SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 21.02.2005

Assinatura:

Sobre teoremas do tipo Borsuk-Ulam

Denise de Mattos

Orientador: Prof. Dr. Carlos Biasi

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências: Matemática.

**USP – São Carlos
Fevereiro de 2005**

Aluno: Denise de Mattos

A Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Carlos Biasi

Carlos Biasi

Prof. Dr. Daniel Levcovitz

Daniel Levcovitz

Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves

Daciberg Lima Gonçalves

Prof. Dr. Pedro Luís Queiroz Pergher

Pedro Luís Queiroz Pergher

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

Alice Kimie Miwa Libardi

Dedico este trabalho à minha filha Marina,
porque os filhos são nossa melhor herança,
aqueles por quem lutamos e vencemos,
por quem temos esperança, de quem
aprendemos, muito mais que ensinamos:
o melhor de nós mesmos.

Resumo

Neste trabalho, nós obtivemos algumas interessantes versões do Teorema de Borsuk-Ulam. Especificamente, nós provamos uma versão para variedades generalizadas do famoso teorema tipo Borsuk-Ulam provado por Conner e Floyd. Além disso, uma versão para ações livres de um grupo compacto de Lie e uma versão não-padrão do Teorema de Borsuk-Ulam são provadas.

Abstract

In this work we obtain some interesting versions of the Borsuk-Ulam Theorem. Specifically, we prove a version for generalized manifolds of the famous Borsuk-Ulam theorem type proved by Conner and Floyd. Moreover, we prove a version for compact Lie group actions and a non-standard version of the Borsuk-Ulam Theorem.

Agradecimentos

A todos aqueles que de algum modo me incentivaram e acompanharam a minha jornada, meus mais sinceros agradecimentos: a Deus, por ter me dado saúde e forças para enfrentar e superar as dificuldades e à minha família, pelo amor que têm por mim.

Ao meu orientador, Professor Doutor Carlos Biasi, a quem agradeço pela confiança em mim depositada, pela orientação sempre segura e extremamente competente e que muito contribuiu com o seu otimismo, a sua experiência e conhecimento para o meu aprendizado. Em especial, agradeço pela amizade, dedicação e paciência.

Ao Professor Doutor Pedro Luís Queiroz Pergher, da Universidade Federal de São Carlos, pelas importantes sugestões, as quais muito contribuíram para o aprimoramento deste trabalho. Em particular, pela gentileza e amizade.

A todos os professores que contribuíram diretamente para a minha formação, em especial à Professora Doutora Alice Kimie Miwa Libardi, da Unesp de Rio Claro, a quem devo amizade e muita gratidão.

A todos os colegas da pós-graduação, pelo apoio, incentivo e amizade. Ao professor Doutor Sadao Massago pela sua disponibilidade com relação às freqüentes dúvidas no uso do Latex.

A todos os professores e funcionários do ICMC, que com o seu trabalho e competência contribuíram para o sucesso deste trabalho.

À Marina, pela alegria e otimismo constantes e à Eliane, pelo incentivo e amizade!

E como não poderia deixar de ser, ao Edivaldo, que muito contribuiu com este trabalho, através de valiosas sugestões, algumas fundamentais, no que se refere à obtenção dos resultados, a quem agradeço especialmente, por todo apoio, otimismo, dedicação e muita paciência!

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Obrigada a todos!

Sumário

Introdução	iii
1 Pré-requisitos	1
1.1 Espaços classificantes	1
1.2 O espaço de Borel	3
1.3 Sistemas de Coeficientes Locais	4
1.4 Seqüência Espectral	9
1.5 O homomorfismo transgressão	12
1.6 O homomorfismo de Bockstein	13
1.7 Cohomologia dos espaços classificantes $B\mathbb{Z}_p$ e BS^1	14
1.8 A Classe de Euler e a seqüência de Gysin	15
1.9 A Classe de Wu	17
2 O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas	19
2.1 Introdução	19
2.2 $\mathbb{Z}_2$ -Variedades Generalizadas	20
2.2.1 As classes de Stiefel-Whitney de uma variedade generalizada	23
2.3 Lema Chave	29
2.4 Demonstração do Teorema 2.1.1	34
3 Versões do Teorema de Borsuk-Ulam para G-ações livres	41
3.1 Uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam para ações livres de um grupo compacto de Lie	42

3.1.1	Demonstração do Teorema 3.1.1	45
3.1.2	Sobre a existência de pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidências	54
3.2	Uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam para $\mathbb{Z}_2$ -ações livres	57
3.2.1	Demonstração do Teorema 3.2.1	58
3.3	Um exemplo sobre a não existência de uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante entre duas variedades fechadas e de mesma dimensão	62
3.3.1	Construção do exemplo	62
4	Uma versão não padrão do Teorema de Borsuk-Ulam	66
4.1	Introdução	66
4.2	Demonstração do Teorema 4.1.2	68
4.3	O Caso em que φ é uma α -contração	74
4.4	Generalizando a construção de Pannwitz	76
	Referências Bibliográficas	82

Introdução

O teorema clássico de Borsuk-Ulam [6] afirma que toda função contínua f da n -esfera S^n no n -espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, colapsa pelo menos um par de pontos antípodas, ou seja, existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(A(x))$, onde $A : S^n \rightarrow S^n$ denota a aplicação antipodal $A(x) = -x$, para todo $x \in S^n$. Esse teorema é uma das mais úteis ferramentas da topologia algébrica que tem sido extensamente usado em diferentes áreas. Uma das razões é que existem inúmeras versões e muitas demonstrações conhecidas de cada versão. As técnicas das demonstrações são completamente variadas: os métodos geométricos e elementares, as técnicas algébricas, combinatoriais, a topologia algébrica e muitas outras ferramentas têm sido usadas para prová-lo. O resultado foi primeiramente conjecturado por S. Ulam e provado por Karol Borsuk, em 1933. Desde então, têm sido publicadas diferentes demonstrações, generalizações e aplicações deste famoso teorema (vide, por exemplo, [36]).

Dentre as generalizações bem conhecidas, destacamos pela sua importância, o trabalho de P.E. Conner e E.E. Floyd [15]. A famosa versão do Teorema de Borsuk-Ulam provada por eles na década de 60, substitui o n -espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ por uma k -dimensional variedade diferenciável M^k , para $n \geq k$, com a hipótese adicional que a induzida da f no nível n se anula na $\mathbb{Z}_2$ -cohomologia.

Existem muitas formulações diferentes do Teorema de Borsuk-Ulam. Uma delas é a de que não existe uma aplicação da m -dimensional esfera S^m na n -dimensional esfera S^n , equivariante com relação à aplicação antipodal, quando $m > n$. Um caminho natural para se generalizar este resultado, é o de substituir as esferas S^k por uma classe mais ampla de espaços topológicos. Em [45, Teorema 1], Pergher et al. provaram que se X e Y são espaços topológicos de Hausdorff, conexos por caminhos e paracompactos,

equipados com involuções livres $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ tais que para algum natural $n \geq 1$, $\check{H}^q(X) = 0$, para $1 \leq q \leq n-1$ e $\check{H}^n(Y/S) = 0$, então não existe uma aplicação equivariante $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$, onde $\check{H}$ denota a cohomologia de Čech mod 2 e Y/S é o espaço de órbitas de Y por S . Como um corolário desse resultado, eles provaram que para toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$, existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$, se $n \geq k$, o que generaliza o Teorema de Borsuk-Ulam. Versões homológicas desses resultados são obtidas em [45], para espaços não paracompactos, considerando Y localmente conexo por caminhos. A demonstração de tais versões, é baseada na T -homologia e no $\mathbb{Z}_2$ -índice de Yang [50].

Em função dos dados acima, meu orientador propôs-me como tema para o desenvolvimento desse projeto de tese, a obtenção de novas e interessantes versões do Teorema de Borsuk-Ulam. Nesse contexto, nós tratamos da questão da extensão sob três aspectos completamente distintos, os quais descreveremos a seguir. Com relação ao trabalho de Conner e Floyd, nós estudamos a possibilidade de substituir a variedade diferenciável por uma classe especial de espaços topológicos conhecidos como $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas. No sentido da não existência de aplicações equivariantes, nós abordamos o problema de substituir a ação livre do grupo cíclico $\mathbb{Z}_2$, determinada pelas involuções livres sobre X e Y , no Teorema 1 de [45], por uma ação livre de um grupo compacto de Lie. Em outra direção, uma pergunta natural que surge ao pensarmos em substituir, no Teorema de Borsuk-Ulam, a esfera S^n por um espaço topológico X arbitrário e as funções Identidade e Antipodal por um par de funções apenas contínuas ψ, φ definidas sobre X é se seria possível provar que para toda função contínua f de X em $\mathbb{R}^n$, existe um ponto x em X tal que $f(\psi(x)) = f(\varphi(x))$. Esses três problemas constituem-se no conteúdo desse projeto de tese.

Inicialmente, no Capítulo 2, nós provamos uma versão para $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas do famoso Teorema tipo Borsuk-Ulam provado por Conner e Floyd para variedades diferenciáveis. ENR variedades homológicas são conhecidas por compartilharem muitas propriedades globais com as variedades topológicas. A descoberta de $\mathbb{Z}$ -variedades homológicas exóticas de dimensões mais elevadas nos anos 90, abriu diversas questões relacionadas às similaridades e às diferenças da topologia local e global

das variedades exóticas e topológicas. A natureza exótica dessas variedades generalizadas é detectada pela não trivialidade da 0-dimensional classe de Pontrjagyn. As classes de Stiefel-Whitney, por sua vez, são insensíveis a estas diferenças. Partindo deste princípio básico, nós adaptamos os argumentos de Conner e Floyd, baseados nas classes de Stiefel-Whitney, para provar o teorema de Borsuk-Ulam para ENR $\mathbb{Z}_2$ -variedades homológicas. Mais especificamente, nós provamos o seguinte

Teorema 2.1.1² *Seja $f : S^n \rightarrow M^k$ uma função contínua da n -esfera S^n em uma variedade generalizada M^k e denotemos por $A(f) = \{x \in X; f(x) = f(-x)\}$.*

i) se $n > k$, então $\dim A(f) \geq n - k$;

ii) se $n = k$ e $f^ : H^n(M^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ for nula, então $A(f) \neq \emptyset$.*

Na demonstração de Conner e Floyd, a estrutura diferenciável da variedade M^k permitiu que se fizesse uso das classes de Stiefel-Whitney. Recentemente, em [4] C.Biasi, J. Daccach e O. Saeki definiram as classes de Stiefel-Whitney para uma variedade generalizada e este é o principal ponto concernente à nossa generalização: seguindo os mesmos passos de Conner e Floyd, nós provamos o Teorema 2.1.1 usando essa nova definição.

No Capítulo 3 nós consideramos a questão de estender o Teorema 1 de [45] sob dois aspectos distintos: na seção 3.1, nós substituímos a ação livre do grupo $\mathbb{Z}_2$, determinada pelas involuções livres sobre X e Y , por uma ação livre de um grupo compacto de Lie. Sejam R um PID e G um grupo compacto de Lie. Sejam X, Y G -espaços livres. Denotemos por $\beta_i(X; R)$ o i -ésimo número de Betti de X . Nós provamos o seguinte

Teorema 3.1.1 *Sejam G um grupo compacto de Lie e X, Y G -espaços livres, conexos por caminhos e paracompactos de Hausdorff. Suponhamos que para algum natural $m \geq 1$, $H^q(X; R) = 0$, para $0 < q < m$ e que $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$. Então, se $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$, não existe aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$.*

Nós temos o seguinte Corolário do Teorema 3.1.1.

Corolario 3.1.2 *Seja G um grupo compacto de Lie de dimensão p . Sejam X um G -espaço livre, conexo por caminhos e paracompacto de Hausdorff, tal que $H^q(X; R) = 0$,*

²[5, Theorem 1.1]

para $0 < q < m$ e Y uma $(m+p)$ -dimensional variedade topológica conexa por caminhos com uma ação livre de G . Se $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$, então não existe aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$.

Quando $G = \mathbb{Z}_q$, onde $q > 1$ é um inteiro, uma consequência do Teorema 3.1.1 é o seguinte

Corolário 3.1.4 Sejam X, Y $\mathbb{Z}_q$ -espaços livres, conexos por caminhos e paracompactos de Hausdorff. Seja p um primo que divide q . Suponhamos que $H^r(X; \mathbb{Z}_q) = 0$, para $1 < r \leq m$ e que $H^{m+1}(Y/\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) = 0$. Então não existe aplicação $\mathbb{Z}_q$ -equivariante $f : X \rightarrow Y$.

Sejam $Y^* = \prod_{i=1}^p Y^i \setminus \Delta$, onde Δ é a diagonal em $\prod_{i=1}^p Y^i$; $t_Y : Y^* \rightarrow Y^*$ o homeomorfismo de período p , onde p é um primo ímpar, $t_Y(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_2, y_3, \dots, y_p, y_1)$. Na seção 3.1.2, nós obtivemos o seguinte teorema sobre a existência de pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, o qual também é uma consequência do Teorema 3.1.1.

Teorema 3.1.13 Para um natural $n \geq 1$, suponhamos que $H^r(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq r \leq n$ e que $H^{n+1}(Y^*/t_Y; \mathbb{Z}_p) = 0$. Então toda função contínua $f : X \rightarrow Y$ tem um ponto de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, ou seja, existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(g(x))$, para todo $g \in \mathbb{Z}_p$.

Na Seção 3.2, nós mostramos que é possível enfraquecer as hipóteses cohomológicas exigidas no Teorema 1 de [45]. Nós provamos o seguinte

Teorema 3.2.1 Sejam X, Y conexos por caminhos e paracompactos de Hausdorff, com involuções livres $T : X \rightarrow X$, $S : Y \rightarrow Y$ e $A \subset X$ conexo por caminhos e T -invariante. Suponhamos que para algum natural $n \geq 1$, $H^r(A, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n-1$, $i^* : H^n(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(A, \mathbb{Z}_2)$ seja nula e $H^{n-1}(Y/S, \mathbb{Z}_2) = 0$. Então, não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$.

Na seção 3.3, nós apresentamos um exemplo sobre a não existência de uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante entre duas variedades topológicas fechadas, de mesma dimensão, dotadas com involuções livres e que não são espaços m -acíclicos.

No Capítulo 4, nós obtemos uma interessante versão não padrão do Teorema de Borsuk-

Ulam. Nós mostramos que se $\varphi, \psi : X \rightarrow X$ são funções contínuas satisfazendo certas condições, então para toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ou existe um ponto $x \in X$ tal que $f(\varphi(x)) = f(\psi(x))$ ou existe um ponto $x \in X$ tal que $f(\varphi\psi(x))$ pertence ao segmento de reta fechado em $\mathbb{R}^2$ unindo os pontos $f(\varphi^2(x))$ e $f(\psi^2(x))$. Nós consideramos um caso compacto, dado pelo Teorema 4.1.2, assim como um caso mais geral, dado pelo Teorema 4.3.5, quando φ é uma α -contração. O resultado acima generaliza o Teorema de Borsuk-Ulam no caso de aplicações de S^2 em $\mathbb{R}^2$. Nós obtivemos também um resultado relacionado a aplicações de X em $\mathbb{R}$, dado pelo Corolário 4.2.9.

Na Seção 4.4, nós estendemos para um espaço topológico X , sob certas condições, a construção feita por E. Panowitz, em [41]. Neste artigo, foi provada a existência de uma função livre $f : S^k \rightarrow \mathbb{R}^2$, para todo $k \geq 0$. A construção de uma tal função foi feita indutivamente sobre k . Para cada $k \geq 0$, foram construídas funções contínuas $\varphi_k : S^k \rightarrow S^k$ e $f_k : S^k \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que

$$f_k(x) \neq f_k(\varphi_k(x)), \quad (0.0.1)$$

para todo $x \in X$. Nós provamos que se X é um espaço topológico tal que existe uma função livre $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, então existe uma função livre $\hat{f} : S(X) \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $S(X)$ é a suspensão de X .

Capítulo 1

Pré-requisitos

Este capítulo introduz as noções básicas e notações que serão usadas em todo este trabalho. Em todo este capítulo H_* and H^* denotarão os grupos de homologia e cohomologia singular e o símbolo $\cong$ denotará o isomorfismo apropriado entre os objetos algébricos. Se G é um grupo topológico atuando em espaços topológicos X e Y , uma G -aplicação ou uma aplicação G -equivariante é uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ que preserva a G -ação, ou seja, $f(gx) = gf(x)$, para qualquer $g \in G$. Observemos que se H é um subgrupo de G e se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação G -equivariante, então f é H -equivariante. Uma aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$ induz uma aplicação entre os espaços de órbitas $f : X/G \rightarrow Y/G$.

1.1 Espaços classificantes

Uma construção direta do espaço classificante BG , para qualquer grupo topológico G , foi dada primeiramente por Milnor [40]. Dado qualquer grupo topológico G , existe um espaço BG e um G -fibrado principal universal $EG \rightarrow BG$ tal que para qualquer espaço paracompacto Hausdorff B , a construção pullback induz uma bijeção entre o conjunto $[B, BG]$ das classes de homotopia de aplicações de B em BG e a classe dos isomorfismos de G -fibrados principais sobre B . Denotaremos o G -fibrado principal universal $EG \rightarrow BG$ por ω_G .

São válidos os seguintes teoremas, cujas demonstrações podem ser encontradas em [33,

Cap.4, Teoremas 12.2, 12.4].

Teorema 1.1.1 *Para qualquer G -fibrado principal $\eta = (G, G, E, p, B)$ sobre um espaço paracompacto Hausdorff B , existe uma aplicação $f : B \rightarrow BG$ tal que η e o fibrado pullback $f^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre B . A aplicação $f : B \rightarrow BG$ é chamada uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $E \xrightarrow{p} B$.*

Teorema 1.1.2 *Sejam $f_0, f_1 : B \rightarrow BG$ duas funções contínuas tais que $f_0^*(\omega_G)$ e $f_1^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre B . Então f_0 é homotópica a f_1 .*

No caso em que G é um grupo compacto de Lie, é válido o seguinte teorema fundamental, cuja prova pode ser encontrada em [10, Cap.II, Teorema 5.8].

Teorema 1.1.3 *Suponhamos que X seja um espaço paracompacto Hausdorff e que G seja um grupo compacto de Lie atuando livremente sobre X . Então $X \rightarrow X/G$ é um G -fibrado principal.*

Observação 1.1.4 Sejam X, Y paracompactos Hausdorff com ação livre de um grupo compacto de Lie G . Denotemos por η_X e η_Y os G -fibrados principais $X \rightarrow X/G$ e $Y \rightarrow Y/G$, respectivamente e seja $h : X/G \rightarrow BG$ uma aplicação classificante para η_X , então η_X e $h^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre X/G . Suponhamos que $f : X \rightarrow Y$ seja uma aplicação G -equivariante. Se $g : Y/G \rightarrow BG$ é uma aplicação classificante para η_Y , então $g \circ \bar{f} : X/G \rightarrow BG$ também classifica o G -fibrado principal η_X e $g \circ f$ é homotópica a h , onde $\bar{f} : X/G \rightarrow Y/G$ é a induzida por f entre os espaços de órbitas. De fato, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & EG \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X/G & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/G & \xrightarrow{g} & BG \end{array} \quad (1.1.1)$$

Segue do Teorema 1.1.1 que η_Y e o fibrado pullback $g^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre Y/G . Desde que $f : X \rightarrow Y$ é G -equivariante, temos de [33, cap.4, Teorema 4.2] (vide [21, Cap.1, Proposição 8.6]) que η_X e o fibrado pullback $\bar{f}^*(\eta_Y)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre X/G . Por outro lado, desde que η_Y é isomorfo a

$g^*(\omega_G)$, segue de [33, Cap.4, §10] que $\bar{f}^*(\eta_Y)$ é isomorfo a $\bar{f}^*(g^*(\omega_G))$. Além disso, de [33, Cap.2, Proposição 5.7] temos que $\bar{f}^*(g^*(\omega_G))$ e $(g \circ \bar{f})^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre X/G e portanto η_X e $(g \circ \bar{f})^*(\omega_G)$ são G -fibrados principais isomorfos sobre X/G , o que implica do Teorema 1.1.1 que $g \circ \bar{f}$ é uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$. Segue do Teorema 1.1.2 que $g \circ \bar{f}$ é homotópica a h .

1.2 O espaço de Borel

Suponhamos que G seja um grupo compacto de Lie atuando livremente em um espaço topológico X paracompacto Hausdorff. Então, podemos tomar

$$h : X/G \rightarrow BG \quad (1.2.1)$$

uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$, onde $EG \rightarrow BG$ é o G -fibrado principal universal para G .

Denotemos por X_G o espaço de Borel $EG \times_G X$ de X , obtido da seguinte forma: G age livremente sobre $EG \times X$ pela ação $g(e, x) = (ge, gx)$ e $EG \times_G X = (EG \times X)/G$. A aplicação entre os espaços de órbitas

$$p : X_G \rightarrow (EG)/G = BG, \quad (1.2.2)$$

induzida pela projeção na primeira coordenada $EG \times X \rightarrow EG$ é uma fibração com fibra X e espaço base BG sendo o espaço classificante de G ; p é chamada uma *fibração de Borel* associada ao G -espaço X .

Observação 1.2.1 Se G age livremente sobre X , então a aplicação

$$s : X_G \rightarrow X/G, \quad (1.2.3)$$

induzida pela projeção na segunda coordenada $EG \times X \rightarrow X$, é uma fibração com fibra contrátil EG e portanto uma equivalência de homotopia (para detalhes vide, por exemplo, [21]).

Observação 1.2.2 Sejam $p : X_G = EG \times_G X \rightarrow BG$ a fibração de Borel associada ao G -espaço livre X , onde G é um grupo compacto de Lie e denotemos por $r : X/G \rightarrow X_G$

a inversa homotópica de $s : X_G \rightarrow X/G$. Então, $p \circ r : X/G \rightarrow BG$ classifica o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$. De fato, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & EG \times X & \longrightarrow & EG \\ \eta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \omega_G \\ X/G & \xrightarrow{r} & X_G & \xrightarrow{p} & BG \end{array} \quad (1.2.4)$$

Denotemos por η o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$ e por α o G -fibrado principal $EG \times X \rightarrow X_G$. Desde que p é uma aplicação G -equivariante, temos que o fibrado pullback $p^*(\omega_G)$ e α são G -fibrados principais isomorfos. Assim, é suficiente provar que o fibrado pullback $r^*(\alpha)$ e η são G -fibrados principais isomorfos. Para isto, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & EG \times X & \longrightarrow & X \\ \eta \downarrow & & \alpha \downarrow & & \downarrow \eta \\ X/G & \xrightarrow{r} & X_G & \xrightarrow{s} & X/G \end{array} \quad (1.2.5)$$

e observemos que s é G -equivariante, assim o fibrado pullback $s^*(\eta)$ e α são G -fibrados principais isomorfos, deste modo $r^*(s^*(\eta))$ é isomorfo a $r^*(\alpha)$. Por outro lado, desde que $s \circ r$ é homotópica à identidade, temos que $(s \circ r)^*(\eta) = r^*(s^*(\eta))$ é isomorfo ao fibrado pullback $Id^*(\eta) = \eta$. Assim, $r^*(\alpha)$ e η são G -fibrados principais isomorfos. Portanto, $\eta = r^*(\alpha) = r^*(p^*(\omega_G)) = (p \circ r)^*(\omega_G)$, o que implica que $p \circ r$ classifica o G -fibrado principal η .

1.3 Sistemas de Coeficientes Locais

Nosso objetivo, nesta seção, é definir os grupos de homologia e cohomologia com coeficientes locais em um fibrado de grupos. Dado um espaço topológico B , seja

$$\Pi_1(B, a, b) = \{[\lambda]; \lambda : I \rightarrow B, \lambda(0) = a, \lambda(1) = b\} \quad (1.3.1)$$

o conjunto das classes de homotopia de caminhos em B unindo os pontos a e b .

Definição 1.3.1 Um *fibrado de grupos sobre B* , o qual será denotado por $\mathcal{G}$, é uma coleção de grupos $\{G_b; b \in B\}$, junto com uma coleção de homomorfismos $h[\lambda] : G_{b_1} \rightarrow G_{b_0}$, para cada elemento $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$, satisfazendo

- (1) se $[b]$ é a identidade (o caminho constante) em $\Pi_1(B, b, b)$ então $h[b] = id : G_b \rightarrow G_b$;
 (2) se $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_2)$ e $[\mu] \in \Pi_1(B, b_1, b_2)$ e se $\lambda * \mu$ é o caminho justaposto de λ por μ , então $h[\lambda * \mu] = h[\lambda] \circ h[\mu] : G_{b_2} \rightarrow G_{b_0}$.

Observação 1.3.2 As condições (1) e (2) da Definição 1.3.1 implicam que $h[\lambda]$ é um isomorfismo. De fato, denotando por $\lambda^{-1}(t) = \lambda(1 - t)$ temos que $[\lambda * \lambda^{-1}] = [b_0] \in \Pi_1(B, b_0, b_0)$ e assim $h[\lambda * \lambda^{-1}] = h[\lambda] \circ h[\lambda^{-1}] = id$.

Exemplo 1.3.3 Dado um grupo G , existe o *fibrado trivial de grupos* sobre B , também denotado por G , onde $G_b = G$ para todo $b \in B$ e $h[\lambda] = id : G \rightarrow G$ para todo $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$.

Exemplo 1.3.4 Suponhamos que $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ seja uma fibração, com B conexo por caminhos. Para cada natural $n \geq 0$, nós podemos construir um fibrado de R -módulos, $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n(F; R)$ como segue: dado um elemento $b \in B$ seja $G_b = H_n(F_b; R)$, onde $F_b = p^{-1}(b)$. Dado um caminho $\lambda : I \rightarrow B$ com $\lambda(0) = b_0$ e $\lambda(1) = b_1$, aplicando a propriedade do levantamento de homotopia para fibrações, um levantamento de λ dá origem a uma aplicação $\tilde{\lambda} : F_{b_0} \rightarrow F_{b_1}$ tal que $\tilde{\lambda}$ é uma equivalência de homotopia e $\tilde{\lambda}$ é única, a menos de homotopia [48, pg.185]. Para cada $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$, seja

$$h[\lambda] = (\tilde{\lambda}^{-1})_* : H_n(F_{b_1}; R) \rightarrow H_n(F_{b_0}; R). \quad (1.3.2)$$

Segue de [48, Cap.4, §8] que $\mathcal{G} = \mathcal{H}_n(F; R)$, juntamente com a coleção de homomorfismos $h[\lambda]$ definidos acima, é um fibrado de R -módulos.

Observação 1.3.5 Usando os mesmos argumentos do Exemplo 1.3.4, temos que $\mathcal{G} = \mathcal{H}^n(F; R)$, juntamente com a seguinte coleção de homomorfismos $h[\lambda]$

$$h[\lambda] = \tilde{\lambda}^* : H^n(F_{b_1}; R) \rightarrow H^n(F_{b_0}; R). \quad (1.3.3)$$

é um fibrado de R -módulos (vide [41, Cap.3, §2, Teorema 2.8]).

Definição 1.3.6 Um *morfismo entre fibrados de grupos*, $\Xi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ é uma coleção de homomorfismos $\Xi_b : (G_1)_b \rightarrow (G_2)_b$, para cada $b \in B$, satisfazendo a propriedade

que o seguinte diagrama comuta, para todo $[\lambda]$ em $\Pi_1(B, b_0, b_1)$.

$$\begin{array}{ccc} (G_1)_{b_1} & \xrightarrow{h[\lambda]} & (G_1)_{b_0} \\ \Xi_{b_1} \downarrow & & \downarrow \Xi_{b_0} \\ (G_2)_{b_1} & \xrightarrow{h_2[\lambda]} & (G_2)_{b_0} \end{array}$$

Exemplo 1.3.7 Sejam $E \xrightarrow{p} B$ e $E' \xrightarrow{p'} B$, fibrações com mesmo espaço base B , conexo por caminhos. Suponhamos que exista uma aplicação entre fibrações,

$$\begin{array}{ccc} F_b & \xrightarrow{\tilde{f}|_{F_b}} & F'_b \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E' \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ B & & B \end{array} \quad (1.3.4)$$

a qual preserva fibra, ou seja, $\tilde{f}(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(b)$, para cada $b \in B$. Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_n(F_{b_1}; R) & \xrightarrow{h[\lambda]} & H_n(F_{b_0}; R) \\ \tilde{f}_* \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_* \\ H_n(F'_{b_1}; R) & \xrightarrow{h'[\lambda]} & H_n(F'_{b_0}; R) \end{array}$$

é comutativo, onde $h[\lambda]$ e $h'[\lambda]$ são os homomorfismos definidos no Exemplo 1.3.4.

Deste modo, $\tilde{f}_*$ induz um morfismo de fibrados $\mathcal{H}_n(F; R) \rightarrow \mathcal{H}_n(F'; R)$

Um morfismo de fibrados é um *isomorfismo* se cada Ξ_b for um isomorfismo. Fixemos um fibrado de grupos abelianos, $\mathcal{G}$, sobre um espaço B , então $\mathcal{G}$ é chamado um *Sistema de Coeficientes Locais* sobre B . Um *Sistema de Coeficientes Locais* $\mathcal{G}$ é chamado *trivial* se existe um *fibrado trivial de grupos* G e um isomorfismo $\Xi : \mathcal{G} \rightarrow G$, para algum grupo G .

