Existência de soluções quase e
assintoticamente quase periódicas para
equações funcionais abstratas do tipo neutro
com retardamento não limitado

Maurício Luciano Pelicer

Orientador: *Prof. Dr. Eduardo Alex Hernández Morales*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática.

“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”

Data da Defesa: 18/08/2005

Visto do Orientador:

USP – São Carlos
Agosto/2005

Aos meus pais,
Natal e Élia.

Agradecimentos

A Deus, que permitiu que caminhos difíceis fossem trilhados.

Ao meu orientador Prof. Eduardo A. Hernández Morales, pelo auxílio nas horas em que sua presença tanto se fez necessária.

A Capes, pelo suporte financeiro.

A todos meus colegas do ICMC-USP, que tornaram esta caminhada mais agradável.

Abstract

In this work we study some criteria for existence of solutions almost periodic and asymptotically almost periodic for the systems of abstract neutral functional differential equations with unbounded delay modelled in the forms

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x(t) + g(t, x_t)) &= Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in I = (-\infty, a], \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x'(t) + g(t, x_t)) &= \mathcal{A}x(t) + f(t, x_t), \quad t \in I = (-\infty, a], \\ x_0 &= p(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \in \mathcal{B}, \\ x'(0) &= q(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}),\end{aligned}$$

where A is the infinitesimal generator of a C_0 -semigroup of linear operators on a Banach space X , $\mathcal{A}$ is the infinitesimal generator of a cosine family of linear operators, the history $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, belongs to some abstract phase space $\mathcal{B}$ defined axiomatically, $g, f : I \times \mathcal{B} \rightarrow X$, $p : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$ and $q : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow X$ are appropriate functions.

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns critérios para existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas para os sistemas de equações diferenciais funcionais neutras com retardo não limitado modelados nas formas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x(t) + g(t, x_t)) &= Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in I = (-\infty, a], \\ x_0 &= \varphi \in \mathcal{B},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(x'(t) + g(t, x_t)) &= \mathcal{A}x(t) + f(t, x_t), \quad t \in I = (-\infty, a], \\ x_0 &= p(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \in \mathcal{B}, \\ x'(0) &= q(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}),\end{aligned}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de operadores lineares sobre um espaço de Banach X , $\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de uma família cosseno de operadores lineares, a história $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, pertence a algum espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido axiomáticamente, $g, f : I \times \mathcal{B} \rightarrow X$, $p : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$ e $q : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow X$ são funções apropriadas.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Semigrupos de Operadores Lineares	7
1.2 Família Cosseno de Operadores Lineares	12
1.3 Espaços de Fase Abstratos	15
1.4 Funções Quase e Assintoticamente Quase Periódicas	17
2 Existência de Soluções Quase e Assintoticamente Quase Periódicas para a Equação Neutra de Primeira Ordem	22
2.1 Introdução	22
2.2 Soluções Quase e Assintoticamente Quase Periódicas	23
2.3 Existência de Soluções Quase e Assintoticamente Quase Periódicas Via Equações Lúmites	37
2.4 Aplicação	46
3 Existência de Soluções para a Equação Neutra de Segunda Ordem	49
3.1 Introdução	49
3.2 Soluções sobre $(-\infty, a]$	50
3.3 Soluções Globais	65
3.4 Soluções Assintoticamente Quase Periódicas	68
3.5 Exemplos	80
Bibliografia	84

Introdução

A existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas é um dos mais interessantes tópicos na teoria qualitativa de equações diferenciais. Mais ainda, o estudo de funções quase e assintoticamente quase periódicas tem gerado uma teoria própria, independente e com vários e interessantes resultados. A esse respeito, ver Yoshizawa [46], Corduneanu [52], Fink [53] Guérékata [54] e Zaidman [43] entre outros.

O problema de existência deste tipo de soluções tem sido estudado para diversos sistemas diferenciais. Veja, entre outros, Yoshizawa [46] para equações ordinárias; Zaidman [41], Guérékata [50], Cuevas [48], Diagana [49], Tjijun [57] e Castillo & Henríquez [58] para sistemas abstratos com aplicações as equações diferenciais parciais, e Hino [19], [20], [21], Henríquez [30] para equações diferenciais funcionais abstratas. Em relação a sistemas ordinários do tipo neutro citamos Yuan [55] e N. Minh Man & N. Van Minh [56].

Embora exista uma extensa literatura sobre soluções quase e assintoticamente quase periódicas, o problema da existência deste tipo de soluções para equações funcionais abstratas do tipo neutro com aplicações as equações parciais é um tópico não considerado. Este fato é a principal motivação para a elaboração deste trabalho de tese.

Nesta tese estudamos a existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas para as seguintes equações parciais abstratas do tipo neutro

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x(t) + g(t, x_t)) &= Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in I = [0, a], \\ x_0 &= \varphi \in B, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x'(t) + g(t, x_t)) &= \mathcal{A}x(t) + f(t, x_t), \quad t \in I = [0, a], \\ x_0 &= p(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \in B, \\ x'(0) &= q(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}). \end{aligned} \tag{2}$$

Nos sistemas anteriores, A e $\mathcal{A}$ são, respectivamente, os geradores infinitesimais de um C_0 -semigrupo de operadores lineares e de uma família cosseno de operadores lineares sobre um espaço de Banach

X ; a história $x_t : (-\infty, 0] \rightarrow X$, $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, pertence a um espaço de fase abstrato $\mathcal{B}$ definido de maneira axiomática, e $g, f : I \times \mathcal{B} \rightarrow X$, $p : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$, $q : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow X$ são funções apropriadas.

Equações parciais abstratas do tipo neutro tem sido estudadas intensamente nos últimos anos devido a suas aplicações. Estes tipos de sistemas aparecem, por exemplo, nos trabalhos de Gurtin & Pipkin [7] e Nunziato [25] para a descrição da condução de calor em materiais com memória amortecida. Na teoria de condução de calor, é assumido de maneira geral que a energia e o fluxo de calor dependem linearmente da temperatura $u(\cdot)$ e do gradiente $\nabla u(\cdot)$. Nestas condições, a clássica equação do calor descreve de maneira satisfatória a evolução da temperatura em diferentes tipos de materiais, mas não em materiais com memória amortecida (materials with fading memory). Neste tipo de materiais, veja [7, 25], a energia interna do material e o fluxo de temperatura são funcionais de $u(\cdot)$ e $\nabla u(\cdot)$ respectivamente. Um modelo muito usado para descrever o fluxo de calor em materiais com memória amortecida (veja [6, 22, 25]) é o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[c_0 u(t, x) + \int_{-\infty}^t K_1(t-s) u(s, x) ds \right] &= -c_1 \Delta u(t, x) + \int_{-\infty}^t K_2(t-s) \Delta u(s, x) ds, \\ u(t, x) &= 0, \quad t \geq 0, x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Neste sistema, Ω é um aberto limitado com fronteira regular de $\mathbb{R}^n$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \Omega$, $u(\cdot)$ representa a temperatura em x no tempo t ; c_1, c_2 são constantes positivas com significado físico e $K_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são funções apropriadas.

Equações parciais do tipo neutro da segunda ordem também podem ser deduzidas a partir da teoria desenvolvida por Gurtin, veja [7, 24] para mais detalhes. Baseados em evidências físicas, os autores estabeleceram que a temperatura verifica a equação integro-diferencial

$$\begin{aligned} c \frac{\partial^2 u(t, \xi)}{\partial t^2} + \beta(0) \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial t} + \int_0^\infty \beta'(s) \frac{\partial u(t-s, \xi)}{\partial t} ds &= -\alpha^2(0) \nabla^2 u(t, \xi) \\ &+ \int_0^\infty \alpha'(s) \nabla^2 u(t-s, \xi) ds, \end{aligned}$$

onde β é a função de relaxação de energia, α é a função de relaxação de stress e c a densidade do material. Assumindo que β é suficientemente suave e que $\nabla u(t, \xi)$ é aproximadamente constante, podemos reescrever a equação anterior na forma

$$\frac{\partial^2 u(t, \xi)}{\partial t^2} + \frac{\beta'(0)}{c} \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial t} + \frac{1}{c} \int_0^\infty \beta''(s) \frac{\partial u(t-s, \xi)}{\partial t} ds = -d \nabla^2 u(t, \xi).$$

A partir deste sistema, é natural pensar nos seguintes sistemas abstratos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x'(t) + g(t, x_t, x'(t))) &= Ax(t) + f(t, x_t, x'(t)), \\ \frac{d^2}{dt^2}(x(t) + g(t, x_t, x'(t))) &= Ax(t) + f(t, x_t, x'(t)), \end{aligned}$$

onde A é o gerador infinitesimal de uma família cosseno.

Outra importante motivação para o desenvolvimento da teoria de equações funcionais do tipo neutro tem sido o estudo de uma classe de equações parciais do tipo hiperbólico com certas condições de fronteira não lineares que surgem no estudo de linhas de transmissão. Em relação a isto citamos, Lopes [67, 68] e especialmente Hale [60] e Wu & Xia [59, 61] para detalhes relativos a história, referências e atualidades sobre o tema. Em Wu and Xia [59] é deduzida, a partir de uma equação neutra do tipo ordinária, a seguinte equação escalar do tipo neutro em derivadas parciais definida sobre a bola unitária

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D(x_t) &= k \frac{\partial}{\partial \xi} D(u_t) + g(t, u_t), \\ u_\sigma &= \varphi \in C([-r, 0] : C(S^1 : \mathbb{R})). \end{aligned}$$

Neste sistema, k é uma constante positiva e $(D\phi)(s) = \phi(0)(s) - \int_{-r}^0 [d\eta(\theta)]\phi(\theta)(s)$ onde η é uma função de variação limitada não atômica em zero. Esta equação neutra foi estudada por Hale em [60]. Neste artigo, Hale estabelece uma pequena teoria para o sistema, considerando, existência e unicidade de soluções, propriedades condensantes do operador solução, bifurcação de Hopf e estabilidade de órbitas periódicas.

Equações diferenciais funcionais abstratas do tipo neutro da primeira ordem, tem sido consideradas recentemente em numerosas publicações, veja entre outros Wu [61], Dakto [62], Addimy [63, 64, 65, 66] para sistemas com retardamento limitado e Hernández & Henríquez [10, 11, 16, 17], Hernández [12, 13, 14, 15] e Hernández & Pelicer [18] para o caso de retardo não limitado. Mencionamos de modo especial os artigos de Hernández & Henríquez [10, 11] e Hernández [12] trabalhos pioneiros no estudo do sistema neutro com retardo não limitado (1). Nestes trabalhos, usando de maneira essencial a teoria de semigrupos lineares, os autores estudaram a existência de soluções fracas, fortes e periódicas para sistemas neutros similares a (1). Estes últimos artigos foram essenciais para a realização deste trabalho de tese.

A literatura associada a equações abstratas do tipo neutro de segunda ordem com aplicações a equações diferenciais parciais, é quase inexistente, e a respeito desta matéria somente citamos Hernández & Henríquez [69]. É interessante observar que alguns sistemas do tipo neutro similares a (2) tem sido estudados recentemente em [1, 2]. Nos artigos citados, os resultados são obtidos assumido que $\mathcal{A}$ é o gerador de uma função cosseno de operadores $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ tal que $C(t)$ é compacto para cada $t > 0$. De Travis & Weeb [39, pp.557] sabemos que esta propriedade é válida, se e somente se, o espaço X é de dimensão finita. Conseqüentemente, os resultados em [1, 2] somente podem ser

aplicados em sistemas ordinários. Destacamos este fato, pois o esquema técnico usado nesta tese permite a aplicação dos resultados abstratos no estudo de sistemas neutros em derivadas parciais, e a fácil generalização dos resultados em [1, 2]. Assim, a contribuição de nosso trabalho vai além da obtenção de resultados de existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas para (2).

Uma vez que o sistema (2) possui condições não locais, achamos conveniente comentar brevemente a respeito deste tema. Condições do tipo não locais aparecem na modelagem de problemas físicos, muitas vezes com resultados mais satisfatórios que a clássica condição de início $u(0) = u_0$. A literatura relacionada a equações abstratas de primeira ordem com condições não locais é extensa e variada. A respeito mencionamos os trabalhos iniciais de Byszewski [3, 4] e Byszewski [5]. O estudo de sistemas de segunda ordem com condições não locais é mais restrito, como referências citamos Staněk [35, 36, 37, 38] para sistemas ordinários e os trabalhos mais recentes Hernández [72] e Hernández & Henríquez [71] para sistemas abstratos. Observamos também que o modelo diferencial (2) é uma generalização ao contexto de equações parciais dos artigos [35, 36, 37, 38].

Nos próximos parágrafos comentamos os três Capítulos que compõem a tese. Além da descrição do trabalho, mencionaremos os novos resultados obtidos e conseqüentemente o nosso aporte a literatura.

No capítulo 1, introduzimos diversos conteúdos que permitiram o estudo dos sistemas (1) e (2). Consideramos, entre outros, elementos básicos das teorias de semigrupo de operadores lineares, de funções cosseno de operadores, de espaços de fase e especialmente da teoria de funções quase e assintoticamente quase periódicas em espaços de Banach abstratos.

No capítulo 2, estudamos a existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas para o sistema (1). Iniciamos a Seção 2.2 introduzindo os conceitos de solução fraca quase e assintoticamente quase periódica para (1), e já em seguida, por meio do Princípio de contração e do Teorema de ponto fixo de Schauder's, estabelecemos vários resultados de existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas. Especificamente, nos Teoremas 2.6 e 2.7 mostramos a existência de soluções fracas globais e de soluções assintoticamente quase periódicas para o sistema. No Teorema 2.13 provamos a existência de soluções quase periódicas. É relevante destacar, que os resultados desta seção são resumidos em Hernández & Pelicer [18], artigo aceito para publicação pela revista Applied Mathematical Letters e já disponível online. Também observamos que as idéias desenvolvidas na seção, permitiram a elaboração do artigo Hernández, Carvalho & Pelicer [70]. Por outro lado, na seção 2.3 estudamos a existência de soluções quase periódicas usando os conceitos de

solução limite e de solução BC -totalmente estável (BC - TS). O principal resultado da seção é o Teorema 2.33, onde a partir da existência de uma solução global limitada e a de uma solução limite BC -totalmente estável, mostramos a existência de uma solução assintoticamente quase periódica. Este resultado é complementado pelo Teorema 2.30, onde é estabelecida a existência de uma solução quase periódica a partir da existência de uma solução assintoticamente quase periódica. O capítulo é concluído, com uma aplicação onde estudamos a existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas para um sistema neutro que aparece no estudo de sistemas de controle governados por uma regra integro-diferencial. Este exemplo é também parte de nosso artigo Hernández & Pelicer [18]. Para finalizar, mencionamos como referências básicas para este capítulo, Henriquez & Vasquez [30]; Hino, Murakami & Yoshizawa [20] e Hino & Murakami [21].

No capítulo 3 estudamos a existência de soluções locais, globais e assintoticamente quase periódicas para o problema de Cauchy abstrato com condição não local (2). Em geral os resultados são obtidos usando resultados de ponto fixo para operadores condensantes e contractivos. Iniciamos o capítulo, seção 3.2, estudando a existência de soluções fracas sobre intervalos da forma $(-\infty, a]$. Nos Teoremas 3.4 e 3.6 mostramos a existência de soluções fracas para o sistema com condições não locais (2). Um trabalho similar é feito nos Teoremas 3.10 e 3.11 para o seguinte sistema mais geral,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x'(t) - g(t, x_t, x'(t))) &= Ax(t) + f(t, x_t, x'(t)), \quad t \in I = (-\infty, a], \\ x_0 &= p(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) \in B, \\ x'(0) &= q(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}). \end{aligned}$$

Como mencionamos anteriormente, os resultados desta seção permitem a generalização daqueles em [1, 2, 35, 36, 37, 38] ao contexto de equações parciais. No Teorema 3.12 da Seção 3.3, é provada a existência de soluções fracas globais para (2) em espaços de funções contínuas com peso. O resto do capítulo é dedicado ao estudo da existência de soluções assintoticamente quase periódicas para o sistema abstrato (2). Como a existência deste tipo de soluções é provada usando um conhecido resultado de ponto fixo para operadores completamente contínuos, veja Lema 1.45, iniciamos a seção 3.4 com vários resultados preliminares que estudam questões de compacidade em espaços de funções assintoticamente quase periódicas. Mencionamos de maneira especial a Proposição 3.17, a generalidade da Proposição 3.20 e os Corolários 3.21 e 3.22. Logo dos preparativos mencionados, no Teorema 3.23, o principal deste capítulo, estabelecemos a existência de soluções assintoticamente quase periódicas para o sistema neutro (2). Concluímos a Seção 3.4 com um resultado onde estabelecemos condições para as quais a derivada de uma solução assintoticamente quase periódica

é também assintoticamente quase periódica, veja Proposição 3.26. Finalizamos o capítulo fazendo uma aplicação de nossos resultados abstratos.

Para finalizar esta introdução, achamos interessante mencionar que os tópicos e resultados considerados neste trabalho de teses não são isolados, permitindo assim uma natural continuação. Neste sentido, aparecem como especialmente atraentes o estudo deste tipo de soluções para sistemas integro diferenciais e a generalização dos resultados obtidos no contexto de soluções pseudo quase periódicas, veja [48, 49] entre outros.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos as ferramentas que vão nos auxiliar no desenvolvimento deste trabalho. Apresentamos aqui, de forma sucinta, conceitos e propriedades básicas referentes a teoria de semigrupos, funções cosseno, espaços de fases e funções quase periódicas em espaços de Banach. Em todo este trabalho, X sempre denotará um espaço de Banach.

1.1 Semigrupos de Operadores Lineares

Introduzimos a seguir, conceitos e propriedades básicas da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados em espaços de Banach (ver [26] para mais detalhes).

Definição 1.1 *Uma família de operadores $(T(t))_{t \geq 0}$ em $\mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores se*

- (i) $T(0) = I_d$.
- (ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $t, s \geq 0$.

Definição 1.2 *Um semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado de fortemente contínuo se para todo $x \in X$, a função $t \mapsto T(t)x$ é contínua em zero. O semigrupo é chamado uniformemente contínuo se a função $[0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X); t \mapsto T(t)$ é contínua em zero.*

Observação 1.3 *Um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuo em X será chamado simplesmente um C_0 -semigrupo.*

Definição 1.4 *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo de operadores lineares em X e $D(A)$ o conjunto*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

O operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x|_{t=0}, \quad x \in D(A),$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$.

No próximo resultado, resumimos algumas propriedades básicas relativas a C_0 -semigrupos que vão nos auxiliar nos capítulos posteriores.

Teorema 1.5 *Sejam $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X e A seu gerador infinitesimal. Então as seguintes propriedades são verificadas.*

(a) *Existem constantes $\omega \geq 0$ e $M > 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

(b) *Para todo $t \geq 0$ e todo $x \in X$, $\lim_{s \rightarrow t} T(s)x = T(t)x$. Mais ainda, se o semigrupo é uniformemente contínuo então $\lim_{s \rightarrow t} T(s) = T(t)$ em $\mathcal{L}(X)$.*

(c) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x \, ds = T(t)x$.*

(d) *Para todo $x \in X$ e todo $t \geq 0$, $\int_0^t T(s)x \, ds \in D(A)$ e $A \int_0^t T(s)x \, ds = T(t)x - x$.*

(e) *Para todo $x \in D(A)$ e todo $t \geq 0$, $T(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$.*

(f) *Para todo $x \in D(A)$, $T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(r)Ax \, dr = \int_s^t AT(r)x \, dr = A \int_s^t T(r)x \, dr$.*

(g) *A é linear, fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

Apresentamos a seguir o famoso Teorema de Hille-Yosida. Este Teorema estabelece condições necessárias e suficientes para que um operador linear fechado seja o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo em X .

Definição 1.6 *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo operadores lineares em X . Diremos $(T(t))_{t \geq 0}$ é um semigrupo de contrações se $\|T(t)\| \leq 1$ para todo $t \geq 0$.*

Definição 1.7 *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A , denotado por $\rho(A)$, é definido por*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe e é contínuo}\}.$$

A função de $\rho(A)$ em $\mathcal{L}(X)$, definida por $\lambda \mapsto R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$, é chamada resolvente de A .

Teorema 1.8 (Hille-Yosida) Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração se, e somente se,

- (i) A é um operador fechado e $D(\bar{A}) = X$,
- (ii) $\rho(A) \supset (0, \infty)$ e $\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, $\lambda > 0$.

A seguir, fizemos um breve comentário a respeito de semigrupos compactos e analíticos. Incluímos, de forma sucinta, algumas propriedades de potências fracionárias associadas ao gerador de um semigrupo analítico. Para mais detalhes a respeito desses assuntos sugerimos Pazy [26].

Definição 1.9 Um C_0 -semigrupo, $(T(t))_{t \geq 0}$, de operadores lineares é compacto para $t > t_0$, se para todo $t > t_0$ o operador $T(t)$ é compacto. O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é chamado compacto, se é compacto para todo $t > 0$.

Notemos que se X é um espaço de dimensão finita então todo C_0 -semigrupo de operadores lineares é compacto. Mais ainda, um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é tal que $T(t)$ é compacto para $t \geq 0$ se e somente se X é de dimensão finita.

Teorema 1.10 Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo de operadores lineares em X . Se $T(t)$ é compacto para $t > t_0$, então a função $(t_0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X); t \rightarrow T(t)$ é contínua.

O próximo teorema caracteriza quando um C_0 -semigrupo é compacto.

Teorema 1.11 Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados em X e A seu gerador infinitesimal. Então $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto se e somente se a função $(0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X); t \rightarrow T(t)$ é contínua e $R(\lambda : A)$ é compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Estabelecemos agora, o conceito de semigrupo analítico.

Definição 1.12 Seja $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \phi_1 \leq \arg(z) \leq \phi_2, \phi_1 < 0 < \phi_2\}$. Uma família de operadores lineares limitados $(T(z))_{z \in \Delta}$ em X é um semigrupo analítico em Δ , se as seguintes condições são verificadas.

- (i) A função $z \rightarrow T(z)$ é analítica em Δ ;
- (ii) $T(0) = I_X$ e $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$, para todo $x \in X$;
- (iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para todo $z_1, z_2 \in \Delta$.

Teorema 1.13 *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo uniformemente limitado de operadores lineares e A seu gerador infinitesimal. Suponha que $0 \in \rho(A)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$T(t)$ pode ser estendido a um semigrupo analítico em um setor $\Delta_\delta = \{z : |\arg z| < \delta\}$ e $\|T(z)\|$ é uniformemente limitado em cada sub-setor $\Delta_{\delta'}, \delta' < \delta$, de Δ_δ .*

(b) *Existe uma constante C tal que para cada $\sigma > 0, \tau \neq 0$*

$$\|R(\sigma + i\tau : A)\| \leq \frac{C}{|\tau|}.$$

(c) *Existe $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ e $M > 0$ tal que*

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \omega < |\arg \lambda| \leq \pi\} \cup \{0\}$$

e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma, \quad \lambda \neq 0.$$

(d) *A função $t \rightarrow T(t)$ é diferenciável para $t > 0$ e existe uma constante C tal que*

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t}, \quad t > 0.$$

Para estabelecermos o conceito de potência fracionária de um operador A onde $-A$ é o gerador de um semigrupo analítico admitiremos a seguinte condição.

(II) *Seja A um operador fechado tal que $\overline{D(\overline{A})} = X$ e*

$$\rho(A) \supset \Sigma^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \omega < |\arg \lambda| \leq \pi\} \cup V$$

onde V é uma vizinhança da origem, e

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma^+.$$

Definição 1.14 *Para um operador A verificando (II) e $\alpha > 0$ definimos*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^{-\alpha} (A - zI)^{-1} dz$$

onde o caminho C varia no conjunto resolvente de A de $\infty e^{-i\psi}$ a $\infty e^{i\psi}$, $\omega < \psi < \pi$, evitando o eixo real negativo e a origem e $z^{-\alpha}$ é tomado com partes reais positivas de z .

Definição 1.15 *Seja A um operador satisfazendo (II) com $\omega < \frac{\pi}{2}$. Para cada $\alpha > 0$ definimos $A^\alpha = (A^{-\alpha})^{-1}$.*

Teorema 1.16 *Seja A^α como na Definição 1.15. As seguintes propriedades são válidas.*

- (a) A^α é um operador fechado com $D(A^\alpha) = \text{Im}(A^{-\alpha})$.
- (b) Para $\alpha \geq \beta > 0$ temos $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.
- (c) $D(A^\alpha) = X$ para cada $\alpha \geq 0$.
- (c) $A^{\alpha+\beta}x = A^\alpha A^\beta x$ para cada $x \in D(A^\gamma)$ onde $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha + \beta\}$.

Teorema 1.17 [26, pg.74] *Seja $-A$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $T(t)$ e $0 < \gamma \leq \eta \leq 1$. Se $0 \in \rho(A)$ e X_α é o espaço $D(A^\alpha)$ munido da norma do gráfico, então as seguintes propriedades são verificadas.*

- (a) X_η é um espaço de Banach, $X_\eta \subset X_\gamma \subset X_\eta \hookrightarrow X_\gamma$.
- (b) A função $s \rightarrow (-A)^\eta T(s)$ é contínua sobre $(0, \infty)$ na topologia uniforme de operadores, e existem constantes $C_\eta > 0$ tais que $\|(-A)^\eta T(t)\| \leq \frac{C_\eta}{t^\eta}$, para todo $t > 0$.
- (c) Para todo $t > 0$ e todo $\alpha > 0$, $T(t)(X) \subset D(A^\alpha)$. Mais ainda, para $t \geq 0$ e todo $x \in D(A^\alpha)$ temos que $T(t)A^\alpha x = A^\alpha T(t)x$.
- (d) Para cada $\alpha \in (0, 1]$ existe $C_\alpha > 0$ tal que

$$\|T(t)x - x\| \leq C_\alpha t^\alpha \|A^\alpha x\|, \quad x \in D(A^\alpha), \quad t > 0.$$

Para estudar, no capítulo 2, a existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas para sistemas de primeira ordem, precisamos dos conceitos de estabilidade que apresentamos a seguir.

Definição 1.18 *Dizemos que um semigrupo fortemente contínuo $(T(t))_{t \geq 0}$ é*

- (a) *uniformemente exponencialmente estável, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)\| = 0$.*
- (b) *uniformemente estável, se $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)\| = 0$.*
- (c) *fortemente estável, se $\lim_{t \rightarrow \infty} \|T(t)x\| = 0$ para todo $x \in X$.*

Teorema 1.19 [45, Proposition 5.1.2] *Seja $(T(t))_{t \geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo. Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente exponencialmente estável.
- (b) $(T(t))_{t \geq 0}$ é uniformemente estável.
- (c) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\varepsilon t} \|T(t)x\| = 0$ para todo $x \in X$.

Finalizamos esta seção fazendo algumas considerações a respeito do problema de Cauchy abstrato não homogêneo

$$u'(t) = Au(t) + f(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(0) = x, \quad (1.2)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ em X e f é uma função apropriada.

Entende-se por solução clássica do sistema (1.1)-(1.2), toda função $u : [0, \tau] \rightarrow X$ tal que $u \in C^1([0, \tau] : X)$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$ e satisfaz (1.1)-(1.2) em $[0, \tau]$.

Para o problema (1.1)-(1.2) temos o seguinte resultado.

Teorema 1.20 [26, Corollary 2.2] *Seja $f \in L^1([0, \tau] : X)$ e $x \in X$. Então, o problema de valor inicial (1.1)-(1.2) tem no máximo uma solução clássica em $[0, \tau]$. Além disso, se $u(\cdot)$ é solução clássica de (1.1)-(1.2), então*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (1.3)$$

É conhecido que uma solução $u(\cdot)$ da equação integral (1.3) não é em geral uma solução clássica do problema (1.1)-(1.2). Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.21 *Seja $f \in L^1([0, \tau] : X)$. Dizemos que uma função $u \in C([0, \tau] : X)$ é uma solução fraca de (1.1)-(1.2) se*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, \tau].$$

1.2 Família Cosseno de Operadores Lineares

Nesta seção introduzimos algumas propriedades da teoria de famílias cosseno de operadores lineares limitados em espaço de Banach.

Definição 1.22 *Dizemos que uma família $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ em $\mathcal{L}(X)$ é uma família cosseno fortemente contínua se, e somente se,*

- (a) $C(s+t) + C(t-s) = 2C(s)C(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$,
- (b) $C(0) = I$,
- (c) Para cada $x \in X$, $t \mapsto C(t)x$ é fortemente contínua em $\mathbb{R}$.

Neste trabalho, $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sempre representará uma família cosseno fortemente contínua em X . Chamamos de família seno associada a $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, a família de operadores lineares limitados $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ definidos por $S(t)x = \int_0^t C(s)x ds$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

As propriedades que apresentamos a seguir são bem conhecidas e referimos [40] para as demonstrações e maiores detalhes.

Proposição 1.23 *Seja $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua em X . Então as seguintes propriedades são válidas:*

- (a) $C(t) = C(-t)$ e $S(t) = S(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
- (b) $C(s)$, $S(s)$, $C(t)$ e $S(t)$ comutam para todo $s, t \in \mathbb{R}$,
- (c) Para cada $x \in X$, $t \mapsto S(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$,
- (d) $S(s+t) + S(s-t) = 2S(s)C(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$,
- (e) $S(t+s) = S(s)C(t) + S(t)C(s)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$,
- (f) Existem constantes $K \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que $\|C(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ke^{\omega|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
- (g) $\|S(t) - S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq K \left| \int_s^t e^{\omega|\tau|} d\tau \right|$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

O gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por $Ax = \frac{d^2}{dt^2}C(0)x$ onde $D(A)$ é o conjunto de todos $x \in X$ tais que $C(\cdot)x \in C^2(\mathbb{R}; X)$.

Afim de apresentarmos mais propriedades denotaremos por E o conjunto definido por

$$E = \{x \in X : C(\cdot)x \in C^1(\mathbb{R}; X)\}. \quad (1.4)$$

Teorema 1.24 *Seja $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família fortemente contínua em X com gerador infinitesimal A . Então as seguintes propriedades são verificadas:*

- (a) $D(A)$ é denso em X e A é um operador fechado em X ,
- (b) Se $x \in X$ e $r, s \in \mathbb{R}$, então $z := \int_r^s S(\tau)x d\tau \in D(A)$ e $Az = C(s)x - C(r)x$,
- (c) Se $x \in X$ e $r, s \in \mathbb{R}$, então $z := \int_0^r \int_0^s C(\sigma)C(\tau)x d\sigma d\tau \in D(A)$ e $Az = 2^{-1}(C(s+r)x - C(s-r)x)$,
- (d) Se $x \in X$, então $S(t)x \in E$,
- (e) Se $x \in E$, então $S(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}C(t)x = AS(t)x$,
- (e) Se $x \in D(A)$, então $C(t)x \in D(A)$ e $\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax$,
- (f) Se $x \in E$, então $\lim_{t \rightarrow 0} AS(t)x = 0$,
- (g) Se $x \in E$, então $S(t)x \in D(A)$ e $\frac{d^2}{dt^2}S(t)x = AS(t)x$,
- (h) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$,
- (i) $C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)S(s)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$.

O resultado seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente para que a função $t \rightarrow C(t)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathcal{L}(X)$ seja contínua em $t = 0$.

