Curvas no espaço de Minkowski

Andrea de Jesus Sacramento

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Andrea de Jesus Sacramento

Curvas no espaço de Minkowski

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Ana Claudia Nabarro

USP – São Carlos
Julho de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

d123c de Jesus Sacramento, Andrea
Curvas no espaço de Minkowski / Andrea de Jesus
Sacramento; orientadora Ana Claudia Nabarro. --
São Carlos, 2015.
107 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. curvas no espaço de Minkowski. 2. pontos tipo
luz. 3. superfície focal. 4. curvas nos espaços de
Sitter. 5. imagens normal Darboux pseudo-esféricas.
I. Nabarro, Ana Claudia , orient. II. Título.

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Andrea de Jesus Sacramento

Curves in the Minkowski space

Doctoral dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Doctorate Program in Mathematics.
FINAL VERSION

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Ana Claudia Nabarro

USP – São Carlos
July 2015

Aos meus amados pais, Sueli e Alfredo.

Aos meus amados irmãos.

Ao meu noivo Werlen por seu amor e paciência.

Dedico.

“Quando Deus quer, não há quem não queira. ”

Ayrton Senna

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, que todos os dias de minha vida me deu forças para nunca desistir e conseguir todas as graças já alcançadas;

À minha família, que sempre esteve presente nos momentos mais importantes da minha vida, me apoiando e dizendo pra eu nunca desistir diante as dificuldades, principalmente à meus pais, Alfredo e Sueli, que me ensinaram a lutar por ideais através de exemplo de vida e de trabalho, responsáveis pela formação de meu caráter e personalidade;

Para o meu super noivo, melhor amigo, confidente que esteve comigo durante esta caminhada sempre me incentivado e dando forças. Queria te agradecer pela paciência e companheirismo!

Agradeço à todos os professores, em especial a minha orientadora Ana Claudia Nabarro que estava pronta para sanar minhas dúvidas sempre que precisei, e que com sua paciência e dedicação, me ajudou a completar com êxito essa difícil tarefa; ao prof. Farid pela atenção também dedicada e por ter sugerido questões para este trabalho e ao prof. Shyuichi Izumiya por ter contribuído grandiosamente com este trabalho;

À todos os amigos, que de alguma forma colaboraram para a realização deste projeto;

Agradeço a CAPES e especialmente a FAPESP pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

Nesta tese, investigamos a geometria de curvas no 3-espaço e no 4-espaço de Minkowski usando a teoria de singularidades, mais especificamente, a teoria de contato. Para isto, estudamos as famílias de funções altura e de funções distância ao quadrado sobre as curvas. Os conjuntos discriminantes e conjuntos de bifurcação destas famílias são ferramentas essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Para curvas no 3-espaço de Minkowski, estudamos seus conjuntos focais e conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre estas curvas para investigar o que acontece próximo de pontos tipo luz. Estudamos também os conjuntos focais e conjuntos de bifurcação esféricos de curvas nos espaços de Sitter do 3-espaço e do 4-espaço de Minkowski.

Definimos imagens normal Darboux pseudo-esféricas de curvas sobre uma superfície tipo tempo no 3-espaço de Minkowski e estudamos as singularidades e propriedades geométricas destas imagens normal Darboux. Além disso, investigamos a relação da imagem normal Darboux de Sitter (hiperbólica) de uma curva tipo espaço em S_1^2 com a superfície tipo luz ao longo desta curva tipo espaço.

Definimos as superfícies horoesférica e dual hiperbólica de curvas tipo espaço no espaço de Sitter S_1^3 e estudamos estas superfícies usando técnicas da teoria de singularidades. Damos uma relação entre estas superfícies do ponto de vista de dualidades Legendrianas.

Finalmente, consideramos curvas sobre uma hipersuperfície tipo espaço no 4-espaço de Minkowski e definimos a superfície hiperbólica desta curva. Estudamos a geometria local da superfície hiperbólica e da curva hiperbólica, que é definida como sendo o local das singularidades da superfície hiperbólica.

Palavras-chave: Curvas no espaço de Minkowski, pontos tipo luz, superfície focal, curvas nos espaços de Sitter, curvas sobre uma superfície tipo tempo, imagem normal Darboux pseudo-esférica, superfície tipo luz, dualidades Legendrianas, curvas sobre uma hipersu-

perfície tipo espaço, superfície hiperbólica, curva hiperbólica.

Abstract

We study in this thesis the geometry of curves in Minkowski 3-space and 4-space using singularity theory, more specifically, the contact theory. For this we study the families of height functions and of the distance square functions on the curves. The discriminant sets and bifurcation sets of these families are essential tools in our work.

For curves in Minkowski 3-space, we study their focal sets and the bifurcation set of the family of the distance square functions on these curves in order to investigate what happens near the lightlike points. We also study the spherical focal sets and bifurcation sets of curves in the de Sitter space in Minkowski 3-space and 4-space.

We define pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a timelike surface in Minkowski 3-space and study the singularities and geometric properties of these normal Darboux images. Furthermore, we investigate the relation of the de Sitter (hyperbolic) normal Darboux image of a spacelike curve in S_1^2 with the lightlike surface along this spacelike curve.

We define the horospherical and hyperbolic dual surfaces of spacelike curves in de Sitter space S_1^3 and study these surfaces using singularity theory technics. We give a relation between these surfaces from the view point of Legendrian dualities.

Finally, we consider curves on a spacelike hypersurface in Minkowski 4-space and define the hyperbolic surface of this curve. We study the local geometry of the hyperbolic surface and of the hyperbolic curve that is defined as being the locus of singularities of the hyperbolic surface.

Key words and phrases: Curves in the Minkowski space, lightlike points, focal surface, curves in the de Sitter spaces, curves on a timelike surface, pseudo-spherical normal Darboux image, lightlike surface, Legendrian dualities, curves on a spacelike hypersurface, hyperbolic surface, hyperbolic curve.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 O espaço de Minkowski	5
1.2 Curvas tipo espaço ou tipo tempo em $\mathbb{R}_1^3$	8
1.3 Famílias de funções altura e de funções distância ao quadrado	11
2 Conjunto focal de curvas no espaço de Minkowski próximo de pontos tipo luz	15
2.1 O conjunto focal de curvas tipo espaço e tipo tempo	17
2.2 O conjunto focal na vizinhança dos pontos tipo luz	22
2.3 Conjunto focal de curvas em S_1^2 próximo de pontos tipo luz	28
2.4 Conjunto focal de curvas em S_1^3 próximo de pontos tipo luz	34
3 Imagens normal Darboux pseudo-esféricas de curvas sobre uma superfície tipo tempo e	44
3.1 Curvas sobre uma superfície tipo tempo	44
3.2 Família de funções altura	45
3.3 Geometria das imagens normal Darboux pseudo-esféricas	54
3.4 Exemplos	58
3.5 Superfície tipo luz em $\mathbb{R}_1^3$ ao longo de curvas planas tipo espaço de Sitter .	60
4 Superfícies horoesférica e dual hiperbólica de curvas tipo espaço em S_1^3	69
4.1 Família de funções altura horoesférica	70
4.2 Invariantes e geometria especial da superfície horoesférica	75
4.3 Família de funções altura hiperbólica	78
4.4 Invariante e geometria especial da superfície dual hiperbólica	83
4.5 Relações duais entre as superfícies horoesférica e dual hiperbólica	85

5	Curvas sobre hipersuperfícies tipo espaço	91
5.1	Família de funções altura tangencial tipo tempo	92
5.2	Exemplos	103

Introdução

Izumiya iniciou o estudo da geometria de subvariedades em espaço de Minkowski usando a teoria de singularidades. Este estudo é de interesse na teoria da relatividade.

Em [14], Izumiya-Pei-Sano definiram a indicatriz hiperbólica de Gauss de uma hipersuperfície no espaço modelo de Minkowski do espaço hiperbólico. O trabalho em [14] iniciou a aplicação da teoria de singularidades para geometria extrínseca de subvariedades no espaço hiperbólico. A geometria extrínseca de subvariedades tipo espaço ou tipo tempo em outras pseudo-esferas do espaço de Minkowski foram investigadas em trabalhos posteriores. Acreditamos que também é importante estudar a geometria de subvariedades no espaço de Minkowski com a métrica induzida degenerada em alguns pontos sobre a subvariedade. Por exemplo, qualquer superfície fechada (compacta sem bordo) no 3-espaço de Minkowski tem pontos onde a métrica é degenerada. (Observamos que existem trabalhos na geometria sobre tais subvariedades. Por exemplo, em [28] foi provado um teorema do tipo Gauss-Bonnet, e em [24] foi considerado o problema de como estender a conexão Lévi-Civita para o conjunto de degeneração da métrica). Por este motivo, é importante investigar a geometria de tais subvariedades usando a teoria de singularidades. O primeiro passo foi o estudo do caso de curvas no plano de Minkowski em [26] e de superfícies no 3-espaço de Minkowski em [29], por exemplo. Em [29], foram estudadas as cáusticas de superfícies no 3-espaço de Minkowski. Embora o conjunto focal da superfície não esteja definido no ponto onde a métrica é degenerada, a cáustica está definida. As propriedades da métrica induzida na cáustica também são estudadas em [29]. Em [30], prova-se que qualquer superfície fechada e convexa no 3-espaço de Minkowski de classe C^3 tem pelo menos dois pontos umbílicos. Isso mostra que a conjectura de Carathéodory para superfícies no 3-espaço Euclidiano é verdadeira para as superfícies do 3-espaço de Minkowski.

O objetivo desta tese é estudar curvas no espaço de Minkowski de dimensão 3 ou 4 usando a teoria de singularidades, mais especificamente a teoria de contatos. Algumas vezes, consideramos curvas contidas em superfícies ou hipersuperfícies especiais destes espaços, por exemplo, em pseudo-esferas de Sitter. Muitos outros trabalhos estudam a geometria de subvariedades no espaço de Minkowski usando a teoria de singularidades (ver por exemplo, [4], [7], [11], [16], [17], [23], [26], [27]).

No Capítulo 1, apresentamos alguns conceitos básicos sobre o espaço de Minkowski (ver [25]). Na Seção 1.2, apresentamos alguns conceitos preliminares sobre curvas $\gamma \in \mathbb{R}_1^3$ e encontramos, quando possível (ou seja, fora dos pontos tipo luz) as fórmulas tipo Frenet-Serret de γ . Definimos também a família de funções altura e a família de funções distância ao quadrado sobre γ , desdobramentos, conjuntos de bifurcação e discriminantes, que serão necessários para os estudos ao longo da tese.

No Capítulo 2, provamos que os pontos tipo luz de uma curva genérica γ são isolados. Passando por pontos tipo luz a curva genérica muda de tipo espaço para tipo tempo. Logo após investigamos a geometria de uma curva, tipo espaço ou tipo tempo, regular e suave γ e do seu conjunto focal no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ a qual é capturada pelo seu contato com pseudo esferas. Este contato pode ser estudado usando a família de funções distância ao quadrado sobre γ . Ver [2] e [26] para mais detalhes sobre singularidades de funções, contato e suas aplicações à geometria de curvas em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}_1^2$, respectivamente. O conjunto focal não está definido nos pontos tipo luz da curva, mas nestes pontos o conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado está definido. Além disso, o conjunto focal está contido no conjunto de bifurcação e para curvas tipo espaço e tipo tempo, eles coincidem. Usamos então o conjunto de bifurcação para entender os conjuntos focais, próximo de pontos tipo luz da curva. As fórmulas tipo frenet-Serret de γ e a família de funções distância ao quadrado sobre γ são as ferramentas principais para o estudo do conjunto focal (neste caso γ é tipo espaço ou tipo tempo). Na Seção 2.1, estudamos a geometria e a estrutura métrica do conjunto focal de γ tipo espaço ou tipo tempo e na Seção 2.2 estudamos a estrutura métrica do conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre γ na vizinhança de pontos tipo luz. Para considerar curvas com pontos tipo luz, não podemos parametrizá-las pelo comprimento de arco e então não podemos usar as fórmulas tipo Frenet-Serret. Também consideramos curvas e os conjuntos focais e de bifurcação nas pseudo-esferas S_1^2 e S_1^3 . Estudamos a estrutura métrica destes conjuntos localmente nos pontos tipo luz de γ .

No Capítulo 3, introduzimos a noção de imagens normal Darboux pseudo-esféricas de

curvas sobre uma superfície tipo tempo no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ e investigamos suas propriedades geométricas. Em [27] Sato estudou curvas nas pseudo-esferas S_1^2 e $H_+^2(-1)$ e as chamou de evolutas pseudo-esféricas de curvas sobre superfícies tipo espaço. Em [6], os autores estudaram imagens Darboux esféricas de curvas sobre superfícies em $\mathbb{R}^3$. Nosso estudo é similar ao estudo feito em [27], contudo adotamos a denominação “imagens Darboux” usada em [6].

A principais ferramentas para o estudo das imagens normal Darboux são as fórmulas tipo Frenet-Serret e as famílias de funções altura ao longo de uma curva sobre uma superfície tipo tempo. Na Seção 3.2, definimos duas famílias de funções altura sobre uma curva, família de funções altura tipo espaço H^S e família de funções altura tipo tempo H^T . Ao diferenciar estas funções, obtivemos novos invariantes σ_D e σ_H cujas propriedades são caracterizadas por algumas condições sobre as derivadas de H^S e H^T . Também definimos duas importantes curvas, d_γ no espaço de Sitter e h_γ no espaço hiperbólico observando as condições da primeira e segunda derivadas de H^S e H^T , respectivamente. Chamamos d_γ uma imagem normal Darboux de Sitter de γ e h_γ uma imagem normal Darboux hiperbólica de γ . Mostramos que a imagem normal Darboux de Sitter d_γ é constante se, e somente se, $\sigma_D \equiv 0$. Neste caso, a curva γ é uma curva especial sobre a superfície M , a qual é chamada uma fatia de Sitter (ou uma D -fatia) de M . Também mostramos que a imagem normal Darboux hiperbólica h_γ é constante se, e somente se, $\sigma_H \equiv 0$ e definimos uma curva especial sobre a superfície M chamada uma fatia hiperbólica (ou uma H -fatia) de M . A D -fatia e H -fatia sobre M podem ser consideradas como modelos de curvas sobre a superfície M . Mostramos que a H -fatia é sempre não singular, mas temos o caso que a D -fatia tem ponto singular (ver Seção 3.2). Na Seção 3.3, investigamos as singularidades das imagens normal Darboux pseudo-esféricas e como uma aplicação da teoria de desdobramentos de funções em [3] obtivemos informações sobre a geometria local destas imagens normal Darboux nos Teoremas 3.3.3 e 3.3.4, que são alguns dos principais resultados deste capítulo. Na Seção 3.4, consideramos curvas sobre um plano tipo tempo, $\mathbb{R}_1^2$, e sobre o espaço de Sitter, S_1^2 , como casos especiais de curvas sobre superfície tipo tempo. Finalmente na Seção 3.5, damos uma relação da imagem normal Darboux de Sitter e imagem normal Darboux hiperbólica de uma curva tipo espaço γ em S_1^2 , com a superfície tipo luz ao longo de γ .