Exemplo 1.3.8 Seja $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ uma fibração com fibra F e base B conexos por caminhos. Então, o sistema de coeficientes locais sobre B , $\mathcal{H}_0(F; R)$ é trivial. Fixemos um ponto $b \in B$ e mostremos que existe um isomorfismo $\Xi : \mathcal{H}_0(F) \rightarrow H_0(F_b)$, com $H_0(F_b) = H_0(F)$ o fibrado trivial de grupos sobre B . Sejam $b_0, b_1 \in B$ e $[\lambda] \in \Pi_1(B, b_0, b_1)$. Desde que B é conexo por caminhos, existem caminhos $\alpha, \beta : I \rightarrow B$

tais que $\alpha(0) = b, \alpha(1) = b_1, \beta(0) = b, \beta(1) = b_0$. Consideremos os homomorfismos $h[\alpha] : H_0(F_{b_1}) \rightarrow H_0(F_b), h[\beta] : H_0(F_{b_0}) \rightarrow H_0(F_b), h[\lambda] : H_0(F_{b_1}) \rightarrow H_0(F_{b_0})$, definidos no Exemplo 1.3.4, os quais são isomorfismos, pela Observação 1.3.2. Como F é conexo por caminhos, temos que o homomorfismo

$$h[\beta] \circ h[\lambda] \circ h[\alpha]^{-1} = h[\beta * \lambda * \alpha^{-1}] : H_0(F_b) \rightarrow H_0(F_b). \quad (1.3.5)$$

coincide com o homomorfismo identidade $Id : H_0(F_b) \rightarrow H_0(F_b)$. Assim, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_0(F_{b_1}) & \xrightarrow{h[\lambda]} & H_0(F_{b_0}) \\ \Xi_{b_1} = h[\alpha] \downarrow & & \downarrow \Xi_{b_0} = h[\beta] \\ H_0(F_b) & \xrightarrow{Id} & H_0(F_b) \end{array} \quad (1.3.6)$$

para todo $[\lambda] \in H_1(B, b_0, b_1)$ e o sistema de coeficientes locais $\mathcal{H}_0(F; R)$ sobre B é trivial.

Observação 1.3.9 Usando os mesmos argumentos do Exemplo 1.3.8, prova-se que se $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ é uma fibração com fibra F e base B conexos por caminhos, então o sistema de coeficientes locais sobre B , $\mathcal{H}^0(F; R)$, é trivial.

Denotemos por $C_*(B)$ o grupo das cadeias singulares sobre B . Definimos

$$\begin{aligned} C_p(B; \mathcal{G}) &= \{ \text{funções } c : C_p(B) \rightarrow \cup_{b \in B} G_b; c(\alpha : \Delta^p \rightarrow B) \in G_{\alpha(e_0)}, c(\alpha) \neq 0, \\ &\quad \text{somente para um número finito de } p\text{-simplexos singulares } \alpha : \Delta^p \rightarrow B \} \\ &= \{ p\text{-cadeias singulares com coeficientes no fibrado de grupos } \mathcal{G} \}. \end{aligned}$$

onde $e_0 \in \Delta^p$. Uma p -cadeia é chamada *elementar* se $c(\alpha) \neq 0$ para no máximo um p -simplexo singular $\alpha : \Delta^p \rightarrow B$. Uma p -cadeia típica com coeficientes em $\mathcal{G}$ pode ser escrita como uma soma formal de p -cadeias elementares

$$c = \sum g_i \alpha_i, \text{ onde } g_i \in G_{\alpha_i(e_0)}.$$

Para definir o bordo de uma p -cadeia elementar c , observemos que se $\alpha : \Delta^p \rightarrow B$,

$$(\partial_i \alpha)(e_0) = \begin{cases} \alpha(e_0), & \text{se } i \neq 0; \\ \alpha(e_1), & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

onde $\partial : C_p(B) \rightarrow C_{p-1}(B)$. Consideremos o caminho $\lambda_\alpha : I \rightarrow B$, definido por

$$\lambda_\alpha(t) = \alpha(tc_0 + (1-t)c_1),$$

unindo $\alpha(c_1)$ a $\alpha(c_0)$. Segue que a classe de homotopia $[\lambda_\alpha] \in \Pi_1(B, \alpha(c_1), \alpha(c_0))$ induz um isomorfismo $h[\lambda_\alpha] : G_{\alpha(c_0)} \rightarrow G_{\alpha(c_1)}$. O operador bordo $\partial : C_p(B; \mathcal{G}) \rightarrow C_{p-1}(B; \mathcal{G})$, definido pela fórmula

$$\partial(c) = \partial \left(\sum_i g_i \alpha_i \right) = \sum_i \left(h[\lambda_{\alpha_i}](g_i) \cdot \partial_0 \alpha_i + \sum_{j=1}^p (-1)^j g_i \partial_j \alpha_i \right),$$

é um homomorfismo, o qual satisfaz $\partial \circ \partial = 0$ (para detalhes, vide [48, Cap.6, §2]).

Definição 1.3.10 O grupo graduado $C_*(B; \mathcal{G})$ é um complexo de cadeias e seus grupos de homologia $H_p(B; \mathcal{G}) = H_p(C_*(B; \mathcal{G}), \partial)$, são chamados *grupos de homologia de B com coeficientes no fibrado de grupos $\mathcal{G}$* , também conhecidos como *grupos de homologia de B com coeficientes locais em $\mathcal{G}$* .

Seja $\mathcal{G}$ um fibrado de grupos e denotemos por $C^*(B)$ o grupo de cocadeias singulares sobre B . Definimos

$$\begin{aligned} C^p(B; \mathcal{G}) &= \{ \text{funções } c : C^p(B) \rightarrow \cup_{b \in B} G_b : c(\alpha : \Delta^p \rightarrow B) \in G_{\alpha(e_0)}, c(\alpha) \neq 0, \\ &\quad \text{somente para um número finito de } p\text{-simplexos singulares } \alpha : \Delta^p \rightarrow B \}, \\ &= \{ p\text{-cocadeias singulares com coeficientes no fibrado de grupos } \mathcal{G} \}, \end{aligned}$$

onde $e_0 \in \Delta^p$. O conjunto $C^p(B; \mathcal{G})$ é um grupo abeliano com a operação de adição de funções. O operador cobordo $\delta : C^p(B; \mathcal{G}) \rightarrow C^{p+1}(B; \mathcal{G})$ é definido pela fórmula

$$(-1)^p \delta c(\alpha) = h[\lambda_\alpha^{-1}]c(\partial_0 \alpha) + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i c(\partial_i \alpha), \quad (1.3.7)$$

para cada simplexo singular $\alpha : \Delta^{p+1} \rightarrow B$, onde $h[\lambda_\alpha^{-1}] : G_{\alpha(c_1)} \rightarrow G_{\alpha(c_0)}$. Então δ é um homomorfismo e $\delta \circ \delta = 0$ (vide [48, pg.270]).

Definição 1.3.11 O grupo graduado $C^*(B; \mathcal{G})$ é um complexo de cocadeias e seus grupos de cohomologia $H^p(B; \mathcal{G}) = H^p(C^*(B; \mathcal{G}), \delta)$, são chamados *grupos de cohomologia de B com coeficientes locais no fibrado de grupos $\mathcal{G}$* .

Uma importante propriedade dos grupos de homologia e cohomologia de B com coeficientes locais no fibrado de grupos $\mathcal{G}$ é dada pelo seguinte lema (para demonstração vide [41, Cap.3, §1, Lema 1.18] e [37, Proposição 5.18]).

Lema 1.3.12 *Se o sistema de coeficientes locais $\mathcal{G}$ sobre B é trivial então*

$$H_*(B; \mathcal{G}) \cong H_*(B; G) \text{ e } H^*(B; \mathcal{G}) \cong H^*(B; G), \quad (1.3.8)$$

onde $G = G_b$, para todo $b \in B$.

1.4 Seqüência Espectral

Definição 1.4.1 Um módulo diferencial bigraduado sobre um anel R , é uma coleção de R -módulos $\{E^{p,q}\}$, para todo par de inteiros p e q , junto com uma aplicação R -linear $d : E^{*,*} \rightarrow E^{*,*}$, o diferencial, de bigrau $(-r, r+1)$ ou $(r, -r+1)$, para algum inteiro r , satisfazendo $d \circ d = 0$.

Definição 1.4.2 O módulo de homologia $H(E)$ é o módulo bigraduado

$$H_{p,q}(E_{*,*}, d) = \frac{\ker(d : E_{p,q} \rightarrow E_{p-r,q+r+1})}{\operatorname{im}(d : E_{p+r,q-r+1} \rightarrow E_{p,q})}. \quad (1.4.1)$$

Definição 1.4.3 O módulo de cohomologia $H(E)$ é o módulo bigraduado

$$H^{p,q}(E^{*,*}, d) = \frac{\ker(d : E^{p,q} \rightarrow E^{p+r,q-r+1})}{\operatorname{im}(d : E^{p-r,q+r+1} \rightarrow E^{p,q})}. \quad (1.4.2)$$

Definição 1.4.4 Uma seqüência espectral do tipo homológica é uma coleção de R -módulos diferenciais bigraduados $\{E_{*,*}^r, d^r\}$, para $r = 1, 2, \dots$; onde os diferenciais têm bigrau $(-r, r+1)$ e $E_{p,q}^{r+1}$ é isomorfo a $H_{p,q}(E_{*,*}^r, d^r)$.

Definição 1.4.5 Uma seqüência espectral do tipo cohomológica é uma coleção de R -módulos diferenciais bigraduados $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, para $r = 1, 2, \dots$; onde os diferenciais têm bigrau $(r, -r+1)$ e $E_{r+1}^{p,q}$ é isomorfo a $H^{p,q}(E_r^{*,*}, d_r)$.

Observação 1.4.6 Embora a seqüência espectral esteja indexada para $r = 1, 2, \dots$, essa indexação pode começar em qualquer inteiro e para as nossas aplicações a seqüência começa em $r = 2$.

Até o final desta seção, estaremos considerando seqüências espectrais do tipo cohomológicas. As definições e propriedades apresentadas a seguir, também podem ser obtidas no caso de uma seqüência espectral homológica e uma exposição detalhada nesse sentido pode ser encontrada em [37, 46].

Para definir o termo limite de uma seqüência espectral cohomológica, para todo $k \geq r$, denotemos por

$$Z_r^{p,q} = \ker(d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p-r,q+r+1}) \quad (1.4.3)$$

$$B_r^{p,q} = \operatorname{im}(d_r : E_r^{p-r,q+r+1} \rightarrow E_r^{p,q}). \quad (1.4.4)$$

A condição $d_r \circ d_r = 0$, implica que $B_r \subset Z_r \subset E_r$, e segue da definição 1.4.3 que $E_{r+1} \cong Z_r/B_r$. Sejam

$$Z(E_{r+1})^{p,q} = \ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{p-r-1,q+r}) \quad (1.4.5)$$

$$B(E_{r+1})^{p,q} = \operatorname{im}(d_{r+1} : E_{r+1}^{p-r-1,q+r} \rightarrow E_{r+1}^{p,q}). \quad (1.4.6)$$

Segue de [31, Teorema 1.10, pg.173], que existem submódulos bigraduados Z_{r+1} e B_{r+1} de Z_r , contendo B_r , tais que $Z(E_{r+1})^{p,q} \cong Z_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$ e $B(E_{r+1})^{p,q} \cong B_{r+1}^{p,q}/B_r^{p,q}$, para todo p, q . Assim, $B_{r+1} \subset Z_{r+1}$ e temos que

$$B_r \subset B_{r+1} \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r. \quad (1.4.7)$$

Além disso, $E_{r+2} \cong Z(E_{r+1})/B(E_{r+1}) \cong Z_{r+1}/B_{r+1}$. Continuando esse processo por indução, nós obtemos uma seqüência de submódulos, para todo $n \geq r$,

$$B_r \subset B_{r+1} \subset \cdots \subset B_n \subset \cdots \subset Z_n \subset \cdots \subset Z_{r+1} \subset Z_r \subset E_r, \quad (1.4.8)$$

com a propriedade que $E_{n+1} \cong Z_n/B_n$.

Definição 1.4.7 Definimos os módulos bigraduados

$$Z_\infty = \bigcap_n Z_n \text{ e } B_\infty = \bigcup_n B_n. \quad (1.4.9)$$

O módulo bigraduado $E_\infty = Z_\infty/B_\infty$ é chamado o limite da seqüência espectral E .

Definição 1.4.8 Uma seqüência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsa no N -ésimo termo se o diferencial $d_r = 0$, para todo $r \geq N$.

Observação 1.4.9 Uma consequência imediata do fato de uma sequência espectral cohomológica $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ colapsar no N -ésimo termo, é que $E_N^{*,*} \cong E_{N+1}^{*,*} \simeq \dots \simeq E_\infty^{*,*}$.

Definição 1.4.10 Uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A , é uma família de submódulos $\{F^p(A)\}$, com $p \in \mathbb{Z}$, tal que

$$\dots F^{p+1}(A) \subset F^p(A) \subset F^{p-1}(A) \subset \dots \subset A. \quad (1.4.10)$$

Definição 1.4.11 Dada uma filtração decrescente F sobre um R -módulo A , o módulo graduado associado $E_0^*(A)$ é dado por

$$E_0^p(A) = F^p(A)/F^{p+1}(A). \quad (1.4.11)$$

Observação 1.4.12 Se H^* é um R -módulo graduado e se F é uma filtração sobre H^* , então $F^p(H^n) = F^p(H^*) \cap H^n \subset F^{p-1}(H^*) \cap H^n = F^{p-1}(H^n)$ e o módulo bigraduado associado $E_0^{*,*}$ é dado por

$$E_0^{p,q}(H^*, F) = F^p(H^{p+q})/F^{p+1}(H^{p+q}). \quad (1.4.12)$$

Definição 1.4.13 Uma sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ converge para um R -módulo graduado H^* , se existe uma filtração F sobre H^* tal que

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*, F), \quad (1.4.13)$$

onde $E_\infty^{*,*}$ é o termo limite da sequência espectral.

Definição 1.4.14 Uma sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ é uma sequência espectral do primeiro quadrante, se existe r tal que $E_r^{p,q} = 0$, para $p < 0$ ou $q < 0$.

Agora, recordemos os seguintes teoremas de Leray-Serre para fibrações (para demonstração vide [37, Teoremas 5.2 e 6.7]).

Teorema 1.4.15 (A Sequência Espectral Cohomológica de Leray-Serre) *Seja R um anel comutativo com unidade. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{-p} B$, onde B é conexo por caminhos, existe uma sequência espectral do primeiro quadrante $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, com*

$$E_2^{p,q} \cong H^p(B; \mathcal{H}^q(F; R)), \quad (1.4.14)$$

a cohomologia de B com coeficientes locais na cohomologia de F , a fibra de p , e convergindo para $H^*(E; R)$. Além disso, essa seqüência é natural com relação a aplicações entre fibrações que preservem fibras.

Teorema 1.4.16 (A Seqüência Espectral Homológica de Leray-Serre) *Seja G um grupo abeliano. Dada uma fibração $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde B é conexo por caminhos, existe uma seqüência espectral do primeiro quadrante $\{E_{*,*}^r, d^r\}$, com*

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F; G)), \quad (1.4.15)$$

a homologia de B com coeficientes locais na homologia de F , a fibra de p , e convergindo para $H_*(E; G)$. Além disso, essa seqüência é natural com relação a aplicações entre fibrações que preservem fibras.

1.5 O homomorfismo transgressão

Sejam $p : E \rightarrow B$ uma fibração com fibra F e $p_0 : (E, F) \rightarrow (B, *)$. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^q(F) & \xrightarrow{i_*} & H^q(E) & \xrightarrow{j_*} & H^q(E, F) & \xrightarrow{\partial} & H^{q-1}(F) & \longrightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow p_* & & \downarrow p_{0*} & \nearrow & \downarrow & \\ \longrightarrow & H^q(*) & \longrightarrow & H^q(B) & \xrightarrow{j_*} & H^q(B, *) & \longrightarrow & H^{q-1}(*) & \longrightarrow \end{array} \quad (1.5.1)$$

cujas linhas são as seqüências exatas de homologia dos pares (E, F) e $(B, *)$, com coeficientes em um anel R .

Definição 1.5.1 O homomorfismo,

$$\tau : j_*^{-1}(\text{imp}_{0*}) \rightarrow H_{q-1}(F)/\partial \ker p_{0*}, \quad (1.5.2)$$

dado por $\tau(z) = \partial(c) + \partial(\ker p_{0*})$, onde $z \in j_*^{-1}(\text{imp}_{0*})$ e $p_{0*}^{-1}(j_*(z)) = c + \ker p_{0*}$ está bem definido e é chamado *homomorfismo transgressão*.

A noção dual pode ser definida para cohomologia como segue: consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
\longrightarrow & H^{q-1}(\ast) & \xrightarrow{\delta} & H^q(B, \ast) & \xrightarrow{j^*} & H^q(B) & \longrightarrow H^q(\ast) \longrightarrow \\
& \downarrow & & \downarrow p_0^* & \nearrow \tau & \downarrow p^* & \downarrow \\
\longrightarrow & H^{q-1}(F) & \xrightarrow{\delta} & H^q(E, F) & \xrightarrow{j^*} & H^q(E) & \longrightarrow H^q(F) \longrightarrow
\end{array} \quad (1.5.3)$$

cuas linhas são as seqüências exatas de cohomologia dos pares (E, F) e $(B, \ast)$, com coeficientes em um anel R .

Definição 1.5.2 O homomorfismo $\tau : \delta^{-1}(\text{imp}_0^*) \rightarrow H^q(B)/\ker p^*$ definido por

$$\tau(z) = j^*(c) + \ker p^*, \quad (1.5.4)$$

onde $z \in \delta^{-1}(\text{imp}_0^*)$ e $p_0^*(c + \ker p_0^*) = \delta(z)$ é chamado *homomorfismo transgressão*.

Os teoremas a seguir, mostram que o *homomorfismo transgressão* pode ser identificado com o diferencial na seqüência espectral de Leray-Serre (para detalhes, ver [37]).

Teorema 1.5.3 Dada uma fibração $p : E \rightarrow B$ com fibra F e sua seqüência espectral homológica de Leray-Serre associada, então

- (1) $E_{n,0}^n \cong j_*^{-1}(\text{imp}_{0*}) \subset H_n(B)$;
- (2) $E_{0,n-1}^n \cong H_{n-1}(F)/\partial(\ker p_{0*})$;
- (3) $d^n : E_{n,0}^n \rightarrow E_{0,n-1}^n$ é o homomorfismo transgressão.

Teorema 1.5.4 Dada uma fibração $p : E \rightarrow B$ com fibra F e sua seqüência espectral cohomológica de Leray-Serre associada, então

- (1) $E_n^{n,0} \cong H^n(B)/\ker p^*$;
- (2) $E_n^{0,n-1} \cong \delta^{-1}(\text{imp}_0^*) \subseteq H^{n-1}(F)$;
- (3) $d_n : E_n^{0,n-1} \rightarrow E_n^{n,0}$ é o homomorfismo transgressão.

1.6 O homomorfismo de Bockstein

Sejam A, B, C grupos abelianos. Se

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \quad (1.6.1)$$

é uma seqüência exata curta, então a seqüência

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}(C_*X, A) \rightarrow \operatorname{Hom}(C_*X, B) \rightarrow \operatorname{Hom}(C_*X, C) \rightarrow 0 \quad (1.6.2)$$

é exata, onde C_*X denota o complexo de cadeias singulares de X . Assim, obtemos uma seqüência exata longa em cohomologia

$$\cdots \rightarrow H^k(X; A) \rightarrow H^k(X; B) \rightarrow H^k(X; C) \xrightarrow{\beta_k} H^{k+1}(X; A) \rightarrow \cdots \quad (1.6.3)$$

Os homomorfismos conectantes

$$\beta_k : H^k(X; C) \rightarrow H^{k+1}(X; A) \quad (1.6.4)$$

são chamados *homomorfismos de Bockstein* associados à seqüência exata curta 1.6.1.

1.7 Cohomologia dos espaços classificantes $B\mathbb{Z}_p$ e BS^1 .

Exemplo 1.7.1 Um modelo para $B\mathbb{Z}_2$, o espaço classificante para $\mathbb{Z}_2$, é o espaço projetivo infinito P^∞ . Então, $H^*(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \cong H^*(P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2[a]$, onde $a \in H^1(P^\infty; \mathbb{Z}_2)$ é o gerador. O gerador de $H^i(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ é a^i , para qualquer $i \geq 0$. Se $p > 2$ é primo, um modelo para $B\mathbb{Z}_p$, o espaço classificante para $\mathbb{Z}_p$ é o espaço leus infinito $L_p^\infty = S^\infty/\mathbb{Z}_p$. Assim, $H^i(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = H^i(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, para todo $i \geq 0$ e dado qualquer elemento não nulo $a \in H^1(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$, temos que $b = \beta(a)$ é um elemento não nulo de $H^2(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$, onde $\beta : H^1(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^2(L_p^\infty; \mathbb{Z}_p)$ é o *homomorfismo de Bockstein*. Mais geralmente, um gerador $\mu \in H^i(B\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ é dado por

$$\mu = \begin{cases} a \sim b^{(i-1)/2}, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ b^{i/2}, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases} \quad (1.7.1)$$

Exemplo 1.7.2 Um modelo para BS^1 , o espaço classificante para S^1 , é o espaço projetivo complexo infinito $\mathbb{C}P^\infty$. Então, $H^*(BS^1; \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{C}P^\infty; \mathbb{Z})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}[c]$ com gerador $c \in H^2(BS^1; \mathbb{Z})$ (para demonstração, vide [21, Cap.3, §2, Proposição 2.1]). Observemos que $B(S^1 \times S^1) = BS^1 \times BS^1$.

1.8 A Classe de Euler e a seqüência de Gysin

Lembremos que um *par fibrado* consiste de um fibrado $p : E \rightarrow B$, com fibra F , junto com um subespaço $E' \subset E$ tal que $p : E' \rightarrow B$ é um fibrado com fibra $F' \subset F$, com trivializações locais para E' obtidas por restrições das trivializações locais para E .

Exemplo 1.8.1 Sejam $p : E \rightarrow B$ um fibrado cuja fibra é o n -disco D^n e $E' \subset E$ a reunião dos bordos das fibras, ou seja, E' é reunião de esferas S^{n-1} . Então, $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (E, E') \xrightarrow{p} B$ é um par fibrado, o qual chamaremos *fibrado em disco*.

Seja $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (E, E') \xrightarrow{p} B$ um fibrado em disco. Um elemento $c \in H^n(E, E'; R)$, cuja restrição a cada fibra (D^n, S^{n-1}) é um gerador de $H^n(D^n, S^{n-1}; R) \cong R$, é chamado uma *classe de Thom* para o par fibrado $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (E, E') \xrightarrow{p} B$.

Observação 1.8.2 Uma *classe de Thom* com coeficientes em $\mathbb{Z}$, dá origem a uma *classe de Thom* com coeficientes em qualquer anel comutativo com identidade R , sob o homomorfismo $H^n(E, E'; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(E, E'; R)$, induzido pelo homomorfismo $\mathbb{Z} \rightarrow R$, o qual leva 1 no elemento identidade de R .

Teorema 1.8.3 (Teorema do Isomorfismo de Thom) *Se o fibrado em disco $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (E, E') \rightarrow B$ possui uma classe de Thom $c \in H^n(E, E'; R)$, então a aplicação $\phi : H^i(B; R) \rightarrow H^{i+n}(E, E'; R)$ definida por*

$$\phi(b) = p^*(b) \cup c, \quad (1.8.1)$$

é um isomorfismo para todo $i \geq 0$ e $H^i(E, E'; R) = 0$, para $i < n$. O isomorfismo ϕ é chamado isomorfismo de Thom.

Teorema 1.8.4 *Todo fibrado em disco possui uma classe de Thom com coeficientes em $\mathbb{Z}_2$ e fibrados em disco orientáveis possuem classe de Thom com coeficientes em $\mathbb{Z}$.*

Consideremos o fibrado em esfera $S^{n-1} \hookrightarrow E \rightarrow B$ e o mapping cylinder M_p , o qual é um fibrado em disco $D^n \hookrightarrow M_p \xrightarrow{p} B$. Temos que $(D^n, S^{n-1}) \hookrightarrow (M_p, E) \xrightarrow{p} B$ é um par fibrado. Suponhamos que exista uma classe de Thom $c \in H^n(M_p, E; R)$

(pelo Teorema 1.8.4, tal classe sempre existe, no caso em que o fibrado em disco é orientado ou se $R = \mathbb{Z}_2$). Consideremos o seguinte diagrama comutativo, com coeficientes em R , cuja primeira linha é a sequência exata longa dos grupos de cohomologia do par (M_p, E)

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^i(M_p, E) & \xrightarrow{j^*} & H^i(M_p) & \longrightarrow & H^i(E) \longrightarrow H^{i+1}(M_p, E) \longrightarrow \cdots \\ & & \cong \uparrow \phi & & \cong \uparrow p^* & & \uparrow - \\ \cdots & \longrightarrow & H^{i-n}(B) & \xrightarrow{\cup c} & H^i(B) & \xrightarrow{p^*} & H^i(E) \longrightarrow H^{i-n+1}(B) \longrightarrow \cdots \end{array} \quad (1.8.2)$$

As aplicações ϕ são os isomorfismos de Thom e as aplicações verticais $p^* : H^i(B) \rightarrow H^i(M_p)$ são isomorfismos para todo i , desde que M_p é um retrato por deformação sobre B . A classe $c \in H^n(B; R)$, definida por

$$c = (p^*)^{-1} \circ j^*(c), \quad (1.8.3)$$

é chamada *classe de Euler* do fibrado em esfera $S^{n-1} \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$, onde $c \in H^n(M_p, E; R)$ é uma classe de Thom. A linha inferior do diagrama 1.8.2

$$\cdots \longrightarrow H^{i-n}(B; R) \xrightarrow{\cup c} H^i(B; R) \xrightarrow{p^*} H^i(E; R) \longrightarrow H^{i-n+1}(B; R) \longrightarrow \cdots$$

é uma sequência exata, chamada a *sequência de Gysin*. Desde que $H^i(B; R) = 0$ para $i < 0$, temos isomorfismos $p^* : H^i(B; R) \rightarrow H^i(E; R)$, para $i < n - 1$ e a parte mais interessante da *sequência de Gysin* é dada por

$$0 \rightarrow H^{n-1}(B; R) \xrightarrow{p^*} H^{n-1}(E; R) \rightarrow H^0(B; R) \xrightarrow{\cup c} H^n(B; R) \xrightarrow{p^*} H^n(E; R) \rightarrow \cdots \quad (1.8.4)$$

Observação 1.8.5 Seja X um $\mathbb{Z}_2$ -espaço livre e denotemos por η_X o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $X \rightarrow X/\mathbb{Z}_2$, o qual é um fibrado em esfera. Consideremos a classe de Euler $e(\eta_X) \in H^1(X/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ e denotemos por $\alpha \in H^1(B\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ a classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal universal $E\mathbb{Z}_2 \rightarrow B\mathbb{Z}_2$. Suponhamos que $h : X/\mathbb{Z}_2 \rightarrow B\mathbb{Z}_2$ seja uma aplicação classificante para η_X , então segue do Teorema 1.1.1 que $h^*(\omega_{\mathbb{Z}_2})$ e η_X são $\mathbb{Z}_2$ -fibrados principais isomorfos. Por outro lado, de [20, Teorema 4.13] temos que

$$\begin{array}{ccc} h^*(E\mathbb{Z}_2) & \longrightarrow & E\mathbb{Z}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{h} & B\mathbb{Z}_2 \end{array} \quad (1.8.5)$$

é uma aplicação fibrada entre os fibrados $\omega_{\mathbb{Z}_2}$ e o fibrado pullback $h^*(\omega_{\mathbb{Z}_2})$. Assim, segue da naturalidade da classe de Euler que $h^*(\alpha) = e(h^*(\omega_{\mathbb{Z}_2}))$, onde $e(h^*(\omega_{\mathbb{Z}_2})) \in H^1(X/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$ denota a classe de Euler de $h^*(\omega_{\mathbb{Z}_2})$ (vide [38, § 9, Proposição 9.2]). Desde que η_X e $h^*(\omega_{\mathbb{Z}_2})$ são $\mathbb{Z}_2$ -fibrados principais isomorfos, temos que $e(\eta_X) = e(h^*(\omega_{\mathbb{Z}_2}))$ e portanto $e(\eta_X) = h^*(\alpha)$.

Observação 1.8.6 Sejam X e Y $\mathbb{Z}_2$ -espaços livres e consideremos os $\mathbb{Z}_2$ -fibrados principais $X \rightarrow X/\mathbb{Z}_2$ e $Y \rightarrow Y/\mathbb{Z}_2$, respectivamente. Consideremos as classes de Euler desses fibrados: $e \in H^1(X/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$, $u \in H^1(Y/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$, respectivamente. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante e $\bar{f} : X/\mathbb{Z}_2 \rightarrow Y/\mathbb{Z}_2$ é a induzida por f entre os espaços de órbitas, então temos que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/\mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/\mathbb{Z}_2 \end{array} \quad (1.8.6)$$

é uma aplicação fibrada. Segue da naturalidade da classe de Euler que $\bar{f}^*(u) = e$, onde $f^* : H^1(Y/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(X/\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}_2)$.

