpha, \beta \in \Sigma(s) \subset [T_1]$. É fácil ver que $s \in \alpha \cap \beta$. Suponha que a função $f : [T_1] \rightarrow [T_2]$ seja função ramo de um morfismo próprio φ . Para isso, note que devemos ter $\varphi : \alpha \rightarrow f(\alpha)$ e $\varphi : \beta \rightarrow f(\beta)$. Logo $\varphi(s) \in f(\alpha) \cap f(\beta)$.

Lema 1.3.2. *Seja T árvore aparada que não se ramifica em altura limite. Considere subconjunto $C \subset [T]$ de ramos e $P \doteq \bigcap C$ sua intersecção. O conjunto P está bem ordenado, como sub-ordem.¹⁶ Se $h(P) = h(T)$, P é ramo e de fato tínhamos $C = P \in [T]$.*

¹⁶ Seja \mathcal{B} família não vazia de boas T -sub-ordens de uma ordem fixa \leq . Seja $S \subset P \doteq \bigcap \mathcal{B}$ não vazio. Temos que $S \subset B$ para todo $B \in \mathcal{B}$ e que $\min_B S$ é unicamente determinado por \leq e está

Se $h(P) < h(T)$ e T não bifurca em alturas limite, existe e é **único** t_P tal que $P = \downarrow t_P$ (*Lema 1.3.1*). Em particular, $\sup \bigcap \Sigma(s) = s$.

Teorema 1.3.1. *Sejam T_1, T_2 aparadas que não se ramificam em altura limite. Temos que $[\cdot] : \text{hom}(T_1, T_2) \rightarrow \text{hom}([T_1], [T_2]) \neq \emptyset$ é sobrejeção se, e somente se, $\text{cf } h(T_2) \leq h(T_1)$.*

Demonstração. Note que se $f = [\varphi]$, então $\varphi : \alpha \rightarrow f(\alpha)$ é cofinal, mas α e $f(\alpha)$ são isomorfos, como ordens, aos ordinais $h(T_1)$ e $h(T_2)$. Temos então que $\text{cf } h(T_2) \leq h(T_1)$, concluindo uma direção da equivalência. Para a outra direção, seja $\text{cf } h(T_2) \leq h(T_1)$. Fixemos $\psi : h(T_1) \rightarrow h(T_2)$ cofinal qualquer. Defina

$$\varphi(s) = \begin{cases} \sup \bigcap f(\Sigma(s)) & \text{se } \bigcap f(\Sigma(s)) \text{ não é ramo e} \\ c \in \bigcap f(\Sigma(s)) \cap \text{level}_{T_2}(\psi(h(s))) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que, da definição, se $s \in \alpha$ então $\varphi(s) \in f(\alpha)$, logo podemos falar de $\varphi : \alpha \rightarrow f(\alpha)$. Dado $t \in f(\alpha)$, da continuidade de f temos $\alpha \in \Sigma(s)$ vizinhança básica com $f(\Sigma(s)) \subset \Sigma(t)$. Se $\bigcap f(\Sigma(s))$ não é ramo temos então:

$$\bigcap \Sigma(t) \subset \bigcap f(\Sigma(s)) \implies t = \sup \bigcap \Sigma(t) \leq \sup \bigcap f(\Sigma(s)) = \varphi(s)$$

Caso seja, basta encontrar $s \in \alpha$ de altura suficientemente grande. □

Corolário 1.3.4. *Toda função contínua $f : \omega^\omega \rightarrow \omega^\omega$ é imagem via $[\cdot]$ de uma função própria $\varphi : \omega^{<\omega} \rightarrow \omega^{<\omega}$. Analogamente, todo automorfismo do espaço de Cantor é ramo de automorfismo próprio da árvore binária completa.*

Isso quer dizer que funções contínuas entre espaços de sequências infinitas, algo intratável para um computador, podem ser **arbitrariamente aproximadas** por funções entre strings finitas, computáveis em tempo finito.

em cada um dos B 's.

1.4 Boa Fundação

Denotando por $R \subset X^2$ uma relação binária não trivial, dizemos que ela é bem fundada se todo conjunto $\emptyset \neq A \subset X$ admite R -minimal. Boas ordens de fato são ordens totais onde \leq é bem fundada. Sobre o axioma da escolha dependente isto é equivalente a não haver sequência infinita x_n tal que $x_{n+1}Rx_n$. Um dos axiomas ZF é o axioma da fundação, que diz que para qualquer conjunto X devemos ter que $\in|_X$ é uma relação bem fundada. Isso de fato nos diz que todo objeto de estudo, sob ZF como meta-linguagem, é o que vamos definir como **árvore bem fundada**¹⁷. Vamos explorar uma definição análoga para árvores e, em particular, árvores sobre conjuntos totalmente ordenados.

Definição 1.4.1 (Ordem de Kleene-Brower). Seja $(A, <)$ ordem estrita linear e T árvore sobre A de altura ω . Definimos uma ordem $s <_{KB} t$ se $t < s$ ou

$$\exists n \in \omega (s \upharpoonright n = t \upharpoonright n) \wedge (s(n) < t(n))$$

Em suma, a ordem lexicográfica é seguida em geral mas descendentes vem $<_{KB}$ -antes que seus ascendentes.

Esta é, de fato, uma ordem linear. Mostremos a tricotomia. Suponha que $s \neq t$. Seja $|s| \leq |t|$ (ω é totalmente ordenado). Tome $k = \max\{n \in |s| : s(n) = t(n)\}$.

- Se $k = |s| - 1$ então $s < t$ logo $t <_{KB} s$.
- Caso contrário, temos que $s \upharpoonright k+1 = t \upharpoonright k+1$ e $s(k+1) \neq t(k+1)$. Como A é linear:

$$- \text{ Deve-se ter } s(k+1) < t(k+1) \implies s <_{KB} t.$$

$$- \text{ Ou então } t(k+1) < s(k+1) \implies t < s.$$

Na computação, a ordem acima representa uma travessia pós-ordem.

¹⁷ Todo objeto aqui é um conjunto. Um conjunto (raiz) é determinado por seus elementos (primeiro nível da árvore) e estes são determinados por seus elementos... terminamos com uma árvore cuja ordem $\leq \ni$ e postular sua boa fundação é assumir o axioma da fundação.

Definição 1.4.2 (Boa fundação). Dizemos que T é **árvore bem fundada** se não tem ramo infinito.

É fácil ver que árvores de altura finita são bem fundadas. Se T é bem fundada, qualquer ramo $r \in [T]$ tem altura finita, e portanto elemento maximal $t \in r$. A estes elementos maximais damos o nome de **folha**. Existem árvores de altura ω bem fundadas, basta tomar árvores T com ramos arbitrariamente altos. Um exemplo é a sub-árvore $T \subset \omega^{<\omega}$ que contém apenas $\langle \rangle, \langle n \rangle \frown \langle 0 \rangle^n$, para cada $n \in \omega$, e suas restrições. Se houver ramo infinito, T é **mal fundada**.

Proposição 1.4.1. *Dada T árvore de altura ω sobre $(A, <)$, boa ordem, é bem fundada se, e somente se, $<_{KB}$ é boa ordem em T .*

Demonstração. Note que se $s \in A^\omega$ é ramo $s \in [T]$, então $s \upharpoonright k+1 <_{KB} s \upharpoonright k$ sequência infinita $<_{KB}$ -decrescente, logo $<_{KB}$ não é bem fundada. Seja $(s_k)_{k \in \omega} <_{KB}$ -decrescente, $s_k = \langle a_0^k, \dots, a_{n_k-1}^k \rangle$ então $(a_0^k)_{k \in \omega}$ é \preceq -decrescente. Como esta é uma boa ordem, eventualmente $a_0^k = a_0$ para $k \geq m$. Considere a subsequência $s_k, k \geq m$ e aplique as mesmas observações para $(a_1^k)_{k \in \omega}$, produzindo a_1 . Ficamos com $s = \langle a_0, a_1 \dots \rangle \in [T]$. \square

Chamando os descendentes estritos de x de $\uparrow x \doteq \{t \in T : x < t\}$, temos dois princípios indutivos válidos sobre árvores. Aplicando o princípio da indução em $h(T)$, temos o esquema de proposições:

Proposição 1.4.2. *Seja $\varphi(x)$ fórmula bem formada tal que $\forall y \in \downarrow x (\varphi(y)) \implies \varphi(x)$ é demonstrável, então $\forall x \in T \varphi(x)$.*

Aplicando o princípio da indução na **boa ordem** $<_{KB}$.

Proposição 1.4.3. *Seja T uma árvore bem fundada sobre $(A, <)$, conjunto bem ordenado, e $\varphi(x)$ uma fórmula bem formada e $\forall y \in \uparrow x (\varphi(y)) \implies \varphi(x)$ é demonstrável, então $\forall x \in T \varphi(x)$.*

Corolário 1.4.1. *Seja T bem fundada em $(A, <)$, conjunto bem ordenado. Considere X um conjunto não vazio e o conjunto $\mathcal{F} \doteq \{f : \uparrow x \rightarrow X : x \in T\}$ de funções com valores em X cujos domínios são descendentes de um elemento fixo. Fixemos F_T o conjunto*

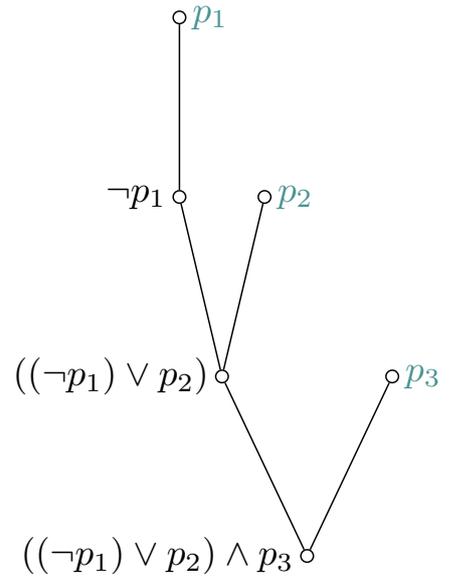
de folhas de T . Dada uma $G : \mathcal{F} \rightarrow X$ e uma $g : F_T \rightarrow X$ existe e é única $f : T \rightarrow X$ extensão de g tal que, para todo $x \in T \setminus F_T$, $f(x) = G(f|_{\uparrow x})$.

Demonstração. Para mostrar o corolário acima, tome $\varphi(x)$ como a fórmula que diz que está bem definida e é única f_x . É demonstrável que $\forall y \in \uparrow x (\varphi(y)) \implies \varphi(x)$ ¹⁸ Aplicando [Proposição 1.4.3](#) temos $\varphi(x)$ para todo elemento. Em particular teremos $\varphi(\langle \rangle)$ na raiz e estendendo a função mais uma vez para $f \doteq f_{\langle \rangle} \cup \{(\langle \rangle, G(f_{\langle \rangle}))\}$ temos nossa função $f : T \rightarrow X$ definida em toda a T . \square

Note que, se A não fosse bem ordenado, sob o axioma da escolha poderíamos bem ordená-lo, portanto sob o axioma da escolha estas proposições valem para qualquer conjunto A . Na lógica, as árvores de derivação de fórmulas, no sentido de ([DALEN, 2004](#)), são em geral árvores bem fundadas¹⁹.

Usando o [Corolário 1.4.1](#), podemos definir funções recursivamente sobre a complexidade de fórmulas, como as valorações e as subfórmulas de uma fórmula. Considere uma função inicial $p \mapsto \llbracket p \rrbracket \in \{0, 1\}$ das variáveis proposicionais atômicas na álgebra de Boole $\{0, 1\}$, existe e é única $\varphi \mapsto \llbracket \varphi \rrbracket \in \{0, 1\}$ valoração²⁰ das fórmulas bem formadas sobre $\{0, 1\}$. Observe que o valor destas funções dependem apenas do valor de $\llbracket \cdot \rrbracket$ nas atômicas que aparecem nas folhas F_φ da árvore de derivação de φ . Uma **tautologia** é definida como uma fórmula φ tal que, $\forall \llbracket \cdot \rrbracket : F_\varphi \rightarrow \{0, 1\}$ definidas nas subfórmulas atômicas de φ têm extensão única, via [Corolário 1.4.1](#), com valor $\llbracket \varphi \rrbracket = 1$ em φ .

Outro caso particular de função definida de maneira recursiva é



¹⁸ A satisfação de φ se dá por vacuidade nas folhas.

¹⁹ Este é o caso mesmo sob sistemas formais que permitem conjunções, disjunções e quantificações infinitárias.

²⁰ Aqui, se pede que as operações lógicas sejam interpretadas algébricamente. Por exemplo, que $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \cdot \llbracket \psi \rrbracket$.

Definição 1.4.3 (Função rank). Dada T bem fundada, está bem definida $\text{rank} : T \rightarrow \mathbf{Ord}$

$$\text{rank}(t) \doteq \sup\{\text{rank}(s) + 1 : s \in \uparrow t\}$$

Aplicada a conjuntos vistos como árvores, este ordinal nos dá seu nível de complexidade na hierarquia de Von Neumann. Aplicados à árvores de derivação de uma fórmula em uma linguagem, esta definição dá a ordem de complexidade desta fórmula. Aplicado a jogos, no sentido de (CONWAY, 2000), esta definição dá a *data de nascimento* do jogo.

Vamos agora estudar o comportamento da boa fundação sob um certo tipo de produto. Começemos pela seguinte identificação formal:

Definição 1.4.4 (Sequências de tuplas são tuplas de sequências). Seja uma árvore $T \subset (A \times B)^{<\alpha}$ sobre $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ produto cartesiano de dois conjuntos, estão bem definidas $s_1 \doteq \pi_1 \circ s$ e $s_2 \doteq \pi_2 \circ s$ tais que, para todo $\gamma \in \text{dom}(s) = \text{dom}(s_1) = \text{dom}(s_2)$, $s(\gamma) = (s_1(\gamma), s_2(\gamma))$. Vamos **identificar** $s = (s_1, s_2)$ um par de sequências de mesmo comprimento.

Não há conteúdo matemático em si na definição acima, mas é frequentemente mais fácil trabalhar, com as ferramentas até aqui desenvolvidas, com pares de sequências em um conjunto simples do que em sequências de pares. Vamos identificar

$$((a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots) = ((a_0, a_1, \dots), (b_0, b_1, \dots))$$

sequência de tuplas com tuplas de sequências a partir daqui.

Definição 1.4.5 (Ramos, Seções). Dada uma árvore $T \subset (X \times Y)^{<\alpha}$ com α limite:

(i) Podemos identificar $[T]$ com $\{(s, r) \in X^\alpha \times Y^\alpha : (s|_\gamma, r|_\gamma) \in T\}$.

(ii) Uma **seção** de T por $s \in X^{<\alpha}$ é

$$T[s] \doteq \{r \in Y^{<\alpha} : (s|_{|r|}, r) \in T\}$$

Mutandis mutatis, dado $r \in Y^{<\alpha}$, está bem definido $T[r]$.

Note que:

$$\begin{aligned} s \in \pi_1([T]) &\iff \exists r \in Y^\alpha ((s, r) \in [T]) \iff (s|_\gamma, r|_\gamma) \in T, \forall \gamma \in \alpha \\ &\iff r|_\gamma \in T[s], \gamma \in \alpha \iff T[s] \text{ mal fundada.} \end{aligned}$$

JOGOS E DETERMINAÇÃO

2.1 Introdução

Começamos a seção com o objetivo de definir, de maneira natural, um jogo como uma árvore. A figura abaixo usa o exemplo do jogo da velha para motivar a definição:

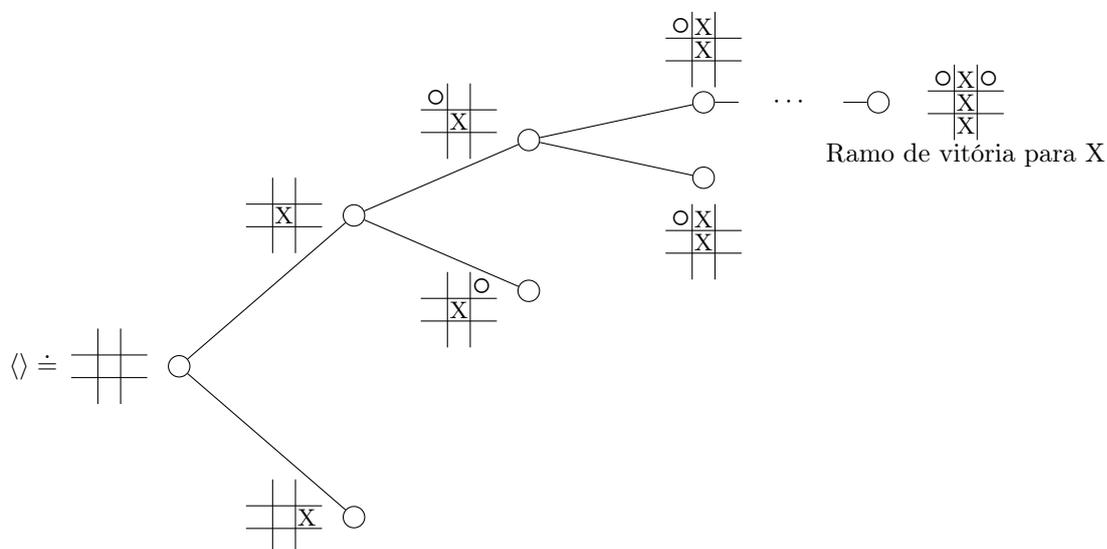


Figura 26 – Alguns elementos da árvore subjacente do jogo da velha.

Começamos de uma **posição inicial**, denotada por $\langle \rangle$. As **opções do jogador**

I são os sucessores $t \in \text{Succ}(\langle \rangle)$. Se o jogador *I* selecionar a opção t , as **opções do jogador II** serão os sucessores $s \in \text{Succ}(t)$. Note que *I* joga nas posições de altura par, selecionando um elemento de altura ímpar, enquanto que o jogador *II* joga em posições de altura ímpar, selecionando posições de altura par. Ficamos então com T uma árvore que codifica todas as possibilidades do jogo. Uma **partida** do jogo é um ramo $\alpha \in [T]$ desta árvore. Resta determinar um **critério de vitória**, codificado como partição dos ramos.

Consideremos um exemplo mais abstrato, que de fato é um dos jogos mais importantes considerados no texto. Suponha que dois jogadores alternam escolhendo números naturais. Começamos então de $\langle \rangle$. Quando *I* seleciona $a_1 \in \omega$ vamos para a posição $\langle a_1 \rangle$ e, em seguida, *II* seleciona um natural qualquer $b_1 \in \omega$, o que move o jogo para a posição $\langle a_1, b_1 \rangle$. Ao fim de ω rodadas, temos uma sequência $\alpha \in \omega^\omega$ determinando uma partida. Basta então tomar bipartição $X \subset \omega^\omega$ para determinar um critério de vitória.

Exemplo 2.1.1 (Jogo de Gale Stewart). *O jogo de Gale-Stewart, denotado por $\mathcal{G}_X = (\omega^{<\omega}, X)$, é o jogo com árvore subjacente $\omega^{<\omega}$, ramos $X \subset \omega^\omega$ que determina vitória para *I* e $\omega^\omega \setminus X$ determinando vitória para *II*.*

Temos em geral a seguinte definição:

Definição 2.1.1 (Jogo). Um **jogo** é um par $\mathcal{G} = (T, X)$ com T uma árvore e $X \subset [T]$ subconjunto de ramos de T , **alvo** de *I*.

Observação 2.1.1. Note que a definição anterior reduz nosso domínio de discurso à jogos com características especiais.

- Nossos jogos serão **jogos de informação perfeita**, onde os jogadores conhecem todas as jogadas de seu oponente.
- Adicionalmente, eles são **jogos discretos**, em contraste com jogos como em (ISAACS, 1999), onde os jogadores podem tomar decisão em tempo contínuo.
- Nossos jogos terão, daqui em diante, 2 jogadores.

- O critério de vitória não admite empate. Um dos jogadores vence uma determinada partida.
- Com algumas adaptações, jogos no sentido de (CONWAY, 2000) podem ser modelados de maneira parecida. O critério de vitória nesse contexto é **vence o último jogador a jogar**. Sob a definição que usamos, temos a liberdade de **escolher** partições arbitrárias dos ramos.

Vamos agora formalizar o conceito de estratégia em jogo. Uma definição razoável de estratégia de um jogador **deve** responder a **qualquer** jogada do adversário. Se temos uma estratégia, então devemos saber o que fazer em qualquer posição do jogo.

Definição 2.1.2 (Quase-estratégias, estratégias e critério de vitória, definição 8.10 em (KECHRIS, 1995)). Uma **quase-estratégia** de I do jogo $\mathcal{G} = (T, X)$ é uma **sub-árvore própria** $\sigma \subset T$ tal que se $h(t)$ for ímpar (turno de II)¹ então $\text{Succ}_\sigma(t) = \text{Succ}_T(t)$, ou equivalentemente $\text{Succ}_T(t) \subset \sigma$. Análogo para II substituindo-se ímpar por par na definição.

Uma **estratégia** de I do jogo \mathcal{G} é uma quase-estratégia de I tal que se $h(t)$ é par, então $|\text{Succ}(t)| \leq 1$. Análogo para II . O conjunto de estratégias de I do jogo \mathcal{G} é denotado por $S_{\mathcal{G}}(I)$. Quando não importar de que jogador é a estratégia, diremos $\sigma \in S_{\mathcal{G}}$ uma estratégia.

Uma (quase-)estratégia σ de I é dita **vencedora** se $[\sigma] \subset X$. Análogo para II . Um jogo é **quase-determinado** se um dos jogadores tem quase-estratégia vencedora e é **determinado** se um dos jogadores tem estratégia vencedora.

Se σ é quase-estratégia, podemos construir $\tilde{\sigma}$ estratégia altura finita selecionando uma escolha do jogador. Em geral, faremos infinitas escolhas e, portanto, o axioma da escolha se torna necessário em jogos mais longos².

¹ O ordinal 0 e ordinais limite são pares. Sucessor de par é ímpar e sucessor de ímpar é par.

² O axioma da escolha é desnecessário caso quando a árvore pode ser posta da forma $T \subset P^{<\alpha}$ com (P, \prec) boa ordem, visto que temos jogada destacada, a mínima, em cada nível.

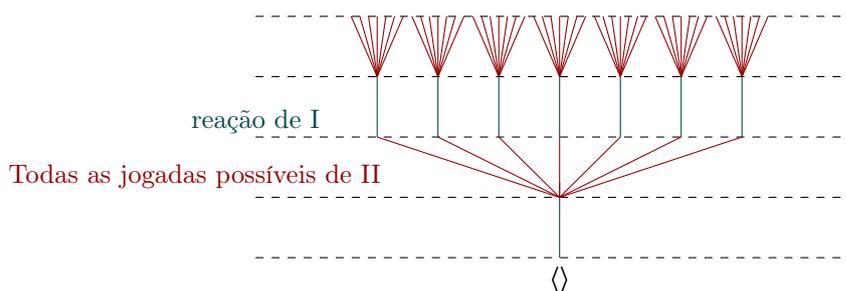


Figura 27 – Uma estratégia de I.

Exemplo 2.1.2. Seja $A \neq \emptyset$ um conjunto com mais de dois elementos e $T \doteq A^{<\omega}$. Da perspectiva de um jogador fixo, estratégias podem ser consideradas como funções $A^{<\omega} \rightarrow A$. Considere σ estratégia, tome elemento de A qualquer fixado, defina $f_\sigma : A^{<\omega} \rightarrow A$ como:

$$f_\sigma(t) \doteq \begin{cases} s \in \text{Succ}_\sigma(t) & \text{se } t \in \sigma \text{ e é turno de } \sigma \\ a & \text{c.c.} \end{cases}$$

Note que $\sigma \mapsto f_\sigma$ é injeção. Dada $f : A^{<\omega} \rightarrow A$, podemos definir σ_f de jogador começando por $\langle \rangle$ e dado $s \in \sigma_f$, acrescentamos $\text{Succ}_{A^{<\omega}}(s)$ em turnos do adversário e $s \frown f(s)$ em turnos do jogador.

Considerando o caso de altura finita, não podem haver duas estratégias vencedoras, σ de I e ρ de II. Se I joga como σ e II como ρ chegamos, **depois de finitas jogadas**, em partida onde ambos venceram, um absurdo. Logo jogos finitos não podem ter estratégias vencedoras de ambos os jogadores. Exploremos o caso infinito:

Lema 2.1.1. Considere T aparada de altura ω . A afirmação de que não podem haver quase-estratégias $\sigma \in S(I)$ e $\rho \in S(II)$ simultaneamente vencedoras no jogo (T, X) e o axioma dependente da escolha são equivalentes.

Demonstração. Suponha o axioma dependente da escolha, σ vencedora de I e ρ vencedora de II. Do fato de σ, ρ serem quase-estratégias, temos que $\sigma \cap \rho$ é aparada e tem altura ω . Nesse caso $\sigma \cap \rho$ é subárvore própria de T , ou seja, temos inclusão natural de ramos $[\sigma \cap \rho] \subset [T]$. Pela Proposição 1.2.5, existe ramo $r \in [\rho \cap \sigma] \subset [\rho] \cap [\sigma]$, o que dá

que $r \in X$ e $r \in [T] \setminus X$, um absurdo.

Suponha agora a negação do **axioma dependente da escolha** e tome árvore T aparada de altura ω sem ramo. Considere $\sigma = \rho \doteq T$ como quase-estratégias de I e II . A quase-estratégia σ não seria vencedora se existisse ramo $r \in [\sigma] \cap ([T] \setminus X) = \emptyset$, logo é vencedora. Analogamente, ρ também é. \square

Sob o axioma da escolha, é inteiramente análogo ao lema anterior demonstrar que um jogo, independentemente da altura de T , não pode admitir a existência de estratégias vencedoras de I e II .

2.2 Equivalência e dualidade

Definição 2.2.1 (Equivalência e dualidade). Dois jogos $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ são ditos **Jogos Equivalentes** se $I \uparrow \mathcal{G}_1 \iff I \uparrow \mathcal{G}_2$ e $II \uparrow \mathcal{G}_1 \iff II \uparrow \mathcal{G}_2$. Dois jogos $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ são **Jogos Duais** se $I \uparrow \mathcal{G}_1 \iff II \uparrow \mathcal{G}_2$ e $II \uparrow \mathcal{G}_1 \iff I \uparrow \mathcal{G}_2$.

Exemplo 2.2.1. Considere duas árvores T e S isomorfas via $\varphi : T \rightarrow S$. Os jogos (S, X) e $(T, [\varphi]^{-1}(X))$ são equivalentes. De fato, $[\varphi]$ vai mapear estratégia vencedora σ de $(T, [\varphi]^{-1}(X))$ em estratégia vencedora $[\varphi](\sigma)$ de (S, X) . (*Corolário 1.3.3*).

Considere um jogo (T, X) . Se uma certa sequência de jogadas foi feita, atingimos uma certa posição $t \in T$. Gostaríamos de interpretar t em si como **jogo**, dando aos jogos definidos aqui uma estrutura auto-similar, como em (CONWAY, 2000). Uma formalização lógica, via sequências alternadas de quantificadores, se encontra na [Subseção 6.1.1](#).

Definição 2.2.2 (Jogo dual). Considere agora $T' \doteq T \cup \{\langle \rangle'\}$, com $\langle \rangle' \leq \langle \rangle$ uma nova raiz, efetivamente invertendo a função dos jogadores, o alvo $X' = \{s \cup \{\langle \rangle'\} : s \in X \setminus [T]\}$. $\mathcal{G}' = (T', X')$ é o **jogo dual** de \mathcal{G} .

Teorema 2.2.1 (Jogo dual). *O jogo dual de \mathcal{G} é dual ao jogo \mathcal{G}' .*

Demonstração. Considere $\sigma' = \sigma \cup \{\langle \rangle'\}$ estratégia. Note que $h(\sigma') = h(T')$, sendo $h(T)$ limite ou sucessor. Dos axiomas, se σ era (quase-)estratégia de um jogador, note que agora ele é (quase-)estratégia do outro. Suponha σ vencedora de I , $r' \in [\sigma']$, note que $r' = r \cup \{\langle \rangle'\}$ com $r \in [\sigma] \subset X$, alvo de II em \mathcal{G}' .

Analogamente, uma estratégia ρ de II em \mathcal{G}' se transforma numa estratégia ρ de I removendo-se $\langle \rangle'$. Se ela é vencedora, seus ramos então em $\{s \cup \{\langle \rangle'\} : s \in X\}$, ao remover a nova raiz, temos que $[\rho] \subset X$ vencedora para I .

Estabelecemos então $I \uparrow \mathcal{G} \iff II \uparrow \mathcal{G}'$, análogo para o outro caso. □

O teorema anterior pode causar uma desconfiança equivocada de que se (T, X) é determinado, $(T, [T] \setminus X)$ é determinado, mas note que na dualização a árvore T foi modificada, alterando o papel dos jogadores.

2.3 Determinação

Vamos discutir agora a determinação de certas classes de jogos. Começemos por jogos cujas partidas têm comprimento finito.

Teorema 2.3.1 ([\[AC\]](#)). *Se T tem altura finita então o jogo (T, X) é determinado para qualquer X . Vale o mesmo resultado para T bem fundada³.*

Demonstração. Mostremos cada uma das afirmações :

- Seja n o ramo de maior altura. Inclua artificialmente elementos em T para que todos os ramos de T tenham a mesma altura n . Note que todo ramo $\alpha \in [T]$ tem elemento maximal s_α maximal de altura n . Podemos identificar α com s_α , único tal que $\downarrow s_\alpha \cup \{s_\alpha\} = \alpha$. Considere a $\{\leq\}$ -sentença⁴:

³ Este teorema, com algum esforço extra, permite concluir também a determinação de jogos no sentido de ([CONWAY, 2000](#)).

⁴ Aqui definimos $a \in \text{Succ}(b)$ como $a \leq b \wedge \neg(a = b) \wedge \forall c \neg(a \leq c \wedge c \leq b \wedge \neg(c = a) \wedge \neg(c = b))$.

$$\begin{aligned}
\varphi &\doteq \exists s_1 \in \text{Succ}(\langle \rangle) \\
&\forall s_2 \in \text{Succ}(s_1) \\
&\dots \\
&[\forall, \exists] s_n \in \text{Succ}(s_{n-1}) \\
&s_n \in X
\end{aligned}$$

De fato φ é a afirmação $\exists \sigma \in S(I)$ estratégia de I e sua negativa é a afirmação de que II . Como $\varphi \vee \neg \varphi$ é uma tautologia no sistema proposicional clássico, o jogo é determinado.

- Como na demonstração anterior, identifique ramos com elementos maximais de sua árvore T . Vamos, com algum abuso de notação, **aplicar** o [Corolário 1.4.1](#) e obter $f : T \rightarrow \{0, 1\}$. Queremos que f tenha valor **1** onde I vence e **0** onde II vence. Definimos sobre as folhas de T a função $f \doteq \chi_X$ e, recursivamente

$$f(s) \doteq \begin{cases} \text{se } h(s) \text{ é par : } & \begin{cases} \mathbf{1} \text{ se existe } t \in \text{Succ}(s) \text{ tal que } f(t) = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \text{ caso contrário} \end{cases} \\ \text{se } h(s) \text{ é ímpar : } & \begin{cases} \mathbf{0} \text{ se existe } t \in \text{Succ}(s) \text{ tal que } f(t) = \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \text{ caso contrário} \end{cases} \end{cases}$$

Temos que $f(\langle \rangle) = \mathbf{1}$ ou $f(\langle \rangle) = \mathbf{0}$, o que codifica respectivamente vitória de I ou de II . Como esta codificação se dá está em [Figura 2.4.1](#). Note que se T é naturalmente uma árvore de seqüências sobre um conjunto bem ordenado o axioma da escolha se torna desnecessário.

□

Neste teorema moram algumas conexões com a [Subseção 6.1.1 Quantificadores de Jogos](#) e com teoria descritiva efetiva via [Seção 1.4 Árvores bem fundadas](#), teoria de recursividade e a hierarquia hiper-aritmética. Já podemos aplicar este resultado e obter

Corolário 2.3.1 ([AC]). Se (T, X) tem T aparada de altura ω e X clopen de $[T]$, então o jogo é determinado.

Demonstração. Para todo $\alpha \in [T]$ existe n_α tal que $\Sigma(\alpha \upharpoonright n_\alpha) \subset X$ ou $\Sigma(\alpha \upharpoonright n_\alpha) \subset [T] \setminus X$. Atingir estas posições significa vitória certa para I ou vitória certa para II . Escolha um n_α fixo para cada $\alpha \in [T]$. Construa a árvore bem fundada T como sendo o fecho para baixo de $A \doteq \{\alpha \upharpoonright n_\alpha : \alpha \in [T]\}$. Tomando coloração apropriada $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ nos elementos de rank nulo de T , nos recaímos ao segundo caso do Teorema 2.3.1. \square

Ou seja, jogos clopen são essencialmente finitos, pois em finitos passos entramos numa vizinhança interior ao alvo de I ou ao seu complementar. Aqui já aparece um relacionamento em regularidade topológica (clopen) e determinação, um tema comum daqui em diante.

2.3.1 Um jogo não determinado

Naturalmente podemos nos perguntar, a esse ponto, se existe $X \subset [T]$ com (T, X) não determinado. Para tanto, precisamos de um alvo X tal que

- Se σ é estratégia de I , $[\sigma] \cap ([T] \setminus X) \neq \emptyset$.
- Se ρ é estratégia de II , $[\rho] \cap X \neq \emptyset$.

Seja σ uma estratégia qualquer de um jogo \mathcal{G} onde, em qualquer turno, o jogador adversário tem mais que uma opção. A hipótese sobre o jogo, aliada à definição de estratégia, nos permite concluir que σ é árvore perfeita, nesse caso tem cópia $2^{<\omega} \xrightarrow{!} \sigma$ própria. Aplicando o Corolário 1.3.2 encontramos uma inclusão (contínua) $[2^{<\omega}] = 2^\omega \hookrightarrow [\sigma]$. Note então que

Proposição 2.3.1. O espaço de ramos $[S]$ de subárvores perfeitas $S \leq T$ são conjuntos perfeitos de $[T]$, o que em particular se aplica a (quase -)estratégias de um jogo. Em particular $[\sigma]$ é fechado (Proposição 1.2.1) não enumerável de $[T]$.

Considere a seguinte propriedade topológica

Definição 2.3.1 (Conjunto de Bernstein). Seja X espaço polonês, um conjunto $B \subset X$ tem a **propriedade de Bernstein** ou é **conjunto de Bernstein** se todo fechado não enumerável $F \subseteq X$ intercepta $B \cap F \neq \emptyset$ e $(X \setminus B) \cap F \neq \emptyset$ não trivialmente.

Do que dissemos, se encontrarmos um conjunto de Bernstein $B \subset T$, teríamos então jogo não determinado (T, B) . Mais adiante mostraremos que qualquer polonês sem pontos isolados tem um conjunto de Bernstein, usado o axioma da escolha, mas consideremos o caso particular do jogo de Gale-Stewart:

Teorema 2.3.2 ([AC]). *O espaço ω^ω tem um conjunto de Bernstein.*

Demonstração. Vamos definir $X, Y \subset \omega^\omega$ com $X = \{a_\alpha : \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$ e $Y = \{b_\alpha : b_\alpha \in 2^{\aleph_0}\}$. Seja uma **enumeração** de todas as árvores perfeitas $\{\sigma_\alpha : \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$. Para cada α , tome $a_\alpha, b_\alpha \in [\sigma_\alpha] \setminus \bigcup_{\gamma < \alpha} \{a_\gamma, b_\gamma\}$ distintos. Estes elementos existem pois $||[\sigma_\alpha]|| = \mathfrak{c}$ e

$$\left| \bigcup_{\gamma < \alpha} \{a_\gamma, b_\gamma\} \right| \leq 2|\alpha| = \max\{2, |\alpha|\} < \mathfrak{c}$$

visto que $2, |\alpha| < \mathfrak{c}$. □

De onde obtemos

Corolário 2.3.2 ([AC]). *Assumindo o axioma da escolha, temos que :*

- (i) *O espaço de Cantor e a reta também tem cópia de Bernstein.*
- (ii) *Existe $X \subset \omega^\omega$ tal que \mathcal{G}_X é não determinado.*

Demonstração. Mostremos cada afirmação.

- (i) Tendo em vista a **Proposição 1.3.4**,

$$N \doteq 2^\omega \setminus D_\psi = \{x \in 2^\omega : \text{eventualmente } x(n) = 0\}$$

é denso enumerável de 2^ω e, quando removido do espaço de Cantor, nos deixa com um homeomorfo $D_\psi \approx \omega^\omega$. [AC] Considere um conjunto $B \subset D_\psi$ de Bernstein

(Teorema 2.3.2) dentro desta cópia, note que ele será de Bernstein também no espaço de Cantor, pois todo fechado não enumerável F de 2^ω tem $F \cap D_\psi$ fechado relativo não enumerável de D_ψ , logo temos $(F \cap B) \cap D_\psi \neq \emptyset \neq (F \cap (2^\omega \setminus B)) \cap D_\psi$. Do Teorema 3.3.4, podemos também realizar ω^ω removendo denso enumerável \mathbb{Q} de \mathbb{R} , logo a mesma argumentação nos forneceria também um conjunto de Bernstein da reta.

- (ii) Tome um $B \subset \omega^\omega$ de Bernstein. Toda estratégia tem espaço $[\sigma]$ de ramos fechado e não-enumerável, nesse caso $B \cap [\sigma]$ e $[\sigma] \setminus B$ são não vazios, o que significa que nenhuma estratégia é vencedora.

□

Mais uma vez características topológicas do alvo tem consequências sobre a determinação dos jogos. Construímos um conjunto altamente irregular, do ponto de vista topológico, para obter um conjunto indeterminado. Note também que se I vence \mathcal{G}_X , X deve ter uma cópia de Cantor, o que já indica que conjuntos determinados têm algum tipo de regularidade topológica. Vamos explorar relacionamentos entre determinação, topologia e medida na Parte II. Na Parte III vamos explorar o caminho inverso, ou seja, consequências topológicas da determinação de certos jogos.

2.4 Teorema de Gale-Stewart

Assim como chegamos ao resultado da determinação de jogos finitos, gostaríamos de dizer algo sobre a determinação de jogos cujos conjuntos alvo são relativamente simples, ou seja, abertos ou fechados. O teorema que nos dá essa resposta é o teorema de Gale-Stewart. Esta seção ainda segue (KHOMSKII, Júlio, 2010).

Definição 2.4.1 (Sub-jogo a partir da posição). Seja $\mathcal{G} = (T, X)$ um jogo, dado $t \in T$ uma posição, o **sub-jogo a partir de t** é definido por

$$\mathcal{G}_t \doteq (T_t \doteq \{\text{comparáveis com } t\}, [T_t] \cap X)$$

Analogamente, se $t \in \sigma$, define-se σ_t a árvore σ vendo-se t como nova raiz.

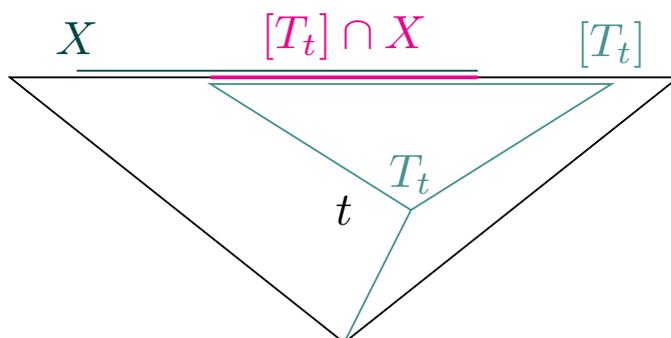


Figura 28 – Posição t . Subárvore associada T_t . Alvo do jogo \mathcal{G} . Intersecção entre os ramos de T_t e o alvo X do jogo original, definindo o **alvo de I no subjogo \mathcal{G}_t** .

A definição anterior diz apenas que **dado que a posição t foi atingida, o jogo se torna \mathcal{G}_t** . O alvo de I se torna $X \cap [T_t] \doteq X_t$. Note que se, alternativamente, fizéssemos de t , posição onde é a vez de II jogar, a nova raiz da árvore, tornaríamos o jogador II o jogador I do novo jogo, o que seria indesejável.

Definição 2.4.2 (Posição e (quase)-estratégias defensivas). Uma **posição defensiva** para I de $\mathcal{G} = (T, X)$ é $t \in T$ tal que II não tem estratégia vencedora em \mathcal{G}_t . Análogo para II . Uma **quase-estratégia defensiva** de I é uma quase-estratégia de I σ tal que toda posição $t \in \sigma$ é defensiva para I . Análogo para II .

Posição **defensiva** para um jogador é uma posição na qual ele ainda tem alguma esperança de vencer. Afinal, se chegamos a uma configuração no tabuleiro onde o adversário sabe vencer, perdemos. Note que para posições finais t com $\text{Succ}_T(t) = \emptyset$, II não vence $T_t \doteq \downarrow t \cup \{t\} \in [T]$ apenas se $T_t \in X$, ou seja, posição final defensiva para I é posição vitoriosa para I . Análogo para II .

Lema 2.4.1 (Lema defensivo). *Seja $t_0 \in T$ de altura par posição defensiva t_0 , então*

- $\downarrow t_0 \cup \{t_0\} \in X$ ou
- $\psi(t_0) \iff D_{t_0} \doteq \{t_1 \in \text{Succ}(t_0) : \forall t_2 \in \text{Succ}(t_1) \quad t_2 \text{ é defensivo para } I\} \neq \emptyset$

Demonstração. Estudemos cada caso.

- Note que, no primeiro caso, t_0 é posição final do jogo e I de fato venceu.

- Suponha $\text{Succ}(t_0) \neq \emptyset$ e a negação do teorema $\neg\psi(t_0)$. Todo $t_1 \in \text{Succ}(t_0)$ tem sucessor $f(t_1) \in \text{Succ}(t_1)$ tal que II tem estratégia vencedora $\rho_{f(t_1)}$ em $\mathcal{G}_{f(t_1)}$. Note que $\bigcup_{t_1 \in \text{Succ}(t_0)} \rho_{f(t_1)}$ é estratégia de vencedora de II do jogo \mathcal{G}_{t_0} , um absurdo.

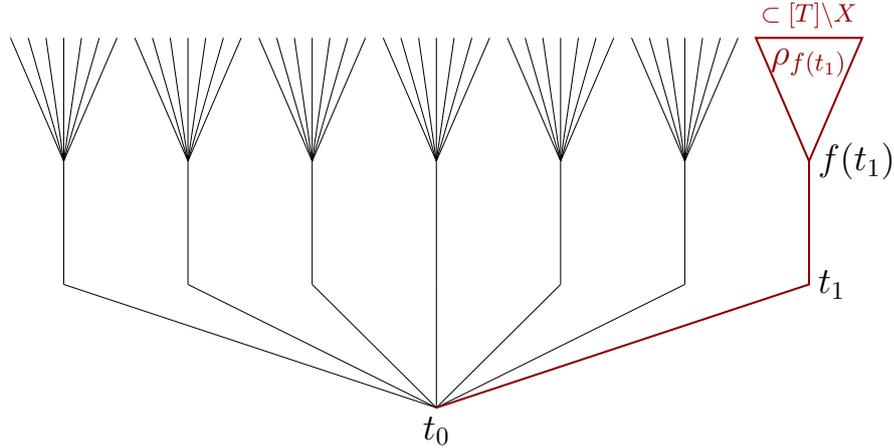


Figura 29 – Diagrama esquemático do segundo caso na demonstração.