Teorema 1.25 *Seja $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua em X com gerador infinitesimal A . As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $\lim_{t \rightarrow 0} C(t) = I$ em $\mathcal{L}(X)$.
- (b) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)}{t} = I$ em $\mathcal{L}(X)$.
- (c) $A \in \mathcal{L}(X)$.
- (d) $C(t)(X) \subset E$ para todo $\alpha < t < \beta$.
- (e) $S(t)(X) \subset D(A)$ e $AS(t)$ é fortemente contínua para todo $\alpha' < t < \beta'$.

Apresentamos a seguir um resultado que estabelece condições para as quais um operador linear é o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua. Citamos [28] para a prova deste resultado.

Teorema 1.26 *Um operador fechado A é o gerador infinitesimal de uma família coseno fortemente contínua $\{C(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ satisfazendo 1.23-(f) se, e somente se, $R(\lambda^2; A)$ existe no semiplano $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ e $\|(\lambda R(\lambda^2; A))^n\| \leq Kn!(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{-(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Seja E o conjunto introduzido em (1.4). Sabemos de Kisiński [32] que E munido com a norma

$$\|x\|_E = \|x\| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \|AS(t)x\|, \quad x \in E,$$

é um espaço de Banach. Mais ainda, a família de operadores $G(t) = \begin{bmatrix} C(t) & S(t) \\ AS(t) & C(t) \end{bmatrix}$ é um grupo de

operadores lineares fortemente contínuo sobre o espaço $E \times X$, gerado pelo operador $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix}$ definido sobre $D(A) \times E$. Deste modo segue-se que $AS(t) : E \rightarrow X$ é um operador linear limitado e que $AS(t)x \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$, para cada $x \in E$. Portanto, se $x : [0, \infty) \rightarrow X$ é localmente integrável então $y(t) = \int_0^t S(t-s)x(s)ds$ define uma função contínua sobre E . Isto é uma consequência do fato que

$$\int_0^t G(t-s) \begin{bmatrix} 0 \\ x(s) \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \int_0^t S(t-s)x(s) ds \\ \int_0^t C(t-s)x(s) ds \end{bmatrix}$$

define uma função contínua sobre $E \times X$.

1.3 Espaços de Fase Abstratos

Neste trabalho, assumimos que o espaço das histórias $\mathcal{B}$ é um espaço linear munido de uma seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ composto por funções $\psi : (-\infty, 0] \rightarrow X$. Assumimos ainda que $\mathcal{B}$ verifica os axiomas seguintes, os quais são similares aos usados em [19]:

(A) Se $x : (-\infty, \sigma + a) \rightarrow X$, $a > 0$, é contínua sobre $[\sigma, \sigma + a)$ e $x_\sigma \in \mathcal{B}$, onde $x_\sigma(\theta) := x(\sigma + \theta)$, então para cada $t \in [\sigma, \sigma + a)$, as seguintes condições são válidas:

- (i) $x_t \in \mathcal{B}$,
- (ii) $\|x(t)\| \leq H \|x_t\|_{\mathcal{B}}$,
- (iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t - \sigma) \sup\{\|x(s)\| : \sigma \leq s \leq t\} + M(t - \sigma) \|x_\sigma\|_{\mathcal{B}}$,

sendo H uma constante positiva, $K, M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $K(\cdot)$ contínua e $M(\cdot)$ localmente limitada e H, K e M são independentes de $x(\cdot)$.

(A1) Para a função $x(\cdot)$ em (A), $t \mapsto x_t$ é uma função contínua de $[\sigma, \sigma + a)$ sobre $\mathcal{B}$.

(B) O espaço $\mathcal{B}$ é completo.

Dos axiomas do espaço $\mathcal{B}$, é fácil ver que a família de operadores $S(t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, $t \geq 0$, definidos por

$$[S(t)\varphi](\theta) := \begin{cases} \varphi(0), & t \leq \theta < 0, \\ \varphi(t + \theta), & -\infty < \theta < -t, \end{cases} \quad (1.5)$$

é um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares sobre $\mathcal{B}$.

Para obter alguns dos nossos resultados, precisaremos de propriedades adicionais para o espaço de fase $\mathcal{B}$, a saber:

(C2) Se $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência uniformemente limitada em $\mathcal{B} \cap C_b((-\infty, 0] : X)$ tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ uniformemente em compactos, então $\varphi \in \mathcal{B}$ e $\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

Se $\mathcal{B}$ verifica (C2) sabemos de [19, Proposition 7.1.1], que $C_b((-\infty, 0] : X)$ está continuamente incluído em $\mathcal{B}$. Em particular, existe uma constante $\mathcal{L} > 0$ tal que

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{L} \sup_{(-\infty, 0]} \|\varphi(\theta)\|, \quad \varphi \in C_b((-\infty, 0] : X). \quad (1.6)$$

Definição 1.27 Dizemos que $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida se os axiomas (A), (A1), (B) e (C2) são satisfeitos e $S(t)\varphi \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, para todo $\varphi \in \mathcal{B}$ tal que $\varphi(0) = 0$.

Teorema 1.28 [19, Proposition 7.1.3] Suponha que $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma (B). Então o espaço $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida se, e somente se, $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ sempre que $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ satisfaz a condição $x_\sigma \in \mathcal{B}$ para algum σ , x é contínua sobre $[\sigma, \infty)$ e $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Como complemento, apresentamos um típico exemplo de espaço de fase.

O espaço $C_r \times L^2(h, X)$. Seja $h : (-\infty, -r) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva e Lebesgue integrável. Assuma que existe uma função localmente limitada $\gamma : (-\infty, 0] \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$h(\xi + \theta) \leq \gamma(\xi) h(\theta),$$

para todo $\xi \leq 0$ e todo $\theta \in (-\infty, -r] \setminus N_\xi$, onde $N_\xi \subseteq (-\infty, -r]$ é um conjunto de medida nula. Definimos o espaço $\mathcal{B} = C_r \times L^2(h, X)$ como o espaço das funções $\varphi : (-\infty, 0] \rightarrow X$ tais que

φ é Lebesgue integrável sobre $(-\infty, r]$ e $\varphi|_{[-r,0]} \in C([-r,0]; X)$. Sobre o espaço $C_r \times L^2(h, X)$ consideramos a semi-norma $\|\cdot\|_B$ definida por

$$\|\varphi\|_B := \left(\int_{-\infty}^{-r} h(\theta) \|\varphi(\theta)\|^p d\theta \right)^{1/2} + \sup_{\theta \in [-r,0]} \|\varphi(\theta)\|.$$

Suponha que h verifica as condições $(h = 5)$, $(h = 6)$ e $(h = 7)$ em [19, Theorem 1.3.8]. Nestas condições, o par $(B, \|\cdot\|_B)$ é um espaço com memória amortecida (ver [19, Example 7.1.8]). Mais ainda, se $r = 0$ temos que $H = 1$, $M(t) = \gamma(-t)^{\frac{1}{2}}$ e $K(t) = 1 + \left(\int_{-t}^0 h(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$.

1.4 Funções Quase e Assintoticamente Quase Periódicas

A seguir, definimos e apresentamos algumas propriedades de funções quase periódicas e assintoticamente quase periódicas que são usadas ao longo deste trabalho. Nas definições e propriedades abaixo $(Z, \|\cdot\|_Z)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ são espaços de Banach e $C_0([0, \infty); Z)$ é o subespaço de $C([0, \infty); Z)$ formado por funções que se anulam no infinito.

Definição 1.29 Dizemos que um conjunto $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ é relativamente denso se, e somente se, existe $\ell > 0$ tal que $[a, a + \ell] \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definição 1.30 Dizemos que uma função $F \in C(\mathbb{R}; Z)$ é quase periódica se para cada $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto relativamente denso $\mathcal{H}(\varepsilon, F, Z)$ de $\mathbb{R}$ tal que

$$\|F(t + \xi) - F(t)\|_Z < \varepsilon, \quad (t, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}(\varepsilon, F, Z).$$

Definição 1.31 Dizemos que uma função $F \in C([0, \infty); Z)$ é assintoticamente quase periódica se existe uma função quase periódica g e $w \in C_0([0, \infty); Z)$ tal que $F = g + w$.

Denotamos por $AP(Z)$ e $AAP(Z)$ os espaços

$$AP(Z) = \{F \in C(\mathbb{R}; Z) : F \text{ é quase periódica} \}$$

$$AAP(Z) = \{F \in C([0, \infty); Z) : F \text{ é assintoticamente quase periódica} \}$$

munidos com as normas $\|u\|_{AP(Z)} = \sup_{s \in \mathbb{R}} \|u(s)\|_Z$ e $\|u\|_{AAP(Z)} = \sup_{s \geq 0} \|u(s)\|_Z$ respectivamente. Sabemos de Zaidman [43] que $AP(Z)$ e $AAP(Z)$ são espaços de Banach.

Para espaços de funções quase e assintoticamente quase periódicas temos os seguintes resultados.

Teorema 1.32 [43] Se $f(\cdot) \in AP(Z)$ e $g(\cdot) \in AP(W)$ então $(f(\cdot), g(\cdot)) \in AP(Z \times W)$.

Teorema 1.33 [43, Property P.7] Se $f(\cdot) \in AP(Z)$, então f é uniformemente contínua.

Teorema 1.34 [43, Theorem 5.2] Seja $f \in AAP(Z)$ e suponha que f' existe e é uniformemente contínua sobre $[0, \infty)$. Então $f' \in AAP(Z)$.

Os dois Teoremas que apresentamos a seguir caracterizam as funções quase e assintoticamente quase periódicas através da compacidade de famílias de funções bem especiais que definimos a seguir. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow Z$ uma função e $a \in \mathbb{R}$. Definimos $H_a F(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow Z$ a função dada por $H_a F(t) = F(t + a)$. Similarmente, se $G : [0, \infty) \rightarrow Z$ é uma função e $a > 0$, definimos $H_a G(\cdot) : [0, \infty) \rightarrow Z$ a função dada por $H_a G(t) = G(t + a)$.

Teorema 1.35 [43, Capítulo 4] Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow Z$ uma função contínua. Então $f \in AP(Z)$ se, e somente se, o conjunto $\{H_t f : t \in \mathbb{R}\}$ é relativamente compacto em $C_b(\mathbb{R}; Z)$.

Teorema 1.36 [43, Capítulo 5] Seja $f : [0, \infty) \rightarrow Z$ uma função contínua. Então $f \in AAP(Z)$ se, e somente se, uma das seguintes condições são verificadas:

- (a) O conjunto $\{H_t f : t \geq 0\}$ é relativamente compacto em $C_b([0, \infty); Z)$.
- (b) Existe $p \in AP(Z)$ e $q \in C_0([0, \infty); Z)$ tal que $f(t) = p(t) + q(t)$ para todo $t \geq 0$.

Lema 1.37 [43, Theorem 5, pp. 46] Uma função $f \in C_b(\mathbb{R}; Z)$ é assintoticamente quase periódica em Z se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existe $L(\varepsilon, f) > 0$ e um subconjunto relativamente denso de $[0, \infty)$, que denotamos por $\mathcal{T}(\varepsilon, f)$, tal que

$$\|f(t + \xi) - f(t)\|_Z < \varepsilon, \text{ para cada } t > L(\varepsilon, f) \text{ e todo } \xi \in \mathcal{T}(\varepsilon, f).$$

Os próximos resultados tem relação com a composição de funções quase e assintoticamente quase periódicas. Previamente incluímos algumas definições.

Definição 1.38 Seja Ω um conjunto aberto de W .

- (a) Dizemos que uma função contínua $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow Z$ (resp. $F : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow Z$) é pontualmente quase periódica, (resp. pontualmente assintoticamente quase periódica) se $F(\cdot, x) \in AP(Z)$ (resp. $F(\cdot, x) \in AAP(Z)$) para cada $x \in \Omega$.
- (b) Dizemos que uma função contínua $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow Z$ é uniformemente quase periódica, se para cada $\varepsilon > 0$ e cada compacto $K \subset \Omega$ existe um subconjunto relativamente denso de $\mathbb{R}$, que denotamos por $\mathcal{H}(\varepsilon, F, K, Z)$, tal que

$$\|F(t + \xi, y) - F(t, y)\|_Z \leq \varepsilon, \text{ para cada } (t, \xi, y) \in \mathbb{R} \times \mathcal{H}(\varepsilon, F, K, Z) \times K.$$

(c) Dizemos que uma função contínua $F : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow Z$ é uniformemente assintoticamente quase periódica, se para cada $\varepsilon > 0$ e cada compacto $K \subset \Omega$ existe um subconjunto relativamente denso de $[0, \infty)$, que denotamos por $\mathcal{T}(\varepsilon, F, K, Z)$, e $L(\varepsilon, F, K, Z) > 0$ tal que

$$\|F(t + \xi, y) - F(t, y)\|_Z \leq \varepsilon, \text{ para cada } t \geq L(\varepsilon, F, K, Z) \text{ e todo } (\xi, y) \in \mathcal{T}(\varepsilon, F, K, Z) \times K.$$

Para detalhes relativos as propriedades no próximo Lema, veja os comentários bibliográficos em [30].

Lema 1.39 *Seja $\Omega \subset W$ um conjunto aberto. Então as seguintes propriedades são válidas.*

- (a) *Se $F \in C(\mathbb{R} \times \Omega; Z)$ (resp. $F \in C([0, \infty) \times \Omega; Z)$) é pontualmente quase periódica (resp. pontualmente assintoticamente quase periódica) e satisfaz uma condição Lipschitz local em $x \in \Omega$, uniformemente em t , então F é uniformemente quase periódica (resp. uniformemente assintoticamente quase periódica).*
- (b) *Se $x \in AP(X)$ e B satisfaz (C2), então $t \rightarrow x_t \in AP(B)$. Além disso, se B é um espaço com memória amortecida e $z \in C(\mathbb{R}; X)$ é tal que $z_0 \in B$ e $z \in AAP(X)$, então $t \rightarrow z_t \in AAP(B)$.*
- (c) *Se $F \in C(\mathbb{R} \times \Omega; Z)$ (resp. $F \in C([0, \infty) \times \Omega; Z)$) é uniformemente quase periódica (resp. uniformemente assintoticamente quase periódica) e $y \in AP(W)$ (resp. $y \in AAP(W)$) é tal que $\overline{\{y(t) : t \in \mathbb{R}\}}^W \subset \Omega$, então $F(t, y(t)) \in AP(Z)$ (resp. $F(t, y(t)) \in AAP(Z)$).*

Os resultados que apresentamos a seguir são consequências diretas das definições de funções uniformemente quase e uniformemente assintoticamente quase periódicas.

Lema 1.40 [42, Lemma 1] *Sejam Z_1, Z_2 espaços de Banach e K um subconjunto compacto de Z_1 . Se $F \in C(\mathbb{R} \times Z_1; Z_2)$ é uniformemente quase periódica, então existe uma sequência de números reais $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\alpha_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que $F(t + \alpha_n, x) \rightarrow F(t, x)$ uniformemente sobre $\mathbb{R} \times K$.*

Lema 1.41 *Sejam Z_1, Z_2 espaços de Banach e $K \subset Z_1$ compacto. Se $F \in C([0, \infty) \times Z_1; Z_2)$ é uniformemente assintoticamente quase periódica, então existe uma sequência de números reais $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty)$, com $\alpha_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, tal que $F(t + \alpha_n, x) \rightarrow F(t, x)$ uniformemente sobre $[0, \infty) \times K$.*

Apresentamos a seguir alguns critérios do tipo Arzelà-Ascoli para os espaços $C_b(Z)$, $AP(Z)$ e $AAP(Z)$.

Lema 1.42 *Um conjunto $W \subseteq C_0(Z)$ é relativamente compacto se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) W é equicontínuo;
- (b) $x(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, uniformemente para $x \in W$;
- (c) As órbitas $W(t)$ são relativamente compactas em X , para todo $t \geq 0$.

Teorema 1.43 [43, Theorems 6.3, 6.4] *Um conjunto $V \subseteq AP(Z)$ é relativamente compacto se, e somente se, as seguintes propriedades são verificadas:*

- (a) V é uniformemente equicontínuo sobre $[0, \infty)$;
- (b) V é equi-quase periódica. Isto é, para cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto relativamente denso $P_\epsilon \subset [0, \infty)$ tal que

$$\|x(t + \tau) - x(t)\| \leq \epsilon, \quad x \in V, \quad \tau \in P_\epsilon.$$

- (c) Para cada $t \geq 0$, $V(t)$ é relativamente compacto em Z .

A partir do Teorema anterior é possível deduzir o próximo resultado.

Teorema 1.44 *Um conjunto $V \subseteq AAP(Z)$ é relativamente compacto se, e somente se, as seguintes propriedades são verificadas:*

- (a) V é uniformemente equicontínuo sobre $[0, \infty)$;
- (b) V é equi-assintoticamente quase periódica. Isto é, para cada $\epsilon > 0$ existe $T_\epsilon \geq 0$ e um conjunto relativamente denso $P_\epsilon \subset [0, \infty)$ tal que

$$\|x(t + \tau) - x(t)\| \leq \epsilon, \quad x \in V, \quad t \geq T_\epsilon, \quad \tau \in P_\epsilon.$$

- (c) Para cada $t \geq 0$, $V(t)$ é relativamente compacto em Z .

Para finalizar este capítulo, apresentamos dois resultados de ponto fixo que serão essenciais para estabelecer alguns de nossos resultados.

Lema 1.45 [29, Theorem 6.5.4] (*Leray-Schauder Alternative*) *Seja D um subconjunto convexo fechado de um espaço de Banach X e assumo que $0 \in D$. Seja $F : D \rightarrow D$ uma aplicação completamente contínua. Então o conjunto $\{x \in D : x = \lambda F(x), 0 < \lambda < 1\}$ é não limitado ou a aplicação F possui um ponto fixo em D .*

Lema 1.46 [23, Corollary 4.3.2] *Seja D um subconjunto convexo, limitado e fechado de um espaço de Banach Z . Se $B, C : D \rightarrow Z$ são funções contínuas tais que:*

- (a) $Bz + Cz \in D$ para todo $z \in Z$;
- (b) $\tilde{C}(D)$ é compacto;
- (c) Existe $0 \leq \gamma < 1$ tal que $\|Bz - Bw\| \leq \gamma \|z - w\|$ para todo $z, w \in D$.

Então existe $u \in D$ tal que $Bu + Cu = u$.

Capítulo 2

Existência de Soluções Quase e Assintoticamente Quase Periódicas para a Equação Neutra de Primeira Ordem

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos a existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas para a equação abstrata do tipo neutro com retardamento não limitado

$$\frac{d}{dt}(x(t) + g(t, x_t)) = Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

onde A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de operadores lineares sobre X e $g, f : \mathbb{R} \times B \rightarrow X$ são funções apropriadas.

Seja $J \subset \mathbb{R}$. Ao longo deste capítulo, denotamos por $C_b(J; X)$ o espaço das funções contínuas e limitadas $u : J \rightarrow X$ munido da norma $\|u\|_{C_b(J; X)} = \sup_{t \in J} \|u(t)\|$. Quando $J = [0, \infty)$, empregamos a notação $\|u\|_\infty = \sup_{0 \leq t < \infty} \|u(t)\|$. Escrevemos $C_0([0, \infty) : X)$ para representar o subespaço das funções $u \in C_b([0, \infty) : X)$ tais que $u(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

2.2 Soluções Quase e Assintoticamente Quase Periódicas

Nesta seção, assumimos que o semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é assintoticamente estável. Assim, α e $\widetilde{M}$ serão constantes positivas tais que

$$\|T(t)\| \leq \widetilde{M}e^{-\alpha t}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Assumimos ainda, que as funções $K(\cdot)$, $M(\cdot)$ do axioma (A) [ver página 15] são uniformemente limitadas e denotamos por K e M seus respectivos supremos. Em todo este trabalho, $([D(A)], \|\cdot\|_A)$ denotará o espaço $D(A)$ munido da norma $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$ e para cada $r > 0$ escreveremos $\mathbf{B}_r(0, \mathcal{B}) = \{\psi \in \mathcal{B} : \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$. Mais ainda, se Z é um espaço métrico, usaremos a notação $B_r(z, Z)$ para a bola de raio $r > 0$ e centro z em Z .

Para iniciar, introduzimos o conceito de solução fraca para o problema de Cauchy abstrato

$$\frac{d}{dt}(x(t) + g(t, x_t)) = Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in [\sigma, a), \quad (2.2)$$

$$x_\sigma = \varphi \in \mathcal{B}. \quad (2.3)$$

Definição 2.1 Diremos que uma função $x : (-\infty, a) \rightarrow X$, $a > 0$, é uma solução fraca do problema de Cauchy (2.2)-(2.3) sobre $[\sigma, a)$, se $x_\sigma = \varphi$, $x|_{[\sigma, a)} \in C([\sigma, a); X)$, a função $s \rightarrow AT(t-s)G(s, x_s)$ é integrável sobre $[\sigma, t)$ para todo $t \in [\sigma, a)$, e a seguinte equação integral é verificada

$$\begin{aligned} x(t) = & T(t-\sigma)(\varphi(0) + g(\sigma, \varphi)) - g(t, x_t) - \int_\sigma^t AT(t-s)g(s, x_s)ds \\ & + \int_\sigma^t T(t-s)f(s, x_s)ds, \quad t \in [\sigma, a). \end{aligned} \quad (2.4)$$

No estudo que fizemos do sistema (2.1), assumimos que $(Y, \|\cdot\|_Y)$ é um espaço de Banach continuamente incluído em X onde se verificam as seguintes condições:

(H₁) As seguintes proposições são válidas.

- (a) Para cada $y \in Y$, a função $s \rightarrow T(s)y \in C([0, \infty); Y) \cap C((0, \infty); [D(A)])$.
- (b) A imagem de g está contida em Y e $g : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow Y$ é contínua.
- (c) Existe uma constante positiva w e uma função não crescente $H : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que $e^{-\omega t}H(t) \in \mathcal{L}^1([0, \infty))$ e

$$\|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y; X)} \leq H(s)e^{-ws},$$

para todo $s > 0$.

Observação 2.2 É interessante justificar a condição $(\mathbf{H}_1)$. Sabemos que em geral, a função $t \mapsto AT(t)$ não é integrável em intervalos da forma $(0, a]$. Se $(\mathbf{H}_1)$ é válida e $x(\cdot)$ é uma função como no axioma (A) , então do critério de Bochner para funções integráveis e a estimativa

$$\|AT(t+s)g(s, x_s)\| \leq \|AT(t+s)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \|g(s, x_s)\|_Y$$

deduzimos que $s \mapsto AT(t+s)g(s, x_s)$ é integrável em $[0, t]$ para todo $t \geq 0$, o que é essencial no nosso problema de obter existência de soluções fracas de (2.2)–(2.3). Mencionamos como exemplo de espaços que verificam as condições de Y , os espaços X_α introduzidos no Lema 1.17. Outros exemplos podem ser achados em Lunardi [74] e Rankin [73].

Observação 2.3 Neste trabalho, toda propriedade admitida para g será em relação ao espaço Y . Por exemplo, quando dizemos que g verifica uma condição do tipo Lipschitz ou que $t \mapsto g(t, x_t)$ é quase periódica significa que g verifica uma condição Lipschitz com relação ao espaço Y e que $t \mapsto g(t, x_t)$ é quase periódica em Y .

O próximo resultado é fundamental para obtermos nossos resultados de existência.

Lema 2.4 Seja $G \in AAP(Y)$ e $u : [0, \infty) \rightarrow X$ a função definida por

$$u(t) = \int_0^t AT(t-s)G(s)ds.$$

Então $u \in AAP(X)$.

Prova: Notemos inicialmente que, pela Observação 2.2, a função $u(\cdot)$ está bem definida e é contínua em $[0, \infty)$. Para mostrar o resultado usaremos o Lema 1.37. Dado $\varepsilon > 0$ sejam $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4\eta}$, onde $\eta = \int_0^\infty e^{-ws}H(s)ds \in \mathcal{T}(\varepsilon', G)$, $L = L(\varepsilon', G)$ como no Lema 1.37. Fixemos $L_1 > 0$ tal que

$$\widetilde{M} e^{-L_1 \min\{\alpha, w\}} \|G\|_{AAP(Y)} \eta < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Para $t > L(\varepsilon', G) + L_1$ e $\xi \in \mathcal{T}(\varepsilon', G)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t+\xi) - u(t)\| &\leq \int_0^\xi \|AT(t+\xi-s)G(s)\| ds + \int_0^t \|AT(t-s)(G(s+\xi) - G(s))\| ds \\ &=: I_1(t, \xi) + I_2(t, \xi). \end{aligned}$$

Agora, estimaremos cada termo $I_i(t, \xi)$ separadamente. Para o primeiro termo temos que

$$\begin{aligned} I_1(t, \xi) &\leq \|G\|_{AAP(Y)} \int_0^\xi \|AT(t+\xi-s)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} ds \\ &\leq \|G\|_{AAP(Y)} \int_0^\xi e^{-u(t+\xi-s)}H(t+\xi-s)ds \\ &\leq e^{-wt} \|G\|_{AAP(Y)} \int_0^\xi e^{-w(\xi-s)}H(\xi-s)ds, \end{aligned}$$

e conseqüentemente

$$I_1(t, \xi) < \frac{\varepsilon}{8}, \quad t \geq L_1, \quad \xi \in \mathcal{T}(\varepsilon', g). \quad (2.5)$$

Por outro lado, para o segundo termo vemos que

$$\begin{aligned} I_2(t, \xi) &\leq \int_0^L \|AT(t-s)(G(s+\xi) - G(s))\| ds + \int_L^t \|AT(t-s)(G(s+\xi) - G(s))\| ds \\ &\leq \int_0^L \|T(t-L)\| \|AT(L-s)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \|G(s+\xi) - G(s)\|_Y ds \\ &\quad + \int_L^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \|G(s+\xi) - G(s)\|_Y ds \\ &\leq 2\tilde{M} \|G\|_{AAP(Y)} e^{-\alpha(t-L)} \int_0^L e^{-w(L-s)} H(L-s) ds + \varepsilon' \int_L^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} ds \\ &\leq 2\tilde{M} \|G\|_{AAP(Y)} e^{-\alpha(t-L)} \eta + \varepsilon' \eta, \end{aligned}$$

e portanto

$$I_2(t, \xi) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \geq L + L_1, \quad \xi \in \mathcal{T}(\varepsilon', G). \quad (2.6)$$

Das desigualdades (2.5)-(2.6) temos que

$$\|u(t+\xi) - u(t)\| \leq \varepsilon, \quad t \geq L + L_1, \quad \xi \in \mathcal{T}(\varepsilon', G),$$

o que nos permite concluir, pelo Lema 1.37, que $u(\cdot) \in AAP(X)$. A prova está agora completa. ■

Observação 2.5 *Procedendo como na demonstração do Lema anterior, concluímos que se $G \in AAP(X)$ então a função $u(t) = \int_0^t T(t-s)G(s)ds$ é também assintoticamente quase periódica em X .*

Estamos agora em condições de estabelecer o nosso primeiro resultado de existência de soluções para (2.2)-(2.3).

Teorema 2.6 *Assuma que as seguintes condições são verificadas:*

- (a) *Existem funções contínuas não decrescentes $N_f, N_g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, com $N_f(0) = N_g(0) = 0$, tais que*

$$\|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| \leq N_f(r) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}},$$

$$\|g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2)\|_Y \leq N_g(r) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}$$

para todo $t \geq 0$ e toda $\psi_i \in B_r(0, \mathcal{B})$, $i = 1, 2$.

(b) $f(t, 0) = g(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\varphi \in B_\varepsilon(0, \mathcal{B})$, existe uma solução fraca $x(\cdot, \varphi) \in C_b([0, \infty); X)$ de (2.2)-(2.3) sobre $[0, \infty)$. Se além disso, $\mathcal{B}$ possui memória amortecida e f, g são pontualmente assintoticamente quase periódicas, então $x(\cdot, \varphi) \in AAP(X)$.

Prova: Sejam $r > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que

$$\Theta := \widetilde{M} [H + \|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g(\lambda r)] \lambda + \left[\|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} + \int_0^\infty e^{-ws} H(s) ds \right] N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda) + \alpha^{-1} \widetilde{M} N_f((K + M\lambda)r)(K + M\lambda) < 1.$$

Seja $\varphi \in B_{\lambda r}(0, \mathcal{B})$ e $D = \{x \in C_b([0, \infty); X) : x(0) = \varphi(0), \|x(t)\| \leq r, t \geq 0\}$. É fácil ver que D é um subconjunto fechado de $C_b([0, \infty); X)$. Definimos o operador $\Gamma : D \rightarrow C([0, \infty); X)$ por

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) &= T(t)(\varphi(0) + g(0, \varphi)) - g(t, \tilde{x}_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, \tilde{x}_s) ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, \tilde{x}_s) ds, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow X$ é tal que $\tilde{x}_0 = \varphi$ e $\tilde{x} = x$ sobre $[0, \infty)$. Afirmamos que Γ é uma contração de D em D . Conforme argumentamos antes, na Observação 2.2, a função $t \mapsto AT(t-s)g(s, \tilde{x}_s)$ é integrável em $[0, t]$ para todo $t > 0$, o que permite concluir que Γx está bem definida e que $\Gamma x \in C([0, \infty); X)$.

Mostraremos agora que $\Gamma(D) \subset D$. Se $x \in D$ e $t \geq 0$, dos axiomas do espaço de fase obtemos que $\|\tilde{x}_t\|_{\mathcal{B}} \leq K\|\tilde{x}\|_\infty + M\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq (K + M\lambda)r$ e então

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t)\| &\leq \widetilde{M} [H\lambda r + \|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g(\lambda r)\lambda r] + \|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r \\ &\quad + \int_0^t \|AT(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y; X)} \|g(s, \tilde{x}_s)\|_Y ds + \int_0^t \|T(t-s)\| \|f(s, \tilde{x}_s)\| ds \\ &\leq \widetilde{M} [H\lambda r + \|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g(\lambda r)\lambda r] + \|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r \\ &\quad + N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r \int_0^t e^{-w(t-s)} H(t-s) ds \\ &\quad + \widetilde{M} N_f((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &\leq \widetilde{M} [H + \|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g(\lambda r)] \lambda r + \left[\|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} + \int_0^\infty e^{-ws} H(s) ds \right] N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r + \alpha^{-1} \widetilde{M} N_f((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r \\ &\leq \Theta r, \end{aligned}$$

o que mostra que $\| \Gamma u(t) \| \leq r$ para todo $t \geq 0$, ou seja, $\Gamma(D) \subset D$.

Para mostrar que Γ é uma contração, fixemos $x, y \in D$. Da definição do operador Γ temos que

$$\begin{aligned} \| \Gamma x(t) - \Gamma y(t) \| &\leq \| g(t, \tilde{x}_t) - g(t, \tilde{y}_t) \| + \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y;X)} \| g(s, \tilde{x}_s) - g(s, \tilde{y}_s) \|_{Y^*} ds \\ &\quad + \int_0^t \| T(t-s)(f(s, \tilde{x}_s) - f(s, \tilde{y}_s)) \| ds \\ &\leq \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g((K + M\lambda)r)K \| x - y \|_\infty \\ &\quad + N_g((K + M\lambda)r)K \int_0^\infty e^{-ws} H(s) ds \| x - y \|_\infty \\ &\quad + \alpha^{-1} \tilde{M} N_f((K + M\lambda)r)K \| x - y \|_\infty \\ &< \Theta \| x - y \|_\infty \end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração. Portanto, $\Gamma(\cdot)$ possui um único ponto fixo $u \in D$ que é uma solução fraca de (2.2)-(2.3) sobre $[0, \infty)$ tal que $u_0 = \varphi$.