1.9 A Classe de Wu

Nesta seção, apresentamos a definição e propriedades das *Classes de Wu*, no sentido de [39, Cap.9 §5]. Para definirmos as *Classes de Wu*, nós primeiramente definiremos uma seqüência de operações Sq^k , chamadas *quadrados de Steenrod*. Os *quadrados de Steenrod*, $\{Sq^k\}_{k \geq 0}$, são operações cohomológicas aditivas

$$Sq^k : H^m(X; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{m-k}(X; \mathbb{Z}_2), \quad (1.9.1)$$

definidas para todo m satisfazendo as seguintes propriedades

- (1) *Naturalidade*. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua, então $Sq^k \circ f^* = f^* \circ Sq^k$.
- (2) Se $x \in H^m(X; \mathbb{Z}_2)$, então $Sq^0(x) = x$, $Sq^m(x) = x \smile x$ e $Sq^k(x) = 0$, para $k > m$.
- (3) Se $x, y \in H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, a *fórmula de Cartan* é válida:

$$Sq^k(x \smile y) = \sum_{i+j=k} Sq^i(x) \smile Sq^j(y), \quad (1.9.2)$$

onde $\smile$ denota o produto *cup*. A operação *quadrado total* é dada por

$$Sq(x) = x + Sq^1(x) + Sq^2(x) + \cdots + Sq^m(x), \text{ onde } x \in H^m(X; \mathbb{Z}_2). \quad (1.9.3)$$

Observação 1.9.1 Usando a operação *quadrado total*, temos que a fórmula de Cartan pode ser dada pela equação

$$Sq(x \smile y) = Sq(x) \smile Sq(y). \quad (1.9.4)$$

Seja M uma m -dimensional variedade diferenciável conexa e fechada. Então a aplicação

$$H^k(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}(H^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2); \mathbb{Z}_2), \quad (1.9.5)$$

que leva $v \rightarrow \langle v \smile x, [M] \rangle$ é um isomorfismo, onde $[M] \in H^m(M; \mathbb{Z}_2)$ é a classe fundamental de M . Consideremos o homomorfismo

$$h : H^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad (1.9.6)$$

que leva $x \mapsto \langle Sq^k(x), [M] \rangle$. Desde que (1.9.5) é um isomorfismo, existe um único elemento $v_k \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ tal que $\langle v_k \smile x, [M] \rangle = h(x)$, ou seja, existe uma única classe de cohomologia $v_k \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ tal que

$$\langle v_k \smile x, [M] \rangle = \langle Sq^k(x), [M] \rangle, \quad (1.9.7)$$

para todo $x \in H^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2)$. A classe v_k é chamada a k -ésima *classe de Wu* de M e $v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_m$ é chamada a *classe total de Wu* da variedade M . Segue de 1.9.7 e da propriedade (2) que $v_k = 0$, para $k > m - k$ e assim,

$$v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{[m/2]}, \quad (1.9.8)$$

onde $[m/2]$ denota o maior inteiro menor que $m/2$.

Temos o seguinte (vide [39, Teorema 17])

Teorema 1.9.2 (*Wu*) A classe total de Stiefel-Whitney de M satisfaz

$$w(M) = Sq(v), \text{ ou seja, } w_k = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j), \quad (1.9.9)$$

onde v é a classe total de Wu da variedade M , caracterizada pela equação

$$\langle v \smile x, [M] \rangle = \langle Sq(x), [M] \rangle, \quad (1.9.10)$$

para todo $x \in H^*(M; \mathbb{Z}_2)$.

Capítulo 2

O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas

2.1 Introdução

O teorema clássico de Borsuk-Ulam[6] afirma que para qualquer função contínua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(-x)$, se $k \leq n$. A famosa versão do Teorema de Borsuk-Ulam provada por Conner e Floyd [15], substitui o espaço euclidiano $\mathbb{R}^k$ por uma k -variedade diferenciável M^k , com a hipótese adicional que a induzida em cohomologia da f no nível n se anula. Na demonstração de Conner e Floyd a estrutura diferenciável da variedade M^k permitiu que se fizesse uso das classes de Stiefel-Whitney.

H.J. Munkholm [42] mostrou que todas as hipóteses de diferenciabilidade podem ser eliminadas, se M^k for compacta, substituindo a variedade diferenciável por uma variedade topológica fechada. Em sua demonstração, ele transfere o problema, de uma vizinhança Euclidiana da variedade topológica para o aberto do $\mathbb{R}^n$, e o reformula partindo da estrutura diferenciável desse aberto, podendo assim fazer uso das classes de Stiefel-Whitney.

No caso em que M^k é uma variedade generalizada, esse argumento não pode ser apli-

cado, uma vez que variedades generalizadas não são localmente Euclidianas. Recentemente, em [4], C. Biasi et al. definiram as classes de Stiefel-Whitney para variedades generalizadas e esse é o principal ponto concernente à nossa generalização: seguindo os mesmos passos de Conner e Floyd e usando a definição de tais classes, nós provamos o seguinte

Teorema 2.1.1 *Seja $f : S^n \rightarrow M^k$ uma função contínua da n -esfera S^n em uma variedade generalizada M^k e denotemos por $A(f) = \{x \in X; f(x) = f(-x)\}$. Então,*

- i) se $n > k$, $\dim A(f) \geq n - k$;*
- ii) se $n = k$ e $f^* : H^n(M^n, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(S^n, \mathbb{Z}_2)$ for nula, $A(f) \neq \emptyset$.*

Em todo esse capítulo, os grupos de homologia e cohomologia terão sempre coeficientes em $\mathbb{Z}_2$; $\check{H}^*$ denotará a cohomologia de Alexander-Čech no sentido de [46, Cap. 6], H_*^c e H_c^* denotarão os grupos de homologia e cohomologia singular com suporte compacto, no sentido de [46, Cap. 6, §6]. Por *dim*, nós entenderemos a dimensão topológica usual e o símbolo “ $\cong$ ” denotará o isomorfismo apropriado entre os objetos algébricos.

2.2 $\mathbb{Z}_2$ -Variedades Generalizadas

Variedades generalizadas de dimensão m que estaremos considerando neste capítulo são certos espaços topológicos M tais que para todo ponto $x \in M$, $H_*(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $H_*(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\}; \mathbb{Z}_2)$. Tais variedades têm sido recentemente estudadas; por exemplo, um resultado conhecido é que existem variedades generalizadas que não são homotopicamente equivalentes a variedades topológicas (vide [13] e [14]). A seguir, nós damos a definição precisa de variedades generalizadas.

Definição 2.2.1 Um espaço M localmente compacto Hausdorff é uma variedade generalizada de dimensão m se as seguintes condições são satisfeitas.

- (1) M é hereditariamente paracompacto (vide observação 2.2.2 a).
- (2) $\dim_{\mathbb{Z}_2} M < +\infty$ no sentido de [11] (vide observação 2.2.2 b).
- (3) M é $HLC_{\mathbb{Z}_2}^\infty$ no sentido de [11, pg.35] (vide observação 2.2.2 c).

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 21

(4) $H_*(M, M - \{x\}; \mathbb{Z}_2) \simeq H_*(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{0\}; \mathbb{Z}_2)$ para todo $x \in M$.

Observação 2.2.2 (a) Um espaço topológico é hereditariamente paracompacto se todo subconjunto aberto é paracompacto. (vide [11, cap.1, § 6]). Essa condição é necessária para garantir que todo subconjunto aberto de uma variedade generalizada seja sempre uma variedade generalizada.

(b) Segue de [11, Teorema 16.14, pg.115] que $\dim_{\mathbb{Z}_2} M < +\infty$ se e somente se existe um $l < +\infty$ tal que $H_c^{l-1}(U) = 0$ para todo subconjunto aberto U de M , onde H_c^* denota a cohomologia singular com suporte compacto.

(c) Um espaço topológico X é $HLC_{\mathbb{Z}_2}^\infty$ (localmente homologicamente conexo) se para cada $x \in X$, cada vizinhança U de x e cada natural p , existe uma vizinhança $V \subset U$ de x tal que o homomorfismo $\tilde{H}_p(V) \rightarrow \tilde{H}_p(U)$ induzido pela inclusão é trivial (vide [11, pg.35]), onde $\tilde{H}_*$ denota a homologia singular reduzida. Observemos que essa condição junto com a condição (a) implicam, na nossa situação, que a homologia e cohomologia sheaf coincidem com a homologia e cohomologia singular, respectivamente (vide [11]).

(d) Recordemos que um espaço topológico X é um ENR (Retrato de uma Vizinhança Euclidiana) se existem um subespaço Y de algum $\mathbb{R}^n$ homeomorfo a X , uma vizinhança V de Y e uma retração $r : V \rightarrow Y$. Se M é um ENR e satisfaz a condição (4) da Definição 2.2.1, então M é uma variedade generalizada de dimensão m . Nós chamamos um tal espaço uma ENR $\mathbb{Z}_2$ -variedade homológica. Em particular, variedades topológicas segundo enumeráveis são todas ENR $\mathbb{Z}_2$ -variedades homológicas. Observemos que um espaço métrico separável X é um ENR se, e somente se, ele é um ANR (Retrato de uma Vizinhança Absoluta) localmente compacto e tem dimensão topológica finita (ver [32, Cap.V]). Observemos também que as variedades homológicas construídas em [13] e [14] são todas ENR $\mathbb{Z}_2$ -variedades homológicas no sentido acima.¹

Em [7] e [8], foi mostrado que a Dualidade de Poincaré é válida para variedades generalizadas localmente orientáveis. Além disso, em [9], mostrou-se que toda variedade

¹ Em [13] e [14] eles usam coeficientes em $\mathbb{Z}$ na condição correspondente à Definição 2.2.1 (4). Assim essa condição sempre implica a nossa.

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 22

generalizada é localmente orientável. Assim, a Dualidade de Poincaré é válida para todas as variedades generalizadas (para detalhes ver [11]). Mais precisamente, se M é uma variedade generalizada conexa de dimensão m , então $H_m^c(M)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ e os homomorfismos

$$\frown [M] : H^i(M) \rightarrow H_{m-i}^c(M), \quad (2.2.1)$$

$$\frown [M] : H_c^i(M) \rightarrow H_{m-i}(M) \quad (2.2.2)$$

são isomorfismos para todo i , onde $[M]$ é o gerador de $H_m^c(M)$ e é chamada a *classe fundamental de M* (vide também Observação 2.2.3). Os isomorfismos acima são chamados isomorfismos *Dualidade de Poincaré* e serão denotados por D_M .

Observação 2.2.3 Observemos que o teorema dos coeficientes universais vale para cohomologia com suporte compacto e homologia com suporte fechado. De fato, para um espaço topológico X , o produto $\cup$ ² é uma aplicação bilinear

$$H^i(X) \times H^j(X) \rightarrow H^{i+j}(X) \text{ ou}$$

$$H_c^i(X) \times H^j(X) \rightarrow H_c^{i+j}(X) \text{ ou}$$

$$H_c^i(X) \times H_c^j(X) \rightarrow H_c^{i+j}(X),$$

o produto $\cap$ é uma aplicação bilinear

$$H^i(X) \times H_j(X) \rightarrow H_{j-i}(X) \text{ ou}$$

$$H^i(X) \times H_j^c(X) \rightarrow H_{j-i}^c(X) \text{ ou}$$

$$H_c^i(X) \times H_j^c(X) \rightarrow H_{j-i}^c(X),$$

e o índice de Kronecker $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma aplicação bilinear

$$H_c^i(X) \times H_i^c(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \text{ ou}$$

$$H^i(X) \times H_i(X) \rightarrow \mathbb{Z}_2.$$

A seguir, apresentamos um exemplo de uma variedade generalizada que não é uma variedade topológica.

²Para detalhes vide [27, §26]

Exemplo 2.2.4 Seja M uma variedade topológica que é uma $(\mathbb{Z}_2, n)$ -esfera de homologia, ou seja, $H_*(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_*(S^n; \mathbb{Z}_2)$, e que não é homeomorfa à esfera S^n .

Por exemplo, consideremos uma esfera ímpar S^{2n+1} com a ação padrão de $\mathbb{Z}_p$, onde $n \geq 1$ e $p > 2$ é primo. Então, $H_*(S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_2) \cong H_*(S^{2n-1}; \mathbb{Z}_2)$, ou seja, $S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$ é uma $\mathbb{Z}_2$ -esfera de homologia, porém não é homeomorfo à S^{2n+1} . Basta observar que $\pi_1(S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$, se $p > 2$ é primo, enquanto que $\pi_1(S^{2n+1}) = 0$, se $n \geq 1$.

Assim, se M é uma n -dimensional variedade topológica nessas condições, a suspensão de M , $S(M)$ é uma variedade generalizada de dimensão $n+1$. De fato, $S(M)$ é um ENR e para todo $x \in S(M)$, $H_*(S(M), S(M) - \{x\}; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfo a $H_*(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$.

Figura 2.1: Uma variedade generalizada que não é uma variedade topológica

Porém, $S(M)$ não é variedade topológica. De fato, observemos que dada qualquer vizinhança V do ponto $x_0 \in S(M)$, como na Figura 2.1, temos que V é homeomorfa ao Cone de M , porém $C(M)$ não é homeomorfo a um disco, uma vez que $\partial(CM) = M$ e M não é homeomorfa à esfera S^n .

2.2.1 As classes de Stiefel-Whitney de uma variedade generalizada

Seja M uma $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada, usando a Dualidade de Poincaré junto com a operação quadrado de Steenrod, é possível definir as classes de Wu e portanto as classes de Stiefel-Whitney $w_q(M) \in H^q(M)$ pela fórmula de Wu. De fato, consideremos

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 24

o seguinte

Teorema 2.2.5 *Seja M uma m -dimensional variedade generalizada conexa. Consideremos a seguinte aplicação*

$$H^k(M; \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_c^m(M; \mathbb{Z}_2) \cong H_0(M; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2, \quad (2.2.3)$$

que leva $\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \smile \beta \mapsto \langle \alpha \smile \beta, [M] \rangle \in \mathbb{Z}_2$. Então a aplicação

$$H^k(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}(H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \quad (2.2.4)$$

que leva $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$, onde $\bar{\alpha}(\beta) = \langle \alpha \smile \beta, [M] \rangle$, é um isomorfismo.

Demonstração. De 2.2.2 temos o isomorfismo Dualidade de Poincaré

$$\smile [M] : H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(M; \mathbb{Z}_2). \quad (2.2.5)$$

Assim, segue do Teorema dos Coeficientes Universais e de 2.2.5 que existe o isomorfismo

$$H^k(M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_k(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2), \quad (2.2.6)$$

que leva $\alpha \mapsto \alpha^* \mapsto \alpha^0$, onde $\alpha^*(\gamma) = \langle \alpha, \gamma \rangle$ e $\alpha^0(\beta) = \alpha^*(\beta \smile [M])$. Mostremos que $\alpha^0 = \bar{\alpha}$ e, deste modo, a aplicação $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ será um isomorfismo. De fato,

$$\alpha^0(\beta) = \alpha^*(\beta \smile [M]) = \langle \alpha, \beta \smile [M] \rangle = \langle \alpha \smile \beta, [M] \rangle = \bar{\alpha}(\beta), \quad (2.2.7)$$

para todo $\beta \in H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2)$ e portanto $\alpha^0 = \bar{\alpha}$, como queríamos demonstrar. ■

Consideremos agora o seguinte homomorfismo $h : H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, dado por

$$h(x) = \langle Sq^k(x), [M] \rangle, \quad (2.2.8)$$

que é a composição da operação quadrado de Steenrod $Sq^k : H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_c^m(M; \mathbb{Z}_2)$ com o homomorfismo $\langle _, [M] \rangle : H_c^m(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Segue do Teorema 2.2.5 que a aplicação

$$H^k(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \text{Hom}(H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) \quad (2.2.9)$$

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 25

que leva $v \mapsto \bar{v}$ é um isomorfismo, onde $\bar{v}(x) = \langle v \smile x, [M] \rangle$. Assim, desde que $h \in \text{Hom}(H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$, existe uma única classe $v_k \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ tal que $\bar{v}_k = h$, ou seja, existe uma única classe $v_k \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ tal que

$$\langle v_k \smile x, [M] \rangle = \langle Sq^k(x), [M] \rangle, \quad (2.2.10)$$

para todo $x \in H_c^{m-k}(M; \mathbb{Z}_2)$. A classe v_k é chamada a *k-ésima classe de Wu* da variedade generalizada M e

$$v(M) = 1 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{m/2} \in H^*(M; \mathbb{Z}_2). \quad (2.2.11)$$

é chamada a *classe total de Wu* da variedade generalizada M e é caracterizada pela identidade:

$$\langle v \smile x, [M] \rangle = \langle Sq(x), [M] \rangle, \quad (2.2.12)$$

para todo $x \in H_c^*(M; \mathbb{Z}_2)$, onde $Sq : H_c^*(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_c^*(M; \mathbb{Z}_2)$ denota a operação quadrado total de Steenrod.

Definição 2.2.6 A *classe total de Stiefel-Whitney* da variedade generalizada M é definida por

$$w(M) = Sq(v(M)) \in H^*(M; \mathbb{Z}_2). \quad (2.2.13)$$

onde $v(M)$ é a classe total de Wu de M . A *k-ésima classe de Stiefel-Whitney* da variedade generalizada M , $w_k(M) \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ é dada por

$$w_k(M) = \sum_{i+j=k} Sq^i(v_j(M)). \quad (2.2.14)$$

Observação 2.2.7 A definição das classes de Stiefel-Whitney de uma variedade generalizada M mostra que tais classes podem ser estudadas do ponto de vista algébrico topológico e que a hipótese de diferenciabilidade sobre M não é necessária.

Observação 2.2.8 Sejam M, N $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas. Então $w(M \times N) = w(M) \otimes w(N)$, onde $\otimes$ denota o produto cross. De fato, sejam $v(M), v(N)$ as classes de Wu de M e N , respectivamente. De (2.2.12) temos que

$$v(M) \smile x = Sq(x), \quad \forall x \in H_c^*(M; \mathbb{Z}_2) \quad (2.2.15)$$

$$v(N) \smile y = Sq(y), \quad \forall y \in H_c^*(N; \mathbb{Z}_2). \quad (2.2.16)$$

Seja $z = x \otimes y \in H_c^*(M \times N; \mathbb{Z}_2) \cong H_c^*(M; \mathbb{Z}_2) \times_{\mathbb{Z}_2} H_c^*(N; \mathbb{Z}_2)$, então

$$\begin{aligned}
 \langle v(M) \otimes v(N) \sim z, [M \times N] \rangle &= \langle v(M) \otimes v(N) \sim x \otimes y, [M \times N] \rangle \\
 &= \langle v(M) \smile x \otimes v(N) \smile y, [M \times N] \rangle \\
 &= \langle Sq(x) \otimes Sq(y), [M \times N] \rangle \\
 &= \langle Sq(x \otimes y), [M \times N] \rangle \\
 &= \langle Sq(p_1^*(x) \smile p_2^*(y)), [M \times N] \rangle \\
 &= \langle Sq(p_1^*(x)) \smile Sq(p_2^*(y)), [M \times N] \rangle \\
 &= \langle p_1^*Sq(x) \smile p_2^*Sq(y), [M \times N] \rangle \\
 &= \langle Sq(x) \otimes Sq(y), [M \times N] \rangle \\
 &= \langle Sq(z), [M \times N] \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

onde $p_1 : M \times N \rightarrow M$ e $p_2 : M \times N \rightarrow N$ são as projeções naturais. Segue da unicidade da classe de Wu que $v(M) \otimes v(N) = v(M \times N)$. Assim, de (2.2.13), temos que $w(M \times N) = w(M) \otimes w(N)$.

Uma importante propriedade das classes de Stiefel-Whitney de uma $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada é que elas são invariantes por homeomorfismos. Nós provamos esse fato na seguinte

Proposição 2.2.9 Sejam M, N $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas. Se $f : M \rightarrow N$ é um homeomorfismo, então $f^*(w(N)) = w(M)$.

Demonstração. Seja $v(M) \in H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ a classe total de Wu. Segue de (2.2.12) que

$$\langle x \smile v(M), [M] \rangle = \langle Sq(x), [M] \rangle \tag{2.2.18}$$

para todo $x \in H_c^*(M; \mathbb{Z}_2)$. Se $x = f^*(y)$, o lado direito da equação (2.2.18) é igual a

$$\begin{aligned}
 \langle Sq(x), [M] \rangle &= \langle Sqf^*(y), [M] \rangle && \text{(Naturalidade de } Sq) \\
 &= \langle f^*Sq(y), [M] \rangle && \text{(Propriedade de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
 &= \langle Sq(y), f_*[M] \rangle && (f_* \text{ é isomorfismo}) \\
 &= \langle Sq(y), [N] \rangle && \text{(segue de 2.2.12)} \\
 &= \langle y \smile v(N), [N] \rangle && (f_* \text{ é isomorfismo}) \\
 &= \langle y \smile v(N), f_*[M] \rangle && \text{(Propriedade de } \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
 &= \langle f^*(y \smile v(N)), [M] \rangle && \text{(Propriedade de } \smile) \\
 &= \langle x \smile f^*v(N), [M] \rangle
 \end{aligned}$$

o que implica que $v(M) = f^*v(N)$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 w(M) &= Sq(v(M)) && (2.2.19) \\
 &= Sq(f^*v(N)) \\
 &= f^*Sq(v(N)) \\
 &= f^*w(N),
 \end{aligned}$$

ou seja, $w(M) = f^*w(N)$. ■

Sejam M, N $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas de dimensão m e n respectivamente, tais que $k = n - m > 0$ e $f : M \rightarrow N$ uma função contínua própria. Pelo isomorfismo Dualidade de Poincaré, existe uma única classe $\varphi_k \in H^k(N; \mathbb{Z}_2)$ tal que

$$D_N(\varphi_k) = \varphi_k \smile [N] = f_*[M]. \quad (2.2.20)$$

A classe φ_k é chamada a *classe dual de Poincaré* de $f_*[M] \in H_m^c(N; \mathbb{Z}_2)$. Observemos que $f_*[M] \in H_m^c(N; \mathbb{Z}_2)$ está bem definida, uma vez que f é uma função contínua própria (vide [17, pg.118]).

Sejam $w(M) \in H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ e $w(N) \in H^*(N; \mathbb{Z}_2)$ as classes totais de Stiefel-Whitney de M e N , respectivamente, e denotemos por $\bar{w}(M) \in H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ a classe dual de Stiefel-Whitney de M , isto é, $w(M) = \bar{w}(M)^{-1}$.

Definição 2.2.10 A classe total de Stiefel-Whitney do fibrado normal estável de f é definida pela fórmula:

$$w(f) = f^*w(N) \smile \bar{w}(M), \quad (2.2.21)$$

e o termo de grau k de $w(f)$,

$$w_k(f) = \sum_{i+j=k} f^*w_i(N) \smile w_j(M) \in H^k(M; \mathbb{Z}_2), \quad (2.2.22)$$

é chamada a k -ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado normal estável de f .

Observação 2.2.11 Observemos que no caso diferenciável, $w(f)$ coincide com a classe total de Stiefel-Whitney do fibrado normal de $f : M \rightarrow N$, quando f é uma imersão.

Em [4], foi definida a seguinte classe

$$\theta(f) = (f^*\varphi_k - w_k(f)) \smile [M] \in H_{m-k}^c(M; \mathbb{Z}_2) \quad (2.2.23)$$

e foram provados os seguintes resultados (vide [1, Lema 2.6; Corolário 3.5]).

Teorema 2.2.12 Seja V um subconjunto aberto ³ de N que contenha $f(M)$ e considere a aplicação $f_V = f : M \rightarrow V (\subset N)$. Então, $\theta(f) = \theta(f_V)$ em $H_{m-k}^c(M)$ e, conseqüentemente, $w(f) = w(f_V)$.

Observação 2.2.13 Na demonstração do Teorema 2.2.12, a classe total de Stiefel-Whitney do aberto $V \xrightarrow{i} N$ satisfaz a identidade

$$w(V) = i^*(w(N)). \quad (2.2.24)$$

Teorema 2.2.14 Seja $f : M \rightarrow N$ um mergulho topológico próprio de uma m -dimensional $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada M em uma $(m+k)$ -dimensional $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada N , com $k > 0$. Então, $\theta(f) \in \tilde{H}_{m-k}^c(M)$ se anula e, conseqüentemente, $w_k(f) = f^*(\varphi_k)$.

Observação 2.2.15 Observemos que existe um homomorfismo natural

$$H_*^c(M; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \tilde{H}_*^c(M; \mathbb{Z}_2). \quad (2.2.25)$$

³Todo subconjunto aberto de uma variedade generalizada é sempre uma variedade generalizada.

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 29

A classe $\theta(f)$ está sendo vista ou como a classe de homologia em $H_{m-k}^c(M; \mathbb{Z}_2)$ conforme (2.2.23), ou como a sua imagem em $\check{H}_{m-k}^c(M; \mathbb{Z}_2)$ pelo homomorfismo (2.2.25). É conhecido que para espaços ANR, os grupos de homologia de Čech são naturalmente isomorfos aos grupos de homologia singular: mais precisamente, o homomorfismo 2.2.25 é um isomorfismo (vide, por exemplo, [46]). Além disso, esse resultado também é válido para $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas compactas (vide [11, Cap.5, §3, 3.15, pg.298]). Assim, para tais espaços, nós sempre identificamos esses dois grupos, especialmente para ENR $\mathbb{Z}_2$ -variedades homológicas e $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas compactas.

No Teorema 2.2.14, $\theta(f)$ se anula como um elemento de $H_{m-k}^c(M)$, desde que M seja uma $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada compacta ou um ANR.

Observação 2.2.16 Um mergulho topológico $f : M \rightarrow N$ entre $\mathbb{Z}_2$ -variedades generalizadas é próprio se e somente se $f(M)$ é um subconjunto fechado de N .

2.3 Lema Chave

Nesta seção, denotaremos por M^k uma $\mathbb{Z}_2$ -variedade generalizada compacta e conexa de dimensão $k \leq n$. $T : X \rightarrow X$ denota a involução sem pontos fixos definida por $T(x, y, z) = (-x, z, y)$, onde $X = S^n \times M^k \times M^k$ e $\Delta = \Delta(M^k)$ é a diagonal em $M^k \times M^k$. Fixemos um ponto $y_0 \in M^k$ e observemos que em X temos duas $\mathbb{Z}_2$ -subvariedades generalizadas: $S^n \times (y_0, y_0)$ e $S^n \times \Delta(M^k)$; as quais são ambas invariantes por T e cujos espaços de órbitas

$$S^n \times (y_0, y_0)/T = P^n \times (y_0, y_0) \quad \text{e} \quad S^n \times \Delta(M^k)/T = P^n \times \Delta(M^k), \quad (2.3.1)$$

são $\mathbb{Z}_2$ -subvariedades generalizadas em X/T de dimensão n e $n+k$, respectivamente. Nessas condições, nós provamos o seguinte Lema, que é uma particular generalização de [15, Lemma 32.3], o qual será fundamental na demonstração do Teorema 2.1.1.

Lema 2.3.1 *Sejam $j : P^n \times \Delta(M^k) \hookrightarrow X/T$ a inclusão e $\varphi_k \in H^k(X/T; \mathbb{Z}_2)$ a classe dual de Poincaré de $j_*[P^n \times \Delta(M^k)]$, ou seja, $\varphi_k \cap [X/T] = j_*[P^n \times \Delta(M^k)]$. Então,*

a k -ésima classe de Stiefel-Whitney do fibrado normal estável de j é dada por

$$w_k(j) = j^*(\varphi_k) = \sum_{\mu=0}^k c^{k-\mu} \otimes w_\mu(M)$$

onde c é o elemento não nulo em $H^1(P^n; \mathbb{Z}_2)$.