□

O lema anterior é apenas um passo para a construção da seguinte quase-estratégia:

Proposição 2.4.1. *Seja T árvore aparada. Se II não tem estratégia vencedora em $\mathcal{G} = (T, X)$, então I tem quase-estratégia defensiva.*

Demonstração. Se II não tem estratégia vencedora em $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\langle \rangle}$ é o mesmo que dizer que $\langle \rangle$ tem quase-estratégia defensiva **canônica** σ . Considere D_t como no [Figura 2.4.1](#). Defina

$$f(t) \doteq \begin{cases} D_t & \text{se } h(t) \text{ é par} \\ \text{Succ}(t) & \text{c.c.} \end{cases}$$

Tome recursivamente $\sigma_0 = \{\langle \rangle\}$ e, dado $\alpha < h(T)$, faça

$$\sigma_\alpha = \bigcup_{\substack{t \in \sigma_\beta \\ \beta < \alpha}} f(t)$$

De fato $\sigma \doteq \bigcup_{\alpha < h(T)} \sigma_\alpha$ será defensiva para I . Note que os elementos de altura par adicionados são defensivos pra I . Se t tem altura ímpar $< h(T)$, $\text{Succ}(t) \subset \sigma$, logo σ é quase-estratégia. Note que σ foi construída nível a nível e cada elemento dos novos níveis é descendente de elementos de níveis inferiores, logo σ é direcionado para baixo. O único fato não trivial é que $h(\sigma) = h(T)$ mas isso é garantido pelo [Lema defensivo](#). \square

Claro que o teorema anterior vale trocando-se I por II e vice-versa. Dada quase-estratégia σ defensiva, caso necessário adicionando o axioma da escolha às hipóteses, temos $\tilde{\sigma}$ **estratégia** defensiva! É fácil ver que a **estratégia canônica** definida acima tem a propriedade de ser a (quase)-estratégia defensiva maximal⁵.

Proposição 2.4.2 (Propriedade de canônica). *Considere T aparada de altura limite. Note que se I , ao longo do caminho, escolhesse $s \notin \sigma$ na posição defensiva t , fora de sua estratégia defensiva **canônica**, isso quer dizer que $s \notin D_t$ na construção acima, ou seja, II consegue achar $u \in \text{Succ}_T(s)$ tal que II vence \mathcal{G}_u .*

Teorema 2.4.1 (Quase-Gale-Stewart). *Se $X \subset [T]$ é fechado então (T, X) é quase-determinado.*

Demonstração. Suponha que II não vence \mathcal{G}_X . Tome σ quase-estratégia **defensiva canônica** de I . Se σ é vencedora, acabamos. Caso contrário, seja $\alpha \in [\sigma] \cap ([T] \setminus X)$, de fato este é um aberto relativo, logo deve haver $s \in \sigma$ com $\alpha \in \Sigma(s) \cap [\sigma] \subset [\sigma] \cap [T] \setminus X$. Mas então II vence \mathcal{G}_s . Nesse caso $s \in \sigma$ é posição não defensiva para I , **absurdo**. \square

Analogamente, supondo X aberto e supondo que I não vence, chegamos novamente por absurdo que II tem quase-estratégia vencedora.

⁵ Indução sobre os níveis de T , como na construção, assuma ρ defensiva e demonstre que $\rho \upharpoonright \alpha \subset \sigma$ para cada $\alpha \in h(T)$

Teorema 2.4.2 (Gale-Stewart). *Seja X aberto ou fechado de $[T]$. Sob o axioma da escolha, temos que (T, X) é determinado.*

Demonstração. Da quase-determinação de (T, X) , temos σ quase-estratégia vencedora. Usando o axioma da escolha, construímos estratégia vencedora a partir de σ . \square

Corolário 2.4.1 (Prova alternativa de Teorema 2.3.1). *Jogos com tempo finito são determinados, visto que $[T]$ terá a topologia discreta.*

Mostremos agora que o axioma da escolha e o teorema de Gale-Stewart são equivalentes.

Proposição 2.4.3 ($[AC] \iff [GS]$). *O teorema de Gale-Stewart é equivalente, sob ZF, ao axioma da escolha.*

Demonstração. Já provamos que o axioma da escolha implica o teorema de Gale-Stewart. Considere agora $X \neq \emptyset$ tal que $\forall x \in X (x \neq \emptyset)$. Queremos construir um jogo que, por Gale-Stewart, é determinado e é tal que a estratégia vencedora fornece função escolha $f : X \rightarrow \bigcup X$, $f(x) \in x$. Esta construção obviamente não pode usar o axioma da escolha, e deve então ser puramente construtiva.

- Usando união e seleção, construímos o conjunto

$$T \doteq \{\langle \rangle\} \sqcup X \sqcup \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in \bigcup X) \wedge (y \in x)\}$$

- Vamos definir uma ordem \leq em T . Usando o axioma da união, vamos adicionar duplas $(x, y) \in \leq \subset T^2$, caracterizando nossa ordem. Adicione a diagonal Δ , para reflexividade. Adicione à relação também os pontos $\{\langle \rangle\} \times X$ e

$$\{(x, (x, y)) : x \in X\}$$

Note que $\downarrow \langle \rangle = \emptyset$, se $x \in X$ temos que $\downarrow x = \{\langle \rangle\}$ e $\downarrow (x, y) = \{\langle \rangle, x\}$, todos bem ordenados. Mas estes são todos os pontos de T , então T é árvore.

- Pela hipótese de que nenhum x é vazio, temos que $h(T) = 2$.
- Considere $\mathcal{G} \doteq (T, \emptyset)$. Note que II vence e, como $h(T) = 2$, o jogo é determinado. Aplicando Gale-Stewart temos ρ **estratégia** vencedora de II . Para cada $x \in X$ **temos um e apenas um** $(x, y) \in \rho$, sucessor de x em ρ .
- Usando seleção mais uma vez, $f_\rho \doteq \{(x, y) \in X \times (\bigcup X) : x \leq_\rho (x, y)\}$ é função escolha de X .

□

Corolário 2.4.2 (Subjogo de aberto/fechado é determinado). *Subjogo de (T, X) com X fechado/aberto é determinado.*

Demonstração. De fato, dado $\mathcal{G}_t = (T_t, X_t = [T_t] \cap X)$, de fato $[T_t]$ **tem topologia induzida de $[T]$** , mas então X_t é fechado/aberto, logo \mathcal{G}_t é determinado. □

2.5 Teorema da Determinação de Borel

A partir do teorema de Gale-Stewart, o próximo passo é mostrar que conjuntos de Borel são determinados. Em primeira análise pode-se conjecturar que é possível mostrar que a família de conjuntos determinados de $[T]$ forma σ -álgebra, mas é possível mostrar a negativa desta afirmativa.

Proposição 2.5.1 ([AC]). *Existe jogo (\tilde{T}, X) indeterminado tal que $(\tilde{T}, [\tilde{T}] \setminus X)$ é determinado.*

Demonstração. De fato, considere um jogo (T, X) não determinado. Construa um novo jogo, onde na primeira jogada I tem a opção de se mover para este jogo ou para uma posição a , que significa vitória para II . Este jogo é indeterminado, pois I vai evitar a e optar por uma posição onde nenhum jogador sabe vencer. Entretanto I vence quando complementamos o alvo, visto que já na primeira jogada ele pode escolher a e vencer. □

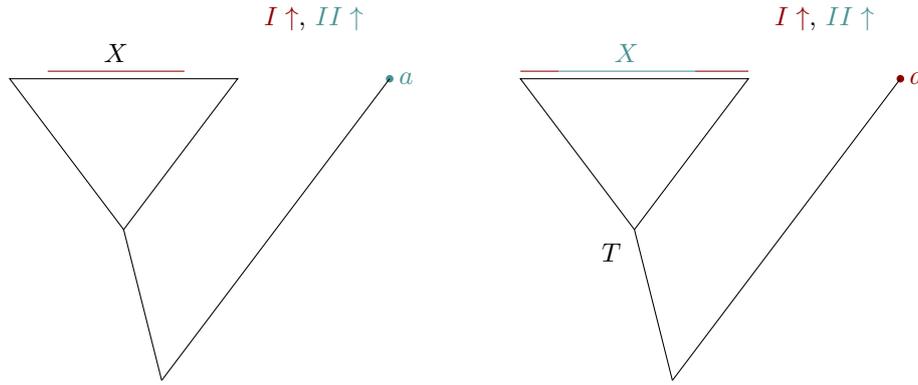


Figura 30 – Diagrama do jogo construído na [Proposição 2.5.1](#), mostrando que $\text{Det}(\omega^\omega)$ não é fechado com relação a complementação.

Adaptando o argumento para seqüências de naturais, mostramos que $\{X \subset \omega^\omega : (\omega^{<\omega}, X) \text{ é determinado}\}$ **não** é fechado por complementação, o que quer dizer que conjuntos determinados **não formam** uma σ -álgebra.

No que segue, todas as árvores serão assumidas [aparadas](#) de [altura](#) ω . Queremos mostrar, até o fim da seção, que jogos com alvo Boreliano são determinados. A estratégia será a de regularizar o conjunto Boreliano, construindo jogos auxiliares com alvo *clopen* que determinam o jogo principal. Vamos primeiro definir em que sentido um jogo pode ser considerado **auxiliar**.

Definição 2.5.1 (Cobertura). Uma **cobertura** do jogo $\mathcal{G} = (T, X)$ é uma tripla:

$$(\tilde{\mathcal{G}} \doteq (\tilde{T}, \tilde{X} = [\pi]^{-1}(X)), \pi : \tilde{T} \rightarrow T, \varphi : S_{\tilde{\mathcal{G}}} \rightarrow S_{\mathcal{G}})$$

Tal que

- (i) A imagem por φ de uma estratégia de I é uma estratégia de I . De forma análoga para II .
- (ii) A função π é monótona que preserva altura, logo é própria e dá origem a $[\pi] : [\tilde{T}] \rightarrow [T]$, [função contínua](#).
- (iii) O n -ésimo [tronco](#) da imagem da função φ depende apenas do n -ésimo tronco da estratégia.

- (iv) Partidas completas na estratégia imagem são imagens via $[\pi]$ de partidas completas na estratégia domínio, ou seja, $[\varphi(\tilde{\sigma})] \subset [\pi](\tilde{\sigma})$.
- (v) Seja $\tilde{\mathcal{G}}$ cobertura, dizemos que ela é uma **k -cobertura** se os troncos $\tilde{T} \upharpoonright 2k+1 = T \upharpoonright 2k+1$ são iguais e $\pi|_{\tilde{T} \upharpoonright 2k+1} = \text{id}_{\tilde{T} \upharpoonright 2k+1}$ é a identidade sobre este tronco.

Comentemos um pouco sobre os elementos desta definição. A função π é um morfismo entre as árvores e estabelece correspondência entre jogadas do jogo cobertura $\tilde{\mathcal{G}}$ e jogadas do jogo original \mathcal{G} . Ela dá origem à função contínua $[\pi]$ entre os ramos das árvores, e o alvo de I em $\tilde{\mathcal{G}}$ é definido como $\tilde{X} \doteq [\pi]^{-1}(X)$, ou seja, I vence apenas quando as jogadas correspondentes no jogo original são vitoriosas.

A função φ por outro lado é mapa entre estratégias. O requisito sobre a dependência da definição de φ proíbe a transferência de informação de jogadas ‘futuras’ em $\tilde{\mathcal{G}}$ para o jogo \mathcal{G} . Formalmente, ele diz para duas estratégias $\tilde{\sigma}$ e $\tilde{\rho}$ de um jogador em $\tilde{\mathcal{G}}$ temos

$$\tilde{\sigma} \upharpoonright n = \tilde{\rho} \upharpoonright n \implies \varphi(\tilde{\sigma}) \upharpoonright n = \varphi(\tilde{\rho}) \upharpoonright n$$

A imposição $[\varphi(\tilde{\sigma})] \subset [\pi](\tilde{\sigma})$ impõe que partidas em $\varphi(\tilde{\sigma})$ devem corresponder às partidas em $\tilde{\sigma}$ via $[\pi]$. Formalmente, para todo ramo $p \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$ na estratégia imagem, deve existir ramo $\tilde{p} \in \tilde{\sigma}$ na estratégia domínio tal que $[\pi](\tilde{p}) = p$.

Finalmente, a condição de k -cobertura dá noção de que $\tilde{\mathcal{G}}$ aproxima \mathcal{G} . Esta hipótese diz que estes jogos têm a mesma estrutura num segmento inicial. Isto significa impor que \tilde{T} e T são idênticas, até uma certa altura, e que π cumpre o papel de identificação neste segmento inicial.

Proposição 2.5.2. *Seja $(\tilde{\mathcal{G}}, \pi, \varphi)$ uma k -cobertura de \mathcal{G} , de fato $\varphi(\cdot) \upharpoonright 2k+1 = \cdot \upharpoonright 2k+1$.*

Demonstração. Note que $[\varphi(\tilde{\sigma})] \subset [\pi](\tilde{\sigma}) = [\pi(\tilde{\sigma})]$, logo $\varphi(\tilde{\sigma}) \subset \pi(\tilde{\sigma})$, como $\pi|_{\tilde{T} \upharpoonright 2k+1} = \text{id}_{\tilde{T} \upharpoonright 2k+1}$:

$$\varphi(\tilde{\sigma}) \upharpoonright 2k+1 \subset \pi(\tilde{\sigma}) \upharpoonright 2k+1 = \tilde{\sigma} \upharpoonright 2k+1$$

Mas como são ambas **estratégias**, devemos ter igualdade. □

Fica a cargo do leitor mostrar que k -cobertura de k -cobertura forma k -cobertura via composta das funções relevantes, ou seja, pode-se compor esta construção.

Definição 2.5.2 (Desemaranhar). Dizemos que \tilde{G} **desemaranha** $X \subset [T]$ se $\tilde{X} = [\pi]^{-1}(X)$ é *clopen*.

Essa definição nos diz, basicamente, o que significa tornar um conjunto, possivelmente complicado, em um conjunto mais simples em um jogo auxiliar. Note que no caso $h(T) < \aleph_0$, $[T]$ é espaço discreto então $(\mathcal{G}, \text{id}_T, \text{id}_{S_{\mathcal{G}}})$ é k cobertura para qualquer k e desemaranha X pois $[\text{id}]^{-1}(X) = X$ é *clopen*, logo o próximo lema é trivial para árvores de altura finita / sucessora.

Lema 2.5.1 (Desemaranhamento de fechado). *Sejam T aparada de altura ω , $X \subset [T]$ fechado e $k \in \omega$. Então X pode ser desemaranhado por k -cobertura de \mathcal{G} .*

Demonstração. Caso de altura finita é trivial, considere o caso $h(T) = \omega$. Considere $k \in \omega, \mathcal{G} = (T, X)$ fixos, seja T_X a árvore aparada tal que $[T_X] = X$.

Construção de \tilde{T} :

Como queremos uma k -cobertura, começamos por $\tilde{T} \upharpoonright 2k+1 \doteq T \upharpoonright 2k+1$ munido de ordem induzida de T . Dado $r \in \text{level}_{\tilde{T}}(2k)$, I terá opção $(s, \sigma) \in \text{Succ}_{\tilde{T}}(s)$ se $s \in \text{Succ}_T(r)$ e σ é quase-estratégia de I de \mathcal{G}_s . Em seguida, dada esta escolha (s, σ) , II terá duas opções:

Opção 1: Jogar (t, u) com $t \in \text{Succ}_T(s) \subset \sigma^6$ e u um elemento de altura par de σ_t que não é elemento de $(T_X)_t$. Note em particular que estas escolhas de u existem, pois

$$\{u \in \sigma_t : h(u) \text{ é par e } u \notin T_X\}$$

não é vazio e que qualquer u é descendente de t . A partir daqui os jogadores seguem jogando elementos de T desde que compatíveis com u .

⁶ σ é quase-estratégia de I e $h(s)$ é ímpar

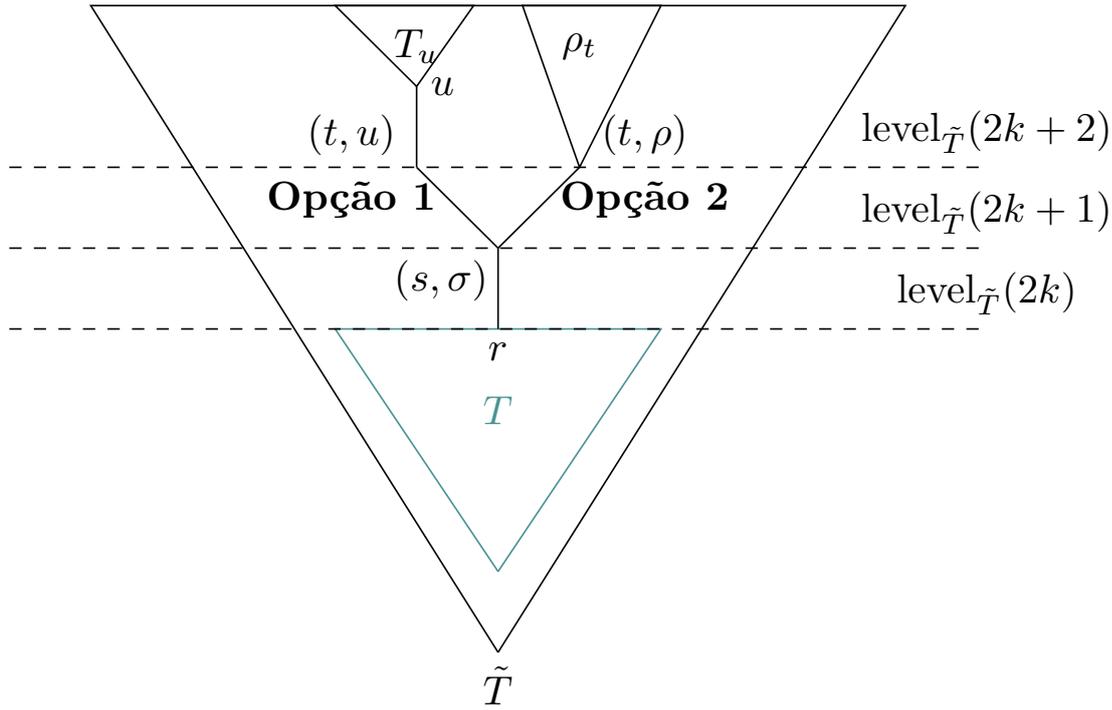


Figura 31 – A árvore \tilde{T} do jogo \tilde{G} , candidato a k -cobertura de \mathcal{G} .

Opção 2: Jogar (t, ρ) tal que ρ é quase-estratégia de II em σ_t e $\rho \subset T_X$. A partir daqui os jogadores seguem jogando elementos em T desde que dentro de ρ .

Afirmção: \tilde{T} é aparada e de mesma altura. Note que todo ramo de \tilde{T} chega ao nível $2k$, e portanto ao nível $2k + 2$ via **Opção 1** ou **Opção 2** de II e tais opções sempre existem pois T é aparada e dada s de altura $2k$, obviamente temos⁷ $(t, \sigma) \in \text{Succ}_{\tilde{T}}(s)$, e esta terá (r, ρ) subárvore como **Opção 2** de II , logo chegaremos em fim a um ramo de altura $h(T)$.

Construção de π e $\tilde{X} = [\pi]^{-1}(X)$:

Definindo⁸ $\pi(t) = t$, $\pi(t, u) = t$ e $\pi(t, \sigma) = t$, temos nossa $\pi : \tilde{T} \rightarrow T$ que clara-

⁷ Dada árvore qualquer de um jogo, $t \in T$, $T_t \doteq \sigma$ é ela própria quase-estratégia de ambos os jogadores

⁸ Aqui abusamos da notação, pois $s \in T$ de altura $> 2k + 2$ pode aparecer como descendente de

mente preserva altura. **Afirmção:** De fato, $\alpha \in [\pi]^{-1}(X)$ se, e somente se, $\alpha \cap \text{level}(2k+2) = \{(t, \sigma)\}$, ou seja, se nesta partida II escolheu a **Opção 2**. Está clara a direção $[\Leftarrow]$ visto que $\sigma \subset T_X \implies \alpha \in [\sigma] \subset X$. Note que se no nível $2k+2$ o jogador II tivesse selecionado a opção (t, u) , todos os jogos deveriam ser compatíveis com u mas $u \notin T_X \implies \pi(\alpha) \notin X$. Nesse caso:

$$[\pi]^{-1}(X) = \bigcup_{t \in \text{level}_{\tilde{T}}(2k+2)} \Sigma_{\tilde{T}}((t, \sigma))$$

é um *clopen*.

Construção de φ :

É importante ressaltar aqui que as reações de $\varphi(\tilde{\sigma})$ em \mathcal{G} devem ser tais que dada uma partida α jogada de acordo com $\varphi(\tilde{\sigma})$ exista partida β em $\tilde{\mathcal{G}}$ jogada de acordo com $\tilde{\sigma}$ tal que $\pi(\beta) = \alpha$.

Começamos com o trivial $\varphi(\tilde{\sigma}) \upharpoonright 2k+1 \doteq \tilde{\sigma}$, visto que até aqui as árvores são idênticas. **Até este nível**, isto caracteriza uma estratégia do mesmo jogador e $\varphi(\tilde{\sigma}) \upharpoonright n$ depende apenas de $\tilde{\sigma} \upharpoonright n$. Ao longo do que segue, note que cada passo da construção de φ preserva tais características.

- **Seja $\tilde{\sigma}$ uma estratégia de I .** Seja $s \in \text{level}_T(2k) = \text{level}_{\tilde{T}}(2k)$, a escolha de $\tilde{\sigma}$ no nível $2k+1$ é (t, ρ) , definimos $t \in \varphi(\tilde{\sigma})$ como reação de $\varphi(\tilde{\sigma})$ à jogada s . Considere agora o jogo $\mathcal{H} \doteq (\rho, [\rho] \setminus X)$, um jogo **determinado** [Gale-Stewart]:

- Seja I com estratégia vencedora $\sigma_t \subset \rho$ em \mathcal{H} , $\varphi(\tilde{\sigma})$ segue σ_t até eventualmente encontrarmos u de altura par em ρ tal que $[\rho] \cap \Sigma(u) \subset \underbrace{[\rho] \setminus X}_{\text{aberto relativo}}$, ou seja, $u \notin (T_X)_t$. A partir daí seguimos de acordo com $\tilde{\sigma}$.

Seja $\alpha \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$ então

(t, u_1) e (t, u_2) , e estas ocorrências são distintas e incompatíveis em \tilde{T} .

$$\begin{aligned} \alpha &= \{\langle \rangle, t_1, \dots, t_{2k}, t, s, \overbrace{\dots}^{\text{reações de } \sigma_t}, u, \dots \\ &\dots, \text{Escolhas de } \Pi = \pi(\text{Escolhas de } \Pi), \\ &\text{reação de } \tilde{\sigma} = \pi(\text{reação de } \tilde{\sigma}), \dots\} \in [\varphi(\tilde{\sigma})] \end{aligned}$$

Note que temos ramo

$$\begin{aligned} \beta &= \{\langle \rangle, t_1, \dots, t_{2k}, (t, \rho), (s, u), \dots, u, \dots \\ &\dots, \text{Escolhas de } \Pi, \text{reação de } \tilde{\sigma}, \dots\} \in [\tilde{\sigma}] \end{aligned}$$

tal que $[\pi](\beta) = \alpha$. Nesse caso, garantimos então que $[\varphi(\tilde{\sigma})] \subset [\pi](\tilde{\sigma})$ ⁹.

- Seja agora Π com **quase-estratégia vencedora** θ , construída adicionando-se apenas reações de Π em posições **defensivas**, em \mathcal{H} , ou seja, $[\theta] \subset X \implies \theta \subset T_X$. Nesse caso, para qualquer $s \in \text{Succ}_T(t)$, (s, θ) é jogada legal de Π em \tilde{T} . Enquanto Π jogar em T dentro de θ , $\varphi(\tilde{\sigma})$ reage de acordo com $\tilde{\sigma}$.

De novo, temos que provar que $[\varphi(\tilde{\sigma})] \subset [\pi](\tilde{\sigma})$. Suponha que Π joga dentro de θ em T :

$$\begin{aligned} \alpha &= \{\langle \rangle, t_1, \dots, t_{2k}, t, s, \overbrace{\dots}^{\text{reações de } \tilde{\sigma}} \\ &\dots, \underbrace{\text{Escolhas de } \Pi}_{\in \theta} = \pi(\underbrace{\text{Escolhas de } \Pi}_{\in \theta}), \\ &\text{reação de } \tilde{\sigma} = \pi(\text{reação de } \tilde{\sigma}), \dots\} \in [\varphi(\tilde{\sigma})] \end{aligned}$$

É do fato destas escolhas estarem em θ que o seguinte ramo é \tilde{T} -viável:

$$\begin{aligned} \beta &= \{\langle \rangle, t_1, \dots, t_{2k}, (t, \rho), (s, \theta), \overbrace{\dots}^{\text{reações de } \tilde{\sigma}} \\ &\dots, \text{Escolhas de } \Pi, \text{reação de } \tilde{\sigma} \dots\} \in [\tilde{\sigma}] \end{aligned}$$

⁹ Esta é a condição de difícil satisfação. Ela é necessária para preservação da estrutura combinatoria dos ramos relativa às inúmeras escolhas de cada jogador.

é tal que $[\pi](\beta) = \alpha$, como queríamos. Se II sai de θ em algum momento, nos reduzimos ao primeiro caso¹⁰.

- **Seja $\tilde{\sigma}$ uma estratégia de II .** Considere $t \in \text{level}_T(2k+1)$ jogada de I . Considere

$$U \doteq \{u \in T_t : h(u) \text{ é par e}$$

$$\exists \rho (\tilde{\sigma} \text{ responde via } \mathbf{Opção 1} \text{ à } (t, \rho) \text{ com } (s, u))\}$$

Ou seja, r está em $U \iff r$ tem altura par e existe ρ quase-estratégia de I tal que $\tilde{\sigma}$ reage à posição (t, ρ) com **Opção 1** (s, u) . Note em particular que $\Sigma_T(u) \subset [T_t] \setminus X$ um **aberto**. Temos então :

$$\mathcal{U} \doteq \bigcup_{u \in U} \Sigma_T(u) \subset [T_t] \cap ([T] \setminus X)$$

aberto relativo de $[T_t]$. Considere o jogo $\mathcal{H} \doteq (T_t, [T_t] \setminus \mathcal{U})$, um jogo **determinado (Gale-Stewart)**

- Se II tem estratégia vencedora $\rho_t \subset T_t$ em \mathcal{H} . Para qualquer que seja o ramo $\alpha \in [\rho_t] \subset \mathcal{U}$, α , eventualmente chegamos a $u \in U$ com $r \in \Sigma_T(u)$. Definimos então que $\varphi(\tilde{\sigma})$ joga como ρ_t até este u e segue jogando como $\tilde{\sigma}$ A partir daí.

Seja $\alpha \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$ então

$$\alpha = \{ \langle \rangle, t_1, \dots, t_{2k}, t, s, \overbrace{\dots}^{\text{reações de } \rho_t}, u, \dots \}$$

$$\dots, \text{Escolhas de } I = \pi(\text{Escolhas de } I),$$

$$\text{reação de } \tilde{\sigma} = \pi(\text{reação de } \tilde{\sigma}, \dots) \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$$

Note que este $u \in U$, logo ele tem ρ que força $\tilde{\sigma}$ a jogar (s, u) via **Opção 1**, ou seja:

¹⁰ Caímos em posição não defensiva pra II , ou seja, I sabe vencer aqui.

$$\beta = \{\langle \rangle, t_1, \dots, t_{2k}, (t, \rho), (s, u), \dots, u, \dots \\ \dots, \text{Escolhas de I, reação de } \tilde{\sigma}, \dots\} \in [\tilde{\sigma}]$$

tal que $[\pi](\beta) = \alpha$. Nesse caso, garantimos então que $[\varphi(\tilde{\sigma})] \subset [\pi](\tilde{\sigma})$.

- Se I tem **quase-estratégia vencedora** σ_t em \mathcal{H} , em particular $[\sigma_t] \subset [T_t] \setminus \mathcal{U}$ complemento local dos **ramos que passam por opções 1**, pela definição de \mathcal{U} , então II não têm **Opção 1** para (t, ρ) com $\rho = \sigma_t$. Nesse caso a resposta de $\tilde{\sigma}$ é obrigatoriamente uma **Opção 2** (s, θ) . Enquanto I jogar dentro de ρ , que é tal que $\rho \subset T_X$ pelas regras de \tilde{T} , seguimos $\tilde{\sigma}$.

$$\alpha = \{\langle \rangle, t_1, \dots, t_{2k}, t, s, \overbrace{\dots}^{\text{reações de } \tilde{\sigma}} \\ \dots, \underbrace{\text{Escolhas de I}}_{\in \theta} = \pi(\underbrace{\text{Escolhas de I}}_{\in \theta}), \\ \text{reação de } \tilde{\sigma} = \pi(\text{reação de } \tilde{\sigma}), \dots\} \in [\varphi(\tilde{\sigma})]$$

E de fato temos, tomando $(t, \rho) \doteq (t, \sigma_t)$, temos que

$$\beta = \{\langle \rangle, t_1, \dots, t_{2k}, (t, \rho), (s, \theta), \overbrace{\dots}^{\text{reações de } \tilde{\sigma}} \\ \dots, \text{Escolhas de I, reação de } \tilde{\sigma} \dots\} \in [\tilde{\sigma}]$$

é tal que $[\pi](\beta) = \alpha$, como queríamos. Se II sai de θ em algum momento, nos reduzimos à caso anterior.

□

Proposição 2.5.3 (Complementaridade de Desemaranhamento). *Uma k -cobertura $(\tilde{T}, \pi, \varphi)$ de T que desemaranha X desemaranha $T \setminus [X]$.*

Demonstração. Complementar $[\tilde{T}] \setminus [\pi]^{-1}(X) = [\pi]^{-1}([T] \setminus X)$ do *clopen* $[\pi]^{-1}(X)$ é um *clopen*. Note que $(\tilde{T}, \tilde{\pi}, \tilde{\varphi})$ continua sendo k -cobertura de $(T, [T] \setminus X)$ e **desemaranha o alvo do jogo**. □

Lema 2.5.2 (Limite Inverso de k -coberturas). *Seja $k \in \omega$ fixo e para cada $i \in \omega$, considere $(k+i)$ -coberturas $(T_{i+1}, \pi_{i+1}, \varphi_{i+1})$ de T_i , existe árvore \bar{T} , função $\bar{\pi}_i : \bar{T} \rightarrow T_i$ e mapa entre estratégias ¹¹ $\bar{\varphi}_i : S_{\bar{T}} \rightarrow S_{T_i}$ tais que $(\bar{T}, \bar{\pi}_i, \bar{\varphi}_i)$ é $(k+i)$ -cobertura de T_i tais que*

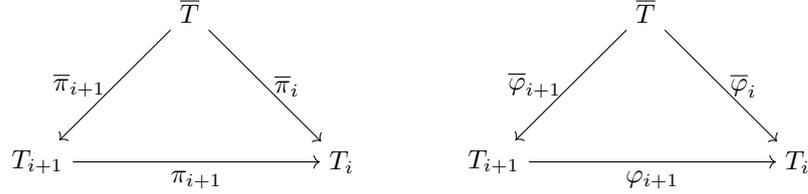


Figura 32 – Diagrama comutativo de cone \bar{T} e morfismos relevantes.

comutam.

Demonstração. O principal fenômeno de interesse aqui é o fato de que uma $(k+i)$ -cobertura mantém os níveis, até o $2(k+i)$ -ésimo, idênticos. Como $T_{i+1} \upharpoonright 2(k+i) + 1 = T_i \upharpoonright 2(k+i) + 1$ e $T_{i-1} \upharpoonright 2(k+i) = T_i \upharpoonright 2(k+i)$, então

$$\begin{aligned} T_{i+1} \upharpoonright 2(k+i) &= \left(T_{i+1} \upharpoonright 2(k+i) + 1 \right) \upharpoonright 2(k+i) \\ &= T_i \upharpoonright 2(k+i) \\ &= T_{i-1} \upharpoonright 2(k+(i-1)) + 1 \end{aligned}$$

Ou seja, os troncos $T_i \upharpoonright 2(k+1) + 1$ **permanecem fixos** na hierarquia T_i das árvores das subseqüentes coberturas, o que motiva as definições que seguem. Tome

$$\bar{T} \doteq \{s \in T_i : h(s) \leq 2(k+i)\}$$

Defina $\bar{\pi}_i(s) \doteq s$ se $h(s) \leq 2(k+i)$ e, caso contrário, tome j grande para $h(s) \leq 2(k+j)$ e defina $\pi_i(s) \doteq \pi_{i+1} \circ \dots \circ \pi_j(s)$, independente da escolha de j (hipótese de k -cobertura). Temos então, por construção, a comutatividade do primeiro triângulo e o axioma para $k+i$ -cobertura. Analogamente, $\bar{\varphi}_i(\sigma) \upharpoonright 2(k+i) + 1 = \sigma \upharpoonright 2(k+i) + 1$ e para cada $j > i$ define-se $\bar{\varphi}_i(\sigma) \upharpoonright 2(k+j) + 1 = \varphi_{i+1} \circ \dots \circ \varphi_j(\sigma) \upharpoonright 2(k+j) + 1$ ¹² o que

¹¹ Aqui os alvos X são irrelevantes. Apenas as árvores e subárvores do tipo estratégia cumprem algum papel.

¹² Note que $\bar{\varphi}_j(\sigma) \upharpoonright = \sigma \upharpoonright 2(k+j) + 1$ é estratégia parcial e φ_i 's levam estratégias parciais até certo nível em estratégias parciais até este mesmo nível, ou seja, esta definição funciona!

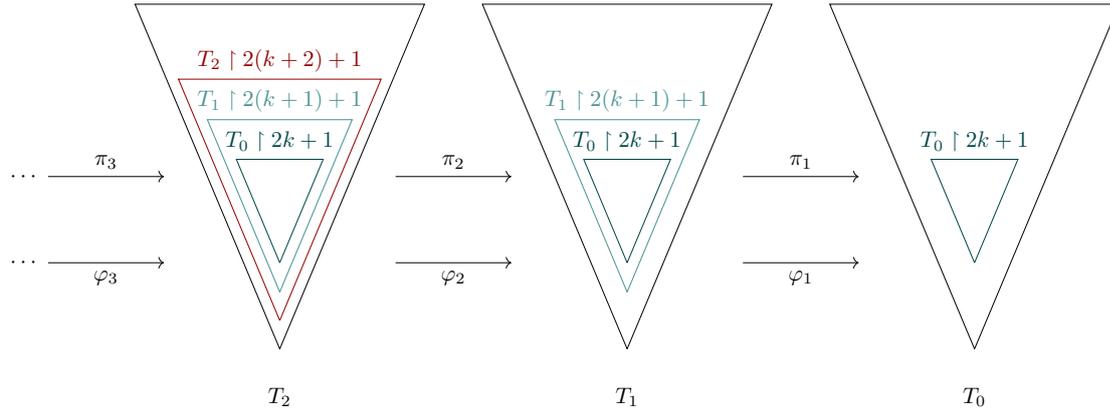


Figura 33 – Diagrama indicando as árvores que vão sendo **fixadas** na pilha de coberturas. Leia da direita para a esquerda.

dá comutatividade do segundo triângulo.

No que segue, vale lembrar que $[\cdot]$ é funtorial. Resta mostrar que $[\overline{\varphi}_i(\sigma)] \subset [\overline{\pi}_i](\overline{[T]})$. Tome $\alpha \in [\overline{\varphi}_i(\sigma)]$, para começar a encontrar $\beta \in [\sigma]$. Da hipótese de cobertura em cada árvore da sequência, deve haver $\beta_{i+1} \in [\overline{\varphi}_{i+1}(\sigma)]$ tal que $[\pi_{i+i}](\beta_{i+1}) = \alpha$, tome $s_{i+1} \in \overline{T}$ de altura $2(k+i)+1$. Prosseguindo desta forma acabamos com $\beta \in [\sigma]$ e, da construção, $\pi(\beta) = \alpha$, como queríamos. \square

No que segue teremos que levar em conta a construção transfinita dos Borelianos discutida nas preliminares. Lembrando que funções contínuas, como $[\pi] : [\overline{T}] \rightarrow [T]$, preservam a complexidade dos Borelianos. Temos então que $[\pi]^{-1}(\mathcal{O}_{[T]}(\alpha)) \subset \mathcal{O}_{[\overline{T}]}(\alpha)$.

Teorema 2.5.1 (Teorema da determinação de Borel). *Todo jogo (T, X) tal que $X \in \mathcal{B}(X)$ é determinado.*

Demonstração. Basta mostrar que todo Boreliano pode ser desemaranhado. Do **Desemaranhamento de fechado**, temos que abertos τ e fechados $\neg\tau$ de $[T]$ podem ser desemaranhados. Nos remetendo ao **Teorema 0.0.8**, temos o teorema então para $\mathcal{O}(0)$ como caso básico. Suponha que tenhamos o teorema para todo γ , $0 \leq \gamma < \alpha < \omega_1$, tome $A \in \mathcal{O}(\alpha)$.

- Seja α limite. Nesse caso $A \in \mathcal{O}(\gamma)$ para algum $\gamma < \alpha$. Por hipótese de indução, A pode ser desemaranhado.
- Seja α sucessor.
 - Se $A \in \mathcal{O}(\gamma)$ para algum $\gamma < \alpha$, então A pode ser desemaranhado por indução.
 - Seja A é complemento de $B \in \mathcal{O}(\gamma)$, $\gamma < \alpha$. Nesse caso B pode ser desemaranhado, **logo A também pode**.
 - Suponha que existam enumeráveis conjuntos $A_n \in \mathcal{O}(\gamma_n)$ com $A = \bigcup A_n$ e $\gamma_n < \alpha$. Considere $T_0 = T$ e (T_1, π_1, φ_1) $(k+1)$ -cobertura de T desemaranhando A_0 . O conjunto $[\pi_0]^{-1}(A_1) \in \mathcal{O}(\gamma_1)$ também pode ser desemaranhado, tome então (T_2, π_2, φ_2) $(k+2)$ -cobertura de T_1 desemaranhando $A_1^1 \doteq [\pi_0]^{-1}(A_1)$. Continuando dessa maneira obtemos uma sequência de coberturas e clopens A_n^n . Considere $(\bar{T}, \bar{\pi}_i : \bar{T} \rightarrow T_i, \bar{\varphi}_i : S_{\bar{T}} \rightarrow S_{T_i})$ com as propriedades do **Limite Inverso de k -coberturas**. Note que

$$[\bar{\pi}_0]^{-1}(A) = \bigcup [\bar{\pi}_0]^{-1}(A_n) \stackrel{\text{Com. das } \pi\text{'s}}{=} \bigcup_{\stackrel{\text{Corolário 1.3.1}}{=}} [\bar{\pi}_n]^{-1}(A_n^n)$$

reunião de imagem inversa de *clopens* por contínuas, um aberto. Logo este pode ser desemaranhado e como k -cobertura de k -cobertura é k -cobertura, acabamos com k -desemaranhamento de A .

□

Resultados de determinação mais profundos se encontram em (MARTIN; STEEL, 1989).

Parte II

Teoria descritiva de conjuntos

RESULTADOS PRELIMINARES

3.1 Introdução

A teoria descritiva de conjuntos nasceu do interesse por propriedades de **conjuntos explicitamente definíveis** em algum sentido. A noção de Cantor de função, como um mapa entre elementos, e algumas consequências estranhas do axioma da escolha, como a existência de conjuntos de Bernstein ([Teorema 2.3.2](#)), motivaram alguns matemáticos a estudar propriedades de conjuntos e funções **facilmente definidas** e estabelecer o que exatamente significa **graus de complexidade de definição**. Seguimos ([SRIVASTAVA, 1998](#)), ([KECHRIS, 1995](#)) e ([TSERUNYAN, 1994/1995](#)).

Vamos estabelecer alguns resultados topológicos preliminares sobre espaços poloneses. Fechados de poloneses são poloneses. É possível ir um pouco além:

Teorema 3.1.1 (Alexandrov). *Todo subespaço G_δ de X , espaço completamente metrizável, é completamente metrizável.*

Os irracionais $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, que podem ser escritos como $\bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{q\} \in G_\delta$, são completamente metrizáveis. Note que \mathbb{Q} não é, pois $\bigcap_{n \in \omega} \mathbb{Q} \setminus \{q_n\} = \emptyset$ é intersecção vazia de densos abertos, que seria densa se \mathbb{Q} fosse completamente metrizável ([Teorema B.4.1](#)).

Definição 3.1.1 (Oscilação). Seja $f : X \rightarrow Y$ função entre espaço topológico X e métrico Y . Definimos a **oscilação** de f em $x \in \bar{X}$ como:

$$O(f)(x) \doteq \inf\{\text{diam}(f(V)) : V \text{ vizinhança de } x\} \in [0, \infty]$$

o que define $O(f) : X \rightarrow [0, \infty]$ função nos reais estendidos. Se f está definida em subespaço $D \subset X$, define-se a oscilação $O(f) : \bar{D} \rightarrow [0, \infty]$ usando a definição acima para as vizinhanças induzidas $V \cap D$ de D pela topologia de X .

Note que a oscilação descreve quantitativamente o grau de **descontinuidade** da função. De fato, é fácil ver que $O(f)(x) = 0$ se, e somente se, f é contínua em x . O conjunto de **pontos onde f é contínua** é um G_δ de X . Mostremos que $U_\varepsilon \doteq O(f)^{-1}([0, \varepsilon])$ é aberto. Seja $x \in U_\varepsilon$, deve haver então V vizinhança (suponha aberta) de x com $\text{diam}(f(V)) < \varepsilon$. Mas então o próprio V testemunha o fato de que $V \subset U_\varepsilon$. Pontos de continuidade de f são elementos do conjunto $O(f)^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{1/n}$, um G_δ .

Teorema 3.1.2 (Kuratowski). *Seja $f : A \rightarrow Y$ com $A \subset X$ metrizável e Y completamente metrizável. Então f pode ser estendida continuamente para um conjunto G_δ , denotemos por G , tal que $A \subset G \subset \bar{A}$.*

Teorema 3.1.3 (Lavrentiev). *Seja $f : A \rightarrow B$ homeomorfismo entre $A \subset X$ e $B \subset Y$ espaços métricos completos, então f pode ser estendida para homeo $\hat{f} : G \rightarrow H$ entre G_δ 's contendo domínio e contradomínio.*

Os valores de uma função contínua em um denso de um espaço Hausdorff **a determinam univocamente**.

Corolário 3.1.1. *Subespaço completamente metrizável de espaço completamente metrizável são exatamente seus subconjuntos G_δ .*

Demonstração. Considere $\text{id}_G : G \rightarrow G \subset X$ automorfismo de subespaço completamente metrizável. Estendemos à homeomorfismo $\hat{\text{id}}_G : H \rightarrow H$ onde H é G_δ com $G \subset H \subset \bar{G}$. Análogo para a inversa, que será a própria identidade. Aplicando o **Teorema 3.1.3** teremos então uma extensão $\hat{\text{id}}_G : H \rightarrow H$ e $\hat{\text{id}}_G = \text{id}_H$, mas $\hat{\text{id}}_G = \text{id}_G$, temos então que $G = H$,

um G_δ .

□

Caracterizando poloneses exatamente como subespaços G_δ do cubo de Hilbert.

3.2 Esquemas de Conjuntos

Nessa seção vamos operar sobre conjuntos usando árvores, estabelecendo uma espécie de endereçamento de pontos ou de subconjuntos de pontos via árvores ou, no mínimo, a descrição de alguns conjuntos em termos de outros a partir de árvores.