No Capítulo 4, investigamos curvas tipo espaço no espaço de Sitter S_1^3 em $\mathbb{R}_1^4$ e duas superfícies especiais relacionadas do ponto de vista de relações duais. Para uma curva $\gamma \in S_1^3$ com curvatura não nula definimos a superfície horoesférica em LC^* e a superfície

dual hiperbólica de γ em $H^3(-1)$, e para estudar estas superfícies usamos as técnicas da Teoria de Singularidades. Nas Seções 4.1 e 4.3 definimos duas famílias de funções alturas sobre γ , uma família de funções altura horoesférica e uma família de funções altura hiperbólica. Diferenciando estas funções encontramos um invariante relacionado a cada superfície e investigamos o significado geométrico destes invariantes nas Seções 4.2 e 4.4. Por exemplo, na Seção 4.2 provamos proposições que dão condições para a curva γ estar contida em uma superfície especial chamada quádrlica de Sitter parabólica, isto está relacionado com o invariante, e também demos condições para γ ser parte de curvas especiais denominadas S -horoparábola ou T -horoparábola. Na Seção 4.4 mostramos que a curva γ pode ser parte de uma superfície chamada quádrlica de Sitter elíptica usando o invariante e provamos um teorema que relaciona o contato de γ e uma quádrlica de Sitter elíptica com a geometria da superfície dual hiperbólica da curva γ . E por fim, na Seção 4.5, damos uma relação entre as superfícies horoesférica e dual hiperbólica do ponto de vista de dualidades Legendrianas, as quais foram introduzidas em [11]. Curvas no espaço hiperbólico $H^3(-1)$ em $\mathbb{R}_1^4$, a superfície dual de Sitter em S_1^3 e a superfície horoesférica no cone de luz LC^* , foram investigadas nos artigos [7], [8], [15]. A relação de dualidade entre a curva e estas superfícies foi estudada em [8].

No Capítulo 5, consideramos curvas sobre uma hipersuperfície tipo espaço $\gamma : I \rightarrow M$ e definimos uma função altura tangencial tipo tempo sobre γ , a H_t^T . Através das singularidades da função altura tangencial tipo tempo H_t^T , definimos uma superfície, chamada superfície hiperbólica, e encontramos um invariante. Além disso, temos uma curva sobre a superfície hiperbólica, que é definida como sendo o local das singularidades da superfície hiperbólica. Chamamos tal curva de curva hiperbólica e estudamos a geometria local da superfície hiperbólica e da curva hiperbólica usando tal invariante.

Os resultados desta tese foram submetidos para publicação conforme os artigos [12], [13] e [21], onde o artigo [13] já foi aceito.

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar alguns conceitos preliminares sobre curvas no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$. Fora dos pontos tipo luz, a curva é denominada tipo espaço ou tipo tempo e podemos parametrizá-la pelo comprimento de arco. Assim, a função curvatura e as fórmulas tipo Frenet-Serret são definidas de maneira similar ao caso de curvas no espaço Euclidiano. Definimos também a família de funções altura e família de funções distância ao quadrado, desdobramentos, conjuntos de bifurcação e discriminantes que serão base para os estudos dos próximos capítulos.

1.1 O espaço de Minkowski

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [25]. O *espaço de Minkowski* ou *espaço Lorentziano* $\mathbb{R}_1^{n+1}$ é o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$ dotado do pseudo-produto escalar

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n+1} y_{n+1},$$

para todo $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definição 1.1.1. *Um vetor não nulo $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ é tipo espaço se $\langle x, x \rangle > 0$, tipo luz se $\langle x, x \rangle = 0$ e tipo tempo se $\langle x, x \rangle < 0$.*

A norma de um vetor $x \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ é definida por $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$.

Temos as seguintes pseudo-esferas em $\mathbb{R}_1^{n+1}$ com centro em $p \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ e raio $r > 0$

$$\begin{aligned}
H^n(p, -r) &= \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x - p, x - p \rangle = -r^2\}; \\
S_1^n(p, r) &= \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x - p, x - p \rangle = r^2\}; \\
LC^*(p) &= \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x - p, x - p \rangle = 0\}.
\end{aligned}$$

$H^n(-r)$ é chamado de *espaço hiperbólico*, $S_1^n(r)$ de *espaço de Sitter* e LC^* de *cone de luz* de $\mathbb{R}_1^{n+1}$, e são as pseudo-esferas centradas na origem em $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Ao invés de $S_1^n(1)$, usualmente escrevemos S_1^n .

Além disso, o espaço hiperbólico é dado por $H^n(-r) = H_+^n(-r) \cup H_-^n(-r)$, onde

$$\begin{aligned}
H_+^n(-r) &= \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -r^2, x_1 > 0\}; \\
H_-^n(-r) &= \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -r^2, x_1 < 0\}.
\end{aligned}$$

Observemos que para o cone de luz LC^* em $\mathbb{R}_1^3$, o exterior do cone é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, consistindo de todos os vetores tipo espaço e o interior do cone é um aberto de $\mathbb{R}^3$, consistindo de todos os vetores tipo tempo. Os vetores sobre o cone são tipo luz.

Dizemos que dois vetores x, y em $\mathbb{R}_1^{n+1}$ são pseudo-ortogonais (ou ortogonalidade Lorentziana) se, e somente se, $\langle x, y \rangle = 0$.

Teorema 1.1.2. *Sejam x e y vetores não nulos pseudo-ortogonais em $\mathbb{R}_1^{n+1}$.*

- (a) [25] *Se x é tipo tempo, então y é tipo espaço.*
- (b) [11] *Se x e y são tipo luz, então x e y são linearmente dependentes.*

Definição 1.1.3. *Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Então V é dito :*

- (i) *tipo tempo se, e somente se, V tem um vetor tipo tempo;*
- (ii) *tipo espaço se, e somente se, todo vetor não nulo em V é tipo espaço;*
- (iii) *tipo luz caso contrário.*

No caso de $\mathbb{R}_1^3$ temos a seguinte figura.

Figura 1.1: (i) Plano tipo tempo

(ii) Plano tipo espaço

(iii) Plano tipo luz

Para um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ e um número real c , definimos um hiperplano com pseudo-normal v , como $P(v, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = c\}$. $P(v, c)$ é dito hiperplano tipo espaço, hiperplano tipo tempo ou hiperplano tipo luz se v é tipo tempo, tipo espaço ou tipo luz, respectivamente.

Uma *hipersuperfície tipo espaço* é uma hipersuperfície cujo hiperplano tangente em qualquer ponto é um hiperplano tipo espaço (isto é, seus hiperplanos tangentes contêm apenas vetores tipo espaço ou equivalentemente, o vetor pseudo-normal do hiperplano é tipo tempo). Uma *hipersuperfície tipo tempo* é uma hipersuperfície cujo hiperplano tangente em qualquer ponto é um hiperplano tipo tempo (isto é, contêm vetores tipo espaço, tipo tempo e tipo luz ou equivalentemente, o vetor pseudo-normal do hiperplano é tipo espaço). Uma *hipersuperfície tipo luz* é uma hipersuperfície cujo hiperplano tangente em qualquer ponto é um hiperplano tipo luz (isto é, contêm vetores tipo espaço e tipo luz ou equivalentemente, o vetor pseudo-normal do hiperplano é tipo luz).

Uma base $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ é ortonormal se $\langle v_1, v_1 \rangle = -1$ e $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ caso contrário, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Note que a base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ é uma base ortonormal em $\mathbb{R}_1^{n+1}$, sendo e_1 tipo tempo e e_i tipo espaço para $i = 2, \dots, n+1$.

Definição 1.1.4. *Sejam $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ vetores de $\mathbb{R}^3$ e seja*

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

O pseudo-produto vetorial de x e y é definido por

$$x \wedge y = J(x \times y) = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix},$$

onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é base canônica do $\mathbb{R}^3$, e $\times$ é o produto vetorial usual do $\mathbb{R}^3$.

Observemos que $J(x \times y)$ é a multiplicação da primeira coordenada de $x \times y$ por -1 . Sendo assim temos para qualquer $x \in \mathbb{R}^3$ que $\langle x, J(x \times y) \rangle$ é o produto interno usual de

$\mathbb{R}^3$ entre x e $x \times y$ e portanto:

$$\langle x, x \wedge y \rangle = \langle x, J(x \times y) \rangle = x \cdot (x \times y) = 0,$$

$$\langle y, x \wedge y \rangle = \langle y, J(x \times y) \rangle = y \cdot (x \times y) = 0,$$

onde $\cdot$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Portanto, $x \wedge y$ é pseudo-ortogonal a x e a y .

Lema 1.1.5. [25] *Se x, y são vetores em $\mathbb{R}^3$, então $x \wedge y = J(y) \times J(x)$.*

Teorema 1.1.6. [25] *Se w, x, y, z são vetores em $\mathbb{R}^3$, então*

$$(1) \quad x \wedge y = -y \wedge x,$$

$$(2) \quad \langle x \wedge y, z \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix},$$

$$(3) \quad x \wedge (y \wedge z) = \langle x, y \rangle z - \langle z, x \rangle y,$$

$$(4) \quad \langle x \wedge y, z \wedge w \rangle = \begin{vmatrix} \langle x, w \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle y, w \rangle & \langle y, z \rangle \end{vmatrix}.$$

Observamos que continuidade e derivadas são definidas da forma usual, usando a norma do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$.

1.2 Curvas tipo espaço ou tipo tempo em $\mathbb{R}_1^3$

Os conceitos desta seção podem ser encontrados em [3] e [25]. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$, uma curva parametrizada suave. Dizemos que γ é uma curva regular se $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Definição 1.2.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma curva suave regular.*

(i) γ é tipo espaço se $\gamma'(t)$ é um vetor tipo espaço para todo $t \in I$;

(ii) γ é tipo tempo se $\gamma'(t)$ é um vetor tipo tempo para todo $t \in I$;

(iii) Um ponto $\gamma(t)$ é chamado ponto tipo luz se $\gamma'(t)$ é um vetor tipo luz.

A hélice $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 2t)$ é tipo espaço.

Denotemos por $\varepsilon(\gamma(s)) = \text{sin}al(t(s))$ e $\delta(\gamma(s)) = \text{sin}al(n(s))$, onde o sinal de x é definido por

$$\text{sin}al(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é tipo espaço} \\ 0 & \text{se } x \text{ é tipo luz} \\ -1 & \text{se } x \text{ é tipo tempo.} \end{cases}$$

Considere γ uma curva regular tipo espaço ou tipo tempo. A função comprimento de arco de γ é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| du.$$

Além disso, dizemos que γ está parametrizada pelo comprimento de arco se ela satisfaz $\|\gamma'(s)\| = 1$, para todo $s \in I$.

Vamos assumir que o parâmetro s de γ é o parâmetro comprimento de arco e denotemos $t(s) = \gamma'(s)$ o vetor tangente unitário de γ em s . Visto que $\langle t(s), t(s) \rangle$ é constante (1 ou -1), diferenciando com respeito a s temos $\langle t(s), t'(s) \rangle = 0$ e então $t'(s)$ é pseudo-ortogonal a $t(s)$.

Se γ é uma curva tipo tempo, o Teorema 1.1.2 assegura que $t'(s) = \gamma''(s)$ é um vetor tipo espaço. Definimos a *curvatura* de γ em s por

$$k(s) = \|t'(s)\|.$$

Se $k(s) \neq 0$, o vetor normal principal unitário $n(s)$ da curva γ em s é definido por $t'(s) = k(s)n(s)$. Definimos o vetor binormal $b(s)$ como $b(s) = t(s) \wedge n(s)$. O vetor $b(s)$ é unitário e tipo espaço. Para cada s , $\{t(s), n(s), b(s)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}_1^3$ chamada de triedro de Frenet. A base é orientada positivamente, pois $\det(t, n, b) = \langle t \wedge n, b \rangle = \langle b, b \rangle = 1 > 0$.

Definimos a torção de γ em s como $\tau(s) = -\langle n'(s), b(s) \rangle$. Diferenciando cada uma das funções vetoriais do triedro de Frenet e escrevendo em coordenadas com a mesma base de Frenet, obtemos as fórmulas tipo Frenet-Serret de γ

$$\begin{cases} t'(s) = k(s) n(s) \\ n'(s) = k(s) t(s) - \tau(s) b(s) , \\ b'(s) = \tau(s) n(s) \end{cases}$$

Agora considere γ uma curva tipo espaço. Visto que $t'(s)$ é pseudo-ortogonal ao vetor tipo espaço $t(s)$, $t'(s)$ pode ser tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz. Analisemos o caso

onde $t'(s)$ é tipo espaço e o caso onde $t'(s)$ é tipo tempo. O caso em que $t'(s)$ é tipo luz não será usado aqui, mas pode ser encontrado em [20].

Seja $t'(s)$ um vetor tipo espaço. Novamente escrevemos $k(s) = \|t'(s)\|$ e se $k(s) \neq 0$ temos $t'(s) = k(s)n(s)$ e $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, onde n e b são chamados de vetor normal e vetor binormal, respectivamente. Aqui $b(s)$ é um vetor tipo tempo. As fórmulas tipo Frenet-Serret de γ são

$$\begin{cases} t'(s) = k(s) n(s) \\ n'(s) = -k(s) t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) = \tau(s) n(s) \end{cases}$$

A torsão de γ é $\tau(s) = -\langle n'(s), b(s) \rangle$. Aqui a base é orientada negativamente, pois $\det(t, n, b) = \langle t \wedge n, b \rangle = \langle b, b \rangle = -1 < 0$.

Quando o vetor $t'(s)$ é tipo tempo. A curvatura é $k(s) = \|t'(s)\| = \sqrt{-\langle t'(s), t'(s) \rangle}$ e se $k(s) \neq 0$, o vetor normal é dado por $t'(s) = k(s)n(s)$. O vetor binormal é $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ que é um vetor tipo espaço. As fórmulas tipo Frenet-Serret de γ são

$$\begin{cases} t'(s) = k(s) n(s) \\ n'(s) = k(s) t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) = \tau(s) n(s) \end{cases}$$

A torsão de γ é $\tau(s) = \langle n'(s), b(s) \rangle$ e a base é agora orientada positivamente.

Estas são fórmulas fundamentais para estudo de curvas tipo espaço e tipo tempo em $\mathbb{R}_1^3$ (ver, por exemplo, [23]). Para curvas não parametrizadas pelo comprimento de arco no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$, também podemos encontrar fórmulas para a curvatura e para a torção.

Assim, seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, uma curva tipo espaço ou tipo tempo não parametrizada pelo comprimento de arco. Então a curvatura e a torção de γ em t são dadas respectivamente por

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \quad \text{e} \quad \tau(t) = \delta(\gamma(t)) \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma'''(t), \gamma''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}.$$

1.3 Famílias de funções altura e de funções distância ao quadrado

As definições e resultados desta seção para o espaço Euclidiano podem ser encontrados em [3] e valem de maneira similar para o espaço de Minkowski, ver por exemplo, [7], [23].

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ uma curva regular e $F : \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma submersão. Dizemos que γ e $F^{-1}(0)$ têm contato de ordem k em $t = t_0$ se a função $g(t) = F \circ \gamma(t)$ satisfaz $g(t_0) = g'(t_0) = \dots = g^{(k)}(t_0) = 0$ e $g^{(k+1)}(t_0) \neq 0$, ou seja, g tem uma singularidade A_k em t_0 . Também dizemos que g tem singularidade $A_{\geq k}$ em t_0 se $g^{(p)}(t_0) = 0$ para todo $1 \leq p \leq k$. A única singularidade estável é a singularidade A_1 (ver [5]).

Por exemplo, seja $n = 1$, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ tal que $\gamma(t) = (t, t^k)$, $t_0 = 0$ e $F(x_0, x_1) = \langle (x_0, x_1), (0, 1) \rangle = x_1$ a projeção. Desta forma $F^{-1}(0)$ é o eixo x_0 em $\mathbb{R}_1^2$. Então $g(t) = F(\gamma(t)) = t^k$ e portanto

$$g'(t) = kt^{k-1}, g''(t) = k(k-1)t^{k-2}, \dots, g^{(k-1)}(t) = k!t, g^{(k)}(t) = k!.$$

Assim, a curva γ tem contato de ordem $(k-1)$ com o eixo x_0 em $t_0 = 0$, ou seja, g tem singularidade A_{k-1} em $t_0 = 0$.