Demonstração. A igualdade $w_k(j) = j^*(\varphi_k)$ segue imediatamente do Teorema 2.2.14, desde que $P^n \times \Delta(M^k)$ é compacto e $j : P^n \times \Delta(M^k) \rightarrow X/T$ é um mergulho topológico próprio. Fixemos $x_0 \in S^n$ e consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} P^n \times (y_0 \times y_0) & & \\ \downarrow i_1 & \searrow j_1 & \\ P^n \times \Delta(M^k) & \xrightarrow{j} & X/T \\ \uparrow i_2 & \nearrow j_2 & \\ [x_0] \times \Delta(M^k) & & \end{array} \quad (2.3.2)$$

onde i_1, i_2, j_1 e j_2 são as inclusões naturais. Mostremos primeiramente que

$$j^*(w(X/T)) = j_1^*(w(X/T)) \otimes j_2^*(w(X/T)). \quad (2.3.3)$$

onde $\otimes$ denota o produto cross. De fato, seja $a \in H^*(X/T; \mathbb{Z}_2)$ arbitrário e consideremos $j^*(a) \in H^*(P^n \times \Delta(M^k); \mathbb{Z}_2)$. Desde que $\mathbb{Z}_2$ é um corpo, o produto cross define um isomorfismo de álgebras

$$H^*(P^n; \mathbb{Z}_2) \times H^*(\Delta(M^k); \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(P^n \times \Delta(M^k); \mathbb{Z}_2), \quad (2.3.4)$$

que leva $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \otimes \beta$ (vide [43, Cap.7, Teorema 61.6]). Deste modo, existem únicos $\alpha \in H^*(P^n; \mathbb{Z}_2)$ e $\beta \in H^*(\Delta(M^k); \mathbb{Z}_2)$ tais que

$$j^*(a) = \alpha \otimes \beta. \quad (2.3.5)$$

Sejam $p_1 : P^n \times \Delta(M^k) \rightarrow P^n \times (y_0 \times y_0)$ e $p_2 : P^n \times \Delta(M^k) \rightarrow [x_0] \times \Delta(M^k)$ as projeções naturais. Assim temos de [43, Cap.7, Teorema 61.5] que

$$\alpha \otimes \beta = p_1^*(\alpha) \sim p_2^*(\beta). \quad (2.3.6)$$

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 31

Observemos também que $p_1 \circ i_1$, $p_2 \circ i_2$ são identidades e $p_2 \circ i_1$, $p_1 \circ i_2$ são constantes. Então, segue da comutatividade do diagrama 2.3.2, de (2.3.5), (2.3.6) e da naturalidade do produto cup que

$$\begin{aligned} j_1^*(a) &= i_1^* \circ j^*(a) \\ &= i_1^*(\alpha \otimes \beta) \\ &= i_1^*(p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta)) \\ &= i_1^*(p_1^*(\alpha)) \smile i_1^*(p_2^*(\beta)) \\ &= (p_1 \circ i_1)^*(\alpha) \smile (p_2 \circ i_1)^*(\beta) \\ &= \alpha \smile 1 = \alpha. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Analogamente, temos que $j_2^*(a) = \beta$, o que implica que $j^*(a) = j_1^*(a) \otimes j_2^*(a)$. Desde que $w(X/T) \in H^*(X/T; \mathbb{Z}_2)$, nós concluímos que

$$j^*(w(X/T)) = j_1^*(w(X/T)) \otimes j_2^*(w(X/T)). \tag{2.3.8}$$

Deste modo, temos da Definição 2.2.10, da Observação 2.2.8 e das propriedades dos produtos cup e cross que

$$\begin{aligned} w(j) &= j^*(w(X/T)) \smile w(P^n \times \Delta) \\ &= j_1^*(w(X/T)) \otimes j_2^*(w(X/T)) \smile \bar{w}(P^n) \otimes w(\Delta) \\ &= j_1^*(w(X/T)) \smile w(P^n) \otimes j_2^*(w(X/T)) \smile \bar{w}(\Delta) \\ &= w(j_1) \otimes w(j_2), \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

ou seja, $w(j) = w(j_1) \otimes w(j_2)$ e então é suficiente computarmos as classes $w(j_1)$ e $w(j_2)$. Para computarmos $w(j_1)$, denotemos por $X' = S^n \times S^k \times S^k$ e consideremos $T' : S^n \times S^k \times S^k \rightarrow S^n \times S^k \times S^k$ definida por $T'(x, y, z) = (-x, z, y)$. Seja V uma vizinhança aberta contraível de M^k contendo y_0 . Consideremos a compactificação de Alexandrov de V , $V^* = V \cup \{\infty\}$. Segue de [32, Capítulo VIII, § 6, Corolário 1] que para o elemento não nulo $\alpha \in H^k(V^*; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ existe uma função $\tilde{g} : V^* \rightarrow S^k$ tal que $\tilde{g}^*(\gamma) = \alpha$, onde $\tilde{g}^* : H^k(S^k; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(V^*; \mathbb{Z}_2)$ e γ é o gerador de $H^k(S^k; \mathbb{Z}_2)$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\tilde{g}|_V = g : V \rightarrow D^k$ é uma função própria tal que $g(y_0) = 0 \in D^k$.

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 32

Denotemos por $U = S^n \times V \times V$ e $U' = S^n \times D^k \times D^k$. Desde que g é uma aplicação própria, temos que

$$h = Id \times g \times g : U \rightarrow U' \quad (2.3.10)$$

é própria, assim a induzida entre os espaços de órbitas $\bar{h} : U/T \rightarrow U'/T'$ também é uma aplicação própria. Deste modo, h induz isomorfismos

$$\bar{h}^* : H_c^*(U'/T'; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_c^*(U/T; \mathbb{Z}_2). \quad (2.3.11)$$

Usando os mesmos argumentos da demonstração da Proposição 2.2.9 (a qual só depende do fato de f induzir isomorfismo), temos que $h^*(w(U'/T')) = w(U/T)$. Como U/T e U'/T' são abertos em X/T e X'/T' , respectivamente, temos da observação 2.2.13 que $i^*w(X/T) = w(U/T)$ e $i'^*(w(X'/T')) = w(U'/T')$, onde i, i' são as inclusões naturais. Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} P^n \times y_0 \times y_0 & \xrightarrow{k} & U/T & \xrightarrow{i} & X/T \\ & \searrow k' & \downarrow h & & \\ & & U'/T' & \xrightarrow{i'} & X'/T' \end{array} \quad (2.3.12)$$

onde $k([x], y_0, y_0) = [x, y_0, y_0]$ e $k'([x], y_0, y_0) = [x, 0, 0] \in U'/T'$. Temos que $k' = \bar{h} \circ k$ e $j_1 = i \circ k$. Consideremos $j'_1 = i' \circ k'$ a inclusão de $P^n \times y_0 \times y_0$ em X'/T' e mostremos que $w(j_1) = w(j'_1)$. De fato,

$$\begin{aligned} w(j'_1) &= j_1'^*(w(X'/T')) \sim \bar{w}(P^n) \\ &= (i' \circ k')^*(w(X'/T')) \sim \bar{w}(P^n) \\ &= k'^* \circ i'^*(w(X'/T')) \sim \bar{w}(P^n) \\ &= k'^*(w(U'/T')) \sim \bar{w}(P^n) \\ &= (h \circ k)^*(w(U'/T')) \sim w(P^n) \\ &= k^* \circ \bar{h}^*(w(U'/T')) \sim w(P^n) \\ &= k^*(w(U/T)) \sim w(P^n) \\ &= k^* \circ i^*(w(X/T)) \sim \bar{w}(P^n) \\ &= j_1^*(w(X/T)) \sim w(P^n) \\ &= w(j_1). \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 33

É conhecido que $w_k(j'_1) = c^k \otimes 1$ e portanto nós concluímos que

$$w_k(j_1) = c^k \otimes 1 \quad (2.3.14)$$

Para $w(j_2)$, seja $U \subset S^n$ uma vizinhança aberta de $x_0 \in S^n$ que não contenha nenhum par de pontos antípodas e denotemos por $V = U \times M^k \times M^k$ a vizinhança aberta em X . Então $p : V \rightarrow V/T$ é um homeomorfismo e segue da Proposição 2.2.9 que

$$p^*w(V/T) = w(V). \quad (2.3.15)$$

Sejam $i : [x_0] \times \Delta(M^k) \hookrightarrow X = S^n \times M^k \times M^k$ a inclusão que leva $([x_0], y, y) \mapsto (x_0, y, y)$, $i_V = i : [x_0] \times \Delta(M^k) \rightarrow V \subset X$ e $j_{V/T} = j_2 : [x_0] \times \Delta(M^k) \rightarrow V/T \subset X/T$. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & V \subset X \\ & \nearrow i_V & \downarrow p \\ [x_0] \times \Delta(M^k) & \xrightarrow{j_{V/T}} & V/T \subset X/T \end{array} \quad (2.3.16)$$

Desde que V é aberto em X e V/T é aberto em X/T , temos do Teorema 2.2.12 que

$$w(j_2) = w(j_{V/T}) \quad \text{e} \quad w(i_V) = w(i). \quad (2.3.17)$$

Segue de (2.3.15), (2.3.17), da Definição 2.2.10 e do diagrama 2.3.16 que

$$\begin{aligned} w(j_2) = w(j_{V/T}) &= (j_{V/T})^*(w(V/T)) \sim \bar{w}([x_0] \times \Delta(M^k)) \\ &= (p \circ i_V)^*(w(V/T)) \sim \bar{w}([x_0] \times \Delta(M^k)) \\ &= (i_V)^*p^*(w(V/T)) \sim \bar{w}([x_0] \times \Delta(M^k)) \\ &= (i_V)^*w(V) \sim \bar{w}([x_0] \times \Delta(M^k)) \\ &= w(i_V) = w(i), \end{aligned}$$

Desde que $\Delta(M^k)$ é homeomorfo a M^k , podemos considerar a aplicação $i = x_0 \times d$, onde $d : M^k \rightarrow M^k \times M^k$ é a diagonal que leva $y \mapsto (y, y)$ e temos que

$$i^* = (x_0 \times d)^* : H^*(S^n \times M^k \times M^k) \rightarrow H^*([x_0] \times M^k) \cong H^*([x_0] \times \Delta(M^k)).$$

Assim, usando a definição das classes de Stiefel-Whitney do fibrado normal estável de i (Definição 2.2.10) e lembrando que $\alpha \smile \beta = d^*(\alpha \otimes \beta)$, nós temos que

$$\begin{aligned}
 w(j_2) = w(i) &= i^*(w(X)) \smile \bar{w}([x_0] \times M^k) \\
 &= i^*\{w(S^n \times M^k \times M^k)\} \smile \bar{w}([x_0] \times M^k) \\
 &= i^*\{w(S^n) \otimes w(M^k) \otimes w(M^k)\} \smile \{\bar{w}([x_0]) \otimes \bar{w}(M^k)\} \\
 &= (x_0^* \times d^*)\{w(S^n) \otimes w(M^k) \otimes w(M^k)\} \smile \{w([x_0]) \otimes \bar{w}(M^k)\} \\
 &= x_0^*(w(S^n)) \otimes d^*\{w(M^k) \otimes w(M^k)\} \smile \{w([x_0]) \otimes \bar{w}(M^k)\} \\
 &= \{1 \otimes w(M^k) \smile w(M^k)\} \smile \{1 \otimes \bar{w}(M^k)\} \\
 &= (1 \smile 1) \otimes w(M^k) \smile w(M^k) \smile w(M^k) \\
 &= 1 \otimes w(M^k).
 \end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Segue de (2.3.9), (2.3.14) e (2.3.18) que

$$\begin{aligned}
 w_k(j) &= \sum_{\mu=0}^k w_{k-\mu}(j_1) \otimes w_{\mu}(j_2) \\
 &= \sum_{\mu=0}^k (e^{k-\mu} \otimes 1) \otimes (1 \otimes w_{\mu}(M^k)) \\
 &= e^k \otimes 1 + e^{k-1} \otimes w_1(M^k) + \cdots + 1 \otimes w_k(M^k) \\
 &= \sum_{\mu=0}^k e^{k-\mu} \otimes w_{\mu}(M^k).
 \end{aligned}$$

Isso completa a prova. ■

2.4 Demonstração do Teorema 2.1.1

Seja $\bar{s} : S^n \rightarrow X$ dada por $\bar{s}(x) = (x, f(x), f(-x))$. Então, $\bar{s}$ induz uma aplicação $s : P^n \rightarrow X/T$ definida por $s([x]) = [x, f(x), f(-x)]$. Denotemos por $B(f)$ a imagem de $A(f) = \{x \in S^n; f(x) = f(-x)\}$ pela projeção natural $S^n \rightarrow P^n$, então temos que $B(f) = s^{-1}(P^n \times \Delta(M^k))$. Nessas condições, nós obtemos o seguinte lema, cuja demonstração foi apresentada por Munkholm em [42, Lema 2.1], no caso em que M^k é uma variedade topológica compacta. Aqui, nosso propósito é enfatizar propriedades também válidas para variedades generalizadas.

Lema 2.4.1 Se $s^*(\varphi_k) \neq 0$ então $\check{H}^{n-k}(B(f); \mathbb{Z}_2) \neq 0$.

Demonstração Sejam $j : P^n \times \Delta(M^k) \hookrightarrow X/T$ a inclusão e $\varphi_k \in H^k(X/T; \mathbb{Z}_2)$ a classe dual de Poincaré de $j^*[P^n \times \Delta(M^k)]$ em X/T , ou seja, $\varphi_k \frown [X/T] = j_*[P^n \times \Delta(M^k)]$. Primeiramente, mostraremos que dada qualquer vizinhança U de $P^n \times \Delta(M^k)$ em X/T ,

$$\varphi_k \in \text{Im}(H^k(X/T, X/T - U) \rightarrow H^k(X/T)). \quad (2.4.1)$$

Para provar essa afirmação, seja V uma vizinhança aberta de $P^n \times \Delta(M^k)$ tal que $V \subset U$. Então, (2.4.1) segue do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_{n+k}(V) & \xrightarrow{\gamma} & \check{H}^k(X/T, X/T - V) & \xrightarrow{i} & H^k(X/T, X/T - V) \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+k}(P^n \times \Delta(M^k)) & & & & & & H^k(X/T, X/T - U) \\ & \searrow & & & & & \\ & & H_{n+k}(X/T) & \xrightarrow{\gamma} & \check{H}^k(X/T) & \xrightarrow{i \cong} & H^k(X/T) \end{array} \quad (2.4.2)$$

onde $\tilde{\gamma}$ denota a Dualidade de Alexander-Čech, também válida para variedades generalizadas (vide [2, 3]), i é a transformação natural de $\check{H}$ em H (vide Observação 2.2.15 e [46, pg.289]) e todas as aplicações não nomeadas são induzidas das inclusões apropriadas.

Agora, provaremos que para toda vizinhança V de $B(f)$ em P^n

$$c^k \in \text{Im}(H^k(P^n, P^n - V) \rightarrow H^k(P^n)) \quad (2.4.3)$$

onde c é o gerador de $H^1(P^n)$. Desde que para toda vizinhança V de $B(f)$ em P^n existe uma vizinhança U de $P^n \times \Delta(M^k)$ em X/T , com $s^{-1}(U) \subset V$, é suficiente provar (2.4.3) no caso em que $V = s^{-1}(U)$, onde U é uma vizinhança de $P^n \times \Delta(M^k)$ em X/T . Como por hipótese $s^*(\varphi_k) \neq 0$ e $c^k \in H^k(P^n)$ é o único elemento não nulo, temos que $s^*(\varphi_k) = c^k$. Consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^k(X/T, X/T - U) & \xrightarrow{l} & H^k(X/T) \\ \downarrow s^* & & \downarrow s^* \\ H^k(P^n, P^n - s^{-1}(U)) & \xrightarrow{l'} & H^k(P^n) \end{array} \quad (2.4.4)$$

onde l e l' são induzidas das correspondentes inclusões. Temos de (2.4.1) que existe $\alpha \in H^k(X/T, X/T - U)$ tal que $l(\alpha) = \varphi_k$ e segue do diagrama 2.4.4 que

$$l'(s^*(\alpha)) = s^*(l(\alpha)) = s^*(\varphi_k) = c^k, \quad (2.4.5)$$

o que prova (2.4.3).

Suponhamos agora que $\check{H}^{n-k}(B(f)) = 0$, então o homomorfismo dado pela composição

$$H^{n-k}(P^n) \xrightarrow{i^1} \check{H}^{n-k}(P^n) \rightarrow \check{H}^{n-k}(B(f)), \quad (2.4.6)$$

é trivial e $c^{n-k} \in H^{n-k}(P^n)$ é levada na classe nula via esse homomorfismo. Segue da definição de $\check{H}$ (vide [22]) que existe uma vizinhança aberta W de $B(f)$ em P^n tal que c^{n-k} é levada na classe nula através do homomorfismo $H^{n-k}(P^n) \rightarrow H^{n-k}(W)$, ou seja,

$$c^{n-k} \in \ker(H^{n-k}(P^n) \rightarrow H^{n-k}(W)) = \text{Im}(H^{n-k}(P^n, W) \rightarrow H^{n-k}(P^n)), \quad (2.4.7)$$

para alguma vizinhança aberta W de $B(f)$ em P^n . Desde que (2.4.3) é válida para toda vizinhança V de $B(f)$ em P^n , podemos tomar $V \subset W$ fechado e então, $P^n - V$ é aberto em P^n . De [11, Cap.6, §4], temos o produto cup

$$\smile: H^{n-k}(P^n, W) \otimes H^k(P^n, P^n - V) \rightarrow H^n(P^n, W \cup (P^n - V)). \quad (2.4.8)$$

Assim, segue da naturalidade do produto cup que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{n-k}(P^n, W) \otimes H^k(P^n, P^n - V) & \longrightarrow & H^{n-k}(P^n) \otimes H^k(P^n) \\ \downarrow \smile & & \downarrow \smile \\ H^n(P^n, W \cup (P^n - V)) & \longrightarrow & H^n(P^n) \end{array} \quad (2.4.9)$$

Usando que $c^k \in \text{Im}(H^k(P^n, P^n - V) \rightarrow H^k(P^n))$ e $c^{n-k} \in \text{Im}(H^{n-k}(P^n, W) \rightarrow H^{n-k}(P^n))$ temos do diagrama (2.4.9) que

$$c^n = c^k \smile c^{n-k} \in \text{Im}(H^n(P^n, W \cup (P^n - V)) \rightarrow H^n(P^n)). \quad (2.4.10)$$

Mas, desde que $H^n(P^n, W \cup (P^n - V)) = H^n(P^n, P^n)$ é o grupo trivial, isso implica que $c^n = 0$, o que é uma contradição e o Lema 2.4.1 está provado. ■

Observação 2.4.2 Observemos que o Lema 2.4.1 reduz a demonstração do Teorema 2.1.1 a considerações sobre $s^*(\varphi_k)$, uma vez que $\check{H}^{n-k}(B(f)) \neq 0$ implica que $\dim A(f) \geq n - k$.

O próximo resultado verifica sob que condições $s^*(\varphi_k)$ é não nula. A demonstração segue os mesmos passos da prova de Conner-Floyd. Aqui, nós enfatizamos a importância do Lema 2.3.1, assim como ocorre com [15, Lema 32.3] no caso diferenciável.

Lema 2.4.3 *i) Se $n > k$, então $s^*(\varphi_k) \neq 0$*

ii) Se $n = k$ e $f^ : H^n(M^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(S^n; \mathbb{Z}_2)$ é trivial então $s^*(\varphi_k) \neq 0$.*

Demonstração Sejam $j : P^n \times \Delta(M^k) \rightarrow X/T$ e $s : P^n \rightarrow X/T$ definidas anteriormente por $j([x], y, y) = [x, y, y]$ e $s([x]) = [x, f(x), f(-x)]$. Seja $\varphi_k \in H^k(X/T; \mathbb{Z}_2)$ a classe dual de Poincaré de $j^*[P^n \times \Delta(M^k)]$ em X/T . Observemos que $s^*(\varphi_k)$ depende apenas da classe de homotopia de $f : S^n \rightarrow M^k$. Deste modo, podemos tomar f constante sobre o hemisfério sul, ou seja, $f(E_-^n) = y_0 \in M^k$. Consideremos $S^{n-1} \subset S^n$ como sendo o equador, então $f(S^{n-1}) = y_0$, logo $f(x) = f(-x) = y_0$, para todo $x \in S^{n-1}$. Definimos $s_1 : P^{n-1} \rightarrow P^n \times \Delta(M^k)$ a aplicação que leva $[x] \mapsto ([x], y_0, y_0)$ e seja $j_1 : P^{n-1} \rightarrow P^n$ a inclusão. Temos $(j \circ s_1)([x]) = j(s_1[x]) = j([x], y_0, y_0) = [x, y_0, y_0]$. Por outro lado, $(s \circ j_1)([x]) = s(j_1([x])) = s([x]) = [x, f(x), f(-x)] = [x, y_0, y_0]$, para todo $[x] \in P^{n-1}$. Deste modo, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} P^{n-1} & \xrightarrow{s_1} & P^n \times \Delta(M^k) \\ j_1 \downarrow & & \downarrow j \\ P^n & \xrightarrow{s} & X/T \end{array} \quad (2.4.11)$$

Considerando a inclusão natural $i : P^n \hookrightarrow P^n \times \Delta(M^k)$ que leva $[x] \mapsto ([x], y_0, y_0)$, temos que $s_1 = i \circ j_1$ e isso implica a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} P^{n-1} & \xrightarrow{s_1} & P^n \times \Delta(M^k) \\ j_1 \downarrow & \nearrow i & \\ P^n & & \end{array} \quad (2.4.12)$$

Usando a comutatividade dos diagramas (2.4.11) e (2.4.12) e o Lema 2.3.1, temos que

$$j_1^* s^*(\varphi_k) = (s \circ j_1)^*(\varphi_k) \quad (2.4.13)$$

$$= (j \circ s_1)^*(\varphi_k) \quad (2.4.14)$$

$$= s_1^*(j^*(\varphi_k)) \quad (2.4.15)$$

$$= s_1^*(c^k \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes w_k(M))$$

$$= (i \circ j_1)^*(c^k \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes w_k(M))$$

$$= j_1^*(i^*(c^k \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes w_k(M)))$$

$$j_1^*(c^k) \subset H^k(P^{n-1})$$

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 38

Se $n > k$, temos que $j_1^* : H^k(P^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^k(P^{n-1}; \mathbb{Z}_2)$ é isomorfismo, assim $j_1^*(c^k) \neq 0$ e, conseqüentemente, $s^*(\varphi_k) \neq 0$.

Suponhamos agora que $f^* : H^n(M^n) \rightarrow H^n(S^n)$ seja trivial e, como anteriormente, podemos assumir $f : (S^n, E^n) \rightarrow (M^n, y_0)$. Consideremos a aplicação equ variante $F : S^n \rightarrow M^n \times M^n$ dada por $F(x) = (f(x), f(-x))$. Então, $F(S^n) \subset M^n \vee M^n = (M^n \times y_0) \cup (y_0 \times M^n)$, desde que ou $x \in E^n$ ou $-x \in E^n$. Além disso, a involução $t : M^n \times M^n \rightarrow M^n \times M^n$ definida por $t(y, z) = (z, y)$ é tal que $t(M^n \vee M^n) \subset M^n \vee M^n$. Sendo assim, podemos considerar a aplicação equ variante $F : (S^n, A) \rightarrow (M^n \vee M^n, t)$, onde $A : S^n \rightarrow S^n$ é a antipodal. Nós afirmamos que

Dada $\bar{F} : P^n \rightarrow M^n \vee M^n / t = M^n$, a aplicação entre os espaços de órbitas induzida por F então, $\bar{F}^* : H^n(M^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(P^n; \mathbb{Z}_2)$ é trivial. (2.4.16)

De fato, a afirmação segue imediatamente do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & H^n(S^n, x_0) & \\
 & & & \uparrow \cong & \\
 & & & H^n(S^n, E_-^n) & \\
 & & & \downarrow \cong & \\
 & & & H^n(E_+^n, S^{n-1}) & \\
 & & & \uparrow \cong & \\
 & & & H^n(P^n, P^{n-1}) & \\
 & & & \downarrow \cong & \\
 & & & H^n(P^n) & \\
 & & & \uparrow & \\
 H^n(M^n, x_0) & \xrightarrow{f^* \cdot 0} & H^n(S^n, x_0) & & \\
 & \nearrow f^* & & & \\
 & \xrightarrow{f^*} & H^n(S^n, E_-^n) & & \\
 & \searrow \bar{F}^* & & & \\
 & \xrightarrow{F^*} & H^n(P^n, P^{n-1}) & &
 \end{array} \quad (2.4.17)$$

desde que por hipótese, $f^* : H^n(M^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(S^n; \mathbb{Z}_2)$ é trivial.

Consideremos a composição

$$P^n \times (y_0, y_0) \xrightarrow{i_1} S^n \times (M^n \vee M^n) / T \xrightarrow{i_2} S^n \times M^n \times M^n / T = X / T. \quad (2.4.18)$$

Então, temos que

$$i_1^* \circ i_2^*(\varphi_n) = c^n \otimes 1. \quad (2.4.19)$$

Basta considerarmos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} & & X/T \\ & \nearrow i_1 \circ i_2 & \uparrow j \\ P^n \times (y_0, y_0) & \longrightarrow & P^n \times \Delta \end{array} \quad (2.4.20)$$

e observarmos que do Lema 2.3.1, $j^*(\varphi_n) = c^n \otimes 1 + \cdots + 1 \otimes w_n(M) \in H^n(P^n \times \Delta)$. Denotemos por $Y = S^n \times (M^n \vee M^n)$ e seja $s_1 : P^n \rightarrow Y/T$ a aplicação que leva $[x] \mapsto [(x, f(x), f(-x))]$. Então $s : P^n \rightarrow X/T$ é dada pela composição $s = i_2 \circ s_1$. Portanto, basta provarmos que $s_1^*(i_2^*(\varphi_n)) \neq 0$.

Temos que $s_1^* : H^n(Y/T) \rightarrow H^n(P^n)$ é um epimorfismo, então existe $\gamma_n \in H^n(Y/T)$ tal que $s_1^*(\gamma_n) = c^n$. Desde que $i_1^*(\gamma_n) = c^n \otimes 1$, onde $i_1^* : H^n(Y/T) \rightarrow H^n(P^n, (y_0, y_0))$, segue de (2.4.19) que

$$i_1^*(\gamma_n) = i_1^* \circ i_2^*(\varphi_n) \quad (2.4.21)$$

e neste caso, $i_1^*(\gamma_n + i_2^*(\varphi_n)) = 0$, ou seja,

$$\gamma_n + i_2^*(\varphi_n) \in \ker(i_1^*) = \text{Im}(k^*), \quad (2.4.22)$$

onde $k^* : H^n(Y/T, P^n \times (y_0, y_0)) \rightarrow H^n(Y/T)$ é induzida da inclusão $k : Y/T \rightarrow (Y/T, P^n \times (y_0, y_0))$.

Agora, nós mostraremos no diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y/T, P^n \times (y_0, y_0)) & \xrightarrow{k^*} & H^n(Y/T) \\ \uparrow \beta^* & & \downarrow s_1^* \\ H^n(M^n \vee M^n/t, (y_0 \times y_0)) & \xrightarrow{F^*} & H^n(P^n) \end{array} \quad (2.4.23)$$

que $s_1^* \circ k^* = 0$, onde $\beta : S^n \times (M^n \vee M^n)/T = Y/T \rightarrow M^n \vee M^n/t = M^n$ é induzida pela projeção $S^n \times (M^n \vee M^n) \rightarrow M^n \vee M^n$. Consideremos o seguinte diagrama comutativo,

$$\begin{array}{ccc} (S^n \times M^n, S^n \times y_0) & \xrightarrow{\alpha} & (Y/T, P^n \times (y_0, y_0)) \\ \downarrow \beta' & & \downarrow \beta \\ (M^n, y_0) & \xrightarrow{\alpha'} & (M^n \vee M^n/t, (y_0 \times y_0)) \end{array} \quad (2.4.24)$$

onde $\alpha(x, y) = [x, y, y_0]$, $\alpha'(y) = [y, y_0]$ e β' é a projeção. É fácil ver que α é um homeomorfismo relativo. Desde que M^n é um ENR, segue de [46, Capítulo 6, §6,

2. O Teorema de Borsuk-Ulam para aplicações de esferas em variedades generalizadas 40

Teorema 5] que $\alpha^* : H^n(Y/T, P^n \times (y_0, y_0)) \rightarrow H^n(S^n \times M^n, S^n \times y_0)$ é um isomorfismo. Além disso, os homomorfismos $(\alpha')^*$ e $(\beta')^*$ também são isomorfismos o que implica que $\beta^* : H^n(M^n \vee M^n/t, (y_0 \times y_0)) \rightarrow H^n(Y/T, P^n \times (y_0, y_0))$ é um isomorfismo. Desde que de (2.4.16) $\bar{F}^* = 0$, segue do diagrama (2.4.23) que $s_1^* \circ k^* = 0$. Assim, de (2.4.22) temos que $s_1^*(\gamma_n + i_2^*(\varphi_n)) = 0$ e, portanto,

$$s^*(\varphi_n) = s_1^* \circ i_2^*(\varphi_n) = s_1^*(\gamma_n) = c^n \neq 0. \quad (2.4.25)$$

Isso completa a demonstração. ■

Demonstração do Teorema 2.1.1. Se M^k é uma variedade generalizada compacta e conexa, usando os Lemas 2.4.3 e 2.4.1, nós temos que $\check{H}^{n-k}(B(f)) \neq 0$; desde que $\dim A(f) \geq \dim(B(f))$, concluímos que $\dim A(f) \geq n - k$, se $n \geq k$.

Observação 2.4.4 Se M^k é uma variedade generalizada aberta, desde que $w(M)$ e $w(f)$ foram definidas para qualquer variedade generalizada (vide Definições 2.2.6 e 2.2.10), usando homologia e cohomologia singular com suporte compacto é possível provar os Lemas 2.3.1, 2.4.1 e 2.4.3 e portanto, o Teorema é válido para qualquer variedade generalizada.

Capítulo 3

Versões do Teorema de Borsuk-Ulam para G -ações livres

Introdução

Uma formulação do Teorema de Borsuk-Ulam [6] é de que não existe uma aplicação da m -dimensional esfera S^m na n -dimensional esfera S^n , $\mathbb{Z}_2$ -equivariante com relação à aplicação antipodal, quando $m > n$ (vide, por exemplo, [1, 7.2]). Em [45, Teorema 1] foi provado que se X e Y são espaços topológicos conexos por caminhos e paracompactos de Hausdorff, equipados com involuções livres $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ tais que para algum natural $m \geq 1$, $\check{H}^q(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq q \leq m$ e $\check{H}^{m+1}(Y/S; \mathbb{Z}_2) = 0$, onde Y/S é o espaço de órbitas de Y por S , então não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$.