Suponhamos agora que $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida e que f e g são pontualmente assintoticamente quase periódicas. Se $x \in D \cap AAP(X)$, dos Lemas 1.39 e 2.4, e Observação 2.5, segue-se que $\Gamma x \in AAP(X)$ pois $T(\cdot)(\varphi(0) + g(0, \varphi)) \in C_b([0, \infty); X)$. Mais ainda, do exposto anteriormente é evidente que $\Gamma : D \cap AAP(X) \rightarrow D \cap AAP(X)$ é ainda uma contração o que prova que existe uma solução fraca $u \in AAP(X)$ de (2.2)-(2.3) sobre $[0, \infty)$. A prova está completa. ■

A prova do próximo resultado é similar a prova do Teorema 2.6, por isto será resumida convenientemente.

Teorema 2.7 *Suponha as seguintes condições são satisfeitas.*

(a) *Existem constantes positivas N_f, N_g tais que*

$$\begin{aligned} \| f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2) \| &\leq N_f \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \\ \| g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2) \|_{Y^*} &\leq N_g \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e toda $\psi_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2$.

(b) *As funções $\| f(t, 0) \|$ e $\| g(t, 0) \|_{Y^*}$ são limitados sobre $[0, \infty)$ e*

$$K \left(\| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g + N_g \int_0^\infty e^{-ws} H(s) ds + \alpha^{-1} \tilde{M} N_f \right) < 1.$$

Então, para cada $\varphi \in \mathcal{B}$ existe uma única solução fraca $u(\cdot, \varphi) \in C_b([0, \infty); X)$ de (2.2)-(2.3) sobre $[0, \infty)$. Se além disso, $\mathcal{B}$ é um espaço memória amortecida e f, g são pontualmente assintoticamente quase periódica, então $u(\cdot, \varphi) \in AAP(X)$.

Prova: Seja $\varphi \in B$ e $D = \{x \in C_b([0, \infty) : X) : x(0) = \varphi(0)\}$. Para $x \in D$, definimos Γx como em (2.7). Da prova do Teorema 2.6, segue-se facilmente que Γx está bem definida e que $\Gamma x \in C_b([0, \infty) : X)$. Mais ainda, uma simples estimativa usando os axiomas do espaço B permite mostrar que

$$\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| \leq K \left(\|I_d \otimes \mathcal{L}(Y; X)\| N_g + N_g \int_0^\infty e^{-ws} H(s) ds + \alpha^{-1} \widetilde{M} N_f \right) \|u - v\|_\infty,$$

o que prova que Γ é uma contração sobre D . Isto mostra que existe uma única solução $u \in C_b([0, \infty) : X)$ de (2.2)-(2.3). Arguindo como no Teorema 2.6, dos Lemas 1.39 e 2.4, e Observação 2.5 inferimos que $\Gamma : D \cap AAP(X) \rightarrow D \cap AAP(X)$ é uma contração o que prova a existência de uma única solução $u \in AAP(X)$ de (2.2)-(2.3). A prova do Teorema está completa.

■

Para finalizar esta primeira seção, estudaremos a existência de soluções quase periódicas de (2.2)-(2.3). Com este objetivo consideramos o seguinte resultado.

Lema 2.8 *Seja $u \in C_b(\mathbb{R} : X)$ e suponha que $t \rightarrow g(t, u_t)$, $t \rightarrow f(t, u_t)$ são funções limitadas. Então u verifica a equação*

$$x(t) = -g(t, x_t) - \int_{-\infty}^t AT(t-s)g(s, x_s)ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s, x_s)ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

se, e somente se, para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ e $t \geq \sigma$,

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t-\sigma)(u(\sigma) + g(\sigma, u_\sigma)) - g(t, u_t) - \int_\sigma^t AT(t-s)g(s, u_s)ds \\ &\quad + \int_\sigma^t T(t-s)f(s, u_s)ds. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Prova: Suponha que $u(\cdot)$ verifica (2.8). Então para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ e $t \geq \sigma$ temos que

$$\begin{aligned} u(t) &= -g(t, u_t) - \int_{-\infty}^\sigma AT(t-\sigma)T(\sigma-s)g(s, u_s)ds - \int_\sigma^t AT(t-s)g(s, u_s)ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^\sigma T(t-\sigma)T(\sigma-s)f(s, u_s)ds + \int_\sigma^t T(t-s)f(s, u_s)ds \\ &= -g(t, u_t) + T(t-\sigma) \left(- \int_{-\infty}^\sigma AT(\sigma-s)g(s, u_s)ds + \int_{-\infty}^\sigma T(\sigma-s)f(s, u_s)ds \right) \\ &\quad - \int_\sigma^t AT(t-s)g(s, u_s)ds + \int_\sigma^t T(t-s)f(s, u_s)ds \\ &= T(t-\sigma)(u(\sigma) + g(\sigma, u_\sigma)) - g(t, u_t) - \int_\sigma^t AT(t-s)g(s, u_s)ds \\ &\quad + \int_\sigma^t T(t-s)f(s, u_s)ds, \end{aligned}$$

o que prova que $u(\cdot)$ verifica (2.9). A prova da recíproca é óbvia e será omitida. $\square$

Lembramos que se $\mathcal{B}$ verifica o axioma (C2) (ver página 16) existe uma constante $\mathcal{L} > 0$ tal que

$$\| \psi \|_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{L} \sup_{(-\infty, 0]} \| \psi(\theta) \|, \quad \forall \psi \in C_b((-\infty, 0]; X). \quad (2.10)$$

Isto será um ponto chave da prova do nosso próximo resultado.

Proposição 2.9 *Assuma que $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma (C2) e que $f(t, 0) = g(t, 0) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que existem funções contínuas não decrescentes $N_f, N_g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, com $N_f(0) = N_g(0) = 0$, tais que*

$$\begin{aligned} \| f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2) \| &\leq N_f(r) \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \\ \| g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2) \| &\leq N_g(r) \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\psi_i \in B_r(0, \mathcal{B})$, $i = 1, 2$. Então existe uma solução $u(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}; X)$ de (2.8).

Prova: Definimos $\Gamma : C_b(\mathbb{R}; X) \rightarrow C_b(\mathbb{R}; X)$ por

$$\Gamma x(t) = -g(t, x_t) - \int_{-\infty}^t AT(t-s)g(s, x_s)ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s, x_s)ds. \quad (2.11)$$

Seja $x \in C_b(\mathbb{R}; X)$ e $\mathcal{L}$ a constante em (2.10). Como $\mathcal{B}$ verifica o axioma (C2) temos que $x_t \in \mathcal{B}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e que $\| x_t \|_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{L} \| x \|_{\infty}$. Usando a estimativa na Observação 2.2 podemos mostrar facilmente $\Gamma x \in C_b(\mathbb{R}; X)$. Fixemos agora $r > 0$ tal que

$$\Theta := \mathcal{L} \left(\| I_d \|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g(\mathcal{L}r) + N_g(\mathcal{L}r) \int_0^{\infty} e^{-ws} H(s) ds + \alpha^{-1} \widetilde{M} N_f(\mathcal{L}r) \right) < 1. \quad (2.12)$$

Afirmamos que Γ é uma contração de $B_r(0, C_b(\mathbb{R}; X))$ em $B_r(0, C_b(\mathbb{R}; X))$. De fato, para $t \in \mathbb{R}$ e $u \in C_b(\mathbb{R}; X)$ temos que $\| u_t \|_{\mathcal{B}} \leq \mathcal{L} \sup_{-\infty < \theta \leq 0} \| u(t+\theta) \| \leq \mathcal{L}r$ e então

$$\begin{aligned} \| \Gamma u(t) \| &\leq \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g(\mathcal{L}r) \| u_t \|_{\mathcal{B}} + N_g(\mathcal{L}r) \int_{-\infty}^t e^{-w(t-s)} H(t-s) \| u_s \|_{\mathcal{B}} ds \\ &\quad + \widetilde{M} N_f(\mathcal{L}r) \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} \| u_s \|_{\mathcal{B}} ds \\ &\leq \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g(\mathcal{L}r) \mathcal{L}r + N_g(\mathcal{L}r) \mathcal{L}r \int_0^{\infty} e^{-ws} H(s) ds + \alpha^{-1} \widetilde{M} N_f(\mathcal{L}r) \mathcal{L}r \\ &< \Theta r, \end{aligned}$$

portanto, $\Gamma u \in B_r(0, C_b(\mathbb{R}; X))$. Mais ainda, usando que g e f são Lipschitz obtemos que

$$\begin{aligned}
\| \Gamma u(t) - \Gamma v(t) \| &\leq \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g(\mathcal{L}r) \| u_t - v_t \|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + N_g(\mathcal{L}r) \int_{-\infty}^t e^{-w(t-s)} H(t-s) \| u_s - v_s \|_{\mathcal{B}} ds \\
&\quad + \widetilde{M} N_f(\mathcal{L}r) \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} \| u_s - v_s \|_{\mathcal{B}} ds \\
&\leq \left[\| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g(\mathcal{L}r) + N_g(\mathcal{L}r) \int_0^{\infty} e^{-ws} H(s) ds \right] \| u - v \|_{C_b(\mathbb{R};X)} \\
&\quad + \alpha^{-1} \widetilde{M} N_f(\mathcal{L}r) \| u - v \|_{C_b(\mathbb{R};X)} \\
&\leq \Theta \| u - v \|_{C_b(\mathbb{R};X)}
\end{aligned}$$

o que prova que $\Gamma(\cdot)$ é uma contração em $B_r(0, C_b(\mathbb{R}; X))$. Isto completa a demonstração da Proposição. ■

Proposição 2.10 *Assuma que $\mathcal{B}$ satisfaz o axioma (C2) e que as aplicações $t \rightarrow f(t, 0)$, $t \rightarrow g(t, 0)$ são limitadas em X e Y respectivamente. Suponha que existem constantes N_f, N_g tais que*

$$\begin{aligned}
\| f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2) \| &\leq N_f \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}, \\
\| g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2) \|_Y &\leq N_g \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}},
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, toda $\psi_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2$ e que

$$\mathcal{L} \left(\| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g + N_g \int_0^{\infty} e^{-ws} H(s) ds + \alpha^{-1} \widetilde{M} N_f \right) < 1.$$

Então a equação (2.8) possui uma única solução $u(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}; X)$.

Prova: Seja $\Gamma : C_b(\mathbb{R}; X) \rightarrow C_b(\mathbb{R}; X)$ a aplicação definida na prova da Proposição 2.9. Claramente $\Gamma x \in C_b(\mathbb{R}; X)$ para cada $x \in C_b(\mathbb{R}; X)$. Mais ainda, da estimativa

$$\begin{aligned}
\| \Gamma x(t) \| &\leq \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g \| u_t \|_{\mathcal{B}} + N_g \int_{-\infty}^t e^{-w(t-s)} H(t-s) \| u_s \|_{\mathcal{B}} ds \\
&\quad + \widetilde{M} N_f \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-s)} \| u_s \|_{\mathcal{B}} ds \\
&\leq \mathcal{L} \left(\| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g + N_g \int_0^{\infty} e^{-ws} H(s) ds + \alpha^{-1} \widetilde{M} N_f \right) \| x \|_{\infty}
\end{aligned}$$

concluimos que $\Gamma x \in C_b(\mathbb{R}; X)$. Procedendo como na parte final da prova da Proposição 2.9, pode-se mostrar que Γ é uma contração e portanto, que existe uma única solução de (2.8). ■

Corolário 2.11 *Suponha que as hipóteses da Proposição 2.10 são verificadas e que para cada $\varphi \in \mathcal{B}$, as funções $f_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow X$, $g_\varphi : \mathbb{R} \rightarrow Y$ definidas por $f_\varphi(t) := f(t, \varphi)$, $g_\varphi(t) := g(t, \varphi)$ são μ -periódicas. Então existe uma única solução μ -periódica de (2.8).*

Prova: Seja $u(\cdot)$ o ponto fixo da aplicação Γ definida na prova do Teorema 2.10 e definamos $v(t) := u(t + \mu)$, $t \in \mathbb{R}$. Da unicidade de soluções de (2.8), é suficiente mostrar que v é solução de (2.8). Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos $g(t, v_t) = g(t + \mu, u_{t+\mu})$, $f(t + \mu, v_t) = f(t + \mu, u_{t+\mu})$ e então

$$\begin{aligned} v(t) &= u(t + \mu) \\ &= -g(t + \mu, u_{t+\mu}) - \int_{-\infty}^{t+\mu} AT(t + \mu - s)g(s, u_s)ds + \int_{-\infty}^{t+\mu} T(t + \mu - s)f(s, u_s)ds \\ &= -g(t + \mu, v_t) - \int_{-\infty}^t AT(t - s)g(s + \mu, u_{s+\mu})ds + \int_{-\infty}^t T(t - s)f(s + \mu, u_{s+\mu})ds \\ &= -g(t, v_t) - \int_{-\infty}^t AT(t - s)g(s, v_s)ds + \int_{-\infty}^t T(t - s)f(s, v_s)ds. \end{aligned}$$

Portanto, v é solução de (2.8). Isto completa a prova. ■

Definição 2.12 *Dizemos que uma função $u(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}; X)$ é uma solução quase periódica de (2.1) se $u(\cdot) \in AP(X)$ e*

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t - \sigma)(u(\sigma) + g(\sigma, u_\sigma)) - g(t, u_t) - \int_{\sigma}^t AT(t - s)g(s, u_s)ds \\ &\quad + \int_{\sigma}^t T(t - s)f(s, u_s)ds, \end{aligned} \tag{2.13}$$

para cada $\sigma \in \mathbb{R}$ e todo $t \geq \sigma$.

Teorema 2.13 *Suponha válidas as hipóteses da Proposição 2.9. Se $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X$ e $g : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow Y$ são pontualmente quase periódicas, então existe uma solução quase periódica de (2.1).*

Prova: Do Lema 1.39 vemos facilmente que $t \mapsto f(t, x_t) \in AP(X)$ e $t \mapsto g(t, x_t) \in AP(Y) \cap AP(X)$ quando $x \in AP(X)$. Seja $r > 0$ e Γ como na prova da Proposição 2.9. Afirmamos que Γ é uma contração de $B_r(0, AP(X))$ em $B_r(0, AP(X))$. Seja $\varepsilon > 0$ e $x \in AP(X)$. Do Teorema 1.32 temos que a função $\xi(t) = (f(t, x_t), g(t, x_t)) \in AP(X \times Y)$. Se $\tau \in \mathcal{H}(\varepsilon, \xi, X \times Y)$ e $t \in \mathbb{R}$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t + \tau) - \Gamma x(t)\| &\leq \|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} \|g(t + \tau, x_{t+\tau}) - g(t, x_t)\|_Y \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \|AT(t - s)\|_{\mathcal{L}(Y; X)} \|g(s + \tau, x_{s+\tau}) - g(s, x_s)\|_Y ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t \tilde{M} e^{-\alpha(t-s)} \|f(s + \tau, x_{s+\tau}) - f(s, x_s)\| ds \\ &\leq \left(\|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} + \int_0^\infty e^{-\alpha s} H(s) ds + \alpha^{-1} \tilde{M} \right) \varepsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma x \in AP(X)$. Da prova da Proposição 2.9 deduzimos que Γ é uma contração em $B_r(0, AP(X))$. Portanto, existe uma solução $u \in AP(X)$ de (2.1). A conclusão é agora consequência do Lema 2.8. A prova está completa. ■

Para um tipo particular de equações diferenciais ordinárias, um resultado de Coppel [44] mostra que a existência de uma solução assintoticamente quase periódica implica a existência de uma solução quase periódica. Estabeleceremos aqui um resultado similar para o caso de equações neutras. Para isto usaremos a propriedade seguinte a qual é consequência direta dos Lemas 1.32, 1.39 e da Definição 1.30.

Lema 2.14 [42] *Sejam Z, W espaços de Banach, $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times Z \rightarrow W$ uma função uniformemente quase periódica e $w : \mathbb{R} \rightarrow Z$ uma função quase periódica. Então existe uma sequência de números reais (h_k) , estritamente crescente com $h_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que $w(t + h_k) \rightarrow w(t)$ e $\mathcal{F}(t + h_k, w(t + h_k)) \rightarrow \mathcal{F}(t, w(t))$ quando $k \rightarrow \infty$ uniformemente em $\mathbb{R}$.*

Definição 2.15 *Dizemos que uma função $u(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}; X)$ é uma solução assintoticamente quase periódica de (2.1) se $u(\cdot)$ verifica (2.13) para todo $\sigma \in \mathbb{R}$ e $u|_{[0, \infty)} \in AAP(X)$.*

Proposição 2.16 *Assuma que $\mathcal{B}$ possui memória amortecida e que $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ são pontualmente quase periódicas e localmente Lipschitz em $\varphi \in \mathcal{B}$, uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Suponha que existe uma solução $x(\cdot)$ assintoticamente quase periódica de (2.1). Então existe uma solução quase periódica de (2.1).*

Prova: Seja $x(\cdot) = p(\cdot) + q(\cdot)$ onde $p(\cdot) \in AP(X)$ e $q(\cdot)$ é uma função contínua de $\mathbb{R}$ em X tal que $q(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Dos Lemas 1.32 e 1.39 deduzimos que a função $(f(\cdot), g(\cdot)) : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X \times Y$ é uniformemente quase periódica. Do Lema 2.14 sabemos que existe uma sequência de números reais $(h_k)_k$ com $h_k \rightarrow \infty$, tal que

$$\|p(t + h_k) - p(t)\| \rightarrow 0, \quad (2.14)$$

$$\|f(t + h_k, p_{t+h_k}) - f(t, p_t)\| \rightarrow 0, \quad (2.15)$$

$$\|g(t + h_k, p_{t+h_k}) - g(t, p_t)\|_Y \rightarrow 0, \quad (2.16)$$

quando $k \rightarrow \infty$ uniformemente sobre $\mathbb{R}$. Como $\mathcal{B}$ possui memória amortecida, obtemos que

$$f(t + h_k, p_{t+h_k} + q_{t+h_k}) - f(t, p_t) \rightarrow 0, \quad (2.17)$$

$$\|g(t + h_k, p_{t+h_k} + q_{t+h_k}) - g(t, p_t)\|_Y \rightarrow 0 \quad (2.18)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, pois $q_{t+h_k} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ (ver Teorema 1.28).

Usando as convergências anteriores, vemos que para $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x(t+h_k) &= p(t+h_k) + q(t+h_k) \\ &= -g(t+h_k, p_{t+h_k} + q_{t+h_k}) - \int_{-\infty}^{t+h_k} AT(t+h_k-s)g(s, p_s + q_s)ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^{t+h_k} T(t+h_k-s)f(s, p_s + q_s)ds \\ &= -g(t+h_k, p_{t+h_k} + q_{t+h_k}) - \int_{-\infty}^t AT(t-s)g(s+h_k, p_{s+h_k} + q_{s+h_k})ds \\ &\quad + \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s+h_k, p_{s+h_k} + q_{s+h_k})ds, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir, por (2.14) – (2.18) e o Teorema da Convergência Dominada, que

$$p(t) = -g(t, p_t) - \int_{-\infty}^t AT(t-s)g(s, p_s)ds + \int_{-\infty}^t T(t-s)f(s, p_s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Agora a conclusão é consequência do Lema 2.8. A prova está completa. ■

Até o final desta seção, assumiremos válidas as seguintes condições:

(F₁) A função $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X$ satisfaz as condições de Caratheodory:

- (i) $f(t, \cdot) : \mathcal{B} \rightarrow X$ é contínua para quase todo $t \in \mathbb{R}$;
- (ii) Para cada $\psi \in \mathcal{B}$, a função $f(\cdot, \psi) : \mathbb{R} \rightarrow X$ é fortemente mensurável.

(F₂) Existem funções $m_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ com $e^{\alpha(\cdot)}m_f(\cdot) \in L^1([0, \infty) : X)$ e $W_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ contínua, não decrescente tais que:

$$\|f(t, \varphi)\| \leq m_f(t)W_f(\|\varphi\|_{\mathcal{B}}), \quad (t, \varphi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}.$$

Apresentamos a seguir, o Teorema do Valor Médio para a integral de Bochner. Ele será muito útil para estabelecer nosso próximo resultado.

Lema 2.17 [23, Lemma 2.1.3] *Seja Z um espaço de Banach e $F : \mathbb{R} \rightarrow Z$ uma função integrável.*

Então

$$(\beta - \alpha)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} F(\tau) d\tau \in \overline{\text{co}\{F(\tau) : \alpha \leq \tau \leq \beta\}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{com } \alpha < \beta,$$

onde $\text{co}(\cdot)$ denota a envoltória convexa.

Teorema 2.18 *Assuma que $\mathcal{B}$ possui memória amortecida, $g(\cdot)$ é pontualmente assintoticamente quase periódica e que $f(\cdot)$ é uniformemente assintoticamente quase periódica. Suponha que as seguintes condições são verificadas:*

- (a) *Para cada $r > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe um conjunto compacto $W_{\varepsilon,r} \subset X$ tal que $T(\varepsilon)f(s, \psi) \in W_{\varepsilon,r}$ para todo $s \geq 0$ e toda $\psi \in B_r(0, \mathcal{B})$,*
- (b) *Existe uma função $N_g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ contínua, não decrescente, com $N_g(0) = 0$ tal que*

$$\|g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2)\|_Y \leq N_g(r) \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}$$

para todo $t \geq 0$ e $\psi_i \in B_r(0, \mathcal{B})$, $i = 1, 2$,

- (c) *$g(t, 0) = 0$ para todo $t \geq 0$ e $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{W_f(r)}{r} \int_0^\infty e^{\alpha s} m_f(s) ds < 1$.*

Então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda $\varphi \in B_\varepsilon(0, \mathcal{B})$, o sistema (2.1) possui uma solução $x(\cdot, \varphi) \in AAP(X)$.

Prova: Fixemos $r > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ tais que

$$\Theta := \widetilde{M} [H + \|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} N_g(\lambda r)] \lambda + \left[\|I_d\|_{\mathcal{L}(Y; X)} + \int_0^\infty e^{-ws} H(s) ds \right] N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda) \frac{\widetilde{M}W((K + M\lambda)r)}{r} \int_0^\infty e^{\alpha s} m_f(s) ds < 1.$$

Sejam $\varepsilon = \lambda r$, $\varphi \in B_{\lambda r}(0, \mathcal{B})$ e $D = \{x \in AAP(X) : x(0) = \varphi(0), \|x(t)\| \leq r, t \geq 0\}$. Definimos $\Gamma : D \rightarrow C([0, \infty); X)$ por

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) &= T(t)(\varphi(0) + g(0, \varphi)) - g(t, \tilde{x}_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, \tilde{x}_s)ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, \tilde{x}_s)ds, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

onde $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow X$ é tal que $\tilde{x}_0 = \varphi$ e $\tilde{x} = x$ sobre $[0, \infty)$.

Por **(H₁)** é fácil ver que $\Gamma x \in C([0, \infty); X)$. Mais ainda, dos Lemas 1.39 e 2.4 e Observação 2.5 obtemos que $\Gamma x \in AAP(X)$. Agora, se $x \in D$, da estimativa

$$\|\tilde{x}_s\|_{\mathcal{B}} \leq Kr + M \|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq (K + M\lambda)r,$$

temos que

$$\begin{aligned}
 \| \Gamma x(t) \| &\leq \widetilde{M} [H\lambda r + \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g(\lambda r)\lambda r] + \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r \\
 &\quad + \int_0^t \| AT(t-s) \|_{\mathcal{L}(Y;X)} \| g(s, \tilde{x}_s) \|_Y ds + \int_0^t \| T(t-s) \| \| f(s, \tilde{x}_s) \| ds \\
 &\leq \widetilde{M} [H\lambda r + \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g(\lambda r)\lambda r] + \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r \\
 &\quad + N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} H(t-s) ds \\
 &\quad + \widetilde{M} W((K + M\lambda)r) \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} m_f(s) ds \\
 &\leq \widetilde{M} [H + \| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} N_g(\lambda r)] \lambda r + \\
 &\quad \left[\| I_d \|_{\mathcal{L}(Y;X)} + \int_0^\infty e^{-\alpha s} H(s) ds \right] N_g((K + M\lambda)r)(K + M\lambda)r + \\
 &\quad \widetilde{M} W((K + M\lambda)r) \int_0^\infty e^{-\alpha s} m_f(s) ds \\
 &\leq \Theta r,
 \end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma x \in D$.

Mostraremos agora, que Γ é um operador condensante sobre D . Para isto, introduzimos a decomposição $\Gamma = \Gamma^1 + \Gamma^2$ onde Γ^1 e Γ^2 são operadores definidos por

$$\begin{aligned}
 \Gamma^1 x(t) &= T(t)(\varphi(0) + g(0, \varphi)) - g(t, \tilde{x}_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, \tilde{x}_s)ds, \quad t \geq 0, \\
 \Gamma^2 x(t) &= \int_0^t T(t-s)f(s, \tilde{x}_s)ds, \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Da prova do Teorema 2.6 segue-se que Γ^1 é uma contração de D em D . Mostraremos agora que Γ^2 é completamente contínua de $AAP(X)$ sobre $C_0([0, \infty) : X)$. Da estimativa

$$\| \Gamma^2 x(t) \| \leq e^{-\alpha t} W_f((K + M\lambda)r) \int_0^\infty e^{-\alpha s} m_f(s) ds, \quad x \in D, \quad (2.19)$$

inferimos que $\Gamma^2 x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$ e assim, $\Gamma^2(D) \subset C_0([0, \infty) : X)$. Mais ainda, é claro desta estimativa que a convergência é uniforme para $x \in D$. Por outro lado, a continuidade de Γ^2 é consequência do teorema da Convergência Dominada e do fato que $e^{\alpha(\cdot)} m_f(\cdot) \in \mathcal{L}^1([0, \infty))$.

Provaremos agora que $\Gamma^2(D)(t) = \{\Gamma^2 x(t) : x \in D\}$ é relativamente compacto em X para todo $t > 0$. O caso $t = 0$ é óbvio. Seja $0 < \delta < t < T < \infty$. Do Lema 2.17 temos que

$$\begin{aligned}
 \Gamma^2 x(t) &= \int_0^{t-\delta} T(t-\delta-s)T(\delta)f(s, \tilde{u}_s)ds + \int_{t-\delta}^t T(t-s)f(s, \tilde{u}_s)ds \\
 &\subset (t-\delta)\overline{co(\{T(\theta)x : 0 \leq \theta \leq t, \quad x \in \overline{W_{\delta, r^*}}\})} + \widetilde{M} W_f(r^*) \int_{t-\delta}^t m_f(s)ds,
 \end{aligned}$$

onde $r^* = (K + M\lambda)r$. Como W_{δ,r^*} é compacto e $(T(t))_{t \geq 0}$ é fortemente contínuo, obtemos que $co(\{T(\theta)x : 0 \leq \theta \leq t, x \in W_{\delta,r^*}\})$ é relativamente compacto em X . Assim, para cada $\delta > 0$ existem C_δ compacto em X e $D_\delta \subset X$, com $Diam(D_\delta) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$, tais que

$$\Gamma^2(D)(t) \subset C_\delta + D_\delta,$$

o que prova que $\Gamma D(t)$ é totalmente limitado e por tanto relativamente compacto em X .

Para finalizar a demonstração, vamos provar que $\{\Gamma x : x \in D\}$ é equicontínuo sobre $[0, a]$ para $a > 0$. Seja $0 < \delta < t < a < \infty$. Usando que o semigrupo é fortemente contínuo e que W_{δ,r^*} é compacto, podemos fixar $0 < \delta_1 < \delta$ tal que

$$\|T(s)x - x\| < \delta, \quad x \in W_{\delta,r^*}, \quad r^* = (K + M\lambda)r,$$

quando $0 < s < \delta_1$. Assim, para $x \in D$ e $0 < h < \delta$ temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma^2 x(t+h) - \Gamma^2 x(t)\| &\leq \int_0^{t-\delta} \|T(t+h-s)f(s, \tilde{x}_s) - T(t-s)f(s, \tilde{x}_s)\| ds \\ &\quad + \int_{t-\delta}^t \|T(t+h-s)f(s, \tilde{x}_s) - T(t-s)f(s, \tilde{x}_s)\| ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)f(s, \tilde{x}_s)\| ds \\ &\leq \int_0^{t-\delta} \|T(t-\delta-s)(T(h) - I)T(\delta)f(s, \tilde{x}_s)\| ds \\ &\quad + 2\tilde{M}W_f(r^*) \int_{t-\delta}^t m_f(s)ds + \tilde{M}W_f(r^*) \int_t^{t+h} m_f(s)ds \\ &\leq (t-\delta)\tilde{M}\delta + 2\tilde{M}W_f(r^*) \int_{t-\delta}^t m_f(s)ds + \tilde{M}W_f(r^*) \int_t^{t+h} m_f(s)ds \end{aligned}$$

o que prova que $\Gamma^2 D$ é equicontínuo à direita de t , uma vez que δ é arbitrário e M_f é integrável. De maneira similar, podemos provar que $\Gamma^2 D$ é equicontínuo à esquerda de t e equicontínuo em $t = 0$. Portanto $\Gamma^2 D$ é equicontínuo sobre cada intervalo da forma $[0, a]$.

Do exposto anteriormente, concluímos que Γ^2 é um operador completamente contínuo de D em $AAP(X)$. Portanto, Γ é condensante de D em D . A existência de uma solução fraca assintoticamente quase periódica para (2.1) é agora consequência do Lema 1.46. A prova está completa. ■

2.3 Existência de Soluções Quase e Assintoticamente Quase Periódicas Via Equações Limites

Nesta seção estudamos a existência de soluções quase e assintoticamente quase periódicas para o sistema (2.1) por meio do estudo dos sistemas limites associados e do conceito de solução BC-totalmente estável. No que segue-se, $\mathcal{B}$ sempre será um espaço com memória amortecida, separável e que verifica as seguintes condições.

- (H₂) O semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$ é compacto, $i_c : Y \rightarrow X$ é compacta e existe uma função $H \in L^1_{loc}([0, \infty))$ tal que $\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \leq H(t)$ para cada $t \geq 0$.
- (H₃) As funções $f : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow X$ e $g : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow Y$ são uniformemente quase periódicas e existem funções $N_f, N_g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tais que $\|f(t, \phi)\| \leq N_f(r)$ e $\|g(t, \phi)\|_Y \leq N_g(r)$ para todo $(t, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times B_r(0, \mathcal{B})$.
- (H₄) Existe uma solução fraca $u \in C_b(\mathbb{R}; X)$ de (2.1) sobre $[0, \infty)$. Mais ainda, $t \mapsto g(t, u_t)$ é uniformemente equicontínua sobre $\mathbb{R}^+$.