Figura 1.2: Ver [3].

Para $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^{n+1}$ definimos a família de funções altura $H : I \times \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre γ por $H(t, v) = \langle \gamma(t), v \rangle$. Denotamos por $h_v : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $h_v(t) = H(t, v)$ para algum $v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ fixado, e a chamamos de função altura sobre γ na direção v . Assim, a família de funções altura mede o contato de γ com hiperplanos em $\gamma(t_0)$. De fato, segundo a definição de contato usando $F(x) = \langle x - \gamma(t_0), v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle \gamma(t_0), v \rangle$, temos que $F^{-1}(0)$ é o hiperplano pseudo-ortogonal a v que passa por $\gamma(t_0)$. Desconsiderando a

constante podemos medir o contato de $F^{-1}(0)$ e γ em $\gamma(t_0)$ usando a função altura $h_v(t)$. Usualmente, para a função altura usamos v como vetores das pseudo-esferas.

A família de funções distância ao quadrado $f : I \times \mathbb{R}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ sobre γ é dada por

$$f(t, v) = \langle \gamma(t) - v, \gamma(t) - v \rangle.$$

Denotemos por $f_v : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f_v(t) = f(t, v)$, para algum $v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ fixado. Esta família mede o contato da curva γ em $\gamma(t_0)$ com pseudo-esferas de centro v em $\mathbb{R}_1^{n+1}$ que passa por $\gamma(t_0)$. De fato, pela definição de contato teríamos $F(x) = \langle x - v, x - v \rangle - \langle v - \gamma(t_0), v - \gamma(t_0) \rangle$, onde $F^{-1}(0)$ é uma pseudo-esfera de centro v passando por $\gamma(t_0)$. O tipo de pseudo-esfera depende do sinal da constante $\langle v - \gamma(t_0), v - \gamma(t_0) \rangle$. Desconsiderando a constante podemos medir o contato da pseudo-esfera $F^{-1}(0)$ e γ em $\gamma(t_0)$ usando a função distância ao quadrado $f_v(t)$.

A função distância ao quadrado f_v tem singularidade do tipo A_k em t_0 se $(f_v)^{(p)}(t_0) = 0$ para todo $1 \leq p \leq k$ e $(f_v)^{(k+1)}(t_0) \neq 0$. Isto vale inclusive se $\gamma(t_0)$ for um ponto tipo luz da curva. Para uma curva genérica em $\mathbb{R}_1^3$, f_v tem genericamente singularidades locais do tipo A_1 , A_2 , A_3 ou A_4 ou seja, o contato de γ com as pseudo-esferas em geral é do tipo A_k , $1 \leq k \leq 4$. O mesmo vale para a função altura, h_v tem genericamente singularidade A_k , $1 \leq k \leq 3$ em t_0 , que mede o contato de γ com hiperplanos (ver [23]).

Seja $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um germe de função. Chamamos G um desdobramento a r -parâmetros de g , onde $g(t) = G_{x_0}(t)$. Denotamos o $(k-1)$ -jato da derivada parcial $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ em t_0 por $j^{k-1}(\frac{\partial G}{\partial x_i}(t, x_0))(t_0) = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{ji}(t - t_0)^j$ para $i = 1, \dots, r$. Suponha que g tem uma singularidade A_k ($k \geq 1$), em t_0 . Então G é chamada um *desdobramento* (p) -*versal* se, e somente se, a matriz de ordem $(k-1) \times r$ de coeficientes $(\alpha_{ji})_{j=1, \dots, k-1; i=1, \dots, r}$ tem posto $k-1$ ($k-1 \leq r$) e G é chamada um *desdobramento versal* se, e somente se, a matriz $k \times r$ de coeficientes $(\alpha_{ji})_{j=0, \dots, k-1; i=1, \dots, r}$ tem posto k ($k \leq r$) (ver [3], [23]).

Observação 1.3.1. Se f_{v_0} tem uma singularidade A_k ($k = 2, 3, 4$) em t_0 , então f é um *desdobramento* (p) -*versal* de f_{v_0} (ver [23]).

Para G , temos que o conjunto de bifurcação é dado por

$$\mathfrak{Bif}(G) = \{x \in \mathbb{R}^r \mid \frac{\partial G}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t, x) = 0 \text{ em } (t, x) \text{ para algum } t\},$$

e o *conjunto discriminante* é dado por

$$\mathcal{D}_G = \{x \in \mathbb{R}^r \mid G(t, x) = \frac{\partial G}{\partial t}(t, x) = 0 \text{ em } (t, x) \text{ para algum } t\}.$$

Os próximos teoremas são bem conhecidos, aparecem em [3] e são os teoremas fundamentais da teoria dos desdobramentos. Eles descrevem os conjuntos de bifurcação de desdobramentos (p) -versais da singularidade A_k , $2 \leq k \leq 4$ e os conjuntos discriminantes de desdobramentos versais da singularidade A_k , $k = 2, 3$. Utilizaremos tais teoremas nos próximos capítulos. Para detalhes sobre a teoria dos desdobramentos ver o livro [3].

É conhecido que $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$ é chamada cúspide ordinária e $SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v\}$ o rabo de andorinha. Além disso, $C \times \mathbb{R}$ é o eixo cuspidal.

eixo cuspidal

rabo de andorinha

Figura 1.3

Teorema 1.3.2. [3] *Seja $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a r -parâmetros de $g(t)$ que tem uma singularidade A_k em t_0 e suponhamos G um desdobramento (p) -versal. Então*

- (a) *Se $k = 2$, então $\mathfrak{Bif}(G)$ é localmente difeomorfo a $\mathbb{R}^{r-1}$;*
- (b) *Se $k = 3$, então $\mathfrak{Bif}(G)$ é localmente difeomorfo a $C \times \mathbb{R}^{r-2}$;*
- (c) *Se $k = 4$, então $\mathfrak{Bif}(G)$ é localmente difeomorfo a $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$.*

Teorema 1.3.3. [3] *Seja $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ um desdobramento a r -parâmetros de $g(t)$ que tem uma singularidade A_k em t_0 e suponhamos G um desdobramento versal. Então*

- (1) Se $k = 2$, então $\mathfrak{D}_G$ é localmente difeomorfo a $C \times \mathbb{R}^{r-2}$;
- (2) Se $k = 3$, então $\mathfrak{D}_G$ é localmente difeomorfo a $SW \times \mathbb{R}^{r-3}$.

Usaremos as definições e resultados acima tomando G como a família de funções distância ao quadrado ou a família de funções altura. Por exemplo, pela definição dada acima, temos que o conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado f é dado por,

$$\mathfrak{Bif}(f) = \{v \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid f'_v(t) = f''_v(t) = 0 \text{ em } (t, v) \text{ para algum } t\},$$

ou seja, é o conjunto das direções $v \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ tal que existe $t \in I$ onde a singularidade de f_v em t é pelo menos do tipo A_2 (não estável).

Definição 1.3.4. *O conjunto focal é definido, para curvas tipo espaço ou tipo tempo, como sendo o local dos centros das pseudo-esferas que têm pelo menos contato de ordem 2 com a curva (para o caso Euclidiano ver [2]).*

Pela definição acima temos que conjunto focal e $\mathfrak{Bif}(f)$ coincidem.

Conjunto focal de curvas no espaço de Minkowski próximo de pontos tipo luz

Neste capítulo definimos os conjuntos focais e os conjuntos de bifurcação de curvas no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ e também de curvas nas pseudo-esferas S_1^2 e S_1^3 e estudamos a estrutura métrica destes conjuntos, inclusive localmente nos pontos tipo luz. Primeiramente, estudamos a geometria de curvas suaves e regulares γ , tipo espaço ou tipo tempo, e de seus conjuntos focais no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3$ (analogamente para S_1^2 e S_1^3), as quais são capturadas pelo contato da curva com as pseudo-esferas. Esse contato pode ser estudado usando a família de funções distância ao quadrado sobre γ . Usamos fortemente o fato de γ , tipo espaço ou tipo tempo, poder ser parametrizada pelo comprimento de arco para facilitar os cálculos e interpretações geométricas. As fórmulas tipo Frenet-Serret e a família de funções distância ao quadrado sobre a curva são as principais ferramentas para o estudo de conjuntos focais.

O conjunto focal não está definido nos pontos tipo luz da curva, mas nestes pontos o conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre a curva está definido. Além disso, o conjunto focal está contido no conjunto de bifurcação, e para curvas tipo espaço ou tipo tempo, eles coincidem. Estudaremos o conjunto focal quando a curva for tipo espaço ou tipo tempo (similarmente ao caso Euclidiano) e estudaremos o conjunto de bifurcação quando a curva tiver pontos tipo luz para entender o que acontece próximo destes pontos.

Curvas com pontos tipo luz $\gamma(t_0)$, não podem ser parametrizadas pelo comprimento

de arco pois $\langle \gamma'(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$, então para entender o que está acontecendo neste caso reescrevemos o conjunto de bifurcação próximo de t_0 , sem usar a parametrização pelo comprimento de arco e as fórmulas tipo Frenet-Serret da curva.

O estudo de curvas em $\mathbb{R}_1^2$ e de seus conjuntos focais (evolutas) e cáusticas, também usando a família de funções distância ao quadrado, foi feito por A. Saloom e F. Tari em [26].

Mostramos abaixo que para uma curva genérica, seus pontos tipo luz são isolados ou não existem. Consideremos mergulhos de curvas $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$, onde $Emb(I, \mathbb{R}_1^n)$ denota o conjunto de tais mergulhos e é dotado com a topologia C^∞ de Whitney. Dizemos que uma propriedade é genérica se for satisfeita para um subconjunto residual de mergulhos de γ em $\mathbb{R}_1^n$. Uma curva que satisfaz uma propriedade genérica é chamada uma *curva genérica*.

Para estudar as propriedades locais de γ em $\gamma(t_0)$, consideramos o germe $\gamma : (\mathbb{R}, t_0) \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ de γ em t_0 .

Definição 2.0.5. *Definimos um subconjunto Ω de $Emb(I, \mathbb{R}_1^n)$ de tal modo que uma curva γ está em Ω se, e somente se, $\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle \neq 0$ sempre que $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0$ (ver [26] para $n = 2$).*

Podemos mostrar, usando resultados de transversalidade de Thom (ver por exemplo, Capítulo 9 em [3]), que Ω é um subconjunto aberto e denso de $Emb(I, \mathbb{R}_1^n)$.

Observação 2.0.6. *Para $n = 3$, neste conjunto Ω se o ponto $\gamma(t_0)$ for tipo luz, então o vetor $\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)$ será tipo espaço, pois $\langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0) \rangle = \langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle^2$. Isto é equivalente a dizer que nestes pontos a torção está bem definida. Mas observe que a curvatura, $k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$, em geral, não está definida nos pontos tipo luz de γ , pois $\|\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)\| \neq 0$ e então a curvatura nos pontos das componentes tipo espaço e tipo tempo de γ , tende ao infinito quando t tende à t_0 .*

Proposição 2.0.7. *Seja $\gamma \in \Omega$. Então os pontos tipo luz de γ são pontos isolados ou não existem.*

Demonstração. A demonstração é similar ao caso $n = 2$ (ver [26]). Definimos $g(t) = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$, onde $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ e consideramos $A = \{t \in I \mid g(t) = 0\}$.

Seja $t \in A$, então $g(t) = 0$ e como $\gamma \in \Omega$, segue que $g'(t) \neq 0$. Portanto 0 é um valor regular de g , assim $g^{-1}(0) = A$ é uma subvariedade de codimensão 1 em I . Ou seja, a dimensão de A é 0 e com isso A é formado no máximo por pontos isolados. $\square$

Observação 2.0.8. *Para $\gamma \in \Omega$ temos que $g'(t) \neq 0$ em uma vizinhança $V \subset I$ de t_0 onde $\gamma(t_0)$ é tipo luz. Então em V temos que g é crescente ou decrescente. Como $g(t_0) = 0$ segue que g muda de sinal em V e a curva γ passa de tipo espaço para tipo tempo ou vice versa no ponto tipo luz $\gamma(t_0)$.*

Neste capítulo, trabalhamos com curvas $\gamma \in \Omega$, pois estamos interessados em trabalhar na vizinhança de pontos tipo luz e ver o que acontece com a geometria dos conjuntos focais especialmente próximo destes pontos, onde acontece a transição do lado tipo espaço para o lado tipo tempo de γ .

2.1 O conjunto focal de curvas tipo espaço e tipo tempo

Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma curva tipo espaço ou tipo tempo e suponhamos que γ está parametrizada pelo comprimento de arco. Isto é possível porque γ não possui pontos tipo luz.

Nesta seção, usamos as fórmulas tipo Frenet-Serret de γ , vistas na Seção 1.2, e encontramos a parametrização dos conjuntos focais. Além disso, estudamos a estrutura métrica destes conjuntos focais.

Consideremos a família de funções distância ao quadrado f sobre γ definida no Capítulo 1. Para definir o conjunto focal queremos o local dos centros v 's das pseudo-esferas que têm pelo menos contato de ordem 2 com a curva, ou seja, f_v tem singularidade $A_{\geq 2}$.

Observemos que se γ é uma curva tipo espaço ou tipo tempo e $k(s) = 0$ em algum ponto de γ , então $f_v''(s) = \varepsilon(\gamma(s)) \neq 0$ e logo f_v não tem singularidade $A_{\geq 2}$. Ou seja, para existir o conjunto focal, localmente, precisamos ter $k(s) \neq 0$. Agora se $\tau(s) = 0$ em algum ponto da curva, temos que genericamente $f_v^{(3)}(s) = -\varepsilon(\gamma(s))k'(s) \neq 0$, ou seja, f_v não tem singularidade $A_{\geq 3}$. Por esse motivo é que $k(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$ (ou seja, localmente a curva não é reta ou plana) na proposição seguinte pois estamos interessados em estudar o conjunto focal (singularidade $A_{\geq 2}$).

Proposição 2.1.1. *[23] Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma curva tipo espaço ou tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco, com $k(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$. Então*

(1) $f'_v(s_0) = 0$ se, e somente se, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(s_0) - v = \lambda n(s_0) + \mu b(s_0)$.

(2) $f'_v(s_0) = f''_v(s_0) = 0$ (singularidade $A_{\geq 2}$) se, e somente se, $v = \gamma(s_0) + \frac{\varepsilon(\gamma(s_0))}{\delta(\gamma(s_0))k(s_0)}n(s_0) + \mu b(s_0)$, para algum $\mu \in \mathbb{R}$.

(3) $f'_v(s_0) = f''_v(s_0) = f_v^{(3)}(s_0) = 0$ (singularidade $A_{\geq 3}$) se, e somente se,

$$v = \gamma(s_0) + \frac{\varepsilon(\gamma(s_0))}{\delta(\gamma(s_0))k(s_0)}n(s_0) + \frac{k'(s_0)}{\varepsilon(\gamma(s_0))\delta(\gamma(s_0))k^2(s_0)\tau(s_0)}b(s_0).$$

Assim, para uma curva γ tipo espaço ou tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$, temos que a *superfície focal* de γ é dada por

$$\mathfrak{B}(s, \mu) = \gamma(s) + \frac{\varepsilon(\gamma(s))}{\delta(\gamma(s))k(s)}n(s) + \mu b(s), \quad (2.1.1)$$

com $\mu \in \mathbb{R}$. A *curva cuspidal* da superfície focal é dada por

$$\mathfrak{B}(s) = \gamma(s) + \frac{\varepsilon(\gamma(s))}{\delta(\gamma(s))k(s)}n(s) + \mu(s)b(s), \quad (2.1.2)$$

com $\mu(s) = \frac{k'(s)}{\varepsilon(\gamma(s))\delta(\gamma(s))k^2(s)\tau(s)}$, isto é, os vetores v 's onde as pseudo-esferas tem pelo menos contato de ordem 3 com a curva. Denotamos a curva cuspidal $\mathfrak{B}(s)$ por $\mathcal{C}$.