Neste capítulo, nós consideramos a questão de estender esse resultado sob dois aspectos distintos: na seção 3.1, nós substituímos a ação livre do grupo $\mathbb{Z}_2$, determinada pelas involuções livres sobre X e Y , por uma ação livre de um grupo compacto de Lie. Como uma consequência, na seção 3.1.2, nós obtemos um teorema sobre a existência de pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Na seção 3.2, nós mantivemos fixada a ação livre do grupo $\mathbb{Z}_2$ e mostramos que é possível enfraquecer as hipóteses cohomológicas dos espaços envolvidos no Teorema 1 de [45].

Um espaço topológico X , satisfazendo a condição $H^q(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq q \leq m$ é

chamado m -acíclico. Na seção 3.3, nós apresentamos um exemplo sobre a não existência de uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante entre duas variedades topológicas fechadas, de mesma dimensão, dotadas com involuções livres e que não são espaços m -acíclicos.

3.1 Uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam para ações livres de um grupo compacto de Lie

Sejam R um PID e G um grupo compacto de Lie. Sejam X, Y G -espaços livres. Denotemos por $\beta_i(X; R)$ o i -ésimo número de Betti de X . Especificamente, nós provamos

Teorema 3.1.1 *Sejam G um grupo compacto de Lie e X, Y G -espaços livres, conexos por caminhos e paracompactos de Hausdorff. Suponhamos que para algum natural $m \geq 1$, $H^q(X; R) = 0$, para $0 < q < m$ e que $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$. Então, se $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$, não existe aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$.*

Se Y é uma variedade topológica conexa com ação livre de um grupo compacto de Lie G , então $\dim(Y/G) = \dim(Y) - \dim(G)$, onde $\dim$ denota a dimensão topológica usual (vide [10, Cap.IV, Seção 3, Teorema 3.8]). Assim, se $\dim(G) \geq 1$, $\dim(Y/G) < \dim(Y)$. Nós temos o seguinte Corolário do Teorema 3.1.1.

Corolário 3.1.2 *Seja G um grupo compacto de Lie de dimensão p . Sejam X um G -espaço livre, conexo por caminhos e paracompacto de Hausdorff, tal que $H^q(X; R) = 0$, para $0 < q < m$ e Y uma $(m+p)$ -dimensional variedade topológica conexa por caminhos com uma ação livre de G . Se $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$, então não existe aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$.*

Demonstração do Corolário 3.1.2 Desde que Y é uma $(m+p)$ -dimensional variedade topológica conexa com uma ação livre de G , então $\dim(Y/G) = (m+p) - p = m$ e, portanto, $H^{m+1}(Y/G; R) = 0$. Segue do Teorema 3.1.1, que não existe aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$. ■

O seguinte exemplo ilustra o Corolário 3.1.2.

Exemplo 3.1.3 Sejam $G = S^1 \times S^1$, $X = S^5 \times S^5$ e $Y = S^3 \times S^3$, os quais admitem ação livre de G . Temos que $H^q(X; \mathbb{Z}) = 0$, para $0 < q < m = 5$ e $H^6(Y/G; \mathbb{Z}) = 0$, desde que $\dim(Y/G) = 4$. Além disso, do Exemplo 1.7.2, $B(S^1 \times S^1) = \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$ e deste modo $\beta_5(X; \mathbb{Z}) = 2 < \beta_6(BG; \mathbb{Z}) = 4$. Segue do Corolário 3.1.2, que não existe aplicação G -equivariante $f : X \rightarrow Y$.

Quando $G = \mathbb{Z}_q$, onde $q > 1$ é um inteiro, uma outra consequência do Teorema 3.1.1 é o seguinte

Corolário 3.1.4 *Sejam X, Y $\mathbb{Z}_q$ -espaços livres, conexos por caminhos e paracompactos de Hausdorff. Seja p um primo que divide q . Suponhamos que $H^r(X; \mathbb{Z}_q) = 0$, para $1 \leq r < m$ e que $H^{m-1}(Y/\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) = 0$. Então não existe aplicação $\mathbb{Z}_q$ -equivariante $f : X \rightarrow Y$.*

Para demonstrar o Corolário 3.1.4, nós precisamos do seguinte

Lema 3.1.5 *Sejam $q > 1$ um inteiro e p um primo que divide q . Se X é conexo por caminhos e $H^r(X; \mathbb{Z}_q) = 0$, para $1 \leq r \leq m$, então $H^r(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq r \leq m$.*

Demonstração Seja $q = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$ a decomposição em fatores primos de q , onde $p_1, \dots, p_s$ são primos distintos e $k_i > 0$, para $i = 1, 2, \dots, s$. Então, temos que $\mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$ e $H^r(X; \mathbb{Z}_q) \cong H^r(X; \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}) \oplus \cdots \oplus H^r(X; \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}})$. Desde que, $H^r(X; \mathbb{Z}_q) = 0$, para $1 \leq r \leq m$, então $H^r(X; \mathbb{Z}_{p_i^{k_i}}) = 0$, para $1 \leq r \leq m$ e $i = 1, \dots, s$. Sem perda de generalidade, podemos supor $p = p_1$ e mostremos que $H^r(X; \mathbb{Z}_{p^k}) = 0$, para $1 \leq r \leq m$, implica que $H^r(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq r \leq m$, onde $k = k_1$. Para isto, consideremos as seguintes seqüências exatas curtas de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^k} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_{p^k}}{\mathbb{Z}_p} \cong \mathbb{Z}_{p^{k-1}} \longrightarrow 0 \quad (3.1.1)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^{k-1}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{p^k} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}_{p^k}}{\mathbb{Z}_{p^{k-1}}} \cong \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \quad (3.1.2)$$

Segue da Seção 1.6, que existem seqüências exatas longas em cohomologia

$$\rightarrow H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_{p^k}) \rightarrow H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \xrightarrow{\beta_r} H^r(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^r(X; \mathbb{Z}_{p^k}) \rightarrow \quad (3.1.3)$$

$$\rightarrow H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \rightarrow H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_{p^k}) \rightarrow H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\beta'_r} H^r(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \rightarrow H^r(X; \mathbb{Z}_{p^k}) \rightarrow$$
(3.1.4)

onde $\beta_r : H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \rightarrow H^r(X; \mathbb{Z}_p)$ e $\beta'_r : H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^r(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}})$ são os homomorfismos de Bockstein. Desde que, $H^r(X; \mathbb{Z}_{p^k}) = 0$, para $1 \leq r \leq m$, nós temos de (3.1.3) e de (3.1.4) que

$$H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \cong H^r(X; \mathbb{Z}_p), \text{ para } 2 \leq r \leq m; \quad (3.1.5)$$

$$H^{r-1}(X; \mathbb{Z}_p) \cong H^r(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}), \text{ para } 2 \leq r \leq m. \quad (3.1.6)$$

Além disso, para $r = 1$, temos as seqüências exatas

$$0 \rightarrow H^0(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^0(X; \mathbb{Z}_{p^k}) \rightarrow H^0(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \xrightarrow{\beta_1} H^1(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0 \quad (3.1.7)$$

$$0 \rightarrow H^0(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \rightarrow H^0(X; \mathbb{Z}_{p^k}) \rightarrow H^0(X; \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\beta'_1} H^1(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \rightarrow 0 \quad (3.1.8)$$

Segue do Teorema dos Coeficientes Universais e da hipótese de que X é conexo por caminhos, que

$$H^0(X; \mathbb{Z}_p) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_0(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p \quad (3.1.9)$$

$$H^0(X; \mathbb{Z}_{p^k}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_0(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_{p^k}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^k}) \cong \mathbb{Z}_{p^k} \quad (3.1.10)$$

$$H^0(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_0(X; \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \cong \mathbb{Z}_{p^{k-1}} \quad (3.1.11)$$

Substituindo (3.1.9), (3.1.10) e (3.1.11) em (3.1.7) e (3.1.8), obtemos as seqüências

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{k-1}} \xrightarrow{\beta_1} H^1(X; \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0 \quad (3.1.12)$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{k-1}} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k} \rightarrow \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\beta'_1} H^1(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \rightarrow 0 \quad (3.1.13)$$

Desde que as seqüências (3.1.1) e (3.1.2) são exatas curtas, as aplicações $\mathbb{Z}_{p^k} \mapsto \mathbb{Z}_{p^{k-1}}$ e $\mathbb{Z}_{p^k} \mapsto \mathbb{Z}_p$ são sobrejetoras, assim β_1, β'_1 são os homomorfismos nulos e, portanto,

$$H^1(X; \mathbb{Z}_p) = 0 \text{ e } H^1(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) = 0. \quad (3.1.14)$$

Combinando (3.1.5), (3.1.6) e (3.1.14), nós concluímos que

$$0 = H^1(X; \mathbb{Z}_p) \cong H^2(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \cong H^3(X; \mathbb{Z}_p) \cong H^4(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \cong \dots \quad (3.1.15)$$

$$0 = H^1(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \cong H^2(X; \mathbb{Z}_p) \cong H^3(X; \mathbb{Z}_{p^{k-1}}) \cong H^4(X; \mathbb{Z}_p) \cong \dots \quad (3.1.16)$$

e, portanto, $H^r(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 < r < m$. ■

Demonstração do Corolário 3.1.4 Desde que $\mathbb{Z}_p$ é um subgrupo de $\mathbb{Z}_q$, segue que X e Y são $\mathbb{Z}_p$ -espaços livres, onde p é primo. Do Lema 3.1.5, temos que $H^r(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq r \leq m$. Em particular, $H^m(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ implica que $\beta_m(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ e segue do Exemplo 1.7.1 que $\beta_m(X; \mathbb{Z}_p) < \beta_{m+1}(B\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) = 1$. Assim, as hipóteses do Teorema 3.1.1 estão satisfeitas para $G = \mathbb{Z}_p$ e não existe aplicação $\mathbb{Z}_p$ -equivariante $f : X \rightarrow Y$, conseqüentemente, não existe aplicação $\mathbb{Z}_q$ -equivariante $f : X \rightarrow Y$. ■

Observação 3.1.6 O Corolário 3.1.4 estende para $\mathbb{Z}_q$ -ações livres, $q > 2$, o Teorema 1 provado em [45].

Observação 3.1.7 Suponhamos que no Corolário 3.1.4, Y seja uma m -dimensional variedade topológica, assim $H^{m-1}(Y/\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) = 0$. Então não existe aplicação $\mathbb{Z}_q$ -equivariante $f : X \rightarrow Y$. Esse caso particular do Corolário 3.1.4 estende o seguinte teorema provado por T.Kobayashi [34, Theorem 1]: se X é um espaço de Hausdorff, conexo por caminhos tal que $H_r(X; \mathbb{Z}_q) = 0$, para $1 \leq r \leq m-1$, então não existe aplicação $\mathbb{Z}_q$ -equivariante $f : X \rightarrow S^n$, onde m, n são ímpares, $m > n$, S^n com a ação padrão de $\mathbb{Z}_q$, $q > 1$.

Observação 3.1.8 O Exemplo 3.1.3 também segue do Corolário 3.1.4. De fato, suponhamos que exista uma aplicação G -equivariante $f : S^5 \times S^5 \rightarrow S^3 \times S^3$. Sejam $d : S^5 \rightarrow S^5 \times S^5$ a aplicação diagonal e $p : S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$ a projeção na primeira coordenada. Então, $p \circ f \circ d : S^5 \rightarrow S^3$ é uma aplicação S^1 -equivariante e, portanto, $\mathbb{Z}_q$ -equivariante, para algum $q > 1$, contradizendo o Corolário 3.1.4

3.1.1 Demonstração do Teorema 3.1.1

A prova do Teorema 3.1.1 seguirá dos seguintes lemas

Lema 3.1.9 Sejam R um PID e $F \xrightarrow{p} B$ uma fibração com fibra F e espaço base B , conexo por caminhos. Suponhamos que $H^q(F, R) = 0$, para $0 < q < m$. Então, existe uma sequência exata com coeficientes em R .

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(B) \xrightarrow{p^*} H^1(E) \rightarrow H^0(B; \mathcal{H}^1(F)) \xrightarrow{\tau} H^2(B) \xrightarrow{p^*} H^2(E) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^m(B) \xrightarrow{p^*} H^m(E) \rightarrow H^0(B; \mathcal{H}^m(F)) \xrightarrow{\tau} H^{m+1}(B) \xrightarrow{p^*} H^{m+1}(E) \end{aligned}$$

onde τ é o homomorfismo transgressão e $\mathcal{H}^i(F)$ denota o sistema de coeficientes locais sobre B .

Demonstração Segue do Teorema 1.4.15 que existe uma sequência espectral do primeiro quadrante $\{E_r^{*,*}, d_r\}$, com

$$E_2^{p,q} \simeq H^p(B; \mathcal{H}^q(F)), \quad (3.1.17)$$

a cohomologia de B com coeficientes locais na cohomologia de F , a fibra de p , e convergindo para $H^*(E; R)$. Desde que F é conexo por caminhos, segue do Exemplo 1.3.8, que o sistema de coeficientes locais $\mathcal{H}^0(F)$ sobre B é trivial. Assim, do Lema 1.3.12 nós concluímos que

$$E_2^{p,0} \cong H^p(B; \mathcal{H}^0(F)) \cong H^p(B; H^0(F)) \cong H^p(B), \quad \forall p. \quad (3.1.18)$$

Por outro lado, $H^q(F) = 0$, para $0 < q < m$, o que implica que $\mathcal{H}^q(F) = 0$, para $0 < q < m$. Assim, $E_2^{p,q} = 0$, para $0 < q < m$ e o diferencial $d_r = 0$, para $r \geq 2$. Segue da Observação 1.4.9 que

$$H^p(B; \mathcal{H}^q(F)) \cong E_2^{p,q} \cong E_3^{p,q} \cong \dots \cong E_p^{p,q} \cong \dots \cong E_\infty^{p,q} = 0, \quad 0 < q < m \text{ e } \forall p. \quad (3.1.19)$$

Mostremos que

$$H^{m+1}(B) = E_2^{m+1,0} = E_3^{m+1,0} = \dots = E_{m+1}^{m+1,0} \quad (3.1.20)$$

$$H^0(B; \mathcal{H}^m(F)) = E_2^{0,m} = E_3^{0,m} = \dots = E_{m+1}^{0,m} \quad (3.1.21)$$

$$H^p(B) = E_2^{p,0} = E_3^{p,0} = \dots = E_p^{p,0} = E_\infty^{p,0}, \quad \forall p \leq m. \quad (3.1.22)$$

De fato, segue da definição da sequência espectral que

$$E_{r+1}^{m+1,0} = \frac{\ker(d_r : E_r^{m+1,0} \rightarrow E_r^{m+1+r,-r+1})}{\operatorname{im}(d_r : E_r^{m+1-r,r-1} \rightarrow E_r^{m+1,0})} \quad (3.1.23)$$

Observemos que, como $r \geq 2$, $-r+1 < 0$ e desde que a sequência é do primeiro quadrante, $E_r^{m+1+r,-r+1} = 0$ e assim, $\ker(d_r : E_r^{m+1,0} \rightarrow E_r^{m+1+r,-r+1}) = E_r^{m+1,0}$, para

todo $r \geq 2$. Por outro lado, para $2 \leq r \leq m$, temos que $0 < r - 1 < m$ e segue de (3.1.19) que $E_r^{m+1-r, r-1} = 0$, o que implica que $\text{im}(d_r : E_r^{m+1-r, r-1} \rightarrow E_r^{m-1, 0}) = 0$. Portanto,

$$E_{r+1}^{m+1, 0} \cong E_r^{m+1, 0}, \text{ para } 2 \leq r \leq m. \quad (3.1.24)$$

Combinando as fórmulas (3.1.18) e (3.1.24), obtemos (3.1.20).

Para provar (3.1.21), observemos que

$$E_{r-1}^{0, m} = \frac{\ker(d_r : E_r^{0, m} \rightarrow E_r^{r, m-r+1})}{\text{im}(d_r : E_r^{-r, m+r-1} \rightarrow E_r^{0, m})} \quad (3.1.25)$$

Para $2 \leq r \leq m$, temos que $0 < m - r + 1 < m$ e segue de (3.1.19) que $E_r^{r, m-r+1} = 0$, o que implica que $\ker(d_r : E_r^{0, m} \rightarrow E_r^{r, m-r+1}) = E_r^{0, m}$, para $2 \leq r \leq m$. Por outro lado, desde que $-r < 0$, $E_r^{-r, m+r-1} = 0$ e assim, $\text{im}(d_r : E_r^{-r, m+r-1} \rightarrow E_r^{0, m}) = 0$. Portanto,

$$E_{r+1}^{0, m} \cong E_r^{0, m}, \text{ para } 2 \leq r \leq m. \quad (3.1.26)$$

Além disso, de (3.1.17), $E_2^{0, m} \cong H^0(B, \mathcal{H}^q(F))$, o que conclui a prova de (3.1.21).

Temos ainda que,

$$E_{r+1}^{p, 0} = \frac{\ker(d_r : E_r^{p, 0} \rightarrow E_r^{p+r, -r+1})}{\text{im}(d_r : E_r^{p-r, r-1} \rightarrow E_r^{p, 0})} \quad (3.1.27)$$

Desde que $r \geq 2$, $-r + 1 < 0$ e então $E_r^{p+r, -r+1} = 0$, para todo $r \geq 2$, isso implica que $\ker(d_r : E_r^{p, 0} \rightarrow E_r^{p+r, -r+1}) = E_r^{p, 0}$. Por outro lado, para todo $p \leq m$, temos que:

- i) se $2 \leq r \leq m$, $0 < r - 1 < m$ e segue de 3.1.19, que $E_r^{p-r, r-1} = 0$.
- ii) se $r > m$, $p - r < p - m \leq 0$ e desde que a sequência é do primeiro quadrante, $E_r^{p-r, r-1} = 0$.

Assim, para todo $r \geq 2$ e $p \leq m$, $\text{im}(d_r : E_r^{p-r, r-1} \rightarrow E_r^{p, 0}) = 0$ e portanto,

$$E_{r+1}^{p, 0} \cong E_r^{p, 0}, \quad \forall p \leq m, \quad \forall r \geq 2. \quad (3.1.28)$$

Observemos que os diferenciais $d_r : E_r^{p, 0} \rightarrow E_r^{p+r, -r+1}$ e $d_r : E_r^{p-r, r-1} \rightarrow E_r^{p, 0}$ se anulam, para todo $r \geq 2$ e $p \leq m$. Isso significa, que a sequência colapsa em $r = 2$, ou seja,

$$E_2^{p, 0} \cong E_3^{p, 0} \cong \dots \cong E_p^{p, 0} \cong E_\infty^{p, 0}, \quad \forall p \leq m. \quad (3.1.29)$$

Para concluir a prova de (3.1.22), basta observar que de (3.1.18), $E_2^{p,0} \cong H^p(B)$.

Agora, consideremos a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow \ker d_r \rightarrow E_r^{0,r-1} \xrightarrow{d_r^r} E_r^{r,0} \xrightarrow{\frac{E_r^{r,0}}{\operatorname{im} d_r}} 0, \quad (3.1.30)$$

onde $\operatorname{im}(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0})$. Mostremos que

$$\ker d_r = E_\infty^{0,r-1} \text{ e } \frac{E_r^{r,0}}{\operatorname{im} d_r} = E_\infty^{r,0}. \quad (3.1.31)$$

De fato, segue da definição de sequência espectral que

$$E_{r+1}^{0,r-1} \cong \frac{\ker(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0})}{\operatorname{im}(d_r : E_r^{-r,2r-2} \rightarrow E_r^{0,r-1})}$$

Desde que $-r < 0$, nós temos que $\operatorname{im}(d_r : E_r^{-r,2r-2} \rightarrow E_r^{0,r-1})$ é sempre nula e portanto

$$E_{r+1}^{0,r-1} = \ker(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0}). \quad (3.1.32)$$

Temos ainda que

$$E_{r+2}^{0,r-1} \cong \frac{\ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+1}^{r+1,-1})}{\operatorname{im}(d_{r+1} : E_{r+1}^{-r-1,2r-1} \rightarrow E_{r+1}^{0,r-1})},$$

e como $E_{r+1}^{r+1,-1} = 0$, segue que $\ker(d_{r+1} : E_{r+1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+1}^{r+1,-1}) \cong E_{r+1}^{0,r-1}$. Por outro lado, $-r-1 < 0$ e assim, $E_{r+1}^{-r-1,2r-1} = 0$, o que implica que $\operatorname{im}(d_{r+1} : E_{r+1}^{-r-1,2r-1} \rightarrow E_{r+1}^{0,r-1})$ é trivial e, portanto,

$$E_{r+2}^{0,r-1} \cong E_{r+1}^{0,r-1}. \quad (3.1.33)$$

Mais geralmente, para todo $k \geq 2$,

$$E_{r+k}^{0,r-1} \cong \frac{\ker(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{r+k-1,-k+1})}{\operatorname{im}(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{-r-k+1,2(r-1)+k-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{0,r-1})}$$

Desde que $k \geq 2$, $-k+1 < 0$, assim $E_{r+k-1}^{r+k-1,-k+1} = 0$ e conseqüentemente, $\ker(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{r+k-1,-k+1}) \cong E_{r+k-1}^{0,r-1}$. Além disso, $-r-k+1 < 0$ e nós temos que $\operatorname{im}(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{-r-k+1,2(r-1)+k-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{0,r-1})$ é nula. Assim, para todo $k \geq 2$,

$$E_{r+k}^{0,r-1} \cong E_{r+k-1}^{0,r-1}. \quad (3.1.34)$$

Observemos que os diferenciais

$$\begin{aligned} d_{r+k-1} &: E_{r+k-1}^{0,r-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{r+k-1,-k+1} \text{ e} \\ d_{r+k-1} &: E_{r+k-1}^{-r-k+1,2(r-1)+k-1} \rightarrow E_{r+k-1}^{0,r-1}, \end{aligned}$$

se anulam para todo $k \geq 2$ e a sequência colapsa em $N = r + 1$. Assim, combinando (3.1.32) e (3.1.34), nós concluímos que

$$\ker d_r \cong E_{r+1}^{0,r-1} \cong E_{r+2}^{0,r-1} \cong \dots \cong E_{r+k-1}^{0,r-1} \cong E_{r+k}^{0,r-1} \cong \dots \cong E_{\infty}^{0,r-1}. \quad (3.1.35)$$

Mostremos agora que $\frac{E_r^{r,0}}{\text{im} d_r} = E_{\infty}^{r,0}$. Temos que

$$E_{r+1}^{r,0} = \frac{\ker(d_r : E_r^{r,0} \rightarrow E_r^{2r,-r-1})}{\text{im}(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0})} \quad (3.1.36)$$

Como anteriormente, $E_r^{2r,-r+1} = 0$, pois $-r + 1 < 0$, logo $\ker(d_r : E_r^{r,0} \rightarrow E_r^{2r,-r+1}) = E_r^{r,0}$ e, portanto,

$$E_{r+1}^{r,0} = \frac{E_r^{r,0}}{\text{im}(d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0})} \quad (3.1.37)$$

Para todo $k \geq 2$, nós temos que

$$E_{r+k}^{r,0} = \frac{\ker(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{r,0} \rightarrow E_{r+k-1}^{2r+k-1,-r-k-2})}{\text{im}(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{-k+1,r+k-2} \rightarrow E_{r+k-1}^{r,0})} \quad (3.1.38)$$

e, desde que, $-r - k + 2 < 0$, $E_{r+k-1}^{2r+k-1,-r-k-2} = 0$, o que implica que $\ker(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{r,0} \rightarrow E_{r+k-1}^{2r+k-1,-r-k-2}) = E_{r+k-1}^{r,0}$. Da mesma forma, nós concluímos que $\text{im}(d_{r+k-1} : E_{r+k-1}^{-k+1,r+k-2} \rightarrow E_{r+k-1}^{r,0})$ é nula, pois $-k - 1 < 0$. Consequentemente,

$$\frac{E_r^{r,0}}{\text{im} d_r} \cong E_{r+1}^{r,0} \cong \dots \cong E_{r+k-1}^{r,0} \cong E_{r+k}^{r,0} \cong \dots \cong E_{\infty}^{r,0}. \quad (3.1.39)$$

Substituindo (3.1.31) em (3.1.30), nós obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{0,r-1} \rightarrow E_r^{0,r-1} \xrightarrow{d_r} E_r^{r,0} \rightarrow E_{\infty}^{r,0} \rightarrow 0, \quad (3.1.40)$$

como queríamos demonstrar. Mostremos agora que, para todo $r \leq m$, a sequência

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{r,0} \rightarrow H^r(E) \rightarrow E_{\infty}^{0,r} \rightarrow 0 \quad (3.1.41)$$

é exata e, se $r = m + 1$, existe uma injeção natural

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{m+1,0} \hookrightarrow H^{m+1}(E). \quad (3.1.42)$$

Para isto, consideremos a seguinte filtração decrescente de $H^r(E; R)$,

$$\{0\} = F^{r-1}(H^r(E)) \subset F^r(H^r(E)) \subset F^{r-1}(H^r(E)) \subset \dots \subset F^1(H^r(E)) \subset F^0(H^r(E)) = H^r(E).$$

Desde que a sequência espectral $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ converge para o R -módulo graduado $H^*(E)$, temos que

$$E_\infty^{p,q} \cong E_0^{p,q}(H^*(E)) = F^p(H^{p+q}(E))/F^{p+1}(H^{p+q}(E)), \quad (3.1.43)$$

onde $E_\infty^{*,*}$ é o termo limite da sequência espectral e $E_0^{*,*}(H^*(E))$ é o módulo bigraduado associado. Como $F^{r+1}(H^r(E)) = \{0\}$, segue que

$$E_\infty^{r,0} \cong F^r(H^r(E))/F^{r+1}(H^r(E)) \cong F^r(H^r(E)) \subset H^r(E), \quad (3.1.44)$$

para qualquer r , o que prova (3.1.42). Além disso, $E_\infty^{0,r} \cong F^0(H^r(E))/F^1(H^r(E)) = H^r(E)/F^1(H^r(E))$ e nós temos a seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow F^1(H^r(E)) \rightarrow H^r(E) \rightarrow E_\infty^{0,r} \rightarrow 0 \quad (3.1.45)$$

Mostremos agora que, para todo $r \leq m$,

$$F^1(H^r(E)) = F^r(H^r(E)) \cong E_\infty^{r,0}. \quad (3.1.46)$$

Para isto, basta observar que

$$F^i(H^r(E)) = F^{i+1}(H^r(E)), \quad (3.1.47)$$

para cada $1 \leq r \leq m$ e para todo $1 \leq i \leq r-1$. De fato, temos que

$$F^i(H^r(E))/F^{i+1}(H^r(E)) \cong E_\infty^{r-r+i,0}. \quad (3.1.48)$$

Desde que, $1 \leq i \leq r-1$ e $r \leq m$, $0 < r-i < m$ e segue de 3.1.19 que $E_\infty^{r-r+i,0} = 0$.

Assim, $F^i(H^r(E)) = F^{i+1}(H^r(E))$, para cada $r \leq m$ e $1 \leq i \leq r-1$, ou seja,

$$\begin{aligned} F^1(H^r(E)) = F^2(H^r(E)) = F^3(H^r(E)) = \dots = F^i(H^r(E)) = F^{i+1}(H^r(E)) = \dots \\ \dots = F^{r-1}(H^r(E)) = F^r(H^r(E)) \cong E_\infty^{r,0}, \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

para cada $r \leq m$. Substituindo (3.1.49) em (3.1.45), obtemos a sequência (3.1.41).

Juntando as sequências (3.1.40), (3.1.41) e (3.1.42), nós obtemos a sequência exata

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow E_\infty^{1,0} \rightarrow H^1(E) \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \rightarrow H^2(E) \rightarrow E_3^{0,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{3,0} \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow E_m^{0,m-1} \xrightarrow{d_m} E_m^{m,0} \rightarrow H^m(E) \rightarrow E_{m+1}^{0,m} \xrightarrow{d_{m+1}} E_{m+1}^{m+1,0} \rightarrow H^{m+1}(E) \end{aligned} \quad (3.1.50)$$

onde $d_r : E_r^{0,r-1} \rightarrow E_r^{r,0}$ é o homomorfismo transgressão (Teorema 1.5.4).

De (3.1.19), (3.1.20), (3.1.21) e (3.1.22), temos que

$$(1) E_r^{0,q} \cong E_\infty^{0,q} \cong H^0(B; \mathcal{H}^q(F)) = 0, 0 < q < m, r \geq 2.$$

$$(2) E_{m+1}^{m+1,0} \simeq H^{m+1}(B);$$

$$(3) E_{m-1}^{0,m} \cong H^0(B; \mathcal{H}^m(F)).$$

$$(4) E_r^{p,0} \cong E_\infty^{p,0} \cong H^p(B), \forall p \leq m, \forall r \geq 2.$$

Substituindo (1), (2), (3) e (4) em (3.1.50), nós obtemos a seqüência desejada,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(B) \xrightarrow{p^*} H^1(E) \rightarrow H^0(B; \mathcal{H}^1(F)) \xrightarrow{\tau} H^2(B) \xrightarrow{p^*} H^2(E) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H^m(B) \xrightarrow{p^*} H^m(E) \rightarrow H^0(B; \mathcal{H}^m(F)) \xrightarrow{\tau} H^{m+1}(B) \xrightarrow{p^*} H^{m+1}(E) \end{aligned}$$

Isso completa a prova.