Assumindo as condições (H₂), (H₃) e

- (g_φ) Seja $\varphi \in \mathcal{B}$, $y : (-\infty, T] \rightarrow X$ a função definida por $y(t) = T(t)\varphi(0)$ para $t \geq 0$ e $y(t) = \varphi(t)$ para $t \leq 0$. Seja $S(T)$ o espaço $S(T) = \{x : (-\infty, T] \rightarrow X : x_0 = 0; x \in C([0, T]; X)\}$ munido da norma da convergência uniforme. Dizemos que o sistema (2.1) verifica a condição g_φ se para todo conjunto limitado $Q \subset S(T)$, o conjunto de funções $\{t \mapsto g(t, x_t + y_t) : x \in Q\}$ é equicontínuo sobre $[0, T]$,

Hernández [9] provou a existência de soluções fracas para o sistema (2.1) definidas em $(-\infty, T]$ (veja também [11] e [12] para detalhes adicionais). Os resultados em [9], são obtidos usando o Lema 1.45. Para justificar nossas hipóteses, no próximo resultado estabelecemos condições para existência de soluções fracas globais (definidas sobre $[0, \infty)$) de (2.1).

Lema 2.19 *Assuma (H₂), (H₃), (g_φ) e que existe $w > 0$ tal que $e^{-wt}H(t) \in L^1([0, \infty))$ e $\|AT(t)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \leq e^{-wt}H(t)$. Seja $v(\cdot, \varphi)$ uma solução fraca máxima de (2.1) e suponha que existem constantes C_i , $i = 1, 2$, e funções $m_f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $W_f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, sendo m_f contínua e W_f crescente, tais que*

$$\begin{aligned} \|g(t, \psi)\|_Y &\leq C_1 \|\psi\|_{\mathcal{B}} + C_2, \quad (t, \psi) \in [0, \infty) \times \mathcal{B}, \\ \|f(t, \psi)\| &\leq m_f(t)W_f(\|\psi\|_{\mathcal{B}}), \quad (t, \psi) \in [0, \infty) \times \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Se

$$\frac{K}{\mu} \int_0^\infty m_f(s) ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W_f(s)},$$

onde $\mu = 1 - KC_1(1 + \int_0^\infty e^{-ws}H(s)ds) > 0$ e

$$c = \left[K\mu^{-1} \left(\widetilde{M}(C_1 + H) + C_1M \left(1 + \int_0^\infty e^{-ws}H(s)ds \right) \right) + M \right] \|\varphi\|_B \\ + K\mu^{-1}C_2 \left(1 + \widetilde{M} + \int_0^\infty e^{-ws}H(s)ds \right),$$

então $v(\cdot, \varphi)$ está definida sobre $[0, \infty)$.

Prova: Suponha que $v(\cdot, \varphi)$ está definida sobre $[0, t_{\max})$. Por [11, Proposição 2.2], é suficiente mostrar que $v(\cdot, \varphi)$ é limitada sobre $[0, t_{\max})$. Se $t \in [0, t_{\max})$ temos que

$$\begin{aligned} \|v(t)\| &\leq \|T(t)\| (H\|\varphi\|_B + \|g(0, \varphi)\|) + C_1\|v_t\|_B + C_2 \\ &\quad + \int_0^t e^{-w(t-s)}H(t-s)(C_1\|v_s\|_B + C_2)ds + \int_0^t m_f(s)W_f(\|v_s\|_B)ds \\ &\leq d_1 + C_1K \left(1 + \int_0^\infty e^{-ws}H(s)ds \right) \|v\|_t + \int_0^t m_f(s)W_f(K\|v\|_s + M\|\varphi\|_B)ds \end{aligned}$$

onde

$$d_1 = \left[\widetilde{M}(C_1 + H) + C_1M \left(1 + \int_0^\infty e^{-ws}H(s)ds \right) \right] \|\varphi\|_B + C_2 \left(1 + \widetilde{M} + \int_0^\infty e^{-ws}H(s)ds \right).$$

Assim, usando a notação $\alpha(t) = K\|v\|_t + M\|\varphi\|_B$ é o fato que $\mu > 0$ temos que

$$\alpha(t) \leq c + \frac{K}{\mu} \int_0^t m_f(s)W_f(\alpha(s))ds.$$

Denotando por $\beta(t)$ o lado direito da última desigualdade, obtemos que

$$\beta'(t) \leq \frac{K}{\mu} m_f(t)W_f(\beta(t)),$$

e assim

$$\int_c^{\beta(t)} \frac{ds}{W_f(s)} \leq \frac{K}{\mu} \int_0^{t_{\max}} m_f(s)ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W_f(s)},$$

o que permite concluir que $\beta(\cdot)$ é limitada sobre $[0, t_{\max})$. Portanto $v(\cdot, \varphi)$ é limitada e consequentemente, definida sobre toda a reta. A prova está completa. ■

Corolário 2.20 *Assuma as condições do Lema 2.19 e suponha que $m_f \in \mathcal{L}^1([0, \infty))$ e W_f é contínua. Se $\int_0^\infty \frac{ds}{W_f(s)} = \infty$, então $v(\cdot, \varphi)$ está definida sobre $[0, \infty)$.*

Para prosseguir com nosso estudo, precisamos do seguinte Lema.

Lema 2.21 [20, Lemma 1] *Seja $\mathcal{B}$ um espaço com memória amortecida. Se $S \subset \mathcal{B}$ é compacto, $\mathcal{F} \subset C([0, \infty) : X)$ é uniformemente equicontínuo e o conjunto $R(\mathcal{F}) = \{x(t) : t \in [0, \infty), x \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto em X , então o conjunto*

$$V(S, \mathcal{F}) = \{x_t : t \in [0, \infty), x_0 \in S, x|_{[0, \infty)} \in \mathcal{F}\}$$

é relativamente compacto em $\mathcal{B}$.

O seguinte Lema é essencial para estabelecer nossos próximos resultados.

Lema 2.22 *Se as condições $(\mathbf{H}_2)$ - $(\mathbf{H}_4)$ são satisfeitas, então o conjunto $\mathcal{O}_{u, \mathbb{R}^+} := \overline{\{u(t) : t \geq 0\}}$ é compacto em X , $u(\cdot)$ é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}^+$, $X_{u, \mathbb{R}^+} := \overline{\{u_t : t \geq 0\}}$ é compacto em $\mathcal{B}$ e $t \rightarrow u_t$ é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}^+$.*

Prova: Vamos provar primeiro que o conjunto $\mathcal{O}_{u, \mathbb{R}^+}$ é relativamente compacto em X . Para fazer isto, para $\eta > 0$, consideramos a decomposição $\mathcal{O}_{u, \mathbb{R}^+} = \mathcal{O}_\eta \cup \tilde{\mathcal{O}}_\eta$ onde $\mathcal{O}_\eta = \{u(t) : t \geq \eta\}$ e $\tilde{\mathcal{O}}_\eta = \{u(t) : 0 \leq t \leq \eta\}$. Se $\alpha(\cdot)$ é a medida de não compacidade de Kuratowski, veja [23], então $\alpha(\mathcal{O}_{u, \mathbb{R}^+}) = \max\{\alpha(\mathcal{O}_\eta), \alpha(\tilde{\mathcal{O}}_\eta)\}$. Seja $0 < \nu < \min\{1, \eta\}$ e $\tilde{M} = \sup_{0 \leq \tau \leq 1} \|T(\tau)\|$. Para $t \geq \eta$, temos que

$$\begin{aligned} u(t) &= T(\nu)(T(t-\nu)(u(0) + g(0, u_0))) + g(t, u_t) - \int_0^{t-\nu} AT(t-s)g(s, u_s)ds \\ &\quad + \int_0^{t-\nu} T(t-s)f(s, u_s)ds - \int_{t-\nu}^t AT(t-s)g(s, u_s)ds + \int_{t-\nu}^t T(t-s)f(s, u_s)ds \\ &= T(\nu) \left(T(t-\nu)(u(0) + g(0, u_0)) - g(t-\nu, u_{t-\nu}) - \int_0^{t-\nu} AT(t-\nu-s)g(s, u_s)ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t-\nu} T(t-\nu-s)f(s, u_s)ds \right) + T(\nu)g(t-\nu, u_{t-\nu}) - g(t, u_t) \\ &\quad - \int_{t-\nu}^t AT(t-s)g(s, u_s)ds + \int_{t-\nu}^t T(t-s)f(s, u_s)ds \\ &= T(\nu)(u(t-\nu) + g(t-\nu, u_{t-\nu})) - g(t, u_t) \\ &\quad - \int_{t-\nu}^t AT(t-s)g(s, u_s)ds + \int_{t-\nu}^t T(t-s)f(s, u_s)ds \end{aligned}$$

e de (1.6), obtemos que

$$\alpha(\mathcal{O}_\eta) \leq N_g(\mathcal{L} \|u\|_{C_b(\mathbb{R}; X)}) \int_0^\nu \|AT(s)\|_{\mathcal{L}(Y; X)} ds + \tilde{M} N_f(\mathcal{L} \|u\|_{C_b(\mathbb{R}; X)}) \nu$$

pois os conjuntos $T(\nu)\{u(t+\nu)+g(t-\nu, u_{t-\nu}) : t \geq \eta\}$ e $\{g(t, u_t) : t \in \mathbb{R}\}$ são relativamente compactos em X . Fazendo $\nu \rightarrow 0$ deduzimos que $\alpha(\mathcal{O}_\eta) = 0$. Portanto $\mathcal{O}_\eta$ é relativamente compacto em X . Como o conjunto $\widetilde{\mathcal{O}}_\eta$ é compacto em X obtemos $\alpha(\mathcal{O}_{u, \mathbb{R}^+}) = 0$, o que mostra que $\mathcal{O}_{u, \mathbb{R}^+}$ é relativamente compacto em X .

Vejamos agora a continuidade uniforme de $u(\cdot)$. Fixemos $\varepsilon > 0$. Da compacidade dos conjuntos $\mathcal{O}_{u, \mathbb{R}^+}$ e $\{g(t, u_t) : t \in \mathbb{R}\}$ e de que $t \mapsto T(t)$ é fortemente contínuo, existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq \theta \leq \delta} \{\|T(\theta)u(s) - u(s)\| : s \geq 0\} &< \varepsilon, \\ \sup_{0 \leq \theta < \delta} \{\|T(\theta)g(s, u_s) - g(s, u_s)\| : s \geq 0\} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Se $0 \leq s \leq t < s + \delta$ temos que

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\| &\leq \|T(t-s)u(s) - u(s)\| + \|T(t-s)g(s, u_s) - g(s, u_s)\| \\ &\quad + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \|g(s, u_s) - g(t, u_t)\|_Y + \int_s^t \|\widetilde{M}\| \|f(\tau, u_\tau)\| d\tau \\ &\quad + \int_s^t \|AT(t-\tau)\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \|g(\tau, u_\tau)\|_Y d\tau \\ &\leq \|T(t-s)u(s) - u(s)\| + \|T(t-s)g(s, u_s) - g(s, u_s)\| \\ &\quad + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \|g(s, u_s) - g(t, u_t)\|_Y \\ &\quad + N_g(\mathcal{L} \|u\|_{C_b(\mathbb{R};X)}) \int_s^t H(t-\tau) d\tau + \widetilde{M} N_f(\mathcal{L} \|u\|_{C_b(\mathbb{R};X)})(t-s) \\ &< 2\varepsilon + (N_g(\mathcal{L} \|u\|_{C_b(\mathbb{R};X)}) \int_s^t H(t-\tau) d\tau + \widetilde{M} N_f(\mathcal{L} \|u\|_{C_b(\mathbb{R};X)})\delta \\ &\quad + \|i_c\|_{\mathcal{L}(Y;X)} \|g(s, u_s) - g(t, u_t)\|_Y \end{aligned}$$

o qual, de **(H₄)**, nos permite concluir que $u(\cdot)$ é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}^+$.

A compacidade de $X_{u, \mathbb{R}^+}$ é agora consequência do Lema 2.21.

Para mostrar a continuidade uniforme de $t \mapsto u_t$ sobre $\mathbb{R}^+$, consideremos a decomposição $u_t = y_t + S(t)(u_0 - u(0)\chi)$ onde $y(t) = u(t)$ para $t \geq 0$, $y(t) = u(0)$ para $t < 0$ e $\chi(\theta) = 1$ para todo $\theta \leq 0$. Claramente $y(\cdot)$ é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}$ e como

$$\|y_{t+h} - y_t\|_B \leq \mathcal{L} \sup_{-\infty < \theta \leq 0} \|y(t+h+\theta) - y(t+\theta)\|,$$

inferimos que $t \mapsto y_t$ é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}$. Agora, como $S(t)(u_0 - u(0)\chi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, concluímos que u_t é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}^+$. A prova está agora completa. ■

Para considerar equações limites, é necessário introduzir alguns conceitos de convergência em espaços de funções assim como algumas notações adicionais.

Definição 2.23 *Seja Z um espaço de Banach. Dizemos que uma sequência $\{F_k\}_k$ em $C(\mathbb{R} \times B; Z)$ converge para $\bar{F}$ Bohr-uniformemente sobre $\mathbb{R} \times B$, a qual denotamos por $F_k \xrightarrow{B, Z} \bar{F}$, se $F_k(t, \phi) \rightarrow \bar{F}(t, \phi)$ em Z , uniformemente sobre $\mathbb{R} \times W$ para todo compacto $W \subset B$.*

Sejam Z e W espaços de Banach. Para $F \in C(\mathbb{R} \times B; Z)$, $v \in C(\mathbb{R}; Z)$ e $\tau \in \mathbb{R}$ usamos a notação F^τ, v^τ para as funções $F^\tau(t) = F(\tau + t)$, $v^\tau(t) = v(\tau + t)$. Usamos ainda, para $A \subset C(\mathbb{R} \times B; Z)$, a notação $\bar{A}^{B, Z}$, para representar o fecho do conjunto com relação a topologia gerada a partir do conceito de convergência Bohr-uniforme. Similarmente, para $U \subset C(\mathbb{R}; Z)$, representamos por $\bar{U}$ o fecho de U na topologia da convergência uniforme em compactos.

Definição 2.24 *Sejam Z_1, Z_2 espaços de Banach. Para $F \in C(\mathbb{R} \times B; Z_1)$, $v \in C(\mathbb{R}; Z_1)$ e $G \in C(\mathbb{R} \times B; Z_2)$ definimos os seguintes conjuntos:*

$$\begin{aligned} H(v) &= \{\bar{v}^\tau : \tau \in \mathbb{R}\}^{Z_1}; \\ H(F, Z_1) &= \{\bar{F}^\tau : \tau \in \mathbb{R}\}^{B, Z_1}; \\ \Omega(F, Z_1) &= \{\bar{F} \in H(F, Z_1) : \exists \tau_n \rightarrow \infty, \text{ tal que } F^{\tau_n} \xrightarrow{B, Z_1} \bar{F}\}; \\ H(v, F, Z_1) &= \{\overline{(v^\tau, F^\tau)} : \tau \in \mathbb{R}\}^{\tau_0 \times \tau_{B, Z_1}}; \\ \Omega(v, F, Z_1) &= \{(\bar{v}, \bar{F}) \in H(v, F, Z_1) : \exists \tau_n \rightarrow \infty, \text{ tal que } (v^{\tau_n}, F^{\tau_n}) \xrightarrow{\tau_0 \times \tau_{B, Z_1}} (\bar{v}, \bar{F})\}; \\ H(v, F, G, Z_1, Z_2) &= \{\overline{(v^\tau, F^\tau, G^\tau)} : \tau \in \mathbb{R}\}^{\tau_0 \times \tau_{B, Z_1} \times \tau_{B, Z_2}}; \\ \Omega(v, F, G, Z_1, Z_2) &= \{(\bar{v}, \bar{F}, \bar{G}) : \exists \tau_n \rightarrow \infty, \text{ tal que } (v^{\tau_n}, F^{\tau_n}, G^{\tau_n}) \xrightarrow{\tau_0 \times \tau_{B, Z_1} \times \tau_{B, Z_2}} (\bar{v}, \bar{F}, \bar{G})\}. \end{aligned}$$

Definição 2.25 *Sejam $\bar{f} \in H(f, X)$ e $\bar{g} \in H(g, Y)$. A equação neutra*

$$\frac{d}{dt}(v(t) + g(t, v_t)) = Av(t) + f(t, v_t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.20)$$

é chamada de equação na envoltória da equação (2.1). Se $\bar{f} \in \Omega(f, X)$ e $\bar{g} \in \Omega(g, Y)$, dizemos que (2.20) é uma equação limite de (2.1).

O seguinte resultado pode ser encontrado em [46].

Lema 2.26 *Sejam Z_1 e Z_2 espaços de Banach, Z_1 separável, e $F \in C(\mathbb{R} \times Z_1; Z_2)$ uniformemente quase periódica. Então, para toda sequência de números reais $(h_k)_k$ existe uma subsequência $(h_k)_k$ e uma função $G \in C(\mathbb{R} \times Z_1; Z_2)$ tal que $F(t + h_k, \phi) \rightarrow G(t, \phi)$ uniformemente sobre $\mathbb{R} \times S$, para todo $S \subset Z_1$ compacto, quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, G é uniformemente quase periódica.*

A partir do Lema 2.26 obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.27 *Seja $\{t'_n\}_n$ uma sequência de números reais tal que $t'_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Então existe uma subsequência $\{t_n\}_n$ e funções $\bar{f} \in \Omega(f, X)$, $\bar{g} \in \Omega(g, Y)$ e $\bar{u} \in C_b(\mathbb{R}; X)$ tais que $f^{t_n} \xrightarrow{B, X} \bar{f}$, $g^{t_n} \xrightarrow{B, Y} \bar{g}$ e $u^{t_n}(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ uniformemente sobre compactos em $\mathbb{R}$. Neste caso, $\bar{u}$ é uma solução limitada da equação limite (2.20).*

Prova: Como f , g são uniformemente quase periódicas, dos Lemas 2.22 e 2.26 existe uma subsequência $\{t_n\}_n$ de $\{t'_n\}_n$ e funções $\bar{f} \in C(\mathbb{R} \times B; X)$, $\bar{g} \in C(\mathbb{R} \times B; Y)$ e $\bar{u} \in C_b(\mathbb{R}; X)$ tais que $f^{t_n} \xrightarrow{B, X} \bar{f}$, $g^{t_n} \xrightarrow{B, Y} \bar{g}$ e $u^{t_n} \rightarrow \bar{u}$ uniformemente em compactos de $\mathbb{R}$. Mais ainda, é claro que $g^{t_n} \xrightarrow{B, X} g$. Como B verifica a condição (C2), temos que $u_{t+t_n} \rightarrow \bar{u}_t$ em B para cada $t \in \mathbb{R}$, de onde concluímos que $f(t+t_n, u_{t+t_n}) \rightarrow \bar{f}(t, \bar{u}_t)$ em X e $g(t+t_n, u_{t+t_n}) \rightarrow \bar{g}(t, \bar{u}_t)$ em Y para cada $t \in \mathbb{R}$, quando $n \rightarrow \infty$. Agora, da equação

$$\begin{aligned} u(t+t_n) &= T(t)(u(t_n) + g(t_n, u_{t_n})) + g(t+t_n, u_{t+t_n}) + \int_0^t AT(t-s)g(s+t_n, u_{s+t_n})ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)f(s+t_n, u_{s+t_n})ds, \quad t+t_n \geq 0, \end{aligned}$$

e do Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= T(t)(\bar{u}(0) + \bar{g}(0, \bar{u}_0)) + \bar{g}(t, \bar{u}_t) + \int_0^t AT(t-s)\bar{g}(s, \bar{u}_s)ds \\ &\quad + \int_0^t T(t-s)\bar{f}(s, \bar{u}_s)ds, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o que mostra que $\bar{u}(\cdot)$ é uma solução fraca da equação limite (2.20). A prova está completa. $\blacksquare$

Para mostrar nosso próximo resultado precisamos do seguinte Lema.

Lema 2.28 [43, Theorem 5.3.4, 5.3.5] *Seja Z um espaço de Banach. Se $G \in AAP(Z)$ então, para toda sequência $\{t'_n\} \subset [0, \infty)$, com $t'_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, existe uma subsequência $\{t_n\}$ tal que $G(t+t_n)$ é uniformemente convergente sobre $[0, \infty)$ em Z .*

Observação 2.29 *Se $Z := \mathbb{R}^n$, Yoshizawa provou em [46, pg. 20-30] que a recíproca do Lema 2.28 é verdadeira. Por outro lado, Hino, Murakami & Yoshizawa observaram em [20, pg. 139] que a recíproca ainda é válida se Z é um espaço de Banach separável e $\{g(t) : t \geq 0\}$ é relativamente compacto.*

No próximo Teorema deduzimos a existência de uma solução quase periódica para (2.2)-(2.3) a partir de uma solução assintoticamente quase periódica.

Teorema 2.30 *Se $u(\cdot) \in AAP(X)$, então existe uma solução fraca quase periódica de (2.1).*

Prova: Assuma que $u = p + q$ onde $p \in AP(X)$ e $q \in C_b([0, \infty) : X)$. Como as funções f, g são uniformemente quase periódicas, pelo Lema 2.27 existe uma sequência $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com $\tau_n \rightarrow \infty$, tal que $f^{\tau_n} \xrightarrow{B, X} f$ e $g^{\tau_n} \xrightarrow{B, Y} g$. Agora, do Lema 2.27 concluímos que $p(\cdot)$ é solução da equação limite (2.20) com $f = f$ e $g = g$. A prova está completa. ■

Definição 2.31 *Dizemos que a solução $u(\cdot)$ de (2.2)-(2.3) é BC-totalmente estável (BC-TS) se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ com a seguinte propriedade: Se $\phi \in C_b((-\infty, 0] : X)$, $h_1 \in C_b([0, \infty); X)$ e $h_2 \in C_b([0, \infty); Y)$ são tais que $\|u_0 - \phi\|_{C_b((-\infty, 0]; X)} < \delta(\varepsilon)$, $\sup_{t \in [0, \infty)} \|h_1(t)\| < \delta(\varepsilon)$ e $\sup_{t \in [0, \infty)} \|h_2(t)\|_Y < \delta(\varepsilon)$, então*

$$\|u(t) - u(t, 0, \phi, f + h_1, g + h_2)\| < \varepsilon, \text{ para } t \geq 0,$$

onde $u(\cdot, 0, \phi, f + h_1, g + h_2)$ denota a solução do sistema

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(v(t) + g(t, v_t) + h_2(t)) &= Av(t) + f(t, v_t) + h_1(t), \quad t \geq 0, \\ v_0 &= \phi. \end{aligned}$$

A prova do resultado seguinte é obtida com simples modificações da prova de [20, Teorema 1]. Decidimos incluí-la para tornar esta seção um pouco mais completa.

Teorema 2.32 *Seja X um espaço de Banach separável. Se $u(\cdot)$ é BC-TS, então $u(\cdot) \in AAP(X)$. Conseqüentemente existe uma solução fraca quase periódica de (2.1).*

Prova: Para toda sequência $\{\tau'_k\}$ tal que $\tau'_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, existe uma subsequência $\{\tau_k\}$ de $\{\tau'_k\}$ e funções $f, \bar{g}$ tais que $f^{\tau_k} \xrightarrow{B, X} f$, $g^{\tau_k} \xrightarrow{B, Y} \bar{g}$ e $u(t + \tau_k) \rightarrow v(t)$ uniformemente sobre compactos em $\mathbb{R}$. Afirmamos que $u(t + \tau_k)$ é uniformemente convergente sobre $\mathbb{R}^+$. Suponhamos que u^{τ_k} não é uniformemente convergente sobre $\mathbb{R}^+$. Então, para algum $\varepsilon > 0$ existem sequências $\{l_j\}$, $\{k_j\}$ e $\{m_j\}$, com $k_j \rightarrow \infty$, $m_j \rightarrow \infty$ quando $j \rightarrow \infty$, tais que

$$\|u(\tau_{k_j} + l_j) - u(\tau_{m_j} + l_j)\| \geq \varepsilon \quad \forall j, \quad (2.21)$$

$$\|u(\tau_{k_j} + t) - u(\tau_{m_j} + t)\| < \varepsilon \text{ sobre cada } [0, t_j]. \quad (2.22)$$

Definimos $v^j(t) := u(\tau_{k_j} + t)$ e $w^j(t) := u(\tau_{m_j} + t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como $\{v^j(t)\}$ e $\{w^j(t)\}$ convergem para $v(t)$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}$, podemos assumir que

$$\rho(v_0^j, w_0^j) := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\|v_0^j - w_0^j\|_l}{2^l(1 + \|v_0^j - w_0^j\|_l)} < \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.23)$$

onde $\|v_0^j - w_0^j\|_t = \sup_{-t \leq \theta \leq 0} \|v^j(\theta) - w^j(\theta)\|$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ e $r \in \mathbb{R}^+$, definimos uma função $v^{j,r} : \mathbb{R} \rightarrow X$ por

$$v^{j,r}(t) = \begin{cases} v^j(t) & \text{se } -r \leq t \\ v^j(-r) + w^j(t) - w^j(-r) & \text{se } t < -r. \end{cases}$$

Mostremos agora que

$$\sup\{\|v_0^{j,r} - v_0^j\|_{\mathcal{B}} : j \in \mathbb{N}\} \rightarrow 0 \text{ quando } r \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Suponhamos que (2.24) não se verifica. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ e seqüências $\{j_k\}_k, \{r_k\}_k$ com $r_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, tais que $\|v_0^{j_k, r_k} - v_0^{j_k}\|_{\mathcal{B}} \geq \varepsilon_0$. Seja $\psi^k = v_0^{j_k, r_k} - v_0^{j_k}$. Claramente $\{\psi^k\}_k$ é uma seqüência uniformemente limitada $C_b((-\infty, 0] : X)$ que converge para a função nula uniformemente sobre cada conjunto compacto em $\mathbb{R}^-$. Pelo axioma (C2) obtemos que $\|\psi^k\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, o que é uma contradição.

Usando que $v^{j,r}(t) \rightarrow v(t)$ quando $j \rightarrow \infty$, uniformemente para $(t, r) \in J \times \mathbb{R}^+$ para todo intervalo compacto J em $\mathbb{R}$, a compacidade de $X_{u, \mathbb{R}^+}$ (veja Lema 2.22) e o fato que $v_0^j \in X_{u, \mathbb{R}^+}$, podemos mostrar que $\{v_0^j, v_0^{j,r} : j \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}^+\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}$. Usando agora que $\{v^j(t), v^{j,r}(t) : j \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+\}$ está contido no compacto $\mathcal{O}_{u, \mathbb{R}^+}$ e o Lema 2.21 segue-se que o conjunto $W := \{v_t^j, v_t^{j,r} : j \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}^+\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}$. Assim,

$$\begin{aligned} \sup\{\|f(t + \tau_k, \phi) - \bar{f}(t, \phi)\| : t \in \mathbb{R}, \phi \in W\} &\rightarrow 0 \\ \sup\{\|g(t + \tau_k, \phi) - \bar{g}(t, \phi)\|_Y : t \in \mathbb{R}, \phi \in W\} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

quando $k \rightarrow \infty$.

Definimos $p^{j,r} : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ e $q^{j,r} : \mathbb{R}^+ \rightarrow Y$ por

$$\begin{aligned} p^{j,r}(t) &= \begin{cases} f(t + \tau_{k_j}, v_t^j) - f(t + \tau_{m_j}, (v^{j,r})_t), & 0 \leq t \leq t_j \\ p^{j,r}(t_j), & t_j < t \end{cases} \\ q^{j,r}(t) &= \begin{cases} g(t + \tau_{k_j}, v_t^j) - g(t + \tau_{m_j}, (v^{j,r})_t), & 0 \leq t \leq t_j \\ q^{j,r}(t_j), & t_j < t. \end{cases} \end{aligned}$$

Como

$$\|(v^{j,r})_t - v_t^j\|_{\mathcal{B}} \leq M \|v_0^{j,r} - v_0^j\|_{\mathcal{B}}, \quad t \in \mathbb{R}^+, j \in \mathbb{N},$$

pelo axioma (A1) e (2.24) obtemos que

$$\begin{aligned} \sup\{\|\bar{f}(t + \tau_k, v_t^j) - \bar{f}(t, (v^{j,r})_t)\| : t \in \mathbb{R}^+, j \in \mathbb{N}\} &\rightarrow 0 \\ \sup\{\|\bar{g}(t + \tau_k, v_t^j) - \bar{g}(t, (v^{j,r})_t)\|_Y : t \in \mathbb{R}^+, j \in \mathbb{N}\} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

quando $r \rightarrow \infty$. Portanto, por (2.25) e (2.26) podemos escolher $j_0 = j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e $r = r(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\begin{aligned} \sup\{\|p^{j,r}(t)\|; j \geq j_0, t \in \mathbb{R}^+\} &< \delta(\varepsilon/2)/2 \\ \sup\{\|q^{j,r}(t)\|_Y; j \geq j_0, t \in \mathbb{R}^+\} &< \delta(\varepsilon/2)/2 \end{aligned}$$

onde $\delta(\cdot)$ é o número da *BC-TS* estabilidade de $u(\cdot)$. Fixemos agora para este r , um inteiro $j \geq j_0$ tal que $j > \frac{2^r(1+\delta(\varepsilon/2))}{\delta(\varepsilon/2)}$. Então de (2.23), vemos que

$$2^{-r} \|w_0^j - v_0^j\|_r / [1 + \|w_0^j - v_0^j\|_r] \leq \rho(w_0^j, v_0^j) < 2^{-r} \delta(\varepsilon/2) / [1 + \delta(\varepsilon/2)],$$

o que implica que

$$\|w_0^j - v_0^j\|_r < \delta(\varepsilon/2) \text{ ou } \|v_0^{j,r} - w_0^j\|_{C_b((-\infty, 0]; X)} < \delta(\varepsilon/2).$$

É fácil mostrar que $v^{j,r}$ é solução fraca de

$$\frac{d}{dt}(x(t) + g(t + \tau_{m_j}, x_t) + q^{j,r}(t)) = Ax(t) + f(t + \tau_{m_j}, x_t) + p^{j,r}(t) \quad (2.27)$$

sobre $t \in [0, t_j]$, e como $w^j(t)$ é uma solução *BC-TS* de

$$\frac{d}{dt}(x(t) + g(t + \tau_{m_j}, x_t)) = Ax(t) + f(t + \tau_{m_j}, x_t) \quad (2.28)$$

com o mesmo $\delta(\cdot)$ tomado para $u(t)$, do fato que $\sup_{t \geq 0} \|p^{j,r}(t)\| < \delta(\varepsilon/2)$ e $\sup_{t \geq 0} \|q^{j,r}(t)\|_Y < \delta(\varepsilon/2)$ segue-se que $\|(v^{j,r})(t) - w^j(t)\| < \varepsilon/2$ sobre $[0, t_j]$. Em particular, temos $\|(v^{j,r})(t_j) - w^j(t_j)\| < \varepsilon$ ou $\|(v^j)(t_j) - w^j(t_j)\| < \varepsilon$, o que contradiz (2.21). Portanto, $u(t + \tau_k)$ é uniformemente convergente sobre $\mathbb{R}^+$.

Pela observação 2.29 segue-se que $u \in AAP(X)$. Finalmente, do Teorema 2.30 concluímos que $u \in AP(X)$. ■

A prova do próximo resultado também é obtida com simples modificações da prova do Teorema 1 em [21]. Por isto, a prova será resumida convenientemente.