Vamos tentar definir uma nova operação entre classes pontuais usando árvores, ou seja, dada uma família de subconjuntos, queremos definir uma nova forma de construir novos subconjuntos.

Definição 3.2.1 (Sistemas ou esquemas de conjuntos). Seja T uma árvore, chamemos de **sistema ou esquema de subconjuntos de X sobre T** uma função $f : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Seja \mathcal{F} uma família de subconjuntos de X e $f : T \rightarrow \mathcal{F}$, vamos dizer informalmente que f é um esquema de subconjuntos \mathcal{F} . Um esquema será dito **regular** se

$$t_1 \leq t_2 \implies f(t_2) \subset f(t_1)$$

Exemplo 3.2.1. Seja (X, τ) espaço topológico, se $f : T \rightarrow \tau$ tem imagem apenas em abertos, dizemos que é um esquema **de abertos** sobre X .

Definição 3.2.2 (Níveis e ramos de esquemas). Dado esquema $f : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$, define-se o γ -ésimo nível do esquema f como $\text{level}(\gamma, f) \doteq \bigcup_{s \in \text{level}_T(\gamma)} f(s)$. Seja $\alpha \in [T]$ ramo, o **ramo de f através de α** é o conjunto $\text{Br}(f, \alpha) \doteq \bigcap_{t \in \alpha} f(t)$.

Está claro que se um $x \in \text{Br}(f, r)$ para um ramo $r \in [T]$ então ele está em todos os níveis $x \in f(r \upharpoonright n)$. Para a outra direção, precisamos de hipóteses extras:

Lema 3.2.1. Seja T uma árvore *aparada*, $f : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ sistema de subconjuntos e $s \perp r \implies f(s) \cap f(r) = \emptyset$ **regular**, então $\mathcal{A}f = \mathcal{B}f$.

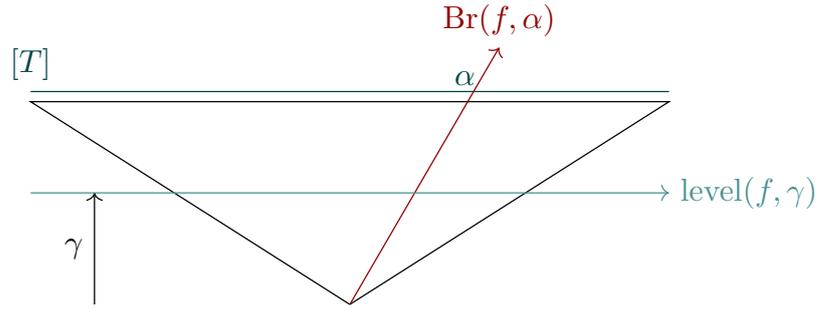


Figura 34 – Um ramo através do esquema f e um de seus níveis.

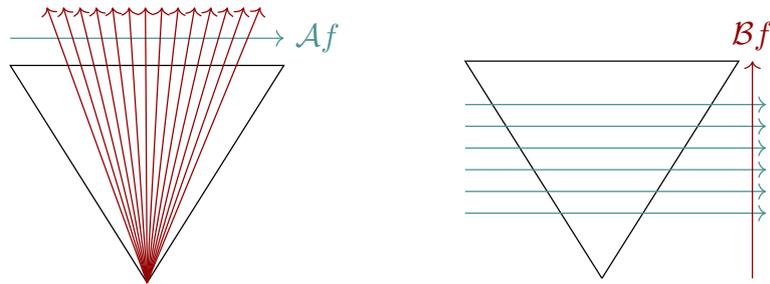


Figura 35 – Vamos denotar $\mathcal{A}f \doteq \bigcup_{\alpha \in [T]} \text{Br}(f, \alpha)$ e $\mathcal{B}f \doteq \bigcap_{\gamma \in h(T)} \text{level}(f, \gamma)$.

Demonstração. A direção $[\subset]$ foi demonstrada. Seja $x \in \mathcal{B}f$, x está em todos os níveis do do esquema, logo temos $\gamma < h(T) \mapsto s_\gamma$ tal que $x \in f(s_\gamma)$. Note que tais s_γ formam cadeia maximal, ou seja, um ramo.

□

Alternativamente, adicionando-se condição de que todo elemento da árvore tem finitos sucessores, podemos obter o mesmo resultado via lema de König.

Lema 3.2.2 ([DC] Lema de König para Esquemas). *Seja $f : T \rightarrow \mathcal{P}(X)$ regular, onde T é aparada de altura ω , é tal que para todo $x \in \mathcal{B}f$ a subárvore $S \doteq \{s \in T : x \in f(s)\}$ se ramifica finitamente, então $\mathcal{A}f = \mathcal{B}f$.*

Demonstração. Já temos $[\subset]$. Se $x \in \mathcal{B}f$ então S tem altura ω . De fato, S é subárvore de T e, como se ramifica finitamente por hipótese, aplicando o lema de König obtemos ramo infinito $s \in [S] \subset [T]$. Nesse caso $x \in \text{Br}(f, s) \subset \mathcal{A}f$.

□

Em particular se T acima se ramifica finitamente já teríamos o resultado. Num contexto topológico, as construções que usamos são empregadas em construções de funções contínuas.

Definição 3.2.3 (Esquemas de Souslin, Lusin e Cantor). Fixemos X metrizável, e $f : A^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ um esquema regular. Dizemos que f é

(i) **Esquema de Souslin** se f é tal que $\text{diam}(f(\alpha \upharpoonright n)) \rightarrow 0$.

(ii) **Esquema de Lusin** se é de Souslin e

$$s \perp t \implies f(s) \cap f(t) = \emptyset$$

(iii) **Esquema de Cantor** se é um esquema de Lusin com $A = 2$.

Proposição 3.2.1 (Construção de Contínua Via Esquemas). *Seja $f : A^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}(X)$, com X métrico completo, esquema de Souslin. De fato, T conjunto onde $f \neq \emptyset$ é uma sub-árvore de $A^{<\omega}$. Considere $[T]$, um fechado de A^ω . Do teorema de Cantor, para todo $\alpha \in [T]$,*

$$\bigcap_{n \in \omega} \overline{f(\alpha \upharpoonright n)} \stackrel{\text{Teorema 0.0.5}}{=} \{x_\alpha\}$$

Considere $\tilde{f} : [T] \rightarrow X$ tal que $\tilde{f}(\alpha) \doteq x_\alpha$.

(i) A função \tilde{f} é contínua.

(ii) Se o esquema f é de Lusin, então \tilde{f} é injeção.

(iii) Se f é esquema de Lusin de abertos, então f é inclusão de subespaço.

(iv) Se f é esquema tal que $f(\langle \rangle) = X$ e $\forall s \in A^{<\omega} f(s) = \bigcup_{a \in A} f(s \frown a)$, então \tilde{f} é sobrejetora.

(v) Se f é esquema de Cantor $f : 2^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}X$ de abertos com $T = 2^{<\omega}$, então $\tilde{f} : 2^\omega \hookrightarrow X$ é inclusão do espaço de Cantor em X .

Demonstração. Note que temos algumas hipóteses independentes sobre os esquemas e, em seguida, uma consequência sobre a função contínua \tilde{f} construída. Vamos estabelecer cada item.

- (i) Tome $\alpha \in [T]$, $\varepsilon > 0$. Tome n grande para $\text{diam}(f(\alpha \upharpoonright n)) < \varepsilon$, em particular $\tilde{f}(\alpha) \in f(\alpha \upharpoonright n)$, então

$$\tilde{f}([T] \cap \Sigma(\alpha \upharpoonright n)) \subset B(\tilde{f}(\alpha), \varepsilon)$$

Note, em particular, que $n \mapsto f(\alpha \upharpoonright n)$ é tal que, para qualquer aberto $\tilde{f}(\alpha) \in A$, existe n grande com $f(\alpha \upharpoonright n) \subset A$. Em outras palavras, temos convergência de net $\{f(\alpha \upharpoonright n)\}_{n \in \omega} \rightarrow \tilde{f}(\alpha)$.

- (ii) Se $\alpha \neq \beta$ em $[T]$, eventualmente $\alpha \upharpoonright n \neq \beta \upharpoonright n$ e então

$$\tilde{f}(\alpha) \in f(\alpha \upharpoonright n) \text{ disjunto de } f(\beta \upharpoonright n) \ni \tilde{f}(\beta)$$

Logo \tilde{f} é injeção.

- (iii) Já temos injetividade de \tilde{f} . Resta mostrar que $\tilde{f}: [T] \rightarrow \tilde{f}([T])$ é homeomorfismo quando tomamos $\tilde{f}([T])$ com topologia de subespaço. Se estabelecermos que

$$\underbrace{\tilde{f}([T] \cap \Sigma(s))}_{\text{imagem de aberto relativo}} = \underbrace{\tilde{f}([T]) \cap f(s)}_{\text{é aberto relativo da imagem}}$$

Então acabamos.

- Mostremos $[\subset]$. Tome $\beta \in \Sigma(s) \cap [T]$. Temos que $\tilde{f}(\beta)$ está definida e, como $s \triangleleft \beta$, concluímos que $\tilde{f}(\beta) \in f(s)$.
 - Mostremos $[\supset]$. Tome $\tilde{f}(\beta) \in \tilde{f}([T]) \cap f(s)$. O ponto $\tilde{f}(\beta)$ é elemento do aberto $f(s)$. Como $\{f(\beta \upharpoonright n)\}_{n \in \omega} \rightarrow \tilde{f}(\beta)$ como um net, eventualmente $f(\beta \upharpoonright n) \subset f(s)$. Temos então $\beta \upharpoonright n \in T$ tal que $\emptyset \neq f(\beta \upharpoonright n) \subset f(s)$. Como f é de Lusin, devemos ter que $s \leq \beta \upharpoonright n$. Concluímos que $\beta \in f(s)$.
- (iv) Tome $x \in f(s)$, deve haver $a \in A$ com $x \in f(s \frown a)$, produz-se assim α com $x \in \text{Br}(f, \alpha)$. Isso nos dá que se f tem essa propriedade, \tilde{f} é **sobrejetora**.
- (v) Note que $\tilde{f}: [2^{<\omega}] = 2^\omega \rightarrow X$ será, pelos itens anteriores, de fato uma inclusão de espaço.

□

Corolário 3.2.1. *Todo espaço X completamente ultrametrizável zero-dimensional é homeomorfo ao espaço de ramos de alguma árvore T .*

Demonstração. Seja X zero-dimensional com ultramétrica completa $d \leq 1$ compatível. Fixado $n \in \omega$, $\{B(x, \frac{1}{2^n}) : x \in X\}$ particiona X em *clopens*. Seja $x \sim y$ quando $x \in B(y, 1/2^n)$. Claramente reflexiva e simétrica (simetria de d), dados $x \sim y \sim z$, temos da desigualdade forte que $x \sim z$. Quocientando o espaço por \sim obtemos exatamente a partição acima. Considere $n \mapsto \{B(x, \frac{1}{2^n}) : x \in X\} \doteq T(n)$, nos dando os níveis. Dado $B(x, \frac{1}{2^m}) \in T(m)$, defina seu ancestral em $T(n)$, $n \leq m$, como $B(x, \frac{1}{2^n})$, bem definido. Temos que T é de fato um **esquema abertos de Lusin** (Definição 3.2.3), e da **Proposição 3.2.1** construímos $\tilde{f} : [T] \rightarrow X$, inclusão contínua sobrejetora, portanto um homeomorfismo. □

3.3 Espaços Poloneses e uma caracterização do espaço de Cantor

Note, na demonstração do **Corolário 3.2.1**, que conseguimos construir, a partir de algumas propriedades de um espaço topológico, um esquema que de certa forma *endereça* os pontos do espaço por meio de uma árvore de abertos. Conforme avançamos nos níveis da árvore, obtemos um ponto com uma precisão (diâmetro da vizinhança) cada vez maior. O que segue é um lema auxiliar para a construção de esquemas sobre $\omega^{<\omega}$, no sentido de mostrar que, de fato, qualquer espaço completamente metrizável e segundo enumerável é imagem contínua de ω^ω .

Lema 3.3.1. *Considere a seguinte série de afirmações,*

- (i) *Dado F fechado de X polonês, podemos escrever F como reunião de fechados de diâmetro menor que $\varepsilon > 0$ para qualquer $\varepsilon > 0$. De fato, considere \mathcal{D} denso enumerável, de fato $\mathcal{B} = \{B(d, r) : r < \varepsilon/3\}$ ainda é uma base. Note que $F = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} F \cap \bar{B}$ reunião enumerável de fechados de diâmetro menor que ε .*

- (ii) Dado $F = \bigcup F_i \in F_\sigma$, podemos também escrevê-lo como $\bigcup C_i$ de fechados todos com $\text{diam} < \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$ que queiramos. Basta decompor F_i como em (i) e obter uma lista enumerável de fechados de diâmetro $< \varepsilon$ nos dando F .
- (iii) Note que $F = \bigcap \tilde{C}_i$ com $\tilde{C}_k \doteq C_k \setminus \bigcup_{i < k} C_i$ é um F_σ (pois abertos são F_σ e intersecção de fechado com F_σ é F_σ) **potencialmente vazio** e, obviamente $\overline{\tilde{C}_k} \subset C_k$ tem diâmetro menor que ε . Nesse caso, reescrevemos $F \in F_\sigma$ como reunião de F_σ de diâmetros $< \varepsilon$.

Teorema 3.3.1. *Todo espaço polonês é imagem contínua de um fechado do espaço de Baire ω^ω .*

Demonstração. Do lema acima, construa $f : \omega^{<\omega} \rightarrow X$ com $f(s)$ um F_σ de diâmetro $\text{diam} f(s) < \frac{1}{2^{|s|}}$, tome $\varepsilon = \frac{1}{2^{|s|+1}}$, temos $f(s) \doteq \bigcup_{i \in \omega} f(s \frown i)$ reunião disjunta de F_σ 's com diâmetro menor que $\frac{1}{2^{|s|+1}}$ com $\overline{f(s \frown i)} \subset f(s)$. Começando com $f(\langle \rangle) \doteq X \in F_\sigma$ acabamos com um esquema de Lusin e tem **propriedade (iv) de 3.2.1**, garantindo sobrejetividade de $\tilde{f} : [D] \rightarrow X$.

□

Definição 3.3.1 (Retrações). Seja $A \subset X$ espaço topológico. Seja $f : X \rightarrow A$ contínua com $f \upharpoonright A = id_A$. A função f é dita uma **retração** de A . Um conjunto $A \subset X$ que tenha uma retração $f : X \rightarrow A$ é chamados de **retrato** de X .

Proposição 3.3.1 (Retrato). *Seja $A \neq \emptyset$. Todo fechado do espaço $[A^{<\omega}]$ é retrato.*

Demonstração. Tome F fechado de A^ω . De fato $F = [T_F]$ onde T_F é subárvore aparada de $A^{<\omega}$. Defina $\varphi : A^{<\omega} \rightarrow T_F$, $\varphi(\langle \rangle) = \langle \rangle$,

$$\varphi(s \frown a) \doteq \begin{cases} s \frown a & \text{se } s \frown a \in T_F \\ s \frown b \in T_F & \text{se } s \frown a \notin T_F \end{cases}$$

Note que φ é monótona própria, visto que preserva comprimento, logo $[\varphi] : A^\omega \rightarrow [T_F] = F$ é contínua. Temos também que $s \in F \implies s \upharpoonright k \in T_F$, mas da regra de φ

temos que $\varphi(s \upharpoonright k) = s \upharpoonright k$, logo $\varphi|_s = \text{id}_s : s \rightarrow s$ está bem definida e é co-final, ou seja, $s \in F \implies [\varphi](s) = s$, logo $[\varphi]$ é o retrato procurado. \square

Corolário 3.3.1. *Todo polonês é imagem contínua do espaço de Baire.*

Demonstração. Todo polonês é imagem contínua de subespaço fechado do espaço de Baire $\omega^\omega \supset D \twoheadrightarrow X$. Mas D é retrato, então $\mathcal{N} \twoheadrightarrow D \twoheadrightarrow X$. \square

Mostramos que o espaço de Cantor é especial, dentro da categoria dos espaços topológicos, no sentido em que seus sub-objetos contém todos os zero-dimensionais e segundo-enumeráveis. A hipótese de compacidade nos dá alguns resultados nesta direção:

Teorema 3.3.2. *Todo métrico compacto é imagem contínua de espaço de ramos de árvore que se ramifica finitamente.*

Demonstração. Tome métrica compatível com $d \leq 1$. Começemos com $\text{level}_T(0) \doteq \langle \rangle$ primeiro nível de T e $f(\langle \rangle) \doteq X$. Definidos $s \in \text{level}_T(n)$ e $f(s)$ abertos com $\text{diam } f(s) < 2^{-n}$. Tome cobertura aberta U_0, \dots, U_n finita de X de diâmetros $\text{diam } U_i < 2^{-(|s|+1)}$. Os sucessores de s serão $s \frown i$ tais que $f(s \frown i) \doteq \overline{U_i} \cap f(s) \neq \emptyset$. Note que T é árvore aparada que se ramifica finitamente e $\tilde{f} : [T] \rightarrow X$ é contínua sobrejetora. \square

Corolário 3.3.2. *Todo compacto metrizável é quociente do espaço de Cantor.*

Demonstração. Existe T árvore que se ramifica finitamente com $[T] \twoheadrightarrow X$ contínua sobrejetora. Note que $[T]$ é zero-dimensional segundo enumerável e, portanto, é homeomorfo a um subespaço (compacto) do espaço de Cantor, logo um fechado. Como é fechado de Cantor, é retrato, temos a composta $\mathcal{C} \rightarrow [T] \twoheadrightarrow X$ contínua e sobrejetora entre espaços compactos e Hausdorff, um quociente ¹. \square

¹ Seja $f : X \rightarrow Y$ contínua e sobrejetora entre compactos Hausdorff. Mostremos que $F \subset Y$ é fechado $\iff f^{-1}(F) \subset X$ é fechado. Se $f^{-1}(F) \subset X$ é fechado, então é compacto, logo $f(f^{-1}(F)) = F$ é compacto de Y e, portanto, fechado. Se $F \subset Y$ é fechado, $f^{-1}(F)$ é fechado.

O próximo teorema caracteriza o espaço de Cantor. Um corolário desse teorema é o fato de que toda árvore **aparada**, de altura ω , **perfeita** e que se **ramifica finitamente** tem espaço de ramos homeomorfo ao espaço de Cantor.

Teorema 3.3.3 (Brouwer(TSERUNYAN, 1994/1995)(KECHRIS, 1995)(BELLINI M. K.; RODRIGUES, 2019)). *O espaço de Cantor é, a menos de homeomorfismo, o único espaço topológico não vazio, polonês, compacto, zero-dimensional, sem pontos isolados.*

Demonstração. Considere X com as propriedades. Começamos com métrica tal que $\text{diam} X = 1$ e $f(\langle \rangle) \doteq X$. Definido $f(s) \neq \emptyset$ um *clopen* de compacto, ele mesmo então um **compacto**. O número $\rho \doteq \frac{\text{diam} f(s)}{4} > 0$ é **positivo** e para cada $x \in X$ considere tome $x \in B_x \subset B(x, \frac{\rho}{2})$ onde B_x é elemento da **base de clopens** de X , formando cobertura. **Encontramos finitos** B_{x_1}, \dots, B_{x_k} de *clopens* não vazios de diâmetro menor que ρ que cobrem $f(s)$. Fosse $k = 1$ então B_{x_1} é cobertura de $f(s)$ e $f(s) \subset B_{x_1} \subset B(x, \frac{\text{diam} f(s)}{4})$, **um absurdo**.

Podemos tornar estes *clopens* disjuntos sem perder as propriedades. Sistemáticamente bi-particionamos então $f(s)$ em $f(s \frown 1) \doteq B_{x_k}$ e $f(s \frown 0) \doteq B_{x_1} \sqcup \dots \sqcup B_{x_{k-1}}$ e, analogamente, $f(s \frown 0)$ em

$$f(s \frown 0 \frown 0) \doteq B_{x_1} \sqcup \dots \sqcup B_{x_{k-2}} \quad f(s \frown 0 \frown 1) \doteq B_{x_{k-1}}$$

Repetimos este processo nas ‘folhas’ da árvore onde f está definida, estendo a função e obtendo ² esquema de Lusin de *clopens* $f : 2^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ com $f(\langle \rangle) = X$ e, pela construção, $f(s) = f(s \frown 0) \sqcup f(s \frown 1)$ e $\text{diam} f(s) \rightarrow 0$ quando $|s| \rightarrow \infty$. Como este processo nunca resulta em bipartições triviais ($k \neq 1$), temos que $f(s) \neq \emptyset$. Temos então **homeomorfismo** $\tilde{f} : 2^\omega \rightarrow X$, mostrando que $X \overset{\text{Top}}{\approx} \mathcal{C}$ como queríamos. \square

Em particular, o conjunto de Cantor $C \subset \mathbb{R}$ é homeomorfo ao espaço de Cantor. Potências \mathcal{C}^n e \mathcal{C}^ω mantêm todas as propriedades do teorema e também são homeomorfas à \mathcal{C} .

² Teorema da Recursão, indução sobre a altura $h(s) < \omega$ da *string*.

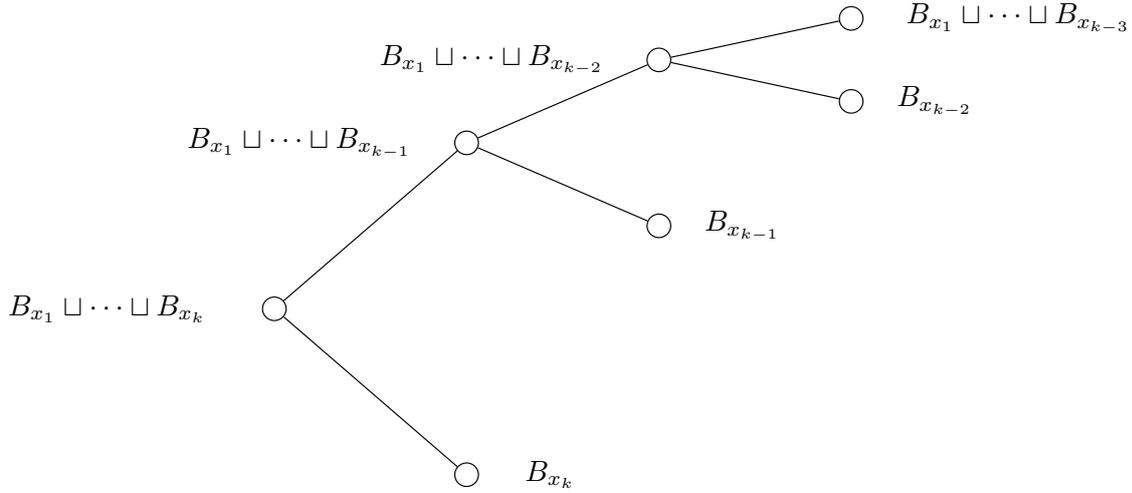


Figura 36 – Construção do esquema de Cantor do Teorema 3.3.3.

Corolário 3.3.3. *Seja $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ o espaço de Vietoris (Seção B.3) do espaço de Cantor, ou seja, os subespaços compactos do espaço de Cantor munidos de métrica de Hausdorff. De fato, $\mathcal{H}(\mathcal{C}) \setminus \{\emptyset\}$ é homeomorfo ao espaço de Cantor.*

Demonstração. Mostremos que o espaço de Vietoris de um zero-dimensional é zero-dimensional. Considere \mathcal{B} conjunto de abertos básicos de X . Note que $(B) \cap [B_1] \cap \dots \cap [B_n]$, com $B, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$, forma base da topologia de Vietoris. Suponha que X tenha base \mathcal{B} de *clopens* e tome $B \in \mathcal{B}$. Note que (B) será aberto, mas também será $[X \setminus B] = (\mathcal{H}X) \setminus (B)$, logo (B) é *clopen*. Analogamente teremos que $[B]$ é *clopen*, o que resulta que o espaço de Vietoris de espaço zero-dimensional é zero-dimensional.

Como $\{\emptyset\} = (\emptyset)$ é *clopen*, temos que $\mathcal{H}(\mathcal{C}) \setminus \{\emptyset\}$ subespaço fechado de $\mathcal{H}(\mathcal{C})$, um polonês compacto zero-dimensional, herdando todas estas características. Seja $k \in \mathcal{H}(\mathcal{C}) \setminus \{\emptyset\}$ e $k \in B \doteq (U) \cap [V_1] \cap \dots \cap [V_m]$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $U = \bigcup_{i=1}^n V_i$. Se k é infinito tomamos um conjunto $k' \in \text{Fin}(X) \cap B$, testemunhando que k não é isolado. Se $k = \{x_1, \dots, x_n\}$ tais que $x_i \in k \cap V_i$, tome $x'_i \in V_i$ e $k' = \{x_1, \dots, x_n\}$ de novo mostra que k não é isolado. Concluímos que $\mathcal{H}(\mathcal{C}) \setminus \{\emptyset\}$ é polonês, compacto, zero-dimensional e sem ponto isolado. Do Teorema 3.3.3 concluímos que $\mathcal{H}(\mathcal{C}) \setminus \{\emptyset\} \approx \mathcal{C}$. \square

É possível, usando a mesma técnica, demonstrar o

Teorema 3.3.4 (Alexandrov-Urysohn). *O espaço de Baire é, a menos de homeomorfismo, o único espaço topológico não vazio, polonês, zero-dimenisonal e tal que todo subespaço compacto tem interior vazio.*

Que, pelo mesmo motivo, nos dirá que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \approx \omega^\omega$.

REGULARIDADE E PROPRIEDADES

4.1 Regularidade

Nesta sessão vamos introduzir formalmente a noção de regularidade topológica usada no texto. Nas preliminares construímos uma σ -álgebra, [via indução transfinita](#) fechando iterativamente uma família de conjuntos com relação às operações de complementação e reunião enumerável. Já nessa construção surge uma noção natural de complexidade de conjuntos de Borel: o menor ordinal $\alpha < \omega_1$ no qual B aparece, que indica, de certa forma, o momento em que este conjunto pode ser construído a partir dos conjuntos geradores. Nas seções subsequentes, estaremos interessados na preservação de certas propriedades com relação as operações de complementação, reunião enumerável e imagem por função contínua, como por exemplo a hipótese do contínuo. Para isso vamos formalizar a noção de classes de subconjuntos.

Definição 4.1.1 (Classes pontuais). Vamos considerar que **classe pontual** é um functor contravariante $\Gamma : \mathbf{Polish} \rightarrow \mathbf{Sets}$ de tal sorte de $\Gamma(X) \subset \mathcal{P}(X)$. A **classe complementar** é $\neg\Gamma(X) \doteq \{X \setminus A : A \in \Gamma(X)\}$ e uma Γ -relação n -ária é um elemento de $\Gamma(\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \times})$ onde \times é tomado em **Top**.

Exemplos de classes pontuais são abertos, fechados, conjuntos G_δ e F_σ e Borelianos e $X \mapsto \mathcal{P}X$. Dizer que uma classe pontual tem uma propriedade é dizer que todos

os elementos de $\Gamma(X)$ têm essa propriedade.

4.1.1 A Hierarquia de Borel

O objeto de estudo da seção é o caso particular desta hierarquia construída a partir de abertos de espaços poloneses. Os conjuntos de Borel de espaços metrizáveis podem ser melhor estratificados em sub-famílias que generalizam os já conhecidos G_δ e F_σ . Seguimos de perto (SRIVASTAVA, 1998) e (KECHRIS, 1995) nesta sessão. Vamos estratificar a σ -álgebra de Borel como segue:

Definição 4.1.2 (Classes da Hierarquia Boreliana). Seja X métrico, considere $\Sigma_1^0 \doteq \tau$ e $\Pi_1^0 \doteq \neg\tau$. Por indução transfinita, defina para $1 < \alpha < \omega_1$:

$$\Sigma_\alpha^0 \doteq \left(\bigcup_{\gamma < \alpha} \Pi_\gamma^0 \right)_\sigma$$

$$\Pi_\alpha^0 \doteq \left(\bigcup_{\gamma < \alpha} \Sigma_\gamma^0 \right)_\delta$$

Definimos também $\Delta_\alpha^0 = \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0$. Denotamos as famílias Σ_α^0 por α -ésima classe aditiva, Π_α^0 por α -ésima classe multiplicativa e Δ_α^0 por α -ésima classe ambígua.

Aqui fica contrastada a estratificação dos Borelianos comentada nas preliminares.

Proposição 4.1.1. *Considere a hierarquia de Borel descrita acima, então :*

- (i) *A classe aditiva é fechada com relação a reuniões enumeráveis, e a multiplicativa com relação a intersecções enumeráveis. Este fato segue de um simples argumento de indução.*
- (ii) *Abertos e fechados se relacionam via complementação e, em geral, $\Sigma_\alpha^0 = \neg\Pi_\alpha^0$. De fato, $A \in \Sigma_\alpha^0$, $A = \bigcup A_n$ com $A_n \in \Pi_{\xi_n}^0$, $\xi_n < \alpha$, por indução, $A_n \in \neg\Pi_{\xi_n}^0$, logo $A = \bigcup X \setminus B_n$, com $B_n \in \Pi_{\xi_n}^0$, o que dá*

$$A = X \setminus \underbrace{\bigcap B_n}_{\Pi_{\sup \xi_n}^0} \quad \sup \xi_n \leq \alpha$$

(iii) A classe pontual Δ_α^0 é uma álgebra. Note que se $A \in \Sigma_\alpha^0, \Pi_\alpha^0 \implies X \setminus A \in \Pi_\alpha^0, \Sigma_\alpha^0$, logo Δ_α^0 fechado com relação à operação \neg . Sejam $A_n, n \in m \in \Delta_\alpha^0$, então $S = \bigcup_{n \in m} A_n$ e $X \setminus S = \bigcap_{n \in m} \underbrace{X \setminus A_n}_{\Delta_\alpha^0} \in \Pi_\alpha^0$.

Nos métricos, podemos obter uma estrutura cumulativa sobre estas classes pontuais:

Proposição 4.1.2. Fixe X métrico, para todo $1 \leq \alpha \in \omega_1$ temos

(i) $\Sigma_\alpha^0, \Pi_\alpha^0 \subset \Delta_\alpha^0$.

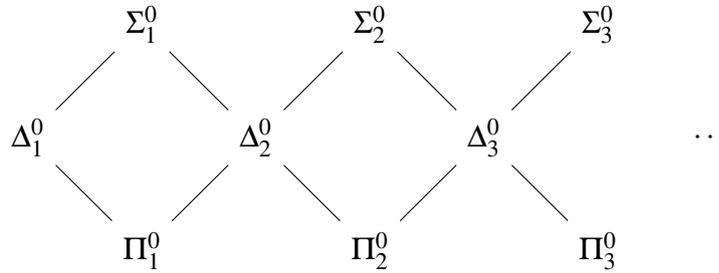


Figura 37 – Se X é métrico, as arestas no diagrama acima

(ii) Para $\alpha > 1$, $\Sigma_\alpha^0 = (\Delta_\alpha^0)_\sigma$.

Demonstração. Os itens se resumem a propriedades das operações básicas de conjuntos. Eles serão demonstrados por indução transfinita como segue:

- (i) De fato, todo aberto Σ_1^0 de metrizable é $F_\sigma \subset \Sigma_2^0$. Analogamente $\Pi_1^0 \subset G_\delta \subset \Pi_2^0$. Note que abertos são G_δ e fechados F_σ , logo Σ_1^0 . Análogo para o caso geral.
- (ii) Claramente $\Delta_\alpha^0 \subset \Sigma_\alpha^0$ logo $(\Delta_\alpha^0)_\sigma \subset (\Sigma_\alpha^0)_\sigma = \Sigma_\alpha^0$. De (i), $\Pi_\gamma^0 \subset \Delta_\alpha^0$ para $\gamma < \alpha$, então $\bigcup \Pi_\gamma^0 \subset \Delta_\alpha^0$, de onde temos $\Sigma_\alpha^0 = (\bigcup \Pi_\gamma^0)_\sigma \subset (\Delta_\alpha^0)_\sigma$. Analogamente $\Pi_\alpha^0 = (\Delta_\alpha^0)_\delta$.

□

Observação 4.1.1. Estão claras, pela construção, as seguintes propriedades:

(i) Seja $\alpha_n \in \omega_1$ sequência de ordinais com $\sup \alpha_n = \alpha$. De fato,

$$\Sigma_\alpha^0 = \underbrace{\left(\bigcup_{n \in \omega} \Pi_{\alpha_n}^0 \right)}_{\bigcup_{\gamma < \alpha} \Pi_\gamma^0} \sigma$$

(ii) Considere $\Gamma \in \{\Delta, \Sigma, \Pi\}$ uma das classes pontuais consideradas. Pela natureza cumulativa e encaixante destas famílias, está claro que a σ -álgebra de Borel de X é dada por $\bigcup_{\alpha \in \omega_1} \Gamma_\alpha^0$.

A estrutura da hierarquia de Borel é bem comportada com relação a algumas construções típicas. Nomeadamente, passagem a subespaço e seções de subconjuntos de espaços produto. A **seção vertical** de $A \subset X \times Y$ em $x \in X$ é definida por

$$A_x \doteq \{y \in Y : (x, y) \in A\} = \pi_Y((\{x\} \times Y) \cap A)$$

Analogamente se define a **seção horizontal** de A em y , denotada por A^y . Sejam V um $X \times Y$ -aberto e $y \in V_x$, então $(x, y) \in V$. Como V é aberto temos aberto básico $(x, y) \in A \times B \subset V$. Mas então $\{x\} \times B \subset V$ e $y \in B \subset V_x$, o que nos diz que V_x é aberto. Se $Y \subset X$ e $A \in \Sigma_1^0(X)$, então $A \cap Y \in \Sigma_1^0(Y)$. Essas observações são o primeiro nível das seguintes afirmações:

Proposição 4.1.3. *Considere $\Gamma_\alpha^0(X)$ uma das classes Borelianas, construída no metrizable X . Seja Y outro espaço metrizable. Se $Y \subset X$ é subespaço de X , sua classe é*

$$\Gamma_\alpha^0(Y) = \{A \cap Y : A \in \Gamma_\alpha^0(X)\}$$

Considere agora um conjunto $A \in \Gamma_\alpha(X \times Y)$ do produto. Mostramos que as seções verticais são elementos de $\Gamma_\alpha(Y)$. Analogamente, as seções horizontais são elementos de $\Gamma_\alpha(X)$.

Também é possível estratificar funções mensuráveis em classes de regularidade específicas, usando definições análogas. Deixamos para a [Seção C.1](#) do apêndice a demonstração do [Teorema do isomorfismo de Borel](#) e de alguns outros resultados,

importantes para a próxima seção. O teorema assegura que Borelianos de espaços poloneses são, a menos de bijeções mensuráveis com inversa mensurável, enumeráveis ou conjuntos de Cantor.

4.1.2 Analíticos

Em (LEBESGUE, 1905), Lebesgue assumiu que a projeção de Borelianos são Borelianos. Suslin notou que este não¹ era o caso, o que deu o ponta-pé inicial para o estudo de teoria descritiva de conjuntos. Nesta seção vamos abordar um pouco sobre esta classe pontual. Vamos precisar da [Seção C.1](#) do apêndice para alguns dos resultados adiante. Nosso objetivo é apenas obter uma caracterização de analíticos (como imagens contínuas de Borelianos) e aplicá-la na [Subseção 6.2.1](#) e na [Subseção 6.4.1](#). Nestas subseções vamos aplicar os resultados de determinação para mostrar que valem as propriedades perfeita e de Baire para analíticos, ou seja, estas propriedades são preservadas adicionando **imagens contínuas** ao nosso dicionário de operações admissíveis sobre conjuntos básicos. Isso formaliza a afirmação de que, sob construções matemáticas usuais (começando de abertos, complementando, reunindo enumeravelmente e tomando imagens contínuas), boas propriedades não são destruídas. Começemos pela definição dos analíticos.

Definição 4.1.3 (Projeções e coprojeções). Seja $A \subset X \times Y$ definimos a **projeção** $\pi_X(A) \doteq \exists^Y A$

$$\exists^Y A = \{x \in X : \exists y \in Y(x, y) \in A\}$$

A **coprojeção** é definida por:

$$\forall^Y A = \{x \in X : \forall y \in Y(x, y) \in A\}$$

Definição 4.1.4 (Analíticos). Seja Γ classe pontual, seja Y polonês, definimos

$$\exists^Y \Gamma = \{\exists^Y A : A \in \Gamma(X \times Y), X \text{ polonês}\}$$

¹ Considere V um conjunto [conjunto de Vitali](#) limitado. O conjunto $V \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$, de medida nula em \mathbb{R}^2 , tem projeção $V \subset \mathbb{R}$ não mensurável.

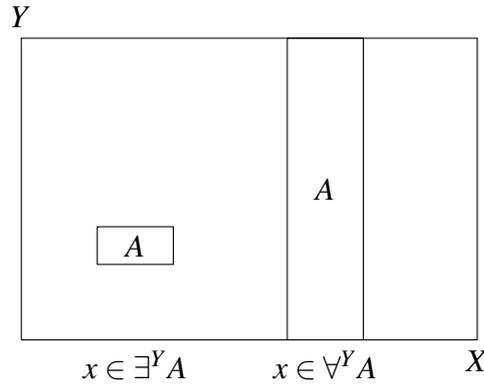


Figura 38 – Um conjunto A e exemplos de pontos na projeção e coprojeção.

Análogo para $\forall^Y \Gamma$. Em particular $\Sigma_1^1(X) \doteq \exists^X \mathcal{B}_{X \times X}$ será dita classe pontual dos **Analíticos**, denotada por Σ_1^1 . Os conjuntos $\Pi_1^1(X) = \neg \Sigma_1^1(X)$ serão ditos **coanalíticos**. Estas são de fato classes pontuais, uma vez que dada $f : X \rightarrow Y$ contínua e $A \subset Y$ analítico, basta mostrarmos que $f^{-1}(A)$ é analítico em X . Da hipótese, A é projeção de Boreliano $B \subset Y \times Y$ padrão, ou seja, $A = \exists^Y B$. Está bem definida $f^2 : X^2 \rightarrow Y^2$, $f^2(x, y) \doteq (f(x), f(y))$ função contínua² em cada coordenada, portanto contínua. Note que as projeções π_1, π_2 em cada coordenada de $X^2, Y^2 \xrightarrow{\pi_1, \pi_2} X, Y$ tem $\pi_i \circ f^2 = f \circ \pi_i$. Nesse caso

$$f^{-1}(A) = \pi_1(f^2)^{-1}(B) = \exists^X \underbrace{(f^2)^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(X \times X)}$$

Definimos mais uma vez Δ_1^1 como a intersecção destas classes pontuais.

Proposição 4.1.4. Para $Y \neq \emptyset$, $\forall^Y A = \neg(\exists^Y (X \times Y) \setminus A)$.

Demonstração. Considere a [Figura 38](#). Note que um ponto $x \in X$ é elemento de $\forall^Y A$ se, e somente se, todo ponto da linha vertical saindo dele ($\{x\} \times Y$) é elemento de A . Negando os dois lados desta dupla implicação, temos a proposição. \square

² não deve ser confundida com $f \circ f$.

Disso temos que se $X \setminus C$ é coanalítico, então $X \setminus C = \exists^X B$ pra algum Borel B então $C = \forall^X (X \times X) \setminus B$. Note que se $B \in \mathcal{B}(X)$, $B \times X$ é Borel de $X \times X$, logo

$$B = \exists^X B \times X = \forall^X B \times X$$

é a projeção e coprojeção de um Boreliano do produto. Temos então que $\mathcal{B}(X) \subset \Delta_1^1$. Pelo que temos até aqui podemos escrever o seguinte diagrama

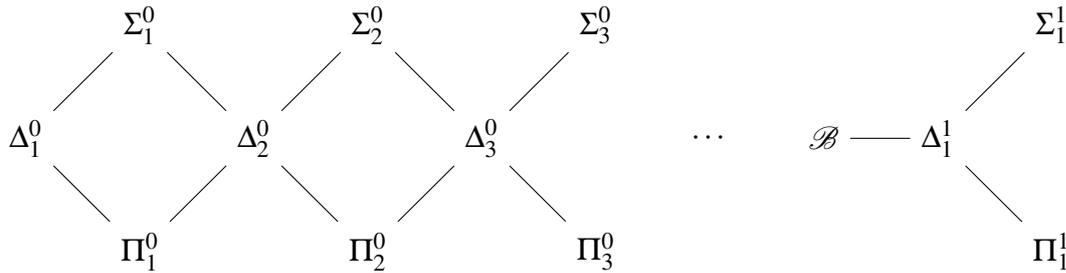


Figura 39 – Hierarquia de subconjuntos de poloneses.

Proposição 4.1.5 (4.1.1 em (SRIVASTAVA, 1998)). *Seja X polonês, são equivalentes:*

- (i) A é analítico.
- (ii) Existe Y polonês com $A = \exists^Y B$, $B \in \mathcal{B}_{X \times Y}$.
- (iii) Existe $f : \omega^\omega \rightarrow X$ contínua tal que $f(\mathcal{N}) = A$.
- (iv) Existe um fechado $C \subset X \times \omega^\omega$ tal que $A = \exists^{\omega^\omega} C$.
- (v) Para todo polonês incontável Y , existe um G_δ dado por $B \subset X \times Y$ cuja projeção é A .

Demonstração. Mostremos cada uma das implicações, na ordem.

[(i) \implies (ii)] Pela definição temos $Y = X$ polonês e $B \subset \mathcal{B}_{X \times Y}$ com $\exists^Y B = A$. Seja então (ii).

[(ii) \implies (iii)] Tome $\exists^Y B = A$ com $B \in \mathcal{B}_{X \times Y}$. Como B é Boreliano padrão, é imagem contínua de ω^ω (Corolário C.1.1). Tome $g : \omega^\omega \rightarrow B$, nesse caso $f = \pi_X \circ g$ é tal que (iii). Supomos então que (iii).

[(iii) \implies (iv)] Tome $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow A$ sobrejetora. Note que $C \doteq \text{graf}(f) \subset X \times \omega^\omega$ é o fechado procurado. Seja então (iv).

[(iv) \implies (v)] Todo polonês não enumerável tem cópia do espaço de Cantor (Teorema 4.2.2), mas o espaço de Cantor tem cópia G_δ do espaço de Baire (Proposição 1.3.4), logo Y tem um homeomorfo ao espaço ω^ω . Tome C fechado de $\mathcal{N} \times X \subset Y \times X$ com $\exists^{\mathcal{N}} C = A$. De fato $C = B$ é fechado de um G_δ , portanto um G_δ . Note que a projeção é A . Suponha que (v).

[(v) \implies (i)] Se X é contável então³ $\mathcal{B}_X = \mathcal{P}(X)$, o que torna a implicação [(v) \implies (i)] trivial para este caso. Se A não é enumerável, basta aplicar (v) para o caso $Y = X$, e teremos (i) para o caso particular $B \subset X \times X$ um G_δ .

□

O item (iv) em particular afirma que vale a igualdade de classes pontuais $\Sigma_1^1(X) = \exists^{\mathcal{N}} \Pi_1^0(X)$, ou seja, é sempre possível supor que a projeção de um **Boreliano** é, na verdade, a projeção de um **fechado**. Isso é extremamente útil pois substituímos um conjunto complicado por um conjunto mais simples.