O Lema 3.1.9 também possui a seguinte versão homológica

Lema 3.1.10 *Sejam R um PID e $E \xrightarrow{p} B$ uma fibração com fibra F e espaço base B conexo por caminhos. Suponhamos que $H_q(F, R) = 0$, para $0 < q < m$. Então, existe uma seqüência exata com coeficientes em R ,*

$$\begin{aligned} H_{m-1}(E) \xrightarrow{p_*} H_{m+1}(B) \xrightarrow{\tau} H_0(B; \mathcal{H}_m(F)) \rightarrow H_m(E) \xrightarrow{p_*} H_m(B) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H_2(E) \xrightarrow{p_*} H_2(B) \xrightarrow{\tau} H_0(B; \mathcal{H}_1(F)) \rightarrow H_1(E) \xrightarrow{p_*} H_1(B) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde τ é o homomorfismo transgressão e $\mathcal{H}_i(F)$ denota o sistema de coeficientes locais sobre B .

Demonstração Segue do Teorema 1.4.16 que existe uma seqüência espectral do primeiro quadrante $\{E_{*,*}^r, d^r\}$, com

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_q(F)), \quad (3.1.51)$$

a homologia de B com coeficientes locais na homologia de F , a fibra de p , e convergindo para $H_*(E; R)$. Desde que F é conexo por caminhos, segue do Exemplo 1.3.8, que o sistema de coeficientes locais $\mathcal{H}_0(F)$ sobre B é trivial. Assim, do Lema 1.3.12 nós concluímos que

$$E_{p,0}^2 \cong H_p(B; \mathcal{H}_0(F)) = H_p(B; H_0(F)) = H_p(B). \quad (3.1.52)$$

Por outro lado, $H_q(F) = 0$, para $0 < q < m$ e segue de (3.1.51) que $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty = 0$, para $0 < q < m$. Além disso, a sequência espectral é do primeiro quadrante e então

$$H_{m+1}(B) = E_{m+1,0}^2 = E_{m+1,0}^3 = \cdots = E_{m+1,0}^{m+1} \quad (3.1.53)$$

$$H_0(B; \mathcal{H}_m(F)) = E_{0,m}^2 = E_{0,m}^3 = \cdots = E_{0,m}^{m+1} \quad (3.1.54)$$

$$H_p(B) = E_{p,0}^2 = E_{p,0}^3 = \cdots = E_{p,0}^p = E_{p,0}^\infty, \quad \forall p \leq m. \quad (3.1.55)$$

Consideremos as seguintes seqüências exatas

$$0 \rightarrow E_{r,0}^\infty \rightarrow E_{r,0}^r \xrightarrow{d^r} E_{0,r-1}^r \rightarrow E_{0,r-1}^\infty \rightarrow 0, \quad \forall r \leq m+1 \quad (3.1.56)$$

$$0 \rightarrow E_{0,r}^\infty \rightarrow H_r(E) \rightarrow E_{r,0}^\infty \rightarrow 0, \quad \forall r \leq m \quad (3.1.57)$$

e, para $r = m+1$, a projeção natural

$$H_{m+1}(E) \rightarrow E_{m+1,0}^\infty \rightarrow 0. \quad (3.1.58)$$

Colocando juntas essas seqüências nós obtemos a seqüência exata

$$\begin{aligned} H_{m+1}(E) &\rightarrow E_{m+1,0}^{m+1} \xrightarrow{d^{m+1}} E_{0,m}^{m+1} \rightarrow H_m(E) \rightarrow E_{m,0}^m \xrightarrow{d^m} E_{0,m-1}^m \rightarrow \cdots \\ \cdots &\rightarrow H_2(E) \rightarrow E_{2,0}^2 \xrightarrow{d^2} E_{0,1}^2 \rightarrow H_1(E) \rightarrow E_{1,0}^\infty \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.1.59)$$

onde $d^r : E_{r,0}^r \rightarrow E_{0,r-1}^r$ é o homomorfismo transgressão (Teorema 1.5.3). Substituindo (3.1.53), (3.1.54) e (3.1.55) em (3.1.59), nós obtemos a seqüência desejada,

$$\begin{aligned} H_{m+1}(E) &\xrightarrow{p_*} H_{m+1}(B) \xrightarrow{\tau} H_0(B; \mathcal{H}_m(F)) \rightarrow H_m(E) \xrightarrow{p_*} H_m(B) \rightarrow \cdots \\ \cdots &\rightarrow H_2(E) \xrightarrow{p_*} H_2(B) \xrightarrow{\tau} H_0(B; \mathcal{H}_1(F)) \rightarrow H_1(E) \xrightarrow{p_*} H_1(B) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Isso completa a prova.

Lema 3.1.11 *Seja X um G -espaço livre, Hausdorff, conexo por caminhos e paracompacto. Para um natural $m \geq 1$, suponhamos que $H^q(X; R) = 0$, para $0 < q < m$ e que $\beta_m(X; R) < \beta_{m+1}(BG; R)$. Então $h_*^* : H^{m-1}(BG; R) \rightarrow H^{m+1}(X/G; R)$ é não trivial, onde $h : X/G \rightarrow BG$ é uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$.*

Demonstração Sejam $EG \rightarrow BG$ o G -fibrado universal e $h : X/G \rightarrow BG$ uma aplicação classificante para o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$. Seja $p : X_G \rightarrow BG$ a fibração de Borel associada ao G -espaço X , onde X_G é o espaço de Borel. Segue da Observação 1.2.1, que a aplicação $X_G \rightarrow X/G$ é uma equivalência de homotopia. Denotemos por $r : X/G \rightarrow X_G$ a sua inversa homotópica. Assim, temos da Observação 1.2.2 que $p \circ r : X/G \rightarrow BG$ também classifica o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$ e pelo Teorema 1.1.2, $p \circ r$ é homotópica a h . Desde que $r^* : H^{m+1}(X_G) \rightarrow H^{m+1}(X/G)$ é um isomorfismo, é suficiente provar que $p^* : H^{m+1}(BG) \rightarrow H^{m+1}(X_G)$ é não trivial. De fato, como por hipótese $H^q(X) = 0$, para $0 < q < m$, segue do Lema 3.1.9 que existe uma seqüência exata com coeficientes em R

$$0 \rightarrow \cdots \rightarrow H^m(X_G) \rightarrow H^0(BG; \mathcal{H}^m(X)) \xrightarrow{\tau} H^{m+1}(BG) \xrightarrow{p^*} H^{m+1}(X_G). \quad (3.1.60)$$

Suponhamos que $p^* : H^{m+1}(BG; R) \rightarrow H^{m+1}(X_G; R)$ seja nula. Deste modo, temos que $\tau : H^0(BG; \mathcal{H}^m(X)) \rightarrow H^{m+1}(BG)$ é sobrejetor, o que implica que

$$\text{rank } H^0(BG; \mathcal{H}^m(X)) \geq \beta_{m+1}(BG). \quad (3.1.61)$$

Por outro lado, $H^0(BG; \mathcal{H}^m(X))$ é isomorfo a um submódulo de $H^m(X)$ (vide [48, Cap.6, §3, Teorema 3.2]) e por hipótese $\beta_m(X) < \beta_{m+1}(BG)$, assim

$$\text{rank } H^0(BG; \mathcal{H}^m(X)) < \text{rank } H^m(X) = \beta_m(X) < \beta_{m+1}(BG),$$

o que contradiz 3.1.61.

Observação 3.1.12 Um resultado similar ao Lema 3.1.11 foi provado em [24], quando G é um grupo finito.

Demonstração do Teorema 3.1.1 Suponhamos que $f : X \rightarrow Y$ seja uma aplicação G -equivariante. Desde que Y é paracompacto Hausdorff, podemos tomar uma aplicação classificante $g : Y/G \rightarrow BG$ para o G -fibrado principal $Y \rightarrow Y/G$ e segue da Observação 1.1.4 que a composição $h = g \circ f : X/G \rightarrow BG$ classifica o G -fibrado principal $X \rightarrow X/G$, onde $f : X/G \rightarrow Y/G$ é a induzida por f entre os espaços de órbitas. Como por hipótese $H^{m+1}(Y/G) = 0$, nós temos que $g^* : H^{m+1}(BG) \rightarrow H^{m+1}(Y/G)$ é trivial e assim $h^* : H^{m+1}(BG) \rightarrow H^{m+1}(X/G)$ é o homomorfismo nulo, o que contradiz o Lema 3.1.11.

3.1.2 Sobre a existência de pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidências

Sejam agora X e Y , conexos por caminhos e paracompactos Hausdorff e suponhamos que X seja equipado com uma ação livre do grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$, gerado por um homeomorfismo periódico $T : X \rightarrow X$ de período p , onde p é um primo ímpar. Denotemos por $Y^* = \prod_{i=1}^p Y^i - \Delta$, onde

$$\Delta = \{(y_1, y_2, \dots, y_p) \in \prod_{i=1}^p Y^i : y_1 = y_2 = \dots = y_p\}$$

é a diagonal usual em $\prod_{i=1}^p Y^i$. Então, Y^* admite uma ação livre do grupo $\mathbb{Z}_p$, gerado pelo homeomorfismo periódico $t_Y : Y^* \rightarrow Y^*$ de período p , dado por

$$t_Y(y_1, y_2, \dots, y_p) = (y_2, y_3, \dots, y_p, y_1).$$

Nessas condições, nós obtemos o seguinte teorema sobre a existência de pontos de $\mathbb{Z}_p$ -coincidências.

Teorema 3.1.13 *Para um natural $n \geq 1$, suponhamos que $H^r(X; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq r \leq n$ e que $H^{n+1}(Y^*/t_Y; \mathbb{Z}_p) = 0$. Então toda função contínua $f : X \rightarrow Y$ tem um ponto de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, ou seja, existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(g(x))$, para todo $g \in \mathbb{Z}_p$.*

Demonstração Seja $f : X \rightarrow Y$ uma função contínua que não possui nenhum ponto de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência. Podemos definir a aplicação $\mathbb{Z}_p$ -equivariante $F : X \rightarrow Y^*$, onde

$$F(x) = (f(x), f(T(x)), \dots, f(T^{p-1}(x))).$$

Desde que a hipótese $H^n(X) = 0$ implica que $0 = \beta_n(X) < \beta_{n+1}(B\mathbb{Z}_p) = 1$, a existência de uma tal aplicação contradiz o Teorema 3.1.1.

Observação 3.1.14 O Teorema 3.1.13 estende para $\mathbb{Z}_p$ -ações livres o seguinte Teorema provado em [45, Teorema 3]: Seja (X, T) conexo por caminhos com involução livre e Y Hausdorff e localmente conexo por caminhos. Suponhamos que, para um natural $n \geq 1$, $H_r(X; \mathbb{Z}_2) = 0$ para $1 \leq r < n$ e que $H_{n+1}(Y^*/t_Y; \mathbb{Z}_2) = 0$, onde $Y^* = Y \times Y - \Delta$ e $t_Y : Y^* \rightarrow Y^*$ é a involução livre $t_Y(x, y) = (y, x)$. Então toda função contínua $f : X \rightarrow Y$ tem um ponto de T -coincidência, ou seja, um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$.

Observação 3.1.15 Suponhamos que no Teorema 3.1.13, Y seja um k -dimensional CW-complexo. Então $Y^*/\mathbb{Z}_p$ admite uma pk -dimensional estrutura de CW-complexo, assim, $H^{pk+1}(Y^*/\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p) = 0$. Então toda função contínua $f : X \rightarrow Y$ tem um ponto de $\mathbb{Z}_p$ -coincidência, se $n > pk$ (isso também segue de [24, Teorema 1]; de fato o Teorema 1 de [24] mostra adicionalmente que o resultado também é válido para $n = pk$).

Observação 3.1.16 Em [16], F.Cohen e J.E.Connett obtiveram um resultado de Borsuk-Ulam para funções contínuas $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n \geq 2$, onde X é um espaço de Hausdorff que admite uma $\mathbb{Z}_p$ -ação livre, com $p \geq 2$. A seguinte afirmação foi provada: se X é $(n-1)(p-1)$ -conexo, então existem $x \in X$ e $g \in \mathbb{Z}_p$, com g diferente do elemento identidade, tal que $f(x) = f(g(x))$. No seguinte Teorema, nós substituímos a hipótese de que X é $(n-1)(p-1)$ -conexo por uma condição cohomológica sobre X .

Teorema 3.1.17 *Seja X conexo por caminhos e paracompacto Hausdorff, com uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$ gerado por um homeomorfismo periódico $T : X \rightarrow X$ de período p , onde p é um primo ímpar. Suponhamos que $H^r(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para $1 \leq r \leq (n-1)(p-1)$. Então, para toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ existem $x \in X$ e $1 \leq i \leq p-1$ tal que $f(x) = f(T^i(x))$.*

Observação 3.1.18 É interessante observar que o Teorema 3.1.17 é mais forte que o resultado provado em [16]. De fato, recordemos que um espaço X é n -conexo se $\pi_k(X) = 0$, para todo $k \leq n$ e segue do Teorema de Hurewicz [20, Cap. 6, Teorema 6.66] que se X é n -conexo e conexo por caminhos, então $H^r(X) = 0$, para $1 \leq r \leq n$.

Para provar o Teorema 3.1.17, recordemos a definição de *espaço de configuração* de uma variedade M , estudado por Fadell e Neuwirth [23] em 1962. O *espaço de configuração* ordenado é o espaço de todas as k -uplas ordenadas de pontos distintos em M definido como segue

$$F(M, k) = \{ \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle; x_i \in M, x_i \neq x_j, \text{ se } i \neq j \}. \quad (3.1.62)$$

O espaço $F(\mathbb{R}^n, k)$ é o complemento de um arranjo linear de subespaços de codimensão n em $\mathbb{R}^{kn}$. A cohomologia desses espaços foi obtida por Cohen [17, 18].

O grupo simétrico sobre k letras, $\sum_k$ age livremente sobre $F(M, k)$ por permutação de coordenadas. Se G é qualquer grupo finito, existe k tal que $G \subset \sum_k$. Assim, o grupo cíclico de ordem p age livremente em $F(\mathbb{R}^n, p)$ via a ação dada por um homomorfismo $\mathbb{Z}_p \rightarrow \sum_p$, o qual leva $1 \in \mathbb{Z}_p$ no ciclo $(1, 2, \dots, p)$.

Em [16], Cohen e Connett provaram o seguinte resultado

Lema 3.1.19 $H^q(F(\mathbb{R}^n, p)/\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $q > (n-1)(p-1)$.

Demonstração do Teorema 3.1.17. Temos que $F(\mathbb{R}^n, p)$ admite uma ação livre de $\mathbb{Z}_p$, gerada pelo homeomorfismo periódico de período p , $t : F(\mathbb{R}^n, p) \rightarrow F(\mathbb{R}^n, p)$, onde $t\langle x_1, x_2, \dots, x_p \rangle = \langle x_2, \dots, x_p, x_1 \rangle$. Suponhamos que $f(x) \neq f(T^i(x))$, para todo $x \in X$ e $1 \leq i \leq p-1$. Então, podemos definir uma aplicação $\mathbb{Z}_p$ -equivariante $F : X \rightarrow F(\mathbb{R}^n, p)$, dada por

$$F(x) = \langle f(x), f(Tx), \dots, f(T^{p-1}x) \rangle.$$

Desde que $H^r(X, \mathbb{Z}_p) = 0$, para todo $1 \leq r \leq (n-1)(p-1)$ e pelo Lema 3.1.19, $H^r(F(\mathbb{R}^n, p)/\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) = 0$, para $r > (n-1)(p-1)$, temos que X e $F(\mathbb{R}^n, p)$ satisfazem as hipóteses do Corolário 3.1.4 e a existência de uma tal aplicação $\mathbb{Z}_p$ -equivariante é uma contradição.

3.2 Uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam para $\mathbb{Z}_2$ -ações livres

Nesta seção, nós mostramos que é possível enfraquecer as hipóteses cohomológicas exigidas no seguinte teorema, provado em [15]

Teorema 1. *Sejam X, Y conexos por caminhos e paracompactos de Hausdorff, equipados com involuções livres $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$. Suponhamos que para algum natural $n > 1$, $\tilde{H}^r(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n$ e $\tilde{H}^{n+1}(Y/S; \mathbb{Z}_2) = 0$, onde Y/S é o espaço de órbitas de Y por S . Então não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$.*

Especificamente, nós provamos o seguinte

Teorema 3.2.1 *Sejam X, Y conexos por caminhos e paracompactos de Hausdorff, com involuções livres $T : X \rightarrow X$, $S : Y \rightarrow Y$ e $A \subset X$ conexo por caminhos e T -invariante. Suponhamos que para algum natural $n \geq 1$, $H^r(A, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n-1$, $i^* : H^n(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(A, \mathbb{Z}_2)$ seja nula e $H^{n+1}(Y/S, \mathbb{Z}_2) = 0$. Então, não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$.*

Corolário 3.2.2 *Sejam M^p uma p -dimensional variedade e N^n uma n -dimensional variedade generalizada com involuções livres $T : M^p \rightarrow M^p$ e $S : N^n \rightarrow N^n$. Suponhamos que exista uma n -dimensional subvariedade T -invariante $A^n \subset M^p$ tal que A^n seja homeomorfa à esfera S^n . Se $i^* : H^n(M^p, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(A^n, \mathbb{Z}_2)$ é nula, então não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (M^p, T) \rightarrow (N^n, S)$.*

Demonstração. Desde que A^n é homeomorfa à esfera S^n , temos que $H^r(A^n; \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n-1$. Além disso, $H^{n+1}(N^n/S; \mathbb{Z}_2) = 0$, pois N^n/S é uma variedade generalizada de dimensão n . Assim, se $i^* : H^n(M^p, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(A^n, \mathbb{Z}_2)$ é nula, pelo Teorema 3.2.1, não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (M^p, T) \rightarrow (N^n, S)$.

Observação 3.2.3 Suponhamos que (A^n, T) seja uma subvariedade equivariantemente difeomorfa à esfera S^n e N^n uma variedade diferenciável. Nesse caso, o Corolário 3.2.2 segue da famosa versão do Teorema de Borsuk-Ulam provada por Conner-Floyd [15].

De fato, suponhamos que exista uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (M^p, T) \rightarrow (N^n, S)$. Denotemos por $h : S^n \rightarrow A^n$ um difeomorfismo $\mathbb{Z}_2$ -equivariante com relação à aplicação antipodal e seja $i : A^n \hookrightarrow M^p$ a inclusão. Deste modo, $g = f \circ i \circ h : S^n \rightarrow N^n$ é $\mathbb{Z}_2$ -equivariante com relação à antipodal, ou seja, $g(-x) = S(g(x))$, para todo $x \in S^n$. Desde que S é uma involução livre, temos que $S(g(x)) \neq g(x)$ para todo $x \in S^n$, assim $g(-x) \neq g(x)$ para todo $x \in S^n$. Por outro lado, $i^* : H^n(M^p, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(A^n, \mathbb{Z}_2)$ é nula e assim temos que $g^* : H^n(N^n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(S^n; \mathbb{Z}_2)$ é o homomorfismo nulo. Segue de Conner-Floyd que existe $x \in S^n$ tal que $g(x) = g(-x)$, o que é uma contradição.

Se (A^n, T) é uma subvariedade equivariantemente homeomorfa à esfera S^n com a aplicação antipodal, prova-se de maneira análoga que, com essas hipóteses, o Corolário 3.2.2 também decorre do Teorema 2.1.1, provado no Capítulo 2 [5, Teorema 1.1].

3.2.1 Demonstração do Teorema 3.2.1

Na demonstração do Teorema 1 de [45], a hipótese de que $H^r(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n$ implica que a $(n+1)$ -ésima potência da classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $X \rightarrow X/T$ é não nula. Por outro lado, a hipótese $H^{n+1}(Y/S; \mathbb{Z}_2) = 0$, implica necessariamente que a $(n+1)$ -ésima classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $Y \rightarrow Y/S$ é nula. Essas duas condições impedem a existência de uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante de X em Y , conforme o seguinte

Lema 3.2.4 *Sejam X e Y espaços paracompactos de Hausdorff com involuções livres $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$. Sejam e e u as classes de Euler dos $\mathbb{Z}_2$ -fibrados principais $X \rightarrow X/T$ e $Y \rightarrow Y/S$, respectivamente e denotemos suas $(n+1)$ -ésimas potências por e^{n+1} e u^{n+1} . Então, se $e^{n+1} \neq 0$ e $u^{n+1} = 0$, não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$.*

Demonstração. Sejam $B\mathbb{Z}_2$, o espaço classificante para $\mathbb{Z}_2$ e $\alpha \in H^1(B\mathbb{Z}_2)$ a classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal universal $E\mathbb{Z}_2 \rightarrow B\mathbb{Z}_2$. Desde que X é paracompacto Hausdorff, pelo Teorema 1.1.1, podemos tomar uma aplicação classificante $h : X/T \rightarrow B\mathbb{Z}_2$ para o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $X \rightarrow X/T$ e segue da Observação

1.8.5, que a classe de Euler de $X \rightarrow X/T$ é dada por $e = h^*(\alpha) \in H^1(X/T)$, onde $h^* : H^1(B\mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(X/T)$ é a induzida em cohomologia de h . Suponhamos que exista uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$ e seja $g : Y/S \rightarrow B\mathbb{Z}_2$ uma aplicação classificante para o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $Y \rightarrow Y/S$. Então, da Observação 1.1.4, $g \circ \bar{f}$ também classifica o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $X \rightarrow X/G$ e é homotópica a $h : X/T \rightarrow B\mathbb{Z}_2$, onde $\bar{f} : X/T \rightarrow Y/S$ é a induzida entre os espaços de órbitas. Seja $u \in H^1(Y/S)$, a classe de Euler de $Y \rightarrow Y/S$. Assim, $u = g^*(\alpha)$ e temos que

$$e = h^*(\alpha) = (g \circ \bar{f})^*(\alpha) = \bar{f}^* \circ g^*(\alpha) = \bar{f}^*(u). \quad (3.2.1)$$

Deste modo,

$$\bar{f}^*(u^{n+1}) = \bar{f}^*(u) \cup \dots \cup \bar{f}^*(u) = e \cup \dots \cup e = e^{n+1} \neq 0 \quad (3.2.2)$$

e isso implica que $u^{n+1} \neq 0$, o que é uma contradição.

Demonstração do Teorema 3.2.1 Denotemos por $\hat{e} \in H^1(A/T)$ a classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $A \rightarrow A/T$ e seja $\bar{i} : A/T \hookrightarrow X/T$ a induzida entre os espaços de órbitas da inclusão $i : A \hookrightarrow X$. Da observação 1.8.6, temos que

$$\bar{i}^*(e) = \hat{e} \in H^1(A/T), \quad (3.2.3)$$

onde $e \in H^1(X/T)$ é a classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $X \rightarrow X/T$ e $\bar{i}^* : H^1(X/T) \rightarrow H^1(A/T)$. Da Seção 1.8, temos as seqüências exatas de Gysin dos fibrados $X \rightarrow X/T$ e $A \rightarrow A/T$ no seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & H^0(X/T) & \xrightarrow{p^*} & H^0(X) & \xrightarrow{\tau} & H^0(X/T) & \xrightarrow{\cup e} H^1(X/T) \longrightarrow \dots \\ & \bar{i}^* \downarrow & & i^* \downarrow & & \bar{i}^* \downarrow & & \bar{i}^* \downarrow \\ 0 \longrightarrow & H^0(A/T) & \xrightarrow{p^*} & H^0(A) & \xrightarrow{\tau} & H^0(A/T) & \xrightarrow{\cup \hat{e}} H^1(A/T) \longrightarrow \dots \end{array} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{array}{ccccccc} \dots \longrightarrow & H^r(X/T) & \xrightarrow{p^*} & H^r(X) & \xrightarrow{\tau} & H^r(X/T) & \xrightarrow{\cup e} H^{r+1}(X/T) \longrightarrow \dots \\ & \bar{i}^* \downarrow & & i^* \downarrow & & \bar{i}^* \downarrow & & \bar{i}^* \downarrow \\ \dots \longrightarrow & H^r(A/T) & \xrightarrow{p^*} & H^r(A) & \xrightarrow{\tau} & H^r(A/T) & \xrightarrow{\cup \hat{e}} H^{r+1}(A/T) \longrightarrow \dots \end{array}$$

onde p é a aplicação quociente e τ é o homomorfismo transfer. Desde que A e X são conexos por caminhos, $p^* : H^0(A/T) \rightarrow H^0(A)$ e $p^* : H^0(X/T) \rightarrow H^0(X)$ são

isomorfismos, assim $\cup e : H^0(X/T) \rightarrow H^1(X/T)$ e $\cup \hat{e} : H^0(A/T) \rightarrow H^1(A/T)$ são injetores, o que implica que $e = 1 \cup e \in H^1(X/T)$ e $\hat{e} = 1 \cup \hat{e} \in H^1(A/T)$ são classes não nulas. Por hipótese, $H^r(A) = 0$, para $1 \leq r \leq n-1$ e temos do diagrama (3.2.4) que $\cup \hat{e} : H^r(A/T) \rightarrow H^{r+1}(A/T)$ é isomorfismo, para $1 \leq r \leq n-2$ e monomorfismo para $r = n-1$. Assim, concluímos que e^n é não nulo e segue de (3.2.3) que

$$\bar{i}^*(e^n) = \bar{i}^*(e) \cup \cdots \cup \bar{i}^*(e) = \hat{e} \cup \cdots \cup \hat{e} = \hat{e}^n \neq 0, \quad (3.2.5)$$

o que implica que $e^n \in H^n(X/T)$ é não nulo. Mostremos agora que $e^{n+1} \in H^{n+1}(X/T)$ é não nulo. Suponhamos que $e^{n+1} = e^n \cup e = 0$, então $e^n \in \ker(\cup e) = \text{im}(\tau)$ e existe um elemento não nulo $a \in H^n(X)$ tal que $\tau(a) = e^n$. Dessa forma,

$$\bar{i}^* \circ \tau(a) = \bar{i}^*(e^n) = \hat{e}^n \neq 0. \quad (3.2.6)$$

Por outro lado, desde que por hipótese $i^* : H^n(X) \rightarrow H^n(A)$ é o homomorfismo nulo, segue da comutatividade do diagrama (3.2.4) que

$$i^* \circ \tau(a) = \tau \circ i^*(a) = 0, \quad (3.2.7)$$

contradizendo (3.2.6) e portanto $e^{n+1} \neq 0$. Além disso, como $H^{n+1}(Y/S) = 0$, temos que $u^{n+1} \in H^{n+1}(Y/S)$ é a classe nula, onde $u \in H^1(Y/S)$ é a classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $Y \rightarrow Y/S$. Segue do Lema 3.2.4 que não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (X, T) \rightarrow (Y, S)$.

Observação 3.2.5 Em [45, Teorema A'] foi provada a seguinte generalização do Teorema de Borsuk-Ulam:

Teorema A'. *Sejam (X, T) uma involução livre com X conexo por caminhos e paracompacto Hausdorff e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função contínua. Suponhamos que $H^r(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n-1$. Então, se $n \geq k$ existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$.*

Assim como a prova do Teorema A' segue diretamente do Teorema 1, a seguinte versão do Teorema A' é uma consequência imediata do Teorema 3.2.1:

Teorema 3.2.6 *Sejam X conexo por caminhos e paracompacto Hausdorff, com uma involução livre $T : X \rightarrow X$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ uma função contínua. Seja $A \subset X$ conexo*

por caminhos e T -invariante. Suponhamos que para algum $n \geq 1$, $H^i(A, \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq i \leq n-2$ e que $i^* : H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{n-1}(A, \mathbb{Z}_2)$ seja nula, onde $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão. Então, se $n > k$ existe um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$.

Demonstração Suponhamos que $f(x) \neq f(T(x))$, para todo $x \in X$. Então a aplicação $F : (X, T) \rightarrow (S^{k-1}, a)$ definida por

$$F(x) = \frac{f(x) - f(T(x))}{\|f(x) - f(T(x))\|}, \quad (3.2.8)$$

é $\mathbb{Z}_2$ -equivariante, onde $a : S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ é a aplicação antipodal $a(x) = -x$, para todo $x \in S^{k-1}$. Desde que $n \geq k$, temos que $H^n(S^{k-1}/a) = 0$ e a existência de uma tal aplicação contradiz o Teorema 3.2.1.

A seguir, nós apresentamos um exemplo de um espaço topológico que não é uma $\mathbb{Z}_2$ -esfera de cohomologia e para o qual podemos aplicar o Teorema 3.2.6.