Observemos que a superfície focal é uma superfície desenvolvível (para mais detalhes ver [9]).

Proposição 2.1.2. *Seja γ uma curva conexa. Se γ é tipo tempo, então γ não intercepta sua superfície focal.*

Demonstração. Suponhamos que γ é tipo tempo e intercepta sua superfície focal, então existem $s_1, s_2 \in I$ com $s_1 \neq s_2$ (assumimos por simplicidade que $s_2 < s_1$) tal que,

$$\gamma(s_1) - \frac{1}{k(s_1)}n(s_1) + \mu b(s_1) = \gamma(s_2).$$

Considere a função $g : [s_2, s_1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(s) = \langle \gamma(s), \gamma'(s_1) \rangle - \langle \gamma(s_1), \gamma'(s_1) \rangle$. Logo $g(s_1) = g(s_2) = 0$ e portanto pelo Teorema de Rolle existe $s_3 \in (s_2, s_1)$ tal que $g'(s_3) = 0$. Como $g'(s_3) = \langle \gamma'(s_1), \gamma'(s_3) \rangle$ temos que $\gamma'(s_3)$ pertence à um plano gerado

por $n(s_1)$ e $b(s_1)$. Além disso, este plano é tipo espaço e contém $\gamma'(s_3)$ que é tipo tempo por hipótese. Logo, temos um absurdo. Portanto, γ não intercepta sua superfície focal. $\square$

Observação 2.1.3. *Se γ é tipo espaço então genericamente γ intercepta sua superfície focal em pontos isolados porque em geral a reta tangente à γ é transversal ao plano tangente à superfície focal.*

Para estudar a estrutura métrica da superfície focal $\mathfrak{B}$, precisamos de alguns conceitos. O pseudo-produto escalar em $\mathbb{R}_1^3$ induz uma métrica sobre a superfície focal $\mathfrak{B}$, que pode ser degenerada em alguns pontos de $\mathfrak{B}$, ou seja, nestes pontos o plano tangente é tipo luz. Chamamos o local de tais pontos de *local de degenerância* e denotamos por LD (ver [29] para local de degenerância de cáusticas de superfície em $\mathbb{R}_1^3$). O conjunto LD é vazio (Teorema 2.1.4 (d)) para curvas tipo espaço ou tipo tempo. Estudaremos o conjunto LD para curvas com pontos tipo luz. Mas neste caso precisamos do conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre esta curva. Veremos que se a curva possui pontos tipo luz, o conjunto LD do conjunto de bifurcação é uma curva suave (Teorema 2.2.3) que divide a superfície focal localmente em uma região Riemanniana (onde os planos tangentes são tipo espaço) e uma região Lorentziana (onde os planos tangentes são tipo tempo).

É interessante conhecer o conjunto LD , pois através dele pode-se estudar o que acontece em pontos onde a métrica é degenerada e explicar as mudanças geométricas que ocorrem na passagem da região Riemanniana para a região Lorentziana de uma subvariedade. Além disso, a superfície focal pode ter pontos onde o plano tangente não está definido.

Considere a superfície focal de uma curva γ tipo espaço ou tipo tempo, ou seja,

$$\mathfrak{B}(s, \mu) = \gamma(s) + \frac{\varepsilon(\gamma(s))}{\delta(\gamma(s))k(s)}n(s) + \mu b(s), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Os planos tangentes nos pontos da superfície focal são gerados pelos vetores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial s}(s, \mu) &= \mathfrak{B}_s = \left(\mu \tau(s) - \frac{\varepsilon(\gamma(s))k'(s)}{\delta(\gamma(s))k^2(s)} \right) n(s) + \frac{\tau(s)}{\delta(\gamma(s))k(s)} b(s) \text{ e} \\ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}(s, \mu) &= \mathfrak{B}_\mu = b(s). \end{aligned}$$

Observe que $\mathfrak{B}_s$ é paralelo a $\mathfrak{B}_\mu$ se, e somente se,

$$\mu(s) = \frac{k'(s)}{\varepsilon(\gamma(s))\delta(\gamma(s))k^2(s)\tau(s)},$$

onde $\mathfrak{B}(s, \mu(s))$ é a parametrização da curva onde f_v tem uma singularidade do tipo $A_{\geq 3}$, que é a curva cuspidal $\mathcal{C}$.

Supondo

$$\mu(s) \neq \frac{k'(s)}{\varepsilon(\gamma(s))\delta(\gamma(s))k^2(s)\tau(s)},$$

então $\mathfrak{B}_s$ e $\mathfrak{B}_\mu$ geram os planos tangentes da superfície $\mathfrak{B}$, e para $v = \lambda_1 \mathfrak{B}_s + \lambda_2 \mathfrak{B}_\mu$,

$$\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 \left(\frac{\tau^2}{k^2} \langle b, b \rangle + \frac{k'^2 \delta}{k^4} - 2 \frac{\varepsilon k' \mu \tau}{k^2} + \mu^2 \tau^2 \delta \right) + 2\lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\tau}{\delta k} \langle b, b \rangle \right) + \lambda_2^2 \langle b, b \rangle.$$

Vamos usar esta expressão no resultado abaixo.

Os cálculos acima mostram o item (a) do próximo resultado, isto é, o plano tangente da superfície focal não está definido apenas nos pontos da curva cuspidal $\mathcal{C}$ dados pela Equação (2.1.2).

No próximo teorema lembre-se que estamos supondo $\tau(s) \neq 0$ e $k(s) \neq 0$ para construirmos a superfície focal com sua curva cuspidal. Fora da curva cuspidal vamos verificar qual a estrutura métrica da superfície focal para curvas tipo espaço ou tipo tempo.

Teorema 2.1.4. (a) *Apenas nos pontos da curva cuspidal $\mathcal{C}$, os planos tangentes da superfície focal não estão definidos.*

Fora da curva cuspidal $\mathcal{C}$:

(b) *a superfície focal de uma curva genérica tipo tempo é tipo espaço;*

(c) *a superfície focal de uma curva genérica tipo espaço é tipo tempo;*

(d) *se a curva é tipo espaço ou tipo tempo então o conjunto LD da superfície focal é vazio.*

Demonstração. (b) Seja γ uma curva tipo tempo, então $n(s)$ e $b(s)$ são tipo espaço. Portanto, os vetores do plano tangente à superfície focal são dados por $v = \lambda_1 \mathfrak{B}_s + \lambda_2 \mathfrak{B}_\mu$ e

$$\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 \left(\left(\frac{k'}{k^2} + \mu \tau \right)^2 + \frac{\tau^2}{k^2} \right) (s) + 2\lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\tau}{k} \right) (s) + \lambda_2^2. \quad (*)$$

Fazendo $\langle v, v \rangle = 0$, podemos pensar na equação acima como uma equação do segundo grau em λ_1 , assim

$$\Delta = -4\lambda_2^2 \left(\frac{k'}{k^2} + \mu\tau \right)^2 (s) \leq 0.$$

Se $\Delta < 0$ então não existe vetores tipo luz no plano tangente e portanto ele é plano tangente tipo espaço. Se $\Delta = 0$ então existe um único v tipo luz e o plano tangente é tipo luz.

Como $\mu(s) \neq -\frac{k'}{k^2\tau}(s)$ nos pontos regulares da superfície focal então $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0$. Substituindo $\lambda_2 = 0$ em (*) temos que a direção é tipo luz se $\tau(s) = 0$ e $k'(s) = 0$, mas estamos supondo $\tau(s) \neq 0$ então $\Delta < 0$. Com isso, não temos nenhuma direção tipo luz neste plano e portanto em todos os pontos da superfície focal o plano tangente é tipo espaço.

(c) Seja γ uma curva tipo espaço, então temos dois casos: $n(s)$ tipo tempo e $b(s)$ tipo espaço ou $n(s)$ tipo espaço e $b(s)$ tipo tempo.

No caso em que $n(s)$ é tipo tempo e $b(s)$ é tipo espaço, temos

$$\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 \left(\frac{\tau^2}{k^2} - \left(\frac{k'}{k^2} + \mu\tau \right)^2 \right) (s) - 2\lambda_1\lambda_2 \left(\frac{\tau}{k} \right) (s) + \lambda_2^2. \quad (**)$$

Fazendo $\langle v, v \rangle = 0$, e pensando na equação acima como uma equação do segundo grau em λ_1 , temos

$$\Delta = 4\lambda_2^2 \left(\frac{k'}{k^2} + \mu\tau \right)^2 (s) \geq 0.$$

Como $\mu(s) \neq -\frac{k'}{k^2\tau}(s)$ nos pontos regulares da superfície focal então $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = 0$.

Substituindo $\lambda_2 = 0$ em (**) temos que a direção é tipo luz se $\left(\frac{\tau^2}{k^2} - \left(\frac{k'}{k^2} + \mu\tau \right)^2 \right) (s) = 0$, ou seja, para $\mu_1(s) = \left(\frac{1}{k} - \frac{k'}{k^2\tau} \right) (s)$ ou $\mu_2(s) = \left(-\frac{1}{k} - \frac{k'}{k^2\tau} \right) (s)$. Então

$$\mathfrak{B}_s(s, \mu_1(s)) = \frac{\tau(s)}{k(s)}(n(s) - b(s)) \text{ e } \mathfrak{B}_s(s, \mu_2(s)) = -\frac{\tau(s)}{k(s)}(n(s) + b(s))$$

são vetores tipo luz e $\mathfrak{B}_\mu(s, \mu_1(s)) = \mathfrak{B}_\mu(s, \mu_2(s)) = b(s)$. Por outro lado, temos que $\mathfrak{B}_s(s, \mu_1(s))$ e $\mathfrak{B}_s(s, \mu_2(s))$ são vetores linearmente independentes pois estamos supondo

$\tau(s) \neq 0$ e mais

$$\mathfrak{B}_s(s, \mu_2(s)) = -\mathfrak{B}_s(s, \mu_1(s)) - \frac{2\tau(s)}{k(s)}\mathfrak{B}_\mu(s, \mu_1(s)),$$

ou seja, $\mathfrak{B}_s(s, \mu_2(s))$ pertence ao plano gerado por $\mathfrak{B}_s(s, \mu_1(s))$ e $\mathfrak{B}_\mu(s, \mu_1(s))$. Analogamente, o vetor $\mathfrak{B}_s(s, \mu_1(s))$ está no plano gerado por $\mathfrak{B}_s(s, \mu_2(s))$ e $\mathfrak{B}_\mu(s, \mu_2(s))$. Portanto se $\lambda_2 = 0$, os planos tangentes em $\mathfrak{B}(s, \mu_1(s))$ e em $\mathfrak{B}(s, \mu_2(s))$ terão duas direções tipo luz e assim estes planos serão tipo tempo. Dessa forma concluímos que em todos os pontos da superfície focal o plano tangente é tipo tempo.

Quando $n(s)$ é tipo espaço e $b(s)$ é tipo tempo, segue que em todos os pontos da superfície focal o plano tangente é tipo tempo, pois os geradores destes planos são dados por $\mathfrak{B}_s(s, \mu)$ e $\mathfrak{B}_\mu(s, \mu) = b(s)$ e $b(s)$ é tipo tempo.

(d) O conjunto LD é vazio e isto é uma consequência de (a), (b) e (c). $\square$

2.2 O conjunto focal na vizinhança dos pontos tipo luz

Estudamos até agora o que está acontecendo com a superfície focal de uma curva tipo espaço ou tipo tempo. O conjunto focal não está definido nos pontos tipo luz da curva, mas nestes pontos o conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre a curva, está definido. Além disso, o conjunto focal está contido no conjunto de bifurcação e eles coincidem se a curva é tipo espaço ou tipo tempo. Considere uma curva com pontos tipo luz. Como nossa curva está em Ω (Definição 2.0.5) então estes pontos são isolados e a curva muda de tipo espaço para tipo tempo nestes pontos (Proposição 2.0.7 e Observação 2.0.8). Podemos pensar no conjunto de bifurcação como uma forma de passar continuamente do conjunto focal do lado tipo espaço da curva para o conjunto focal do lado tipo tempo da curva. Nosso principal objetivo, nesta seção, é então entender esta passagem através do estudo da geometria do conjunto de bifurcação próximo de um ponto tipo luz da curva. O principal resultado aqui é dado pelo Teorema 2.2.3.

A superfície focal dada pela Equação 2.1.1, para curvas tipo espaço ou tipo tempo, está definida quando $k(s)$ existe e é não nulo. Dada uma curva com pontos tipo luz a curvatura pode não estar definida nestes pontos (Observação 2.0.6). Não podemos parametrizar esta curva pelo comprimento de arco. Consideremos então a curva regular $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ não parametrizada pelo comprimento de arco e vamos escrever o conjunto de bifurcação de

forma apropriada para desta forma estudar este conjunto próximo destes pontos tipo luz. Vimos que a função distância ao quadrado é dada por $f_v(t) = \langle \gamma(t) - v, \gamma(t) - v \rangle$. Assim

$$\frac{1}{2}f'_v(t) = \langle \gamma(t) - v, \gamma'(t) \rangle.$$

Segue que f_v é singular em t se, e somente se, $\langle \gamma(t) - v, \gamma'(t) \rangle = 0$, equivalentemente, $\gamma(t) - v = \mu N(t) + \lambda B(t)$, onde $N(t)$ e $B(t)$ são vetores que geram o plano pseudo-normal (plano normal Lorentziano) ao vetor $\gamma'(t)$. (Esta condição inclui pontos tipo luz).

Diferenciando novamente temos

$$\frac{1}{2}f''_v(t) = \langle \gamma(t) - v, \gamma''(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle.$$

A singularidade de f_v é degenerada se, e somente se, $f'_v(t) = f''_v(t) = 0$, equivalentemente, $\gamma(t) - v = \mu N(t) + \lambda B(t)$ e

$$\mu \langle N(t), \gamma''(t) \rangle + \lambda \langle B(t), \gamma''(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0. \quad (2.2.1)$$

Segue que o conjunto bifurcação de f é dado por

$$\mathfrak{Bif}(f) = \{\gamma(t) - \mu N(t) - \lambda B(t) \mid (\mu, \lambda) \text{ é solução de (2.2.1)}\}.$$

Fora dos pontos tipo luz de γ , o conjunto de bifurcação é precisamente a superfície focal das componentes tipo espaço e tipo tempo de γ , pois fora destes pontos a curvatura está bem definida. Então vamos usar o conjunto de bifurcação para entender o que está acontecendo na vizinhança do ponto tipo luz.

Nosso objetivo agora é melhorar a expressão geral do conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre a curva, para analisar o que está acontecendo com esta superfície quando a curva tem pontos tipo luz. Nosso método para isto, será descrito logo abaixo. Lembre-se que como $\gamma \in \Omega$, pela Proposição 2.0.7, os pontos tipo luz de γ são isolados e então próximo de um ponto tipo luz, pela Observação 2.0.8, γ muda de uma curva tipo espaço para uma curva tipo tempo.