4.2 Propriedades e estrutura

Abordamos o que vamos considerar, neste texto, como regularidade. A simplicidade destas famílias oferece boas **estruturas**, propriedades e construções. Nesta seção estamos interessados em definir boas **propriedades topológicas**, estabelecer que conjuntos regulares tem estas propriedades. O próximo passo é procurar por um processo de **regularização**, aproximando elementos mais complicadas por outros mais simples, na esperança de estender estas boas estruturas a estes elementos. Um exemplo desse processo se encontra na teoria de medida, que aproxima conjuntos mensuráveis por Borelianos, e aproxima funções mensuráveis por funções simples.

³ Unitários são Borelianos, logo qualquer subconjunto $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$ é de Borel.

4.2.1 Hipótese do contínuo

Apesar de já termos introduzido a hipótese do contínuo para conjuntos, vamos reintroduzir o conceito no contexto de classes pontuais. Isso formaliza afirmações do tipo ‘**fechados** (classe pontual) satisfazem a hipótese do contínuo’.

Definição 4.2.1 (Hipótese do Contínuo). A **hipótese do contínuo** ($[CH]$) em sua forma mais comum é a assertiva **o menor cardinal não enumerável é 2^ω** . Entretanto, vamos usar ao longo do texto uma noção restrita aos subconjuntos de um conjunto fixado X . Vamos dizer que a **hipótese do contínuo vale para uma classe pontual Γ** se

$$\begin{aligned} \text{CH}(\Gamma) \iff & \text{para qualquer } X \text{ objeto de Polish} \\ & \forall A \in \Gamma(X) \\ & \left(A \text{ não é enumerável} \implies \exists 2^\omega \overset{\text{Set}}{\hookrightarrow} A \right) \end{aligned}$$

Onde o conceito de não enumerabilidade tomado acima significa não haver injetora de $A \hookrightarrow \omega$.

Já sabemos que, sobre $\neg\text{CH}(\mathcal{P}(\omega^\omega))$, teremos que se o alvo de um jogador em $(\omega^{<\omega}, X)$ tem cardinalidade $\leq \aleph_1$, ele não terá estratégia vencedora. Este axioma tem também algumas consequências em teoria da medida.

Observação 4.2.1 (Somas transfinitas). Considere uma sequência de reais positivos $\{x_\xi\}_{\xi \in \aleph_1}$ cuja **soma**⁴, denotada por $\sum x_\xi$, converge para algum número finito. Defina $S_n \doteq \{\xi < \omega_1 : \frac{1}{n} < a_\xi\}$. Pela divergência da série constante, S_n deve ser finito. Nesse caso $\{\xi \in \omega_1 : x_\xi > 0\} = \bigcup S_n$ é enumerável, ou seja, se $\sum x_\xi$ converge então x_ξ é nula fora de um conjunto enumerável de ordinais $\xi \in \aleph_1$. Note que o supremo deste conjunto enumerável de ordinais é um ordinal $\alpha < \aleph_1$, logo o que temos é um ordinal α tal que $x_\xi = 0$ para $\xi > \alpha$.

Considere $\mu : \aleph_0 \rightarrow [0, 1]$ medida finita tal que $\mu(\{x\}) = 0$ para unitários, trivialmente $\mu \equiv 0$, pois todo subconjunto de \aleph_0 é reunião enumerável de unitários, todos de

⁴ Considere o direcionado $(\text{Fin}(\aleph_1), \subset)$ dos subconjuntos finitos de \aleph_1 . A **soma** da sequência é o limite, caso exista, do **net** $J \mapsto \sum_{\xi \in J} x_\xi$ das somas finitas.

medida nula. Segue um teorema, mostrado por Ulam, que mostra que isto vale também em \aleph_1 :

Teorema 4.2.1 ([AC] Ulam, 5.6 em (OXTOBY, 1971)). *Seja $\mu : \aleph_1 \rightarrow [0, 1]$ medida em $(\aleph_1, \mathcal{P} \aleph_1)$. Se a medida $\mu(\{a\}) = 0$ de unitários é nula então $\mu \equiv 0$.*

Demonstração. Tome, para cada ξ , função injetora $f_\xi : \downarrow \xi \rightarrow \omega$, $\theta \mapsto f_\xi(\theta)$. Defina $F_\theta^n \doteq \{\xi < \omega_1 : f_\xi(\theta) = n\}$ e considere a seguinte matriz, com dimensões $\omega \times \omega_1$, de subconjuntos de ω_1 :

$$\omega \begin{cases} F_0^0 & F_1^0 & \cdots & F_\theta^0 & \cdots \\ F_0^1 & F_1^1 & \cdots & F_\theta^1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ F_0^n & F_1^n & \cdots & F_\theta^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \end{cases}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\omega_1}$

Suponha que $\xi \in F_{\theta_1}^k \cap F_{\theta_2}^k$, então $\theta_1, \theta_2 < \xi$ e $f_\xi(\theta_1) = f_\xi(\theta_2) = k$, mas então $\theta_1 = \theta_2$. Como as linhas são disjuntas e μ é finita, para todo n existe $\bar{\theta}_n$ tal que se $\theta > \bar{\theta}_n$ temos $\mu(F_\theta^n) = 0$. Tome⁵ $\sup \bar{\theta}_n \doteq \alpha < \omega_1$, para todo $\alpha \leq \tilde{\theta}$ e $n \in \omega$ teremos que $\mu(F_\theta^n) = 0$. A reunião da $\tilde{\theta}$ -ésima coluna são os ξ com $\tilde{\theta} < \xi$, afinal $\xi \in F_{\tilde{\theta}}^{f_\xi(\tilde{\theta})}$, e, por outro lado, se $\xi \leq \tilde{\theta}$, f_ξ não está definido em θ . Esta observação resulta na igualdade

$$\bigcup_{n \in \omega} F_{\tilde{\theta}}^n =]\tilde{\theta}, \omega_1[= \aleph_1 \setminus]0, \tilde{\theta}]$$

Tomando a medida μ , finita, em ambos os membros ficamos⁶ com

$$0 = \mu(\aleph_1) - \underbrace{\mu \left(\bigsqcup_{\gamma \in [0, \tilde{\theta}]} \{\gamma\} \right)}_{\text{reunião enumerável}} = \mu(\aleph_1)$$

□

⁵ $\alpha < \omega_1$ pois cf $\omega_1 = \omega_1$.

⁶ lembrando que θ é ordinal enumerável.

Corolário 4.2.1 ([CH]). *Note que tomando $X = \mathbb{R}$ ou $X = [0, 1]$, temos $|X| = \aleph_1$, logo do Teorema 4.2.1 temos que o mensurável $(X, \mathcal{P}X)$ não tem medida finita não trivial tal que $\mu(\{x\}) = 0, x \in \mathbb{R}$.*

Sob $ZFC + CH$, o teorema de Ulam sugere que existe uma obstrução para a existência de medidas (não triviais) definidas em todo subconjunto da reta.

4.2.2 Propriedade perfeita

A propriedade perfeita é a versão topológica da hipótese do contínuo. Ao invés de conjecturar a existência de inclusão de conjunto $2^{\omega} \hookrightarrow A$, veremos logo adiante que a hipótese de perfeição é conjecturar que a inclusão do espaço de cantor é **contínua**. Segue a definição da propriedade:

Definição 4.2.2 (Conjuntos perfeitos e Propriedade Perfeita). Um subespaço $S \subset X$ topológico é dito **conjunto perfeito** de X se é fechado em X e não tem pontos isolados. Uma classe pontual de subconjuntos tem a **propriedade Perfeita** (PSP(Γ)) se cada um de seus elementos é enumerável ou admite um subconjunto perfeito.

Considere a operação $X \mapsto X'$, que seleciona apenas pontos não isolados, chamada **derivada de Cantor-Bendixson**. A intuição parece nos dizer que o operador é idempotente, mas isso não é verdade:

Observação 4.2.2. Os seguintes espaços são contra-exemplos para a idempotência da derivada de Cantor-Bendixsohn

1. O contra-exemplo mais simples seria o espaço de Sierpinsky:

$$(X, \tau) \doteq (\{0, 1\}, \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\})$$

Note que $X' = \{1\}$ e iterando mais uma vez chegamos em \emptyset .

2. O espaço das sequências convergentes⁷ $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ também é um contra-exemplo. Ao derivar $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ obtemos $\{\infty\}$ e, por fim, \emptyset .

⁷ Os naturais acrescidos do ponto ∞ , cujo sistema de vizinhança são os conjuntos $V_{\infty} \doteq \{\{n, n+1, n+2, \dots\} : n \in \mathbb{N}\}$.

Consideramos $(\mathcal{P}X, \supseteq)$ com a ordem inversa da usual, um reticulado completo, e a derivação $A \in \mathcal{P}X \mapsto A' \in \mathcal{P}X$ monótona crescente expansiva. Começando de X , podemos obter **órbita transfinita** \mathcal{O} associada a esta derivação. O **teorema de Hartog** nos fornece α que não pode ser incluído, injetivamente, em $\mathcal{P}X$. Nesse caso $\mathcal{O} : \alpha \rightarrow \mathcal{P}X$ órbita associada à operação $'$ não é injeção. Da monotonicidade de $'$ encontra-se ponto fixo⁸ $\mathcal{O}(\gamma)' = \mathcal{O}(\gamma)$, e podemos encontrar γ o menor $\gamma < \alpha$ em que isso acontece. Chama-se este γ de **rank de Cantor-Bendixsohn** e $\mathcal{O}(\gamma)'$ de **núcleo perfeito** de X .

No caso segundo enumerável, o teorema de Cantor-Bendixson nos fornece uma maneira mais simples de obter o núcleo perfeito de um espaço:

Proposição 4.2.1 (Cantor-Bendixson). *Seja X métrico separável, então existem A perfeito e B enumerável discreto tais que $X = A \sqcup B$. Além disso essa decomposição é única.*

Demonstração. Dados \mathcal{B} uma base e x isolado, temos que $\{x\} \in \mathcal{B}$. Logo se houvessem mais que enumeráveis isolados, X não seria segundo enumerável. Tome B conjunto de isolados, note que B é reunião de $\{x\}$ abertos. Defina $A = X \setminus B$ fechado de pontos não isolados. Suponha que exista outra partição $X = \tilde{A} \sqcup \tilde{B}$. Como \tilde{A} não pode ter pontos isolados, os pontos isolados de X são $\tilde{B} = B$, logo $\tilde{A} = X \setminus B = A$, o que mostra a unicidade. \square

Dentro do núcleo perfeito, que não tem pontos isolados, podemos construir um conjunto de Cantor, como segue:

Proposição 4.2.2 (Esquema de Cantor). *Seja X métrico completo denso em si mesmo. X contém uma cópia do espaço de Cantor.*

Demonstração. Seja X métrico completo denso em si mesmo. Tome $d \leq 1$ compatível. Vamos definir $f : 2^{<\omega} \rightarrow \tau \setminus \{\emptyset\}$ esquema de Cantor. Tome $f(\langle \rangle) \doteq X$. Suponha definida $f(s)$ aberto não vazio de diâmetro $\leq \frac{1}{3^{h(s)}}$. Temos então $x_0, x_1 \in f(s)$ distintos que distam menos de $\frac{1}{3^{h(s)}}$. Separe-os pelas bolas abertas $f(s \frown 0)$ e $f(s \frown 1)$ com fechos disjuntos com

⁸ implicitamente prova-se aqui o **teorema do ponto fixo de Zermelo** (MOSCHOVAKIS, 1994)

diâmetro $\leq \frac{1}{2^{h(s)+1}}$. Note que f é de Lusin e $f(s)$ é aberto não vazio para cada $s \in 2^{<\omega}$. Aplicando a [Proposição 3.2.1](#) temos $2^\omega \xrightarrow{\tilde{f}} X$ inclusão de subespaço. \square

Corolário 4.2.2 (Propriedade perfeita para poloneses). *Polonês X não enumerável tem cópia de Cantor.*

Demonstração. Podemos aplicar Cantor-Bendixson ao espaço X e obter polonês denso em si mesmo. Da [Proposição 4.2.2](#) temos o resultado. \square

Lembrando que segundo enumeráveis tem \mathfrak{c} Borelianos, logo tem menos que contínuo pontos pois $x \mapsto \{x\}$ é injetiva.

Teorema 4.2.2 ($\text{PSP}(\neg\tau)$, $\text{CH}(\neg\tau)$). *Fechados perfeitos têm uma cópia do espaço de Cantor.*

Demonstração. Note que fechado F de polonês é polonês. Se não é enumerável então $2^\omega \hookrightarrow F$ ([Corolário 4.2.2](#)). Então fechados de poloneses têm a propriedade perfeita e, Por Cantor-Schroeder, vale a hipótese do contínuo nestes conjuntos. \square

Lembrando que $\text{PSP}(A)$ é dizer que se A não é enumerável então fechado perfeito $F \subset A$, usando o teorema acima temos $\mathcal{C} \hookrightarrow F \hookrightarrow A$. Um conjunto que tem cópia de \mathcal{C} é perfeito. Com isso, $\text{PSP}(\Gamma)$ é equivalente a

$$\text{PSP}(\Gamma) \iff \left(\forall A \in \Gamma(X) \quad A \text{ não é enumerável} \implies \exists 2^\omega \xrightarrow{\text{Top}} A \right)$$

Precisamente uma versão topológica, e portanto mais forte, da hipótese do contínuo. Os subconjuntos perfeitos de espaços $[T]$ de ramos de árvores aparadas de altura ω são exatamente os ramos de suas subárvores próprias perfeitas. De fato [subárvores próprias perfeitas](#) tem cópia da árvore binária ([Item 1.2.2](#)) e portanto ([Corolário 1.3.2](#) e [Proposição 1.2.1](#)) seu espaço de ramos tem cópia do espaço de Cantor. Subárvores próprias não perfeitas tem ponto isolado α , que terá básico $\Sigma(t) = \{\alpha\}$, logo t não tem descendentes que se ramificam não trivialmente. Com isso temos que árvores perfeitas são exatamente aquelas que produzem, como espaço de ramos, subconjuntos perfeitos de $[T]$, justificando a nomenclatura. Uma outra consequência é:

Corolário 4.2.3 (PSP(G_δ), 5.1 de (OXTOBY, 1971)). *Seja G um conjunto G_δ de polonês, um polonês pelo Teorema 3.1.1. Se é não enumerável tem cópia de Cantor. Nesse caso temos também $\text{CH}(G_\delta)$. Da construção temos também que todo G_δ não enumerável da reta tem subespaço nunca-denso e de medida nula que pode ser mapeado, via mapa contínuo sobrejetivo, ao intervalo $[0, 1]$.*

4.2.3 Categorias topológicas e a propriedade de Baire

Um subconjunto de um espaço topológico $A \subset X$ é dito **nunca-denso** se $\text{int}\bar{A} = \emptyset$. Um conjunto é nunca-denso se, e somente se, o complementar de seu fecho é denso. Disso, temos que nunca-densos formam $\mathcal{P}X$ -ideal⁹. Temos também que todo nunca-denso está dentro de um fechado nunca-denso, nomeadamente, seu fecho. Se A é aberto, sua fronteira ∂A é fechado nunca-denso, visto que o fecho de seu complementar é denso. O complementar de um aberto denso é um fechado nunca-denso.

Chamemos $A \cap V$ de **forma local de A em V** . Um conjunto A é nunca-denso se, e somente se, sua forma local em uma π -base é vazia, ou seja, dado V aberto não vazio, existe $V' \subset V$ também não vazio tal que $A \cap V' = \emptyset$ ¹⁰. Interpretando V' como um ‘buraco’ de A , visto que está fora de A , ficamos com a intuição de que nunca-densos são ‘extremamente porosos’, ou **não são densos/grandes/gordos/espessos em lugar nenhum**¹¹.

Exemplo 4.2.1. Como subespaço da reta, qualquer cópia do espaço de Cantor é nunca densa.

Demonstração. Tome $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ cópia do espaço de Cantor. A cópia é um compacto, portanto fechado de \mathbb{R} por Heine-Borel. Se $\text{int}\bar{\mathcal{C}} = \text{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$, então existem x, y distintos elementos de $(a, b) \subset \mathcal{C}$ intervalo não degenerado incluído nesta cópia. Como \mathcal{C} é zero-dimensional e **T1**, podemos encontrar um *clopen* $x \in A$ e $y \in \mathcal{C} \setminus A$ que formará cisão relativa deste intervalo aberto. Mas aberto de aberto é aberto, então teremos cisão aberta de (a, b) , um absurdo pois intervalos são conexos, concluindo a demonstração.

□

Como existe uma função contínua sobrejetora $f : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$, temos em particular que imagem contínua de nunca-densos **não** é, necessariamente, nunca-densa. Apesar

⁹ intersecção de finitos abertos densos ainda é denso

¹⁰ De fato, se A é nunca-denso dado $U \neq \emptyset$ temos $V \doteq U \cap (X \setminus \bar{A})$ aberto não vazio com $A \cap V = \emptyset$. Se A não é nunca-denso existe um ponto interior $x \in U \subset \bar{A}$, e U é tal que não existe $\emptyset \neq V \subset U$ com $A \cap V = \emptyset$.

¹¹ A nomenclatura **denso em lugar nenhum** também é usada. Assim como *almost everywhere* se transforma em quase-sempre, a nomenclatura em português costuma favorecer a interpretação da reta como tempo, ao invés de espaço.

desse contra-exemplo, se $f : X \rightarrow Y$ é homeomorfismo, então A é nunca-denso se, e somente se, $f(A)$ é nunca-denso.

Uma reunião enumerável de nunca-densos é dito subespaço **magro**¹² de X . Um conjunto é dito **residual** ou **comagro** se é o complementar de um magro. Os magros $MGR(X)$ formam um σ -ideal. Dualmente, os residuais formam um σ -filtro. Um magro $M \in MGR(X)$, reunião enumerável de nunca-densos $M = \bigcup_{i \in \omega} N_i$, é subconjunto dos fechos $\bigcup_{i \in \omega} \overline{N_i}$ destes nunca-densos, ainda nunca-densos, ou seja, todo magro é subconjunto de um magro F_σ . Complementando, descobrimos que comagros são exatamente subconjuntos que contém um G_δ denso. Não magros são conhecidos como conjuntos **de segunda categoria**. Não magros **não** são necessariamente comagros. Num metrizável sem pontos isolados, unitários são nunca-densos fechados, logo enumeráveis são magros F_σ . Magreza não é preservada por funções contínuas, mas é propriedade topológica (Proposição B.4.1).

São equivalentes, sobre um espaço topológico X , as seguintes afirmações:

- (i) Todo aberto não vazio não é magro.
- (ii) Todo comagro é denso em X .
- (iii) A intersecção de enumeráveis densos abertos é densa.

Um espaço satisfazendo qualquer uma delas é dito **de Baire**. Comagros de espaços de Baire contém densos G_δ . **Do teorema da Categoria de Baire, completamente metrizáveis e localmente compactos Hausdorff são espaços de Baire** (Teorema B.4.1). Todo aberto de um espaço de Baire é de Baire.

Teorema 4.2.3 (Teorema da Categoria de Banach (16.1 em (OXTOBY, 1971))). *A reunião arbitrária de abertos magros é magra.*

¹² Os magros serão usados como conceito de **conjunto desprezível**, como os conjuntos de medida nula. Vamos optar então por **magro**, ao invés do equivalente **primeira categoria**, por essa relação mais íntima entre nomenclatura (sintaxe) e propriedades (semântica).

Os conceitos de σ -ideal e σ -filtro geram sobre $\mathcal{P}X$ uma noção de **Quase-igualdade**. Considerando, intuitivamente, elementos de um ideal como conjuntos **pequenos**, dizemos que dois conjuntos são \mathcal{I} -**quase-iguais**, denotando por $A \overset{\mathcal{I}}{\sim} B$ ou simplesmente $A \sim B$ se \mathcal{I} está entendido, se sua diferença simétrica é pequena, ou seja, se $A \Delta B \in \mathcal{I}$.

Proposição 4.2.3. *A relação $\overset{\mathcal{I}}{\sim}$ é equivalência sobre $\mathcal{P}X$. A equivalência é invariante por complementos : $A \sim B \implies X \setminus A \sim X \setminus B$. Se \mathcal{I} é σ -ideal e temos **enumeráveis** quase-igualdades $A_i \overset{\mathcal{I}}{\sim} B_i$, então*

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \Delta \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \subset \bigcup_{i \in I} A_i \Delta B_i \in \mathcal{I}$$

Logo, quase-igualdade sobre σ -ideal é invariante sobre reuniões enumeráveis.

Mesmo que as noções topológicas e de medida do que significa ser um conjunto pequeno não coincidam, muitos teoremas da medida têm uma versão topológica. Em medida aproximamos mensuráveis A da reta por uma intersecção de intervalos G , a aproximação G_δ do conjunto, quase-igual ao conjunto A no sentido que $m(A \Delta G) = 0$. Nesta seção vamos fazer um análogo topológico desta propriedade. Substituindo conjuntos de medida nula pelos magros de um espaço, temos um novo conceito de quase-igualdade.

Definição 4.2.3 (Propriedade de Baire). Seja X um espaço topológico. Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ satisfaz a **propriedade de Baire**, ou é conjunto **Baire-mensurável**, se ele é MGR(X)- **quase-aberto**, ou seja, A tem propriedade de Baire se existe aberto $V \in \tau$ tal que $A \Delta V \in \text{MGR}(X)$. Denotemos por $\text{BP}(X)$ subespaços de X com a propriedade de Baire.

A noção de quase-igualdade, sob qualquer σ -ideal, é invariante com relação a complementação e reunião enumerável. Note que se A é aberto, seu bordo ∂A é fechado e $X \setminus \overline{\partial A} = A \cup \text{int}(X \setminus A)$ é um denso. Logo ∂A é nunca-denso, um magro. Nesse caso $\overline{A} \setminus A = \partial A$ é magro. Seja F um fechado, pelas mesmas observações, $\partial(X \setminus F) = \partial F$ é magro. Nesse caso abertos são quase iguais aos seus fechos e fechados quase-iguais aos seus interiores.

Proposição 4.2.4 (Quase-abertos formam σ -álgebra). *A família $\text{BP}(X)$ é uma σ -álgebra.*

Demonstração. O vazio e o espaço inteiro tem a propriedade de Baire. Sejam enumeráveis $A_n \in \text{BP}(X)$, $V_n \in \tau$ tais que valem as quase igualdades $A_n \sim V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Nesse caso $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é quase-igual à reunião dos abertos V_n , um aberto. O complemento de um quase-aberto $A \in \text{BP}(X)$ é quase igual a um fechado, que é quase-igual ao seu interior, um aberto. Usando a transitividade de $\overset{\text{MGR}(X)}{\sim}$, temos que $X \setminus A \in \text{BP}(X)$. \square

Abertos são quase-iguais a si mesmos. Fechados são quase-iguais aos seus interiores. Magros são quase-iguais ao vazio e comagros são quase iguais a todo o espaço. Do que se mostrou acima, $\mathcal{B}(X) \subset \text{BP}(X)$. Note que esta inclusão, como no caso Lebesgue-mensurável, é estrita. A argumentação é a mesma: tomando $X = \mathbb{R}$, temos que $|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = \mathfrak{c}$, mas todo subconjunto de \mathcal{C} é magro, logo $|\text{BP}(\mathbb{R})| \geq 2^{\mathfrak{c}}$, então deve haver Baire-mensurável não Boreliano. Como um conjunto com a propriedade de Baire pode ser escrito como $A = M \Delta U$ com M magro e U aberto, temos que $\text{BP}(X)$ é a menor σ -álgebra que contém abertos e magros.

4.2.3.1 Localização

O conteúdo desta subseção guarda relacionamentos com a lógica que não serão abordados no texto. Entretanto, vamos tacitamente usar nomenclatura e introduzir informalmente alguns conceitos, evitando sair do assunto em desenvolvimento (aplicações em jogos). Para motivarmos este estudo, considere $A \doteq \{x, y\} \subset \mathbb{R}$ um subespaço de dois pontos distintos. Note que $\text{int}_{\mathbb{R}}(\text{cl}_{\mathbb{R}}(\{x\})) = \emptyset$, ou seja, um ponto é desprezível na reta. Entretanto, $\text{int}_A(\text{cl}_{\mathbb{R}}(\{x\})) = \{x\}$, ou seja, $\{x\}$ não é desprezível em A . Estamos interessados em saber quando podemos *subir* ou *descer* nunca-densidade, magreza e a propriedade de Baire. Por fim, vamos caracterizar uma espécie de fecho no sentido de Baire e, em seguida, caracterizar os conjuntos de Baire em termos deste fecho.

Definição 4.2.4 (Absolutividade em Espaços Topológicos). Uma propriedade sobre subconjuntos de espaços topológicos é dita **absoluta** entre um subespaço $S \subset X$ se um subconjunto $A \subset S$ tem tal propriedade no espaço induzido (S, τ_S) se, e somente se, A tem esta mesma propriedade como subconjunto do espaço (X, τ) .

A **forma local** de $A \subset X$ em S é $A \cap S$. A **forma local de A em uma família de subconjuntos** \mathcal{F} é a família de formas locais $\{A \cap F : F \in \mathcal{F}\}$ nestes subconjuntos e a **forma local da família \mathcal{F} em S** é a família $\{F \cap S : F \in \mathcal{F}\}$.

Exemplo 4.2.2. Nesta série de tópicos, vamos pontuar as instâncias mais importantes dos conceitos introduzidos na definição anterior:

- Exemplos importantes de propriedades absolutas são a compacidade e a conexidade. Se S é aberto, ‘ser aberto’ é propriedade absoluta.
- A forma local de uma π -base de X em um **aberto** S é π -base do espaço induzido S .
- A forma local do fecho de um conjunto em S é o fecho de sua forma local.
- Um conjunto A é nunca-denso se, e somente se, assume forma local vazia em uma π -base ¹³.

¹³ de fato, se A é nunca-denso dado $U \neq \emptyset$ temos $V \doteq U \cap (X \setminus \bar{A})$ aberto não vazio com $A \cap V = \emptyset$. Se A não é nunca-denso existe um ponto interior $x \in U \subset \bar{A}$, e U é tal que não existe $\emptyset \neq V \subset U$ com $A \cap V = \emptyset$.

Nunca-densidade requer um espaço ambiente, ou seja, dizer que um subconjunto é topologicamente pequeno requer dizer **onde** ele é pequeno. Interpretando A ser pequeno em X como ‘ X enxerga este subconjunto como pequeno’, queremos saber quão bem comportado ‘enxergar como pequeno’ é com relação a inclusões $A \subset S \hookrightarrow X$. Para um exemplo extremo, $\{x\}$ é pequeno para \mathbb{R} , mas não é pequeno em $\{x\} \subset \mathbb{R}$, munido de topologia induzida.

Proposição 4.2.5. *Pode-se levantar nunca-densidade. Pode-se localizar nunca-densidade em subconjuntos abertos:*

- (i) *Se $A \subset S$ é nunca-denso de $S \hookrightarrow X$, então podemos levantar a nunca-densidade de A para X .*
- (ii) *Se $A \subset S$ é magro em X e $S \hookrightarrow X$ é aberto de X , então A é magro de S .*

Demonstração. Mostremos cada afirmação:

- (i) Seja $A \subset S$ magro em S e $V \neq \emptyset$ aberto de X . Se $A \cap V$ é vazio, tome $\sigma(V) \doteq V$. Caso contrário, $V \cap S$ é aberto relativo. Deve haver aberto $\sigma(V)$ de X tal que $\emptyset \neq \sigma(V) \cap S \subset V \cap S$ aberto relativo disjunto de A . O aberto não vazio $\sigma(V) \subset V$ é disjunto de A . A família $\sigma(\tau \setminus \{\emptyset\})$ é π -base de X na qual A assume forma vazia.
- (ii) Se $A \subset S$ é nunca-denso em X e S é aberto, A assume forma local vazia $\{A \cap B = \emptyset : B \in \mathcal{B}\}$ em π -base \mathcal{B} de X . A forma local desta π -base em S é π -base de S onde A assume forma local vazia, logo A é magro em S .

□

Corolário 4.2.4 (Absolutividade). *Nunca-densidade é propriedade absoluta para subespaços que são subconjuntos abertos. O que dá que **magreza** é também propriedade relativa entre subconjunto aberto $S \subset X$ e espaços X . Disso temos que **quase-abertura** é propriedade absoluta para abertos.*

Corolário 4.2.5 (Complementar de conjuntos não Baire tem cópia de Cantor). *Note que subespaços S não Baire da reta \mathbb{R} terão, pela definição de **Categorias topológicas e a propriedade de Baire**, item (i), aberto local $U \cap S$ magro e está, portanto, contido em*

F_σ M magro em S . Nesse caso M é magro em \mathbb{R} e então temos um G_δ $(\mathbb{R} \setminus M) \cap U$ denso no aberto da reta U , que será portanto *não enumerável*. Como $U \cap S \subset M \implies \mathbb{R} \setminus M \subset (\mathbb{R} \setminus U) \cup (\mathbb{R} \setminus S)$, nesse caso

$$(\mathbb{R} \setminus M) \cap U \subset (\mathbb{R} \setminus S)$$

é subconjunto G_δ comagro de U incluído no complementar de S . Mas *vale a propriedade perfeita para G_δ 's* (Corolário 4.2.3), logo temos uma inclusão

$$\mathcal{C} \leftrightarrow (\mathbb{R} \setminus M) \cap U \subset \mathbb{R} \setminus S.$$

Corolário 4.2.6 (Conjuntos de Bernstein são de Baire). *Conjuntos de Bernstein $B \subset \mathbb{R}$ são espaços de Baire como subespaços. Não fossem, seu complementar teria cópia de Cantor, um fechado não enumerável, absurdo.*

Essa característica local da magreza nos permite definir as seguintes relativizações sobre abertos não vazios:

Definição 4.2.5 (Localização). Definimos então que A é **magro no aberto** U quando $A \cap U$ é magro em X (em U). Analogamente dizemos que é **comagro no aberto** U , ou é **subconjunto genérico** de U se $(X \setminus A) \cap U = U \setminus A$ é magro em X (em U). Notacionalmente, quando A vale genericamente em U vamos dizer que $U \Vdash A$ (U força A).

Valem as seguintes transitividades:

Proposição 4.2.6 (Transitividades). *Sejam $U, V \neq \emptyset$ abertos e P, Q subconjuntos quaisquer, então*

- Se $P \subset Q$ e $U \Vdash P$ então $U \Vdash Q$ (comagros formam σ -filtro).
- Analogamente, se $V \subset U$ e $U \Vdash P$, então P é comagro em U , o que dá que $U \setminus P$ é magro em U . Localizando em V , temos que $V \setminus P$ é magro e, portanto, $V \Vdash P$.

Um espaço de Baire tem a peculiaridade de ‘decidir’ consistentemente se um ‘predicado’ quase-aberto vale genericamente ou não.

Proposição 4.2.7 (Subconjuntos $\text{BP}(X)$ são "decididos"). *Seja $A \in \text{BP}(X)$ um quase-aberto, então*

$$A \text{ é magro} \quad \vee \quad \exists V \in \tau \setminus \{\emptyset\} (V \Vdash A)$$

*Se o espaço é Baire, então **exatamente** uma das condições acontece.*

Demonstração. Como A é quase aberto, deve haver aberto $U \sim A$ quase igual a A .

- Se U é vazio então A é magro em X , o que quer dizer que $X \Vdash X \setminus A$.
 - Suponha X de Baire. Da absolutividade da magreza, para todo $U \neq \emptyset$ temos $U \Vdash X \setminus A$. Se existe $V \neq \emptyset$ tal que $V \Vdash A \cap (X \setminus A) = A$, como a intersecção de comagros é comagra teríamos $V \Vdash \emptyset$, mas vazio só é comagro em magros, mas abertos não vazios de espaços de Baire não são magros.
- Caso $U \neq \emptyset$ então de fato $U \Vdash A$, visto que $U \setminus A \subset U \Delta A \in \text{MGR}(X)$ será magro.
 - Se X é Baire, note que $A \Delta U = M$ com M magro, mas então $U = A \Delta M$. Nesse caso se A fosse magro teríamos U magro, um absurdo.

□

Num espaço de Baire então podemos afirmar, **sobre conjuntos quase-abertos**:

- Se A não é magro então $\exists V \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ tal que $V \Vdash A$ ¹⁴.
- Se $\forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\} (U \not\Vdash A)$ então A é magro, o que dá que $X \Vdash X \setminus A$ ¹⁵.

Proposição 4.2.8. *Seja X espaço topológico,*

$$(i) \quad X \Vdash \bigcap_{n \in \omega} A_n \iff \forall n \in \omega \quad X \Vdash A_n.$$

¹⁴ não ser magro é ser gordo em algum lugar

¹⁵ não ser gordo em nenhum lugar é ser magro

(ii) Se X é espaço de Baire e A tem a propriedade de Baire e $U \neq \emptyset$,

$$\begin{aligned} X \Vdash X \setminus A &\iff \forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\} \\ &\quad \exists \sigma(U) \in \tau \setminus \{\emptyset\} \\ &\quad (\sigma(U) \subset U) \wedge (\sigma(U) \nVdash A) \end{aligned}$$

(iii) Se X é espaço de Baire e A_i têm propriedade de Baire, então

$$\begin{aligned} X \Vdash \bigcup A_i &\iff \forall U \in \tau \setminus \{\emptyset\} \\ &\quad \exists \sigma(U) \in \tau \setminus \{\emptyset\} \\ &\quad (\sigma(U) \subset U) \wedge (\exists n (\sigma(U) \Vdash A_n)) \end{aligned}$$

Demonstração. Mostremos as afirmações, uma a uma:

(i) A primeira afirmação se resume a dizer que comagros formam σ -filtro.

(ii) Fixados os elementos da hipótese:

- Seja $X \Vdash X \setminus A$, então A é magro em X . Seja U aberto não vazio. Da absolutividade da magreza, A é magro em U . O aberto $U \neq \emptyset$ é de Baire, e como A é magro em U , nenhum $\sigma(U)$ pode achar que A é comagro.
- Seja A quase-aberto tal que $\forall U \neq \emptyset$ de fato tenhamos $\sigma(U) \nVdash A$, ou seja, A não é gordo em nenhuma parte do espaço de Baire U , logo é magro, o que quer dizer que $U \Vdash X \setminus A$.

(iii) Fixados os elementos da hipótese:

- Seja $X \Vdash \bigcup A_i$, dado $U \neq \emptyset$ com aberto devemos ter então que $U \Vdash \bigcup A_i$. Como magros formam σ -ideal, não pode ser que todo A_i é magro em U , logo, existe um A_k não magro em U , que é de Baire, o que por sua vez implica na existência de $V \doteq \sigma(U) \subset U$ não vazio que força $V \Vdash A_k$, mostrando uma direção da equivalência.

- Para a outra direção, dada hipótese, suponha que $\bigcup A_i$ é magro, então todo A_i é magro quase aberto e é então magro em todos os abertos não vazios, o que gera absurdo.

□

Note que como abertos de espaços de Baire são Baire e podemos relativizar magreza e comagreza em abertos, poderíamos substituir os fragmentos $X \Vdash \dots$ por $\tilde{U} \Vdash \dots$ no teorema acima, ou seja, localizar o teorema em $\tilde{U} \in \tau \setminus \{\emptyset\}$. Apesar de nem todo conjunto ser aberto ou fechado, existem $\mathcal{P}X$ -operadores int, cl que ‘regularizam’ o conjunto, no sentido de nos fornecer aberto ou fechado especial associado ao conjunto. Dado $A \in \mathcal{P}X$ qualquer, gostaríamos de encontrar um $U(A) \in \text{BP}(X)$ com propriedade de Baire, associado ao quase-aberto A .

Proposição 4.2.9. *Dado $A \subset X$ subconjunto de X , espaço topológico. Considere:*

$$U(A) \doteq \sup\{V \in \tau \setminus \{\emptyset\} : V \Vdash A\} \doteq \sup \mathcal{C}_A$$

Temos que $U(A)$ é trivialmente aberto e $U(A) \Vdash A$.

Demonstração. Precisamos mostrar que A é comagro em $U(A)$. Sabemos que se $V \in \mathcal{C}_A$ então $V \setminus A$ é magro em $V \subset U(A)$, logo é magro em $U(A)$, nesse caso

$$U(A) \setminus A = \bigcup_{V \in \mathcal{C}_A} V \setminus A$$

Reunião de magros de $U(A)$, um magro de $U(A)$ ([Teorema da Categoria de Banach \(16.1 em \(OXTOBY, 1971\)\)](#)). □

Essa definição de fato pode ser usada para caracterizar a propriedade de Baire:

Proposição 4.2.10. *Dado $A \subset X$ como na [Proposição 4.2.9](#), $A \in \text{BP}(X)$ se, e somente se, $A \setminus U(A)$ é magro.*

Demonstração. Se A tem propriedade de Baire, é quase igual ao aberto $V \sim A$ e, em particular, $V \Vdash A$, logo $V \subset U(A) \implies A \setminus U(A) \subset A \setminus V \subset A \Delta V$, e este último é magro, logo $A \sim U(A)$. Por outro lado, se $A \setminus U(A)$ é magro, $A \Delta U(A)$ é magro ([Proposição 4.2.9](#)), logo $A \sim U(A)$ é quase-igual a um aberto. \square

MEDIDA E CATEGORIA

5.1 Introdução

Nesta seção vamos introduzir alguns resultados paralelos entre teoria da medida e categoria topológica. As analogias se dão no sentido da tabela abaixo. Os paralelos e conexões desenvolvidos aqui resultam de similaridades entre as fundamentações lógicas destas teorias. A maior parte desta seção foi inspirada em (OXTOBY, 1971).

Teoria	Categoria	Medida
Conjuntos pequenos / σ -ideal	Magros	Conjuntos de medida nula
Conjuntos grandes	Comagro	Medida total
Conjuntos não desprezíveis	Não-magro	Medida positiva
σ -Álgebra	Baire-mensurável	Mensurável

O que segue é um resultado, com análogo mensurável clássico, de regularização:

Proposição 5.1.1. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes,*

- *O subconjunto $A \subset X$ é Baire-mensurável.*
- *Existem G , um G_δ , e um magro M tais que $A = G \cup M$.*
- *Existem F , um F_σ , e um magro M tais que $A = F \setminus M$.*

Demonstração. Note que se conseguirmos escrever A nas formas (ii) ou (iii), então A é quase-igual a um Borel, logo é quase-aberto. Considere a diferença entre A e um aberto V como um magro $A \Delta V = M$. Este magro está contido num magro F_σ , $M \subset F$. Considere $G \doteq V \setminus F$, um G_δ , e $A \setminus G \doteq \tilde{M} = (A \setminus V) \cup (A \cap F)$ união de magros, logo um magro. Nesse caso $A = G \cup \tilde{M}$ é da forma (ii), logo (i) \iff (ii). Se $A \in \text{BP}(X)$, $X \setminus A$ também está e então $X \setminus A = G \cup \tilde{M}$, logo $A = (X \setminus G) \setminus \tilde{M}$, que está na forma (iii). \square

Um ponto isolado $\{x\} \in \tau$ não é nunca-denso. De fato $x \in \text{int}\{x\} \subset \text{int}\overline{\{x\}}$. Entretanto **subconjuntos enumeráveis** de metrizáveis sem pontos isolados são magros. **Enumeráveis** são também pequenos em \mathbb{R} no sentido de Lebesgue. Seguem dois resultados que passam pelas observações anteriores e por uma **regularização topológica** do subconjunto A em análise.

Corolário 5.1.1 (PSP para BP grandes). **Proposição 5.1.2** (PSP para \mathcal{L} grandes).
 Seja $A \in \text{BP}(X)$ **não magro** de polônês sem pontos isolados, então A tem cópia do espaço de Cantor. De fato, $A = G \cup M$ onde M é magro e G é G_δ .

Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ de medida finita positiva, A tem cópia do espaço de Cantor. De fato $m(A) = \sup_{A \supset F \text{ fechado}} m(F)$, deve haver então $F \subset A$ fechado de medida positiva.

- Fosse G enumerável, teríamos A magro, absurdo.
- Então G é G_δ não enumerável, logo A terá cópia do espaço de Cantor $\mathcal{C} \hookrightarrow G \subset A$ (Corolário 4.2.3).
- Fosse F enumerável, teríamos $m(F) = 0$, absurdo.
- Então F é fechado não enumerável, logo A terá cópia do espaço de Cantor $\mathcal{C} \hookrightarrow F \subset A$ (Teorema 4.2.2).

Uma outra demonstração de que $|A| = \mathfrak{c}$ (corolário de Proposição 5.1.2) é via Teorema de Steinhaus-Weil. Se A tem medida de Lebesgue positiva temos um intervalo não degenerado $I \subset A - A$, o que quer dizer que $|A - A| = \mathfrak{c}$. Considere $s : A \times A \rightarrow A - A$, $s(a, b) \doteq a - b$. Claramente s é sobrejetora. Sob o axioma da escolha, temos então que $|A| = |A| \times |A| = \mathfrak{c}$. O teorema de Steinhaus tem análogo topológico, que afirma que

se A tem propriedade de Baire e não é magro, então $A - A$ contém um intervalo não degenerado.

Definição 5.1.1 (Baire-mensurabilidade para funções). Uma função $f : X \rightarrow Y$ é dita **Baire-mensurável** se é **Measble**-morfismo entre os mensuráveis $(X, \mathcal{BP}(X))$ e $(Y, \mathcal{B}(Y))$.

Está claro que uma função é Baire-mensurável se, e somente se, a imagem inversa de abertos é quase-aberta. Temos a seguinte aplicação dos conceitos vistos é o seguinte análogo topológico do [teorema de Lusin](#) ([Teorema C.0.3](#)) de teoria de medida:

Teorema 5.1.1 (Lusin Topológico, 8.1 em ([OXTOBY, 1971](#))). *Seja Y segundo enumerável. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é Baire-mensurável se, e somente se, f é contínua em um comagro.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B} \doteq \{B_n : n \in \omega\}$ base enumerável de Y .

- Se as imagens inversas $f^{-1}(B_n)$ da base são quase-abertas por hipótese, então existem enumeráveis abertos $A_n \subset X$ com $M_n \doteq f^{-1}(B_n) \Delta A_n$ é magra. Mostremos que $f : X \setminus M \rightarrow Y$ é contínua. De fato,

$$f^{-1}(B_n) \cap (X \setminus M) = A_n \cap (X \setminus M)$$

Um aberto relativo, então acabamos.

- Se $f : X \setminus M \rightarrow Y$ é contínua no complementar do magro M , então a imagem inversa de básicos é aberto relativo. Seja B aberto básico, deve haver então A aberto de X com $f^{-1}(B) \cap (X \setminus M) = A \cap (X \setminus M)$. Nesse caso $f^{-1}(B) \Delta A \subset M$ é magro ¹.

□

Se o domínio X acima é espaço de Baire, f será então contínua em $G \subset X$ é comagro denso (G_δ) de X .

¹ magros são σ -ideal.