Exemplo 3.2.7 Seja $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $t(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Então t é uma involução, cujo único ponto fixo é a origem do $\mathbb{R}^3$. Consideremos o toro $T = S^1 \times S^1$, o produto cartesiano de duas cópias da S^1 e denotemos por $\mathbb{B}^2 = T \# T$ a soma conexa duas cópias de T , o qual pode ser mergulhado em $\mathbb{R}^3$ simetricamente com relação à origem. Dessa forma, $t : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ é uma involução livre, ou seja, $t(X) \neq X$, para todo $X \in \mathbb{B}^2$. Seja

$$A = \{(x, 0, z); x^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{B}^2.$$

Observemos que A é homeomorfa à esfera S^1 e é invariante pela aplicação t , a qual coincide com a antipodal quando restrita ao subconjunto A . Além disso, $i^* : H^1(\mathbb{B}^2; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(A; \mathbb{Z}_2)$ é o homomorfismo nulo. Assim segue do Teorema 3.2.6 que para toda função contínua $f : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe um ponto $X \in \mathbb{B}^2$ tal que $f(X) = f(t(X))$. Note que $H^1(\mathbb{B}^2, \mathbb{Z}_2) \neq 0$ e portanto o Teorema A' não se aplica a esse caso.

3.3 Um exemplo sobre a não existência de uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante entre duas variedades fechadas e de mesma dimensão

Suponhamos que (M, T) e (N, S) sejam n -dimensionais variedades fechadas com involuções livres. Observemos que a questão da não-existência de uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante nesse caso não pode ser abordada sob o aspecto dos Teoremas 1 e 3.2.1, uma vez que M e N possuem a mesma dimensão e $H^n(N/S, \mathbb{Z}_2) \neq 0$. De fato, tais teoremas (inclusive o Teorema clássico de Borsuk-Ulam), não usam toda a força do argumento contido no Lema 3.2.4, segundo o qual somente a potência adequada da classe de Euler do contradomínio precisa ser nula. Tanto no Teorema 1, como no Teorema 3.2.1, estamos supondo que a n -cohomologia do espaço de órbitas é zero, o que anula todas as classes e, em particular, a n -ésima potência da classe de Euler em questão.

O nosso próximo objetivo é construir um exemplo de duas variedades fechadas (M^n, T) e (N^n, S) de dimensão n dotadas de involuções livres, cujas cohomologias são mais complicadas que a cohomologia da esfera de tal forma que a n -ésima potência da classe de Euler de M^n é não nula, enquanto que a n -ésima potência da classe de Euler de N^n é nula, embora em N^n/S exista classe não nula n -dimensional, uma vez que $H^n(N^n/S, \mathbb{Z}_2) \neq 0$. Consequentemente, do Lema 3.2.4, não existe aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : M^n \rightarrow N^n$. Gostaríamos de agradecer ao Professor Doutor Pedro Luiz Queiroz Pergher, da Universidade Federal de São Carlos, pela sugestão desse exemplo.

3.3.1 Construção do exemplo

A construção desse exemplo é baseada no seguinte argumento: seja E o espaço total de um n -fibrado vetorial $E \rightarrow M^k$ sobre uma k -variedade diferenciável fechada M^k . Existe o fibrado em esferas associado $S(E) \rightarrow M^k$, com fibra S^{n-1} , cujo espaço total $S(E)$ é uma variedade diferenciável fechada de dimensão $k + n - 1$. Existe uma involução livre $T : S(E) \rightarrow S(E)$ atuando como a antipodal em cada fibra. Seja $\mathbb{R}P(E) = S(E)/T$ o espaço total do fibrado projetivo associado $\mathbb{R}P(E) \rightarrow M^k$, cuja

fibra é o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{n-1}$. Seja $c \in H^1(\mathbb{R}P(E); \mathbb{Z}_2)$ a classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $S(E) \rightarrow \mathbb{R}P(E)$, então $c^{n+k-1} \in H^{n+k-1}(\mathbb{R}P(E), \mathbb{Z}_2)$. Segue do Teorema de Leray-Hirsch que $H^*(\mathbb{R}P(E); \mathbb{Z}_2)$ é um módulo livre sobre o anel de cohomologia da base $H^*(M^k, \mathbb{Z}_2)$, via a induzida da projeção $p : \mathbb{R}P(E) \rightarrow M^k$, gerado por $1, c, c^2, c^3, \dots, c^{n-1}$, com única relação sendo dada por (vide [15, Teorema de Borel-Hirzebruch, pg.61])

$$c^n = c^{n-1}w_1 + c^{n-2}w_2 + \dots + cw_{n-1} \pm w_n, \quad (3.3.1)$$

onde $w_1, w_2, \dots, w_n$ são as classes características do fibrado vetorial $E \rightarrow M^k$, com $w_i \in H^i(M^k; \mathbb{Z}_2)$, para $1 \leq i \leq n$. Observemos então que o elemento não nulo da cohomologia $H^{k-n-1}(\mathbb{R}P(E), \mathbb{Z}_2)$ na dimensão top é dado por

$$c^{n-1}v, \quad (3.3.2)$$

onde $v \in H^k(M^k, \mathbb{Z}_2)$ é o elemento não nulo da dimensão top da base M^k . Assim, conhecendo a cohomologia da base M^k e as classes características do fibrado vetorial $E \rightarrow M^k$, é possível calcular as potências da classe de Euler desejada. Deste modo, o exemplo consiste em encontrar dois fibrados com bases adequadas, cujos espaços totais sejam n -dimensionais variedades fechadas, embora as bases desses fibrados não necessariamente possuam a mesma dimensão, de tal forma que a n -ésima potência da classe de Euler seja nula em um dos fibrados e não nula no outro.

Exemplo 3.3.1 Seja $n \geq 4$ um natural fixado e denotemos por $\tau_{\mathbb{R}P^2}$ o fibrado tangente sobre $\mathbb{R}P^2$, $\tau(\mathbb{R}P^2) \rightarrow \mathbb{R}P^2$. A classe total de Stiefel-Whitney de $\mathbb{R}P^2$ é dada por $w(\mathbb{R}P^2) = 1 + a + a^2 \in H^*(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$, onde a é o gerador de $H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$. Seja ε^1 o fibrado trivial unidimensional e ξ o $(n-1)$ -fibrado vetorial $E_\xi \rightarrow \mathbb{R}P^2$

$$\xi = \tau_{\mathbb{R}P^2} \oplus \varepsilon^1 \oplus \dots \oplus \varepsilon^1, \quad (3.3.3)$$

obtido pela soma de Whitney do fibrado tangente sobre $\mathbb{R}P^2$ com $(n-3)$ -cópias do fibrado trivial unidimensional. Seja $S(E_\xi) \rightarrow \mathbb{R}P^2$ o fibrado em esfera de ξ , com fibra S^{n-2} e cujo espaço total $S(E_\xi)$ é uma variedade fechada de dimensão n . Seja $\mathbb{R}P(E_\xi) = S(E_\xi)/S$ o espaço total do fibrado projetivo associado $\mathbb{R}P(E_\xi) \rightarrow \mathbb{R}P^2$,

cuja fibra é o espaço projetivo $\mathbb{R}P^{n-2}$, onde $S : S(E_\xi) \rightarrow S(E_\xi)$ é uma involução livre, atuando como a antipodal em cada fibra S^{n-2} . Seja $c \in H^1(\mathbb{R}P(E_\xi); \mathbb{Z}_2)$ a classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $S(E_\xi) \rightarrow \mathbb{R}P(E_\xi)$ e mostremos que a n -ésima potência da classe de Euler desse fibrado $c^n \in H^n(\mathbb{R}P(E_\xi); \mathbb{Z}_2)$ é nula. De fato, temos que a classe total de Stiefel-Whitney do $(n-1)$ -fibrado vetorial $E_\xi \rightarrow \mathbb{R}P^2$ é dada por

$$w(\xi) = w(\tau_{\mathbb{R}P^2} \oplus \varepsilon^1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon^1) = w(\mathbb{R}P^2) = 1 + a + a^2, \quad (3.3.4)$$

onde $a \in H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$ é o elemento não nulo. Assim, $w_0(\xi) = 1, w_1(\xi) = a, w_2(\xi) = a^2$ e $w_i(\xi) = 0$ para $i > 2$ e segue de 3.3.1 que

$$c^{n-1} = c^{n-2}a + c^{n-3}a^2. \quad (3.3.5)$$

Assim, multiplicando ambos os lados dessa equação por $c \in H^1(\mathbb{R}P(E_\xi); \mathbb{Z}_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} c^n &= cc^{n-1} = cc^{n-2}a + cc^{n-3}a^2 \\ &= c^{n-1}a + c^{n-2}a^2 \in H^n(\mathbb{R}P(E_\xi); \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Por outro lado, multiplicando a equação 3.3.5 por $a \in H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_2)$, obtemos

$$\begin{aligned} c^{n-1}a &= c^{n-2}a^2 + c^{n-3}a^3 \\ &= c^{n-2}a^2 \in H^n(\mathbb{R}P(E_\xi); \mathbb{Z}_2) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Substituindo 3.3.7 em 3.3.6, obtemos

$$\begin{aligned} c^n &= c^{n-1}a + c^{n-2}a^2 \\ &= c^{n-2}a^2 + c^{n-2}a^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Deste modo, obtemos uma n -dimensional variedade fechada $N = S(E_\xi)$, equipada com uma involução livre $S : N \rightarrow N$ tal que a n -ésima potência da classe de Euler $c^n \in H^n(\mathbb{R}P(E_\xi); \mathbb{Z}_2)$ é nula.

Para construir a variedade M nas condições desejadas, denotemos por η o fibrado de Hopf unidimensional $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$, cuja classe total de Stiefel-Whitney é $w(\eta) = 1 + a$, onde $a \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$ é o elemento não nulo. Consideremos ξ' o n -fibrado vetorial $E_{\xi'} \rightarrow \mathbb{R}P^1$

$$\xi' = \eta \oplus \varepsilon^1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon^1, \quad (3.3.9)$$

obtido pela soma de Whitney do fibrado de Hopf sobre $\mathbb{R}P^1$ com $(n-1)$ -cópias do fibrado trivial unidimensional. Como anteriormente, seja $S(E_{\xi'}) \rightarrow \mathbb{R}P^1$ o fibrado em esfera de ξ' , com fibra S^{n-1} e cujo espaço total $S(E_{\xi'})$ é uma variedade fechada de dimensão n . Seja $\mathbb{R}P(E_{\xi'}) = S(E_{\xi'})/T$ o espaço total do fibrado projetivo associado $\mathbb{R}P(E_{\xi'}) \rightarrow \mathbb{R}P^1$, onde $T : S(E_{\xi'}) \rightarrow S(E_{\xi'})$ é uma involução livre, atuando como a antipodal em cada fibra S^{n-1} . Seja $c \in H^1(\mathbb{R}P(E_{\xi'}); \mathbb{Z}_2)$ a classe de Euler do $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $S(E_{\xi'}) \rightarrow \mathbb{R}P(E_{\xi'})$ e mostremos que a n -ésima potência da classe de Euler desse fibrado $c^n \in H^n(\mathbb{R}P(E_{\xi'}); \mathbb{Z}_2)$ é não nula. De fato, temos que a classe total de Stiefel-Whitney do n -fibrado vetorial $E_{\xi'} \rightarrow \mathbb{R}P^1$ é dada por

$$w(\xi') = w(\eta \oplus \varepsilon^1 \oplus \cdots \oplus \varepsilon^1) = w(\eta) = 1 + a, \quad (3.3.10)$$

onde $a \in H^1(\mathbb{R}P^1; \mathbb{Z}_2)$ é o elemento não nulo. Assim, temos que $w_0(\xi') = 1$, $w_1(\xi') = a$ e $w_i(\xi') = 0$ para $i > 1$. Segue de 3.3.1 que

$$c^n = c^{n-1}a \in H^n(\mathbb{R}P(E_{\xi'}); \mathbb{Z}_2). \quad (3.3.11)$$

De 3.3.2, temos que $c^n = c^{n-1}a$ é o elemento não nulo em $H^n(\mathbb{R}P(E_{\xi'}); \mathbb{Z}_2)$. Assim, temos uma n -dimensional variedade fechada $M = S(E_{\xi'})$, com uma involução livre $T : M \rightarrow M$ tal que a n -ésima potência da classe de Euler $c^n \in H^n(\mathbb{R}P(E_{\xi'}); \mathbb{Z}_2)$ é não nula. Portanto, segue do Lema 3.2.4 não existe uma aplicação $\mathbb{Z}_2$ -equivariante $f : (M, T) \rightarrow (N, S)$.

Capítulo 4

Uma versão não padrão do Teorema de Borsuk-Ulam

4.1 Introdução

Neste capítulo nós estudamos a possibilidade de substituir, no Teorema de Borsuk-Ulam, o domínio S^n por um espaço topológico X e as aplicações Identidade e Antipodal sobre S^n , por um par de funções apenas contínuas φ e ψ , definidas sobre X . Nesse contexto, a questão que surge é se seria possível provar que dada qualquer função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, existe um ponto $x \in X$ tal que $f(\psi(x)) = f(\varphi(x))$.

Consideremos primeiramente o caso 1-dimensional. Se X é compacto, conexo e se $\psi, \varphi : X \rightarrow X$ são funções contínuas, então dada qualquer função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, é possível garantir a existência de um ponto $x \in X$ tal que

$$f(\psi(x)) = f(\varphi(x)). \quad (4.1.1)$$

A demonstração desse caso é elementar. Entretanto, para $n = 2$, $X = S^k$ e $\psi = Id_{S^k}$, a resposta é negativa.

Em [29], Hopf propôs a seguinte

Definição 4.1.1 Sejam X, Y espaços topológicos. Uma função contínua $f : X \rightarrow Y$ é uma *função livre* se existe uma função contínua $\varphi : X \rightarrow X$ tal que $f(x) \neq f(\varphi(x))$, para todo $x \in X$.

Entre outros resultados, Hopf provou que para todo $n \geq 3$ existe uma função livre $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ainda nesse trabalho, ele coloca as seguintes questões:

- 1) Se existe uma função livre $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.
- 2) O quanto se poderia aumentar a dimensão da esfera S^2 , de tal forma que ainda continue existindo uma tal função livre.

Essas questões foram respondidas por E. Panmwitz em 1952. Em [44], ela mostrou que para todo $k \geq 2$, existem funções contínuas $\varphi : S^k \rightarrow S^k$ e $f : S^k \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $f(x) \neq f(\varphi(x))$, para todo $x \in S^k$.

Neste capítulo, nosso objetivo é provar que, sob certas condições, dada uma função contínua qualquer $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, embora a existência de um ponto $x \in X$, satisfazendo (4.1.1), nem sempre possa ser assegurada, ainda assim é possível estabelecer uma relação interessante entre os pontos

$$u = f(\varphi\psi(x)), \quad v = f(\varphi^2(x)), \quad w = f(\psi^2(x)),$$

quando $f(\varphi(x)) \neq f(\psi(x))$, para todo $x \in X$. Em geral, tais pontos são vértices de um triângulo em $\mathbb{R}^2$ e nós provamos que, sob determinadas condições, esse triângulo degenera-se em um segmento de reta fechado determinado pelos vértices v e w desse triângulo para pelo menos um ponto x em um subconjunto especial de X . A existência de um tal subconjunto é assegurada quando X for um espaço métrico completo e se φ for uma α -contração sobre X . Quando ψ for a aplicação Identidade e φ for uma involução livre, nós obtemos uma versão do Teorema de Borsuk-Ulam no caso 2-dimensional.

Denotaremos por $[u, v]$ o segmento de reta fechado em $\mathbb{R}^2$ unindo os pontos u e v . Especificamente, nós provamos o seguinte

Teorema 4.1.2 *Sejam X um espaço de Hausdorff e A um subconjunto de X compacto, conexo e localmente conexo por caminhos. Sejam $\psi, \varphi : X \rightarrow X$ funções contínuas tais que A seja invariante por ψ e φ . Suponhamos que*

- i) $\psi_* = \varphi_* : i_*(H_1(A, \mathbb{Q})) \rightarrow i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ seja sobrejetora;
- ii) $(\psi \circ \varphi)(a) = (\varphi \circ \psi)(a)$, para todo $a \in A$.

Então, dada qualquer função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$, existe $x \in X$ tal que $f(\varphi(x)) = f(\psi(x))$ ou existe $x \in A$ tal que $f(\varphi\psi(x)) \in [f(\varphi^2(x)), f(\psi^2(x))]$.

4.2 Demonstração do Teorema 4.1.2

Para a demonstração do Teorema 4.1.2, nós precisamos dos seguintes

Lema 4.2.1 *Sejam X um espaço topológico conexo e $K \neq \emptyset$ um subconjunto compacto de X . Sejam $g_1, g_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $g_1(K) \subset g_2(K)$. Então, existe $x \in X$ tal que $g_1(x) = g_2(x)$.*

Demonstração. Suponhamos que $g_1(x) \neq g_2(x)$, para todo $x \in X$ e consideremos a função contínua $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g_1(x) - g_2(x)$, para todo $x \in X$. Desde que X é conexo e h é contínua, $h(X)$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$. Assim, para todo $x \in X$, $h(x) > 0$ ou $h(x) < 0$. Suponhamos que $h(x) > 0$, para todo $x \in X$. Nesse caso $g_1(x) > g_2(x)$, para todo $x \in X$. Por outro lado, como K é compacto e g_2 é contínua existem $x_0, x_1 \in K$ tais que

$$g_2(x_0) \leq g_2(x) \leq g_2(x_1), \quad (4.2.1)$$

para todo $x \in K$. Além disso, $g_1(x) \in g_2(K)$, para todo $x \in K$ e segue de (4.2.1) que

$$g_2(x_0) \leq g_1(x) \leq g_2(x_1),$$

para todo $x \in K$. Em particular, $g_1(x_1) \leq g_2(x_1)$, o que contradiz o fato de $h(x) > 0$, para todo $x \in X$. O mesmo argumento vale para o caso em que $h(x) < 0$.

Como um corolário imediato do lema 4.2.1, nós obtemos o seguinte

Corolário 4.2.2 *Sejam X um espaço topológico conexo e K um subconjunto compacto de X . Sejam $\psi, \varphi : X \rightarrow X$ funções contínuas tais que $\psi(K) \subset \varphi(K)$. Então, dada qualquer função contínua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que $g(\psi(x)) = g(\varphi(x))$.*

Demonstração. Basta observar que as aplicações contínuas $g_1, g_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $g_1 = g \circ \psi$ e $g_2 = g \circ \varphi$ satisfazem $g_1(K) \subset g_2(K)$ e então pelo Lema 4.2.1 existe $x \in X$ tal que $g(\psi(x)) = g(\varphi(x))$.

Lema 4.2.3 *Sejam X um espaço topológico e funções contínuas $f, g : X \rightarrow S^n$. Suponhamos que exista um elemento $u \in H_n(X, \mathbb{Q})$ tal que $f_*(u) \neq (-1)^{n+1}g_*(u)$, então existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.*

Demonstração. Suponhamos que $f(x) \neq g(x)$, para todo $x \in X$. Nesse caso, o segmento de reta em $\mathbb{R}^{n+1}$ unindo $f(x)$ a $-g(x)$ não passa pela origem em $\mathbb{R}^{n+1}$, caso contrário, esses dois pontos seriam pontos antípodas e conseqüentemente $f(x) = g(x)$. Então, podemos definir uma aplicação $F : X \times I \rightarrow S^n$ dada por

$$F(x, t) = \frac{(1-t)(-g(x)) + t.f(x)}{\|(1-t)(-g(x)) + t.f(x)\|}, \quad \forall (x, t) \in X \times I.$$

Observemos que $F(x, 0) = -g(x)$ e $F(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in X$. Assim, f é homotópica a $(-g) = (A \circ g)$, onde $A : S^n \rightarrow S^n$ é a aplicação antipodal, cujo grau é $(-1)^{n+1}$. Segue que para todo $u \in H^n(X, \mathbb{Z})$, $f_*(u) = (-1)^{n+1}g_*(u)$.

Demonstração do Teorema 4.1.2 Suponhamos que $f(\varphi(x)) \neq f(\psi(x))$, para todo $x \in X$. Então, podemos definir a função contínua $h : X \rightarrow S^1$, dada por

$$h(x) = \frac{f(\psi(x)) - f(\varphi(x))}{\|f(\psi(x)) - f(\varphi(x))\|}.$$

Denotemos por $g : A \rightarrow S^1$ a restrição de h ao subespaço A . É suficiente mostrar a existência de um ponto $x \in A$ tal que $g(\varphi(x)) = g(\psi(x))$ ou equivalentemente,

$$\frac{f(\psi\varphi(x)) - f(\varphi^2(x))}{\|f(\psi\varphi(x)) - f(\varphi^2(x))\|} = \frac{f(\psi^2(x)) - f(\varphi\psi(x))}{\|f(\psi^2(x)) - f(\varphi\psi(x))\|}. \quad (4.2.2)$$

De fato, para todo $x \in A$, denotemos por $u = f(\psi\varphi(x)) = f(\varphi\psi(x))$, $v = f(\varphi^2(x))$ e $w = f(\psi^2(x))$. Assim, temos que a equação (4.2.2) é equivalente a

$$\frac{u - v}{\|u - v\|} = \frac{w - u}{\|w - u\|}, \quad \text{o que implica } (\|u - v\| + \|w - u\|)u = \|u - v\|w + \|w - u\|v,$$

$$\text{e portanto } u = \left(\frac{\|u - v\|}{\|u - v\| + \|w - u\|} \right)w + \left(\frac{\|w - u\|}{\|u - v\| + \|w - u\|} \right)v.$$

Dessa forma, nós concluímos que $u = f(\psi\varphi(x))$ pertence ao segmento de reta em $\mathbb{R}^2$ unindo os pontos $v = f(\varphi^2(x))$ e $w = f(\psi^2(x))$.

Seja $h_* : H_1(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Q})$. Há dois casos a serem considerados:

- i) existe $v \in i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ tal que $h_*(v) \neq 0$;
- ii) ou $h_*(v) = 0$, para todo $v \in i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$.

No primeiro caso, como $\psi_* - \varphi_*$ é sobrejetora, existe $u \in i_*(H_1(A, \mathbb{Q})) \subset H_1(A, \mathbb{Q})$ tal que $v = \psi_*(u) - \varphi_*(u)$. Assim, temos que

$$h_*(v) = h_*(\psi_*(u) - \varphi_*(u)) = g_*(\psi_*(u) - \varphi_*(u)) = (g \circ \psi)_*(u) - (g \circ \varphi)_*(u) \neq 0,$$

o que implica que $(g \circ \psi)_*(u) \neq (g \circ \varphi)_*(u)$. Pelo Lema 4.2.3 existe $x \in A$ tal que $g(\psi(x)) \neq g(\varphi(x))$.

Suponhamos agora que $h_*(v) = 0$, para todo $v \in i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ e seja $u \in H_1(A, \mathbb{Q})$; então $i_*(u) = v \in i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ e assim

$$h_*(v) = h_*(i_*(u)) = (h \circ i)_*(u) = g_*(u) = 0,$$

ou seja, $g_* : H_1(A, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Q})$ deve ser a aplicação nula o que implica que $g_* : H_1(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(S^1, \mathbb{Z})$ é trivial. Segue da comutatividade do diagrama,

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(S^1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_1(A; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{g_*} & H_1(S^1; \mathbb{Z}) \end{array} \quad (4.2.3)$$

que $g_* : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(S^1)$ também é trivial, onde as setas verticais denotam os homomorfismos de Hurewicz, os quais são sobrejetores. Desde que A é Hausdorff e localmente conexo por caminhos, temos do Teorema Fundamental do Levantamento (vide, por exemplo, [30, pg. 89]), que existe $\tilde{g} : A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{g} & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{g} & S^1 \end{array} \quad (4.2.4)$$

é comutativo, ou seja, $p \circ \tilde{g} = g$, onde $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ é o recobrimento universal.

Por outro lado, desde que A é invariante pela aplicação φ , podemos obter uma sequência $\{\varphi^n(A)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de A tais que

$$\cdots \subset \varphi^n(A) \subset \varphi^{n-1}(A) \subset \cdots \subset \varphi^2(A) \subset \varphi(A) \subset A.$$

Consideremos o seguinte subconjunto compacto de A

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(A), \quad (4.2.5)$$

e observemos que $\psi(K) \subset K = \varphi(K)$. De fato, por hipótese temos que A é invariante por ψ e φ . Além disso, φ e ψ comutam em A . Assim,

$$\psi(K) = \psi\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(A)\right) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \psi(\varphi^n(A)) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(\psi(A)) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \varphi^n(A) = K.$$

Segue do Corolário 4.2.2 que existe $x \in A$ tal que $\tilde{g}(\varphi(x)) = \tilde{g}(\psi(x))$. Assim, $p \circ \tilde{g}(\varphi(x)) = p \circ \tilde{g}(\psi(x))$, o que implica que $g(\varphi(x)) = g(\psi(x))$ e o resultado segue.

O seguinte corolário é uma consequência imediata do Teorema 4.1.2.

Corolário 4.2.4 *Sejam X um espaço de Hausdorff e A um subconjunto de X compacto, conexo e localmente conexo por caminhos. Seja $\varphi : X \rightarrow X$ uma involução livre tal que $\varphi(A) \subset A$. Suponhamos que $\text{Id}_* - \varphi_* : i_*(H_1(A, \mathbb{Q})) \rightarrow i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ seja sobrejetora. Então para toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(\varphi(x))$.*

Observação 4.2.5 No caso particular em que $A = X = S^2$ e φ é a aplicação antipodal, nós obtemos o Teorema clássico de Borsuk-Ulam no caso 2-dimensional.

Quando $i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ for o grupo trivial, então o homomorfismo $\psi_* - \varphi_*$ deverá ser sobrejetor. O Exemplo 4.2.6 ilustra esse caso.

Exemplo 4.2.6 Seja $T_n = T \sharp \cdots \sharp T$ a soma conexa de n -toros simetricamente mergulhado em $\mathbb{R}^3$ com relação à origem. Let $\varphi : T_n \rightarrow T_n$ a aplicação antipodal. Se n for par, existe um laço A em T_n homólogo a zero, que separa T_n em duas componentes simétricas a partir da origem tal que $\varphi(A) = A$, como indicado na Figura abaixo

Desde que A homólogo a zero em T_n , temos que $i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ é trivial e pelo Corolário 4.2.4, para toda função contínua $f : T_n \rightarrow \mathbb{R}^2$ existe $x \in T_n$ tal que $f(x) = f(\varphi(x))$. Se n for ímpar, é possível mostrar que esse resultado não é verdadeiro.

Observação 4.2.7 Em [45, Teorema A], foi provado que se (X, T) for uma involução livre e se X for conexo por caminhos tal que $H_r(X; \mathbb{Z}_2) = 0$, para $1 \leq r \leq n-1$, então para toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^k$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = f(T(x))$, se $n \geq k$. Observemos que o exemplo acima não pode ser obtido a partir desse teorema, desde que $H_1(T_n; \mathbb{Z}_2) \neq 0$.

Teorema 4.2.8 *Sejam X um espaço de Hausdorff e A um subconjunto de X compacto, conexo e localmente conexo por caminhos. Seja $\varphi : X \rightarrow X$ uma função contínua tal que $\varphi(A) \subset A$. Suponhamos que $Id_* - \varphi_* : i_*(H_1(A, \mathbb{Q})) \rightarrow i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ seja sobrejetora. Então, para toda função contínua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ existe $x \in X$ tal que*

$$\begin{aligned} g(x) &\leq g(\varphi(x)) \leq g(\varphi^2(x)) \leq g(\varphi^3(x)) \quad \text{ou} \\ g(x) &> g(\varphi(x)) \geq g(\varphi^2(x)) \geq g(\varphi^3(x)). \end{aligned}$$

Demonstração Consideremos a função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x) = (g(x), g(\varphi(x))), \quad \forall x \in X.$$

Pelo Teorema 4.1.2, existe $x \in A$ tal que $f(\varphi(x))$ pertence ao segmento de reta fechado em $\mathbb{R}^2$ unindo os pontos $f(\varphi^2(x))$ e $f(x)$. Suponhamos que $f(\varphi(x)) = f(x)$; então

$$g(x) = g(\varphi(x)) = g(\varphi^2(x)).$$

Desde que $g(\varphi^2(x)) \leq g(\varphi^3(x))$ ou $g(\varphi^2(x)) \geq g(\varphi^3(x))$, o resultado segue. A demonstração do teorema permanece a mesma, quando $f(\varphi(x)) = f(\varphi^2(x))$.

Agora, suponhamos que $f(\varphi(x)) \neq f(x)$ e que $f(\varphi(x)) \neq f(\varphi^2(x))$. Então, $f(\varphi(x))$ pertence ao segmento de reta aberto em $\mathbb{R}^2$ unindo os pontos $f(\varphi^2(x))$ e $f(x)$, ou seja, existe $0 < \lambda < 1$ tal que $f(\varphi(x)) = f(x) + \lambda(f(\varphi^2(x)) - f(x))$. Assim,

$$g\varphi(x) = g(x) + \lambda(g\varphi^2(x) - g(x)) \quad \text{e} \quad (4.2.6)$$

$$g\varphi^2(x) = g\varphi(x) + \lambda(g\varphi^3(x) - g\varphi(x)). \quad (4.2.7)$$

Suponhamos que $g(x) < g\varphi^2(x)$. De (4.2.6), temos que

$$g(x) < g\varphi(x) < g\varphi^2(x). \quad (4.2.8)$$

Por outro lado, $g\varphi(x) < g\varphi^3(x)$ ou $g\varphi^3(x) < g\varphi(x)$ e nós afirmamos que a segunda possibilidade não pode ocorrer, caso contrário de (4.2.7) nós teríamos que

$$g\varphi^3(x) < g\varphi^2(x) < g\varphi(x),$$

o que contradiz (4.2.8). Assim, $g\varphi(x) < g\varphi^3(x)$ e segue de (4.2.7) e (4.2.8) que

$$g(x) < g\varphi(x) < g\varphi^2(x) < g\varphi^3(x).$$

De maneira análoga, se $g(x) > g\varphi^2(x)$, nós obtemos a seguinte desigualdade

$$g(x) > g\varphi(x) > g\varphi^2(x) > g\varphi^3(x).$$

Isso completa a prova.