Teorema 2.33 *Seja X um espaço de Banach Separável. Assuma que $\bar{u}(\cdot)$ é uma solução *BC-TS* da equação limite (2.20). Então $u(\cdot) \in AAP(X)$. Conseqüentemente, existe uma solução quase periódica de (2.1).*

Prova: Como $(\bar{u}, \bar{f}, \bar{g}) \in \Omega(u, f, g, X, Y)$, existe uma seqüência $\{\tau_k\}_k$ com $\tau_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$, tal que $f^{\tau_k} \xrightarrow{\mathcal{B}, X} \bar{f}$ e $g^{\tau_k} \xrightarrow{\mathcal{B}, Y} \bar{g}$ e $u(t + \tau_k) \rightarrow \bar{u}(t)$ uniformemente sobre compactos em $\mathbb{R}^+$. Arguindo

como em [21, Teorema 1], podemos mostrar que $u(t + \tau_k)$ é uniformemente convergente a $\bar{u}$ sobre $\mathbb{R}^1$. Mais ainda, da prova do Teorema 2.32 deduzimos que $\bar{u}(\cdot) \in AAP(X)$. Consideremos agora uma sequência $\{s'_k\}_k$ tal que $s'_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$ e fixemos uma subsequência $\{s_k\}_k$ de modo que $s_k - \tau_k =: \mu_k \rightarrow \infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Assumindo que $\bar{u}(t + \mu_k)$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}^1$, concluímos que $u(t + s_k) = u(t + \tau_k + \mu_k)$ é também uniformemente convergente sobre $\mathbb{R}^1$, o que mostra que $u(\cdot) \in AAP(X)$. A existência de uma solução quase periódica segue do Teorema 2.30. Agora a prova está completa. ■

2.4 Aplicação

Nesta seção, apresentamos uma aplicação para alguns de nossos resultados abstratos. Previamente, introduzimos os elementos técnicos necessários. Seja $X = L^2([0, \pi])$ e definimos o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por $Aw(\xi) = w''(\xi)$, onde

$$D(A) = \{w(\cdot) \in L^2([0, \pi]) : w''(\cdot) \in L^2([0, \pi]), w(0) = w(\pi) = 0\}.$$

É conhecido que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico e compacto $(T(t))_{t \geq 0}$ sobre X . Além disso, A possui espectro discreto, os autovalores são $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, com autovetores associados $z_n(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin(n\xi)$ e as seguintes propriedades são verificadas:

- (a) $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X ,
- (b) Se $w \in D(A)$ então $Aw = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle w, z_n \rangle z_n$,
- (c) Para $w \in X$, $T(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle w, z_n \rangle z_n$. Em particular, vemos que $T(\cdot)$ é um semigrupo uniformemente estável com $\|T(t)\| \leq e^{-t}$ para $t \geq 0$,
- (d) Para cada $w \in X$ e todo $\alpha \in (0, 1)$, temos que $(-A)^{-\alpha} w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} \langle w, z_n \rangle z_n$. Em particular, $\|(-A)^{-1/2}\| = 1$,
- (e) Para cada $\alpha \in (0, 1)$ e $w \in D((-A)^\alpha)$, $(-A)^\alpha w = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} \langle w, z_n \rangle z_n$. Mais ainda,

$$D((-A)^\alpha) := \left\{ w \in X : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} \langle w, z_n \rangle z_n \in X \right\}.$$

Como espaço de fase, escolhemos o espaço $\mathcal{B} = L^2(h; X)$ apresentado na seção 1.3. Assumimos também que h verifica as condições (h-5)-(h-7) na nomenclatura de [19]. Sob estas condições, $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida e $K(\cdot)$ and $M(\cdot)$ são funções limitadas.

Considere o sistema diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[u(t, \xi) + \int_{-\infty}^t \int_0^\pi b(t-s, \eta, \xi) u(s, \eta) d\eta ds \right] = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} u(t, \xi) + a_0(\xi) u(t, \xi) + a_1(t, \xi) + \int_{-\infty}^t a(s-t) u(s, \xi) ds, \quad t \geq 0, \xi \in [0, \pi] \quad (2.29)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.30)$$

$$u(\theta, \xi) = \phi(\theta, \xi), \quad \theta \leq 0, \xi \in [0, \pi]. \quad (2.31)$$

Assumimos agora, que as seguintes condições são válidas.

(i) A função $b(\cdot)$ é mensurável e

$$\int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi \frac{b^2(\theta, \eta, \xi)}{h(\theta)} d\eta d\theta d\xi < \infty.$$

(ii) A função $\frac{\partial}{\partial \xi} b(\theta, \eta, \xi)$ é mensurável; $b(\theta, \eta, \pi) = b(\theta, \eta, 0) = 0$ e

$$N_1 := \int_0^\pi \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi \frac{1}{h(\theta)} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} b(\theta, \eta, \xi) \right)^2 d\eta d\theta d\xi < \infty.$$

(iii) A função $a(\cdot)$ é mensurável com $L := \int_{-\infty}^0 \frac{a^2(\theta)}{h(\theta)} d\theta < \infty$, a função $a_1(t, \cdot) \in X$ para cada $t \in \mathbb{R}$ e $a_0(\cdot)$ é contínua com $C = \sup_{0 \leq \xi \leq \pi} |a_0(\xi)|^2$.

(iv) A função φ definida por $\varphi(\theta)(\xi) := \phi(\theta, \xi)$ pertence a $\mathcal{B}$.

Definimos $f, g : [0, \infty) \times \mathcal{B} \rightarrow X$ por

$$f(t, \psi)(\xi) := a_0(\xi) \psi(0, \xi) + \int_{-\infty}^0 a(\theta) \psi(\theta, \xi) d\theta + h(t)(\xi),$$

$$g(t, \psi)(\xi) := \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi b(\theta, \eta, \xi) \psi(\theta, \eta) d\eta d\theta,$$

onde $h(t)(\xi) = a_1(t, \xi)$. Sob as condições acima afirmamos que $g(t, \psi) \in D((-A)^{1/2})$ e

$$\| (-A)^{1/2} g(t, \psi_1) - (-A)^{1/2} g(t, \psi_2) \| \leq N_1 \| \psi_1 - \psi_2 \|_{\mathcal{B}}.$$

De fato, da condição (ii) temos que

$$\langle g(t, \psi), z_n \rangle = \frac{1}{n} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \langle \Lambda(\psi), \cos(n\xi) \rangle,$$

onde $\Lambda(\psi) := \int_{-\infty}^0 \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \xi} b(\theta, \eta, \xi) \psi(\theta, \eta) d\eta d\theta$. Ainda de (ii) obtemos que $\Lambda : \mathcal{B} \rightarrow X$ é um operador linear limitado com $\| \Lambda \| \leq N_1$, o que conclui nossa afirmação.

Seja $Y = X_{\frac{1}{2}}$ (o espaço $D((-A)^{\frac{1}{2}})$ munido da norma do gráfico). Usando as propriedades do semigrupo $(T(t))_{t \geq 0}$, segue que Y verifica a condição **(H₁)**. Mais ainda, neste caso,

$$\| (-A)^{\frac{1}{2}} T(t) \| \leq \frac{e^{\frac{1}{2}t} t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \text{ para } t > 0.$$

Do exposto acima, podemos modelar o sistema (2.29)-(2.31) como (2.2) -- (2.3). Mais ainda, g é uma função com valores em Y . Além disso, temos que $g(t, \cdot) : B \rightarrow Y$, $f(t, \cdot) : B \rightarrow X$ são lineares, contínuas e $\| g(t, \cdot) \|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq N_1$, $\| f(t, \cdot) \|_{\mathcal{L}(X)} \leq (C + L)^{1/2}$.

O próximo resultado é consequência direta do Teorema 2.7 e Proposição 2.10. Observamos que a constante $\mathcal{L}$ pode ser escolhida igual a K (ver [19, Proposition 7.1.5]).

Proposição 2.34 *Assuma que $t \rightarrow a_1(t, \cdot)$ é quase periódica (resp. assintoticamente quase periódica) em X . Se*

$$K \left(N_1 + \frac{N_1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{(-1/2)s} t^{-1/2} ds + (C + L)^{1/2} \right) < 1,$$

então existe uma solução fraca $u(\cdot) \in AP(X)$ (resp. $u(\cdot) \in AAP(X)$) de (2.29)-(2.31).

Capítulo 3

Existência de Soluções para a Equação Neutra de Segunda Ordem

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos a existência de soluções fracas para equações diferenciais de segunda ordem com condições não locais. Especificamente, estamos interessados em sistemas diferenciais que podem ser modelados como algum dos seguintes problemas de Cauchy abstrato com condições não locais

$$\frac{d}{dt}[x'(t) + g(t, x_t)] = Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in I \quad (3.1)$$

$$x_0 = p(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}), \quad (3.2)$$

$$x'(0) = q(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}), \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt}[x'(t) + g(t, x_t, x'(t))] = Ax(t) + f(t, x_t, x'(t)), \quad t \in I, \quad (3.4)$$

$$x_0 = p(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}), \quad (3.5)$$

$$x'(0) = q(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}). \quad (3.6)$$

Aqui, A é o gerador infinitesimal de uma função cosseno fortemente contínua de operadores limitados definida sobre um Banach X ; I é um intervalo da forma $(-\infty, a]$ ou $\mathbb{R}$; $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ são números previamente fixados; $p(\cdot) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$ e $q(\cdot) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow X$ são funções apropriadas; $\mathcal{B}$ é um espaço fase verificando os axiomas (A), (A1), (B) e $\varphi \in \mathcal{B}$ é dado.

Assumimos também que existem constantes K e M tais que $K(t) \leq K$ e $M(t) \leq M$ para todo $t \in I$. Para material adicional sobre espaço de fase citamos [19].

Este capítulo possui quatro seções. Na seção 3.2 discutimos a existência de soluções para algumas equações diferenciais parciais de segunda ordem com condições não locais em intervalos da forma $(-\infty, a]$, $a > 0$. Na seção 3.3 estudamos a existência de soluções globais e na 3.4 estabelecemos a existência de soluções assintoticamente quase periódicas para (3.1)-(3.6).

A maioria das notações e conceitos técnicos usados neste capítulo foram introduzidas no Capítulo 1. Lembramos ainda, que a notação $B_r(z, Z)$ representa a bola aberta de centro z e raio r num espaço métrico Z , e que para uma função limitada $\xi : [0, b] \rightarrow [0, \infty)$, $0 \leq t \leq b$, empregamos a notação $\xi_t = \sup\{\xi(s) : s \in [0, t]\}$.

3.2 Soluções sobre $(-\infty, a]$

Nesta seção, apresentamos resultados de existência de soluções para os sistemas (3.1)-(3.3) e (3.4)-(3.6) sobre intervalos da forma $I = (-\infty, a]$. Assumimos que $N \geq 1$ e $\tilde{N}, \tilde{N}_1 > 0$ constantes tais que $\|C(t)\| \leq N$, $\|S(t)\| \leq \tilde{N}$ e $\|AS(t)\|_{\mathcal{L}(E, X)} \leq \tilde{N}_1$ para todo $t \in J = [0, a]$. Mais ainda, denotamos por $C(J, X)$ o espaço das funções contínuas $u : J \rightarrow X$ munido com a norma da convergência uniforme $\|\cdot\|_a$ e por BC o espaço das funções $u : I \rightarrow X$ tais que $u_0 \in \mathcal{B}$ e $u|_J \in C(J, X)$ munido com a norma $\|u\|_{BC} = \|u_0\|_{\mathcal{B}} + \|u|_J\|_a$. Omitimos o símbolo $|_J$ quando sua ausência não gerar confusão.

O Lema seguinte é uma consequência direta das propriedades do espaço $\mathcal{B}$. Por isto omitiremos a prova.

Lema 3.1 *Um conjunto $W \in BC$ é relativamente compacto se, e somente se, $W_0 = \{u_0 : u \in W\}$ é relativamente compacto em $\mathcal{B}$ e $W|_J = \{u|_J : u \in W\}$ é relativamente compacto em $C(J, X)$.*

Iniciamos esta seção estudando o problema de Cauchy abstrato com condição não local

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x'(t) + g(t, x_t)] &= Ax(t) + f(t, x_t), \quad t \in I, \\ x_0 &= p(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}), \\ x'(0) &= q(\varphi, x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}), \end{aligned}$$

onde $p(\cdot) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$ e $q(\cdot) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow X$ são funções contínuas que transformam conjuntos fechados e limitados em conjuntos limitados. Os números $N_p(r)$ e $N_q(r)$ são definidos por

$N_p(r) = \sup\{\|p(\psi)\|_B : \psi \in B_r(0, \mathcal{B}^{n+1})\}$ e $N_q(r) = \sup\{\|q(\psi)\| : \psi \in B_r(0, \mathcal{B}^{n+1})\}$. Quando $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ são limitadas utilizamos as notações $N_p = \sup\{\|p(\psi)\|_B : \psi \in \mathcal{B}^{n+1}\}$ e $N_q = \sup\{\|q(\psi)\| : \psi \in \mathcal{B}^{n+1}\}$. Além disso, assumimos que $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ cumprem as seguintes propriedades gerais.

(H₁) As funções $f, g : I \times \mathcal{B} \rightarrow X$ satisfazem as seguintes condições do tipo Carathéodory:

- (i) $f(t, \cdot), g(t, \cdot) : \mathcal{B} \rightarrow X$ são contínuas para quase todo $t \in J$;
- (ii) Para cada $\psi \in \mathcal{B}$, as funções $f(\cdot, \psi)|_J, g(\cdot, \psi)|_J : J \rightarrow X$ são fortemente mensuráveis.

(H₂) Existem funções integráveis $m_f, m_g : J \rightarrow [0, \infty)$ e funções contínuas não decrescentes $W_f, W_g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tais que

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi)\| &\leq m_f(t)W_f(\|\psi\|_B), \quad (t, \psi) \in J \times \mathcal{B}, \\ \|g(t, \psi)\| &\leq m_g(t)W_g(\|\psi\|_B), \quad (t, \psi) \in J \times \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Para simplificarmos o desenvolvimento de nossos resultados tomaremos $W = \max\{W_f, W_g\}$.

Observação 3.2 Se $u(\cdot)$ é uma solução de classe C^2 do sistema (3.1)-(3.3) tal que $t \rightarrow f(t, u_t)$ e $t \rightarrow g(t, u_t)$ são integráveis e $t \rightarrow g(t, u_t)$ é suficientemente regular, temos que

$$\begin{aligned} u(t) &= C(t)p(\varphi, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n})(0) + S(t)q(\varphi, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n}) - \int_0^t S(t-s) \frac{d}{ds} g(s, u_s) ds \\ &\quad + \int_0^t S(t-s) f(s, u_s) ds, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned} u(t) &= C(t)p(\varphi, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n})(0) + S(t)[q(\varphi, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n}) + g(0, p(\varphi, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n}))] \\ &\quad - \int_0^t C(t-s)g(s, u_s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s, u_s)ds, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Considerando a observação anterior, introduzimos o seguinte conceito de solução fraca para (3.1)-(3.3).

Definição 3.3 Diremos que uma função $x : I \rightarrow X$ é uma solução fraca do problema (3.1)-(3.3) se $x_0 = p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ e

$$\begin{aligned} x(t) &= C(t)p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})(0) - S(t)[q(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) + g(0, p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}))] \\ &\quad - \int_0^t C(t-s)g(s, x_s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds, \quad t \in J. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Estamos agora em condições de estabelecer nosso primeiro resultado de existência.

Teorema 3.4 *Assuma que as condições $(\mathbf{H}_1)$ e $(\mathbf{H}_2)$ são verificadas. Suponha, além disso, que as seguintes condições são válidas.*

- (a) *Para cada $0 < t' \leq t$ e $r > 0$, os conjuntos $U(t, t', r) = \{S(t')f(s, \psi) : s \in [0, t], \|\psi\|_B \leq r\}$ e $U_1(t, r) = \{g(s, \psi) : s \in [0, t], \|\psi\|_B \leq r\}$ são relativamente compactos em X ;*
- (b) *A função $p(\cdot)$ é limitada e completamente contínua.*
- (c) *A função $q(\cdot)$ é limitada e o conjunto $V(t, r) = \{S(t)q(\psi) : \psi \in B_r(0, B^{n+1})\}$ é relativamente compacto em X para cada $t \in J$ e todo $r > 0$.*

Se

$$K \int_0^a (Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s)) ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W(s)}, \quad (3.8)$$

onde $c = (KNH + M)N_p + K\tilde{N}(N_q + c_0)$, com $c_0 = \sup\{\|g(0, \psi)\|_X : \|\psi\|_B \leq N_p\}$, então existe uma solução fraca de (3.1)-(3.3).

Prova: Seja $\Gamma : BC \rightarrow BC$ a aplicação definida por

$$\Gamma x(t) = \begin{cases} p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})(t), & t \in (-\infty, 0] \\ C(t)p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})(0) + S(t)[q(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) + g(0, p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}))] \\ - \int_0^t C(t-s)g(s, x_s) ds + \int_0^t S(t-s)f(s, x_s) ds, & t \in J. \end{cases} \quad (3.9)$$

É claro de $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ que Γ está bem definida. Mais ainda, Γ é contínua. De fato, seja $\{x^k\}_k$ uma sequência em BC tal que $\|x^k - x\|_{BC} \rightarrow 0$. Dos axiomas do espaço B e a continuidade da função $p(\cdot)$ obtemos que $p(\varphi, x_{t_1}^k, \dots, x_{t_n}^k) \rightarrow p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ e $q(\varphi, x_{t_1}^k, \dots, x_{t_n}^k) \rightarrow q(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ em B quando $k \rightarrow \infty$. Além disso, para cada $t \in J$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma x^k(t) - \Gamma x(t)\| &\leq NH \|\ p(\varphi, x_{t_1}^k, \dots, x_{t_n}^k) - p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \|_B \\ &\quad + \tilde{N} \| q(\varphi, x_{t_1}^k, \dots, x_{t_n}^k) - q(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \| \\ &\quad + \tilde{N} \| g(0, p(\varphi, x_{t_1}^k, \dots, x_{t_n}^k)) - g(0, p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})) \| \\ &\quad + N \int_0^t \| g(s, x_s^k) - g(s, x_s) \| ds \\ &\quad + \tilde{N} \int_0^t \| f(s, x_s^k) - f(s, x_s) \| ds, \end{aligned}$$

o que nos permite concluir, a partir do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que $\Gamma u_n \rightarrow \Gamma u$ em $C(J : X)$. Isto prova que Γ é contínua.

Além de aplicar o Lema 1.45, fizemos estimativas *a priori* para as soluções da equação integral $x = \lambda \Gamma(x)$, $\lambda \in (0, 1)$. Seja $x^\lambda \in BC$ uma solução de $x^\lambda = \lambda \Gamma(x^\lambda)$, $\lambda \in (0, 1)$. Usando as notações anteriores, para $t \in J$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|x^\lambda(t)\| &\leq NHN_p + \tilde{N}(N_q + \|g(0, p(\varphi, x_{t_1}^\lambda, \dots, x_{t_n}^\lambda))\|) \\ &\quad + \int_0^t (Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s))W(\|x_s^\lambda\|_B)ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dos axiomas do espaço B e (3.10) concluímos que

$$\begin{aligned} \|x_t^\lambda\|_B &\leq (KNH + M)N_p + K\tilde{N}(N_q + \|g(0, p(\varphi, x_{t_1}^\lambda, \dots, x_{t_n}^\lambda))\|) \\ &\quad + K \int_0^t (Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s))W(\|x_s^\lambda\|_B)ds. \end{aligned}$$

Denotando por $\beta_\lambda(t)$ o lado direito da última desigualdade, encontramos que

$$\beta'_\lambda(t) \leq K(Nm_g(t) + \tilde{N}m_f(t))W(\beta_\lambda(t)).$$

Em vista que $\beta_\lambda(0) \leq c$ obtemos

$$\int_c^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{W(s)} < \int_{\beta_\lambda(0)}^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{W(s)} \leq K \int_0^t (Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s))ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W(s)},$$

o qual nos permite concluir que o conjunto $\{\beta_\lambda : \lambda \in (0, 1)\}$ é uniformemente limitado sobre $[0, a]$ e portanto que o conjunto $\{x^\lambda : \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em $C(J, X)$. Da limitação da função $p(\cdot)$, concluímos agora que $\{x^\lambda : \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em BC .

Agora, provaremos que Γ é completamente contínua. Para este fim, consideremos a aplicação $\Gamma_1 : BC \rightarrow BC$ definida por

$$\Gamma_1 u(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0], \\ -\int_0^t C(t-s)g(s, u_s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s, u_s)ds, & t \in J. \end{cases}$$

Vemos facilmente, que nossas hipóteses implicam que $(\Gamma - \Gamma_1)$ é completamente contínua. Para concluir que Γ é completamente contínua basta provar que $\Gamma_1(B_r(0, BC))$ é relativamente compacto em BC para todo $r > 0$. Seja $r > 0$, $r^* = (K + M)r$ e $B_r = B_r(0, BC)$. Como $(\Gamma_1 B_r)_0 = \{0\}$, é suficiente provar que $\Gamma_1 B_r|_J$ é relativamente compacto em $C(J : X)$.

Mostraremos inicialmente que o conjunto $\Gamma_1 B_r|_J$ é equicontínuo sobre J . Fixemos $t \in J$ e seja $\epsilon > 0$. Da continuidade forte de $C(\cdot)$ e condição (a) existe $\delta > 0$ tal que

$$\| (C(t+h-s) - C(t-s))g(s, \psi) \| < \epsilon, \quad \| \psi \|_B \leq r^*, \quad s \in [0, t],$$

quando $|h| \leq \delta$. Além disso, usando que a função Seno é Lipschitz sobre J , para $x \in B_r$ e $|h| \leq \delta$ com $t+h \in J$ obtemos que

$$\begin{aligned} & \| \Gamma_1 x(t+h) - \Gamma_1 x(t) \| \\ & \leq \int_0^t \| (C(t+h-s) - C(t-s))g(s, x_s) \| ds + N \int_t^{t+h} \| g(s, x_s) \| ds \\ & \quad + \int_0^t \| S(t+h-s) - S(t-s) \| \| f(s, x_s) \| ds + \tilde{N} \int_t^{t+h} \| f(s, x_s) \| ds \\ & \leq \epsilon t + NW_g(r^*) \int_t^{t+h} m_g(s) ds + NhW_f(r^*) \int_0^t m_f(s) ds + \tilde{N}W_f(r^*) \int_t^{t+h} m_f(s) ds, \end{aligned}$$

o que mostra que $\Gamma_1 B_r$ é uniformemente equicontínuo sobre J .

A seguir provamos que o conjunto $\Gamma_1 B_r(t) = \{\Gamma_1 x(t) : x \in B_r\}$ é relativamente compacto em X , para cada $t \in J$. Fixemos $t \in J$ e seja $\epsilon > 0$. Como $U_1(t, r)$ é um conjunto relativamente compacto em X e $C(\cdot)$ é fortemente contínua, temos que $U_2(t, r^*) = \{C(t-s)g(s, \psi) : 0 \leq s \leq t, \| \psi \|_B \leq r^*\}$ é relativamente compacto em X .

Fixemos agora $0 < \delta < a$ e pontos $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_k = t$ tais que $s_{i+1} - s_i \leq \delta$ para cada $i = 1, \dots, k$. Assim, para $x \in B_r$ obtemos que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} [S(s) - S(s_i)] f(t-s, x_{t-s}) ds \right\| \leq \delta NW_f(r^*) \int_0^a m_f(s) ds.$$

Dessas observações e aplicando o Lema 2.17 obtemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x(t) &= - \int_0^t C(t-s)g(s, x_s) ds + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} S(s_i) f(t-s, x_{t-s}) ds \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{s_i}^{s_{i+1}} (S(s) - S(s_i)) f(t-s, x_{t-s}) ds \\ &\in \overline{t \operatorname{co}(U_2(t, r^*))} + \sum_{i=1}^{k-1} (s_{i+1} - s_i) \overline{\operatorname{co}(U(t, s_i, r^*))} + \gamma B_1(0, X), \end{aligned}$$

onde $\operatorname{co}(\cdot)$ denota a envoltória convexa e $\gamma = \delta NW_f(r^*) \int_0^a m_f(s)$. Como δ é arbitrário, concluímos que $\Gamma_1 B_r(t)$ é um conjunto totalmente limitado e portanto relativamente compacto em X .

Do Teorema de Arzelà-Ascoli inferimos que $\Gamma_1 B_r|_J$ é relativamente compacto em $C(J, X)$ o que completa a prova que Γ é completamente contínua.

Finalmente, o Lema 1.45 permite concluir que existe uma solução fraca de (3.1)-(3.3). A prova está completa. ■

Na maioria das situações de interesse prático a função seno é compacta. Esta é a motivação para o próximo resultado, o qual é uma consequência direta do Teorema 3.4.

Corolário 3.5 *Assuma que (H_1) e (H_2) são satisfeitas, que $S(t)$ é compacto para todo $t \in \mathbb{R}$ e que as seguintes condições se verificam.*

(a) *A função f transforma conjuntos limitados e fechados em conjuntos limitados e que para todo $0 \leq t \leq a$ e $r \geq 0$ o conjunto $U_1(t, r) = \{g(s, \psi) : s \in [0, t], \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ é relativamente compacto em X ;*

(b) *As funções $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ são limitadas e $p(\cdot)$ é completamente contínua.*

Se a desigualdade (3.8) é verificada, então existe uma solução fraca de (3.1)-(3.3).

No próximo resultado, removemos as condições que $p(\cdot), q(\cdot)$ são limitadas e $p(\cdot)$ é completamente contínua.

Teorema 3.6 *Assuma que (H_1) e (H_2) estão satisfeitas e que as condições seguintes são verificadas:*

(a) *Para cada $0 < t' \leq t$ e $r > 0$, o conjunto $U(t, t', r) = \{S(t')f(s, \psi) : s \in [0, t], \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ é relativamente compacto em X ;*

(b) *Existem constantes positivas L_g e L_p tais que*

$$\begin{aligned} \|g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2)\| &\leq L_g \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad t \in I, \psi_i \in \mathcal{B}, \\ \|p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}) - p(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1})\|_{\mathcal{B}} &\leq L_p \sum_{i=1}^{n+1} \|\xi_i - \psi_i\|_{\mathcal{B}}, \quad \xi_i, \psi_i \in \mathcal{B}; \end{aligned}$$

(c) *A função $q(\cdot)$ é localmente limitada e para cada $t \in I$ e cada $r > 0$ o conjunto $V(t, r) = \{S(t)q(\psi) : \psi \in B_r(0, \mathcal{B}^{n+1})\}$ é relativamente compacto em X .*

Se

$$\begin{aligned} &(K_a + M_a) \left(n(1 + NH + \tilde{N}L_g)L_p + NaL_g \right) + \\ &(K_a + M_a)\tilde{N} \left((n+1) \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_g(r)}{r} + \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{W_f(r)}{r} \int_0^a m_f(s)ds \right) < 1, \end{aligned}$$

então existe uma solução fraca de (3.1)-(3.3).

Prova: Seja Γ a aplicação definida na prova do Teorema 3.4. Afirmamos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r(0, BC)) \subset B_r(0, BC)$. Provenos esta afirmação por absurdo. Neste caso, para cada $r > 0$ existe $x^r \in B_r(0, BC)$ tal que $\|\Gamma x^r\|_{BC} > r$, o que implica que

$$\begin{aligned} r &< \|\Gamma x^r\|_{BC} + \|\Gamma x^r\|_a \\ &\leq nL_p(K_a + M_a)r + \|p(\varphi, 0, \dots, 0)\|_B + NH[nL_p(K_a + M_a)r + \|p(\varphi, 0, \dots, 0)\|_B] \\ &\quad + \tilde{N}N_q((n+1)\max\{(K_a + M_a)r, \|\varphi\|_B\}) + \tilde{N}L_g[nL_p(K_a + M_a)r + \|p(\varphi, 0, \dots, 0)\|_B] \\ &\quad + \tilde{N}\|g(0, 0)\| + NL_ga(K_a + M_a)r + N\int_0^a \|g(s, 0)\| ds + \tilde{N}W_f((K_a + M_a)r)\int_0^a m_f(s) ds. \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que

$$\begin{aligned} 1 &\leq n(K_a + M_a)(1 + NH + \tilde{N}L_g)L_p + Na(K_a + M_a)L_g \\ &\quad + \tilde{N}(n+1)(K_a + M_a)\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_q(r)}{r} + \tilde{N}(K_a + M_a)\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{W_f(r)}{r} \int_0^a m_f(s) ds, \end{aligned}$$

o que contradiz nossa hipótese.

Agora consideremos a aplicação $\Gamma_1 : BC \rightarrow BC$ definida por

$$\Gamma_1 x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0], \\ S(t)q(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) + \int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds, & t \in J. \end{cases} \quad (3.11)$$

Seja $r_0 > 0$ tal que $\Gamma(B_{r_0}(0, BC)) \subset B_{r_0}(0, BC)$. Arguindo como na prova do Teorema 3.4, podemos provar que Γ_1 é uma aplicação completamente contínua. Além disso, se $\Gamma_2 := \Gamma - \Gamma_1$, da estimativa

$$\|\Gamma_2 u - \Gamma_2 v\|_{BC} \leq (K_a + M_a) \left[n(1 + NH + \tilde{N}L_g)L_p + NaL_g \right] \|u - v\|_{BC},$$

concluimos que Γ_2 é uma contração sobre $B_{r_0}(0, BC)$. Assim, Γ_1, Γ_2 verificam as condições do Lema 1.46 sobre $B_{r_0}(0, BC)$, o que nos permite concluir que existe uma solução fraca de (3.1)-(3.3). A prova está agora completa. ■

Prosseguindo com nosso trabalho, discutiremos a existência de soluções para o problema de Cauchy abstrato (3.4)-(3.6). Em vista que os resultados são similares àqueles estabelecidos na primeira parte desta seção as demonstrações serão convenientemente resumidas. Para estudar este problema introduzimos as seguintes condições técnicas.

(H₃) A função $f : I \times \mathcal{B} \times X \rightarrow X$ satisfaz as condições do tipo Caratheodory:

- (i) A função $f(t, \cdot) : \mathcal{B} \times X \rightarrow X$ é contínua para quase todo $t \in J$;
- (ii) Para cada $(\psi, x) \in \mathcal{B} \times X$, a função $f(\cdot, \psi, x)|_J$ é fortemente mensurável sobre J ;

- (iii) Existe uma função integrável $m_f : J \rightarrow [0, \infty)$ e uma função não decrescente $W_f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\|f(t, \psi, x)\| \leq m_f(t)W_f(\|\psi\|_{\mathcal{B}} + \|x\|), \quad (t, \psi, x) \in J \times \mathcal{B} \times X.$$

(H₄) A função $g : J \times \mathcal{B} \times X \rightarrow E$ é contínua, $g(J \times \mathcal{B} \times X \rightarrow X) \subset E$ e verifica as seguintes condições do tipo Caratheodory:

- (i) A função $g(t, \cdot) : \mathcal{B} \times X \rightarrow E$ é contínua para quase todo $t \in J$;
(ii) Para cada $(\psi, x) \in \mathcal{B} \times X$ a função $g(\cdot, \psi, x)|_J$ é fortemente mensurável sobre J .
(iii) Existe uma função integrável $m_g : J \rightarrow [0, \infty)$ e uma função contínua não decrescente $W_g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ tal que

$$\|g(t, \psi, x)\|_E \leq m_g(t)W_g(\|\psi\|_{\mathcal{B}} + \|x\|), \quad (t, \psi, x) \in J \times \mathcal{B} \times X.$$

- (iv) Existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$\|g(t, \psi, x)\| \leq C_1(\|\psi\|_{\mathcal{B}} + \|x\|) + C_2, \quad (t, \psi, x) \in J \times \mathcal{B} \times X.$$

(H₅) As funções $p(\cdot) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$ e $q(\cdot) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow X$ são contínuas e transformam conjuntos fechados e limitados em conjuntos limitados. Mais ainda, para cada $\psi \in \mathcal{B}^{n+1}$, $p(\psi)(0) \in E$, a função $p(\cdot)(0) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow E$ que associa $\psi \rightarrow p(\psi)(0)$ é contínua e transforma fechados e limitados em limitados.