Corolário 5.1.2. *Seja $f : X \rightarrow Y$ Baire-mensurável injetora entre X , espaço polonês sem pontos isolados, e Y um segundo enumerável Hausdorff. Então $f(X)$ contém uma cópia do espaço de Cantor.*

Demonstração. Conseguimos encontrar restrição $f \upharpoonright G : G \rightarrow Y$ contínua em $G \subset X$, um G_δ comagro. Enumerável de polonês é magro, logo G não é enumerável. Nesse caso G tem cópia de Cantor $\mathcal{C} \hookrightarrow G$ e $f : G \rightarrow Y$ injetora. A composta destas injeções contínua $\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \varphi(\mathcal{C})$ é então bijeção contínua sobre a imagem. O domínio da bijeção é um compacto e sua imagem é Hausdorff, logo $\varphi(\mathcal{C}) \subset f(X)$ é cópia de Cantor. \square

5.2 Teorema de Kuratowski-Ulam

Continuando com o tema das analogias entre noções topológicas e de medida do que significa ser um conjunto pequeno, vamos estudar o comportamento das categorias de Baire sob produto topológico, culminando no teorema de Kuratowski-Ulam. Relembremos que a **seção vertical** de $A \subset X \times Y$ em $x \in X$ é definida por

$$A_x \doteq \{y \in Y : (x, y) \in A\} = \pi_Y((\{x\} \times Y) \cap A)$$

Analogamente se define a **seção horizontal** de A em y , denotada por A^y . Seja V um $X \times Y$ -aberto, $y \in V_x$, então $(x, y) \in V$, como V é aberto temos aberto básico $(x, y) \in A \times B \subset V$, mas então $\{x\} \times B \subset V$ e $y \in B \subset V_x$, o que nos diz que V_x é aberto.

Proposição 5.2.1. *Considere X e $Y \neq \emptyset$ espaços topológicos com Y segundo enumerável. Tome $A \subset X \times Y$, se A é $X \times Y$ -nunca-denso, então $\{x \in X : A_x \text{ é } Y\text{-nunca-denso}\}$ é comagro.*

Demonstração. Se $A \subset B$, $\{x \in X : A_x \text{ é } Y\text{-nunca-denso}\} \subset \{x \in X : B_x \text{ é } Y\text{-nunca-denso}\}$, pois $A_x \subset B_x$ e se este segundo é nunca-denso, será também o primeiro. Podemos então supor que A seja fechado, ou substituir A por \bar{A} , fechado $X \times Y$ -nunca-denso, sem perda de generalidade. Seja $D \doteq (X \times Y) \setminus A$ aberto denso, note que $D_x = Y \setminus A_x$, para cada x . Temos que A_x é nunca-denso se, e somente se, D_x contém denso aberto. Dada $B_n \neq \emptyset$ base enumerável de Y , $D_n \doteq D \cap (X \times B_n)$ é aberto não vazio e de fato $\pi_X(D_n)$ é denso em X , de fato dado aberto não vazio V de X , $V \times B_n$ é aberto não vazio, logo deve haver $(v, y) \in (V \times B_n) \cap D \neq \emptyset$, então $v \in D_n \cap V$. Considere $G \doteq \bigcap_{n \in \omega} \pi_X(D_n)$, intersecção enumerável de abertos² densos, um comagro. Dado $x \in G$, então x está na projeção de cada um dos $D \cap (X \times B_n)$, o que dá que, para qualquer n

$$(D \cap (X \times B_n))_x = D_x \cap B_n \neq \emptyset$$

O que significa que D_x é denso em Y . Nesse caso G é comagro e $G \subset \{x \in X : A_x \text{ é } X\text{-nunca-denso}\}$, o que dá que este segundo é comagro. \square

² π_X é aberta.

Considere um predicado $S \subset X$, onde dizemos $S(x)$ quando $x \in S$. Vamos sugestivamente dizer ‘**quase- sempre** $S(x)$ ’ quando S é comagro. Tomando X como espaço segundo enumerável temos, *mutantibus mutatis*, resultado análogo para seções verticais. Note que o teorema anterior se traduz em ‘ A é magro de $X \times Y$ se suas seções verticais são quase-sempre nunca-densas’. Se quase-sempre S e V é aberto não vazio de X , então quase-sempre S em V . Temos, como corolário direto, resultado análogo para magreza:

Corolário 5.2.1. *Nas mesmas condições do Proposição 5.2.1, suponha que tenhamos um $X \times Y$ -magro dado por $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde cada A_n é nunca-denso, então as seções de A são quase-sempre magras.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pelo Proposição 5.2.1 temos que $D_n \doteq \{x \in X : (A_n)_x \text{ é } Y\text{-nunca-denso}\}$ é comagro, mas então também será $D \doteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n$, pois comagros são σ -ideal. Note que $D \subset \{x \in X : A_x \text{ é } X\text{-nunca-denso}\}$, o que significa que as seções verticais de A são quase-sempre magras. \square

Uma consequência destas afirmativas é a seguinte propriedade produtiva da magreza. Note a similaridade com condição algébrica de domínio para anéis:

Corolário 5.2.2. *Considere X e Y espaços topológicos **segundo enumeráveis**. Então $A \times B$ é magro se, e somente se, $A \subset X$ é magro ou $B \subset Y$ é magro.*

Demonstração. Seja $A \times B$ magro. Suponha que B não é magro, note que

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B & \text{se } x \in A \\ \emptyset & \text{se } x \in X \setminus A \end{cases}$$

Logo $A \subset X \setminus G$ onde $G \subset X$ são os pontos de x onde $(A \times B)_x$ é nunca-denso, **mas G é comagro**, logo A é magro. Analogamente, supondo B não magro, **conclui-se** que A deve ser magro. Sem perda de generalidade, assuma A magro, então $X \setminus A$ contém intersecção de abertos densos $G \doteq \bigcap G_n$ de X . Considere $B = Y$, note que $(X \times Y) \setminus (A \times Y)$ contém $G \times Y$, uma intersecção de abertos densos $(\bigcap G_n \times Y)$ de $X \times Y$. Nesse caso, $A \times Y$ é magro, e portanto será um $A \times B \subset A \times Y$. Análogo para a outra direção. \square

Finalmente, acabamos com o teorema que queríamos, bastante remanescente do teorema de Fubini:

Teorema 5.2.1 (Kuratowski-Ulam (15.1 em (OXTOPY, 1971))). *Sejam X, Y espaços segundo enumeráveis e $A \in \text{BP}(X \times Y)$, então*

- (i) *As seções de A quase-sempre tem propriedade de Baire.*
- (ii) *O conjunto A é magro se, e somente se, suas seções são quase-sempre magras.*
- (iii) *O conjunto A é comagro se, e somente se, suas seções são quase-sempre comagras.*

Demonstração. Fixemos $V \sim A$ um aberto $\text{MGR}(X \times Y)$ -quase-igual a A , cuja diferença simétrica com A é $A \Delta V = M$.

- (i) Note que $(A \Delta V)_x = A_x \Delta V_x = M_x$, como M é magro, do [Corolário 5.2.1](#) temos que M_x é quase-sempre magro, mas então A_x é quase-sempre quase-igual ao aberto V_x .
- (ii) A direção $[\implies]$ é dada por [Corolário 5.2.1](#). Seja A não magro, então V não é magro. O aberto V é a reunião dos abertos básicos contidos nele, logo deve haver um básico $V_1 \times V_2 \subset V$ não magro ([Teorema 4.2.3](#)). De [Corolário 5.2.2](#), $V_1 \subset V^y$, para $y \in V_2$, e $V_2 \subset V_x$, para $x \in V_1$, não são magros. Pelo item anterior, $A_x \sim V_x$ em comagro G . No não magro³ $x \in G \cap V_1$ temos que V_x tem subconjunto não magro $V_2 = (V_1 \times V_2)_x$, logo $V_x \sim A_x$ não é magro em não magro $G \cap V_1$. *Mutantis mutatis* temos resultado análogo para seções verticais. Nesse caso, o complementar do conjunto onde a seção (vertical/horizontal) de A é magra não é magro.
- (iii) Temos que A é comagro se, e somente se, seu complementar $\sim A \doteq (X \times Y) \setminus A$ é magro. Isto ocorre se, e somente se, $\sim A$ tem seções $(\sim A)_x$ quase-sempre magras. Note que $(\sim A)_x = Y \setminus (A_x)$, logo se $(\sim A)_x$ é quase-sempre magro, A_x é quase-sempre comagro.

□

³ G é comagro no aberto $V_1 \neq \emptyset$, que não é magro por hipótese. Se $G \cap V_1$ é magro, $V_1 = (G \cap V_1) \cup (V_1 \setminus G)$ seria magro.

5.3 Aplicações a grupos topológicos

Nesta sessão vamos aplicar alguns teoremas a grupos topológicos, bem como expor mais alguns paralelos com medida. O teorema a seguir pode ser demonstrado em grupos topológicos localmente compactos munidos de medidas de Haar, demonstrado em (WEIL, 1938). Vamos seguir (STROMBERG, 1972) para o caso particular $(\mathbb{R}, +)$ munido da medida de Lebesgue:

Teorema 5.3.1 (Teorema de Steinhaus-Weil). *Se E é mensurável e tem medida positiva, $E - E \doteq \{x - y : (x, y) \in E^2\}$ contém um intervalo $V \subset E - E$ não degenerado em torno de 0.*

Demonstração. Se E tem medida infinita, vamos reduzir isso ao caso E' subconjunto compacto mensurável de medida finita. Não haverá perda de generalidade pois $E' - E' \subset E - E$. Como

$$m(E) = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{ compacto}}} m(K)$$

Nos reduzimos então ao caso onde E é um compacto. Seja U aberto com $E \subset U$ e $m(U) - m(E) < \frac{1}{2}m(U)$, ou seja, $m(U) < 2m(E)$. Note que pela continuidade de $\cdot + k$, para cada $0 + k = k \in E \subset U$, devemos ter intervalo aberto U_k em torno de 0 tal que $U_k + k \subset U$. Considere $V_k \doteq 2^{-1}U_k$, vizinhanças abertas de 0. Note que $V_k + V_k \subset U_k$, pois qualquer elemento deste conjunto é a média entre dois elementos do intervalo U_k . Como $0 \in V_k$, $k \in V_k + k$ e portanto $\{V_k + k\}_{k \in E}$ é cobertura aberta de E . Pela compacidade de E , temos subcobertura finita $\{V_{k_i} + k_i\}_{i \leq n}$. Nesse caso, está bem definido $V \doteq \bigcap_{i \leq n} V_{k_i}$, vizinhança de 0.

Mostremos que $V + E \subset U$. Seja $v \in V$, como $k \in V_{k_j} + k_j$, para algum $j \leq n$, então deve haver $v_j \in V_{k_j}$ com $k = v_j + k_j$. Como também temos $v \in V_{k_j}$, note que

$$k + v = k_j + \underbrace{v_j + v}_{\in V_{k_j} + V_{k_j}} \in k_j + U_{k_j} \subset U$$

Seja $v \in V$ qualquer, suponha que $(E + v) \cap E = \emptyset$. Da invariância por translação de m teríamos:

$$\begin{aligned}
m(U) &\geq m\left(\underbrace{(E+v)}_{\subset U} \sqcup E\right) \\
&= m(E+v) + m(E) \\
&= 2m(E)
\end{aligned}$$

mas isso seria **um absurdo**. Nesse caso existe $k_2 = k_1 + v \in (E+v) \cap E$, então $v = k_2 - k_1 \in E - E$. Nesse caso $V \subset E - E$. \square

No que segue, vamos estabelecer o análogo topológico deste resultado. Dado $A \subset G$ subconjunto de um espaço topológico, o conjunto $U(A) \subset G$ usado no teorema seguinte aparece na [Proposição 4.2.9](#). Note que $x \in G \mapsto g \cdot x$ é homeomorfismo com inversa contínua $x \mapsto g^{-1}x$. Pela [Proposição B.4.1](#), temos que $A \subset G$ é magro se, e somente se, $g \cdot A$ é magro.

Lema 5.3.1. *Seja G um grupo topológico, $A \subset G$ um subconjunto e $g \in G$ elemento qualquer. Valem as seguintes afirmações:*

$$(i) \quad U(g \cdot A) = g \cdot U(A).$$

$$(ii) \quad U(A^{-1}) = U(A)^{-1}.$$

Demonstração. Mostremos cada um dos itens.

- (i) Seja V um aberto tal que $V \setminus A$ é magro, então $(g \cdot V) \setminus (g \cdot A) = g \cdot (V \setminus A)$ é magro, ou seja, $V \in \mathcal{C}_A$ se, e somente se, $g \cdot V \in \mathcal{C}_{g \cdot A}$, logo:

$$U(g \cdot A) = \bigcup_{V \in \mathcal{C}_A} g \cdot V = g \cdot U(A).$$

- (ii) Analogamente ao item anterior, temos que $x \mapsto x^{-1}$ é homeomorfismo, cuja inversa é a própria inversa. A mesma sequência de observações conclui que $U(A^{-1}) = U(A)^{-1}$.

□

Seguimos agora para o análogo topológico do [Teorema de Steinhaus-Weil](#). Fixemos $V, U \subset G$ abertos de um grupo topológico. Se um deles é vazio, $U \cdot V = \emptyset$ é um aberto. Para o outro caso, se $U \neq \emptyset$ temos de novo que $U \cdot V = \bigcup_{u \in U} (u \cdot V)$ é aberto. Vamos seguir ([MELLARAY](#),):

Teorema 5.3.2 (Pettis). *Seja G grupo topológico de Baire. Sejam $A, B \subset G$ subconjuntos quaisquer, então*

$$U(A) \cdot U(B) \subset A \cdot B$$

Demonstração. De fato, suponha que temos $a \in U(A)$ e $b \in U(B)$ com

$$g = a \cdot b \in U(A) \cdot U(B)$$

Nesse caso, devemos ter que

$$g \cdot b^{-1} = a \in U(A) \cap g \cdot [U(B)]^{-1} \stackrel{\text{Lema 5.3.1}}{=} U(A) \cap U(g \cdot B^{-1})$$

E vale a recíproca. Em particular, note que se $g \in U(A) \cdot U(B) \neq \emptyset$ então $U(A) \cap U(g \cdot B^{-1}) \doteq V$ é aberto não vazio de espaço de Baire, portanto um espaço de Baire não vazio. Note que, usando a [Proposição 4.2.6](#) e o fato de comagros serem σ -ideal, temos

$$\frac{\begin{array}{cc} A \Vdash U(A) & V \subset U(A) \\ g \cdot B^{-1} \Vdash U(g \cdot B^{-1}) & V \subset U(g \cdot B^{-1}) \end{array}}{\quad} \quad \left| \begin{array}{c} A \Vdash V \\ g \cdot B^{-1} \Vdash V \end{array} \right. \\ \hline A \cap (g \cdot B^{-1}) \Vdash V$$

Nesse caso o comagro $A \cap (g \cdot B^{-1}) \neq \emptyset$ deve ter um elemento $a = gb^{-1}$, com $a \in A$ e $b \in B$, logo $g \in A \cdot B$. □

Corolário 5.3.1 (Steinhaus topológico). *Se $A \in \text{BP}(G)$ não é magro, então $A \cdot A^{-1}$ contém vizinhança do elemento neutro $e \in G$.*

Demonstração. Se $A \in \text{BP}(G)$ não é magro, então $U(A)$ é aberto não magro de G , em particular não vazio. Temos então uma vizinhança $e \in U(A) \cdot U(A^{-1}) \subset A \cdot A^{-1}$ ao redor do elemento neutro, como queríamos. □

Corolário 5.3.2. *Todo subgrupo Baire-mensurável próprio $G \leq (\mathbb{R}, +)$ de \mathbb{R} é magro. Analogamente, todo subgrupo próprio $G \leq (\mathbb{R}, +)$ Lebesgue-mensurável tem medida nula.*

Demonstração. Não fosse, teríamos intervalo não degenerado $I \subset G - G$, o que daria que $G = \mathbb{R}$, um absurdo. \square

No corolário que segue, usaremos sem demonstração o fato de que $f : G \rightarrow H$ é contínua se, e somente se, f é contínua em uma vizinhança da identidade $e \in G$. Denotemos por $m_G : G \times G \rightarrow G$ a função contínua de multiplicação $m_G(a, b) \doteq a \cdot b$ do grupo (G, \cdot) . Um morfismo $f : G \rightarrow H$ entre grupos topológicos é um morfismo de grupos contínuo.

Corolário 5.3.3 (Teorema de Banach). *Seja G de Baire e $f : G \rightarrow H$ morfismo entre grupos topológicos Baire mensurável. Se H é segundo enumerável, então f é contínua.*

Demonstração. Pelo Teorema 5.1.1 temos que $f : G \rightarrow H$ é contínua em um comagro $A \subset G$.

- Considere $A, A^{-1}, A \cdot A^{-1} \subset G$ com topologia de subespaço. Mostremos que $f|_{A \cdot A^{-1}}$ é contínua:
 - Seja $a^{-1} \in A^{-1}$ e vizinhança $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1} \in V^{-1}$, para algum aberto $V \subset H$. Como f é contínua em $a \in A$, então dada vizinhança $f(a) \in V$ temos vizinhança relativa $a \in U \cap A$ com $f(U \cap A) \subset V$, o que nos fornece vizinhança $a^{-1} \in U^{-1} \cap A^{-1}$ relativa de A^{-1} com $f(U^{-1} \cap A^{-1}) \subset V^{-1}$.
 - Está bem definida $(f, f) : A \times A^{-1} \rightarrow H \times H$, $(f, f)(a, b) \doteq (f(a), f(b))$ uma função contínua.
 - Seja $a \cdot b \in A \cdot A^{-1} \mapsto f(a \cdot b) \in H$, fixemos V vizinhança do ponto $f(a \cdot b)$. Queremos obter uma vizinhança W de $a \cdot b$ com $f(W) \subset V$.
 - Pela continuidade de m_H obtemos vizinhança $H_1 \times H_2$ de $(f(a), f(b))$ com $m_H(H_1 \times H_2) \subset V$.
 - Pela continuidade de (f, f) obtemos vizinhança $G_1 \times G_2$ de (a, b) com $m_H(G_1 \times G_2) \subset H_1 \times H_2$.

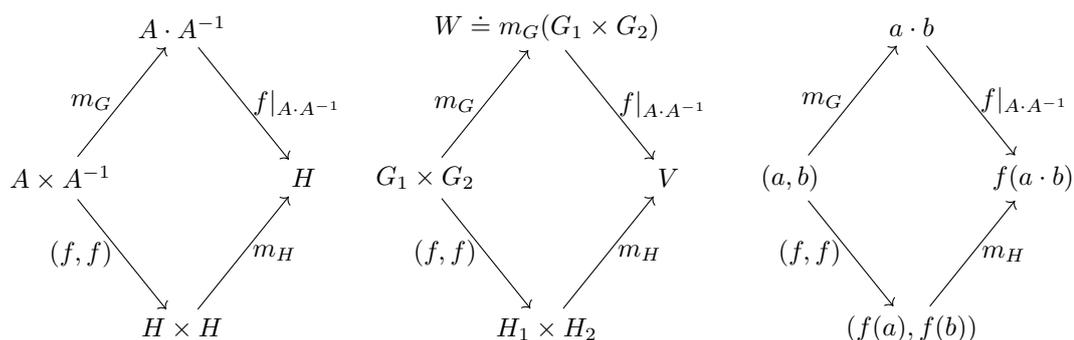


Figura 40 – Diagrama comutativo com os espaços, vizinhanças e pontos envolvidos.

- Considere $W \doteq m_G(G_1 \times G_2)$. Note que $a \cdot b \in W$. Pela condição de f ser homomorfismo, temos que $m_H \circ (f, f) = f \circ m_G$ o que dá $f(W) \subset V$.
- Resta mostrar que W é aberto. Note que $G_1 = U_1 \cap A$ e $G_2 = U_2 \cap A^{-1}$, logo $m_G(G_1 \times G_2) = (A \cdot A^{-1}) \cap (U_1 \cdot_G U_2)$, e como já foi discutido $(U_1 \cdot_G U_2)$ é aberto, logo W é aberto relativo de $A \cdot A^{-1}$, o que termina de demonstrar a afirmação.
- Pelo [Corolário 5.3.1](#) temos vizinhança $e \in V \subset A \cdot A^{-1}$, onde f é contínua. Temos então continuidade de $f : G \rightarrow H$.

□

5.4 Irregularidade na medida, na topologia e na combinatória

Nesta seção queremos mostrar, usando o axioma da escolha, que as classes dos conjuntos perfeitos, Lebesgue-mensuráveis e Baire-mensuráveis não colapsam uma sobre a outra. Usando \mathbb{R} como espaço, queremos mostrar a não trivialidade do seguinte diagrama de Venn:

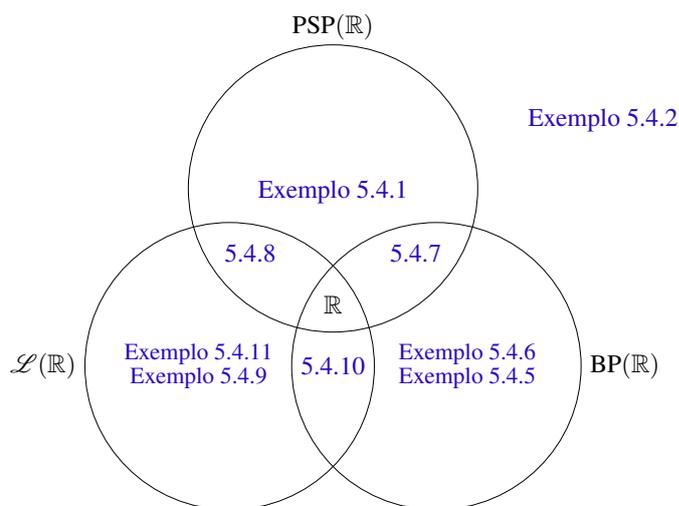


Figura 41 – Usando o axioma da escolha, as classes dos conjuntos perfeitos, Lebesgue-mensuráveis e Baire-mensuráveis não colapsam uma sobre a outra.

5.4.1 Conjuntos de Vitali

Vamos começar com os conjuntos de Vitali, conhecidos por sua não-mensurabilidade. Mostremos um lema auxiliar:

Lema 5.4.1. *Seja G subgrupo da reta, então ele é discreto ou denso em \mathbb{R} .*

Demonstração. A condição classificatória é o isolamento ou acumulação sobre a identidade:

- Suponha que 0 é isolado. Nesse caso G tem menor elemento positivo $a \in G^+$ com $a > 0$. De fato $G = \mathbb{Z}a$ é discreto. Tome $b \in G$ positivo. Seja n o maior natural

tal que $b - na \geq 0$. Mostremos que $b - na = 0$. Pela definição de n temos que $b - na \in [0, a)$, pois

- fosse $b - na \geq a$, então $b - (n + 1)a \geq 0$, contrariando a maximalidade de n .
 - Por outro lado, se $b - na > 0$, teríamos elemento $b - na \in G$ que contraria a minimalidade de a , um absurdo.
 - Resta então a conclusão que $b - na = 0$.
- Se 0 tem acumulação de $a_n \in G^+ \rightarrow 0$, então $\mathbb{Z}a_n \subset G$. Considere intervalo aberto $(a, b) \neq \emptyset$. Dado $a_n < b - a$, teremos $\mathbb{Z}a_n \cap (a, b) \neq \emptyset$.

□

Considere $G \leq \mathbb{R}$ subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$. Sabemos que isso nos fornece partição \mathbb{R}/G , cuja projeção natural $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/G$ é dada por $\pi(x) \doteq \{y \in \mathbb{R} : x - y \in G\}$. Nenhum dos elementos desta partição é vazio, visto que $x \in \pi(x)$. Chamamos de **seletor** desta partição, ou do subgrupo G , a imagem $f(\mathbb{R}/G)$ de uma função escolha $f : \mathbb{R}/G \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja, $f(x) \in x$.

Definição 5.4.1 (Conjuntos de Vitali). Conjuntos de Vitali são seletores $X \subset \mathbb{R}$ de subgrupo não discreto de \mathbb{R} .

Dado um seletor X de \mathbb{R}/G , está claro que $\mathbb{R} = \bigsqcup_{g \in G} (X + g)$. Pela construção, se X é seletor então $X - X \subset (\mathbb{R} \setminus G) \cup \{0\}$.

Teorema 5.4.1 (Conjuntos de Vitali (KHARAZISHVILI, 2004)). *Considere um subgrupo enumerável $G \leq \mathbb{R}$ não discreto. Fixemos A conjunto [não magro / de medida positiva] qualquer. Seja $V \subset A$ um conjunto que tem exatamente um representante \mathbb{R}/G para cada $a \in A$. O conjunto V não [tem a propriedade de Baire / é mensurável].*

Demonstração. Tome X seletor de G . Note que

$$A = \bigsqcup_{g \in G} (X + g) \cap A$$

Como G é enumerável, note que se X é [magro, tem medida nula], então todas as suas translações $X + g$ [serão magras (Proposição B.4.1), terão medida nula (invariância por

translação de m]). Nesse caso A [seria magro, teria medida nula], um absurdo. Suponhamos então que X [tem propriedade de Baire / é Lebesgue-mensurável]. Pelos teoremas de Steinhaus (teoremas [Corolário 5.3.1](#) e [Teorema 5.3.1](#)) teríamos vizinhança básica $0 \in V \subset X - X \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, um absurdo. \square

Observação 5.4.1. A mesma construção funcionaria com relação a um subgrupo de $([0, 1) = \mathbb{S}^1, \oplus)$ com medida induzida e soma $x \oplus y \doteq x + y \pmod{1}$ ([FOLLAND, 2013](#)).

- Vamos livremente chamar conjuntos deste tipo de **conjuntos de Vitali**. Se não fizermos menção ao grupo G , estaremos assumindo o usual $G = \mathbb{Q}$.
- O axioma da escolha é equivalente à afirmação de que todo espaço vetorial tem base ([BLASS, 1984](#)). Uma base do \mathbb{Q} -espaço vetorial \mathbb{R} é chamada de **Base de Hamel**. Seja B uma base de Hamel e $b \in B$. Defina $V \doteq \text{span}(\mathbb{R} \setminus \{b\})$ e considere $G \doteq \text{span}(\{b\})$ subgrupo de \mathbb{R} . Pela independência linear de B , se $x, y \in V$ são tais que $x - y \in \mathbb{Q}b$ então $x = y$. Disso temos que V é seletor do grupo $\mathbb{Q}b$, denso e enumerável.

Na proposição que segue queremos construir um conjunto de Vitali com propriedade perfeita. A questão que se levanta é a da possibilidade de se encontrar uma cópia de Cantor cujos elementos, dois a dois, não diferem por um racional. Considere $R \subset X^n$ uma relação. Um conjunto k é dito R -independente quando toda n -combinação de pontos distintos $(x_1, \dots, x_n) \in k^n$ não é R -relacionada, ou seja, $(x_1, \dots, x_n) \notin R$. Na [Seção B.5](#), mostramos que se uma relação $R \subset X^n$ é magra, quase-todo compacto é R -independente, no sentido de categoria. Intuitivamente: em um grafo muito esparsos, conjuntos de vértices isolados entre si são numerosos, ou um conjunto de vetores com poucas relações de dependência linear tem muitos subconjuntos linearmente independentes. Podemos garantir que estes compactos são grandes⁴ o suficiente para admitir cópia do conjunto de Cantor. Estas observações culminam na proposição abaixo, onde encontramos \mathcal{C} uma cópia do espaço de Cantor cujos pontos, dois a dois, estão em \mathbb{Q} -classes distintas, ou seja, para quaisquer $x, y \in \mathcal{C}$ temos $x - y \notin \mathbb{Q}$.

⁴ Não enumeráveis.

Proposição 5.4.1 (Vitali com propriedade perfeita). *Considere $G \subset \mathbb{R}$ um G_δ de \mathbb{R} sem pontos isolados. Existe $V \subset G$ conjunto que contém **exatamente** um representante de cada \mathbb{Q} -classe de G . Adicionalmente, podemos tomar V com uma cópia $\mathcal{C} \subset V$ do espaço de Cantor.*

Demonstração. Munido de topologia induzida G é um espaço polonês sem pontos isolados. Considere

$$R \doteq \{(x, y) \in G^2 : x - y \in \mathbb{Q}\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{(x, y) \in G^2 : x - y = q\}$$

uma relação magra⁵ de G^2 . Pelo [Corolário B.5.1](#) deve haver uma cópia R -independente do espaço de Cantor $\mathcal{C} \subset G$. Nesse caso \mathcal{C} pode ser estendido para um \mathbb{Q} -seletor $\mathcal{C} \subset V$. O espaço V tem cópia de Cantor, logo tem propriedade perfeita. \square

Usando o mesmo processo ([Corolário B.5.1](#)) com as relações de \mathbb{Q} -dependência linear, todas magras, encontra-se uma base de Hamel com cópia do espaço de Cantor. Em outras palavras, é possível encontrar uma cópia do espaço de Cantor \mathcal{C} tal que qualquer combinação finita $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{C}$ é \mathbb{Q} -linearmente independente.

Exemplo 5.4.1. *Usando $G \doteq \mathbb{R}$ na proposição anterior obtemos $V \subset \mathbb{R}$ conjunto de Vitali com propriedade perfeita, sem propriedade de Baire e não mensurável.*

⁵ Note que $F_q \doteq \{(x, y) \in G^2 : x - y = q\}$ é fechado. Suponha que F_q tenha ponto interior $(x, y) \in F_q \subset G^2$. Note que devemos ter vizinhanças $x \in A \subset G$ e $y \in B \subset G$ tais que para todo $a \in A$ e $b \in B$ temos $b - a = q$. Disso temos que $A = \{x\}$ e $B = \{y\}$. Mas havíamos suposto G sem pontos isolados.

Mostremos um resultado de teoria da medida e seu análogo topológico.

Proposição 5.4.2 ([AC]). *Todo Lebesgue-mensurável $A \subset \mathbb{R}$ com medida positiva tem subconjunto não mensurável.*

Demonstração. Seja V de Vitali. Se todo subconjunto de A é mensurável então

$$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A \cap (V + q)$$

reunião enumerável de mensuráveis. Como $m(A) > 0$ deve haver $c \in \mathbb{Q}$ com $m(A \cap (V + c)) > 0$. Pelo Teorema 5.3.1 existe intervalo não degenerado

$$0 \in I \subset [A \cap (V + c)] - [A \cap (V + c)] \\ \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$$

Um absurdo. \square

Proposição 5.4.3 ([AC]). *Todo $A \subset \mathbb{R}$ com propriedade de Baire não magro tem subconjunto que não tem propriedade de Baire.*

Demonstração. Seja V de Vitali. Se todo subconjunto de A tem propriedade de Baire então

$$A = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A \cap (V + q)$$

Como A não é magro deve haver $c \in \mathbb{Q}$ com $A \cap (V + c)$ não magro com propriedade de Baire. Pelo Corolário 5.3.1 existe intervalo não degenerado

$$0 \in I \subset [A \cap (V + c)] - [A \cap (V + c)] \\ \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$$

Um absurdo. \square

5.4.2 Conjuntos de Bernstein

Já construímos conjuntos de Bernstein de ω^ω e do conjunto de Cantor. Nesta seção vamos construir um conjunto de Bernstein em um espaço X polonês sem pontos isolados. Note que X tem **no máximo** c fechados, pois é segundo enumerável. Seja $B(x, \frac{\rho}{2})$ bola de diâmetro positivo ρ , em particular temos que $a \in [\rho - \varepsilon, \rho) \mapsto B[x, a]$ é mapa injetivo. Note que $B[x, a]$ é polonês sem ponto isolado, **então** têm cópia do espaço Cantor e portanto não é enumerável. Temos então **no mínimo** c fechados não enumeráveis.

Aplicando o mesmo método de demonstração, vamos construir dois conjuntos bastante irregulares, um no sentido topológico e outro no sentido combinatório. Considere o conjunto de subconjuntos infinitos de \mathbb{N} , denotado por $[\mathbb{N}]^\infty$. Chamemos uma bipartição⁶ $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} = [\mathbb{N}]^\infty$ de **Bernstein** se $\forall H \in [\mathbb{N}]^\infty$ $[H]^\infty \not\subset \mathcal{A}$ e $[H]^\infty \not\subset \mathcal{B}$ ⁷.

O espaço X tem \mathfrak{c} fechados não enumeráveis. Fechados não enumeráveis de poloneses tem tamanho \mathfrak{c} .

O conjunto $[\mathbb{N}]^\infty$ tem \mathfrak{c} elementos. Todo subconjunto $H \in [\mathbb{N}]^\infty$ tem \mathfrak{c} subconjuntos infinitos.

Teorema 5.4.2. *Espaços X poloneses sem pontos isolados têm subconjunto de Bernstein.*

Teorema 5.4.3. *Existe bipartição de Bernstein de $[\mathbb{N}]^\infty$.*

Demonstração. Tome enumeração $\{F_\xi : \xi \in \mathfrak{c}\}$ dos fechados não enumeráveis de X . Vamos definir $A = \{a_\alpha : \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, tome $a_\alpha, b_\alpha \in F_\alpha \setminus \bigcup_{\gamma < \alpha} \{a_\gamma, b_\gamma\}$ distintos. O conjunto A é de Bernstein. □

Demonstração. Tome enumeração $[\mathbb{N}]^\infty = \{H_\xi : \xi \in \mathfrak{c}\}$ dos subconjuntos infinitos de \mathbb{N} . Vamos definir $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, tome $A_\alpha, B_\alpha \in [H_\alpha]^{\aleph_0} \setminus \{A_\xi, B_\xi : \xi < \alpha \leq \mathfrak{c}\}$ distintos. Tome $\mathcal{B} \doteq [\mathbb{N}]^\infty \setminus \mathcal{A}$. □

Note que o que temos acima, à direita, é a negação do teorema de Ramsey ao tomarmos combinações infinitas. Aplicando a mesma técnica podemos construir um conjunto de Vitali que é, também, um conjunto de Bernstein (KHARAZISHVILI, 2004).

Proposição 5.4.4. *Existe um conjunto $V \subset \mathbb{R}$ de Vitali de Bernstein.*

Demonstração. Tome enumeração $\{F_\xi : \xi \in \mathfrak{c}\}$ dos fechados não enumeráveis de X . Vamos definir $A = \{a_\alpha : \alpha \in 2^{\aleph_0}\}$. Para cada $\alpha < \mathfrak{c}$, tome $a_\alpha, b_\alpha \in F_\alpha \setminus \bigcup_{\substack{\gamma < \alpha \\ q \in \mathbb{Q}}} \{a_\gamma + q, b_\gamma + q\}$ distintos. Estes pontos existem pois $|F_\alpha| = \mathfrak{c}$ e

$$\left| \bigcup_{\substack{\gamma < \alpha \\ q \in \mathbb{Q}}} \{a_\gamma + q, b_\gamma + q\} \right| \leq 2 \cdot \alpha \cdot \omega < \mathfrak{c}$$

⁶ 2-coloração.

⁷ Não existe subconjunto infinito monocromático.

Ao fim do processo, obtemos A , um conjunto de Bernstein que por construção tem no máximo um representante de cada classe \mathbb{R}/\mathbb{Q} . Sabemos que $\mathbb{R}\setminus A$ é também de Bernstein. Completando A com representantes de classes que não apareceram durante a construção, obtemos o seletor $V \supset A$.

Resta mostrar que V é de Bernstein. Para isto, basta mostrar que V e seu complementar não têm cópia do espaço de Cantor. Como $\mathbb{R}\setminus A$ não tem cópias de Cantor, $\mathbb{R}\setminus V \subset \mathbb{R}\setminus A$ não tem cópias de Cantor. Note que, como se trata de um seletor, para qualquer $q \in \mathbb{Q}$ temos a disjunção $V \subset \mathbb{R}\setminus(V+q)$. Entretanto, $\mathbb{R}\setminus(V+q) = (\mathbb{R}\setminus V) + q$ é imagem homeomorfa de espaço sem cópia de Cantor. Nesse caso, $V \subset \mathbb{R}\setminus V+q$ não tem cópia do espaço de Cantor. \square

Exemplo 5.4.2 ([AC]). *Conjuntos de Bernstein de \mathbb{R}*

(i) não são mensuráveis (5.4 em (OXTOPY, 1971)).

(ii) não têm a propriedade de Baire.

(iii) não têm propriedade perfeita.

Demonstração. Seja B de Bernstein.

(i) Temos que B não pode conter nenhum fechado não enumerável, caso contrário teríamos fechado não enumerável $F \subset B$ e então $(X\setminus B) \cap F = \emptyset$, absurdo. Nesse caso todo $F \subset B$ é enumerável, e portanto tem medida nula. Fosse B mensurável, teríamos $m(B) = \sup_{F \subset B} m(F) = 0$, e o mesmo pode ser dito de $X\setminus B$, o que dá que $m(\mathbb{R}) = 0$.

(ii) Suponha que B tem a propriedade de Baire, nesse caso $\mathbb{R}\setminus B$ também tem a propriedade.

- Se B é magro, então $\mathbb{R}\setminus B$ é comagro mas então temos $G \subset \mathbb{R}\setminus B$ um G_δ denso comagro de \mathbb{R} . Ele não pode ser enumerável, e então do Corolário 4.2.3 temos $\mathcal{C} \hookrightarrow G \hookrightarrow \mathbb{R}\setminus B$, nos dando um fechado não enumerável contido no complementar de B , absurdo.

- Se B não é magro, então tem cópia homeomorfa do espaço de cantor pelo [Corolário 5.1.1](#), um subconjunto perfeito, **um absurdo**.

(iii) Conjuntos de Bernstein $B \subset \mathbb{R}$ não são enumeráveis, se fossem seriam magros e portanto teriam propriedade de Baire. Entretanto não podem ter cópia de \mathcal{C} , pois este seria subconjunto fechados não enumerável de B .

□

Foram introduzidos até aqui dois conceitos de ‘conjuntos pequenos’ em \mathbb{R} : seus subconjuntos magros, topologicamente pequenos, e os conjunto Lebesgue-mensuráveis com medida nula, pequenos no sentido mensurável. Essas noções **não** são equivalentes

Exemplo 5.4.3. *Existe $D \subset \mathbb{R}$ comagro G_δ sem pontos isolados com medida de Lebesgue nula em \mathbb{R} .*

Demonstração. Considere q_n enumeração dos racionais. $D_k \doteq \bigcup_{n \in \omega} B(q_n, \frac{1}{2^{n+k}})$ é aberto denso para cada k . Ele é Boreliano e da subaditividade da medida de Lebesgue temos

$$m(D_k) \leq \sum_{n \in \omega} m\left(B\left(q_n, \frac{1}{2^{n+k}}\right)\right) = \frac{1}{2^k} \sum_{n \in \omega} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{-k+1}}$$

Considere agora $D \doteq \bigcap_{k \in \omega} D_k$, intersecção enumerável de abertos densos do espaço de Baire \mathbb{R} , um co-magro G_δ . Note que este conjunto é ainda um mensurável e tem medida $m(D) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ para qualquer k , logo tem medida $m(D) = 0$. Note que $\mathbb{Q} \subset D$, então certamente D não tem ponto isolado. □

Exemplo 5.4.4 (Conjunto gordo de Cantor). *Existe $N \subset \mathbb{R}$ nunca-denso G_δ de medida positiva sem pontos isolados.*

Demonstração. Imitando a construção do conjunto de Cantor, começamos com $f(\emptyset) \doteq [0, 1]$. Suponha definido $f(s)$ intervalo fechado não degenerado $[a, b]$, com $|s| = n$. Definimos $f(s \frown 0) \doteq [a, \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{4^n}]$ e $f(s \frown 1) \doteq [\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4^n}, b]$, ou seja, retiramos comprimento relativo $\frac{1}{4^n}$ central do intervalo. Note que as extremidades nunca são retiradas.

Consideremos $N \doteq \mathcal{A}f$. Note que cada n -ésimo nível de f é reunião finita de 2^n intervalos fechados de diâmetro $\rho_n \leq \frac{1}{2^n}$. Em particular N é intersecção de fechados, um fechado. Temos também que, para qualquer n , N não contém intervalos abertos de tamanho $> \frac{1}{2^n}$, o que significa que é nunca-denso. Note em cada nível retiramos intervalos abertos cujas medidas somam $\frac{2^n}{4^{n+1}}$, logo

$$m(\mathbb{R} \setminus N) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{4^{n+1}} \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$$

De onde podemos concluir que N tem medida positiva. Considere agora $x \in N$ e $\varepsilon > 0$. Tome n com $\rho_n \leq \varepsilon$. Devemos encontrar então $s \in 2^{<\omega}$ com $|s| = n$ e $x \in f(s) = [a, b]$. Note que as extremidades $a, b \in B(x, \varepsilon) \cap N$ nunca são removidas durante a construção, logo são elementos de N . Do fato de $f(s)$ ser não degenerado, para qualquer s , podemos concluir que N não tem pontos isolados. \square

O que segue são os exemplos que faltam para completar o diagrama de Venn descrito no início da seção.

Exemplo 5.4.5 ([AC]). *Existe conjunto $E \subset \mathbb{R}$ não mensurável, com propriedade de Baire e sem propriedade perfeita.*

Demonstração. Considere $N \subset \mathbb{R}$ nunca-denso G_δ de medida positiva. Tome V conjunto de Vitali de Bernstein (Proposição 5.4.4). Pela demonstração da Proposição 5.4.2, podemos encontrar $q \in \mathbb{Q}$ tal que $E \doteq (V + q) \cap N \subset N$ não é mensurável. Como MGR é σ -ideal, E tem propriedade de Baire. Mostremos que E não tem propriedade perfeita. O conjunto E certamente não é enumerável, pois se fosse seria mensurável. Se houver um fechado perfeito $F \subset (V + q) \cap N$ então temos fechado perfeito $F - q \subset V$, um absurdo. \square

Exemplo 5.4.6 ([AC] (DIAMOND; GELLES, 1984)). *Existe conjunto $E \subset \mathbb{R}$ não mensurável, com propriedade de Baire e sem propriedade perfeita.*

Demonstração. Seja $B \subset \mathbb{R}$ um conjunto de Bernstein e N o nunca-denso com medida positiva definido em Exemplo 5.4.4. Note que $B \cap N \subset N$ é magro, logo tem propriedade de Baire. Não têm propriedade perfeita, pois isso contradiria que B é de Bernstein. Em

particular, todos os fechados $F \subset B \cap N$ são enumeráveis. Se $B \cap N$ é mensurável, como N é um G_δ temos que $N \setminus B = N \setminus (N \cap B)$ é mensurável, mas então B é mensurável, um absurdo pelo [Exemplo 5.4.2](#). \square

Exemplo 5.4.7 ([AC]). *Existe conjunto $V \subset \mathbb{R}$ não mensurável, com propriedade de Baire e com propriedade perfeita.*

Demonstração. Apliquemos a [Proposição 5.4.1](#) ao conjunto $G \doteq N$ do [Exemplo 5.4.4](#), um polonês sem pontos isolados. Obtemos um $V \subset N$ com cópia $\mathcal{C} \subset V$ do espaço de Cantor. O conjunto V não pode ter medida nula, fosse este o caso teríamos $N = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q) \cap N$ com medida nula. Fosse V mensurável com medida positiva, pelo [Teorema 5.3.1](#) teríamos intervalo não degenerado $0 \in I \subset V - V \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, um absurdo. \square

Exemplo 5.4.8 ([AC]). *Existe conjunto V mensurável, sem propriedade de Baire e com propriedade perfeita.*

Demonstração. Apliquemos a [Proposição 5.4.1](#) ao conjunto $G \doteq D$ do [Exemplo 5.4.3](#), um polonês sem pontos isolados. Obtemos um $V \subset D$ com cópia $\mathcal{C} \subset V$ do espaço de Cantor. O conjunto V não pode ser magro, pois se fosse teríamos que $D = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q) \cap D$ seria magro. Fosse V não magro com a propriedade de Baire, pelo [Corolário 5.3.1](#) teríamos intervalo não degenerado $0 \in I \subset V - V \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, um absurdo. \square

Exemplo 5.4.9 ([AC]). *Existe $B \subset \mathbb{R}$ mensurável, sem propriedade de Baire e sem propriedade perfeita.*

Demonstração. Considere D o comagro G_δ de medida nula do [Exemplo 5.4.3](#). Este é um espaço polonês sem pontos isolados que **tem um conjunto de Bernstein** $B \subset D$. Como a medida de Lebesgue é completa, este conjunto é mensurável. Note que B não tem propriedade perfeita, pois tem tamanho \mathfrak{c} , por sua construção, e se tivesse cópia $\mathcal{C} \hookrightarrow B \subset D$, deixaria de ser conjunto de Bernstein. Suponha que B tenha propriedade de Baire. Se B não é magro, pelo [Corolário 5.1.1](#) teríamos cópia do espaço de Cantor $\mathcal{C} \hookrightarrow B$, absurdo. Se $B \subset D$ é magro, então $D \setminus B$ é intersecção de conjuntos BP, ainda um comagro de $\text{BP}(\mathbb{R})$, que pelo [Corolário 5.1.1](#) teria cópia de Cantor $\mathcal{C} \subset D \setminus B$, o que contradiz que B é conjunto de Bernstein de D . \square

Exemplo 5.4.10 ([AC]). Existe subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ mensurável, com propriedade de Baire e sem propriedade perfeita.