Tomando $N(t) = \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$ e $B(t) = \gamma'(t) \wedge (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t))$ temos $\langle N(t), B(t) \rangle = 0$ e

$$\gamma(t) - v = \mu \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) + \lambda \gamma'(t) \wedge (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t))$$

Substituindo $N(t)$ e $B(t)$ em (2.2.1), temos

$$\lambda (\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \langle \gamma''(t), \gamma''(t) \rangle - \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle^2) + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\lambda \langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle - \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 0. \quad (2.2.2)$$

Assim, segue que o conjunto de bifurcação é dado por

$$\mathfrak{Bif}(f) = \{ \gamma(t) - \mu N(t) - \lambda(t) B(t) \mid \mu \in \mathbb{R} \text{ e } \lambda \text{ é solução de (2.2.2)} \},$$

onde $N(t) = \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)$ e $B(t) = \gamma'(t) \wedge (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t))$. Chamaremos este conjunto de superfície $\mathfrak{B}$.

A reta tangente no ponto tipo luz, está contida no plano pseudo-normal. Esta é uma situação totalmente diferente do caso Euclidiano. De fato, visto que $\gamma \in \Omega$, no ponto tipo luz $\gamma(t_0)$ de γ , o vetor $N(t_0) = \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)$ não é tipo luz (Observação 2.0.6) mas observemos que $B(t_0)$ é paralelo à $\gamma'(t_0)$. Para esta definição, o que interessa é que, também no ponto tipo luz, os vetores $N(t_0)$ e $B(t_0)$ formam uma base para o plano pseudo-normal à curva em $\gamma(t_0)$ e assim o conjunto de bifurcação acima está bem definido.

Dada uma curva γ com ponto tipo luz $\gamma(t_0)$, no próximo resultado, provamos quais tipos de singularidades podem ocorrer se $v = \mathfrak{B}(t_0, \mu)$ para a função distância ao quadrado f_v . Estes são os únicos pontos do conjunto de bifurcação que não estão nas superfícies focais das partes tipo espaço e tipo tempo da curva.

Proposição 2.2.1. *Seja $\gamma \in \Omega$. Se $\gamma(t_0)$ é ponto tipo luz de γ e $v = \mathfrak{B}(t_0, \mu)$ então a função distância ao quadrado f_v tem singularidade do tipo A_2 exceto se $\mu_0 = \frac{-3\langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle}{\langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0) \rangle}$, onde f_{v_0} tem singularidade $A_{\geq 3}$ para $v_0 = \mathfrak{B}(t_0, \mu_0)$.*

Demonstração. Considere $f_v(t) = \langle \gamma(t) - v, \gamma(t) - v \rangle$ uma função distância ao quadrado sobre γ . Então, $f_v^{(3)}(t) = 6\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle + 2\langle \gamma(t) - v, \gamma'''(t) \rangle$, ou seja,

$$f_v^{(3)}(t) = 6\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle + 2\langle \lambda(t)\gamma'(t) \wedge (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) + \mu\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle.$$

Portanto, no ponto tipo luz $\gamma(t_0)$, $f_v^{(3)}(t_0) = 6\langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle + 2\langle \mu\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0) \rangle$. Supondo como na Seção 2.1 que a torção é não nula em t_0 e portanto $\langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0) \rangle \neq$

0, temos que $f_v^{(3)}(t_0) = 0$ se, e somente se, $\mu = \frac{-3\langle\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle}{\langle\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\rangle} \neq 0$, pois $\gamma \in \Omega$. $\square$

Analisemos a curva $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, da superfície $\mathfrak{B}$, que é a curva que liga a superfície focal do lado tipo espaço de γ com a superfície focal do lado tipo tempo de γ .

Proposição 2.2.2. (a) Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ uma curva regular com $\gamma(t_0)$ um ponto tipo luz de γ . A curva $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, sobre a superfície $\mathfrak{B}$, tem plano tangente degenerado exceto para $\mu = \frac{-3\langle\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle}{\langle\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\rangle}$, onde o plano tangente não está definido. Ou seja, o conjunto LD de $\mathfrak{B}$ é $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$ com $\mu \neq \frac{-3\langle\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle}{\langle\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\rangle}$.

(b) A curva $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}$, intercepta a curva cuspidal $\mathcal{C}$ quando $\mu = \frac{-3\langle\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle}{\langle\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\rangle}$.

Demonstração. (a) Temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}(t, \mu) &= \gamma'(t) - \mu(\gamma'(t) \wedge \gamma'''(t)) - \lambda'(t)(\gamma'(t) \wedge (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t))) - \lambda(t)(\gamma'(t) \wedge (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)))' \\ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}(t, \mu) &= -(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)), \text{ onde} \end{aligned}$$

$$\lambda'(t) = \frac{2\langle\gamma'(t), \gamma''(t)\rangle\langle\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\rangle - 2\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle\langle\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma'''(t)\rangle}{(\langle\gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\rangle)^2}$$

Então, $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}(t_0, \mu) = 3\gamma'(t_0) - \mu(\gamma'(t_0) \wedge \gamma'''(t_0))$ e $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}(t_0, \mu) = -(\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0))$, e portanto

$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}(t_0, \mu) \wedge \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}(t_0, \mu) = (3\langle\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle + \mu\langle\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\rangle)\gamma'(t_0)$. Como a torção é não nula em t_0 temos que os vetores $\gamma'(t_0)$, $\gamma''(t_0)$ e $\gamma'''(t_0)$ são linearmente independentes e então $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}(t_0, \mu)$ e $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}(t_0, \mu)$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\mu = \frac{-3\langle\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle}{\langle\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\rangle}$.

Além disso, já vimos no Teorema 2.1.4 que a superfície focal referente ao lado tipo espaço da curva é tipo tempo e que a superfície focal referente ao lado tipo tempo da curva é tipo espaço. Assim, o LD está contido em $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$.

Supondo $\mu \neq \frac{-3\langle\gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle}{\langle\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0)\rangle}$, os vetores dos planos tangentes nos pontos da curva $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$ são dados por:

$$v = \lambda_1(3\gamma'(t_0) - \mu(\gamma'(t_0) \wedge \gamma'''(t_0))) - \lambda_2(\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)).$$

Então,

$$\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 \mu^2 \langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0) \wedge \gamma'''(t_0) \rangle + 2\lambda_1 \lambda_2 \mu \langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0) \rangle + \lambda_2^2 \langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0) \rangle.$$

Fazendo $\langle v, v \rangle = 0$ e pensando nesta equação como uma equação do segundo grau em λ_2 , temos $\Delta = 0$. Logo, cada plano tangente possui uma única direção tipo luz, dada por

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\lambda_1, -\lambda_1 \frac{\mu \langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma'''(t_0), \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0) \rangle}{\langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0) \rangle} \right),$$

com $\lambda_1 \neq 0$. Portanto, a métrica induzida nestes planos é degenerada e a curva $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$ é o LD da superfície $\mathfrak{B}$. Observe que o denominador é diferente de zero pois $\gamma \in \Omega$.

(b) A prova deste caso, segue Proposição 2.2.1, pois vimos que f_{v_0} tem singularidade $A_{\geq 3}$ para $v_0 = \mathfrak{B}(t_0, \mu_0)$, onde $\mu_0 = \frac{-3\langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle}{\langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0) \rangle}$, e a curva cuspidal é justamente dada pelos v 's onde f_v tem singularidade $A_{\geq 3}$. $\square$

Provaremos abaixo que a superfície $\mathfrak{B}$ intercepta a curva γ nos pontos tipo luz e estudaremos o comportamento geométrico de $\mathfrak{B}$ na vizinhança destes pontos.

Teorema 2.2.3. *Sejam $\gamma \in \Omega$, com $\gamma(t_0)$ ponto tipo luz e $\mathfrak{B}$ a superfície do conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado. Então,*

- (1) *a superfície $\mathfrak{B}$, intercepta a curva γ localmente apenas no ponto tipo luz $\gamma(t_0)$;*
- (2) *a superfície $\mathfrak{B}$ é regular em uma vizinhança do ponto $\gamma(t_0)$;*
- (3) *a reta tangente à curva nesse ponto tipo luz está contida no plano tangente à superfície $\mathfrak{B}$ em tal ponto, isto é, a única direção tipo luz do plano tangente de $\mathfrak{B}$ em $\gamma(t_0)$ é a direção da reta tangente de γ em $\gamma(t_0)$;*
- (4) *O conjunto LD da superfície $\mathfrak{B}$ é localmente parte de uma reta normal a curva passando por $\gamma(t_0)$ que divide a superfície $\mathfrak{B}$ em duas regiões, uma Riemanniana e a outra Lorentziana.*

Demonstração. (1) Para $\gamma \in \Omega$, podemos resolver a equação (2.2.2) em um ponto tipo luz $\gamma(t_0)$, para obter

$$\lambda(t) = \frac{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle}{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'(t) \wedge \gamma''(t) \rangle}$$

para t perto de t_0 . Então $\lambda(t_0) = 0$ e como a superfície $\mathfrak{B}$ é parametrizada localmente em t_0 por

$$\mathfrak{B}(t, \mu) = \gamma(t) - \mu(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)) - \lambda(t)(\gamma'(t) \wedge (\gamma'(t) \wedge \gamma''(t))),$$

temos que $\mathfrak{B}(t_0, 0) = \gamma(t_0)$. Localmente esta interseção ocorre apenas nos pontos tipo luz devido a Proposição 2.1.2 e Observação 2.1.3.

(2) Pela Proposição 2.2.1, temos que em $\gamma(t_0) = \mathfrak{B}(t_0, 0) = v_0, f_{v_0}$ tem apenas singularidade do tipo A_2 . Assim pela Observação 1.3.1 e Teorema 1.3.2 a superfície $\mathfrak{B}$ neste ponto é localmente difeomorfa a uma superfície regular.

(3) Mostremos agora que a reta tangente à curva em $\gamma(t_0)$ está contida no plano tangente à superfície $\mathfrak{B}$ em $\gamma(t_0)$. Para isto, é suficiente mostrar que $\gamma'(t_0)$ pertence ao plano tangente à superfície em $\gamma(t_0)$, que é gerado por $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}(t_0, 0)$ e $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}(t_0, 0)$. Usando as expressões $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}(t_0, \mu)$ e $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}(t_0, \mu)$ da prova da Proposição 2.2.2 (a), segue que $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}(t_0, 0) = 3\gamma'(t_0)$ e $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \mu}(t_0, 0) = -(\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0))$.

Assim, os vetores do plano tangente à superfície em $\gamma(t_0)$, são dados por:

$$3\lambda_1\gamma'(t_0) - \lambda_2(\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)),$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tomando $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ e $\lambda_2 = 0$, temos que $\gamma'(t_0)$ pertence ao plano tangente à superfície em $\gamma(t_0)$.

(4) Como $\mathfrak{B}(t_0, \mu) = \gamma(t_0) - \mu N(t_0)$, então a reta normal de γ está contida na superfície $\mathfrak{B}$. Pela proposição 2.2.2 (a), o LD é $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$ exceto quando $\mu = \frac{-3\langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle}{\langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0) \rangle} \neq 0$, pois $\gamma \in \Omega$. Sendo assim, próximo de $(t_0, 0)$, ou seja, próximo de $\mathfrak{B}(t_0, 0) = \gamma(t_0)$, a métrica induzida ao longo dessa reta normal é degenerada, para isto basta tomar uma vizinhança de $(t_0, 0)$ que não contenha μ_0 .

□

Figura 2.1: Estrutura métrica da superfície $\mathfrak{B}$ localmente no ponto tipo luz, $\gamma(t_0)$, de γ .

Observe que a curva cuspidal $\mathcal{C}$ intercepta a curva $\mathfrak{B}(t_0, \mu)$ em $\mathfrak{B}(t_0, \mu_0)$ com $\mu_0 = \frac{-3\langle \gamma'(t_0), \gamma''(t_0) \rangle}{\langle \gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0) \rangle} \neq 0$ (Proposição 2.2.2 (b)), ou seja, longe do ponto tipo luz $\gamma(t_0) = \mathfrak{B}(t_0, 0)$. Neste caso a configuração local do conjunto bifurcação em $\mathfrak{B}(t_0, \mu_0) = v_0$ é como na Figura 2.2, se f_{v_0} tem singularidade A_3 em t_0 .

Figura 2.2: Estrutura métrica da superfície $\mathfrak{B}$ localmente no ponto $\mathfrak{B}(t_0, \mu_0)$.

No caso em que f_{v_0} tiver singularidade A_4 em t_0 , para $\mathfrak{B}(t_0, \mu_0) = v_0$, a curva LD intercepta a curva cuspidal no ponto singular de $\mathcal{C}$.

2.3 Conjunto focal de curvas em S_1^2 próximo de pontos tipo luz

Nesta seção, primeiramente, estudamos o conjunto focal no *espaço de Sitter* $S_1^2 \subset \mathbb{R}_1^3$, de curvas tipo espaço ou tipo tempo em S_1^2 , o qual chamamos curva focal esférica. Para ver

o que acontece quando a curva tem pontos tipo luz estudaremos o conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado sobre a curva. Para obtermos os resultados para curvas no espaço de Sitter, temos como motivação as Seções 2.1 e 2.2.

Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ uma curva regular e suave tipo espaço ou tipo tempo em S_1^2 parametrizada pelo comprimento de arco. Para essa curva considere a base ortonormal $\{\gamma(s), t(s) = \gamma'(s), n(s) = \gamma(s) \wedge t(s)\}$ de $\mathbb{R}_1^3$ ao longo de γ . Por argumentos similares, temos as seguintes fórmulas tipo Frenet-Serret:

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = -\varepsilon(\gamma(s)) \gamma(s) + \delta(\gamma(s)) k_g(s) n(s) , \\ n'(s) = -\varepsilon(\gamma(s)) k_g(s) t(s) \end{cases}$$

onde $\varepsilon(\gamma(s)) = \text{sin}(\langle t(s), t(s) \rangle)$, $\delta(\gamma(s)) = \text{sin}(\langle n(s), n(s) \rangle)$ e $k_g(s) = \langle \gamma''(s), n(s) \rangle$ é a curvatura geodésica de γ em s .

Observemos que $\langle n(s), n(s) \rangle = -\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle$ para todo $s \in I$. Assim temos que se γ é tipo tempo então n é tipo espaço e, se γ é tipo espaço então n é tipo tempo.

Considere a família de funções distância ao quadrado, $f : I \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(t, v) = \langle \gamma(t) - v, \gamma(t) - v \rangle.$$

Denotemos por $f_v : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f_v(t) = f(t, v)$, para algum $v \in S_1^2$ fixado.

O conjunto de bifurcação esférico de f é dado por,

$$\mathfrak{Bif}(f) = \{v \in S_1^2 \mid f'_v(t) = f''_v(t) = 0 \text{ em } (t, v) \text{ para algum } t\},$$

ou seja, as direções em S_1^2 onde a singularidade de f_v em t é pelo menos do tipo A_2 . A curva focal esférica de γ , tipo espaço ou tipo tempo, é dada pelo conjunto de bifurcação esférico de f . Além disso, para curvas em $S_1^2 \subset \mathbb{R}_1^3$, a curva focal esférica é a interseção da superfície focal em $\mathbb{R}_1^3$ com o espaço de Sitter S_1^2 . Observe que se $v \in S_1^2$ então $-\frac{1}{2}f_v(t) = \langle \gamma(t), v \rangle - 1$ e as singularidades da função distância ao quadrado e da função altura são as mesmas. Então a evoluta de uma curva, tipo espaço ou tipo tempo, em S_1^2 coincide com a curva focal esférica de γ . Em [16] os autores estudam as evolutas de curvas planas hiperbólicas, tipo espaço, isto é, curvas em $H^2(-1)$. A evoluta obtida em [16] coincide com o conjunto de bifurcação em $H^2(-1)$.