Como mencionamos anteriormente, $N_p(r) = \sup\{\|p(\psi)\|_{\mathcal{B}} : \psi \in B_r(0, \mathcal{B}^{n+1})\}$ e $N_q(r) = \sup\{\|q(\psi)\| : \psi \in B_r(0, \mathcal{B}^{n+1})\}$. Escrevemos também $N_p^1(r) = \sup\{\|p(\psi)(0)\|_E : \psi \in B_r(0, \mathcal{B}^{n+1})\}$. Se $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ são limitadas, representamos por N_p e N_q os supremos de $\|p(\cdot)\|_{\mathcal{B}}$ e $\|q(\cdot)\|$, respectivamente. Lembramos que $N_1 > 0$ é tal que $\|AS(t)\|_{\mathcal{L}(E;X)} \leq N_1$ para todo $t \in J$.

Até o fim desta seção, $Y = \mathcal{BC} \times C(J; X)$ está munido da norma $\|(u, v)\|_Y = \|u\|_{\mathcal{BC}} + \|v\|_a$. Para simplificar a notação, escreveremos $B_r = B_r(0, Y)$, $W = \max\{W_f, W_g\}$, $N_p = \max\{N_p, N_p^1\}$, $p(t_i, \varphi, u) = p(\varphi, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n})$ e $q(t_i, \varphi, u) = q(\varphi, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n})$.

Para obter alguns de nossos resultados usamos o seguinte Lema.

Lema 3.7 [31, Lema 1.1] *Seja $h : [0, a] \rightarrow E$ uma função integrável e contínua em X . Então a função v definida por $v(t) = \int_0^t C(t-s)h(s)ds$ é continuamente diferenciável, $s \rightarrow AS(t-s)h(s)$ é integrável de $[0, t]$ em X e*

$$v'(t) = h(t) + A \int_0^t S(t-s)h(s)ds = h(t) + \int_0^t AS(t-s)h(s)ds.$$

Introduzimos o seguinte conceito de solução fraca.

Definição 3.8 Diremos que uma função $x : I \rightarrow X$ é solução fraca de (3.4)-(3.6) se $x_0 = p(t_i, \varphi, x)$, $x|_J \in C^1(J; X)$ e

$$\begin{aligned} x(t) = & C(t)p(t_i, \varphi, x)(0) + S(t)[q(t_i, \varphi, x) + g(0, p(t_i, \varphi, x), x'(0))] - \int_0^t C(t-s)g(s, x_s, x'(s)) ds \\ & + \int_0^t S(t-s)f(s, x_s, x'(s)) ds, \quad t \in J. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pela definição 3.8, se $u(\cdot)$ é uma solução fraca de (3.4)-(3.6) e as condições $(\mathbf{H}_4)$ -($\mathbf{H}_5$) são satisfeitas, então das propriedades da função cosseno e Lema 3.7 obtemos que $x|_J \in C^1(J; X)$ e que

$$\begin{aligned} x'(t) = & AS(t)p(t_i, \varphi, x)(0) + C(t)[q(t_i, \varphi, x) + g(0, p(t_i, \varphi, x), x'(0))] - g(t, x_t, x'(t)) \\ & - \int_0^t AS(t-s)g(s, x_s, x'(s)) ds + \int_0^t C(t-s)f(s, x_s, x'(s))ds, \quad t \in J. \end{aligned}$$

Estamos agora em condições de estabelecer nosso próximo resultado de existência.

Teorema 3.9 Assuma que as condições $(\mathbf{H}_3)$, $(\mathbf{H}_4)$ e $(\mathbf{H}_5)$ são satisfeitas. Suponha também que as seguintes propriedades são válidas.

- (a) Para cada $r > 0$, os conjuntos $U_r = f(J \times B_r(0, B \times X))$ e $V_r = g(J \times B_r(0, B \times X))$ são relativamente compactos em X e E respectivamente.
- (b) As funções $p(\cdot) : B^{n+1} \rightarrow B$, $p(\cdot)(0) : B^{n+1} \rightarrow E$ e $q(\cdot) : B^{n+1} \rightarrow X$ são limitadas e completamente contínuas.
- (c) A função $g : I \times B \times X \rightarrow X$ é completamente contínua e para cada $r > 0$, o conjunto de funções $\{t \mapsto g(t, x_t, v(t)) : x \in \mathcal{BC}, v \in C(J; X)\}$ é equicontínuo sobre J .

Se $\mu := 1 - C_1(1 + N + K_a\tilde{N}) > 0$ e

$$\frac{d}{\mu} \int_0^a (m_g(s) + m_f(s))ds < \int_c^\infty \frac{ds}{\tilde{W}(s)},$$

onde $c = [M_a\mathcal{N}_p + K_a(N\mathcal{N}_pH + \tilde{N}(N_q + C_1\mathcal{N}_p + C_2)) + (1 + N)(N_1\mathcal{N}_p + N(N_q + C_1\mathcal{N}_p + C_2))]$ e $d = K_a(N + \tilde{N}) + (1 + N)(N_1 + N)$, então existe uma solução fraca de (3.4)-(3.6).

Prova: Sobre o espaço $Y = \mathcal{BC} \times C(J; X)$, definimos $\Gamma : Y \rightarrow Y$ por $\Gamma(u, v) = (\Gamma_1(u, v), \Gamma_2(u, v))$ onde

$$\Gamma_1(u, v)(t) = \begin{cases} p(t_i, \varphi, u)(t), & t \in (-\infty, 0], \\ C(t)p(t_i, \varphi, u)(0) + S(t)[g(t_i, \varphi, u) + g(0, p(t_i, \varphi, u), v(0))] \\ - \int_0^t C(t-s)g(s, u_s, v(s))ds + \int_0^t S(t-s)f(s, u_s, v(s))ds, & t \in J, \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(u, v)(t) = & AS(t)p(t_i, \varphi, u)(0) + C(t)[g(t_i, \varphi, u) + g(0, p(t_i, \varphi, u), v(0))] - g(t, u_t, v(t)) \\ & - \int_0^t AS(t-s)g(s, u_s, v(s))ds + \int_0^t C(t-s)f(s, u_s, v(s))ds, \quad t \in J. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como $p(t_i, \varphi, u) \in E$ e $g : I \times \mathcal{B} \times X \rightarrow E$ é contínua, segue-se que $\Gamma(u, v)$ é contínua sobre J e $\Gamma(u, v) \in Y$. Mais ainda, usando que a família de operadores $AS(t)$ é fortemente contínua sobre E , podemos provar usando o Teorema da Convergência Dominada que Γ é contínua.

Suponha agora que (u^λ, v^λ) é uma solução da equação integral $(u, v) = \lambda\Gamma(u, v)$, $\lambda \in (0, 1)$. Da definição de Γ , para $t \in J$ temos que

$$\begin{aligned} \|u^\lambda(t)\| &\leq N\mathcal{N}_p H + \tilde{N}[N_q + C_1(\|p(t_i, \varphi, u^\lambda)\|_{\mathcal{B}} + \|v^\lambda(0)\|) + C_2] \\ &\quad N \int_0^t m_g(s)W(K_a \|u^\lambda\|_s + M_a \|u_0^\lambda\|_{\mathcal{B}} + \|v^\lambda(s)\|)ds \\ &\quad + \tilde{N} \int_0^t m_f(s)W(K_a \|u^\lambda\|_s + M_a \|u_0^\lambda\|_{\mathcal{B}} + \|v^\lambda(s)\|)ds \\ &\leq N\mathcal{N}_p H + \tilde{N}(N_q + C_1\mathcal{N}_p + C_2) + \tilde{N}C_1 \|v^\lambda\|_t \\ &\quad + \int_0^t [Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s)]W(K_a \|u^\lambda\|_s + M_a \|u_0^\lambda\|_{\mathcal{B}} + \|v^\lambda\|_s)ds \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|v^\lambda(t)\| &\leq \sup_{s \in J} \|AS(s)\|_{\mathcal{L}(Y; X)} \|p(t_i, \varphi, u^\lambda)(0)\|_E + N[N_q + C_1(\mathcal{N}_p + \|v^\lambda(0)\|) + C_2] \\ &\quad + C_1(K_a \|u^\lambda\|_t + M_a \|u_0^\lambda\|_{\mathcal{B}} + \|v^\lambda(t)\|) + C_2 \\ &\quad + \int_0^t \|AS(t-s)\|_{\mathcal{L}(Y; X)} \|g(s, u_s^\lambda, v^\lambda(s))\|_E ds \\ &\quad + \int_0^t Nm_f(s)W(K_a \|u^\lambda\|_s + M_a \|u_0^\lambda\|_{\mathcal{B}} + \|v^\lambda(s)\|)ds \\ &\leq N_1\mathcal{N}_p + N(N_q + C_1\mathcal{N}_p + C_2) + C_2 \\ &\quad + C_1(K_a \|u^\lambda\|_t + M_a \|u_0^\lambda\|_{\mathcal{B}} + (1+N)\|v^\lambda\|_t) \\ &\quad + \int_0^t [N_1m_g(s) + Nm_f(s)]W(K_a \|u^\lambda\|_s + M_a \|u_0^\lambda\|_{\mathcal{B}} + (1+N)\|v^\lambda\|_s)ds \end{aligned}$$

Observando que $\|u_0^\lambda\|_B \leq \mathcal{N}_p$ e usando a notação $\alpha^\lambda(t) = M_a \mathcal{N}_p + K_a (\|u^\lambda\|_S + (1+N) \|v^\lambda\|_S)$, obtemos a partir das desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned} \alpha^\lambda(t) &\leq M_a \mathcal{N}_p + K_a [N \mathcal{N}_p H + \tilde{N}(N_q + C_1 \mathcal{N}_p + C_2)] + K_a C_1 \tilde{N} \alpha^\lambda(t) \\ &\quad + K_a \int_0^t [N m_g(s) + \tilde{N} m_f(s)] W(\alpha^\lambda(s)) ds + (1+N) [N_1 \mathcal{N}_p + N(N_q + C_1 \mathcal{N}_p + C_2) + C_2] \\ &\quad + (1+N) C_1 \alpha^\lambda(t) + (1+N) \int_0^t [N_1 m_g(s) + N m_f(s)] W(\alpha^\lambda(s)) ds \\ &\leq M_a \mathcal{N}_p + K_a [N \mathcal{N}_p H + \tilde{N}(N_q + C_1 \mathcal{N}_p + C_2)] \\ &\quad + (1+N) [N_1 \mathcal{N}_p + N(N_q + C_1 \mathcal{N}_p + C_2) + C_2] + (1+N + K_a \tilde{N}) C_1 \alpha^\lambda(t) \\ &\quad + K_a \int_0^t [N m_g(s) + \tilde{N} m_f(s)] W(\alpha^\lambda(s)) ds \\ &\quad + (1+N) \int_0^t [N_1 m_g(s) + N m_f(s)] W(\alpha^\lambda(s)) ds \end{aligned}$$

de onde concluímos que

$$\alpha^\lambda(t) \leq \frac{c}{\mu} + \frac{d}{\mu} \int_0^t [m_g(s) + m_f(s)] W(\alpha^\lambda(s)) ds, \quad t \in J, \quad (3.15)$$

pois $\mu = 1 - C_1(1 + N + K_a \tilde{N}) > 0$.

Denotando por $\beta_\lambda(t)$ o lado direito de (3.15) obtemos que

$$\beta'_\lambda(t) \leq \frac{d}{\mu} (m_g(t) + m_f(t)) W(\beta_\lambda(t)),$$

o que implica

$$\int_{\beta_\lambda(0)}^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{W(s)} \leq \frac{d}{\mu} \int_0^a [m_g(s) + m_f(s)] ds < \int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{W(s)},$$

o qual permite inferir que $\{\beta_\lambda(t) : \alpha \in (0, 1), t \in J\}$ é limitado. Portanto, $\{(u^\lambda, v^\lambda) : \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em Y .

Para aplicar o Lema 1.45, resta mostrar que Γ é completamente contínua. Da prova do Teorema 3.4 é fácil concluir que Γ_1 é completamente contínua. Para estudar a função Γ_2 , introduzimos a decomposição $\Gamma_2 = \Gamma_2^1 + \Gamma_2^2 + \Gamma_2^3$ onde

$$\begin{aligned} \Gamma_2^1(u, v)(t) &= AS(t)p(t_i, \varphi, u)(0) + C(t)[q(t_i, \varphi, u) + g(0, p(t_i, \varphi, u), v(0))] - g(t, u_t, v(t)), \\ \Gamma_2^2(u, v)(t) &= - \int_0^t AS(t-s)g(s, u_s, v(s))ds, \\ \Gamma_2^3(u, v)(t) &= \int_0^t C(t-s)f(s, u_s, v(s))ds. \end{aligned}$$

A partir das propriedades de g, p, q , podemos deduzir facilmente que Γ_2^1 é completamente contínua. Vejamos agora que Γ_2^2 é também completamente contínua. Sejam $\varepsilon > 0$, $r > 0$, $B_r = B_r(0, Y)$ e $r^* = (K_a + M_a + 1)r$. Usando que $V_{r^*} = g(J \times B_r(0, B \times X))$ é relativamente compacto em E e o fato que a família $AS(t)$ é fortemente contínua sobre E , podemos fixar $\delta > 0$ tal que

$$\|AS(t)x - AS(s)x\| < \varepsilon, \quad x \in V_{r^*}$$

quando $|t - s| < \delta$ e $t, s \in J$. Assim, para $0 < |h| < \delta$, $t \in J$ e h tais que $0 \leq t + h < \delta \leq a$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_2^2(u, v)(t+h) - \Gamma_2^2(u, v)(t)\| &\leq \int_0^{\min\{t, t+h\}} \|(AS(t+h-s) - AS(t-s))g(s, u_s, v(s))\| ds \\ &\quad + \int_{\min\{t, t+h\}}^{\max\{t, t+h\}} \sup_{\theta \in [0, a]} \|AS(\theta)\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \|g(s, u_s, v(s))\|_E ds \\ &\leq \varepsilon a + N_1 W(r^*) \int_t^{t+h} m_g(s) ds, \end{aligned}$$

o que prova que o conjunto $\{\Gamma_2^2(u, v) : (u, v) \in B_r\}$ é uniformemente contínuo sobre J .

Por outro lado, usando novamente que a família $AS(t)$ é fortemente contínua em E e que V_r é relativamente compacto em E , inferimos que o conjunto $\{AS(t)x : t \in J, x \in V_r\}$ é relativamente compacto em X . Agora, pelo Lema 2.17 temos que

$$\Gamma_2^2(u, v)(t) \in \overline{\text{tco}(\{AS(s)x : s \in J, x \in V_{r^*}\})},$$

o que prova que $\{\Gamma_2^2(u, v)(t) : (u, v) \in B_r(0, Y)\}$ é relativamente compacto em X .

Do exposto anteriormente, concluímos que Γ_2^2 é completamente contínua.

Usando os mesmos argumentos que no estudo de Γ_2^2 , podemos mostrar que Γ_2^3 é completamente contínua. Omitiremos os detalhes desta parte da prova.

Finalmente, uma aplicação do Lema 1.45 prova a existência de um ponto fixo para Γ e conseqüentemente a existência de uma solução fraca para (3.4)-(3.6). A prova está completa. ■

Seja $\psi \in B$ tal que $\psi(0) \in E$. No que segue-se, escrevemos $\|\psi\|_{B,E} = \|\psi\|_B + \|\psi(0)\|_E$.

Teorema 3.10 *Assuma que a condição (H_3) é satisfeita. Suponha, além disso, que as seguintes propriedades são válidas:*

(a) *Para cada $r > 0$, o conjunto $U(r) = f(J \times B_r(0, B \times X))$ é relativamente compacto em X .*

(b) As funções $p(\cdot)(0)$ e g assumem valores em E , $p(\cdot)(0) : B^{n+1} \rightarrow E$ é contínua e limitada, $g : J \times B \times X \rightarrow E$ é contínua e existem constantes L_p, L_q e L_g tais que

$$\begin{aligned} \|p(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1}) - p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})\|_{B,E} &\leq L_p \sum_{i=1}^{n+1} \|\psi_i - \xi_i\|_B \\ \|g(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1}) - g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})\| &\leq L_q \sum_{i=1}^{n+1} \|\psi_i - \xi_i\|_B \\ \|g(t, \psi_1, x_1) - g(t, \psi_2, x_2)\|_E &\leq L_g(\|\psi_1 - \psi_2\|_B + \|x_1 - x_2\|), \end{aligned}$$

para todo $\psi_i, \xi_i \in B$ e todo $x_i \in X$.

Se

$$\begin{aligned} \Theta &:= n(1 + N_1 + NH)(K_a + M_a)L_p + n\tilde{N}(K_a + M_a)L_q \\ &\quad + [N + \tilde{N} + a(N + N_1)(K_a + M_a + 1)]L_g + n(N + \tilde{N})(K_a + M_a)L_pL_q \\ &\quad + (N + \tilde{N})(K_a + M_a + 1) \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{W(r)}{r} \int_0^a m_f(s) ds < 1 \end{aligned}$$

então existe uma solução fraca de (3.4)-(3.6).

Prova: Seja $\Gamma : Y \rightarrow Y$ o operador definido na prova do Teorema 3.9. Usando os mesmos argumentos da prova do Teorema 3.9 concluímos que $\Gamma(u, v) \in Y$ e que Γ é contínua. Afirmamos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r(0, Y)) \subseteq B_r(0, Y)$. Para mostrar nossa afirmação argumentamos por absurdo. Suponha que para cada $r > 0$ existe $(u^r, v^r) \in B_r(0, Y)$ tal que $\|\Gamma(u^r, v^r)\|_Y > r$. Nestas condições temos que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_1(u^r, v^r)\|_{BC} &= \|p(t_i, \varphi, u^r)\|_B + \|\Gamma_1(u^r, v^r)\|_a \\ &\leq L_p \left(\sum_{i=1}^n \|u_{t_i}^r\|_B + \|\varphi\|_B \right) + \|p(t_i, 0, 0)\|_B \\ &\quad + NH \left[L_p \left(\sum_{i=1}^n \|u_{t_i}^r\|_B + \|\varphi\|_B \right) + \|p(t_i, 0, 0)\|_B \right] \\ &\quad + \tilde{N} \left[L_q \left(\sum_{i=1}^n \|u_{t_i}^r\|_B + \|\varphi\|_B \right) + \|g(t_i, 0, 0)\| \right] \\ &\quad + \tilde{N} L_g \left[L_p \sum_{i=1}^n \|u_{t_i}^r\|_B + \|v(0)\| \right] + \tilde{N} \|g(0, p(t_i, 0, 0), 0)\| \\ &\quad + \int_0^a NL_g (\|u_s^r\|_B + \|v^r(s)\|) + N \|g(s, 0, 0)\| ds \\ &\quad + \int_0^a \tilde{N} m_f(s) W(\|u_s^r\|_B + \|v^r(s)\|) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq n(1 + NH)L_p(K_a + M_a)r + (1 + NH)L_p \|\varphi\|_B + (1 + NH) \|p(t_i, 0, 0)\|_B \\
&\quad + n\tilde{N}L_q(K_a + M_a)r + \tilde{N}L_q \|\varphi\|_B + \tilde{N} \|q(t_i, 0, 0)\| \\
&\quad + n\tilde{N}L_gL_p(K_a + M_a)r + \tilde{N}L_g r + \tilde{N} \|g(0, p(t_i, 0, 0), 0)\| \\
&\quad + NaL_q(K_a + M_a + 1)r + N \int_0^a \|g(s, 0, 0)\| ds \\
&\quad + \tilde{N}W((K_a + M_a + 1)r) \int_0^a m_f(s)ds
\end{aligned} \tag{3.16}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2(u^r, v^r)\|_a &\leq \sup_{0 \leq t \leq a} \|AS(t)\|_{\mathcal{L}(E;X)} \|p(t_i, \varphi, u^r)(0)\|_E \\
&\quad + N \left[L_q \left(\sum_{i=1}^n \|u_{t_i}^r\|_B + \|\varphi\|_B \right) + \|q(t_i, 0, 0)\| \right] \\
&\quad + NL_g \left[L_p \sum_{i=1}^n \|u_{t_i}^r\|_B + \|v^r(0)\| \right] + N \|g(0, p(t_i, 0, 0), 0)\| \\
&\quad + L_g(\|u_t^r\|_B + \|v^r(t)\|) + \sup_{0 \leq t \leq a} \int_0^t \|AS(t-s)\|_{\mathcal{L}(E;X)} \|g(s, u_s^r, v^r(s))\|_E ds \\
&\quad + N \int_0^a \|f(s, u_s^r, v^r(s))\| ds \\
&\leq nN_1L_p(K_a + M_a)r + N_1[L_p \|\varphi\|_B + \|p(t_i, 0, 0)(0)\|_E] + nNL_q(K_a + M_a)r \\
&\quad + N[L_q \|\varphi\|_B + \|q(t_i, 0, 0)\|] + nNL_gL_p(K_a + M_a)r + NL_g r \\
&\quad + N \|g(0, p(t_i, 0, 0), 0)\| + L_g(K_a + M_a + 1)r + N_1aL_g(K_a + M_a + 1)r \\
&\quad + N_1 \int_0^a \|g(s, 0, 0)\|_E ds + NW((K_a + M_a + 1)r) \int_0^a m_f(s)ds.
\end{aligned}$$

Das desigualdades anteriores obtemos

$$\begin{aligned}
r &< \|\Gamma_1(u^r, v^r)\|_{BC} + \|\Gamma_2(u^r, v^r)\|_a \\
&\leq C + n(1 + N_1 + NH)(K_a + M_a)L_p r + n\tilde{N}(K_a + M_a)L_q r \\
&\quad + [N + \tilde{N} + a(N + N_1)(K_a + M_a + 1)]L_g r + n(N + \tilde{N})(K_a + M_a)L_p L_g r \\
&\quad + (N + \tilde{N})W((K + M + 1)r) \int_0^a m_f(s)ds,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante independente de $r > 0$. Tomando limite na última desigualdade obtemos que

$$\begin{aligned}
1 &< n(1 + N_1 + NH)(K_a + M_a)L_p + n\tilde{N}(K_a + M_a)L_q \\
&\quad + [N + \tilde{N} + a(N + N_1)(K_a + M_a + 1)]L_g + n(N + \tilde{N})(K_a + M_a)L_p L_g \\
&\quad + (N + \tilde{N})(K + M + 1) \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{W(r)}{r} \int_0^a m_f(s)ds,
\end{aligned}$$

o qual é absurdo.

Seja $r_0 > 0$ tal que $\Gamma(B_{r_0}(0, Y)) \subset B_{r_0}(0, Y)$ e consideremos a decomposição $\Gamma = \Gamma^1 + \Gamma^2$ onde $\Gamma^1(u, v) = (\Gamma_1^1(u, v), \Gamma_2^1(u, v))$, $(\Gamma_1^1(u, v))_0 = p(t_i, \varphi, u)$, $\Gamma^2(u, v) = (\Gamma_1^2(u, v), \Gamma_2^2(u, v))$, $(\Gamma_1^2(u, v))_0 = 0$ e

$$\begin{aligned}\Gamma_1^1(u, v)(t) &= C(t)p(t_i, \varphi, u)(0) + S(t)[q(t_i, \varphi, u) + g(0, p(t_i, \varphi, u), v(0))] \\ &\quad - \int_0^t C(t-s)g(s, u_s, v(s))ds, \quad t \in J, \\ \Gamma_1^2(u, v)(t) &= \int_0^t S(t-s)f(s, u_s, v(s))ds, \quad t \in J, \\ \Gamma_2^1(u, v)(t) &= AS(t)p(t_i, \varphi, u)(0) + C(t)[q(t_i, \varphi, u) + g(0, p(t_i, \varphi, u), v(0))] \\ &\quad - g(t, u_t, v(t)) - \int_0^t AS(t-s)g(s, u_s, v(s))ds, \quad t \in J, \\ \Gamma_2^2(u, v)(t) &= \int_0^t C(t-s)f(s, u_s, v(s))ds, \quad t \in J.\end{aligned}$$

Da prova do Teorema 3.4 sabemos que $\Gamma^2 = (\Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$ é completamente contínua em Y . Por outro lado, usando as condições Lipschitz de p , q e g obtemos

$$\begin{aligned}\|\Gamma^1(u, v) - \Gamma^1(\bar{u}, \bar{v})\|_Y &= \|\Gamma_1^1(u, v) - \Gamma_1^1(\bar{u}, \bar{v})\|_{BC} + \|\Gamma_2^1(u, v) - \Gamma_2^1(\bar{u}, \bar{v})\|_a \\ &\leq (1 + NH) \|p(t_i, \varphi, u) - p(t_i, \varphi, \bar{u})\|_B + n\tilde{N}L_q(K_a + M_a) \|u - \bar{u}\|_{BC} \\ &\quad + \tilde{N}L_g(\|p(t_i, \varphi, u) - p(t_i, \varphi, \bar{u})\|_B + \|v - \bar{v}\|_a) \\ &\quad + NaL_g[(K_a + M_a) \|u - \bar{u}\|_{BC} + \|v - \bar{v}\|_a] \\ &\quad + \sup_{t \in J} \|AS(t)\|_{\mathcal{L}(E; X)} \|p(t_i, \varphi, u)(0) - p(t_i, \varphi, \bar{u})(0)\|_E \\ &\quad + nNL_q(K_a + M_a) \|u - \bar{u}\|_{BC} \\ &\quad + NL_g(\|p(t_i, \varphi, u) - p(t_i, \varphi, \bar{u})\|_B + \|v - \bar{v}\|_a) \\ &\quad + L_g[(K_a + M_a) \|u - \bar{u}\|_{BC} + \|v - \bar{v}\|_a] \\ &\quad + \sup_{t \in J} \int_0^t \|AS(t-s)\|_{\mathcal{L}(E; X)} L_g[(K_a + M_a) \|u - \bar{u}\|_{BC} + \|v - \bar{v}\|_a] ds \\ &\leq n(1 + N_1 + NH)(K_a + M_a)L_p \| (u, v) - (\bar{u}, \bar{v}) \|_Y \\ &\quad + n\tilde{N}(K_a + M_a)L_q \| (u, v) - (\bar{u}, \bar{v}) \|_Y \\ &\quad + [N + \tilde{N} + a(N + N_1)(K_a + M_a + 1)]L_g \| (u, v) - (\bar{u}, \bar{v}) \|_Y \\ &\quad + n(N + \tilde{N})(K_a + M_a)L_pL_g \| (u, v) - (\bar{u}, \bar{v}) \|_Y \\ &\leq \Theta \| (u, v) - (\bar{u}, \bar{v}) \|_Y,\end{aligned}$$

o que prova que Γ^1 é uma contração de $B_{r_0}(0, Y)$ em $B_{r_0}(0, Y)$. A existência de uma solução fraca

é agora uma consequência do Lema 1.46. A prova está agora completa. $\square$

A existência de soluções pode ser estabelecida usando uma condição de compacidade sobre q . Como a prova do próximo resultado é análoga a do Teorema anterior, decidimos omiti-la.

Teorema 3.11 *Assuma que as condições $(\mathbf{H}_3)$, $(\mathbf{H}_4)$ e $(\mathbf{H}_5)$ são satisfeitas. Suponha além disso que as condições seguintes são verificadas:*

- (a) *Para cada $r > 0$ o conjunto $U(r) = f(I \times B_r(0, \mathcal{B} \times X))$ é relativamente compacto em X .*
- (b) *A função $q(\cdot)$ é completamente contínua e $p(\cdot)(0)$ é limitada em B .*
- (c) *Existe uma constante $L_g \geq 0$ tal que*

$$\|g(t, \psi_1, x_1) - g(t, \psi_2, x_2)\|_1 \leq L_g(\|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}} + \|x_1 - x_2\|), \quad \psi_i \in \mathcal{B}, \quad x_i \in X.$$

- (d) *Existe uma constante $L_p \geq 0$ tal que*

$$\|p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}) - p(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1})\|_{\mathcal{B}} \leq L_p \sum_{i=1}^{n+1} \|\xi_i - \psi_i\|_{\mathcal{B}}, \quad \xi_i, \psi_i \in \mathcal{B}.$$

Se

$$\begin{aligned} & [n(1 + NH)L_p + (1 + a + Na)L_g + (n + 1)(N + \tilde{N})L_p L_g](K_a + M_a + 1) \\ & + (n + 1)(K_a + M_a + 1) \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_p^1(r)}{r} + (n + 1)(K_a + M_a + 1)(N + \tilde{N}) \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{N_q(r)}{r} \\ & + (K_a + M_a + 1)(N + \tilde{N}) \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{W_f(r)}{r} \int_0^a m_f(s) ds < 1, \end{aligned}$$

então existe uma solução fraca de (3.4)-(3.6).

3.3 Soluções Globais

Nesta seção discutiremos existência de soluções globais para o problema não local (3.1)-(3.3). Até o final desta, consideraremos $J = [0, \infty)$, $\|C(t)\| \leq N$ e $\|S(t)\| \leq \tilde{N}$, para todo $t \geq 0$. Assumiremos que as funções $M(\cdot)$, $K(\cdot)$ são limitadas, respectivamente, pelas constantes M , K e que as funções $p(\cdot) : B^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$ e $q(\cdot) : B^{n+1} \rightarrow X$ são contínuas e limitadas. Como antes

$$N_p = \sup\{\|p(\psi)\|_{\mathcal{B}} : \psi \in B^{n+1}\} \quad \text{e} \quad N_q = \sup\{\|q(\psi)\| : \psi \in B^{n+1}\},$$

e introduzimos $c = (KNH + M)N_p + K\tilde{N}(N_q + c_0)$, onde $c_0 = \sup\{\|g(0, \psi)\| : \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq N_p\}$.

Para mostrar nossos resultados, as condições $(\mathbf{H}_1)$ e $(\mathbf{H}_2)$ são referidas a $J = [0, \infty)$ e assumiremos que as funções $m_f, m_g : J \rightarrow J$ são somente localmente integráveis. Além disso, abreviaremos a notação escrevendo $W = \max\{W_f, W_g\}$. Similarmente à definição 3.3, diremos que uma função $x : \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma solução fraca do problema (3.2)-(3.3) se $x_0 = p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ e (3.7) é verificada sobre $[0, \infty)$.