Nós obtemos o seguinte corolário imediato

Corolário 4.2.9 *Sejam X um espaço de Hausdorff e A um subconjunto de X compacto, conexo e localmente conexo por caminhos. Seja $\varphi : X \rightarrow X$ uma função contínua tal que $\varphi(A) \subset A$ e $\varphi^3 = Id_X$. Suponhamos que $Id_* - \varphi_* : i_*(H_1(A, \mathbb{Q})) \rightarrow i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ seja sobrejetora. Então, para toda função contínua $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ existe um ponto $x \in X$ tal que $g(x) = g(\varphi(x)) = g(\varphi^2(x))$.*

Exemplo 4.2.10 Seja S^3 a 3-dimensional esfera no 2-dimensional espaço complexo $\mathbb{C}^2$. Seja $\varphi : S^3 \rightarrow S^3$ a transformação definida por

$$\varphi(z_0, z_1) = (e^{2\pi i/3} z_0, e^{2\pi i/3} z_1),$$

onde z_0, z_1 são números complexos com $\sum_{i=0}^1 |z_i| = 1$. Temos que φ age livremente em S^3 e gera o grupo cíclico $\mathbb{Z}_3$. Observemos que $i_*(H_1(S^3, \mathbb{Q})) = 0$, onde $i : S^3 \rightarrow S^3$ é a identidade, o que implica que $Id_* - \varphi_* : i_*(H_1(S^3, \mathbb{Q})) \rightarrow i_*(H_1(S^3, \mathbb{Q}))$ é sobrejetora. Segue do Corolário 4.2.9 que para toda função contínua $g : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ existe $x \in S^3$ tal que $g(x) = g(\varphi(x)) = g(\varphi^2(x))$.

4.3 O Caso em que φ é uma α -contração

Na demonstração do Teorema 4.1.2, desde que A é compacto, foi possível construir um subconjunto compacto K de A tal que $\psi(K) \subset \varphi(K)$ (4.2.5). No Lema 4.3.4, nós provamos que mesmo que A não seja compacto, ainda assim é possível garantir a existência de um tal subconjunto, desde que X seja um espaço métrico, A seja completo e φ uma α -contração. Consideremos a seguinte

Definição 4.3.1 Seja X um espaço linear normado. Para qualquer subconjunto A limitado de X , definimos a (Kuratowski) medida de não compacidade de A como sendo

$$\alpha(A) = \inf\{k > 0; A \text{ possui uma cobertura finita por subconjuntos de diâmetro } \leq k\}.$$

Algumas importantes propriedades de α são dadas na seguinte proposição (para mais detalhes vide, por exemplo, [19] e [35]).

Proposição 4.3.2 Suponhamos que A e B sejam subconjuntos limitados de X e seja $k \in \mathbb{R}$. Então:

- (1) $A \subset B$ implica que $\alpha(A) \leq \alpha(B)$;
- (2) $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A); \alpha(B)\}$;
- (3) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$;
- (4) $\alpha(kA) = |k|\alpha(A)$;
- (5) $\alpha(\text{Co}A) = \alpha(A)$, onde $\text{Co}(A)$ denota a envoltória convexa de A ;
- (6) $\alpha(\bar{A}) = \alpha(A)$, onde $\bar{A}$ denota o fecho de A ;
- (7) $\alpha(A) = 0$ se, e somente se, A é totalmente limitado.

Definição 4.3.3 Suponhamos que A seja um subconjunto de X e seja $\varphi : A \rightarrow X$ uma função contínua. Dizemos que φ é uma α -contração se existe $0 \leq r < 1$, tal que $\alpha(\varphi(B)) \leq r\alpha(B)$, para qualquer subconjunto limitado B de A .

Lema 4.3.4 Sejam M um espaço métrico e A um subconjunto limitado e completo de M . Sejam $\psi, \varphi : M \rightarrow M$ funções contínuas tais que A seja invariante por ψ e φ e

$(\psi \circ \varphi)(a) = (\varphi \circ \psi)(a)$, para todo $x \in A$. Então, se φ for uma α -contração sobre A , existe um subconjunto compacto K de A tal que $\psi(K) \subset \varphi(K) = K$.

Demonstração Seja K a intersecção de uma seqüência de subconjuntos de A definida indutivamente por $K_1 = \overline{\varphi(A)}$ e $K_{n+1} = \overline{\varphi(K_n)}$, onde $\overline{\varphi(A)}$ e $\overline{\varphi(K_n)}$, denotam o fecho de $\varphi(A)$ e $\varphi(K_n)$, respectivamente. Mostremos que $\alpha(K) = 0$ o que implicará da Proposição 4.3.2 (7) que K é totalmente limitado. Desde que A é completo, nós concluiremos que K é compacto. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$, desde que φ é uma α -contração, da Proposição 4.3.2 (1) e (6), nós temos que

$$\begin{aligned} \alpha(K_n) &= \alpha(\varphi(K_{n-1})) = \alpha(\varphi(K_{n-1})) \leq r\alpha(K_{n-1}) \\ &\leq r^2\alpha(K_{n-2}) \leq \dots \leq r^{n-1}\alpha(K_1) \leq r^n\alpha(A). \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Como $K = \bigcap K_n$, temos que $K \subset K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue da Proposição 4.3.2 (1) e de (4.3.1) que

$$\alpha(K) \leq \alpha(K_n) \leq r^n\alpha(A), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.3.2)$$

Desde que $0 \leq r < 1$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ e de (4.3.2) concluímos que $\alpha(K) = 0$.

A condição $\psi(K) \subset \varphi(K) = K$ segue da comutatividade das aplicações φ e ψ em A .

Como uma consequência do Lema 4.3.4, nós obtemos a seguinte versão do Teorema 4.1.2 para o caso em que A não é compacto e φ é uma α -contração.

Teorema 4.3.5 *Sejam M um espaço métrico e A um subconjunto de M limitado, completo, conexo e localmente conexo por caminhos. Sejam $\psi, \varphi : M \rightarrow M$ contínuas tais que A seja invariante por ψ e φ , onde φ é uma α -contração. Suponhamos que*

i) $\psi_* = \varphi_* : i_*(H_1(A, \mathbb{Q})) \rightarrow i_*(H_1(A, \mathbb{Q}))$ seja sobrejetora;

ii) $(\psi \circ \varphi)(a) = (\varphi \circ \psi)(a)$, para todo $a \in A$.

Então, para toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ existe $x \in X$ tal que $f(\varphi(x)) = f(\psi(x))$ ou existe $x \in X$ tal que $f(\varphi\psi(x)) \in [f(\varphi^2(x)), f(\psi^2(x))]$.

Demonstração Os argumentos são similares àqueles usados na demonstração do Teorema 4.1.2, apenas observando que a existência de um subconjunto compacto K de A tal que $\psi(K) \subset \varphi(K)$, como em (4.2.5) é assegurada pelo Lema 4.3.4.

Observação 4.3.6 Como uma consequência imediata do Teorema 4.3.5, nós obtemos também o Teorema 4.2.8 para o caso em que A não é compacto e φ é uma α -contração.

4.4 Generalizando a construção de Pannwitz

Em [44], foi provada a existência de uma função livre $f : S^k \rightarrow \mathbb{R}^2$, para todo $k \geq 0$. A construção de uma tal função foi feita indutivamente sobre k . Para cada $k \geq 0$, foram construídas funções contínuas $\varphi_k : S^k \rightarrow S^k$ e $f_k : S^k \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que

$$f_k(x) \neq f_k(\varphi_k(x)), \quad (4.4.1)$$

para todo $x \in X$. Nosso propósito nessa seção é generalizar essa construção, substituindo a esfera S^k por um espaço topológico satisfazendo determinadas condições. Primeiramente, nós precisamos recordar a construção feita por E. Panwitz em [44].

Seja p um ponto em S^k . Se (x, y) denotam as coordenadas retangulares de um ponto qualquer em $\mathbb{R}^2$, denotemos por $(x_k(p), y_k(p))$ as funções coordenadas de $f_k(p)$ em $\mathbb{R}^2$. Assim $f_k(\varphi_k(p)) = (x_k(\varphi_k(p)), y_k(\varphi_k(p)))$. Tais funções foram construídas satisfazendo a seguinte propriedade:

$$y_k(p) \leq y_k(\varphi_k(p)). \quad (4.4.2)$$

Para $k = 0$, sejam $p_1, p_2 \in S^0$ e $\varphi_0 : S^0 \rightarrow S^0$ definida por

$$\varphi_0(p_1) = p_2 \text{ e } \varphi_0(p_2) = p_1. \quad (4.4.3)$$

Por outro lado, seja $f_0 : S^0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f_0(p_i) = (x_0(p_i), y_0(p_i)) = \begin{cases} (1, 1), & \text{se } i = 1 \\ (-1, 1), & \text{se } i = 2 \end{cases} \quad (4.4.4)$$

Observemos que as condições (4.4.1) e (4.4.2) são trivialmente satisfeitas para $k = 0$. Suponhamos construídas $\varphi_{k-1} : S^{k-1} \rightarrow S^{k-1}$ e $f_{k-1} : S^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo (4.4.1) e (4.4.2). Através de uma translação, sem perda de generalidade, podemos supor que a imagem $f_{k-1}(S^{k-1})$ está inteiramente contida no semi-plano $y > 0$. Seja S^{k-1} o equador

em S^k e denotemos por O_1 e O_2 os pólos Norte e Sul, respectivamente. Dado um ponto $p \in S^k$, denotemos por $\{\beta, q\}$ as suas “coordenadas geográficas”, onde $-1 \leq \beta \leq 1$ é a distância de p à sua projeção ortogonal sobre o plano do equador e $q \in S^{k-1}$ é a sua projeção através dos pólos sobre o equador.

Para $\beta = \pm 1$, com q indefinido correspondem os pólos O_1 e O_2 .

Seja $\varphi_k : S^k \rightarrow S^k$ definida por

$$\varphi_k(p) = \varphi_k\{\beta, q\} = \begin{cases} \{-\beta|\beta|, \varphi_{k-1}(q)\}, & \text{se } p \neq O_1 \text{ e } p \neq O_2 \\ O_2, & \text{se } p = O_1 \\ O_1, & \text{se } p = O_2 \end{cases} \quad (4.4.5)$$

Para a definição de $f_k : S^k \rightarrow \mathbb{R}^2$, seja $q \in S^{k-1}$, então $f_k(q) = f_k\{0, q\} = f_{k-1}(q)$.

Além disso,

$$f_k(O_i) = (x_k(O_i), y_k(O_i)) = \begin{cases} (1, 0), & \text{se } i = 1 \\ (-1, 0), & \text{se } i = 2 \end{cases} \quad (4.4.6)$$

Para $p \in S^k$ arbitrário, definimos

$$f_k(p) = f_k\{\beta, q\} = \begin{cases} \beta f_k(O_1) + (1 - \beta)f_k(q), & \text{se } 0 \leq \beta \leq 1 \\ -\beta f_k(O_2) + (1 + \beta)f_k(q), & \text{se } -1 \leq \beta \leq 0 \end{cases} \quad (4.4.7)$$

ou mais geralmente, usando que $f_k(O_1) = -f_k(O_2)$, nós temos que f_k é dada por

$$f_k(p) = f_k\{\beta, q\} = \beta f_k(O_1) + (1 - |\beta|)f_k(q), \text{ para } -1 \leq \beta \leq 1. \quad (4.4.8)$$

Não é difícil provar que as funções φ_k e f_k satisfazem (4.4.1) e (4.4.2) (para detalhes da demonstração vide [44]).

Consideremos agora X um espaço topológico e denotemos por $S(X)$ a suspensão de X . Nós provamos o seguinte

Teorema 4.4.1 *Suponhamos que exista uma função livre $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$. Então existe uma função livre $\hat{f} : S(X) \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Demonstração Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função livre, então existe uma função contínua $\varphi : X \rightarrow X$ tal que para todo $p \in X$, $f(p) \neq f(\varphi(p))$. Se (x, y) denotam as coordenadas retangulares de um ponto qualquer em $\mathbb{R}^2$, denotemos por $(x(p), y(p))$ as funções coordenadas de $f(p)$ em $\mathbb{R}^2$, para todo $p \in X$. Assim as funções coordenadas de $f(\varphi(p))$ serão denotadas por $(x(\varphi(p)), y(\varphi(p)))$. Para um ponto $p \in X$, sejam $p_1 = (1, p)$ e $p_2 = (-1, p)$ em $S(X)$. Definimos funções contínuas $\hat{\varphi} : S(X) \rightarrow S(X)$ e $\hat{f} : S(X) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\hat{\varphi}(t, p) = (-t|t|, \varphi(p)) \quad (4.4.9)$$

$$\hat{f}(t, p) = t\hat{f}(p_1) + (1 - |t|)f(p), \quad (4.4.10)$$

para todo $(t, p) \in S(X)$, com $-1 \leq t \leq 1$, onde $\hat{f}(p_1) = (1, 0)$ e $\hat{f}(p_2) = (-1, 0)$. Denotemos por $(\hat{x}(t, p), \hat{y}(t, p))$ e $(\hat{x}(\hat{\varphi}(t, p)), \hat{y}(\hat{\varphi}(t, p)))$ as funções coordenadas de $\hat{f}(t, p)$ e $\hat{f}(\hat{\varphi}(t, p))$, respectivamente. Sem perda de generalidade, podemos supor que a imagem $f(X)$ está inteiramente contida no semi-plano $y > 0$. Mostremos que $\hat{f}$ também é livre, ou seja, $\hat{f}(t, p) \neq \hat{f}(\hat{\varphi}(t, p))$, para todo $(t, p) \in S(X)$.

Para todo ponto $(t, p) \in S(X)$, com $0 < |t| < 1$, temos que

$$\hat{y}(t, p) = (1 - |t|)y(p); \quad (4.4.11)$$

$$\hat{y}(\hat{\varphi}(t, p)) = \hat{y}(-t|t|, \varphi(p)) = (1 - t^2)y(\varphi(p)). \quad (4.4.12)$$

Como $f(X)$ está inteiramente contida no semi-plano $y > 0$, segue que o mesmo acontece com a imagem $f(\varphi(X))$; nesse caso, podemos supor que $0 < y(p) \leq y(\varphi(p))$. Além disso, $(1 - |t|) < (1 - t^2)$ o que implica que

$$\hat{y}(t, p) = (1 - |t|)y(p) < (1 - t^2)y(\varphi(p)) = \hat{y}(\hat{\varphi}(t, p)), \quad (4.4.13)$$

para todo $(t, p) \in S(X)$, com $0 < |t| < 1$. Observemos que $\hat{f}(p_1) \neq \hat{f}(p_2)$ e como $\hat{f}$ coincide com f nos pontos da forma $(0, p)$, temos que $\hat{f}(t, p) \neq \hat{f}(\hat{\varphi}(t, p))$, para todo $(t, p) \in S(X)$ e portanto $\hat{f}$ é uma função livre, como queríamos demonstrar.

Observação 4.4.2 Considerando $h : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ um homeomorfismo tal que $h(1) = -1$ e $h(-1) = 1$, então os resultados obtidos anteriormente para a função $\hat{\varphi} : S(X) \rightarrow S(X)$, definida em (4.4.9), continuam válidos definindo $\hat{\varphi}(t, p) = (h(t), \varphi(x))$.

A seguir, nós obtemos um exemplo de um espaço topológico cuja dimensão topológica é igual a um, que fornece um exemplo para o Teorema 4.4.1 e para o qual o Teorema 4.4.2 se aplica.

Exemplo 4.4.3 Seja $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e consideremos a sua suspensão $S(X)$. Seja $\varphi : X \rightarrow X$ definida por

$$\varphi(x_1) = x_2, \varphi(x_2) = x_3 \text{ e } \varphi(x_3) = x_1. \quad (4.4.14)$$

Então $\varphi(x) \neq x$, para todo $x \in X$. Consideremos um mergulho topológico arbitrário $f : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ e observemos que $f(x) \neq f(\varphi(x))$, para todo $x \in X$, ou seja, f é uma função livre. Segue do Teorema 4.4.1, que existem $\varphi : S(X) \rightarrow S(X)$ e $\hat{f} : S(X) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $\hat{f}(x) \neq \hat{f}(\varphi(x))$, para todo $x \in S(X)$. Mostraremos que existe $x \in S(X)$ tal que

$$\hat{f}(\varphi(x)) \in (\hat{f}(\varphi^2(x)), \hat{f}(x)). \quad (4.4.15)$$

onde $(\hat{f}(\varphi^2(x)), \hat{f}(x))$ denota o segmento de reta aberto em $\mathbb{R}^2$ unindo os pontos $\hat{f}(\varphi^2(x))$ e $\hat{f}(x)$. Para isto, vejamos que $Id - \hat{\varphi}_*^1 : H_1(S(X); \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S(X); \mathbb{Q})$ é sobrejetora e então 4.4.15 seguirá do Teorema 4.1.2. É suficiente mostrarmos que $\det(Id - \hat{\varphi}_*^1) \neq 0$.

Primeiramente, analisemos a aplicação $Id - \hat{\varphi}_*^1$, no caso em que X é um espaço topológico qualquer e $\hat{\varphi} : S(X) \rightarrow S(X)$ é a extensão de $\varphi : X \rightarrow X$.

A aplicação induzida $\hat{\varphi}_*^p : H_p(S(X); \mathbb{Q}) \rightarrow H_p(S(X); \mathbb{Q})$ satisfaz a seguinte condição

$$\hat{\varphi}_*^p = \begin{cases} (-1)^p \hat{\varphi}_*^{p-1}, & \text{se } p > 1 \\ (-1)^p \hat{\varphi}_*^{p-1}, & \text{se } p = 1. \end{cases} \quad (4.4.16)$$

onde $\hat{\varphi}_*^0 : \tilde{H}_0(S(X); \mathbb{Q}) \rightarrow \tilde{H}_0(S(X); \mathbb{Q})$ é a aplicação entre os grupos reduzidos de homologia. Em particular, para $p = 1$, temos que

$$\hat{\varphi}_*^1 = -\hat{\varphi}_*^0. \quad (4.4.17)$$

Por outro lado, as aplicações

$$\begin{aligned} \varphi_*^0 : H_0(X; \mathbb{Q}) &\rightarrow H_0(X; \mathbb{Q}) \\ \hat{\varphi}_*^0 : \tilde{H}_0(X; \mathbb{Q}) &\rightarrow \tilde{H}_0(X; \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

estão relacionadas da seguinte forma: sejam $x_i \in X_i$, para $i = 1, 2, \dots, k$, com X_i componente conexa de X . Consideremos $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ uma base de $H_0(X, \mathbb{Q})$, onde $u_i = [x_i]$ é um gerador de $H_0(X_i, \mathbb{Q})$. Seja $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$; onde $v_1 = u_1$ e $v_i = u_i - u_1$, para $i = 2, \dots, k$ base de $H_0(X, \mathbb{Q})$, em relação à qual a matriz de φ_*^0 tem a forma

$$[\varphi_*^0]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (C) & [\tilde{\varphi}_*^0]_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} \quad (4.4.18)$$

onde $[\tilde{\varphi}_*^0]_{\tilde{\beta}}$ denota a matriz de $\tilde{\varphi}_*^0$ na base $\tilde{\beta} = \{v_2, v_3, \dots, v_k\}$, cuja ordem é $(k-1) \times (k-1)$. De 4.4.17, temos que $[\tilde{\varphi}_*^1]_{\tilde{\beta}} = -[\tilde{\varphi}_*^0]_{\tilde{\beta}}$ e assim,

$$\det(Id - [\tilde{\varphi}_*^1]_{\tilde{\beta}}) = \det(Id + [\tilde{\varphi}_*^0]_{\tilde{\beta}}). \quad (4.4.19)$$

Por outro lado,

$$Id + [\varphi_*^0]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & (0) \\ (C) & Id + [\tilde{\varphi}_*^0]_{\tilde{\beta}} \end{pmatrix} \quad (4.4.20)$$

Então,

$$\det(Id + [\varphi_*^0]_\beta) = 2 \cdot \det(Id + [\tilde{\varphi}_*^0]_{\tilde{\beta}}) = 2 \cdot \det(Id - [\tilde{\varphi}_*^1]_{\tilde{\beta}}), \quad (4.4.21)$$

o que implica que,

$$\begin{aligned} \det(Id - \hat{\varphi}_*^1) &= \det(Id - [\tilde{\varphi}_*^1]_{\tilde{\beta}}) \\ &= (1/2) \cdot \det(Id + [\varphi_*^0]_\beta) \\ &= (1/2) \cdot \det(Id + \varphi_*^0). \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Assim, para mostrarmos que $\det(Id - \hat{\varphi}_*^1) \neq 0$, é suficiente provar que $\det(Id + \varphi_*^0) \neq 0$.

Voltemos ao caso particular em que $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $\varphi : X \rightarrow X$ é como em 4.4.14.

Sejam u_1, u_2, u_3 geradores de $H_0(X; \mathbb{Q})$, então

$$\varphi_*^0(u_1) = u_2, \varphi_*^0(u_2) = u_3, \varphi_*^0(u_3) = u_1. \quad (4.4.23)$$

Deste modo,

$$[\varphi_*^0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4.24)$$

e além disso,

$$Id + [\varphi_*^0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.25)$$

Portanto,

$$(1/2) \cdot \det(Id + \varphi_*^0) = 1 = \det(Id - \hat{\varphi}_*^1) \neq 0, \quad (4.4.26)$$

e então $Id - \hat{\varphi}_*^1 : H_1(S(X); \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(S(X); \mathbb{Q})$ é sobrejetora. Segue do Teorema 4.1.2, que existe $x \in S(X)$ tal que

$$\hat{f}(\hat{\varphi}(x)) \in (\hat{f}(\hat{\varphi}^2(x)), \hat{f}(x)).$$

Referências Bibliográficas

- [1] Agoston, M.K. *Algebraic Topology*. New York, 1976.
- [2] Ancel, F.D. *The locally flat approximation of cell-like embedding relations*.
Doctoral thesis, University of Wisconsin at Madison, 1976.
- [3] Ancel, F.D. and Cannon, J.W. *The locally flat approximation of cell-like embedding relations*. Ann. of Math. **109** 61-86, 1979.
- [4] Biasi, C., Daccach J. and Saeki, O. *A primary obstruction to topological embeddings for maps between generalized manifolds*. Pacific J. Math. **197** n.2 275-289, 2001.
- [5] Biasi, C., de Mattos, D, and dos Santos E.L. *A Borsuk-Ulam Theorem for maps from a sphere to a generalized manifold*. Geom. Dedicata **107** 101-110, 2004.
- [6] Borsuk, K. *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** 177-190, 1933.
- [7] Borel, A. *The Poincaré duality in generalized manifolds*. Mich. Math. J. **4** 227-239, 1957.
- [8] Borel A. et al. *Seminar on Transformation Groups*. Ann. of Math. Studies **46** Princeton Univ. Press Princeton N. J., 1960.
- [9] Bredon, G. E. *Wilder manifolds are locally orientable*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A, **63** 1079-1081. 1969.
- [10] Bredon, G. E. *Introduction to Compact Transformation Groups*. Pure and Applied Mathematics **46** Academic Press New York and London, 1972.

- [11] Bredon, G. E. *Sheaf Theory*. Second Edition Graduate Texts in Math. **170** Springer-Verlag New York 1997. New York Inc., 1997.
- [12] Bredon, G. E. *Topology and Geometry*. Graduate Texts in Math. **139** Springer-Verlag New York Inc., 1993.
- [13] Bryant, J., Ferry, S., Mio W. and Weinberger, S. *Topology of homology manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc. **28** 324-328, 1993.
- [14] Bryant, J., Ferry, S., Mio W. and Weinberger, S. *Topology of homology manifolds*. Ann. of Math. **143** 435-467, 1996.
- [15] Conner P.E. and Floyd E.E. *Differentiable Periodic Maps*. Ergebnisse der Math. Springer-Verlag Berlin **33**, 1964.
- [16] Cohen, F. and Connet, J.E. *A coincidence theorem related to the Borsuk-Ulam theorem*. Proc. Amer. Math. Soc. **44** 218-220, 1974.
- [17] Cohen, F.R. *Cohomology of braid spaces*. Bull. Amer. Math. Soc. **79** 763-766, 1973.
- [18] Cohen, F.R. *The homology of C_{n+1} -spaces, $n \geq 0$* . in Cohen, F.R., T.Lada, P.May Eds. *The homology of iterated loop spaces*. Lectures Notes in Math. Springer-Verlag Berlin **533** 207-351, 1976.
- [19] Deimling, K. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.
- [20] Davis, J.F. and Kirk, P. *Lectures Notes in Algebraic Topology*. Graduate Studies in Mathematics American Mathematical Society, Providence Rhode Island **35**, 2001.
- [21] Dieck, t. T. *Transformation Groups*. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1987.
- [22] Eilenberg S. and Steenrod, N. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton New Jersey, Princeton University Press. 1952.
- [23] Fadell, E. and Neuwirth, L. *Configuration spaces*. Math. Scand. **10** 111-118, 1962.

- [24] Gonçalves, D.L., Jaworowski J., Pergher, P.L.Q. and Volovikov, A.Y. *Coincidences for maps of spaces with finite group actions*. Topology and its Appl. **145** n.1-3 61-68, 2004.
- [25] Gonçalves, D.L., Jaworowski, J. and Pergher P.L.Q. *Measuring the size of the coincidence set*. Topology App. **125** n.3 465-470, 2002.
- [26] Gonçalves, D.L. and Pergher, P.L.Q. $\mathbb{Z}_p$ -*coincidences for maps of spheres into CW complexes*. Kobe J. Math. **15** n.2 191-195, 1998.
- [27] Greenberg, M. J. and Harper J.R. *Algebraic Topology, a first course*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. New York Amsterdam, 1981.
- [28] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [29] Hopf, H. *Freie Überdeckungen und freie Abbildungen*. Fund. Math. **28** 33-57, 1937.
- [30] Hu, S. T. *Homotopy Theory*. Pure.Appl.Math. **8**, New York-London, 1959.
- [31] Hungerford T.W. *Algebra*. Springer-Verlag New York Inc., 1974.
- [32] Hurewicz, W. and Wallman, H. *Dimension Theory*. Princeton Univ. Press Princeton, 1941.
- [33] Husemoller D. *Fibre Bundles* Second Edition Springer-Verlag New York, 1966.
- [34] Kobayashi, T. *The Borsuk-Ulam Theorem for a $\mathbb{Z}_q$ -map from a $\mathbb{Z}_q$ -space to S^{2n+1}* . Proc. Am. Math. Soc. **97** n.4 714-716, 1986.
- [35] Ladeira, A.C. *Continuity of Fixed Points*. Journal Math. Analysis Appl **169** n.2 350-358, 1992.
- [36] Matousek, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry Springer-Verlag Berlin, 2003.
- [37] McCleary, J. *User's Guide to Spectral Sequences*. Mathematics Lectures Series Publish or Perish, Inc., Wilmington, Delaware U.S.A., 1985.

- [38] Milnor J. and Stasheff, J. *Characteristic Classes*. Ann. of Math. Studies **76** Princeton Univ. Press Princeton, 1974.
- [39] Milnor, J. *Lectures on Characteristic Classes*. Mimeographed Notes Princeton, 1957.
- [40] Milnor, J. *Construction of Universal Bundles I*. Ann. of Math. **63** n.2 272-284, 1956.
- [41] Mimura, M. Toda, H. *Topology of Lie Groups I and II*. American Mathematical Society Providence Rhode Island, 1991.
- [42] Munkholm, H.J. *A Borsuk-Ulam theorem for maps from a sphere to compact topological manifold*. Illinois J. Math. **13** 116-124, 1969.
- [43] Munkres, J.R. *Elements of Algebraic Topology*. Massachusetts Institute of Technology Cambridge Massachusetts, 1984.
- [44] Pannwitz, F. *Eine freie Abbildung der n -dimensionalen Sphäre in die Ebene*, Math. Nachr. (**7**) 183-185, 1952.
- [45] Pergher, P.L.Q., de Mattos, D. and dos Santos, E.L. *The Borsuk-Ulam Theorem for General Spaces*. Arch. Math. **81** n.1 96-102, 2003.
- [46] Spanier, E. H. *Algebraic Topology*. Springer, New York, 1966.
- [47] Thom, R. *Espaces fibrés en sphère et carrés de Steenrod*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **69** 109-181, 1952.
- [48] Whitehead, G.W. *Elements of Homotopy Theory*. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1978.
- [49] Wilder, R.L. *Topology of Manifolds*. Am. Math. Soc. Colloq. Pub. **32** Am. Math. Soc. New York, 1949.
- [50] Yang, C.T. *On the theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson I*. Ann. of Math. **60** n.2 262-282, 1954.