Para uma curva γ tipo espaço ou tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco,

temos que a *curva focal esférica* de γ é dada por

$$\alpha^\pm(s) = \pm \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))}} \gamma(s) \pm \frac{\varepsilon(\gamma(s))}{\sqrt{k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))}} n(s).$$

Observação 2.3.1. Para definir a curva focal esférica, devemos ter $k_g(s)^2 + \delta(\gamma(s)) > 0$.

Então no caso em que γ é tipo espaço temos que ter $k_g(s) < -1$ ou $k_g(s) > 1$ e no caso que γ é tipo tempo não temos restrição alguma e a curva focal esférica está sempre definida. Além disso, como $\alpha^-(s) = -\alpha^+(s)$ vamos trabalhar apenas com $\alpha^+(s)$.

Pela observação acima se $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ é tipo espaço com $-1 \leq k_g(s) \leq 1$, para $s \in I$, então não existe sua curva focal esférica (evoluto em S_1^2). Ou seja, a superfície focal de γ em $\mathbb{R}_1^3$, não intercepta o espaço de Sitter S_1^2 .

Considere $\mathcal{C}$ a curva cuspidal, isto é, o conjunto singular da superfície focal de γ em $\mathbb{R}_1^3$, como na Seção 2.1. Então temos o próximo resultado.

Proposição 2.3.2. Os pontos singulares da curva focal esférica de γ tipo espaço ou tipo tempo, são dados por $S_1^2 \cap \mathcal{C}$.

Demonstração. Observe que f_v tem singularidade $A_{\geq 3}$ em s_0 se, e somente se, $k'_g(s_0) = 0$, equivalentemente, $\alpha^+(s_0)$ (e $\alpha^-(s_0)$) são pontos singulares da curva focal esférica, pois

$$(\alpha^+)'(s) = \frac{\delta(\gamma(s))k'_g(s)}{(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s)))\sqrt{k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))}} \gamma(s) - \frac{\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)k'_g(s)}{(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s)))\sqrt{k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))}} n(s).$$

□

Na próxima proposição estudamos a estrutura métrica da curva focal esférica de uma curva tipo espaço e de uma curva tipo tempo.

Proposição 2.3.3. Fora dos pontos singulares:

- (a) a curva focal esférica de uma curva tipo espaço é tipo tempo;
- (b) a curva focal esférica de uma curva tipo tempo é tipo espaço.

Demonstração. (a) Seja γ uma curva tipo espaço, então $n(s)$ é um vetor tipo tempo. Logo a curva focal esférica é dada por

$$\alpha^+(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - 1}} \gamma(s) + \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - 1}} n(s).$$

Agora

$$(\alpha^+)'(s) = \frac{-k'_g(s)}{(k_g^2(s) - 1)\sqrt{k_g^2(s) - 1}}\gamma(s) - \frac{k_g(s)k'_g(s)}{(k_g^2(s) - 1)\sqrt{k_g^2(s) - 1}}n(s).$$

Nos pontos $s_0 \in I$ onde $k'_g(s_0) = 0$, temos $(\alpha^+)'(s_0) = 0$, ou seja, $\alpha^+(s_0)$ é um ponto singular. Então fora dos pontos singulares de α^+ , ou seja, onde $k'_g(s) \neq 0$ segue que α^+ é uma curva tipo tempo pois

$$\langle (\alpha^+)'(s), (\alpha^+)'(s) \rangle = \frac{-(k'_g)^2(s)}{(k_g^2(s) - 1)^2} < 0.$$

(b) Seja γ uma curva tipo tempo, então $n(s)$ é um vetor tipo espaço. Logo a curva focal esférica é dada por

$$\alpha^+(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + 1}}\gamma(s) - \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) + 1}}n(s).$$

Agora

$$(\alpha^+)'(s) = \frac{k'_g(s)}{(k_g^2(s) + 1)\sqrt{k_g^2(s) + 1}}\gamma(s) + \frac{k_g(s)k'_g(s)}{(k_g^2(s) + 1)\sqrt{k_g^2(s) + 1}}n(s).$$

Nos pontos $s_0 \in I$ onde $k'_g(s_0) = 0$, temos $(\alpha^+)'(s_0) = 0$, ou seja, $\alpha^+(s_0)$ é um ponto singular. Então fora dos pontos singulares de α^+ , ou seja, onde $k'_g(s) \neq 0$ temos que α^+ é uma curva tipo espaço pois

$$\langle (\alpha^+)'(s), (\alpha^+)'(s) \rangle = \frac{(k'_g)^2(s)}{(k_g^2(s) + 1)^2} > 0.$$

□

Queremos saber o que está acontecendo nos pontos tipo luz da curva γ . Para isto, precisamos encontrar a expressão do conjunto de bifurcação, sem considerar γ parametrizada pelo comprimento de arco. O conjunto de bifurcação em S_1^2 contém a curva focal esférica.

Sejam $\gamma(t)$ e $N(t) = \gamma(t) \wedge \gamma'(t)$ os vetores que geram o plano pseudo-normal à $\gamma(t)$ e considere ainda a família de funções distância ao quadrado sobre γ , $f : I \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pela

definição, temos que o conjunto de bifurcação de f é dado por

$$\mathfrak{Bif}(f) = \{\pm\sqrt{1 + \mu^2\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\gamma(t) + \mu N(t) \mid \mu \text{ é solução da equação } (1^\pm)\},$$

$$\text{onde } \mu\langle\gamma(t) \wedge \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle \pm \sqrt{1 + \mu^2\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\langle\gamma(t), \gamma''(t)\rangle = 0 \quad (1^\pm)$$

Observação 2.3.4. *Seja $\gamma \in \Omega$ tal que $\gamma(t_0)$ é um ponto tipo luz. No próximo resultado usaremos que $\langle\gamma(t_0) \wedge \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle \neq 0$. De fato, suponhamos que $\langle\gamma(t_0) \wedge \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle = 0$ então existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $a^2 + b^2 \neq 0$ tal que $\gamma''(t_0) = a\gamma(t_0) + b\gamma'(t_0)$, pois $\gamma(t_0)$ e $\gamma'(t_0)$ são vetores linearmente independentes.*

Suponhamos que $a \neq 0$ e $b = 0$, então $\langle\gamma''(t_0), \gamma(t_0)\rangle = a \neq 0$, que é uma contradição, visto que $\langle\gamma(t), \gamma''(t)\rangle = -\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle$. Agora suponha que $a = 0$ e $b \neq 0$, então $\langle\gamma''(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = b\langle\gamma'(t_0), \gamma'(t_0)\rangle = 0$, que é uma contradição, pois $\gamma \in \Omega$. Por fim se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, chegaremos nas mesmas contradições. Portanto $\langle\gamma(t_0) \wedge \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle \neq 0$.

Resolvendo a equação (1^+) e usando o fato que $\langle\gamma(t), \gamma''(t)\rangle = -\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle$, segue que as soluções são $\mu(t)$ ou $-\mu(t)$ onde

$$\mu(t) = \frac{\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}{\sqrt{\langle\gamma(t) \wedge \gamma'(t), \gamma''(t)\rangle^2 - \langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle^3}}.$$

Observe que na vizinhança de t_0 , o termo dentro da raiz do denominador é maior que zero, pois pela Observação 2.3.4 temos que $\langle\gamma(t_0) \wedge \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle \neq 0$.

Se $\langle\gamma(t_0) \wedge \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle > 0$ então $\mu(t)$ é solução de (1^+) e $-\mu(t)$ é solução de (1^-) . Se $\langle\gamma(t_0) \wedge \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle < 0$ então $-\mu(t)$ é solução de (1^+) e $\mu(t)$ é solução de (1^-) . Portanto, temos que $\alpha^+(t)$ é uma curva suave e podemos reescrever $\alpha^+(t)$ como

$$\sqrt{1 + \mu^2(t)\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\gamma(t) + \mu(t)N(t) \text{ se } \langle\gamma(t_0) \wedge \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle > 0 \quad \text{ou}$$

$$\sqrt{1 + \mu^2(t)\langle\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle}\gamma(t) - \mu(t)N(t) \text{ se } \langle\gamma(t_0) \wedge \gamma'(t_0), \gamma''(t_0)\rangle < 0.$$

O conjunto de bifurcação acima está contido em S_1^2 e o chamamos aqui de curva esférica de γ dada por $\mathfrak{Bif}(f) = \alpha^+ \cup \alpha^-$, onde α^+ e α^- são simétricas. Por esse motivo vamos trabalhar apenas com a α^+ .

Proposição 2.3.5. *A curva esférica α^+ é uma curva suave que intercepta a curva γ nos pontos tipo luz, $\gamma(t_0)$. A curva α^- não intercepta a curva γ , mas tem a mesma geometria de α^+ por simetria. Então é nestes pontos $\alpha^+(t_0) = \gamma(t_0)$ que a curva α^+ tem pontos tipo luz, e para a curva α^- os pontos tipo luz são $\alpha^-(t_0) = -\gamma(t_0)$, que são pontos tipo luz de $-\gamma$.*

Demonstração. Seja $\gamma(t_0)$ um ponto tipo luz de γ . A parametrização da curva esférica α^+ , localmente em t_0 , é dada como acima e a prova da proposição segue diretamente da substituição $t = t_0$ em α^+ . □

Apresentamos agora um exemplo. Seja $\gamma(t) = (t^2 - t, t^2 + t, \sqrt{1 - 4t^3})$ em S_1^2 onde $\gamma(0)$ é um ponto tipo luz. A curva esférica de γ é

$$\begin{aligned} \alpha^+(t) = & \left((t^2 - t) \sqrt{1 + \mu^2(t) \left(\frac{-4t(2 + t^3)}{4t^3 - 1} \right)} - \mu(t) \frac{(-2t^4 + 2t^3 + 2t + 1)}{\sqrt{1 - 4t^3}}, (t^2 + t) \right. \\ & \left. \sqrt{1 + \mu^2(t) \left(\frac{-4t(2 + t^3)}{4t^3 - 1} \right)} - \mu(t) \frac{(-2t^4 - 2t^3 + 2t - 1)}{\sqrt{1 - 4t^3}}, 2\mu(t)t^2 \right. \\ & \left. + \sqrt{1 + \mu^2(t) \left(\frac{-4t(2 + t^3)}{4t^3 - 1} \right)} \sqrt{1 - 4t^3} \right), \end{aligned}$$

e a superfície $\mathfrak{B}$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(t, \mu) = & \left((t^2 - t) - \mu \left(\frac{12t(2t^4 + t - t^3 + 1)}{\sqrt{(1 - 4t^3)^3}} \right) + \lambda(t) \left(\frac{-8t + 136t^4 + 16t^7 - 4 - 40t^3 + 8t^6}{(-1 + 4t^3)^2} \right), \right. \\ & (t^2 + t) - \mu \left(\frac{12t(2t^4 + t + t^3 - 1)}{\sqrt{(1 - 4t^3)^3}} \right) + \lambda(t) \left(\frac{(16t^7 + 136t^4 - 8t^6 + 40t^3 - 8t + 4)}{(-1 + 4t^3)^2} \right), \\ & \left. \sqrt{1 - 4t^3} + 4\mu + \lambda(t) \left(\frac{72t^2}{\sqrt{(1 - 4t^3)^3}} \right) \right), \end{aligned}$$

onde $\mu(t) = \frac{-t(2 + t^3)}{(4t^3 - 1) \sqrt{\frac{-(12t^6 + 8t^9 - 48t^3 + 1)}{(4t^3 - 1)^3}}}$ e $\lambda(t) = \frac{t(-1 + 4t^3)^2(2 + t^3)}{4(12t^6 + 8t^9 - 48t^3 + 1)}$.

Usamos o software Maple para obter a expressão de α^+ , $\mathfrak{B}$ e a figura abaixo.

Figura 2.3: Exemplo de uma curva esférica α^+ (γ é a curva azul, α^+ é a vermelha e $\mathfrak{B}$ é a superfície cinza).

2.4 Conjunto focal de curvas em S_1^3 próximo de pontos tipo luz

Nesta seção, consideramos curvas no *espaço de Sitter* $S_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$ e estudamos o conjunto focal em S_1^3 de curvas tipo espaço e tipo tempo. Para ver o que acontece quando a curva tem pontos tipo luz estudamos o conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado. Para obter os resultados para curvas no espaço de Sitter, temos como motivação as Seções 2.1, 2.2 e 2.3.

Seja então $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva regular e suave em S_1^3 . No caso em que a curva é tipo espaço ou tipo tempo podemos parametrizá-la pelo comprimento de arco s . Assim, para curva tipo espaço tomamos o vetor tangente unitário $t(s) = \gamma'(s)$ de $\gamma(s)$. Suponha que $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 1$, então $\|t'(s) + \gamma(s)\| \neq 0$, e temos um vetor pseudo-normal unitário $n(s) = \frac{t'(s) + \gamma(s)}{\|t'(s) + \gamma(s)\|}$. Definindo um vetor unitário por $e(s) = \gamma(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$, então temos uma base pseudo-ortonormal de $\mathbb{R}_1^4$ dada por $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ em $\gamma(s)$. As fórmulas tipo Frenet-Serret de uma curva tipo espaço em S_1^3 (ver [4]), são dadas por

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = -\gamma(s) + k_g(s) n(s) \\ n'(s) = -\delta(\gamma(s)) k_g(s) t(s) + \tau_g(s) e(s) \\ e'(s) = \tau_g(s) n(s) \end{cases},$$

onde $\delta(\gamma(s)) = \text{senal}(n(s))$, $k_g(s) = \|t'(s) + \gamma(s)\|$ e $\tau_g(s) = \frac{\delta(\gamma(s))}{k_g^2(s)} \det(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))$, sendo $\det$ o determinante da matriz 4×4 . Aqui k_g é chamada curvatura geodésica e τ_g torção geodésica de γ .

Visto que $\langle t'(s) + \gamma(s), t'(s) + \gamma(s) \rangle = \langle t'(s), t'(s) \rangle - 1$, a condição $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 1$ é equivalente à condição $k_g(s) \neq 0$.

Se a curva é tipo tempo, tomamos o vetor tangente unitário $t(s) = \gamma'(s)$ de $\gamma(s)$. Supondo a condição genérica $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 1$, então $\|t'(s) - \gamma(s)\| \neq 0$, e temos outro vetor unitário $n(s) = \frac{t'(s) - \gamma(s)}{\|t'(s) - \gamma(s)\|}$. Também definimos um vetor unitário por $e(s) = \gamma(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$, então temos uma base ortonormal de $\mathbb{R}_1^4$ dada por $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ em $\gamma(s)$. Assim as fórmulas tipo Frenet-Serret de uma curva tipo tempo em S_1^3 , são dadas por

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = \gamma(s) + k_h(s) n(s) \\ n'(s) = k_h(s) t(s) + \tau_h(s) e(s) \\ e'(s) = -\tau_h(s) n(s) \end{cases},$$

onde $k_h(s) = \|t'(s) - \gamma(s)\|$ e $\tau_h(s) = -\frac{1}{k_h^2(s)} \det(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))$. Aqui k_h é chamada curvatura hiperbólica e τ_h torção hiperbólica de γ (ver [15]).