Seja $h : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ uma função contínua não decrescente com $h(0) = 1$ e tal que $h(t) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$. Denotaremos por $C_h^0(X)$ o espaço formado por funções contínuas $x : [0, \infty) \rightarrow X$ tais que $\frac{\|x(t)\|}{h(t)} \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, munido com a norma $\|x\|_h = \sup_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{h(t)}$ e por $C_0(X)$ o espaço formado por funções contínuas $x : [0, \infty) \rightarrow X$ que se anulam no infinito munido da norma da convergência uniforme. Nesta seção BC_h denotará o espaço de funções $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ tais que $u_0 \in \mathcal{B}$ e $u|_J \in C_h(X)$, munido com a norma $\|u\|_{BC_h} = \|u_0\|_{\mathcal{B}} + \|u|_J\|_h$. Similarmente, BC_h^0 será o subespaço formado por todas as funções $x \in BC_h$ tais que $h^{-1}x \in C_0(X)$.

No próximo resultado a aplicação $\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é definida por $\gamma(s) = Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s)$.

Teorema 3.12 *Assuma que as condições $(\mathbf{H}_1)$ e $(\mathbf{H}_2)$ são verificadas e que as condições seguintes são satisfeitas:*

- (a) *Para cada $t \in J$, $t' \leq t$ e $r \geq 0$ os conjuntos $\{S(t')f(s, \psi) : 0 \leq s \leq t, \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ e $\{g(s, \psi) : 0 \leq s \leq t, \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ são relativamente compactos em X ;*
- (b) *As funções $p(\cdot) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$ e $S(t)q(\cdot) : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow X$ são completamente contínuas, para cada $t \geq 0$;*
- (c) *Para cada $L \geq 0$, $\frac{1}{h(t)} \int_0^t m(s)W(Lh(s)) ds \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$.*

Se

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \gamma(s)W((K+M)rh(s)) ds < 1,$$

então existe uma solução fraca $x(\cdot) \in BC_h^0$ de (3.1)-(3.3).

Prova: Para cada $x \in BC_h^0$ definimos $\Gamma x(t)$ como em (3.9). Para cada $t \geq 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \|\Gamma x(t)\| &\leq NH\|p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})\|_{\mathcal{B}} + \tilde{N}(\|q(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})\| + \|g(0, p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}))\|) \\ &\quad + \int_0^t [Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s)]W(\|x_s\|_{\mathcal{B}}) ds. \end{aligned}$$

Como $\|x_s\|_B \leq (K + M) \|x\|_{BC_h} h(s)$ para cada $s \geq 0$, da expressão anterior resulta que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Gamma x(t)}{h(t)} \right\| &\leq \frac{NH}{h(t)} (\|p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})\|_B) + \frac{\tilde{N}}{h(t)} (\|g(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})\| + \|g(0, p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}))\|) \\ &\quad + \frac{1}{h(t)} \int_0^t [Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s)] W((K + M) \|x\|_{BC_h} h(s)) ds, \end{aligned} \quad (3.17)$$

e aplicando (c) segue-se que $\left\| \frac{\Gamma x(t)}{h(t)} \right\|$ converge a zero quando $t \rightarrow \infty$. Isto mostra que $\Gamma \in BC_h^0$.

Para provar a continuidade de Γ , fixemos uma sequência $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a u em BC_h . Claramente, $g(s, u_s^n) \rightarrow g(s, u_s)$, $f(s, u_s^n) \rightarrow f(s, u_s)$ para quase todo $s \geq 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e

$$\|f(s, u_s^n)\| \leq m_f(s) W_f(\beta h(s)), \quad s \geq 0,$$

$$\|g(s, u_s^n)\| \leq m_g(s) W_g(\beta h(s)), \quad s \geq 0,$$

onde $\beta = (K + M)L$ e $L \geq 0$ é uma constante tal que $\|u^n\|_{BC_h} \leq L$, $n \in \mathbb{N}$, e $\|u\|_{BC_h} \leq L$. Como as funções à direita nas desigualdades acima são integráveis sobre $[0, t]$, concluímos que $\|\Gamma u^n(t) - \Gamma u(t)\| \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente para t sobre intervalos limitados. Por outro lado, desde que $\{u^n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado, o conjunto $\{\Gamma u^n : n \in \mathbb{N}\}$ também é limitado, o que nos permite inferir que para cada $\epsilon > 0$ existe t_0 de modo que $\left\| \frac{\Gamma u^n(t) - \Gamma u(t)}{h(t)} \right\| \leq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $t \geq t_0$. Reunindo estas propriedades, obtemos que $\Gamma u^n \rightarrow \Gamma u$ em $C_h^0(X)$ quando $n \rightarrow \infty$. Assim, Γ é contínua.

Por outro lado, se $x^\lambda \in BC_h^0$ é uma solução da equação $\lambda \Gamma(x^\lambda) = x^\lambda$, para $0 < \lambda < 1$, encontramos que $\|x_0^\lambda\|_B \leq \|(\Gamma x^\lambda)_0\| \leq N_p$. Repetindo as estimativas da prova do Teorema 3.4 e usando a notação $N_g = \sup\{\|g(0, p(\psi))\| : \psi \in B^{n+1}\}$, para $t \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \|x^\lambda(t)\| &\leq NHN_p + \tilde{N}(N_g + \|g(0, p(\varphi, x_{t_1}^\lambda, \dots, x_{t_n}^\lambda))\|) \\ &\quad + \int_0^t (Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s)) W((K + M) \|x^\lambda\|_{BC_h} h(s)) ds. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\frac{\|x^\lambda(t)\|}{h(t)} \leq \frac{NHN_p + \tilde{N}(N_g + N_g)}{h(t)} + \frac{1}{h(t)} \int_0^t \gamma(s) W((K + M) \|x^\lambda\|_{BC_h} h(s)) ds$$

e

$$\begin{aligned} \|x^\lambda\|_{BC_h} &\leq N_p(M + NH) + \tilde{N}(N_g + N_g) \\ &\quad + \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \gamma(s) W((K + M) \|x^\lambda\|_{BC_h} h(s)) ds. \end{aligned}$$

Se assumirmos que o conjunto $\{\|x^\lambda\|_{\mathcal{BC}_h} : 0 < \lambda < 1\}$ é não limitado, podemos tomar uma sequência $r^n : \|x^{\lambda_n}\|_{\mathcal{BC}_h}, 0 < \lambda_n < 1$, com $r^n \rightarrow \infty$, e obter que

$$1 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} \sup_{t \geq 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \gamma(s) W((K+M)rh(s)) ds,$$

o que é um absurdo. Assim, o conjunto $\{\|x^\lambda\|_{\mathcal{BC}_h} : 0 < \lambda < 1\}$ é limitado.

Vamos provar agora que $\Gamma(B_r)$ é relativamente compacto no espaço $\mathcal{BC}_h^0$ para cada $r > 0$, onde $B_r = B_r(0, \mathcal{BC}_h^0)$. Como p é completamente contínua, é suficiente mostrar que $\Gamma(B_r)|_J$ é relativamente compacto em $C_h^0(X)$. Vejamos agora que $\{\frac{\Gamma x}{h} : x \in B_r\}$ é equicontínuo sobre $[0, \infty)$. Como $\{\Gamma x : x \in B_r\}$ é limitado sobre intervalos limitados, o argumento usado na demonstração do Teorema 3.4 também serve para mostrar que $\{\frac{1}{h}\Gamma x : x \in B_r\}$ é equicontínuo sobre intervalos do tipo $[0, t_0]$. Mais ainda, vemos de (3.17) que $\frac{\|\Gamma x(t)\|}{h(t)} \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, uniformemente para x em subconjuntos limitados de $\mathcal{BC}_h^0$, o que nos permite inferir que para cada $\epsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que $\|\frac{\Gamma x(t)}{h(t)}\| \leq \epsilon$, para todo $x \in B_r$ e todo $t \geq t_0$. Estas duas propriedades implicam a equicontinuidade de $\{\frac{\Gamma x}{h} : x \in B_r\}$.

Aplicando as hipóteses (a) e (b) e argüindo como na prova do Teorema 3.4, podemos concluir que $\{\Gamma x(t) : x \in B_r\}$ é relativamente compacto em X .

Portanto, o conjunto $\{\frac{\Gamma x}{h} : x \in B_r\}$ cumpre as condições do Lema 1.42 o que implica que este conjunto é relativamente compacto em $C_0(X)$ e, conseqüentemente que $\Gamma(B_r)|_J$ é relativamente compacto em $C_h^0(X)$. Finalmente, a existência de uma solução fraca de (3.1)-(3.3) decorre do Lema 1.45. ■

3.4 Soluções Assintoticamente Quase Periódicas

Nesta seção, estudaremos a existência de soluções assintoticamente quase periódicas de (3.1)-(3.3). Continuaremos assumindo as mesmas condições e notações estabelecidas para as funções cosseno, seno, $m_f(\cdot)$, $m_g(\cdot)$, p e q na seção 3.3. Denotaremos por $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ o espaço de Banach formado por funções contínuas e limitadas de $[0, \infty)$ em X munido com a norma de convergência uniforme. Modificamos levemente a definição do espaço $AP(X)$, introduzido no Capítulo 1. Especificamente, $AP(X)$ é o espaço formado por funções $x : [0, \infty) \rightarrow X$ que são quase periódicas sobre $[0, \infty)$, munido com a norma da convergência uniforme. Nesta seção $\mathcal{BC}_b$ denotará o espaço formado por funções $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ tal que $u_0 \in \mathcal{B}$ e $u|_J \in C_b(X)$ munido da norma $\|u\|_{\mathcal{BC}_b} := \|u_0\|_{\mathcal{B}} + \|u|_J\|_\infty$ e $AP_{\mathcal{B}}(X)$ e $AAP_{\mathcal{B}}(X)$ serão os subespaços de $\mathcal{BC}_b$ formado pelas

funções u tais que $u|_J \in AP(X)$ e $u|_J \in AAP(X)$ respectivamente.

Definição 3.13 *Sejam Z, W espaços de Banach. Dizemos que uma função fortemente contínua $F : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(Z, W)$ é fortemente quase periódica se para cada $z \in Z$ a função $F(\cdot)z : [0, \infty) \rightarrow W$ é quase periódica. Dizemos ainda que, F é uniformemente quase periódica, se F é quase periódica na norma em $\mathcal{L}(Z, W)$. Similarmente, definimos os conceitos de função fortemente assintoticamente quase periódica e uniformemente assintoticamente quase periódica.*

Como referências, citamos [30] e [27] para caracterizações de funções seno e cosseno quase periódicas, respectivamente. A saber, Hernán e Vásquez [30] provaram o seguinte resultado.

Lema 3.14 *[30, Theorem 3.2] A função $S(\cdot)$ é fortemente quase periódica se, e somente se, $C(\cdot)$ é fortemente quase periódica e $0 \notin \sigma(A)$.*

Aplicando o Lema 3.14, podemos obter facilmente um resultado mais simples que o Lema anterior.

Lema 3.15 *Se a função $C(\cdot)$ é uniformemente limitada e $S(\cdot)$ é fortemente quase periódica, então a função cosseno $C(\cdot)$ é fortemente quase periódica.*

O próximo resultado é consequência direta do Teorema 1.43.

Lema 3.16 *Sejam Z, W espaços de Banach, $U \subset Z$ compacto e $F : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(Z, W)$ contínua e limitada. Se F é fortemente quase periódica, então $V = \{F(\cdot)z : z \in U\}$ é relativamente compacto em $AP(W)$.*

Para a função seno, podemos obter o resultado anterior com condições mais fracas.

Proposição 3.17 *Seja $U \subset X$ e assumamos que $S(\cdot)$ é fortemente quase periódica. Se o conjunto $\{S(t)x : x \in U, t \geq 0\}$ é relativamente compacto em X , então $V = \{S(\cdot)x : x \in U\}$ é relativamente compacto em $AP(X)$.*

Prova: Pelo Lema 3.16, inferimos que o conjunto $V_\delta = \{S(\cdot)S(\delta)x : x \in U\}$, $\delta > 0$, é relativamente compacto em $AP(X)$. Por outro lado, como $\{S(t)x : x \in U, t \geq 0\}$ é relativamente compacto em X , para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|(I - C(s))S(t)x\| \leq \epsilon$ para todo $0 \leq s \leq \delta$, $x \in U$ e todo $t \geq 0$. Segue-se que

$$\|S(t)x - \frac{1}{\delta}S(t)S(\delta)x\| = \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (I - C(s))S(t)x ds \right\| \leq \epsilon, \quad x \in U, \quad t \geq 0.$$

Agora, da decomposição

$$S(t)x = \frac{1}{\delta}S(t)S(\delta)x + \left(S(t)x - \frac{1}{\delta}S(t)S(\delta)x \right)$$

concluimos que

$$V \subseteq \frac{1}{\delta}V_\delta + B_\epsilon(0, C_b(X)),$$

o que prova que V é totalmente limitado em $AP(X)$. A prova está completa. ■

Em relação a compacidade do conjunto $\{S(t)x : x \in U, t \geq 0\}$ estabelecemos o seguinte resultado.

Proposição 3.18 *Seja $U \subset X$ e suponha que $S(\cdot)$ é limitada e fortemente quase periódica. Se uma das seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) U é relativamente compacto;
- (b) $S(t)$ é compacto para cada $t \geq 0$, $S(\cdot)$ é uniformemente quase periódica e U é limitado.

Então $V = \{S(t)x : x \in U, t \geq 0\}$ é relativamente compacto em X .

Prova: Suponhamos que (b) é verificada e seja $S(t_n)x_n$ uma sequência em V . Como $S(\cdot)$ é uniformemente quase periódica, podemos assumir que existe $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que $S(t_n) \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(X)$. Como cada $S(t_n)$ é compacto concluimos que T é compacto. Portanto, podemos assumir que $Tx_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$, para algum $y \in X$. Assim

$$\begin{aligned} \|S(t_n)x_n - y\| &\leq \|S(t_n)x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - y\| \\ &\leq \|S(t_n) - T\| \|x_n\| + \|Tx_n - y\|, \end{aligned}$$

o que prova que V é relativamente compacto em X . A prova de (a) é similar. ■

Da teoria de funções assintoticamente quase periódicas sabemos que cada $f \in AAP(X)$ possui uma única decomposição $f = f_1 + f_2$, com $f_1 \in AP(X)$ e $f_2 \in C_0(X)$ (ver [43, Proposition 5.1]). Portanto, do Lema 1.42 e dos Teoremas 1.43 e 1.44 temos o seguinte resultado.

Lema 3.19 *Um conjunto $V \subseteq AAP(X)$ é relativamente compacto em $AAP(X)$ se, e somente se, $V_1 = \{f_1 : f \in V\}$ é relativamente compacto em $AP(X)$ e $V_2 = \{f_2 : f \in V\}$ é relativamente compacto em $C_0(X)$.*

A seguinte propriedade será freqüentemente usada nos próximos resultados.

Proposição 3.20 *Sejam $(Z_i, \|\cdot\|_{Z_i})$, $i = 1, 2, 3$, espaços de Banach e $V \subseteq \mathcal{L}^1([0, \infty), Z_1)$. Suponha que $F_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(Z_1, Z_2)$ e $F_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(Z_2, Z_3)$ são funções fortemente contínuas e que as seguintes condições são verificadas:*

(a) $\int_L^\infty F_1(s)x(s)ds \rightarrow 0$ em Z_2 quando $L \rightarrow \infty$, uniformemente para $x \in V$;

(b) Para cada $t \geq 0$, o conjunto $\{x(s) : x \in V, 0 \leq s \leq t\}$ é relativamente compacto em Z_1 .

Então, o conjunto $W = \bigcup_{0 \leq t \leq \infty} W(t)$, onde $W(t) = \{\int_0^t F_1(s)x(s)ds : x \in V\}$, $t \geq 0$, é relativamente compacto em Z_2 . Além disso, se F_2 é uniformemente limitado sobre $[0, \infty)$ e para todo $t \in [0, \infty)$, $\int_t^{t+h} F_1(s)x(s)ds \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$, uniformemente para $x \in V$, então o conjunto de funções $U = \{z_x : x \in V\}$, onde $z_x(t) = F_2(t) \int_t^\infty F_1(s)x(s)ds$, é relativamente compacto em $C_0(Z_3)$.

Prova: Afim de estabelecer a primeira afirmação, vamos tomar $t \geq 0$. Pela condição (b) existe um subconjunto compacto K_t de Z_1 tal que $\{x(s) : x \in V, s \in [0, t]\} \subseteq K_t$. Como F_1 é fortemente contínua temos que $\tilde{K}_t = \{F_1(s)y : y \in K_t, 0 \leq s \leq t\}$ é relativamente compacto em Z_2 . Por outro lado, para cada $\epsilon > 0$ existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\left\| \int_L^\infty F_1(s)x(s)ds \right\|_{Z_2} \leq \epsilon, \quad x \in V.$$

Pelo Lema 2.17 obtemos que $W(L) \subseteq \overline{L \operatorname{co}(\tilde{K}_L)}$. Agora, como $\overline{\operatorname{co}(\tilde{K}_L)}$ é compacto e $W \subseteq \overline{L \operatorname{co}(\tilde{K}_L)} + B_\epsilon(0, Z_2)$, inferimos que W é relativamente compacto em Z_2 .

Para mostrar a última afirmação, aplicaremos o Lema 1.42. A hipótese (b) do Lema 1.42 é consequência de (a) e do fato que F_2 é uniformemente limitada. Além disso, procedendo como no início da prova é fácil ver que para cada $t \geq 0$ o conjunto $W_1(t) = \{\int_t^\infty F_1(s)x(s)ds : x \in V\}$ é relativamente compacto. Assim, o conjunto $U(t) = \{F_2(t) \int_t^\infty F_1(s)x(s)ds : x \in V\}$ é relativamente compacto em Z_3 .

Finalmente provaremos que U é equicontínuo. Para este fim, fixemos $t \geq 0$. Para $s \geq 0$ é claro que

$$\begin{aligned} & \left\| F_2(t+s) \int_{t+s}^\infty F_1(\xi)x(\xi) d\xi - F_2(t) \int_t^\infty F_1(\xi)x(\xi) d\xi \right\| \\ & \leq \sup\{\|F_2(t+s)z - F_2(t)z\| : z \in W_1(t)\} + \|F_2(t+s)\| \left\| \int_t^{t+s} F_1(\xi)x(\xi) d\xi \right\|. \end{aligned}$$

Como $W_1(t)$ é relativamente compacto, o conjunto de funções $\{F_2(\cdot)z : z \in W_1(t)\}$ é equicontínuo sobre $[0, t]$, o que nos permite concluir que U é equicontínuo à direita de $t \in [0, \infty)$. Usando um argumento similar, podemos mostrar que U é equicontínuo à esquerda de $t \in [0, \infty)$. Portanto U é equicontínuo. Finalmente, pelo Lema 1.42, U é relativamente compacto em $C_0(Z_3)$. ■

Nos próximos resultados, para uma função integrável $x : [0, \infty) \rightarrow X$, representaremos por $z_x, y_x : [0, \infty) \rightarrow X$ as funções definidas pelas expressões

$$z_x(t) = \int_0^t C(t-s)x(s) ds \quad \text{e} \quad y_x(t) = \int_0^t S(t-s)x(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Corolário 3.21 *Assuma que $S(\cdot)$ é fortemente quase periódica e que $V \subseteq \mathcal{L}^1([0, \infty), X)$ é um conjunto com as seguintes propriedades:*

- (a) $\int_L^\infty \|x(s)\| ds \rightarrow 0$ quando $L \rightarrow \infty$, uniformemente para $x \in V$;
- (b) $\int_t^{t+s} \|x(\xi)\| d\xi \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow 0$, uniformemente para $x \in V$ e $t \geq 0$;
- (c) Para cada $t \geq 0$, o conjunto $U(t) = \{x(s) : 0 \leq s \leq t, x \in V\}$ é relativamente compacto.

Então os conjuntos $\{y_x : x \in V\}$ e $\{z_x : x \in V\}$ são relativamente compactos em $AAP(X)$.

Prova: Para cada $x \in V$, podemos escrever

$$\begin{aligned} y_x(t) &= S(t) \int_0^t C(s)x(s) ds + C(t) \int_0^t S(s)x(s) ds \\ &= S(t) \int_0^\infty C(s)x(s) ds - S(t) \int_t^\infty C(s)x(s) ds \\ &\quad - C(t) \int_0^\infty S(s)x(s) ds + C(t) \int_t^\infty S(s)x(s) ds. \end{aligned}$$

Do Lema 3.15, obtemos que $C(\cdot)$ é fortemente quase periódica. Por isso, o primeiro e terceiro termo no lado direito da igualdade acima definem funções quase periódicas, enquanto que o segundo e quarto termo são funções que se anulam no infinito, pois $S(t)$, $C(t)$ são uniformemente limitadas sobre $[0, \infty)$. Assim, $y_x \in AAP(X)$.

Da Proposição 3.20, as integrais $\int_0^\infty C(s)x(s)ds$ e $\int_0^\infty S(s)x(s)ds$, $x \in V$, estão incluídas em um subconjunto compacto de X o que, do Lema 3.16, nos permite concluir que o conjunto de funções

$$\{S(\cdot) \int_0^\infty C(s)x(s)ds - C(\cdot) \int_0^\infty S(s)x(s)ds : x \in V\}$$

é relativamente compacto em $AP(X)$. Além disso, da mesma Proposição inferimos que o conjunto de funções

$$\{t \rightarrow C(t) \int_t^\infty S(s)x(s)ds - S(t) \int_t^\infty C(s)x(s)ds : x \in V\}$$

é relativamente compacto em $C_0(X)$. Isto mostra que $\{y_x : x \in V\}$ é relativamente compacto em $AAP(X)$.

Agora, provaremos que o conjunto $\{z_x : x \in V\}$ é relativamente compacto em $AAP(X)$. Para provar que $z_x \in AAP(X)$, do Teorema 1.34 é suficiente provar que z_x é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}$. Primeiramente, fixemos $L > 0$. Como $C(\cdot)$ é fortemente quase periódica, para cada $x \in X$, a função $t \rightarrow C(t)x$ é uniformemente contínua sobre $\mathbb{R}$.

Isto nos permite concluir que

$$\|C(t+s)x - C(t)x\| \rightarrow 0, x \in U(L),$$

quando $s \rightarrow 0$ e que a convergência é uniforme para $t \in [0, \infty)$ e $x \in U(L)$. De fato, se a propriedade é falsa, existem $x \in X$ e sequências t_n, s_n em $\mathbb{R}$ e $x_n \in U(L)$ tais que $s_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow x$ e

$$\|C(t_n + s_n)x_n - C(t_n)x_n\| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.18)$$

Por outro lado, para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que

$$\begin{aligned} \|C(t_n + s_n)x_n - C(t_n)x_n\| &\leq \|C(t_n + s_n)(x_n - x)\| + \|C(t_n + s_n)x - C(t_n)x\| \\ &\quad + \|C(t_n)(x_n - x)\| \\ &\leq 2N \|x_n - x\| + \|C(t_n + s_n)x - C(t_n)x\|, \end{aligned}$$

o que contradiz (3.18). Seja $\varepsilon > 0$ e fixemos $L > 0$ tal que $2N \int_L^\infty \|x(\xi)\| d\xi < \varepsilon$. Para $x \in V$ e $t \geq L$ temos que

$$\begin{aligned} \|z_x(t+s) - z_x(t)\| &\leq \int_0^t \|C(t+s-\xi)x(\xi) - C(t-\xi)x(\xi)\| d\xi \\ &\quad + \left\| \int_t^{t+s} C(t+s-\xi)x(\xi) d\xi \right\| \\ &\leq \int_0^L \sup_{\substack{t \geq 0 \\ x \in V}} \|C(t+s-\xi)x(\xi) - C(t-\xi)x(\xi)\| d\xi \\ &\quad + 2N \int_L^\infty \|x(\xi)\| d\xi + N \int_t^{t+s} \|x(\xi)\| d\xi. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|z_x(t+s) - z_x(t)\| &\leq \int_0^L \sup_{\substack{t \geq 0 \\ x \in U(L)}} \|C(t+s-\xi)x - C(t-\xi)x\| d\xi + \epsilon \\ &\quad + N \int_t^{t+s} \|x(\xi)\| d\xi, \quad t \geq L. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Similarmente, para $x \in V$ e $t \in [0, L]$ temos que

$$\begin{aligned} \|z_x(t+s) - z_x(t)\| &\leq \int_0^t \sup_{\substack{\theta \in [0, t] \\ x \in U(L)}} \|C(\theta+s)x - C(\theta)x\| d\theta \\ &\quad + N \int_t^{t+s} \|x(\xi)\| d\xi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Das condições (a) e (b) e desigualdades (3.19), (3.20) concluímos que $z_x(\cdot)$ é uniformemente contínua sobre $[0, \infty)$. Assim, $z_x \in AAP(X)$. Além disso, as estimativas (3.19), (3.20) mostram que as funções z_x , $x \in V$, são uniformemente equicontínuas sobre $[0, \infty)$.

Por outro lado, segue da Proposição 3.20 que $\{z_x(t) : x \in V\}$ é relativamente compacto, para todo $t \geq 0$. Finalmente, vamos estabelecer que $\{z_x : x \in V\}$ é equi-assintoticamente quase periódica. Dado $\epsilon > 0$, aplicando (a) podemos fixar $L_\epsilon > 0$ tal que $\int_{L_\epsilon}^\infty \|x(s)\| ds \leq \epsilon/6N$, para todo $x \in V$. Além disso, pelo Lema 3.16 e Teorema 1.43, o conjunto $\{C(\cdot)x : x \in U(L_\epsilon)\}$ é equi-quase periódica. Assim, existe um conjunto relativamente denso $P_\epsilon \subseteq [0, \infty)$ tal que

$$\|C(\xi + \tau)x - C(\xi)x\| \leq \frac{\epsilon}{3L_\epsilon}, \quad \xi \geq 0, \quad x \in U(L_\epsilon), \quad \tau \in P_\epsilon.$$

Portanto, para $t \geq L_\epsilon$ e $\tau \in P_\epsilon$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|z_x(t+\tau) - z_x(t)\| &\leq \int_0^t \|C(t+\tau-s)x(s) - C(t-s)x(s)\| ds \\ &\quad + \left\| \int_t^{t+\tau} C(t+\tau-s)x(s) ds \right\| \\ &\leq \int_0^{L_\epsilon} \|C(t+\tau-s)x(s) - C(t-s)x(s)\| ds \\ &\quad + \int_{L_\epsilon}^t \|C(t+\tau-s)x(s) - C(t-s)x(s)\| ds \\ &\quad + N \int_t^{t+\tau} \|x(s)\| ds \\ &\leq \int_0^{L_\epsilon} \|C(t+\tau-s)x(s) - C(t-s)x(s)\| ds \\ &\quad + 3N \int_{L_\epsilon}^\infty \|x(s)\| ds \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

o que mostra que $\{z_x : x \in V\}$ é equi-assintoticamente quase periódica. Completamos a demonstração aplicando o Teorema 1.44 sobre o conjunto $\{z_x : x \in V\}$. ■

Procedendo como na prova do Corolário 3.21, podemos estabelecer outro resultado de compacidade para o conjunto $\{y_x : x \in V\}$.

Corolário 3.22 *Assuma que $S(\cdot)$ é uniformemente quase periódica, que $V \subset \mathcal{L}^1([0, \infty), X)$ é uniformemente limitado e as seguintes propriedades:*

- (a) $\int_L^\infty \|x(s)\| ds \rightarrow 0$, quando $L \rightarrow \infty$, uniformemente para $x \in V$;
- (b) $\int_t^{t+s} \|x(\xi)\| d\xi \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow 0$, uniformemente para $t \geq 0$ e $x \in V$;
- (c) Para cada $t, \delta \geq 0$, o conjunto $\{S(\delta)x(s) : 0 \leq s \leq t, x \in V\}$ é relativamente compacto em X .

Então $\{y_x : x \in V\}$ é relativamente compacto em $AAP(X)$.

Prova: Da prova do Corolário 3.21, sabemos que

$$\begin{aligned} y_x(t) &= S(t) \int_0^t C(s)x(s) ds - C(t) \int_0^t S(s)x(s) ds \\ &= S(t) \int_0^\infty C(s)x(s) ds - S(t) \int_t^\infty C(s)x(s) ds \\ &\quad - C(t) \int_0^\infty S(s)x(s) ds + C(t) \int_t^\infty S(s)x(s) ds \\ &= \sum_{i=1}^4 y_x^i(t). \end{aligned}$$

Primeiramente, vamos provar que o conjunto

$$U = \left\{ \int_t^\infty S(s)x(s)ds : x \in V, t \geq 0 \right\}$$

é relativamente compacto em X . Pela propriedade (a) é suficiente mostrar que para cada $L > 0$ o conjunto $U = \left\{ \int_t^L S(s)x(s)ds : x \in V, t \in [0, L] \right\}$ é relativamente compacto em X . Para mostrar isto, fixemos $L > 0$ e pontos $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_n = L$ com $s_{i+1} - s_i < \varepsilon$. Seja $t \in [0, L]$ e fixemos s_i tal que $s_i \leq t \leq s_{i+1}$. Se $\rho = \sup_{x \in V} \int_0^\infty \|x(s)\| ds$, nestas condições temos que

$$\int_t^L S(s)x(s)ds = \int_t^{s_{i+1}} S(s)x(s)ds + \int_{s_{i+1}}^L S(s)x(s)ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^{s_{i+1}} (S(s) - S(s_i))x(s)ds + \int_t^{s_{i+1}} S(s_i)x(s)ds \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} (S(s) - S(s_j))x(s)ds + \sum_{j=i+1}^{n-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} S(s_j)x(s)ds \\
&\in 2N\varepsilon B_\rho(0, X) + (s_{i+1} - t) \overline{\text{co}(\{S(s_i)x(s) : s \in [0, L], x \in V\})} \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{n-1} (s_{j+1} - s_j) \overline{\text{co}(\{S(s_j)x(s) : s \in [0, L], x \in V\})} \\
&\subset 2N\varepsilon B_\rho(0, X) + [0, L] \times \overline{\text{co}(\{S(s_i)x(s) : s \in [0, L], x \in V\})} \\
&\quad + \sum_{j=i+1}^{n-1} [0, L] \times \overline{\text{co}(\{S(s_j)x(s) : s \in [0, L], x \in V\})},
\end{aligned}$$

o que prova nossa afirmação, pois os números s_i não dependem de t .

Procedendo como na prova do Corolário 3.21 obtemos que $\{y_x^3 : x \in V\}$ é relativamente compacto em $AAP(X)$ e que $\{y_x^4 : x \in V\}$ é relativamente compacto em $C_0(X)$.

Das condições (a), (c) e a relação,

$$S(t) \int_\sigma^\infty C(s)x(s)ds = \int_\sigma^L C(s)S(t)x(s)ds + S(t) \int_L^\infty C(s)x(s)ds$$

concluimos que os conjuntos $\{y_x^1(t) : x \in V\}$, $\{y_x^2(t) : x \in V\}$ são relativamente compactos em X . É fácil ver agora, a partir do Lema 1.42, que $\{y_x^2 : x \in V\}$ é relativamente compacto em $C_0(X)$.

Finalmente, como $S(\cdot)$ é uniformemente quase periódica temos que $\{y_x^1 : x \in V\}$ é um conjunto equi-assintoticamente quase periódico. Mais ainda, é obvio que este conjunto é uniformemente contínuo sobre $[0, \infty)$. Portanto, $\{y_x^1 : x \in V\}$ é relativamente compacto em $AAP(X)$. A prova está agora completa. ■

Agora estamos em condições para estabelecer o resultado principal desta seção. Neste resultado assumimos que $p(\cdot) : B^{n+1} \rightarrow B$, $q(\cdot) : B^{n+1} \rightarrow X$ e $p(\cdot)(0) : B^{n+1} \rightarrow E$ são funções contínuas e limitadas. Como antes, N_p e N_q denotam os limites superiores de $\|p(\cdot)\|_B$ and $\|q(\cdot)\|$, respectivamente.