Demonstração. Considere $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$ o conjunto de Cantor. Este é um polonês sem pontos isolados, logo **tem conjunto de Bernstein** $B \subset \mathcal{C}$. Por observações análogas. Note que B tem medida nula, é nunca-denso e não tem propriedade perfeita. \square

5.4.3 Conjuntos de Lusin e Sierpinski

Assim como os conjuntos de Bernstein, os conjuntos de Lusin e Sierpinski são definidos por propriedades de intersecção com algumas famílias de conjuntos. Elas são, respectivamente, os magros e os conjuntos de medida nula. A cardinalidade destes σ -ideais será o principal fator durante a construção destes conjuntos e, por isso, antes de introduzirmos estes conjuntos, vamos discutir um pouco sobre isso. Um magro F_σ de um espaço X segundo enumerável pode ser associado a um conjunto enumerável de fechados nunca-densos, estes últimos de tamanho $\leq \mathfrak{c}$ ⁸. Os magros F_σ de X tem então no máximo

$$|[\mathfrak{c}]^{\aleph_0}| = \mathfrak{c}$$

elementos⁹, e portanto exatamente \mathfrak{c} . Desta discussão, obtemos

Proposição 5.4.5. *Seja X um espaço metrizável segundo enumerável e sem pontos isolados. Este espaço tem precisamente \mathfrak{c} magros F_σ .*

Vamos então a definição:

Definição 5.4.2 (Conjuntos de Lusin). Um subconjunto $L \subset \mathbb{R}$ tem **propriedade de Lusin** ou é **conjunto de Lusin** se tem cardinalidade \mathfrak{c} e intercepta todo **magro** M em conjunto $|L \cap M| = \aleph_0$ enumerável.

⁸ Estabelecemos nas preliminares que os Borelianos de um espaço segundo enumerável tem cardinalidade $|\mathcal{B}(X)| = \mathfrak{c}$.

⁹ $[\mathfrak{c}]^{\aleph_0} \hookrightarrow \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Note que todo magro está contido em um magro F_σ . Se encontrarmos L de cardinalidade \mathfrak{c} e intercepta todo magro F_σ em conjunto enumerável teremos então um conjunto de Lusin em mãos. Note que um conjunto de Lusin L não é magro, pois se fosse teríamos $L \cap L = L$ enumerável. Pelo mesmo motivo, os subconjuntos magros $S \subset L$ são **exatamente** os enumeráveis.

Teorema 5.4.4 ([CH] Teorema de Mahlo). *Sobre a hipótese do contínuo:*

- (i) *Todo subconjunto de \mathbb{R} com cardinalidade menor que contínuo é magro.*
- (ii) *Existe um conjunto de Lusin $L \subset A$, para A não magro de \mathbb{R} .*

Demonstração. Mostremos cada item :

- (i) Qualquer cardinalidade menor que \mathfrak{c} é enumerável, logo conjuntos com menos de contínuo pontos são enumeráveis de \mathbb{R} , que não tem pontos isolados, portanto um magro.
- (ii) Seja $\{F_\alpha \in F_\sigma(\mathbb{R}) \cap \text{MGR}(\mathbb{R}) : \alpha < \aleph_1 = \mathfrak{c}\}$ uma enumeração de magros F_σ da reta. Tome $L \doteq \{I_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Note que, para cada $\alpha < \mathfrak{c}$ temos que $[0, \alpha[$ é enumerável, logo $\bigcup_{\gamma < \alpha} F_\gamma$ é reunião enumerável de magros, um magro. Definidos $x_\gamma, \gamma < \alpha$, considere $M_\alpha \doteq \{x_\gamma : \gamma < \alpha\} \cup \bigcup_{\gamma < \alpha} F_\gamma$ reunião enumerável de magros, ainda um magro. Tome

$$x_\alpha \in A \setminus M_\alpha$$

Note que deve haver algum x_α , pois se não houvesse A seria magro. Dado F um magro, $F \subset F_\alpha$ para algum $\alpha < \mathfrak{c}$, nesse caso $L \cap F \subset L \cap F_\alpha$ mas $L \cap F_\alpha \subset \{x_\gamma : \gamma < \alpha < \mathfrak{c}\}$ é enumerável, logo também será $L \cap F$.

□

Note que existem \mathfrak{c} conjuntos G_δ em \mathbb{R} , e que todo conjunto de medida nula está contido em um G_δ de medida nula. Substituindo a família de **magros** F_σ pela família de G_δ 's **de medida nula**, ambas com mesma cardinalidade, de maneira análoga :

Definição 5.4.3 (Conjunto de Sierpinski). Um **Conjunto de Sierpinski** é um subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ de tamanho \mathfrak{c} que intercepta todo conjunto **de medida nula** em enumeráveis pontos.

Analisemos propriedades satisfeitas por conjuntos de Lusin:

Exemplo 5.4.11 ([CH]). *Um conjunto de Lusin $L \subset \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

- (i) *Têm medida nula.*
- (ii) *Não tem propriedade perfeita.*
- (iii) *Não tem a propriedade de Baire.*

Demonstração. Seja D construído em [Exemplo 5.4.3](#) um comagro de medida nula e L conjunto de Lusin de \mathbb{R} .

- (i) O conjunto $\mathbb{R} \setminus D$ é magro, logo $L \cap (\mathbb{R} \setminus D)$ é enumerável, e portanto é mensurável e tem medida nula, e $L \cap D \subset D$ também é mensurável e tem medida nula. Temos então que L tem medida nula.
- (ii) Seja $\text{PSP}(L)$. Como $|L| = \mathfrak{c}$, então deve haver cópia de Cantor $\mathcal{C} \subset L \subset \mathbb{R}$, mas \mathcal{C} será nunca-denso não enumerável contido em L , portanto um magro não enumerável que intercepta L em um conjunto não enumerável, um absurdo.
- (iii) Seja $\text{BP}(L)$. Note que L não pode ser magro, pois se fosse $L \cap L = L$ seria enumerável. Nesse caso L é $\text{BP}(\mathbb{R})$ não magro, mas de [Corolário 5.1.1](#) teríamos inclusão $\mathcal{C} \hookrightarrow L$, um absurdo pelo item anterior.

□

O **jogo do ponto-aberto** é um jogo onde I seleciona $x_0 \in X$ e II um aberto A_0 com $x_0 \in A$. O jogador I vence quando a sequência A_n cobre X . Conjuntos de Lusin são indeterminados no jogo ponto-aberto ([RECIĄW, 1994](#)).

Parte III

Consequências da determinação

APLICAÇÕES DA DETERMINAÇÃO

6.1 Introdução

Nesta parte, vamos introduzir quantificadores de jogos e aplicar os resultados de determinação, obtidos na [Parte I](#), a alguns jogos topológicos. A determinação destes jogos caracterizam as propriedades perfeita e de Baire, discutidas na [Parte II](#). Um jogo topológico é basicamente uma forma de tomar um espaço (X, τ) e construir uma árvore e alvo, configurando um jogo \mathcal{G} . Vamos definir alguns jogos topológicos e fixar algumas de suas propriedades básicas. Os jogos vão envolver árvores de sequências e, por vezes, vamos abusar da linguagem e ao invés de dizer ‘posição $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ’, diremos ‘posição a_n de altura $n + 1$ ’. Fica subentendido que o histórico do jogo está sendo ‘guardado na memória do jogo’. Direta ou indiretamente estas sequências serão de abertos.

Cabe aqui uma definição técnica, que será caso particular de tomar subordem:

Definição 6.1.1 (Restrição aos níveis). A **restrição aos níveis pares** de uma árvore T é a subordem $\bigcup_{n \in \omega} \text{level}(2n)$ munidos da ordem induzida. Analogamente, temos a **restrição aos níveis ímpares**, mas em particular não removemos a raiz $\langle \rangle$, elemento no nível par 0.

Note que as definições acima definem subordens de $T' \hookrightarrow T$. O caso de altura

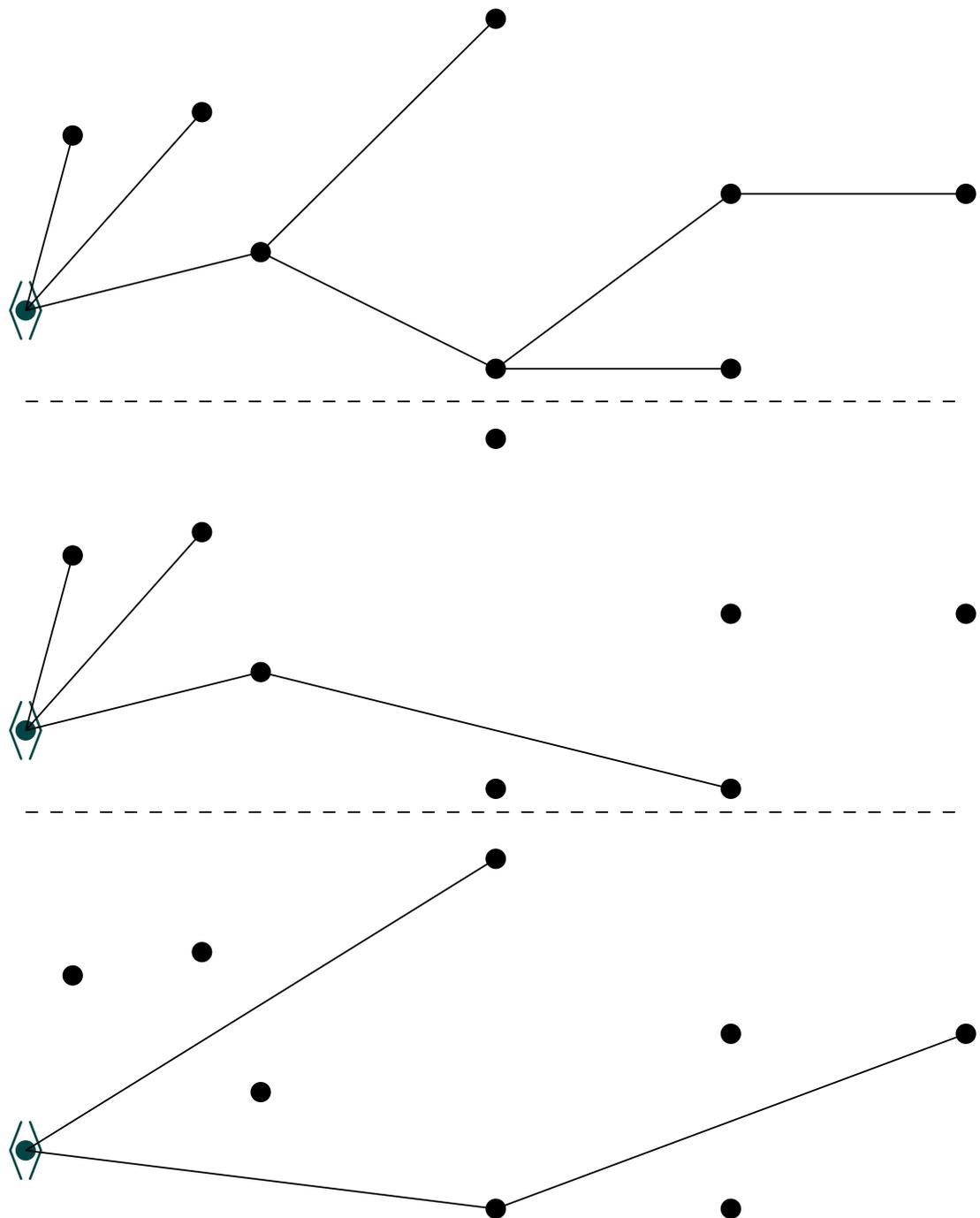


Figura 42 – Uma árvore, sua restrição aos níveis ímpares e sua restrição aos níveis pares.

finita é mal comportado sob esta definição: a restrição aos níveis pares da árvore $T \doteq \{\langle \rangle, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle\}$, de dois ramos, tem apenas um ramo. Por outro lado, para o caso de altura ω , que será o caso com o qual vamos trabalhar aqui, temos inclusão óbvia dos ramos das restrições aos ramos da árvore original. Apesar das restrições **não serem subárvores** de T , ao invés de formalmente introduzir uma nova árvore, vamos dizer apenas que estamos ‘olhando apenas para os níveis pares/ímpares’ de T .

Vamos seguir (KECHRIS, 1995) e (OXTOPY, 1971) neste capítulo.

6.1.1 Aplicações na lógica

Antes de começarmos com os jogos topológicos, passemos rapidamente por uma aplicação na lógica. Considere o jogo de Gale-Stewart $(A^{<\omega}, X)$. Nos inspirando no Teorema 2.3.1, a afirmação de que I tem quase-estratégia vencedora pode ser vista como a **interpretação semântica natural** da fórmula ¹

$$\exists a_1 \forall a_2 \exists a_3 \forall a_4 \cdots \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots \rangle \in X$$

Note que a relação $\alpha \doteq \langle a_1, \dots \rangle \in X$ pode ser tomada como um símbolo relacional unário $X(\alpha)$. Estamos adicionando, ao sistema de construção de fórmulas bem formadas, a quantificação definida acima sobre uma sequência de números. Vamos denotá-la por $Q_I \alpha(X(\alpha))$.

Note que estas fórmulas são extensões infinitas das formas normais prenexas alternadas na linguagem de primeira ordem. Estas fórmulas formam uma hierarquia que guarda bastante semelhança com a hierarquia de Borel e esta observação sugere que a determinação é um desenvolvimento natural destas ideias. Mais conexões entre estes conceitos e teoria descritiva efetiva de conjuntos estão em (MOSCHOVAKIS, 1974).

Analogamente, existência de estratégia vencedora do jogador II em $(A^{<\omega}, X)$ pode ser vista como interpretação semântica da fórmula

¹ A fundamentação do que será brevemente discutido aqui passa por Lógica Infinitária e sai do escopo do trabalho.

$$\forall a_1 \exists a_2 \forall a_3 \exists a_4 \cdots \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots \rangle \in A^\omega \setminus X$$

Que podemos escrever como $Q_{II}\alpha(\neg X(\alpha))$. Note que se pudéssemos "aplicar as equivalências lógicas

$$\neg \forall x \varphi(x) \dashv\vdash \exists x \neg \varphi(x) \quad \neg \exists x \varphi(x) \dashv\vdash \forall x \neg \varphi(x)$$

ω vezes à fórmula $\neg Q_I\alpha(X(\alpha))$ ", obteríamos² a equivalência sintática

$$\neg Q_I\alpha(X(\alpha)) \dashv\vdash Q_{II}\alpha(\neg X(\alpha))$$

Apesar de não podermos fazer isto, o [Lema 2.1.1](#) nos diz que os dois jogadores não podem ter estratégias vencedoras simultaneamente, ou seja, sob a meta-linguagem $ZF + DC$ e as classes de modelos (jogos) onde se aplicam este teorema, esta equivalência é **válida**, ou seja

$$\models \neg Q_I\alpha(X(\alpha)) \leftrightarrow Q_{II}\alpha(\neg X(\alpha))$$

Analogamente $\neg Q_{II}\alpha(\neg X(\alpha))$ é equivalente a $\neg Q_I\alpha(X(\alpha))$. Impor a **validade** da instância da lei do terceiro excluído

$$Q_I\alpha(X(\alpha)) \vee \neg(Q_I\alpha(X(\alpha)))$$

significaria então nos reduzir aos jogos **quase-determinados**.

O que segue é uma forma alternativa de formalizar o jogo dual, introduzido na [Seção 2.2](#).

Definição 6.1.2 (Jogo dual). Tome $(T = A^{<\omega}, X)$ um jogo. Tome um símbolo $\xi \notin A$, apenas por conveniência, e considere uma nova árvore $T' \doteq \{s \in (A \cup \{a\})^{<\omega} : s = \langle \rangle \text{ ou } s(1) = \xi\}$. Defina $X' = \{\xi \frown s : s \in X \setminus [T]\}$ e temos que $\mathcal{G}' = (T', X')$ é o **jogo dual** de \mathcal{G} .

² Por substituição.

Note que I vence \mathcal{G}' quando

$$\exists a_{-1} \forall a_0 \exists a_1 \cdots \langle s_{-1}, s_0, s_1, \cdots \rangle \in X'$$

Mas a primeira variável só pode ser o símbolo ξ . Como X' é $\langle \xi \rangle \cap [T] \setminus X$, teremos isso se, e somente se,

$$\forall a_0 \exists a_1 \cdots \langle s_0, s_1, \cdots \rangle \in [T] \setminus X$$

Precisamente a afirmação de que II vence. Análogo para o outro caso.

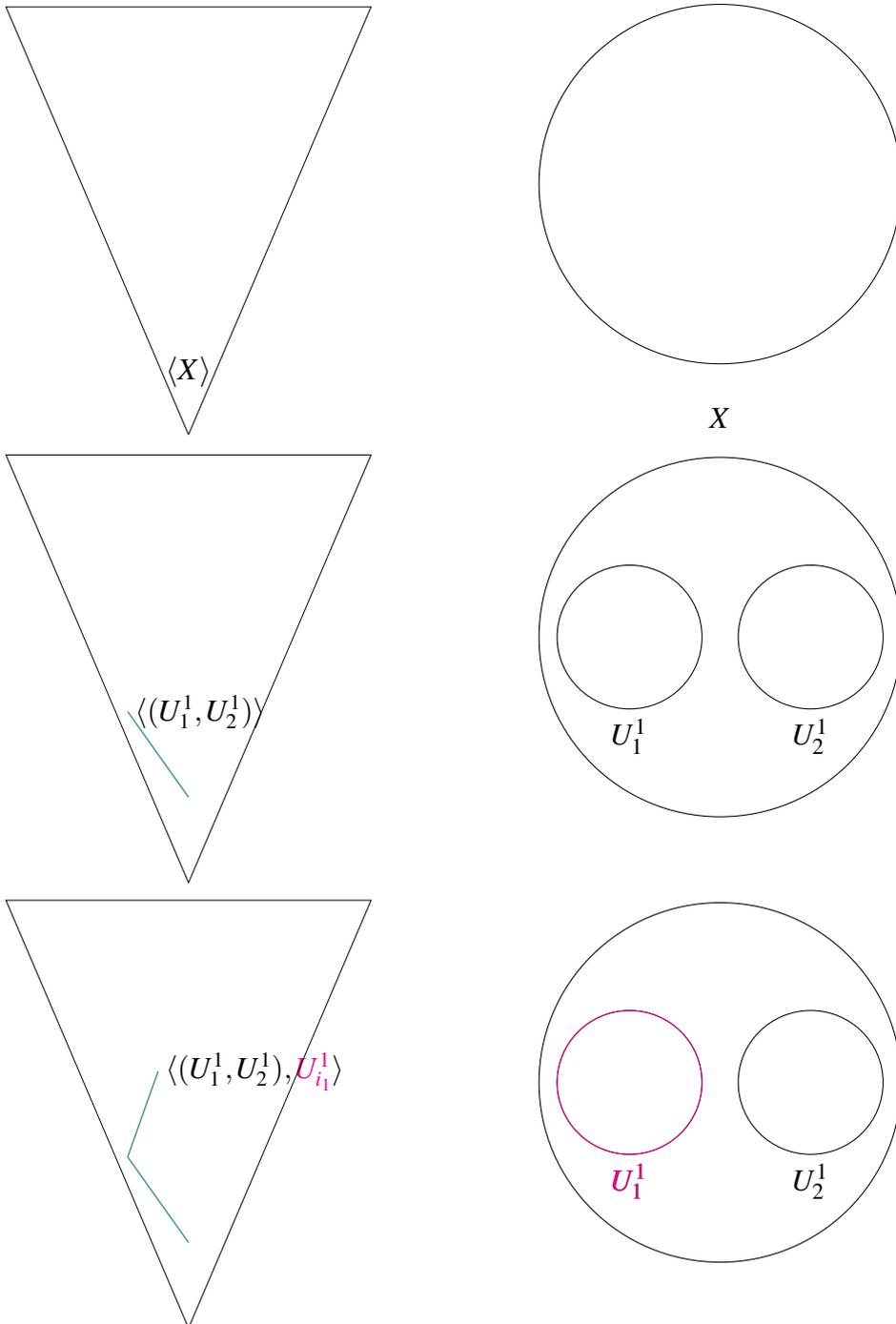
6.2 O Jogo * e a propriedade perfeita

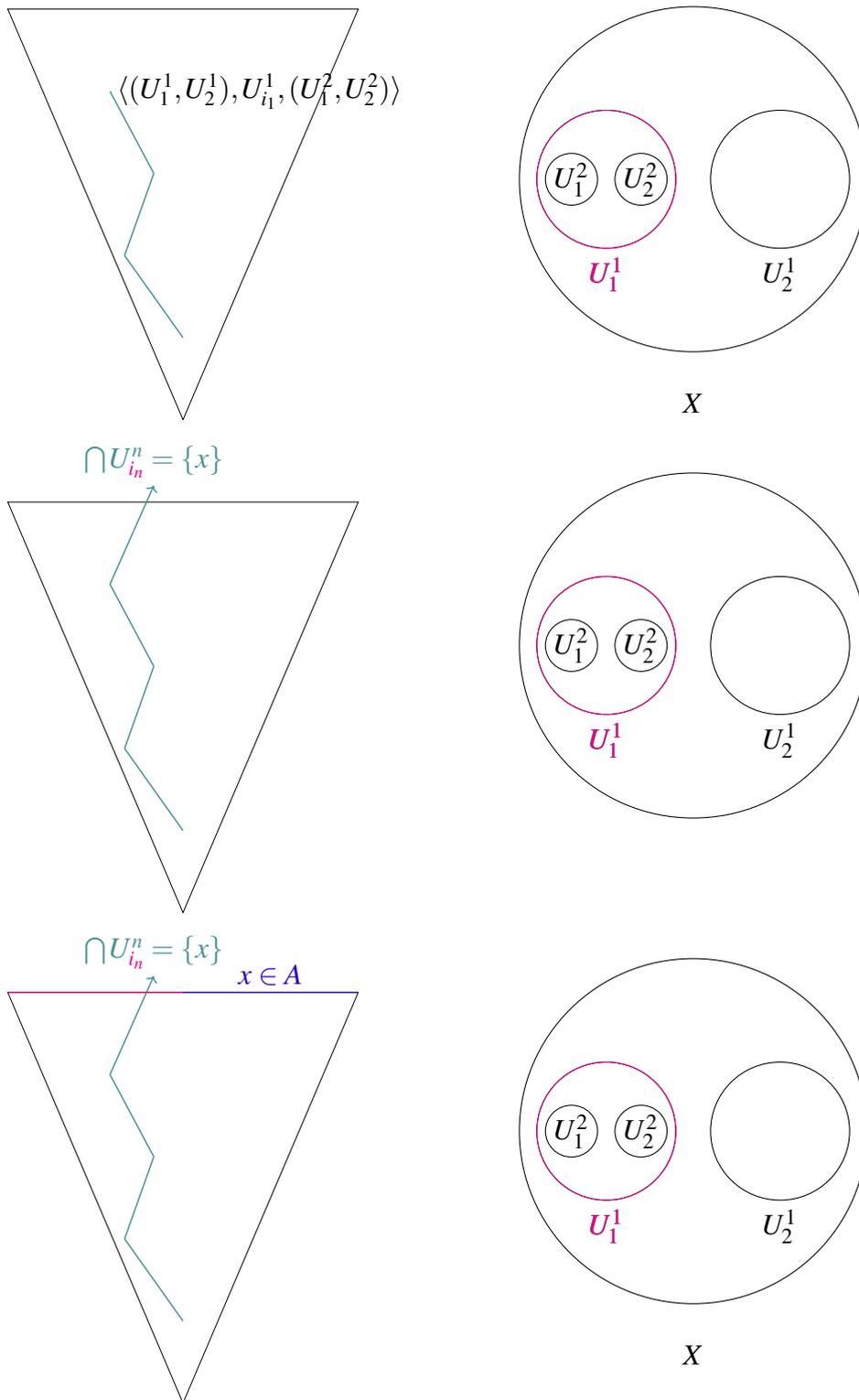
O próximo jogo está intimamente ligado com o tema da hipótese do contínuo e a [propriedade perfeita](#), que permeiam o texto. Fixemos X polonês não vazio com base enumerável \mathcal{B} .

Definição 6.2.1 (Jogo *). Fixado $A \subset X$, vamos definir o **Jogo *** $\mathcal{G}^*(A)$. A árvore T é definida com raiz $\langle X \rangle$ e alterna a partir daí com pares de abertos não vazios básicos (jogadas de I) e abertos não vazios (jogadas de II) sujeitos a

- Os diâmetros $\text{diam}A_n, \text{diam}B_n$ das jogadas (A_n, B_n) de I para o nível n são $\leq 2^{-n}$.
- O fecho destes abertos estão contidos no aberto anterior.
- Estes abertos são disjuntos.
- Em seguida II seleciona um dos abertos A_n ou B_n da dupla, concatenando este aberto na sequência.

Segue uma representação gráfica de uma partida deste jogo:





Mostremos que esse jogo caracteriza a **propriedade perfeita** em espaços poloneses sem pontos isolados:

Teorema 6.2.1. *O conjunto $A \subset X$ subconjunto de polonês sem pontos isolados tem a propriedade perfeita se, e somente se, $\mathcal{G}^*(A)$ é determinado.*

Demonstração. Mostremos cada direção da equivalência:

- Se o jogo é determinado, então um dos jogadores vence.
 - Seja σ vencedora de I , note que f_σ é esquema de Cantor e \tilde{f}_σ inclui o espaço de Cantor como subespaço de A , que é então perfeito.
 - Suponha que II vence com ρ , temos então árvore aparada de altura ω T e esquema $f_\rho : T \rightarrow \tau \setminus \{\emptyset\}$ de Lusin. Temos do **Lema 3.2.1** que $\mathcal{A}f_\rho = \bigcap_{n \in \omega} \text{level}(n, f_\rho) \subset X \setminus A$. Como o esquema é também regular, os níveis estão encaixados, logo dado $x \in A$ eventualmente $x \notin \text{level}(n, f_\rho)$ (x desaparece dos níveis). Em outras palavras, os níveis $\text{level}(n, f_\rho)$ aos quais um $x \in A$ pertence são superiormente limitados, logo $x \in A$ tem ao menos um maximal t com $x \in f_\rho(t)$ ³. **Afirmção :** $x \in A \mapsto t \in T$ é injetiva. Não fosse, tome $x \neq y$ em A com mesmo maximal t tal que $x, y \in f_\rho(t)$. Separe-os por abertos disjuntos (U, V) admissíveis como jogada de I . A resposta de ρ a esta jogada, que **deve existir**, contraria a maximalidade de t para um destes pontos. Note que T é enumerável, então temos o resultado ⁴.
- Seja A com propriedade perfeita, então
 - Se $A \doteq \{a_n\}_{n \in \omega}$ é enumerável. Defina ρ como a estratégia que, em posição (U_n, V_n) de altura $2n + 1$, escolhe o aberto do par que **não** tem a_n . Se o ponto $a \in \bigcap_{n \in \omega} s(2n + 1)$ é elemento de A , então $a = a_n$ mas $a \notin s(2n + 1)$, absurdo, logo ρ vence.

³ não é necessário usar Zorn aqui, simplesmente em tempo finito se chega a este elemento. Não podemos usar o axioma da escolha neste teorema, pois introduziríamos um conjunto de Bernstein na teoria, um empecilho para uma aplicação mais adiante.

⁴ encontrou-se injeção $A \hookrightarrow T$ e T é sub-árvore de $\omega^{<\omega}$, enumerável

- Suponha agora que exista cópia de Cantor $C \subset A$, é de fato possível formar esquema de Cantor $f : 2^{<\omega} \rightarrow \tau$ com $\tilde{f} : \mathcal{C} \rightarrow C$ homeomorfismo ⁵. Este esquema fornece a primeira jogada $(f(\langle 0 \rangle), f(\langle 1 \rangle))$ e, para qualquer que seja a escolha $f(s)$ de II , se I jogar $(f(s \frown 0), f(s \frown 1))$ claramente acabamos com estratégia vencedora.

□

Proposição 6.2.1. *No que segue, queremos realizar o jogo *, jogado em métrico completo X com alvo A , como subjogo do jogo de Gale-Stewart (S, Y) .*

Demonstração. O conjunto onde as jogadas são feitas, dado por $\mathcal{B}^2 \sqcup \mathcal{B}$, é enumerável. Por isso, podemos ver a árvore do jogo, que denotaremos por T , como uma subárvore de $\omega^{<\omega}$, que denotamos por S . Mapeando posições em abertos como $\langle \dots, U \rangle, \langle \dots, U, (V_1, V_2) \rangle \in T \mapsto U \subset X$, temos um esquema de Souslin $f : S \rightarrow \tau$ não vazio. Isso dá origem a uma função contínua $\tilde{f} : [S] \rightarrow X$ (Proposição 3.2.1). Note que um ramo de s dá vitória para I quando $\tilde{f}(s) \in A$. Do Exemplo 2.2.1, temos que $(S, \tilde{f}^{-1}(A))$ é equivalente ao jogo *. □

Se A é Borel, $\tilde{f}^{-1}(A)$ também será, mas então do Teorema da determinação de Borel o jogo $(S, \tilde{f}^{-1}(A))$ é determinado, o que mostra

Corolário 6.2.1 (PSP(\mathcal{B})). *Borelianos de poloneses sem pontos isolados tem a propriedade perfeita.*

Exemplo 6.2.1 ([AC] Existe conjunto tal que $\mathcal{G}^*(A)$ não é determinado). *O conjunto de Bernstein é subconjunto de polônês perfeito, não é enumerável e não contém cópia do conjunto de Cantor, logo $\mathcal{G}^*(B)$ não é determinado.*

6.2.1 Propriedade perfeita para analíticos

Vamos considerar uma variação do jogo anterior, sem construir explicitamente a árvore:

⁵ faça reflexão do esquema de C -clopens de volta para X

Definição 6.2.2 (Jogo * desdobrado). Ao invés de jogar apenas um par de abertos, sujeitos às mesmas regras, I joga também um natural. Assim como no jogo anterior, II escolhe um destes abertos. Dado $F \subset X \times \mathcal{N}$, o jogo $\mathcal{G}_u^*(F)$ é jogado como foi descrito. Ao final de ω rodadas ficamos com sequência U_n de abertos de diâmetro tendendo a 0, o que nos dá ponto $x \in \bigcap U_n$, e sequência de naturais $s \in \omega^\omega$. Dizemos que I venceu se acabamos em $(x, s) \in F$ ⁶, onde x é o único ponto na intersecção dos abertos com diâmetro tendendo pra 0. Um ramo genérico deste jogo é

$$\langle (X, \langle \rangle), ((U_0^1, U_1^1), k_1), (U_{i_1}^1, \langle k_1 \rangle), ((U_0^2, U_1^2), k_2), (U_{i_2}^2, \langle k_1, k_2 \rangle), \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \rangle$$

Note que estamos essencialmente jogando em $(\omega \times \mathcal{B}^2 \sqcup \mathcal{B})^{<\omega}$ onde \mathcal{B} são elementos não vazios de uma base enumerável. Continuamos então jogando, essencialmente, um jogo de Gale-Stewart que, de acordo com Definição 1.4.4 e Proposição 6.2.1, é uma subárvore de $\omega^{<\omega}$. A mesma observação valerá portanto para (quase-)estratégias do jogo.

Teorema 6.2.2 (Determinação implica PSP, 21.2 em (KECHRIS, 1995)). *Seja X espaço polonês perfeito. Se o jogo $\mathcal{G}_u^*(F)$ é determinado, então $\text{PSP}(\exists^{\mathcal{N}} F)$.*

Demonstração. Vamos assumir existência de estratégia vencedora para cada jogador e concluir o que queremos:

- Seja σ vencedora de I . Tome $A \doteq \exists^{\mathcal{N}} F$, de fato σ pode ser usada para construir $\tilde{\sigma}$ vencedora de $\mathcal{G}^*(A)$. Para qualquer que seja aberto selecionado por II em $\mathcal{G}^*(A)$, transfira o tabuleiro atual para $\mathcal{G}_u^*(F)$. Se I reage com $(k, (U_1, U_2))$, defina a reação de $\tilde{\sigma}$ como sendo (U_1, U_2) . Continuando assim, se ao fim de uma partida tivermos

$$\langle (X, \langle \rangle), ((U_0^1, U_1^1), k_1), (U_{i_1}^1, \langle k_1 \rangle), \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \rangle \in [\sigma]$$

claramente corresponde a

$$\langle X, (U_0^1, U_1^1), U_{i_1}^1, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \rangle \in [\tilde{\sigma}]$$

⁶ identificando s com $x_s \in \bigcap_{n \in \omega} s(2n+1)$, via Definição 1.4.4

Da hipótese de que σ é vencedora, teremos em particular que $(x, \alpha) \in F \implies x \in A$, o que dá que $\tilde{\sigma}$ é vencedora de I .

- Mais uma vez, considere ρ vencedora de II e f_ρ sistema de abertos associados (escolhidos por ρ). Se $x \in A = \exists^{\mathcal{N}} F$, então existe $\alpha \in \mathcal{N}$ com $(x, \alpha) \in F$ (Definição 4.1.4). Tome I jogando de acordo com σ quase-estratégia que joga legalmente $(k_n, (U_n, V_n))$'s de forma que $\langle k_1, k_2, \dots \rangle = \alpha$. Fosse II incapaz de se defender, acabaríamos no ramo (x, α) , absurdo. Temos então mais uma vez que a altura dos níveis de $f_{\rho \cap \sigma} : T \rightarrow \tau \setminus \{\emptyset\}$ aos quais x pertence é limitado, logo podemos achar $t \in T$ maximal tal que $x \in f_\rho(t)$. Mais uma vez, esta será uma injeção $x \in A \mapsto t \in T$ e T é ainda enumerável.

□

Proposição 6.2.2 (Codificando como jogo de Gale-Stewart). *No que segue, queremos realizar o jogo * desdobrado, jogado em X com alvo $F \subset X \times \mathcal{N}$, como (S, Y) , onde S é árvore de altura e níveis enumeráveis.*

Demonstração. Note que o conjunto das jogadas podese codificado por $\mathcal{B}^2 \times \omega \sqcup (\mathcal{B} \times \omega^{<\omega})$, um conjunto enumerável. Logo, podemos ver a árvore do jogo *, que denotaremos por S , como uma subárvore de $\omega^{<\omega}$. Mapeando posições em abertos como

$$\langle \dots, (U, s) \rangle, \langle \dots, (U, s), ((V_1, V_2), k) \rangle \in T \mapsto (U \times \Sigma(s)) \subset X \times \mathcal{N}$$

temos um esquema de Souslin. Note que nenhum dos abertos na imagem é vazio, o que dá origem a função contínua $\tilde{f} : [S] \rightarrow X \times \mathcal{N}$. Note que um ramo de s dá vitória para I quando $\tilde{f}(s) \in F$. Do Exemplo 2.2.1, temos que $(S, \tilde{f}^{-1}(F))$ é equivalente ao jogo *. □

Corolário 6.2.2 ([AC] PSP(Σ_1^1)). *Da Proposição 4.1.5 temos que se $A \in \Sigma_1^1(X)$ então existe fechado $C \subset X \times \mathcal{N}$ tal que $A = \exists^{\mathcal{N}} C$. Codificando o jogo como um jogo de Gale-Stewart, ficamos com $(S, \tilde{f}^{-1}(C))$, um jogo determinado pelo teorema de Gale-Stewart (Teorema 2.4.2). Nesse caso, $\exists^{\mathcal{N}} C = A$ tem propriedade perfeita pelo Teorema 6.2.2.*

6.3 O jogo de Choquet e espaços de Baire

Definição 6.3.1 (Jogo de Choquet). Para definir o **Jogo de Choquet** $\text{Choquet}(X)$, vamos definir sua árvore o alvo de I . A árvore é $T \subset (\tau \setminus \{\emptyset\})^{<\omega}$ aceitando apenas sequências decrescentes de abertos. O alvo X de I é a coleção de sequências $\alpha \in [T]$ com intersecção $\bigcap \alpha(n)$ vazia.

Note que a a árvore do jogo em si é **um esquema regular de abertos**. Nesse caso serão também todas as (quase-)estratégias deste jogo. Uma π -base \mathcal{B} de um espaço é uma família de abertos não vazios tais que para todo A tem-se $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset A$. Suponha uma posição $U \in \tau$ no turno do adversário de uma estratégia σ , note que σ responde a qualquer $A \subset U$ com um aberto não vazio em $B \subset A$, ou seja, **avancar dois níveis** dentro de uma estratégia fornece π -base do aberto atual.

Lema 6.3.1. *Toda família não vazia \mathcal{B} de abertos tem subfamília maximal de abertos disjuntos. Em particular, uma π -base \mathcal{B} de X tem subfamília de π -básicos disjuntos maximal \mathcal{D} . A reunião $\bigcup \mathcal{D} \doteq D$ é um aberto denso de X .*

Demonstração. A primeira parte segue do lema Zorn. Considere

$$\mathfrak{P} \doteq \{\mathcal{A} \subset \mathcal{B} : \mathcal{A} \text{ é família de abertos disjuntos}\}$$

Note que \mathfrak{P} não é vazio, pois dado $B \in \mathcal{B}$, temos em particular que $\{B\} \in \mathfrak{P}$. Note que uma cadeia $\mathcal{C} \subset \mathfrak{P}$ tem limitante superior $\bigcup \mathcal{C}$. De fato, tome dois abertos quaisquer $A, B \in \bigcup \mathcal{C}$, da hipótese de \mathcal{C} ser cadeia, deve haver $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ tal que $A, B \in \mathcal{C}$, mas então eles são disjuntos, pois $A, B \in \mathcal{C} \in \mathfrak{P}$. Como toda cadeia tem limitante superior, temos elemento maximal $\mathcal{D} \subset \mathfrak{P}$.

Aplicando isso à π -base, obtemos \mathcal{D} **disjunto maximal**. Suponha que U seja aberto disjunto de D , note que deve haver $B \in \mathcal{B}$ com $B \subset U$ ainda disjunto de D , mas isso quer dizer que podemos adicionar B à \mathcal{D} , mantendo disjunção, **absurdo**. \square

Antes de mostrar que o jogo de Choquet de fato caracteriza espaços de Baire, precisamos descrever um último fenômeno, uma espécie de transitividade da densidade ao longo de uma árvore de conjuntos. Considere **um esquema regular f** sobre X , espaço

topológico, tal que a reunião de sucessores de elemento é densa nesse elemento, ou seja, $\overline{\bigcup_{s \in \text{Succ}(t)} f(s)} = f(t)$, então os níveis $\text{level}(f, n)$ são densos na raiz $f(\langle \rangle)$. De fato, seja $\text{level}(f, n)$ denso em $f(\langle \rangle)$. Note que

$$\begin{aligned} f(\langle \rangle) &= \overline{\text{level}(f, n)} = \overline{\bigcup_{h(t)=n} f(t)} \\ &= \overline{\bigcup_{h(t)=n} \overline{\bigcup_{s \in \text{Succ}(t)} f(s)}} \\ &= \overline{\text{level}(f, n+1)} \end{aligned}$$

Teorema 6.3.1 (Oxtoby). *Um espaço não é de Baire se, e somente se, I tem estratégia vencedora no jogo de Choquet.*

Demonstração. [\implies] Seja X um espaço que não é Baire, mostremos que I vence o jogo de Choquet. Deve haver $\{D_n\}$ enumeráveis densos abertos cuja intersecção $D \doteq \bigcap D_n$ não é densa, o que quer dizer que deve haver A aberto não vazio com $A \cap D = \emptyset$. Para definir σ , começamos com $\langle A \rangle \in \sigma$ e, indutivamente, dado $s \in T$ de altura $2n$ par, respondemos com $s \frown s(2n-1) \cap D_n \in \sigma$, jogada válida. Das definições de estratégia, σ é estratégia e $[\sigma] \subset X$.

[\impliedby] Se I vence, tome σ sua estratégia vencedora. Como já comentado, ao avançar dois níveis em σ numa posição (último aberto da sequência) no turno adversário encontramos π -base desse aberto, a coleção das respostas de σ a todas as jogadas possíveis de II . Esta π -base admite subconjunto dois a dois disjuntos maximal e este subconjunto é a resposta de σ a uma quase-estratégia ρ de I que força σ a jogar esta subfamília. Considere $\theta \doteq \sigma \cap \rho$ tabuleiro onde I joga como ρ e II força σ a selecionar exatamente estas famílias de π -básicos maximais dois níveis depois.

Das definições, lema auxiliar e comentários, os níveis $\text{level}(\theta, 2n+1)$ ímpares são densos em A , o primeiro aberto jogado por σ . Se X é Baire então A é Baire, nesse caso:

$$\mathcal{A}(\theta) \stackrel{\text{Lema 3.2.1}}{=} \bigcap_{\gamma < h(T)} \underbrace{\text{level}(f, \gamma)}_{\text{abertos densos do Baire } A} \neq \emptyset$$

Por outro lado, $\theta \subset \sigma \implies [\theta] \subset [\sigma] \subset X$, ou seja:

$$\mathcal{A}(\theta) \doteq \bigcup_{\alpha \in [\theta]} \underbrace{\bigcap_{n \in \omega} \alpha(n)}_{=\emptyset \text{ pois } \alpha \in X} = \emptyset \quad \zeta$$

□

Definição 6.3.2 (Propriedade Choquet). Um espaço X é dito **Choquet** se II vence o jogo acima.