Visto que $\langle t'(s) - \gamma(s), t'(s) - \gamma(s) \rangle = \langle t'(s), t'(s) \rangle - 1$, a condição $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 1$ é equivalente à condição $k_h(s) \neq 0$.

Considere a família de funções distância ao quadrado, $f : I \times S_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sobre γ dada por

$$f(t, v) = \langle \gamma(t) - v, \gamma(t) - v \rangle.$$

Denotemos por $f_v : I \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f_v(t) = f(t, v)$, para algum $v \in S_1^3$ fixado. Observe que se $v \in S_1^3$, então $-\frac{1}{2}f_v(t) = \langle \gamma(t), v \rangle - 1$ e as singularidades da função distância ao quadrado e da função altura são as mesmas.

O conjunto de bifurcação esférico de f é dado por,

$$\mathfrak{Bif}(f) = \{v \in S_1^3 \mid f'_v(t) = f''_v(t) = 0 \text{ em } (t, v) \text{ para algum } t\},$$

ou seja, as direções $v \in S_1^3$ onde a singularidade de f_v em algum t é pelo menos do tipo A_2 .

Como no caso da seção anterior, a superfície focal esférica de γ , tipo espaço ou tipo tempo, coincide com o conjunto de bifurcação esférico de f . Além disso, para curvas em $S_1^3 \subset \mathbb{R}_1^4$ a superfície focal esférica é a interseção da hipersuperfície focal em $\mathbb{R}_1^4$ com o espaço de Sitter S_1^3 .

Para uma curva γ tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g(s) \neq 0$, temos que a *superfície focal esférica* de γ é dada por

$$\mathfrak{B}^\pm(s, \mu) = \mu\gamma(s) + \frac{\mu}{\delta(\gamma(s))k_g(s)}n(s) \pm \frac{\sqrt{-\delta(\gamma(s))k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))\mu^2(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s)))}}{k_g(s)}e(s),$$

com μ satisfazendo $-\delta(\gamma(s))k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))\mu^2(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))) \geq 0$. A *curva cuspidal g-esférica* é dada por $\mathfrak{B}^\pm(s, \mu(s)) = \mathfrak{B}^\pm(s)$, onde

$$\mu(s) = \frac{\pm\tau_g(s)k_g^2(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s)k_g^4(s) - k_g'^2(s)\delta(\gamma(s)) + \tau_g^2(s)k_g^2(s)\delta(\gamma(s))}}.$$

Para uma curva tipo tempo γ parametrizada pelo comprimento de arco com $k_h(s) \neq 0$ a *superfície focal esférica* é dada por

$$\mathfrak{B}^\pm(s, \mu) = \mu\gamma(s) - \frac{\mu}{k_h(s)}n(s) \pm \frac{\sqrt{k_h^2(s) - \mu^2(k_h^2(s) + 1)}}{k_h(s)}e(s),$$

com μ satisfazendo $k_h^2(s) - \mu^2(k_h^2(s) + 1) \geq 0$. A *curva cuspidal h-esférica* é dada por $\mathfrak{B}^\pm(s, \mu(s)) = \mathfrak{B}^\pm(s)$, onde

$$\mu(s) = \frac{\pm\tau_h(s)k_h^2(s)}{\sqrt{\tau_h^2(s)k_h^4(s) + k_h'^2(s) + \tau_h^2(s)k_h^2(s)}}.$$

Observação 2.4.1. A *superfície focal esférica* de uma curva tipo espaço está definida se $-\delta(\gamma(s))k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))\mu^2(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))) \geq 0$. Como $k_g(s) \neq 0$ temos que $n(s)$ é um vetor tipo espaço ou tipo tempo. No caso em que $n(s)$ é tipo espaço a *superfície focal esférica* está definida para

$$\mu \leq -\frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + 1}} \quad \text{ou} \quad \mu \geq \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) + 1}},$$

caso contrário, no caso em que $n(s)$ é tipo tempo, a superfície focal esférica está definida para

$$-\frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - 1}} \leq \mu \leq \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - 1}}.$$

A superfície focal esférica de uma curva tipo tempo está definida se

$$-\frac{k_h(s)}{\sqrt{k_h^2(s) + 1}} \leq \mu \leq \frac{k_h(s)}{\sqrt{k_h^2(s) + 1}}.$$

Além disso, em ambos os casos $\mathfrak{B}^+(s, \mu)$ e $\mathfrak{B}^-(s, \mu)$ são simétricas então vamos estudar apenas $\mathfrak{B}^+(s, \mu)$.

Provamos nos próximos resultados que o plano tangente da superfície focal de uma curva tipo espaço (resp. tipo tempo) não está definido nos pontos da curva cuspidal g -esférica (resp. da curva cuspidal h -esférica). Além disso, fora destas curvas, analisamos a estrutura métrica da superfície focal esférica em cada caso.

Mostraremos a seguir, que fora da curva cuspidal g -esférica,

$$\mu(s) \neq \frac{\pm \tau_g(s) k_g^2(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s) k_g^4(s) - k_g'^2(s) \delta(\gamma(s)) + \tau_g^2(s) k_g^2(s) \delta(\gamma(s))}},$$

e fora da curva cuspidal h -esférica, $\mu(s) \neq \frac{\pm \tau_h(s) k_h^2(s)}{\sqrt{\tau_h^2(s) k_h^4(s) + k_h'^2(s) + \tau_h^2(s) k_h^2(s) \delta(\gamma(s))}}$, $v = \lambda_1 \mathfrak{B}_s^+ + \lambda_2 \mathfrak{B}_\mu^+$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, são vetores do plano tangente da superfície focal esférica em $\mathfrak{B}^+(s, \mu)$ onde $\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 \langle \mathfrak{B}_s^+, \mathfrak{B}_s^+ \rangle + 2\lambda_1 \lambda_2 \langle \mathfrak{B}_s^+, \mathfrak{B}_\mu^+ \rangle + \lambda_2^2 \langle \mathfrak{B}_\mu^+, \mathfrak{B}_\mu^+ \rangle$, usando a respectiva parametrização de $\mathfrak{B}(s, \mu)$ para γ tipo espaço ou tipo tempo.

Proposição 2.4.2. *Seja γ uma curva tipo espaço.*

(a) *O plano tangente da superfície focal esférica de γ não está definido somente na curva cuspidal g -esférica.*

(b) *Fora da curva cuspidal g -esférica, a superfície focal esférica de γ é tipo tempo.*

Demonstração. (a) Considerando uma curva tipo espaço, o plano tangente nos pontos da superfície focal esférica é gerado pelos vetores

$$\mathfrak{B}_s^+(s, \mu) = \left(\frac{-\mu k'_g(s) + \delta(\gamma(s))\tau_g(s)k_g(s)\sqrt{-\delta(\gamma(s))k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))\mu^2(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s)))}}{\delta k_g^2(s)} \right) n(s) \\ + \left(\frac{\mu\tau_g(s)k_g(s)\sqrt{-\delta(\gamma(s))k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))\mu^2(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s)))} - \delta(\gamma(s))\mu^2 k'_g(s)}{\delta(\gamma(s))k_g^2(s)\sqrt{-\delta(\gamma(s))k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))\mu^2(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s)))}} \right) e(s)$$

e

$$\mathfrak{B}_\mu^+(s, \mu) = \gamma(s) + \frac{1}{\delta(\gamma(s))k_g(s)} n(s) + \left(\frac{\delta(\gamma(s))\mu(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s)))}{k_g(s)\sqrt{-\delta(\gamma(s))k_g^2(s) + \delta(\gamma(s))\mu^2(k_g^2(s) + \delta(\gamma(s)))}} \right) e(s).$$

Os vetores $\{\mathfrak{B}_s^+, \mathfrak{B}_\mu^+\}$ são linearmente dependentes se, e somente se,

$$\mu(s) = \frac{\pm \tau_g(s)k_g^2(s)}{\sqrt{\tau_g^2(s)k_g^4(s) - k_g'^2(s)\delta(\gamma(s)) + \tau_g^2(s)k_g^2(s)\delta(\gamma(s))}}$$

que é justamente onde f_v tem singularidades do tipo $A_{\geq 3}$, que é a curva cuspidal g -esférica.

(b) Seja γ uma curva tipo espaço. Vamos supor que $n(s)$ é tipo espaço e $e(s)$ é tipo tempo, logo para os vetores do plano tangente da superfície focal esférica, $v = \lambda_1 \mathfrak{B}_s^+ + \lambda_2 \mathfrak{B}_\mu^+$, temos

$$\langle v, v \rangle = \lambda_1^2 \left(\frac{\left(-\mu k'_g + \tau_g k_g \sqrt{-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1)} \right)^2}{k_g^4} - \frac{\left(\mu \tau_g k_g \sqrt{-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1)} - \mu^2 k'_g \right)^2}{k_g^4(-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1))} \right) \\ + 2\lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{-\mu k'_g + \tau_g k_g \sqrt{-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1)}}{k_g^3} - \frac{\left(\mu \tau_g k_g \sqrt{-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1)} - \mu^2 k'_g \right) \mu (k_g^2 + 1)}{k_g^3(-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1))} \right) \\ + \lambda_2^2 \left(1 + \frac{1}{k_g^2} - \frac{(\mu^2(k_g^2 + 1))^2}{k_g^2(-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1))} \right).$$

Fazendo $\langle v, v \rangle = 0$, podemos pensar na equação acima como uma equação do segundo grau, logo

$$\Delta = 4\lambda_2^2 \frac{(\tau_g k_g \sqrt{-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1)} - \mu k'_g)^2}{k_g^2(-k_g^2 + \mu^2(k_g^2 + 1))}.$$

O plano tangente gerado por $\mathfrak{B}_s^+$ e $\mathfrak{B}_\mu^+$ será tipo luz se $\Delta = 0$. Como estamos supondo $\tau_g(s)k_g(s)\sqrt{-k_g^2(s) + \mu^2(k_g^2(s) + 1)} - \mu k'_g(s) \neq 0$ que é equivalente à condição para $\mathfrak{B}_s^+$ e $\mathfrak{B}_\mu^+$ serem linearmente independentes, então temos $\Delta = 0$ se, e somente se, $\lambda_2 = 0$, ou seja, se $\mathfrak{B}_s^+$ é tipo luz. Como somente $\mathfrak{B}_s^+(s, \pm 1)$ são vetores tipo luz e como $\mathfrak{B}_\mu^+(s, \pm 1)$ são vetores tipo tempo, então o plano tangente é tipo tempo nestes pontos. Portanto temos $\Delta > 0$ para os outros pontos e assim a superfície focal esférica é tipo tempo. $\square$

Proposição 2.4.3. *Seja γ uma curva tipo tempo.*

- (a) *O plano tangente da superfície focal esférica de γ não está definido somente na curva cuspidal h -esférica.*
- (b) *Fora da curva cuspidal h -esférica, a superfície focal esférica de γ é tipo espaço.*

Demonstração. (a) Considerando uma curva tipo tempo, o plano tangente nos pontos da superfície focal esférica, é gerado pelos vetores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{B}^+}{\partial s}(s, \mu) = \mathfrak{B}_s^+ &= \left(\frac{\mu k'_h(s) - \tau_h(s)k_h(s)\sqrt{k_h^2(s) - \mu^2(k_h^2(s) + 1)}}{k_h^2(s)} \right) n(s) \\ &+ \left(\frac{-\mu\tau_h(s)k_h(s)\sqrt{k_h^2(s) - \mu^2(k_h^2(s) + 1)} + \mu^2 k'_h(s)}{k_h^2(s)\sqrt{k_h^2(s) - \mu^2(k_h^2(s) + 1)}} \right) e(s) \quad e \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{B}^+}{\partial \mu}(s, \mu) = \mathfrak{B}_\mu^+ = \gamma(s) - \frac{1}{k_h(s)}n(s) - \left(\frac{\mu(k_h^2(s) + 1)}{k_h(s)\sqrt{k_h^2(s) - \mu^2(k_h^2(s) + 1)}} \right) e(s).$$

Observe que os vetores $\{\mathfrak{B}_s^+, \mathfrak{B}_\mu^+\}$ são linearmente dependentes se, e somente se,

$$\mu k'_h(s) - \tau_h(s)k_h(s)\sqrt{k_h^2(s) - \mu^2(k_h^2(s) + 1)} = 0,$$

ou seja,

$$\mu(s) = \frac{\pm \tau_h(s)k_h^2(s)}{\sqrt{\tau_h^2(s)k_h^4(s) + k_h'^2(s) + \tau_h^2(s)k_h^2(s)}}$$

que é justamente onde f_v tem singularidades do tipo $A_{\geq 3}$, que é a curva cuspidal h -esférica.

(b) Seja γ uma curva tipo tempo, então $n(s)$ e $e(s)$ são tipo espaço, logo para os vetores do plano tangente da superfície focal esférica, $v = \lambda_1 \mathfrak{B}_s^+ + \lambda_2 \mathfrak{B}_\mu^+$, temos

$$\begin{aligned}
\langle v, v \rangle = & \lambda_1^2 \left(\frac{\left(\mu k'_h - \tau_h k_h \sqrt{k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1)} \right)^2}{k_h^4} + \frac{\left(-\mu \tau_h k_h \sqrt{k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1)} + \mu^2 k'_h \right)^2}{k_h^4 (k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1))} \right) \\
& + 2\lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{-\mu k'_h + \tau_h k_h \sqrt{k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1)}}{k_h^3} + \frac{\left(\mu \tau_h k_h \sqrt{k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1)} - \mu^2 k'_h \right) \mu (k_h^2 + 1)}{k_h^3 (k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1))} \right) \\
& + \lambda_2^2 \left(1 + \frac{1}{k_h^2} + \frac{(\mu^2(k_h^2 + 1)^2)}{k_h^2 (k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1))} \right).
\end{aligned}$$

Fazendo $\langle v, v \rangle = 0$, podemos pensar na equação acima como uma equação do segundo grau em λ_1 , logo

$$\Delta = -4\lambda_2^2 \frac{(-\tau_h k_h \sqrt{k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1)} + \mu k'_h)^2}{k_h^2 (k_h^2 - \mu^2(k_h^2 + 1))}$$

Então para que o plano tangente gerado por $\mathfrak{B}_s^+$ e $\mathfrak{B}_\mu^+$ seja tipo luz temos que ter $\Delta = 0$. Como estamos supondo $-\tau_h(s)k_h(s)\sqrt{k_h^2(s) - \mu^2(k_h^2(s) + 1)} + \mu k'_h(s) \neq 0$, para $\mathfrak{B}_s^+$ e $\mathfrak{B}_\mu^+$ serem linearmente independentes, temos $\Delta = 0$ se, e somente se, $\lambda_2 = 0$, ou seja $\mathfrak{B}_s^+$ é tipo luz. Porém, analisando $\mathfrak{B}_s^+$ mostramos que ele é um vetor tipo luz apenas quando $\mu = \pm 1$ mas para $\mu = \pm 1$ a superfície focal esférica não está definida. Portanto $\lambda_2 = 0$ não é direção tipo luz e $\Delta < 0$ em todos os pontos da superfície. Logo a superfície focal esférica é tipo espaço. □

Nosso objetivo agora é encontrar a expressão do conjunto de bifurcação da família de funções distância ao quadrado, em S_1^3 , próximo de um ponto tipo luz de γ , para descobrir qual o local de transição da região Riemanniana para a região Lorentziana desta superfície. Chamaremos este conjunto de bifurcação de superfície esférica, e denotamos por $\mathfrak{B}^\pm$. Para isso, considere a curva γ não parametrizada pelo comprimento de arco e um vetor $N(t)$ tal que $\gamma(t)$, $N(t)$ e $E(t) = \gamma(t) \wedge \gamma'(t) \wedge N(t)$ sejam vetores que geram o hiperplano pseudo-normal à $\gamma(t)$. Por definição, temos que a superfície esférica é dada por

$$\mathfrak{B}^\pm(t, \mu) = \mu \gamma(t) + \beta(t, \mu) N(t) + \lambda(t, \mu) E(t),$$

com β e λ satisfazendo as equações abaixo:

$$\lambda(t, \mu) = \frac{\mu \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle - \beta(t, \mu) \langle \gamma''(t), N(t) \rangle}{\langle \gamma''(t), E(t) \rangle},$$

$\beta(t, \mu)$ é igual a

$$\left(\frac{\mu \langle \gamma', \gamma' \rangle \langle \gamma'', N \rangle \langle E, E \rangle \pm \sqrt{\langle \gamma'', N \rangle^2 \langle E, E \rangle \langle \gamma'', E \rangle^2 (1 - \mu^2) + \langle N, N \rangle \langle \gamma'', E \rangle^4 (1 - \mu^2) - \langle N, N \rangle \langle \gamma'', E \rangle^2 \langle \gamma', \gamma' \rangle^2 \langle E, E \rangle \mu^2}}{\langle \gamma'', E \rangle^2 \langle N, N \rangle^2 + \langle E, E \rangle \langle \gamma'', N \rangle^2} \right) (t)$$

onde μ é real tal que a raiz de β esteja definida.