Teorema 3.23 *Assuma que $S(\cdot)$ é uniformemente quase periódica e que as condições (H_1) e (H_2) são verificadas com funções $m_f(\cdot), m_g(\cdot) \in \mathcal{L}^1([0, \infty) : X)$. Assuma, além disso, que as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) *Para cada $t, t' > 0$ e cada constante $r \geq 0$ os conjuntos $\{S(t')f(s, \psi) : 0 \leq s \leq t, \|\psi\|_B \leq r\}$ e $\{g(s, \psi) : 0 \leq s \leq t, \|\psi\|_B \leq r\}$ são relativamente compacto em X ;*
- (b) *A função $p(\cdot)$ é limitada e completamente contínua;*

(c) A função $q(\cdot)$ é limitada e para cada $r > 0$ o conjunto $\{S(t)q(\psi) : t \geq 0, \psi \in B_r(0, \mathcal{B}^{n+1})\}$ é relativamente compacto em X .

Se

$$\int_0^\infty K(Nm_g(s) + \tilde{N}m_f(s))ds < \int_c^\infty \frac{ds}{W(s)}, \quad (3.21)$$

então existe uma solução fraca $u(\cdot) \in AAP_{\mathcal{B}}(X)$ de (3.1)-(3.3).

Prova: Para cada $x \in AAP_{\mathcal{B}}(X)$ definimos $\Gamma x \in BC$ por

$$\Gamma x(t) = \begin{cases} p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})(t), & t \in (-\infty, 0] \\ C(t)p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})(0) + S(t)[q(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) + g(0, p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}))] \\ - \int_0^t C(t-s)g(s, x_s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds, & t \in J. \end{cases} \quad (3.22)$$

Consideremos agora a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ onde $(\Gamma_1 x)_0 = p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})$ e

$$\begin{aligned} \Gamma_1 x(t) &= C(t)p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})(0) + S(t)[q(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) + g(0, p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n}))], & t \in J, \\ \Gamma_2 x(t) &= - \int_0^t C(t-s)g(s, x_s)ds + \int_0^t S(t-s)f(s, x_s)ds, & t \in J. \end{aligned}$$

É óbvio que $\Gamma_1 x \in AAP_{\mathcal{B}}(X)$ e da prova do Corolário 3.21 temos que $\Gamma_2 x \in AAP_{\mathcal{B}}(X)$. Mais ainda, do Lema 3.16 e Corolários 3.21 e 3.22 temos que os conjuntos $\{\Gamma_1 x : x \in B_r(0, AAP_{\mathcal{B}}(X))\}$ e $\{\Gamma_2 x : x \in B_r(0, AAP_{\mathcal{B}}(X))\}$ são relativamente compactos em $AAP_{\mathcal{B}}(X)$.

Seja $x^\lambda \in BC$ uma solução de $x = \lambda \Gamma x$, $\lambda \in (0, 1)$. Das estimativas *a priori* na prova do Teorema 3.4 deduzimos que para cada $T > 0$ existe $M_T > 0$ tal que

$$\|x^\lambda(t)\| \leq M_T, \quad \lambda \in (0, 1), \quad t \in [0, T].$$

Mais ainda, é fácil inferir a partir da prova do Teorema 3.4 e da condição (3.21), que M_T é independente de T . Assim, concluímos que $\{x^\lambda : \lambda \in (0, 1)\}$ é limitado em BC .

Assim, para aplicar o Lema 1.45, falta mostrar que Γ é contínua. Seja $(x^n)_n$ uma sequência em $AAP_{\mathcal{B}}(X)$ que converge a x . Então $S(t-s)f(s, x_s^n) \rightarrow S(t-s)f(s, x_s)$ e $C(t-s)g(s, x_s^n) \rightarrow C(t-s)g(s, x_s)$, quando $n \rightarrow \infty$, para quase todo $s \in [0, t]$. Seja $L = \sup\{\|x\|_{BC_b}, \|x^n\|_{BC_b} : n \in \mathbb{N}\}$ e $\beta = (K + M)L$. Das desigualdades

$$\begin{aligned} \|C(t-s)g(s, x_s^n) - C(t-s)g(s, x_s)\| &\leq 2Nm_g(s)W_g(\beta), \\ \|S(t-s)f(s, x_s^n) - S(t-s)f(s, x_s)\| &\leq 2\tilde{N}m_f(s)W_f(\beta), \end{aligned}$$

e usando a integrabilidade de $m_f(\cdot)$ e $m_g(\cdot)$ concluímos que $\|\Gamma x^n - \Gamma x\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, e que esta convergência é uniforme sobre $[0, \infty)$. Como $\|p(\varphi, x_{t_1}^k, \dots, x_{t_n}^k) - p(\varphi, x_{t_1}, \dots, x_{t_n})\|_B \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ concluímos que Γ é uma aplicação contínua.

Finalmente, pelo Lema 1.45 existe um ponto fixo para Γ e portanto, uma solução assintoticamente quase periódica para (3.1)-(3.3). A prova está completa. ■

Apresentamos agora um resultado de regularidade para soluções assintoticamente quase periódicas fracas de (3.1)-(3.3). Para isto, precisamos estabelecer os seguintes resultados.

Lema 3.24 [43, Example 5.1] *Seja X um espaço de Banach, $f \in C(\mathbb{R}; X)$ e $G(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ um grupo tal que, para cada $x \in X$, $t \rightarrow G(t)x$ é quase periódica em X . Se $\int_0^\infty \|f(s)\| ds < \infty$, então*

$$u(t) = G(t)u(0) + \int_0^t G(t-s)f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

é assintoticamente quase periódica em X .

Lema 3.25 *Assuma que $S(\cdot)$ é quase periódica em X . Então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- (a) $S(\cdot)x \in AP(E)$ para cada $x \in X$ (aqui, E está munido com a topologia induzida por $\|\cdot\|_E$).
- (b) Se $AS(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E, X)$ é uniformemente limitado, então o grupo G é quase periódico. Além disso, se para uma função $u : [0, \infty) \rightarrow X$ existe $y \in D(A)$ tal que $u - Ay \in \mathcal{L}^1([0, \infty), X)$, então a função w_1 dada por $w_1(t) = \int_0^t C(t-s)u(s)ds$ é assintoticamente quase periódica em X e se para uma função $v : [0, \infty) \rightarrow E$ existe $z \in E$ tal que $v - z \in \mathcal{L}^1([0, \infty), E)$, então a função w_2 dada por $w_2(t) = \int_0^t AS(t-s)v(s)ds$ é assintoticamente quase periódica em X .

Prova: Seja $x \in X$. Como $C(\cdot)x$ e $S(\cdot)x$ são funções quase periódicas em X , do Lema 1.32, temos que $(C(\cdot)x, S(\cdot)x)$ é quase periódica em $X \times X$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe um conjunto relativamente denso P_ϵ tal que

$$\|C(t+\tau)x - C(t)x\| + \|S(t+\tau)x - S(t)x\| \leq \epsilon, \quad t \geq 0, \quad \tau \in P_\epsilon.$$

Usando que $C(\cdot)$ é uniformemente limitado e

$$C(t+s)x = C(t)C(s)x + AS(t)S(s)x \tag{3.23}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 \|S(t+\tau)x - S(t)x\|_E &\leq \|S(t+\tau)x - S(t)x\| + \sup_{0 \leq h \leq 1} \|AS(h)[S(t+\tau)x - S(t)x]\| \\
 &\leq \epsilon + \sup_{0 \leq h \leq 1} \|C(t+h+\tau)x - C(h)C(t+\tau)x + C(t)C(h)x - C(t+h)x\| \\
 &\leq \epsilon + \sup_{0 \leq h \leq 1} \|C(h)\| \|C(t+\tau)x - C(t)x\| + \sup_{0 \leq h \leq 1} \|C(t+h+\tau)x - C(t+h)x\| \\
 &\leq (N+2)\epsilon,
 \end{aligned}$$

para todo $t \geq 0$ e $\tau \in P_\epsilon$, o que prova a afirmação (a).

Como a função $S(\cdot)$ é quase periódica em X , pelo Lema 3.15, $C(\cdot)$ é quase periódica em X . Além disso, para todo $y \in E$ obtemos que

$$\|AS(t+h)y - AS(t)y\| \leq \|AS(t)\|_{\mathcal{L}(E,X)} \|C(h) - I\|_E \|y\| + \|C(t)\| \|AS(h)y\|, \quad t \geq 0.$$

Se assumirmos que $\|AS(t)\|_{\mathcal{L}(E,X)}$ é limitado sobre $\mathbb{R}$, segue da desigualdade acima, que a função $AS(\cdot)y$ é uniformemente contínua sobre $[0, \infty)$ e, desde que $AS(\cdot)y$ é a derivada da função quase periódica $C(t)y$, pelo Teorema 1.34, inferimos que $AS(\cdot)y$ é quase periódica em X . Assim, concluímos que o grupo G dado preliminarmente (ver página 15) é uma aplicação quase periódica.

Finalmente, desde que as funções $\begin{bmatrix} v-z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} - \mathcal{A} \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{L}^1([0, \infty), E \times X)$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ u-Ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} - \mathcal{A} \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}^1([0, \infty), E \times X)$ as afirmações sobre w_1 e w_2 são consequências do Lema 3.24. ■

Consideramos no próximo resultado que $AS(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E, X)$ fortemente contínua.

Proposição 3.26 *Assuma que $S(\cdot)$ é quase periódica em X e que a aplicação $t \rightarrow AS(t)$ é uniformemente limitada de $\mathbb{R}$ sobre $\mathcal{L}(E, X)$. Seja $u(\cdot)$ uma solução fraca de (3.1)-(3.3) assintoticamente quase periódica em X . Suponha que $p(\varphi, u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_n}) \in E$ e que as condições seguintes são satisfeitas:*

- (a) *Existe $y \in D(A)$ tal que a função $[0, \infty) \rightarrow X$, $t \rightarrow f(t, u_t) - Ay$, é integrável;*
- (b) *A função $[0, \infty) \rightarrow X$, $t \rightarrow g(t, u_t)$, é assintoticamente quase periódica em X , $g(t, u_t) \in E$ e existe $z \in E$ tal que $s \rightarrow g(s, u_s) - z \in \mathcal{L}^1([0, \infty), E)$.*

Então $u|_J$ é continuamente diferenciável e sua derivada é assintoticamente quase periódica em X .

Prova: De nossas hipóteses e Lema 3.7 obtemos que u é continuamente diferenciável e que

$$\begin{aligned} u'(t) &= AS(t)p(\varphi, u_{t_1}, \dots, u_{t_n})(0) + C(t)(g(\varphi, u_{t_1}, \dots, u_{t_n}) + g(0, p(\varphi, u_{t_1}, \dots, u_{t_n}))) \\ &\quad - g(t, u_t) - \int_0^t AS(t-s)g(s, u_s)ds + \int_0^t C(t-s)f(s, u_s)ds, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de integrabilidade de $f(s, u_s)$, $g(s, u_s)$ e aplicando o Lema 3.25, concluímos a prova da proposição. ■

3.5 Exemplos

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u(t, \xi)}{\partial t} + \int_{-\infty}^0 a(s)u(t+s, \xi)ds \right] \\ = \frac{\partial^2 u(t, \xi)}{\partial \xi^2} + \int_{-\infty}^0 b(s)u(t+s, \xi)ds, \quad (t, \xi) \in I \times [0, \pi], \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \in I, \quad (3.25)$$

$$u(\theta, \xi) = \alpha \varphi(\theta, \xi) + \sum_{i=1}^n \alpha_i u(t_i + \theta, \xi), \quad (\theta, \xi) \in (-\infty, 0] \times [0, \pi], \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial u(\theta, \xi)}{\partial t} = \int_{-\infty}^0 c(s)\varphi(s, \xi)ds + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^0 c_i(s)u(t_i + s, \xi)ds, \quad \xi \in [0, \pi], \quad (3.27)$$

onde $I = (-\infty, a]$, $\alpha, \alpha_i \in \mathbb{R}$ os números $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < a$ são previamente fixados e as funções a , b , c e c_i são contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mais ainda, assumiremos que as seguintes expressões são números reais.

$$\begin{aligned} N_a &= \left(\int_{-\infty}^0 \frac{a^2(\theta)}{h(\theta)} d\theta \right)^{1/2}, \\ N_b &= \left(\int_{-\infty}^0 \frac{b^2(\theta)}{h(\theta)} d\theta \right)^{1/2}, \\ N_q &= \sum_{i=1}^n \left(\int_{-\infty}^0 \frac{c_i^2(\theta)}{h(\theta)} d\theta \right)^{1/2} + \left(\int_{-\infty}^0 \frac{c^2(\theta)}{h(\theta)} d\theta \right)^{1/2}, \\ N_p &= |\alpha| + \sum_{i=1}^n |\alpha_i|. \end{aligned}$$

Para modelar o sistema anterior como problema de Cauchy abstrato (3.1)-(3.3), consideramos $X = L^2([0, \pi])$ e $\mathcal{B} = L^2(h, X)$, onde h verifica as condições (h-5)-(h-7) na nomenclatura de [19] (ver seção 1.3). Lembramos que nestas condições $\mathcal{B}$ é um espaço com memória amortecida e podemos considerar, no axioma (A), $H = 1$, $K(\cdot)$ e $M(\cdot)$ constantes.

Para alcançar o objetivo acima, consideramos $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, o operador definido por $Af(\xi) = f''(\xi)$ onde

$$D(A) = \{f(\cdot) \in H^2(0, \pi) : f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

Sabemos que A é o gerador infinitesimal de uma família cosseno de operadores fortemente contínuo $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ sobre X . Além disso, A possui espectro discreto, os autovalores são $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, com autovetores associados $z_n(\xi) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \sin(n\xi)$, e as seguintes propriedades são verificadas:

(a) $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de X ,

(b) Se $\varphi \in D(A)$ então $A\varphi = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \langle \varphi, z_n \rangle z_n$,

(c) Para $\varphi \in X$, $C(t)\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nt) \langle \varphi, z_n \rangle z_n$. Segue desta expressão que $\|C(t)\| = 1$ e que

$$S(t)\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} \langle \varphi, z_n \rangle z_n, \quad t \in \mathbb{R}. \text{ Isto implica que } S(t) \text{ é compacto para } t > 0 \text{ e que } \|S(t)\| = 1, \text{ para cada } t \in \mathbb{R}. \text{ Mais ainda, } S(\cdot) \text{ é assintoticamente quase periódica.}$$

Definimos as funções de substituição f, g, p e q por

$$\begin{aligned} f(t, \psi)(\xi) &= \int_{-\infty}^0 a(s) \psi(s, \xi) ds, \\ g(t, \psi)(\xi) &= \int_{-\infty}^0 b(s) \psi(s, \xi) ds, \\ p(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)(\theta, \xi) &= \alpha \psi(\theta, \xi) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(\theta, \xi), \\ q(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)(\xi) &= \int_{-\infty}^0 c(s) \psi(s, \xi) ds + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^0 c_i(s) \psi_i(s, \xi) ds. \end{aligned}$$

É fácil mostrar a partir das nossas hipóteses que as funções anteriores estão bem definidas. Além disso, obtemos que

$$\begin{aligned} \|f(t, \psi_1) - f(t, \psi_2)\| &\leq N_a \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad \psi_i \in \mathcal{B}, \\ \|g(t, \psi_1) - g(t, \psi_2)\| &\leq N_b \|\psi_1 - \psi_2\|_{\mathcal{B}}, \quad \psi_i \in \mathcal{B}, \\ \|p(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1}) - p(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})\|_{\mathcal{B}} &\leq N_p \sum_{i=1}^{n+1} \|\psi_i - \xi_i\|_{\mathcal{B}}, \quad \psi_i, \xi_i \in \mathcal{B}, \\ \|q(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n+1}) - q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1})\| &\leq N_q \sum_{i=1}^{n+1} \|\psi_i - \xi_i\|_{\mathcal{B}}, \quad \psi_i, \xi_i \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

O seguinte resultado é uma consequência direta do Teorema 3.6.

Proposição 3.27 *Assuma que as condições anteriores são verificadas. Se*

$$(K_a + M_a)[\mu(2 + N_a)N_p + aN_a] < 1,$$

então existe uma solução fraca de (3.24)-(3.27) em $[0, a]$.

Agora, passamos a estudar a existência de soluções assintoticamente quase periódicas para o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u(t, \xi)}{\partial t} + \int_{-\infty}^0 a(t, s)u(t + s, \xi)ds \right] \\ = \frac{\partial^2 u(t, \xi)}{\partial \xi^2} + \int_{-\infty}^0 b(t, s)u(t + s, \xi)ds, \quad (t, \xi) \in I \times [0, \pi], \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \in I, \quad (3.29)$$

$$u(\theta, \xi) = \varphi(\theta, \xi), \quad (\theta, \xi) \in (-\infty, 0] \times [0, \pi], \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial u(0, \xi)}{\partial t} = Q(\varphi(0, \xi), u(t_1, \xi), u(t_2, \xi), \dots, u(t_n, \xi)), \quad \xi \in [0, \pi], \quad (3.31)$$

onde $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < a$, $\varphi \in \mathcal{B}$ são fixos e $Q : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada.

Para estudar este exemplo, X , $\mathcal{B}$ e A são como no exemplo anterior. Além disso, assumiremos que as funções a , b são contínuas e que

$$\begin{aligned} m_g(t) &= \left(\int_{-\infty}^0 \frac{a^2(t, \theta)}{h(\theta)} d\theta \right)^{1/2}, \\ m_f(t) &= \left(\int_{-\infty}^0 \frac{b^2(t, \theta)}{h(\theta)} d\theta \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

são funções integráveis sobre $\mathbb{R}$.

Sejam f , g , p , q as funções definidas por

$$\begin{aligned} g(t, \psi)(\xi) &= \int_{-\infty}^0 a(t, s)\psi(s, \xi)ds, \\ f(t, \psi)(\xi) &= \int_{-\infty}^0 b(t, s)\psi(s, \xi)ds, \\ p(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)(\theta, \xi) &= \varphi(\theta, \xi), \\ q(\psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)(\xi) &= Q(\varphi(0, \xi), \psi_1(t_1, \xi), \psi_2(t_2, \xi), \dots, \psi_n(t_n, \xi)). \end{aligned}$$

Nas condições anteriores, $p : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow \mathcal{B}$, $q : \mathcal{B}^{n+1} \rightarrow X$ são funções contínuas, p é completamente contínua e q é limitada. Mais ainda, $\|g(t, \psi)\| \leq m_g(t) \|\psi\|_{\mathcal{B}}$ e $\|f(t, \psi)\| \leq m_f(t) \|\psi\|_{\mathcal{B}}$ para cada $(t, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}$.

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 3.23. Somente observamos que neste caso, $\int_c^\infty \frac{ds}{W_f(s)} = \infty$ para todo $c > 0$.

Proposição 3.28 *Nas condições anteriores, existe uma solução assintoticamente quase periódica de (3.28)-(3.31).*

Referências Bibliográficas

- [1] Balachandran, K.; Park, D. G.; Anthoni, S. M.; Existence of solutions of abstract-nonlinear second-order neutral functional integrodifferential equations. *Comput. Math. Appl.* **46** (2003), no. 8-9, 1313-1324.
- [2] Balachandran, K.; Anthoni, S. M.; Existence of solutions of second order neutral functional-differential equations. *Tamkang J. Math.* **30** (1999), no. 4, 299-309.
- [3] Byszewski, L.; Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem. *J. Math. Anal. Appl.* **162** (2) (1991) 494-505.
- [4] Byszewski, L.; Lakshmikantham, V.; Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space. *Appl. Anal.* **40** (1991), no. 1, 11-19.
- [5] Byszewski, L.; Akca, H.; Existence of solutions of a semilinear functional differential evolution nonlocal problem. *Nonlinear Anal.* **34** (1998), no. 1, 65-72.
- [6] Clément, Ph.; Nohel, J. A.; Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels. *SIAM J. Math. Anal.* **12** (1981), no. 4, 514-535.
- [7] Gurtin, M.E.; Pipkin, A.C.; A general theory of heat conduction with finite wave speed. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **31** (1968), 113-126.
- [8] Hale, J. K.; Lunel, S. M. V.; Introduction to functional-differential equations. *Applied Mathematical Sciences* **99**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [9] Hernández, Eduardo; Existence results for partial neutral functional integrodifferential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.*, **292** (2004), 194-210.

-
- [10] Hernández, Eduardo; Henríquez, H. R.; Existence of periodic solutions of partial neutral functional-differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* **221** (1998), no. 2, 499–522.
 - [11] Hernández, Eduardo; Henríquez, H. R.; Existence results for partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *J. Math. Anal. Appl.* **221** (1998), no. 2, 452–475.
 - [12] Hernández, Eduardo; Existence Results for Partial Neutral Integrodifferential Equations with Unbounded Delay. *J. Math. Anal. Appl.* **292** (2004), no. 1, 194–210.
 - [13] Hernández, Eduardo; Existence results for partial neutral functional differential equations with nonlocal conditions. *Dynam. Systems Appl.* **11** (2002), no. 2, 241–252.
 - [14] Hernández, Eduardo; A Massera type criterion for a partial neutral functional differential equation. *Electron. J. Differential Equations.* **40** (2002), 17 pp. (electronic).
 - [15] Hernández, Eduardo; Regularity of solutions of partial neutral functional differential equations with unbounded delay. *Proyecciones* **21** (2002), no. 1, 65–95.
 - [16] Hernández, Eduardo; Henríquez, H. R.; Rabello, M. Existence of Solutions for Impulsive Partial Neutral Functional Differential Equations Submitted for publication.
 - [17] Hernández, Eduardo; Henríquez, H. R.; A Impulsive Partial Abstract Neutral Differential Equation. To appear in *Appl. Math. Letters*.
 - [18] Hernández, Eduardo; Pelicer, M. L.; Asymptotically Almost Periodic and Almost Periodic Solutions for Partial Neutral Differential Equations. To appear in *Applied Mathematics Letters*. Disponível online 24 maio 2005.
 - [19] Hino, Yoshiyuki; Murakami, Satoru; Naito, Toshiki. Functional-differential equations with infinite delay. *Lecture Notes in Mathematics*, 1473. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
 - [20] Hino, Yoshiyuki; Murakami, Satoru; Yoshizawa, Taro. Existence of Almost periodic solutions of some functional differential equations with infinite delay in a Banach space. *Tôhoku Math. J.*, **49** (1997), 133–147.

- [21] Hino, Yoshiyuki; Murakami, Satoru. Limiting Equations and some Stability Properties for Asymptotically Almost Periodic Functional Differential Equations with Infinite Delay. *Tohoku Math. J.*, **54** (2002), 239-257.
- [22] Lunardi, Alessandra; On the linear heat equation with fading memory. *SIAM J. Math. Anal.* **21** (1990), no. 5, 1213-1224.
- [23] Martin, R. H.; Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Robert E. Krieger Publ. Co., Florida, 1987.
- [24] Miller, R. K.; An integro-differential equation for rigid heat conductors with memory. *J. Math. Anal. Appl.* **66** (1978), no. 2, 313-332.
- [25] Nunziato, Jace W. On heat conduction in materials with memory. *Quart. Appl. Math.* **29** (1971), 187-204.
- [26] Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. *Applied Mathematical Sciences*, **44**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.
- [27] Cioranescu, I.; Characterizations of almost periodic strongly continuous cosine operator functions. *J. Math. Anal. Appl.* **116** (1986), 222-229.
- [28] Fattorini, H. O.; Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces, North-Holland Mathematics Studies, Vol. **108**, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [29] Granas, A.; Dugundji, J.; Fixed Point Theory. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [30] Henríquez, H. R.; Vásquez, C.; Almost periodic solutions of abstract retarded functional differential equations with unbounded delay. *Acta Appl. Math.* **57** (1999), 105-132.
- [31] Henríquez, H. R.; Vásquez, C.; Differentiability of solutions of second-order functional differential equations with unbounded delay, *J. Math. Anal. and Appl.* **280** (2)(2003), 284-312.
- [32] Kiszyński, J.; On cosine operator functions and one parameter group of operators, *Studia Math.* **49** (1972), 93-105.
- [33] Lutz, D.; Periodischeoperatorwertige Cosinusfunktionen, *Resultate Math.* **4** (1981), 75-83.
- [34] Marle, C. M.; Mesures et Probabilités, Hermann, Paris, 1974.

- [35] Staněk, S.; On solvability of nonlinear boundary value problems for the equation $(x' + g(t, x, x'))' = f(t, x, x')$ with one sided growth restrictions on f . *Arch. Math. (Brno)* **38** (2) (2002), 129–148.
- [36] Staněk, S.; The degree method for condensing operators in periodic boundary value problems. *Nonlinear Anal.* **48** (4)(2002), 535–550.
- [37] Staněk, S.; Functional boundary value problems for second order functional differential equations of the neutral type. *Glas. Mat. Ser. III* **36** (56)(1) (2001), 73–84.
- [38] Staněk, S.; Boundary value problems for systems of second-order functional differential equations. Proceedings of the 6th Colloquium on the Qualitative Theory of Differential Equations (Szeged, 1999), No. 28, 14 pp. (electronic), Proc. Colloq. Qual. Theory Differ. Equ., *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, Szeged, 2000.
- [39] Travis, C. C.; Webb, G. F.; Compactness, regularity, and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families. *Houston J. Math.* **3** (4) (1977) 555–567.
- [40] Travis, C. C.; Webb, G. F.; Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae*, **32** (1978) 76–96.
- [41] Zaidman, S. D.; A non-linear abstract differential equation with almost-periodic solution. *Riv. Mat. Univ. Parma* (4) 10, 1984, 331–336.
- [42] Zaidman, S. D.; Solutions of Almost-Periodic Abstract Differential Equations with Relatively Compact Range. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol 8, n. 9, 1091–1093, 1984.
- [43] Zaidman, S. D.; Almost Periodic Functions in Abstract Spaces. Pitman, London, 1985.
- [44] Coppel, W. A.; Almost Periodic Properties of Ordinary Differential Equations. *Ann. Mat. Pura Appl.* **76**, 1967, 27–49.
- [45] Engel, K. J.; Nagel, R.; One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. Springer, New York, 1999.
- [46] Yoshizawa, T.; Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions. Springer-Verlag, New York, 1975.

-
- [47] Adimy, M.; Ezzinbi, K.; Strict solutions of nonlinear hyperbolic neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.* **12** (1999), no. 1, 107–112.
 - [48] Cuevas, C.; Pinto, M.; Existence and Uniqueness of Pseudo Almost Periodic Solutions of Semilinear Cauchy Problems with non dense domain. *Nonlinear Analysis* **45**, 2001, 73-83.
 - [49] Diagana, T.; Pseudo almost periodic solutions to some differential equations. *Nonlinear Analysis* **60**, 2005, 1277-1286.
 - [50] N'Guérékata, G.; Existence and Uniqueness of almost automorphic mild solutions to some semilinear abstract differential equations. *Semigroup Forum* **69**, 2004, 80-86.
 - [51] Cienat, P.; Almost periodic solutions of forced vectorial Liénard equations. *J. Diff. equations* **209**, 2005, 302-328.
 - [52] Corduneanu, C.; Almost Periodic Functions, Second Edition, *Chelsea*, New York (1989).
 - [53] Fink, A. M.; Almost Periodic Differential Equations. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **377**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1974.
 - [54] N'Guérékata, G. M.; Topics in Almost Automorphy, Springer-Verlag, New York, 2005.
 - [55] Yuan, R.; Existence of almost periodic solutions of neutral functional-differential equations via Liapunov-Razumikhin function. *Z. Angew. Math. Phys.* **49** (1998), no. 1, 113–136.
 - [56] Man, N. Minh; Minh, N. Van; On the existence of quasi periodic and almost periodic solutions of neutral functional differential equations. *Commun. Pure Appl. Anal.* **3** (2004), no. 2, 291–300.
 - [57] Xio, Tijun; Liang, Jin; Complete second order linear differential equations with almost periodic solutions. *J. Math. Anal. Appl.* **163** (1992), no. 1, 136–146.
 - [58] Castillo, G.; Henríquez, H. R.; Almost-periodic solutions for a second order abstract Cauchy problem. *Acta Math. Hungar.* **106** (2005), no. 1-2, 27–39.
 - [59] Wu, J.; Xia, H.; Rotating waves in neutral partial functional-differential equations. *J. Dynam. Differential Equations* **11** (1999), no. 2, 209–238.

- [60] Hale, J. K.; Partial neutral functional-differential equations. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **39** (1994), no. 4, 339-344.
- [61] Wu, J.; Xia, H.; Self-sustained oscillations in a ring array of coupled lossless transmission lines. *J. Differential Equations* **124** (1996), no. 1, 247-278.
- [62] Datko, R.; Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space. *J. Diff. Equations* **25** (1977), no. 2, 258-274.
- [63] Adimy, Mostafa; Bouzahir, Hassane; Ezzinbi, Khalil; Existence and stability for some partial neutral functional differential equations with infinite delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, In Press, Corrected Proof, Available online 6 May 2004,
- [64] Adimy, Mostafa; Ezzinbi, Khalil; Laklach, Mostafa; Existence of solutions for a class of partial neutral differential equations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no. 11, 957-962.
- [65] Adimy, Mostafa; Ezzinbi, Khalil; A class of linear partial neutral functional-differential equations with nondense domain. *J. Differential Equations* **147** (1998), no. 2, 285-332.
- [66] Adimy, Mostafa; Ezzinbi, Khalil; Strict solutions of nonlinear hyperbolic neutral differential equations. *Appl. Math. Lett.* **12** (1999), no. 1, 107-112
- [67] Lopes, Orlando; Forced oscillations in nonlinear neutral differential equations. *SIAM J. Appl. Math.* **29** (1975), 196-201.
- [68] Lopes, Orlando; Stability and forced oscillations. *J. Math. Anal. Appl.* **55** (1976), no. 3, 686-698.
- [69] Hernández, Eduardo; Henríquez, H. R.; Existence Results for Second Order Partial Neutral Functional Differential Equation. Pre-print, ICMC, USP.
- [70] Hernández, Eduardo; P. C. dos Santos, José; Pelicer, M. L.; Asymptotically almost periodic and Almost Periodic Solutions for a class of Evolution Equation. *Electron. J. Diff. Eqs.*, Vol. 2004 (2004), No. 61, pp. 1-15.

- [71] Hernández, Eduardo; Henríquez, H. R.; Global Solutions for a Functional Second Order Abstract Cauchy Problem with Nonlocal Conditions. *Ann. Polon. Math.* **83** (2004), No. 149-170.
- [72] Hernández, Eduardo; Existence of solutions to a second order partial differential equation with nonlocal conditions. *Electron. J. Diff. Eqs.*, Vol. 2003(2003), No. 51, pp. 1-10.
- [73] Rankin, Samuel M.; III Semilinear evolution equations in Banach spaces with application to parabolic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **336** (1993), no. 2, 523-535.
- [74] Lunardi, A.; Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems, PNLDE Vol. 16, *Birkhäuser Verlag*, Basel, 1995.