Apesar de nem sempre o produto de espaços de Baire ser um espaço de Baire, de fato o produto de espaços Choquet é Choquet:

Proposição 6.3.1 (Produto de espaços Choquet é Choquet). *Sejam X_i espaços Choquet, então $\prod X_i$ é Choquet.*

Demonstração. Sejam σ_i vencedoras de II do jogo de Choquet em cada espaço. Vamos construir σ vencedora do jogo no produto. Seja $A_0 \subset \prod X_i$ primeira jogada de I no jogo de Choquet jogado no produto. Pelas regras do jogo, deve haver um **básico** não vazio $B_0 \subset A_0$. Tome $\tilde{A}_{0,1}$ como sendo a reação de σ_i à $\pi_i(B_0)$. Defina $\prod \tilde{A}_{0,i} \doteq \tilde{A}_0$ como a reação de σ à A_0 , jogada legal pelas construções. Repita o processo para jogadas sucessivas de I , obtendo σ estratégia de II bem definida. Seja

$$\langle A_0, \prod \tilde{A}_{i,0}, A_1, \prod \tilde{A}_{i,1}, \dots \rangle \in [\sigma]$$

Note que ele foi construído através dos ramos:

$$\langle \pi_i B_0, \tilde{A}_{i,0}, \pi_i B_1, \tilde{A}_{i,1}, \dots \rangle \in [\sigma_i]$$

Mas pela hipótese, $\bigcap_{k \in \omega} \tilde{A}_{i,k} \neq \emptyset$ ⁷, Então

$$\emptyset \neq \prod_i \left(\bigcap_{k \in \omega} \tilde{A}_{i,k} \right) \subset \bigcap_{k \in \omega} \left(\prod_i \tilde{A}_{i,k} \right)$$

⁷ note que se a sequência de conjuntos é encaixada, no sentido de que $A_{n+1} \subset B_n$ e $B_n \subset A_n$, então a intersecção dos A 's e dos B 's é o mesmo conjunto.

o que atesta que σ é vencedora. \square

Temos também que abertos $A \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ não vazios de espaços Choquet são Choquet. De fato, abertos de A são abertos, logo selecionando no primeiro nível de $(\tau \setminus \{\emptyset\})^{<\omega}$ apenas abertos de A temos exatamente T a árvore do jogo de Choquet jogado no espaço A com topologia induzida. Usando a restrição de σ vencedora de II em T , ou seja, $\sigma \cap T$, teremos estratégia de II . Mais do que isso, $[\sigma \cap T] = [\sigma] \cap [T]$ é subconjunto das sequências de abertos não nulos com intersecção não trivial, da hipótese de σ original ser vencedora, caracterizando $\sigma \cap T$ como estratégia também vencedora do Choquet em A , que será portanto espaço Choquet.

Espaços Choquet de fato carregam algumas similaridades com espaços completos. Note intuitivamente que II tenta mostrar uma espécie de versão combinatorial do teorema de intersecção de Cantor. Aqui temos uma similaridade quanto à propriedade perfeita :

Proposição 6.3.2 (Análogo Choquet de (Proposição 4.2.2)). *Todo metrizable Choquet denso em si mesmo contém uma cópia do espaço de Cantor.*

Demonstração. Fixe σ vencedora de II do jogo de Choquet. Considere a quase-estratégia ρ de I de reage, no turno $2n$, posição s , ao aberto $s(2n-1) = A \neq \emptyset$ da seguinte forma : deve haver $x \in A$. Como X é denso em si mesmo, deve haver $y \neq x$ em A . Tome $\varepsilon \leq \min\{2^{-n}, \frac{d(x,y)}{2}\}$ e defina $\text{Succ}_\rho(s) \doteq \{B(x, \varepsilon), B(y, \varepsilon)\}$.

Olhando apenas para os níveis ímpares de $\rho \cap \sigma$ (partidas possíveis com I considerando realidades alternativas bifurcantes via ρ) temos claramente um esquema de Cantor f e, do critério de vitória para II , os ramos através de f são não vazios. Como os diâmetros estão indo para 0, o ramo através de $s \in 2^\omega$ é unitário $\{\tilde{f}(s)\}$ e **já sabemos que $\tilde{f} : \mathcal{C} \rightarrow X$ é imersão.** \square

Em particular II não vence o jogo de Choquet jogado em um conjunto de Bernstein, que portanto é exemplo de subespaço não Choquet da reta. Já sabemos também que B é espaço de Baire (Corolário 4.2.6) e da caracterização de espaços de Baire (Teorema 6.3.1) temos que $I \nmid$ Choquet jogado em B .

Corolário 6.3.1. *O jogo de Choquet é indeterminado quando jogado em conjuntos de Bernstein.*

6.3.1 O jogo forte de Choquet

O jogo anterior tem a seguinte variação, cuja árvore não daremos descrição explícita na forma de ordem:

Definição 6.3.3 (Jogo forte de Choquet). No **jogo forte de Choquet** temos as seguintes regras : O jogador I joga um aberto pontuado⁸ e II deve responder com $B \subset A$ tal que $x \in B$. O alvo de I é o conjunto das sequências com intersecção vazia. Um espaço é dito **fortemente Choquet** se II vence o jogo forte de Choquet jogado neste espaço.

Note que se σ é estratégia de II , adentrar dois níveis a partir posição $U \in \tau$, de turno de I , dentro de σ , fornece base de U . De fato, dado V aberto de U e $x \in U$, σ deverá responder a jogada (x, V) com $x \in W \subset U$ aberto. A **fortemente** na definição acima vem da

Proposição 6.3.3. *Espaços fortemente Choquet são espaços Choquet.*

Para ver isso, basta notar que estratégias vencedoras de II , do jogo forte de Choquet, se traduzem quase que diretamente em estratégias vencedoras de II do jogo de Choquet. O que segue é o exercício 8.16 de (KECHRIS, 1995):

Proposição 6.3.4. *Temos as seguintes assertivas:*

- (i) *Espaços não vazios completamente metrizáveis e espaços localmente compactos são fortemente Choquet.*
- (ii) *Produto de espaços fortemente Choquet é fortemente Choquet. Abertos de fortemente Choquet é fortemente Choquet.*
- (iii) *Espaços G_δ de um fortemente Choquet é fortemente Choquet.*
- (iv) *Espaços X que contém G_δ denso Choquet são Choquet.*

⁸ (A, x) com $x \in A$

(v) A imagem por função contínua e aberta de fortemente Choquet é fortemente Choquet.

6.3.2 Uma caracterização de espaços poloneses

Considere um espaço topológico X , uma família de abertos \mathcal{U} e uma base da topologia de X dada por \mathcal{B} . Note que podemos **refinar** \mathcal{U} , usando elementos de \mathcal{B} . Encontramos uma família de abertos básicos $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ cujos elementos $V \in \mathcal{V}$ estão contidos em algum $U \in \mathcal{U}$. Adicionalmente, podemos fazer isso de forma a termos a mesma reunião: $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup \mathcal{U}$.

Definição 6.3.4 (Refinamentos). Um **refinamento** de uma família $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}X$ é uma família \mathcal{V} de mesma reunião tal que todo $V \in \mathcal{V}$ está contido em algum $U \in \mathcal{U}$. Dizemos que este é um **refinamento pontualmente finito** se $\forall x \in X \{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ é finito. Adicionalmente, se estivermos num contexto métrico, dizemos que \mathcal{V} é **ε -refinamento** se $\forall V \in \mathcal{V} \text{ diam} V < \varepsilon$.

Note que refinamento pontualmente finito de ε -refinamento é ε -refinamento pontualmente finito.

Lema 6.3.2 (Refinamento de família de abertos). *Seja \mathcal{U} família de abertos não vazios de um espaço metrizável segundo enumerável X . Então \mathcal{U} tem ε -refinamento pontualmente finito \mathcal{V} .*

Demonstração. Conseguimos encontrar ε -refinamento de básicos (bolas abertas) $\{U_n\}_{n \in \omega}$ de \mathcal{U} ⁹. Da regularidade de espaços metrizáveis, podemos encontrar refinamento $\{U_n^p\}_{n,p \in \omega}$ ainda enumerável tal que

$$(i) \overline{U_n^p} \subset U_n.$$

$$(ii) \bigcup_{p \in \omega} U_n^p = U_n.$$

$$(iii) U_n^{p+1} \subset U_n^p.$$

⁹ separabilidade

Tome $V_m \doteq U_m \setminus \bigcup_{n < m} \overline{U_n^m}$ família \mathcal{V} de abertos, candidata a refinamento. Claramente $\bigcup V_m \subset \bigcup U_m$. Se $x \in \bigcup_{n \in \omega} U_n$, tome o menor $k \in \omega$ com $x \in U_k$, de fato

$$x \in V_k = U_k \setminus \bigcup_{n < k} \overline{U_n^k}$$

Se $x \in U_k$ e não estivesse em V_k haveria $n < k$ com $x \in \overline{U_n^k} \subset U_n$, contrariando minimalidade de k . Seja $x \in \bigcup \mathcal{V}$, considere então $\{V_n : x \in V_n\}$, deve haver par k, p com $x \in U_k^p$, então $x \in U_k^{\bar{p}}$ para $\bar{p} \geq p$, nesse caso $x \notin V_{\bar{p}}$ para $\bar{p} \geq p$, o que caracteriza V como refinamento finito de ε -refinamento, um ε -refinamento finito. \square

Teorema 6.3.2 (8.17 em (KECHRIS, 1995)). *Seja X separável metrizável e \hat{X} seu completamento. Então*

(i) X é Choquet $\iff X$ é comagro em \hat{X} .

(ii) X é fortemente Choquet $\iff X$ é G_δ de \hat{X} $\iff X$ é polonês.

Demonstração. Mostremos cada um dos itens:

- (i) • Seja agora X subespaço Choquet denso de \hat{X} com métrica $d \leq 1$ completa. Fixe σ vencedora de II . Mais uma vez, como no Teorema 6.3.1, avançar dois níveis em σ devolve π -base de X e fazemos I jogar de acordo com quase-estratégia que força II a jogar subfamília maximal de π -básicos dois a dois disjuntos todos com diâmetro $\leq 2^{-n}$, onde n é o nível atual na árvore do jogo. Se I joga de acordo com ρ e II de acordo com σ , da construção temos que olhando apenas para os níveis pares de $\rho \cap \sigma$ teremos esquema regular $f : \rho \cap \sigma \rightarrow \tau \setminus \{\emptyset\}$ de abertos $f(s)$ cujos níveis $D_n \doteq \text{level}(f, n)$ são densos em X , que é denso em seu completamento, logo D_n é denso em \hat{X} . Da hipótese de que σ vence e pela disjunção dos abertos via construção, podemos usar a Lema 3.2.1 e concluir que $\mathcal{A}f \subset X \subset \hat{X}$ é G_δ denso de \hat{X} . Nesse caso X é comagro.

- Se X é comagro em \hat{X} no completamente metrizável (de Baire) então contém um G_δ U denso em \hat{X} . Nesse caso U é G_δ de fortemente Choquet \hat{X} , é portanto fortemente Choquet ([Proposição 6.3.4](#)) e, em particular, Choquet ([Proposição 6.3.3](#)). Note que U é então G_δ Choquet denso de X , que deve então ser Choquet.
- (ii) Note que a segunda implicação bilateral se resume ao [Corolário 3.1.1](#) somado às hipóteses de segundo enumerabilidade, resta mostrar então a primeira.
- Considere σ vencedora de II no jogo forte de Choquet jogado em X . A topologia de $X \hookrightarrow \hat{X}$ é de subespaço. Fixemos métrica compatível de \hat{X} . Em cada posição $U \cap X$ aberto relativo no nível n da árvore do jogo, adentrando dois níveis em σ obtemos base \mathcal{B} de U , pois $X \cap U$ é denso em U . Em particular [a reunião desta base \$\mathcal{B}\$ é \$U\$](#) . Considere ρ a quase-estratégia de I que força II a selecionar as formas locais $V_n \cap X$ de um 2^{-n} -refinamento **finito** V_n de \mathcal{B} . Olhando apenas para os níveis pares temos esquema de regular¹⁰ $f : T \rightarrow \tau_{\hat{X}} \setminus \emptyset$. Note que os níveis $\text{level}(n, f)$ são abertos [e contém \$X\$](#) , e então $X \subset \mathcal{B}f \doteq \bigcap_{n \in \omega} \text{level}(n, f)$. Tome agora $x \in \mathcal{B}f$, pela construção temos que a subárvore $S \doteq \{t \in T : x \in f(t)\} \leq T$ [se ramifica finitamente](#), o que pelo [Lema 3.2.2](#) nos dá que $\mathcal{B}f = \mathcal{A}f \subset X$, mas então

$$X = \bigcap_{n \in \omega} \text{level}(n, f)$$

é um G_δ , como queríamos.

- Subconjuntos G_δ de espaços fortemente Choquet são fortemente Choquet. Alternativamente, basta observar que G_δ de completamente metrizável é completamente metrizável, logo X é fortemente Choquet.

□

Corolário 6.3.2 (Caracterização de Polonês). *Poloneses são segundo enumeráveis **TI**, regulares e fortemente Choquet.*

¹⁰ Das regras do jogo

6.4 O jogo de Banach-Mazur e a propriedade de Baire

Vamos alterar ligeiramente o jogo de Choquet para definir o seguinte jogo

Definição 6.4.1 (Jogo de Banach Mazur). Dado $A \subset X$, o **jogo de Banach-Mazur** $BM_X(A)$, ou $BM(A)$ se o espaço X subjacente está claro, é definido como segue: começando pela raiz $\langle \rangle \doteq \langle X \rangle$ da árvore do jogo, I e II alternam jogando abertos não vazios encaixados, como no **jogo de Choquet**, o que nos dá a árvore do jogo T . O alvo de II é definido como as sequências $s \in [T]$ tais que $\bigcap_{n \in \omega} s(n) \subset A$, logo o alvo de I são sequências s de abertos com $(\bigcap_{n \in \omega} s(n)) \cap X \setminus A \neq \emptyset$.

Antes de seguir, vamos enunciar alguns resultados preliminares. A intenção é deixar claro a estrutura auto-similar destes jogos, assim como obter relacionamento entre o jogo de Choquet e o jogo de Banach-Mazur.

Lema 6.4.1. *Considere as seguintes afirmações :*

- (i) *Seja A posição de altura ímpar, considere $BM_A(\emptyset)$ é dual de $(\text{Choquet}(X))_{\langle A \rangle}$.*
- (ii) *Se X é Choquet então I tem estratégia vencedora em $BM_A(\emptyset)$, onde A é aberto não vazio.*
- (iii) *Se X é Choquet com d métrica sobre X tal que τ_X é mais fina que τ_d , então para qualquer aberto V existe estratégia σ vencedora de I em $BM_V(\emptyset)$ tal que todo ramo $s \in [\sigma]$ tem $\bigcap_{n \in \omega} s(n)$ unitário.*

No resultado a seguir, queremos mostrar que não há perda de generalidade ao assumirmos que os jogadores escolhem apenas abertos básicos.

Proposição 6.4.1. *Considere X um espaço topológico com base \mathcal{B} . O jogo de Banach-Mazur, jogado em X , é equivalente ao jogo de Banach-Mazur, também jogado em X , com a regra adicional de que os jogadores podem jogar apenas elementos da base \mathcal{B} .*

Demonstração. Chamemos de $BM'(A)$ jogo onde apenas jogadas em \mathcal{B} são válidas, note que a árvore deste jogo é subárvore própria de $BM(A)$. Mantenha o critério de vitória.

- Seja σ vencedora de I de $BM(A)$, queremos $\tilde{\sigma}$ vencedora de I de $BM'(A)$. Seja $V_n \neq \emptyset$ posição de altura $2n$ em $BM'(A)$. Extraímos resposta $A_n \subset V_n$ de σ . Tome $B_n \in \mathcal{B}$ básico não vazio com $B_n \subset A_n$, definimos B_n como resposta de $\tilde{\sigma}$ em $BM'(A)$. Temos então que

$$\begin{aligned} \tilde{s} &\in \langle X, B_0, V_1, B_1, V_2, B_2, \bullet \bullet \bullet \rangle \\ &\in [\tilde{\sigma}] \quad \text{em } BM'(A) \end{aligned}$$

Corresponde a

$$\begin{aligned} s &\in \langle X, A_0, V_1, A_1, V_2, A_2, \bullet \bullet \bullet \rangle \\ &\in [\sigma] \quad \text{em } BM(A) \end{aligned}$$

E como σ é vencedora, $\bigcap_{n \in \omega} \tilde{s}(n) = \bigcap_{n \in \omega} V_n = \emptyset$, e portanto $\tilde{\sigma}$ é vencedora.

- Seja σ vencedora de I de $BM'(A)$, queremos $\tilde{\sigma}$ vencedora de I de $BM_X(X)$. Seja $V_n \neq \emptyset$ posição de altura $2n$ em $BM_X(X)$ ¹¹, tome $B_n \in \mathcal{B}$ básico não vazio com $B_n \subset V_n$, extraímos resposta $A_n \subset B_n$ de σ ao básico B_n e definimos isso como resposta de $\tilde{\sigma}$ em $BM(A)$. Temos então que

$$\begin{aligned} \tilde{s} &\in \langle X, A_0, V_1, A_1, V_2, A_2, \bullet \bullet \bullet \rangle \\ &\in [\tilde{\sigma}] \quad \text{em } BM(A) \end{aligned}$$

Corresponde a

$$\begin{aligned} s &\in \langle B_0, A_0, B_1, A_1, B_2, A_2, \bullet \bullet \bullet \rangle \\ &\in [\sigma] \quad \text{em } BM'(A) \end{aligned}$$

E como σ é vencedora, $\bigcap_{n \in \omega} \tilde{s}(n) = \bigcap_{n \in \omega} A_n = \emptyset$, e portanto $\tilde{\sigma}$ é vencedora.

¹¹ $V_0 = X$ pela definição do jogo.

Mostra-se de modo análogo a equivalência $\left[\begin{array}{c} II \uparrow BM'(A) \\ \iff \\ II \uparrow BM(A) \end{array} \right]$ entre as vitórias de II entre estes jogos. \square

Note que I está tentando encontrar um lugar topologicamente grande dentro de A . Se A é nunca-denso, por exemplo, I pode responder à posição $V \neq \emptyset$ com aberto não vazio $W \subset X \setminus A$. A partir desta posição, seguiria um jogo de Choquet onde II tem alvo \emptyset .

Teorema 6.4.1 (8.33 em (KECHRIS, 1995)). *Seja X espaço topológico qualquer e $A \subset X$:*

- (i) *O subconjunto A é comagro se, e somente se, II tem uma estratégia vencedora do jogo $BM(A)$.*
- (ii) *Suponha que X é Choquet e que exista d métrica sobre X tal que τ_X é mais fina que topologia τ_d induzida por d . Nesse caso, o subconjunto A é magro num aberto não vazio se, e somente se, I tem estratégia vencedora em $BM(A)$.*

Demonstração. Mostremos cada uma das afirmativas:

- (i)
 - Considere um G_δ denso $D \doteq \bigcap_{n \in \omega} D_n \subset A$, onde cada D_n é aberto denso. Para cada jogada $V_n \neq \emptyset$ de I , considere σ de II respondendo com $V_n \cap D_n$, aberto não vazio por hipótese. Note que se $s \in [\sigma]$, $\bigcap_{n \in \omega} s(n) \subset \bigcap D_n \subset A$, caracterizando σ como vencedora.
 - Seja II vencendo $BM(A)$ com a estratégia ρ . Assim como em Teorema 6.3.1, observe que avançar dois níveis a partir de $V_{2n} \in \tau$, de posição de altura par, em ρ , fornece π -base do aberto atual, fornecida por respostas de ρ . Considere σ quase-estratégia de I que força, em cada turno, ρ a jogar subconjunto maximal dois a dois disjuntos desta π -base¹². De novo, olhando apenas para as alturas pares $\sigma \cap \rho$ temos esquema regular de abertos $f : T \rightarrow \tau \setminus \emptyset$ tal que $\overline{\bigcup_{t \in \text{Succ}(s)} f(t)} = f(s)$, o que nos dá que cada nível é denso em $f(\langle \rangle) = X$. Nesse caso aplicando Lema 3.2.1 temos $\mathcal{B}f = \mathcal{A}f$ é a intersecção de enumeráveis abertos densos e $\mathcal{A}f \subset A$, caracterizando A como comagro.

¹² Seleção.

- (ii) • Seja A magro em V , nesse caso existe $\{D_n\}_{n \in \omega}$ sequência de **densos abertos** com $D \doteq \bigcap_{n \in \omega} D_n \subset V \setminus A$. Em particular, V é aberto não vazio de Choquet, logo I vence $BM_V(\emptyset)$ com σ . Vamos definir $\tilde{\sigma}$ vencedora de I em $BM(A)$. A primeira jogada é V . Para cada jogada $U_n \neq \emptyset$ de II , no nível $2n$, tome como resposta V_n de $\tilde{\sigma}$ à U_n como sendo a resposta de σ a $U_n \cap (\bigcap_{k \leq n} D_k)$ **aberto não vazio**, logo jogada válida. Note que

$$\langle X, V, U_1, V_1, \dots \rangle \in [\tilde{\sigma}] \quad \text{em } BM_X(A)$$

Corresponde ao ramo

$$\langle V, U_1 \cap D_1, V_1, U_2 \cap D_1 \cap D_2, \dots \rangle \in [\sigma] \quad \text{em } BM_V(\emptyset)$$

Ambas as sequências têm mesma intersecção, que estará contida em $D \subset V \setminus A$ e é não vazia, devido à vitória de σ ¹³, o que dá vitória para I .

- Seja σ vencedora de I e V primeiro aberto jogado por I . Gostaríamos demonstrar que A é magro em um aberto. Para isso bastaria mostrar que A é magro em V . A estratégia usual é construir um comagro no complementar, entretanto, que só podemos garantir que pra todo ramo s de σ temos $(\bigcap_{n \in \omega} s(n)) \cap V \setminus A \neq \emptyset$, não que $(\bigcap_{n \in \omega} s(n)) \subset V \setminus A$. Mas, das hipóteses e [Lema 6.4.1](#) temos $\tilde{\sigma}$ vencedora cujos ramos são unitários. Temos então que avançar dois níveis a partir de posição de altura ímpar de $\tilde{\sigma}$ nos fornece uma π -base. Considere ρ que força $\tilde{\sigma}$ a jogar sub-conjunto maximalmente dois a dois disjuntos desta π -base. Olhando para os níveis ímpares de $\rho \cap \tilde{\sigma}$, temos então esquema regular $f : T \rightarrow \tau \setminus \{\emptyset\}$ tal que $\bigcup_{t \in \text{Succ}(s)} f(t) = f(s)$, o que nos dá que cada nível é denso em $f(\langle \rangle) = V$. Nesse caso aplicando [Lema 3.2.1](#) temos $\mathcal{B}f = \mathcal{A}f$ é a intersecção de enumeráveis abertos densos de V e $\mathcal{A}f \subset V \setminus A$ ¹⁴, caracterizando A como magro.

□

¹³ Aqui mora a importância da hipótese de X ser Choquet. A estratégia auxiliar σ foi importante para garantir intersecção não vazia.

¹⁴ A intersecção de cada ramo $s \in [\sigma]$ é unitário e intercepta o complementar não trivialmente, por isso podemos concluir que $\mathcal{A}f \subset V \setminus A$

Corolário 6.4.1 (Caracterização da propriedade de Baire por jogos). *São equivalentes, em X Choquet com topologia mais fina que métrica d .*

- (i) $A \subset X$ tem propriedade de Baire.
- (ii) $A \setminus U(A)$ é magro ([Proposição 4.2.10](#)).
- (iii) $A \setminus U(A)$ é magro em todo aberto (não vazio) de X ([Corolário 4.2.4](#)).
- (iv) $BM(A \setminus U(A))$ é determinado ([Teorema 6.4.1](#)).

No que segue, suponha que X seja espaço polonês. Queremos realizar $BM_X(A)$ como subjogo do jogo de Gale-Stewart. Note que, pela [Proposição 6.4.1](#), basta codificar $BM'(A)$, jogo restrito a uma base enumerável de X , como jogo de Gale-Stewart. Sem perda de generalidade, podemos adicionar a regra que os diâmetros dos abertos devem ser estritamente decrescentes:

Corolário 6.4.2 (Codificando como jogo de Gale-Stewart). *Podemos ver a árvore do jogo $BM'(A)$ como uma subárvore de $\omega^{<\omega}$, que denotaremos por S . Mapeando posições em abertos como $\langle \dots, U \rangle \in T \mapsto U \subset X$, temos um [esquema de Souslin](#) $f : S \rightarrow \tau$. Note que nenhum dos abertos na imagem é vazio, função contínua $\tilde{f} : [S] \rightarrow X$. Note que um ramo de s dá vitória para II quando $\tilde{f}(s) \in A$. Do [Exemplo 2.2.1](#), temos que $(S, \tilde{f}^{-1}(F))$ é equivalente ao jogo $BM(A)$.*

6.4.1 Propriedade de Baire para analíticos

Vamos mais uma vez considerar a versão desdobrada do jogo. Aqui vamos fixar X completamente metrizável com base enumerável \mathcal{B} .

Definição 6.4.2. Vamos definir o **Jogo desdobrado de Banach-Mazur** $BM_u(F)$. Além de jogar básicos encaixados, como em BM , agora II joga também um natural. Assim como no jogo anterior, I e II escolhem um aberto básico contido no aberto da posição atual. Se estamos no nível n , então este básico deve ter diâmetro $\leq \frac{1}{2^n}$. Ao fim de ω rodadas ficamos com uma sequência de naturais α , determinada por II , e uma sequência de abertos U_n , com intersecção unitária $\bigcap U_n = \{x\}$. Dado $F \subset X \times \mathcal{N}$, dizemos que II venceu se $(x, \alpha) \in F$. Um ramo genérico deste jogo é

$$\langle (X, \langle \rangle), U_0, (V_0, \langle k_1 \rangle), U_1, (V_1, \langle k_1, k_2 \rangle), \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \rangle$$

Mais uma vez, vamos codificar o jogo desdobrado como jogo de Gale-Stewart.

Proposição 6.4.2 (Codificando Como Jogo de Gale-Stewart). *No que segue, queremos realizar $BM_u(F)$ como subjogo do jogo de Gale-Stewart. Considere $A \doteq \mathcal{B} \sqcup (\mathcal{B} \times \omega^{<\omega})$. Como A é enumerável, podemos ver a árvore do jogo $BM_u(F)$, que denotaremos por T , como uma subárvore de $\omega^{<\omega}$, que denotamos por S . Mapeando posições em abertos como $\langle \dots, (U, s) \rangle, \langle \dots, (U, s), V \rangle \in T \mapsto (U \times \Sigma(s)) \subset X \times \mathcal{N}$, temos um esquema de Souslin. Fazemos o mesmo com S , árvore isomorfa a T . Note que nenhum dos abertos na imagem é vazio, o que dá origem à contínua $\tilde{f}: [S] \rightarrow X \times \mathcal{N}$. Note que um ramo de s dá vitória para I quando $\tilde{f}(s) \in F$. Do [Exemplo 2.2.1](#), temos que $(S, \tilde{f}^{-1}(F))$ é equivalente ao jogo $BM_u(F)$.*

Antes de iniciar a próxima discussão, lembremos que avançar dois níveis dentro de uma estratégia, a partir de uma posição onde é turno do adversário, fornece uma π -base da posição atual.

Teorema 6.4.2 (21.5 em (KECHRIS, 1995)). *O jogo desdobrado $BM_u(F)$ é determinado $\implies BM(\exists^{\mathcal{N}} F)$ é determinado.*

Demonstração. Vamos mostrar que se II vence a versão desdobrada do jogo, então II vence $BM(\exists^{\mathcal{N}} F)$, e que se I vence a versão desdobrada, então $\exists^{\mathcal{N}} F$ é magro em um aberto não vazio, o que pelo [Teorema 6.4.1](#) significa que I vence $BM(\exists^{\mathcal{N}} F)$.

- Suponha que II vence $BM_u(F)$ com a estratégia ρ . Queremos construir $\tilde{\rho}$ estratégia vencedora de II em $BM(\exists^{\mathcal{N}} F)$. Dada posição V , tome como resposta de $\tilde{\rho}$ como U , onde (U, s) é a resposta de ρ à posição V . Note que

$$\langle (X, \langle \rangle), U_0, (V_0, \langle k_1 \rangle), U_1, (V_1, \langle k_1, k_2 \rangle), \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \rangle \in [\rho] \quad \text{em } BM_u(F)$$

Corresponde ao ramo

$$\langle X, U_0, V_0, U_1, V_1, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot \rangle \in [\tilde{\rho}] \quad \text{em } BM(\exists^{\mathcal{N}} F)$$

Via identificação usual, o primeiro ramo é ponto $(x, \alpha) \in X \times \mathcal{N}$. Do critério de vitória de ρ , temos que $(x, \alpha) \in F$, o que quer dizer que $x \in \exists^{\mathcal{N}} F$ ¹⁵.

- Suponha que I vence $BM_u(F)$ com a estratégia σ . Note que o jogo pode ser codificado como (T, A) , onde T é árvore enumerável.
 - Tome par $(p = \langle \dots (V, s), U \rangle, k) \in T \times \omega$, onde p é uma posição de altura ímpar. Considere $\mathcal{B}_{(p,k)}$ conjunto de abertos, respostas de σ às jogadas $(V, s \frown k)$, onde $V \subset U$ é aberto não vazio. Esta é uma π -base.
 - Defina $N(p, k) \doteq U \setminus \left(\bigcup_{V \in \mathcal{B}_{(p,k)}} V \right)$. Pelo que foi comentando, $N(p, k)$ é nunca-denso em U , e portanto em X .
 - Como T é enumerável, $N \doteq \bigcup_{(p,k) \in T \times \omega} N(p, k)$ é magro em X .

Se mostrarmos que $U_0 \cap \exists^{\mathcal{N}} F \subset N$, acabamos. Tome $x \in U_0 \cap \exists^{\mathcal{N}} F$. Note que deve haver $\alpha \in \mathcal{N}$ com $(x, \alpha) \in F$. Considere ρ quase-estratégia que, no nível $2n+2$, joga o natural $\alpha(n)$. Suponha que para toda posição $p = \langle \dots, U \rangle \in \sigma$, de altura ímpar $2n+1$, tal que $x \in U$, existe jogada de II admissível $(V, \alpha \upharpoonright (n+1))$ com resposta U' de σ tal que $x \in U'$. Acabamos em ramo $(x, \alpha) \in [\sigma] \cap F$, mas então II venceu, um absurdo. Deve haver então posição de altura ímpar $2n+1$ maximal $p = \langle \dots (V, s), U \rangle$ tal que x não é elemento de nenhum $\mathcal{B}_{(p, \alpha(n))}$, ou seja, $x \in N(p, \alpha(n))$.

□

Corolário 6.4.3 (Lusin-Sierpinski). *Seja X polonês sem pontos isolados. Considere $A \in \Sigma_1^1(X)$. Deve haver $C \subset X \times \mathcal{N}$ fechado tal que $\exists^{\mathcal{N}} C = A$. Considere o jogo $BM_u(C)$. Note que ele é equivalente ao jogo de Gale-Stewart $(S, \tilde{f}^{-1}(C))$, com alvo fechado. Do Teorema de Gale-Stewart, este jogo é determinado, então $BM_u(C)$ é determinado, o que pelo Teorema 6.4.2 dá que $BM(A)$ é determinado. Como completos são Choquet, do Corolário 6.4.1 temos $BP(A)$.*

6.5 Axioma da determinação

Vamos começar com uma definição formal do axioma da determinação:

¹⁵ Pois $\exists \alpha \in \omega^\omega = \mathcal{N} \left((x, \alpha) \in F \right)$

Definição 6.5.1 ($[AD]$). O **axioma da Determinação** ($[AD]$) afirma que jogos de Gale-Stewart $(\omega^{<\omega}, X)$ são determinados para qualquer $X \subset \omega^\omega$.

Não podemos evocar o **axioma da escolha** enquanto o axioma da determinação é considerado como parte da teoria, visto que

$$[AC] \implies \sim [AD]$$

Pela **existência** de conjunto de Bernstein de $\omega^{<\omega}$ (**Teorema 2.3.2**), o que implica que $(\omega^{<\omega}, B)$ não é determinado (**Corolário 2.3.2**). Todos os teoremas evocados sob o axioma da determinação devem, portanto, ter demonstrações livres do axioma da escolha.

Antes de aplicar o axioma aos jogos topológicos, vamos obter um resultado sobre jogos determinados por subárvores. Considere $T \leq \omega^{<\omega}$, e um jogo (T, X) , basicamente o que queremos obter é um jogo $(\omega^{<\omega}, \tilde{X})$ tal que:

- O primeiro jogador que optar por elemento fora de T perde.
- Desde que nenhum jogador faça isso, o jogo segue como em (T, X) .

Formalizando, ficamos com a seguinte definição:

Definição 6.5.2 (Jogo induzido). Dada uma subárvore própria $T \leq \omega^{<\omega}$ e $X \subset [T]$. Considere $s \in T$ e um sucessor $t \in \text{Succ}(s) \setminus T$.

- Acrescente aos alvos \tilde{X}
- Se $h(s)$ é par (turno de I) então acrescente $\Sigma(t)$ ao complementar do alvo de I .
- Se $h(s)$ é ímpar (turno de II) acrescente $\Sigma(t)$ ao alvo de I .

Está definido então \tilde{X} .

Lema 6.5.1. O jogo induzido $\tilde{\mathcal{G}} \doteq (\omega^{<\omega}, \tilde{X})$ é equivalente ao jogo original $\mathcal{G} \doteq (T, X)$.

Corolário 6.5.1. Seja T subárvore de $\omega^{<\omega}$. Suponha que vale o axioma da determinação. Então (T, X) , equivalente a um jogo de Gale-Stewart $(\omega^{<\omega}, \tilde{X})$, é determinado.

O corolário acima nos diz que, sob o axioma da determinação um jogo (T, X) , cuja árvore tem altura enumerável e níveis enumeráveis, é determinado. Note que em [Proposição 6.2.1](#) e [Corolário 6.4.2](#) nós codificamos o jogo $*$ e o jogo de Banach-Mazur com uma árvore apresentando estas características, logo:

Corolário 6.5.2. *O axioma da determinação implica que vale a hipótese do contínuo em $\mathcal{P}X$, para X polonês perfeito.*

Ou seja, vale a propriedade perfeita para subconjuntos da reta. Em particular, temos a hipótese do contínuo.

Corolário 6.5.3. *O axioma da determinação implica que vale a propriedade de Baire em $\mathcal{P}X$, para X polonês perfeito.*

De maneira análoga, podemos obter algumas consequências usando o jogo de Choquet. Considere um espaço X de Baire segundo enumerável. Codificando o jogo de Choquet como um jogo de Gale-Stewart, temos que II deve ter estratégia vencedora, ou seja, o axioma da determinação implica que todo Baire é Choquet. Como produto de Choquet é Choquet, o axioma da determinação implica espaços segundo enumeráveis de Baire são fechados com relação a produtos.

REFERÊNCIAS

- AWODAY, S. **Category Theory**. [S.l.], 2010. Citado na página 13.
- BELLINI M. K.; RODRIGUES, V. O. **Characterization of the Cantor Set**. [S.l.], 2019. Disponível em: <[Bellini,M.K.andRodrigues,V.O.](#)> Citado na página 74.
- Existence of bases implies the axiom of choice. In: BLASS, A. (Ed.). [S.l.: s.n.], 1984, (Contemporary Mathematics, v. 31). Citado na página 117.
- BRIAN, W. R. **COMPLETELY ULTRAMETRIZABLE SPACES AND CONTINUOUS BIJECTIONS**. [S.l.], 2010. Disponível em: <<https://wrbrian.files.wordpress.com/2012/01/cumet2.pdf>>. Citado na página 9.
- CONWAY, J. **On Numbers and Games**. CRC Press, 2000. ISBN 9781439864159. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=y0BZDwAAQBAJ>>. Citado nas páginas 34, 39, 41 e 42.
- DALEN, D. **Logic and Structure**. Springer, 2004. (Universitext (1979)). ISBN 9783540208792. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=4u9gQ6pctuIC>>. Citado nas páginas xviii e 33.
- DIAMOND, H.; GELLES, G. **Relations Among Some Classes of Subsets of R**. [S.l.], 1984. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2322165>>. Citado na página 123.
- DIESTEL, R. **End spaces and spanning trees**. [S.l.], 2004. Citado na página 16.
- FOLLAND, G. **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. [S.l.]: Wiley, 2013. (Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts). ISBN 9781118626399. Citado na página 117.
- Huttenlocher, D. P.; Klanderma, G. A.; Rucklidge, W. J. Comparing images using the hausdorff distance. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, v. 15, n. 9, p. 850–863, 1993. Citado na página 175.
- ISAACS, R. **Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization**. [s.n.], 1999. ISBN 0486406822,9780486406824. Disponível em: <<http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=8BE15CFC71EA4298555CC81F7161C353>>. Citado na página 38.

KECHRIS, A. **Classical Descriptive Set Theory**. [S.l.], 1995. Citado nas páginas 39, 65, 74, 78, 133, 140, 146, 148, 152, 155 e 175.

KECHRIS, A. S. The axiom of determinacy implies dependent choices in $l(r)$. **The Journal of Symbolic Logic**, [Association for Symbolic Logic, Cambridge University Press], v. 49, n. 1, p. 161–173, 1984. ISSN 00224812. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2274099>>. Citado nas páginas xiii e xix.

KHARAZISHVILI, A. **Nonmeasurable Sets and Functions**. Elsevier Science, 2004. (ISSN). ISBN 9780080479767. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=CCR9k2khTvwC>>. Citado nas páginas 116 e 120.

KHOMSKII, Y. **Infinite Games, Summer course at the University of Sofia, Bulgaria**. [S.l.], Júlio, 2010. Disponível em: <<https://www.math.uni-hamburg.de/home/khomskii/>>. Citado na página 46.

KURATOWSKI, K. Applications of the baire-category method to the problem of independent sets. **Fundamenta Mathematicae**, v. 81, n. 1, p. 65–72, 1973. Citado nas páginas 175 e 179.

LARSON, P. B. **The Stationary Tower: Notes on a Course by W. Hugh Woodin**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2004. (University Lecture Series 032). ISBN 0-8218-3604-8, 9780821836040, 43-1978-285-2. Citado nas páginas xiii e xix.

LEBESGUE, H. Sur les fonctions représentables analytiquement. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 1, p. 139–216, 1905. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/234955>>. Citado na página 81.

MARTIN, D. A.; STEEL, J. R. A proof of projective determinacy. **Journal of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 2, n. 1, p. 71–125, 1989. ISSN 08940347, 10886834. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1990913>>. Citado nas páginas xiii, xix e 62.

MELLARAY, J. **POLISH GROUPS AND BAIRE CATEGORY METHODS**. [S.l.]. Citado na página 112.

Chapter 4 games and game quantifiers. In: MOSCHOVAKIS, Y. N. (Ed.). **Elementary Induction on Abstract Structures**. Elsevier, 1974, (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, v. 77). p. 53 – 64. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0049237X08717981>>. Citado na página 133.

MOSCHOVAKIS, Y. N. **Notes on Set Theory**. [S.l.], 1994. Citado nas páginas xx, 88 e 169.

OXTOBY, J. C. **Measure and Category: A Survey of the Analogies between Topological and Measure Spaces**. 2d ed. ed. [S.l.], 1971. (Graduate Texts in Mathematics 2). Citado nas páginas 86, 90, 92, 100, 103, 105, 109, 121 e 133.

RECIĄW, I. Every lusin set is undetermined in the point-open game. **Fundamenta Mathematicae**, v. 144, n. 1, p. 43–54, 1994. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/212014>>. Citado na página 127.

SOIFER, A. **The Mathematical Coloring Book**. [S.l.: s.n.], 2009. Citado na página 18.

SRIVASTAVA, S. **An Elementary Proof of the Borel Isomorphism Theorem**. [S.l.], 1994/1995. Disponível em: <http://math.iisc.ac.in/~manju/MartBM/RaoSrivastava_borel_isomorphism.pdf>. Citado na página 185.

_____. **A Course on Borel Sets**. [S.l.], 1998. Citado nas páginas 65, 78 e 83.

STROMBERG, K. An elementary proof of steinhaus's theorem. In: . [S.l.: s.n.], 1972. Citado na página 110.

TSERUNYAN, A. **INTRODUCTION TO DESCRIPTIVE SET THEORY**. [S.l.], 1994/1995. Disponível em: <http://math.iisc.ac.in/~manju/MartBM/RaoSrivastava_borel_isomorphism.pdf>. Citado nas páginas 19, 65, 74 e 175.

WEIL, A. **L'integration Dans Les Groupes Topologiques Et Ses Applications**. [S.l.]: Edwards, 1938. Citado na página 110.

ÍNDICE

σ -

álgebra produto, [xxvii](#)

σ -álgebra, [xx](#)

k -coloração, [17](#)

ε -

álgebra de borel, [xxv](#)

álgebra gerada, [xxv](#)

filtro, [xx](#)

ideal, [xx](#)

net, [xxiii](#)

refinamento, [147](#)

o peso, [xxii](#)

A

Abertos

locais, [xxii](#)

abertos, [xxi](#)

álgebra, [xx](#), [xxiv](#)

árvore, [2](#)

bem fundada, [32](#)

completa, [4](#)

perfeita, [8](#)

árvore sobre o conjunto A , [4](#)

ínfimo, [xx](#)

órbita transfinita, [xx](#)

altura, [3](#)

alvo, [38](#)

analíticos, [82](#)

aparada, [5](#)

aridade, [179](#)

axioma

da determinação, [xviii](#)

da determinação ($[AD]$), [157](#)

da escolha, [xviii](#)

da escolha dependente, [xviii](#)

da escolha dependente ($[DC]$), [12](#)

B

básicos, [xxii](#)

baire-mensurável, [93](#)

base de hamel, [117](#)

borel-mensurável, [xxvi](#)

C

cadeia, [xx](#)

cardinais, [xxi](#)

cardinal

limite, [xxi](#)

sucessor, [xxi](#)

categoria, [xvii](#)

categoria

de conjuntos finitos, [14](#)

dos conjuntos, [xvii](#)

dos espaços mensuráveis, [xvii](#)

dos espaços topológicos, [xvii](#)

dos poloneses, **xvii**
 classe
 complementar, **77**
 pontual, **77**
 coanalíticos, **82**
 cofinal, **18**
 comagro, **92**
 no aberto, **97**
 compactos, **xxii**
 completamente metrizável, **xxii**
 comprimento, **5**
 cone, **13**
 conjunto
 de bernstein, **45**
 de lusin, **125**
 perfeito, **87**
 conjunto de
 sierpinski, **127**
 conjuntos
 de vitali, **117**
 coproduto, **xviii**
 critério de vitória, **38**
 cubo de hilbert, **xxiv**

D

de Baire, **92**
 de Bruijn-Erdős, **18**
 de segunda categoria, **92**
 derivada de cantor-bendixson, **87**
 determinado, **39**
 domínio
 próprio, **19**
 dualização, **xviii**

E

epimorfismo, **xviii**
 espaço, **xxvi**
 de baire, **11**
 de cantor, **11**
 de Baire, **xxiv**
 ultramétrico, **9**
 espaço de cantor, **xxiv**
 espaço de vietoris, **175**
 Espaço polonês, **xxiii**
 Espaços
 topológicos, **xxi**
 esquema
 de cantor, **69**
 de lusin, **69**
 de souslin, **69**
 estende, **4**
 estratégia, **39**
 canônica, **49**
 existência de uma menor σ -álgebra con-
 tendo família fixada, **xxv**

F

F_σ , **xxii**
 fechado com relação a restrições, **3**
 fechados, **xxi**
 fiel, **xvii**
 filtro, **xx**
 folha, **32**
 forma local de A em V , **91**
 função
 ramo, **19**
 funções

- bimensuráveis, [xxvi](#)
- funções
 - contínuas, [xxii](#)
- functor, [xvii](#)
- G
 - G_δ , [xxi](#)
- H
 - Hausdorff, [xxii](#)
- I
 - ideal, [xx](#)
 - identidade, [xvii](#)
 - inclusão, [xxii](#)
 - inferiormente
 - direcionada, [3](#)
 - fechada, [3](#)
 - \mathcal{I} -quase-iguais, [93](#)
 - isomorfismos, [xviii](#)
- J
 - jogo
 - *, [135](#)
 - de choquet, [142](#)
 - desdobrado de banach-mazur, [154](#)
 - jogo, [38](#)
 - de Banach-Mazur, [150](#)
 - do ponto-aberto, [127](#)
 - dual, [134](#)
 - jogo de gale-stewart, [38](#)
 - jogos
 - duais, [41](#)
 - equivalentes, [41](#)
 - jogos
 - de informação perfeita, [38](#)
 - discretos, [38](#)
- L
 - Lebesgue-mensuráveis, [xxvii](#)
 - limite
 - inferior de kuratowski, [177](#)
 - de kuratowski, [177](#)
 - superior de kuratowski, [177](#)
 - topológico, [177](#)
 - limite inverso, [14](#)
 - localmente compacto, [xxii](#)
- M
 - magro, [92](#)
 - no aberto, [97](#)
 - métrica de hausdorff, [176](#)
 - mal fundada, [32](#)
 - medida, [xxvii](#)
 - de Lebesgue, [xxvii](#)
 - medida exterior de Lebesgue, [xxvii](#)
 - mensurável, [xxvi](#)
 - metrizável, [xxii](#)
 - monomorfismo, [xviii](#)
 - morfismos, [xvii](#)
- N
 - núcleo perfeito, [88](#)
 - número de Hartog, [xxi](#)
 - números naturais, [xix](#)
 - números ordinais, [xvii](#)
 - nunca-denso, [91](#)
- O
 - objeto

final, [xvii](#)
 objetos, [xvii](#)
 opções
 do jogador *I*, [37](#)
 do jogador *II*, [38](#)
 oscilação, [66](#)

P

partida, [38](#)
 pleno, [xvii](#)
 posição defensiva, [47](#)
 posição inicial, [37](#)
 própria, [19](#)
 próprias
 no ramo, [19](#)
 primeira categoria, [92](#)
 produto, [xviii](#)
 topológico, [xxii](#)
 projeções, [xviii](#)
 propriedade
 de baire, [93](#)
 de bernstein, [45](#)
 de lusin, [125](#)
 perfeita, [87](#)

Q

quase-
 aberto, [93](#)
 determinado, [39](#)
 sempre, [108](#)
 quase-estratégia, [39](#)
 defensiva, [47](#)
 quase-igualdade, [93](#)

R

raiz, [2](#)
 ramifica
 em altura limite, [11](#)
 finitamente, [11](#)
 ramos, [5](#)
 rank de cantor-bendixsohn, [88](#)
R-dependente, [179](#)
 refinamento, [147](#)
 pontualmente finito, [147](#)
 residual, [92](#)
 restrição, [3](#)
 restrição aos níveis
 ímpares, [131](#)
 pares, [131](#)
R-independente, [179](#)

S

schröder-bernstein mensurável, [184](#)
 seção
 horizontal, [80](#), [107](#)
 vertical, [80](#), [107](#)
 seletor, [116](#)
 sequencial, [xxiii](#)
 sequencialmente compactos, [xxiii](#)
 sistema inverso, [13](#)
 soma, [xxii](#), [85](#)
 subárvore, [3](#)
 própria, [19](#)
 sub-base, [xxii](#)
 subconjunto
 genérico, [97](#)
 sub-objetos, [xviii](#)

sucessores, 3

T

tautologia, 33

topologia, xxii

totalmente limitado, xxiii

tronco, 3

Z

zero-dimensionais, xxii

Aqui se encontram alguns resultados considerados muito básicos, *correntes* ou *folclóricos* no meio matemático, resultados que saem muito do escopo dos tópicos discutidos na dissertação ou excessivamente trabalhosos.

TEORIA DE CONJUNTOS

A.1 Cardinalidade

Vamos deixar aqui algumas proposições auxiliares de teoria dos conjuntos.

Teorema A.1.1 ((MOSCHOVAKIS, 1994)). *Considere P ordem tal que toda cadeia tem supremo, $\varphi : P \rightarrow P$ monótona expansiva¹ e α ordinal. Dado $p \in P$ qualquer, existe e é única uma função $\mathcal{O} : \alpha \rightarrow P$ monótona tal que*

$$\mathcal{O}(\gamma) = \begin{cases} p & \text{se } \gamma = 0 \\ \varphi(\mathcal{O}(\alpha)) & \text{se } \gamma = \alpha + 1 \\ \mathcal{O}(\alpha) = \sup_{\gamma < \alpha} \mathcal{O}(\gamma) & \alpha \text{ limite} \end{cases}$$

No que segue, gostaríamos de usar apenas substituição, partes e seleção.

Teorema A.1.2 (Hartog). *Dado um conjunto X , $\alpha = \{\beta \in \text{Ord} : \beta \hookrightarrow X\}$ é um conjunto. Em particular, é ordinal que não pode ser incluído injetivamente em X .*

¹ $p \leq \varphi(p)$

A.2 Árvores

Proposição A.2.1 ([DC] Tychonoff restrito). *Produto enumerável de sequencialmente compactos é sequencialmente compacto.*

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \begin{array}{cccc} \xi_0(3)(0) & \xi_1(3)(1) & \xi_2(3)(2) & \xi_3(3)(3) \\ \xi_0(2)(0) & \xi_1(2)(1) & \xi_2(2)(2) & \xi_2(2)(3) \\ \xi_0(1)(0) & \xi_1(1)(1) & \xi_1(1)(2) & \xi_1(1)(3) \\ \xi_0(0)(0) & \xi_0(0)(1) & \xi_0(0)(2) & \xi_0(0)(3) \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ n \end{array} \end{array} \quad \dots$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ i \end{array}$$

Figura 43 – Valor de $\theta(n)(i)$ para alguns pares. A partir da diagonal, temos sequências convergentes.

Demonstração. Se $\prod X_i = \emptyset$, então já ficamos com espaço compacto e acabamos. Caso contrário, tome sequência $\omega \xrightarrow{\xi} \prod_{i \in \omega} X_i$, vamos usar as notações $\xi(n) \in \prod_{i \in \omega} X_i$ e $\pi_i(\xi(n)) = \xi(n)(i) \in X_i$. Queremos construir subsequência convergente. Considere duas sequências $\omega \xrightarrow{\alpha, \beta} \prod_{i \in \omega} X_i$. Defina a relação binária R sobre $Y \doteq (\prod_{i \in \omega} X_i)^\omega \times \omega$ como $(\alpha, m)R(\beta, m+1)$ se β é subsequência de α e $\{\beta(n)(m)\}_{n \in \omega}$ é convergente em X_m . Note que $\text{dom } R = Y$. Temos sequência $\{(\xi_n, k_n)\}_{n \in \omega}$ com $(\xi_0, k_0) = (\xi, 0)$ e $(\xi_n, n)R(\xi_{n+1}, n+1)$. Note que

$$\theta(n)(i) \doteq \begin{cases} \xi(n)(i) & \text{para } n < i \\ \xi_i(n)(i) & \text{para } n \geq i \end{cases}$$

tem cada coordenada $\{\theta(n)(i)\}_{n \geq i} = \{\xi_i(n)(i)\}_{n \geq i}$ convergente em X_i pela construção. \square

TOPOLOGIA

B.1 Bases e Enumerabilidade

Definição B.1.1 (Peso). Dado um espaço topológico (X, τ) , o **peso** de X , denotado

$$\text{weight}X = \min\{\alpha \in |\tau| : \exists \mathcal{B} \text{ base de } X \wedge |\mathcal{B}| = \alpha\}$$

bem definido pois $|\tau|$ é ordinal, portanto bem ordenado.

Teorema B.1.1. *Seja X espaço topológico, \mathcal{B} base qualquer, existe $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ base com $|\mathcal{B}'| = \text{weight}X$.*

Proposição B.1.1. *Considere $x \in X$ ponto de espaço topológico. Seja κ cardinal infinito, a menor cardinalidade de bases locais desse ponto. Dada \mathcal{B}_x base local de x , através do mesmo processo podemos encontrar $\mathcal{B}'_x \subset \mathcal{B}_x$ uma base de cardinalidade κ . O caso finito colapsa para $\kappa = 1$, com $\mathcal{B} = \{U_x\}$, onde U_x é como no [Teorema B.1.1](#).*

No que segue, discutimos **informalmente** a intuição por trás da próxima definição. Note que \mathbb{R}^n tem base de bolas B_k 's cujas fronteiras ∂B_k têm dimensão $n - 1$.

Definição B.1.2 (Pequena dimensão indutiva). Seja $\text{Ind}\emptyset \doteq -1$. Seja \mathcal{A} base de abertos de X com $\forall A \in \mathcal{A} \text{Ind}\partial A \leq k - 1$, dizemos que $\text{Ind}X \leq k$. Se houver, o menor k tal que isso acontece é a pequena dimensão indutiva de X .

Proposição B.1.2 (Zero dimensional são os que têm base clopen). *Seja $X \neq \emptyset$ com base \mathcal{B} de abertos fechados, note que $\partial B = \emptyset$ tem dimensão $\text{Ind } \partial B = -1$. Mas (X, τ) é então espaço zero-dimensional. Se X tem $\text{Ind} X = 0$, X não é vazio, mas deve ter base de clopens.*

B.2 Metrizabilidade, Completude e Compacidade

Seguem alguns resultados auxiliares sobre espaços métricos, compacidade e completude. Começamos por um resultado simples, que aproxima abertos por fechados em espaços métricos.

Lema B.2.1 (Aberto de metrizável é F_σ). *Seja X espaço metrizável então $\tau \subset F_\sigma$.*

Demonstração. Tome d compatível, U aberto de X . Tome $F_n \doteq d(\cdot, X \setminus U)^{-1}([1/n, \infty))$ fechado. Note que $U = \bigcup F_n$. □

Teorema B.2.1 ([DC] Bolzano-Weierstrass). *Todo compacto sequencial é sequencialmente compacto.*

Teorema B.2.2 (Número de Lebesgue). *Seja X métrico sequencialmente compacto¹, então dada \mathcal{C} cobertura aberta de X , deve haver $\delta > 0$, o **número de Lebesgue da cobertura**, tal que todo conjunto de diâmetro $< \delta$ está inteiramente contido em um dos elementos de \mathcal{A} .*

Definição B.2.1 (ε -nets e Espaços Totalmente Limitados). Um ε -net de X é um conjunto finito de pontos A tal que $\bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon) = X$. Um espaço é **totalmente limitado** se $\forall \varepsilon > 0$ existe ε -net.

Proposição B.2.1. *Todo espaço métrico compacto é totalmente limitado, e portanto separável.*

Teorema B.2.3. *Métrico é compacto se, e somente se, é totalmente limitado e completo.*

¹ toda sequência tem subsequência convergente.

Os seguintes teoremas estabelecem propriedades especiais dos espaços de Hilbert e de Cantor sobre algumas classes de espaços topológicos.

Teorema B.2.4 (Metrizável segundo enumerável é subobjeto do Cubo de Hilbert). *Todo espaço metrizável segundo enumerável pode ser incluído no cubo de Hilbert.*

Demonstração. Considere $A = \{(m, n) : \overline{U_n} \subset U_m\}$ onde $\{U_n : n \in \omega\}$ é base enumerável de X espaço métrico. Podemos definir, para $(m, n) \in A$, $f_{(m,n)} : X \rightarrow [0, 1]$, $f_{(m,n)}(\overline{U_n}) = \{0\}$ e $f_{(m,n)}(X \setminus U_m) = \{1\}$ (Uryssohn). Seja $k : \omega \rightarrow A$ enumeração de A , $\varphi(x) \doteq (f_{k(0)}(x), \dots, f_{k(n)}(x), \dots)$. Note que ela é contínua em cada argumento, e portanto contínua. Seja $x \neq y$, tome $x \in A$, $y \notin A$ abertos separando os dois pontos. Tome abertos U_n e U_m com $\overline{U_n} \subset U_m \subset A$, note que $f_{(m,n)}(x) = 0$ e $f_{(m,n)}(y) = 1$, logo $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. □

Teorema B.2.5 (Imersão em Cantor). *Espaço metrizável segundo enumerável e zero-dimensional é subobjeto $X \hookrightarrow 2^\omega$ do subespaço de Cantor, ou seja, é incluído homeomorficamente no espaço de Cantor.*

Demonstração. Tome (U_i) base enumerável de *clopens*. $\chi_{U_i} : X \rightarrow \{0, 1\}$ função característica é contínua. Nesse caso

$$x \in X \xrightarrow{f} (\chi_{U_0}(x), \dots) \in 2^\omega$$

é contínua e injetora (basta separar os pontos por abertos básicos). Note que $f(U_n) = f(X) \cap \pi_n^{-1}(1)$ aberto relativo de $f(X)$, logo f é de fato inclusão de subespaço. □

Considere o produto de dois intervalos compactos $[a, b] \times [c, d] \neq \emptyset$ em \mathbb{R}^2 e um aberto U contendo este produto. Considere, uma cobertura por básicos do compacto $[a, b] \times \{c\} \subset \bigcup \{V_x \doteq (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \times (c - \varepsilon_x, c + \varepsilon_x) \subset U : x \in [a, b]\}$. Pela compacidade de $[a, b] \times \{c\}$ obtemos subcobertura finita V_{x_i} , $i = 1, \dots, n$. Note que $\varepsilon \doteq \min \varepsilon_{x_i}$ nos dá uma distância **uniforme** em $[a, b]$ tal que $\{x\} \times (c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subset U$. Fazendo isto em todas as bordas é possível obter aberto básico

$$(a - \varepsilon_1, b + \varepsilon_2) \times (c - \varepsilon_3, d + \varepsilon_4) \doteq A \times B$$

tal que $[a, b] \times [c, d] \subset A \times B$. O resultado abaixo generaliza esta observação para espaços topológicos quaisquer:

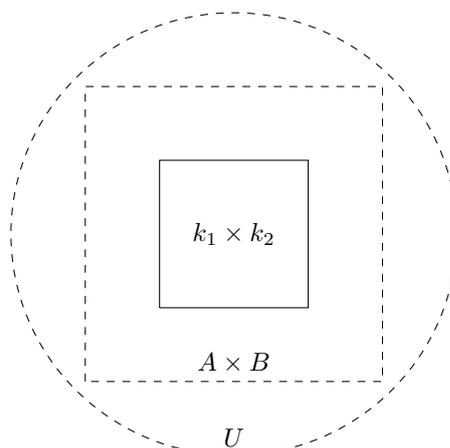


Figura 44 – A compacidade das componentes permite que uniformizemos U , obtendo uma vizinhança retangular $A \times B$ de $k_1 \times k_2$.

Lema B.2.2. *Sejam dois compactos $k_1 \subset X$, $k_2 \subset Y$ e um aberto $U \subset X \times Y$ tal que $k_1 \times k_2 \subset U$. Existem abertos $A \subset X$ e $B \subset Y$ tais que $k_1 \times k_2 \subset A \times B \subset U$.*

B.3 Hiper-espaço de Vietoris

Vamos introduzir uma topologia sob o conjunto dos subconjuntos compactos de um espaço topológico. Este é o primeiro exemplo do que se chama na topologia de **hiper-espaço**, e pode ser interpretado, de certo modo, como uma primeira tentativa de exponenciação $X \mapsto 2^X$. Neste documento queremos apenas introduzir esta topologia, estudar algumas de suas características estruturais e estabelecer a herança de certas propriedades do espaço original.

Em particular vamos mostrar que, no caso X metrizável, a noção de convergência desta topologia será métrica e mostrará o quanto dois compactos são diferentes entre si de maneira numérica. Esta interpretação motiva o uso desta métrica em algoritmos

de reconhecimento de padrão visual (Huttenlocher; Klanderma; Rucklidge, 1993). De fato, suponha que você tenha dois compactos k_1 e k_2 em mãos, considere a função $f(x) = d(x, k_2)$ em k_1 , da compacidade temos que f assume máximo e esse valor será a **distância do ponto mais k_2 excêntrico de k_1 à k_2** . Considere uma sequência de esferas centradas em 0 e com raios tendendo à 1, gostaríamos de dizer que esta sequência tende a esfera unitária, mas sob que topologia? Precisamos de uma topologia que codifique essa noção de proximidade. Vamos seguir (KECHRIS, 1995), (KURATOWSKI, 1973) e (TSERUNYAN, 1994/1995) nesta seção.

Definição B.3.1 (Topologia de Vietoris). Seja X espaço topológico, vamos definir o **espaço de Vietoris** de X . O conjunto subjacente do espaço será $\mathcal{K}(X) \doteq \{k \subset X : k \text{ é compacto}\}$. A topologia é gerada por vizinhanças do tipo

$$(U) = \{k \in \mathcal{K}(X) : k \subset U\} \quad [U] = \{k \in \mathcal{K}(X) : k \cap U \neq \emptyset\}$$

Estes serão exatamente a forma de elementos da sub-base desta topologia. De fato $(U) \cap (V) = (U \cap V)$ e conjuntos da forma $(U) \cap [V_1] \cap \dots \cap [V_k]$ formam base da topologia. Claramente qualquer $k \in (X)$. Note que a intersecção entre dois conjuntos como o anterior dão um conjunto na mesma forma:

$$((U) \cap [U_1] \cap \dots \cap [U_k]) \cap ((V) \cap [V_1] \cap \dots \cap [V_n]) = (U \cap V) \cap [V_1] \cap \dots \cap [U_k]$$

Logo temos de fato uma base em mãos.

Note que $\iota : X \rightarrow \mathcal{K}X$, $\iota(x) \doteq \{x\}$ é injetora. A imagem $\iota(X)$ consiste em compactos unitários. Abertos relativos $\iota(X) \cap ((U) \cap [V_1] \cap \dots \cap [V_n])$ consistem em unitários $\{x\} \in \iota(X)$ tais que $x \in U \cap V_1 \cap \dots \cap V_n$. Note que

$$\{y\} \in [V_1] \cap \dots \cap [V_n] \iff y \in U \cap V_1 \cap \dots \cap V_n$$

o que fornece correspondência abertos básicos de $x \in X$ e $\iota(x) \in \iota(X)$. Temos então que $X \xrightarrow{\iota} \mathcal{K}X$ é inclusão.

É possível mostrar que $\mathcal{K} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ tem propriedade functorial. Mostra-se também que o mapa $(k_1, k_2) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(Y) \mapsto k_1 \times k_2$ é contínuo. Em particular, O mapa diagonal $\mathcal{K}X \xrightarrow{\Delta} (\mathcal{K}X)^n$ é contínuo.

B.3.1 A Métrica de Hausdorff e Propriedades Herdadas

Se o espaço X tem métrica compatível com sua topologia, é possível definir uma métrica sobre o conjunto $\mathcal{K}X$.

Definição B.3.2 (Métrica de Hausdorff). Seja X metrizável com $d \leq 1$ compatível, considere $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}$, defina

$$\delta(k_1, k_2) \doteq \sup_{x \in k_1} \inf_{y \in k_2} d(x, y) = \sup_{x \in k_1} d(x, k_2)$$

Note que δ dá a medida da distância do ponto mais k_2 -excêntrico de k_1 ao conjunto k_2 . Convencionando que $\inf_{x \in \emptyset} \equiv 1$ e $\sup_{x \in \emptyset} \equiv 0$. Considere

$$d_H(k_1, k_2) \doteq \max\{\delta(k_1, k_2), \delta(k_2, k_1)\}$$

chamada função **métrica de Hausdorff**.

Teorema B.3.1. *Se X é metrizável, então a topologia de $\mathcal{K}(X)$ é a topologia induzida pela métrica de Hausdorff.*

Em particular, isso implica que a topologia induzida pela métrica de Hausdorff nos compactos de um espaço depende apenas da topologia deste metrizável, visto que para qualquer métrica equivalente acabaríamos com a topologia de Vietoris, definida sem menção a nenhuma métrica do espaço, em outras palavras, se d^1 e d^2 são métricas equivalentes, serão também d_H^1 e d_H^2 . A separabilidade também é preservada na construção do espaço de Vietoris.

No que segue, estabelecemos uma definição de convergência de sequências de compactos. Ela terá uma relação com a topologia de Vietoris que será descrita mais adiante. Consideramos, no que segue, \mathcal{N}_x é o filtro de vizinhanças de $x \in X$.

Definição B.3.3 (Convergência de Kuratowski). Seja $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de compactos, temos que o **limite superior de Kuratowski** dessa sequência de compactos é

$$\overline{\lim} k_n \doteq \{x \in X : \forall U \in \mathcal{N}_x \text{ frequentemente } k_n \cap U \neq \emptyset\}$$

E, analogamente o **limite inferior de Kuratowski** é

$$\underline{\lim} k_n \doteq \{x \in X : \forall U \in \mathcal{N}_x \text{ eventualmente } k_n \cap U \neq \emptyset\}$$

Note que substituindo \mathbb{N} por uma pré-ordem superiormente direcionada qualquer temos a generalização da definição anterior para **nets**.

Apesar de parecer que a notação está revertida, note que temos $\underline{\lim} k_n \subset \overline{\lim} k_n$. Se ambos os limites forem os mesmos, denotamos tal limite por **limite topológico** ou **limite de Kuratowski** $\lim k_n$ desta sequência/net de compactos.

Exemplo B.3.1. Como exemplo, tome a sequência $[0, 2], [1, 3], [0, 2], [1, 3], \dots$, com limite superior de Kuratowski $[0, 3]$ e inferior $[1, 2]$. Também podemos tomar esferas com raios convergindo para 1, o que converge na topologia de Vietoris para a esfera unitária, que também será limite topológico desta sequência.

Segue o relacionamento entre a topologia de Vietoris e a convergência de Kuratowski.

Proposição B.3.1. Seja X metrizável com métrica compatível d . Se $k_n \xrightarrow{d_H} k$ no espaço de Vietoris então o limite de Kuratowski $\lim k_n = k$.

Não temos a volta. Considere a sequência $k_n \doteq \{0, n\}$ de compactos. Ela tem limite de Kuratowski $\{0\}$, mas o fato $d(\{0\}, k_n) = n$ nos diz que esta sequência sequer é Cauchy na métrica de Hausdorff.

Queremos agora estabelecer que se (X, d) é espaço métrico completo, então também será seu espaço de Vietoris $(\mathcal{K}X, d_H)$. Como usual, começaremos com uma sequência $k_n \in \mathcal{K}X$ de Cauchy e tentaremos mostrar que de fato temos $k \in \mathcal{K}X$ com $k_n \rightarrow k$.

Lema B.3.1. *Seja X espaço completamente metrizável com métrica d compatível. O limite superior de *sequência d_H -Cauchy* de compactos é compacto.*

Proposição B.3.2 (Vietoris de Completo é Completo). *Seja X completamente metrizável e $d \leq 1$ métrica completa compatível, a métrica de Hausdorff d_H será completa.*

Corolário B.3.1. *O espaço de Vietoris de um espaço polonês é um espaço polonês.*

A compacidade também é propriedade herdada, sob a hipótese de metrizabilidade.

Observação B.3.1. Fixemos X um espaço metrizável. Seguem algumas observações sobre a estrutura do espaço de Vietoris. O que queremos é estudar **tipos frequentes de conjuntos**, no sentido de categoria topológica, do espaço de Vietoris, ou seja, conjuntos comagros de compactos.

- Os conjuntos finitos $\text{Fin}(X)$ de X são densos em $\mathcal{K}X$. Tome aberto básico não vazio $k \in (U) \cap [V_1] \cap \dots \cap [V_n] \doteq B$. Considere $x_i \in k \cap V_i$, de fato $\{x_1, \dots, x_n\} \in B$.
- A relação \in é fechada em $X \times \mathcal{K}X$. A relação \subset é fechada em $(\mathcal{K}X) \times (\mathcal{K}X)$.
- A função $f : (\mathcal{K}X) \times (\mathcal{K}X) \rightarrow \mathcal{K}X$ dada por $f(k, c) \doteq k \cup c$ é contínua.

Todo subconjunto compacto de um polonês (Hausdorff) é fechado, mas não necessariamente é perfeito (sem pontos isolados). Entretanto, se X é espaço polonês sem pontos isolados, então quase todo compacto terá esta propriedade, no sentido de categoria de Baire.

Proposição B.3.3. *Seja X espaço polonês sem pontos isolados. O subconjunto*

$$\mathcal{K}_p X \doteq \{k \in \mathcal{K}X : k \text{ é conjunto perfeito de } X\}$$

dos compactos perfeitos é G_δ comagro de $\mathcal{K}X$.

B.4 Categorias Topológicas

Deixamos aqui algumas afirmativas clássicas sobre categoria topológica. Começemos pelo fato de que magreza é preservada por homeomorfismos.

Proposição B.4.1. *Seja $f : X \rightarrow Y$ homeomorfismo, $A \subset X$ é magro $\iff f(A) \subset Y$ é magro.*

Espaços de Baire formam uma classe importante de espaços topológicos. O teorema da categoria de Baire nos dá hipóteses topológicas sob as quais temos que o espaço é de Baire.

Teorema B.4.1 (Teorema da Categoria de Baire). *Espaços completamente metrizáveis e Hausdorff localmente compactos são espaços de Baire.*

B.5 Relações magras e conjuntos independentes

Vamos seguir (KURATOWSKI, 1973) e estudar propriedades topológicas da independência de conjuntos segundo um relacionamento. No que segue usaremos a notação $\mathbb{D} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n : \exists i \neq j (x_i = x_j)\}$. Se n estiver subentendido, denotaremos o conjunto simplesmente por \mathbb{D} . Note que

$$\mathbb{D} = \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \{x \in X^n : \pi_{i_1}(x) = \pi_{i_2}(x)\}$$

é um fechado.

Definição B.5.1. Considere $R \subset X^n$ uma relação². Um conjunto $I \subset X$ é **R -independente** se $I^n \setminus \mathbb{D} \subset X^n \setminus R$. Em caso negativo, I é **R -dependente**.

A intuição aqui é a de que um conjunto I é R -independente se qualquer combinação não trivial de I não se relaciona via R .

Exemplo B.5.1. Interpretando $R \subset V^2$ como o conjunto de arestas de um grafo não direcionado simples G sobre o conjunto de vértices V , um conjunto $I \subset V$ é tal que $I^2 \setminus \mathbb{D} \subset V^2 \setminus R$ quando $G[I]$ é simplesmente um conjunto I de vértices isolados. Considerando V como espaço k -vetorial, podemos considerar $R \subset V^n$ como relação de k -dependência linear.

² Dizemos que a **aridade** de R é n .

Se X é espaço polonês então X^n é espaço polonês e, do [Corolário B.3.1](#), $\mathcal{K}(X^n)$ também será. Considere a notação para o conjunto de compactos independentes $J(R) \doteq \{k \in \mathcal{K}(X^n) : k \text{ é } R\text{-independente}\}$. Note que se duas relações R_1, R_2 tem mesma aridade e $R_1 \subset R_2$, então $J(R_2) \subset J(R_1)$. Note também que $k \in \mathcal{K}(X^n)$ é $\bigcup R_j$ -independente então, em particular, ele deve ser R_j -independente para qualquer j , ou seja, $k \in \bigcap J(R_j)$. Vale a recíproca, logo

$$J\left(\bigcup R_j\right) = \bigcap J(R_j)$$

Lema B.5.1. *Seja X espaço topológico e G aberto denso de X^n . Para quaisquer $m \geq n$ abertos não vazios $H_i \subset X$, $i = 1, \dots, m$, devem haver m abertos não vazios $U_i \subset H_i$ tais que $\forall 1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$ vale*

$$U_{i_1} \times \dots \times U_{i_n} \subset G$$

No que segue, vamos mostrar que quando uma relação R é magra, compactos R -independentes são frequentes, no sentido de categoria topológica.

Teorema B.5.1. *Seja X metrizável e $R \subset X^n$ subconjunto nunca-denso de X^n , então $J(R) \subset \mathcal{K}X$ é comagro.*

Corolário B.5.1. *Seja X espaço metrizável e $\{R_k\}_{k \in \omega}$ uma sequência de relações $R_k \subset X^{n_k}$, $n_k \geq 1$. Valem as seguintes afirmativas:*

- (i) *Se cada relação é nunca-densa, os conjuntos $\{J(R_k)\}_{k \in \omega}$ dos compactos R_k -independentes formam G_δ 's comagros em $\mathcal{K}X$. Como comagros formam σ -filtro, o conjunto dos compactos independentes sob toda relação $\bigcap_{k \in \omega} J(R_k) \subset \mathcal{K}X$ será também G_δ comagro.*
- (ii) *Seja $R \subset X^n$ relação magra. Podemos encontrar $\{R_k\}_{k \in \omega}$ sequência de relações nunca-densas tais que $R = \bigcup_{k \in \omega} R_k$. Note que $\bigcap_{k \in \omega} J(R_k) = J(R) \subset \mathcal{K}X$.*
- (iii) *Começando com enumeráveis relações magras, concluímos o mesmo do primeiro item.*

- (iv) Se $X \neq \emptyset$ é de Baire, os compactos R_k -independentes, para todo k , formam denso em $\mathcal{K}X$.
- (v) Se X é polonês sem pontos isolados, existe uma cópia \mathcal{C} do espaço de cantor $\mathcal{C} \subset X$ que é R_k -independentes, pra todo k . De fato, do [Proposição B.3.3](#), o conjunto dos compactos perfeitos é comagro G_δ . A intersecção $G \doteq \mathcal{K}_p(X) \cap J(\mathbb{R}) \subset \mathcal{K}X$ é ainda um comagro G_δ . Como $\mathcal{K}X$ é de Baire, deve haver compacto $c \in G$. Como $c \subset X$ é perfeito do polonês X , deve haver ([Teorema 4.2.2](#)) $\mathcal{C} \subset c$ cópia do espaço de Cantor. Note que $\mathcal{C}^n \subset c^n \subset (X^n \setminus R_k) \cup \mathbb{D}_k$ para todo $k \in \omega$, como queríamos.

Considere \mathbb{R} como \mathbb{Q} -espaço vetorial. Para cada tupla $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$, não todos nulos, considere a função contínua $f_{q_1 q_2 \dots q_n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{q_1 q_2 \dots q_n}(x_1, \dots, x_n) \doteq \sum_{i=1}^n q_i x_i$$

Note que $f_{q_1 q_2 \dots q_n}^{-1}(\{0\})$ é um hiperplano de \mathbb{R}^n , um nunca-denso neste espaço. A relação

$$R_n \doteq \bigcup_{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n} f_{q_1 q_2 \dots q_n}^{-1}(\{0\})$$

dos \mathbb{Q} -dependentes, n a n , é portanto magra, para cada n . Do que foi discutido, encontramos uma [base de Hamel](#) de \mathbb{R} que contém uma cópia do espaço de Cantor.

MEDIDA

Um teorema do tipo Schröder-Bernstein é uma afirmação da seguinte forma: se um objeto A pode ser visto como parte de B , e vice-versa, então A e B são equivalentes. Em conjuntos, ser ‘visto como parte de’ é uma injeção, e equivalência é existência de bijeção.

Teorema C.0.1 (Schröder-Bernstein). *Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow A$ injetoras, deve haver $h : A \rightarrow B$ bijetora.*

Demonstração. Considere $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$,

$$\varphi(S) \doteq A \setminus g(B \setminus f(S))$$

Afirmação: Se S é ponto fixo de φ então:

$$h(x) \doteq \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in S \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A \setminus S \end{cases}$$

é bijeção. Note de fato que $S = A \setminus g(B \setminus f(S)) \implies g(B \setminus f(S)) = A \setminus S$, o que nos dá diretamente que h está bem definida em A e é injetora em cada uma dessas partes. Por outro lado

$$h(A) = h(S) \cup h(A \setminus S) = f(S) \cup g^{-1}(g(B \setminus f(S))) = f(S) \cup B \setminus f(S) = B$$

Logo h é sobrejeção. Vamos agora exibir a existência de um ponto fixo de φ .

Afirmção: φ é monótona crescente, de fato:

$$\begin{array}{ccccc} S & \xrightarrow{\text{mon. cresc.}} & f(S) & \xrightarrow{\text{mon. decresc.}} & B \setminus f(S) \\ \xrightarrow{\text{mon. cresc.}} & & g(B \setminus f(S)) & \xrightarrow{\text{mon. decresc.}} & A \setminus g(B \setminus f(S)) \end{array}$$

Mostra que φ é monótona crescente. Considere $S_0 \doteq \emptyset$ e $S_{n+1} \doteq \varphi(S_n)$. Note que $S_i \subset \varphi(S_i)$ por indução. Considere $S = \sup S_n = \bigcup S_n$, como a função imagem $S \mapsto f(S)$ preserva sup's e inf's,

$$\begin{aligned} \varphi(S) &= A \setminus g(B \setminus f(\sup S_n)) = A \setminus g(B \setminus \sup f(S_n)) = A \setminus g(\inf(B \setminus f(S_n))) = \\ &= A \setminus \inf g((B \setminus f(S_n))) = \sup A \setminus g((B \setminus f(S_n))) = \sup S_{n+1} = S \end{aligned}$$

Encontramos então S um ponto fixo de φ , o que nos dá que h é bijeção entre estes conjuntos. \square

Podemos estabelecer o seguinte análogo mensurável:

Teorema C.0.2 (Schröder-Bernstein mensurável). *Considere $f : (A, \mathcal{A}) \hookrightarrow (B, \mathcal{B})$ e $g : (B, \mathcal{B}) \rightarrow (A, \mathcal{A})$ injeções bimensuráveis, então existe $h : (A, \mathcal{A}) \rightarrow (B, \mathcal{B})$ bimensurável.*

Demonstração. Construimos h como no Teorema C.0.1, o que nos dá imediatamente bijeção de h . Note que o conjunto S , ponto fixo de φ na construção, é mensurável, pois por indução são mensuráveis os S_n 's, logo também será a reunião enumerável deles. $h|_S = f$ e $h|_{A \setminus S} = g$ cada uma mensurável em cada um desses subespaços mensuráveis, mas então h é mensurável ¹. \square

¹ Seja (S_1, S_2) mensuráveis particionando A e $f : A \rightarrow B$ restrita a cada um desses mensuráveis \equiv a uma função mensurável $f_i : A \rightarrow B$ restrita ao mesmo conjunto, então se $N \in \mathcal{B}$ temos $f^{-1}(N) = (f_1^{-1}(N) \cap S_1) \cup (f_2^{-1}(N) \cap S_2)$ um mensurável

Teorema C.0.3 (Lusin mensurável). *Uma função $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ é mensurável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe mensurável $M \subset \mathbb{R}$ de medida $m(M) < \varepsilon$ tal que $f : \mathbb{R} \setminus M \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.*

C.1 Teorema do Isomorfismo de Borel

A intenção desta seção é estabelecer que Borelianos de poloneses são bastante parecidos entre si, no sentido mensurável. Seguimos (SRIVASTAVA, 1994/1995) nesta seção.

Definição C.1.1 (Borel padrão). Um boreliano padrão é um elemento de $\mathcal{B}(X)$ para X polonês.

Lema C.1.1. *Seja X topológico metrizável, então $\mathcal{B}(X)$ é a menor família \mathcal{B} de subconjuntos de X tal que:*

- (i) $\tau_X \subset \mathcal{B}$.
- (ii) \mathcal{B} é fechada com relação a reuniões enumeráveis disjuntas.
- (iii) \mathcal{B} é fechado com relação a intersecções enumeráveis.

Demonstração. Considere $\mathcal{C}_{\mathcal{B}} \doteq \{A \in \mathcal{B} : X \setminus A \in \mathcal{B}\}$.

- (i) Se $A \in \tau$, $X \setminus A \in G_{\delta}$ intersecção enumerável de abertos, logo $A \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$.
- (ii) Sejam A_n disjuntos em $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$, $X \setminus \bigsqcup A_n = \bigcap X \setminus A_n \in \mathcal{B}$.
- (iii) Dados B_n quaisquer em \mathcal{C} , considere $A_n \doteq \bigcap_{k \leq n} B_k$ para $n \in \omega$ e faça $A_{-1} \doteq X$, formando sequência **decrecente**. De fato

$$X \setminus \bigcap_{n \in \omega} B_n = X \setminus \bigcap_{n \in \omega} A_n = \bigsqcup_{n=-1}^{\infty} A_n \setminus A_{n+1}$$

Logo $\mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ tem (i), (ii) e (iii) e é fechado com relação a complementação, logo é σ -álgebra. Note que intersecção de famílias com (i), (ii) e (iii) ainda é família com tais propriedades e demonstramos que todas elas tem subconjunto que é σ -álgebra, também propriedade preservada por intersecção, o que dá o resultado. \square

Proposição C.1.1 (Boreliano padrão é imagem de Polonês). *Se X é espaço polonês e $B \in \mathcal{B}(X)$, então existe Z espaço polonês com $f : Z \rightarrow B$ bimensurável contínua.*

Demonstração. Considere \mathcal{C} a família de Borelianos C que assume $f : Z \rightarrow C$ bimensurável contínua para algum Z polonês.

- (i) Se A é aberto, em particular A é \mathcal{G}_{δ} de X , portanto polonês, logo $\text{id}_A : A \rightarrow A$ bimensurável contínua, logo $\tau \subset \mathcal{C}$.
- (ii) Dados $B_n \in \mathcal{B}$ disjuntos com $f_n : Z_n \rightarrow B_n$ bimensuráveis contínuas, seja $\bigoplus f_n : \bigoplus Z_n \rightarrow \bigsqcup B_n = \bigoplus B_n \doteq B$, o que dá que $\bigsqcup B_n \in \mathcal{B}$.
- (iii) Dados $B_n \in \mathcal{B}$ com $f_n : Z_n \rightarrow B_n$ bimensuráveis contínuas, seja:

$$Z \doteq \{(z_0, z_1, \dots) \in \prod Z_n : f_i(z_i) = f_j(z_j), i, j \in \omega\}$$

Claramente intersecção de fechados, portanto um fechado do completamente metrizável e segundo enumerável $\prod Z_n$, logo Z é polonês. Seja $f : Z \rightarrow \bigcap B_n \doteq B$, $f(z) = f_0(z_0)$. Claramente é uma bijeção contínua e considerando em B estrutura de subespaço mensurável, de fato $M_n \doteq (A_n \times \prod_{k \neq n} Z_k) \cap Z$ geram a σ -álgebra de Borel de Z e por hipótese $f(M_n) = f_n(A_n) \cap B$ é mensurável, de onde tiramos bimensurabilidade de f .

Do lema temos que $\mathcal{B}(X)$ tem a propriedade. \square

Corolário C.1.1. *Todo Boreliano padrão B é imagem contínua de ω^{ω} , pois temos sobrejeção à partir de um polonês $Z \twoheadrightarrow B$, mas Z é imagem contínua do espaço de Baire $\mathcal{N} \twoheadrightarrow Z$.*

Evitando um *detour* muito grande pela análise, considere a **realização do espaço de Cantor \mathcal{C} como o conjunto de Cantor no intervalo**, subespaço de $[0, 1]$ o intervalo unitário. Trivialmente a inclusão é injeção bimensurável $\mathcal{C} \xrightarrow{I} I$.

Dado $x \in [0, 1]$, considere $\sum_{n=0}^{\infty} x_n 2^{-n}$ uma de suas expansões diádicas, única em não diádicos e com escolha destacada² nos diádicos, digamos $f(x) \doteq (x_n)_{n \in \omega}$ ³. Tomando por vizinhanças básicas de \mathcal{C} os **cones que fixam as primeiras coordenadas**. De fato,

$$\begin{cases} f^{-1}(x_0 = 0) = [0, 1/2) \doteq I_{\langle 0 \rangle} \\ f^{-1}(x_0 = 1) = [1/2, 1] \doteq I_{\langle 1 \rangle} \end{cases}$$

Note que $\langle 1, 0, 0, \dots \rangle$ será a única sequência que começa com 1 na imagem. Em seguida os diferentes valores de x_1 seccionam $[0, 1/2)$ em

$$\begin{cases} f^{-1}(\Sigma(\langle 0, 0 \rangle)) = [0, 1/4) \doteq I_{\langle 0, 0 \rangle} \\ f^{-1}(\Sigma(\langle 0, 1 \rangle)) = [1/4, 1/2) \doteq I_{\langle 0, 1 \rangle} \end{cases}$$

o que ainda resulta em intervalos mensuráveis. Note que f é injetora. Seguindo com essas observações, vamos obtendo intervalos cada vez menores de I , todos mensuráveis e com imagem mensurável relativo da imagem. Das observações anteriores f é de fato injeção bimensurável. Aplicando **Schroeder-Bernstein**, obtemos então

Corolário C.1.2. *O intervalo unitário e o espaço de Cantor são **Measbe-isomorfos**. $[0, 1]^{\text{Measble}} \approx \mathcal{C}$. Nesse caso temos também que $[0, 1]^{\omega \text{ Measble}} \approx \mathcal{C}^{\omega}$ mas pelo **Teorema 3.3.3**, $\mathcal{C}^{\omega} \approx \mathcal{C}$. Logo $[0, 1]^{\omega} = \mathbb{H}^{\text{Measble}} \approx \mathcal{C}$ o espaço de Cantor e o espaço de Hilbert são **Measbe-isomorfos**.*

Já estabelecemos pelo **teorema de Cantor-Bendixson** que todo polonês não enumerável tem cópia do espaço de Cantor, o que dá injeção bimensurável de Cantor neste espaço. **Todo metrizável segundo enumerável também pode ser topologicamente incluído**

² a que termina em infinitos zeros.

³ A imagem de f serão sequências frequentemente nulas, ou seja, sequências que **não são** eventualmente 1.

no espaço de Hilbert, logo esta inclusão será bijeção bimensurável com sua imagem. Note que um Boreliano de um metrizável segundo enumerável é metrizável segundo enumerável (propriedades são herdadas por subespaço), logo também admitem estas inclusões no espaço de Hilbert.

Teorema C.1.1 (Teorema do isomorfismo de Borel). *Se B é Boreliano padrão não enumerável, então $B \stackrel{\text{Measble}}{\approx} \mathcal{C}$ é bimensuravelmente isomorfo ao espaço de Cantor.*

Demonstração. Das observações, B pode ser **Top**-incluído em \mathbb{H} , o que nos dá injeção bimensurável:

$$B \stackrel{\text{Top}}{\approx} S \hookrightarrow \mathbb{H} \stackrel{\text{Measble}}{\approx} \mathcal{C}$$

Temos também $g : Z \rightarrow B$ contínua bimensurável de polonês Z em B . Em particular Z é não enumerável, então **tem cópia** do espaço de cantor

$$\mathcal{C} \stackrel{\text{Top}}{\approx} S \xrightarrow{g} Z \stackrel{\text{Measble}}{\approx} B$$

O que inclui o espaço de Cantor em B bimensuravelmente. Mas do teorema de **Schroeder-Bernstein mensurável** temos então que $B \stackrel{\text{Measble}}{\approx} \mathcal{C}$.

□

Corolário C.1.3 (Teorema do isomorfismo de Borel). *Temos então a hipótese do contínuo para Borelianos de poloneses, que podem ser classificados, dentro de **Measble**, essencialmente em dois tipos:*

- *Enumeráveis pontos.*
- *Cópia do espaço mensurável $(\mathcal{C}, \mathcal{B}(\mathcal{C}))$.*

Note que não obtemos a propriedade perfeita, pois a inclusão do espaço de Cantor encontrada na demonstração é injetiva bimensurável, não necessariamente contínua.

PÁGINAS INTERESSANTES NA INTERNET

<<https://almostsuremath.com/2016/11/08/measurable-projection-and-the-debut-theorem/#more-1873>> Aplicações do teorema que corrige o erro de Lebesgue no artigo mencionado sobre os analíticos;

<<https://dantopology.wordpress.com/2012/06/11/bernstein-sets-are-baire-spaces/>> Página que inspirou a demonstração, como está no texto, de que conjuntos de Bernstein formam espaços de Baire, como subespaços da reta;

<<https://math.stackexchange.com/questions/3155260/combinations-of-lebesgue-measurability-the-property-of-baire-and-the-perfect-se>> Pergunta da Stack que motivou a construção dos exemplos do diagrama da Figura ??.