Observação 2.4.4. A superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ está bem definida próximo ao ponto tipo luz $\gamma(t_0)$. De fato, $R(t, \mu) = A(t)\mu^2 + B(t)$ é o termo dentro da raiz quadrada de β acima, onde

$$A(t) = (-\langle \gamma'', N \rangle^2 \langle E, E \rangle \langle \gamma'', E \rangle^2 - \langle N, N \rangle \langle \gamma'', E \rangle^4 - \langle N, N \rangle \langle \gamma'', E \rangle^2 \langle \gamma', \gamma' \rangle^2 \langle E, E \rangle)(t)$$

e $B(t) = (\langle \gamma'', E \rangle^2 \langle \gamma'', N \rangle^2 \langle E, E \rangle + \langle N, N \rangle \langle \gamma'', E \rangle^4)(t).$

Então para que a superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ esteja definida, devemos ter $R(t, \mu) \geq 0$. Fazendo os cálculos no ponto tipo luz temos $A(t_0) < 0$ e $B(t_0) > 0$ (iguais em módulo) e neste caso a superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ está definida quando $R(t_0, \mu) = A(t_0)\mu^2 + B(t_0) \geq 0$, ou seja, $-1 \leq \mu \leq 1$. Assim, por continuidade, existe uma vizinhança próxima de (t_0, μ) tal que $R(t, \mu) \geq 0$.

Proposição 2.4.5. A superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ intercepta a curva γ nos pontos tipo luz de γ e além disso, os planos tangentes à superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ não estão definidos nestes pontos.

Demonstração. Seja $\gamma(t_0)$ um ponto tipo luz de γ . Analisando a expressão da superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ temos que $\mathfrak{B}^\pm(t_0, 1) = \gamma(t_0)$, pois $\beta(t_0, 1) = 0$ e $\lambda(t_0, 1) = 0$. Visto que $R(t_0, 1) = 0$, então o plano tangente à superfície focal esférica em $\mathfrak{B}^\pm(t_0, 1)$ não está definido. $\square$

Observamos que $\mathfrak{B}^+(t_0, -1) = \mathfrak{B}^-(t_0, -1) = -\gamma(t_0)$ e que conjunto bifurcação de γ e $-\gamma$ são os mesmos. Ou seja, esses seriam os pontos tipo luz se considerássemos a curva $-\gamma$. Além disso, $R(t_0, -1) = 0$, então os planos tangentes à superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ também não estão definidos nestes pontos. Então, temos o próximo resultado.

Proposição 2.4.6. *O conjunto LD da superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ é a união das curvas $\mathfrak{B}^\pm(t_0, \mu)$, $-1 < \mu < 1$.*

Demonstração. O plano tangente em $\mathfrak{B}^\pm(t_0, \mu)$ existe para $-1 < \mu < 1$. Pelas Proposições 2.4.2 e 2.4.3, a estrutura métrica da superfície esférica $\mathfrak{B}^\pm$ é dada por uma parte tipo espaço e uma parte tipo tempo separadas pelas curvas $\mathfrak{B}^\pm(t_0, \mu)$, $-1 < \mu < 1$. Portanto, os planos tangentes à superfície nestes pontos destas curvas possuem métrica degenerada.

□

Dos resultados anteriores, temos que a superfície esférica intercepta a curva no ponto tipo luz $\gamma(t_0)$ que está na fronteira do conjunto LD da superfície.

Imagens normal Darboux pseudo-esféricas de curvas sobre uma superfície tipo tempo em $\mathbb{R}_1^3$

Neste capítulo, vamos estudar curvas sobre uma superfície tipo tempo M de $\mathbb{R}_1^3$. Curvas sobre superfície tipo espaço em $\mathbb{R}_1^3$ foram estudadas por Sato em [27]. Além disso, Sato definiu curvas nas pseudo-esferas S_1^2 e $H_+^2(-1)$ e as chamou de evolutas pseudo-esféricas. Em [6], os autores estudaram imagens Darboux esféricas de curvas sobre superfícies em $\mathbb{R}^3$, em especial as imagens normal Darboux esféricas. Nosso estudo é mais próximo do estudo feito em [27], onde seguimos as mesmas notações, contudo adotamos aqui a denominação usada em [6]. Na primeira parte deste capítulo, analogamente ao artigo [27], usando a família de funções altura tipo espaço e tipo tempo, definimos alguns invariantes para cada caso, e investigamos a relação desses invariantes com fatos geométricos que envolvem as curvas, suas imagens normal Darboux em S_1^2 ou $H^2(-1)$ e a superfície tipo tempo M . Além disso, vimos, por exemplo, que quando tomamos $M = S_1^2$ a imagem normal Darboux de Sitter definida neste capítulo coincide justamente com a curva focal esférica estudada no Capítulo 2, que são as evolutas de Sitter. Também para curvas tipo espaço $\gamma : I \rightarrow S_1^2$, investigamos a relação da imagem normal Darboux de Sitter e imagem normal Darboux hiperbólica com a superfície tipo luz ao longo de γ .

3.1 Curvas sobre uma superfície tipo tempo

Consideremos um mergulho tipo tempo $X : U \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ de um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Escrevemos $M = X(U)$ e identificamos M e U através do mergulho X . Dizemos que X é um *mergulho tipo tempo* se o espaço tangente $T_p M$ é um plano tipo tempo para todo $p = X(u)$. Seja $\bar{\gamma} : I \rightarrow U$ uma curva regular e assim temos uma curva $\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^3$ definida por $\gamma(s) = X(\bar{\gamma}(s))$. Dizemos que γ é uma curva sobre a superfície tipo tempo M .

Observe que a curva γ pode ser tipo espaço, tipo tempo ou ainda ter pontos tipo luz. No caso em que γ é tipo espaço ou tipo tempo podemos reparametrizá-la pelo comprimento de arco s . Então, temos o vetor tangente unitário $t(s) = \gamma'(s)$ de $\gamma(s)$. Visto que X é um mergulho tipo tempo, temos um campo de vetores normais tipo espaço unitário ao longo de $M = X(U)$ definido por

$$N(p) = \frac{X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)}{\|X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u)\|},$$

para $p = X(u)$. Definimos $n_\gamma(s) = N \circ \gamma(s)$, para que tenhamos um campo de vetores normais unitários tipo espaço n_γ ao longo de γ . Portanto, podemos construir os vetores binormais $b(s)$ dados por $b(s) = n_\gamma(s) \wedge t(s)$. Dizemos que um vetor v é *direção futura* se $\langle v, e_1 \rangle < 0$, onde e_1 é o primeiro vetor da base canônica de $\mathbb{R}^3$. Escolhemos a orientação de M tal que b (resp. t) é direção futura quando γ é tipo espaço (resp. tipo tempo). Temos também que $\langle t(s), t(s) \rangle = \varepsilon(\gamma(s))$, $\langle n_\gamma(s), n_\gamma(s) \rangle = 1$, $\langle n_\gamma(s), b(s) \rangle = 0$ e $\langle b(s), b(s) \rangle = -\varepsilon(\gamma(s))$, onde $\varepsilon(\gamma(s)) = \text{senal}(t(s))$, que é 1 se γ é tipo espaço ou -1 se γ é tipo tempo. Então temos as bases pseudo-ortonormais $\{b(s), n_\gamma(s), t(s)\}$ se γ é tipo espaço e $\{t(s), b(s), n_\gamma(s)\}$ se γ é tipo tempo, ambas orientadas positivamente, as quais são chamadas de frames Lorentzian Darboux ao longo de γ . Neste caso, temos as seguintes fórmulas tipo Frenet-Serret para γ tipo espaço ou tipo tempo:

$$\begin{cases} b'(s) = \tau_g(s) n_\gamma(s) - \varepsilon(\gamma(s)) k_g(s) t(s) \\ n'_\gamma(s) = \varepsilon(\gamma(s)) \tau_g(s) b(s) - \varepsilon(\gamma(s)) k_n(s) t(s), \\ t'(s) = -\varepsilon(\gamma(s)) k_g(s) b(s) + k_n(s) n_\gamma(s) \end{cases}$$

onde $k_n(s) = \langle n_\gamma(s), t'(s) \rangle$, $k_g(s) = \langle b(s), t'(s) \rangle$, $\tau_g(s) = \langle n_\gamma(s), b'(s) \rangle$ e $\varepsilon(\gamma(s)) = \text{senal}(t(s))$.

Observe que $t'(s) = 0$ significa que $k_n(s) = 0$ e $k_g(s) = 0$. Então precisaremos supor

$t'(s) \neq 0$ para definir, por exemplo, as imagens normal Darboux pseudo-esféricas.

3.2 Família de funções altura

Nesta seção, introduzimos duas famílias de funções altura sobre uma curva γ na superfície tipo tempo M : a família de funções altura tipo espaço e a família de funções altura tipo tempo. Além disso, definimos as imagens normal Darboux pseudo-esféricas de γ .

Seja $\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^3$, onde M é uma superfície tipo tempo. Definimos a família de funções altura sobre a curva como:

$$H^S : I \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (s, v) \mapsto \langle \gamma(s), v \rangle.$$

Chamamos H^S de família de funções altura tipo espaço de γ sobre M . Denotamos $h_v^S(s) = H^S(s, v)$ para algum v fixado em S_1^2 . A família de funções altura tipo espaço H^S mede o contato de γ com planos tipo tempo em $\mathbb{R}_1^3$. Genericamente, este contato pode ser A_k , $1 \leq k \leq 3$.

As condições que caracterizam as singularidades A_k , $1 \leq k \leq 3$ podem ser obtidas da próxima proposição.

Observe que pela demonstração de (2) na proposição abaixo, para os pontos da curva onde $k_g^2(s) \leq \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)$ a função altura h_v^S não tem singularidade $A_{\geq 2}$ em s . Então, se γ for uma curva onde vale essa desigualdade, para qualquer $s \in I$, o conjunto de bifurcação de H^S sobre γ não está definido.

Lembremos que $t'(s) \neq 0$ significa $k_n(s) \neq 0$ ou $k_g(s) \neq 0$.

Proposição 3.2.1. *Sejam $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva tipo espaço ou tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco e M uma superfície tipo tempo em $\mathbb{R}_1^3$, tal que $t'(s) \neq 0$. Suponha que para γ tipo espaço exista um subintervalo de I onde $k_g^2(s) > k_n^2(s)$. Para qualquer $(s, v) \in I \times S_1^2$, temos o seguinte:*

- (1) $(h_v^S)'(s) = 0$ se, e somente se, $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$, onde $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = 1$.

(2) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} \left(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s) \right).$$

(3) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = (h_v^S)'''(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} \left(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s) \right),$$

$$\sigma_D(s) = 0, \text{ onde } \sigma_D(s) = (k'_g k_n + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_g k'_n - k_n^2 \tau_g)(s).$$

(4) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = (h_v^S)'''(s) = (h_v^S)^{(4)}(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} \left(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s) \right),$$

$$\sigma_D(s) = 0 \text{ e } (\sigma_D)'(s) = 0.$$

Demonstração. (1) Consideremos as fórmulas tipo Frenet-Serret para γ tipo espaço ou tipo tempo. Então,

$$(h_v^S)'(s) = \langle \gamma'(s), v \rangle = \langle t(s), v \rangle = 0,$$

isto é, existem $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$, e como $v \in S_1^2$, temos que $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = 1$.

(2) $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = 0$ se, e somente se, $\langle t'(s), \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s) \rangle = 0$ com $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = 1$, logo $k_g(s)\mu + k_n(s)\lambda = 0$ com $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = 1$. Isto significa que $\mu^2(k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)) = k_n^2(s)$. Portanto, $k_g^2(s) > \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)$ e temos

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} \left(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s) \right).$$

Para (3) temos que $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = (h_v^S)'''(s) = 0$ se acrescentarmos a condição $(k'_g k_n + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_g k'_n - k_n^2 \tau_g)(s) = 0$. Então definimos $\sigma_D(s) = (k'_g k_n + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_g k'_n - k_n^2 \tau_g)(s)$.

Para (4) temos que $(h_v^S)'(s) = (h_v^S)''(s) = (h_v^S)'''(s) = (h_v^S)^{(4)}(s) = 0$ se acrescen-

tamos $\sigma'_D(s) = 0$, onde $\sigma'_D(s) = (k_g''k_n + 2\varepsilon k_g k_g' \tau_g + \varepsilon k_g^2 \tau_g' - k_g k_n'' - 2k_n k_n' \tau_g - k_n^2 \tau_g')(s)$.

□

A proposição acima nos permite definir um invariante σ_D . Motivado pelos cálculos acima, definimos uma curva $d_\gamma : I \rightarrow S_1^2$ por

$$d_\gamma(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} n_\gamma(s) - \frac{k_n(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} b(s).$$

Chamamos d_γ de *imagem normal Darboux de Sitter* de γ .

Lema 3.2.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva tipo espaço ou tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco e suponha $t'(s) \neq 0$. Então $d'_\gamma(s) = 0$ se, e somente se, $\sigma_D(s) = 0$, ou seja, a imagem normal Darboux de Sitter de γ é constante se, e somente se, $\sigma_D(s) = 0$, para qualquer $s \in I$.*

Demonstração. Temos que

$$d'_\gamma(s) = \left(\left(\frac{-k_n' k_g + k_n k_g' + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_n^2 \tau_g}{(k_g^2 - \varepsilon k_n^2) \sqrt{k_g^2 - \varepsilon k_n^2}} \right) (k_g b - \varepsilon k_n n_\gamma) \right)(s).$$

Como $t'(s) \neq 0$, então

$$d'_\gamma(s) = 0 \text{ se, e somente se, } \sigma_D(s) = (-k_n' k_g + k_n k_g' + \varepsilon k_g^2 \tau_g - k_n^2 \tau_g)(s) = 0.$$

□

Também definimos a família de funções altura sobre uma curva γ na superfície tipo tempo M como segue:

$$H^T : I \times H^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}; \quad (s, v) \mapsto \langle \gamma(s), v \rangle.$$

Chamamos H^T de família de funções altura tipo tempo de γ sobre M . Denotamos $h_v^T(s) = H^T(s, v)$ para algum v fixado em $H^2(-1)$. A família de funções altura tipo tempo H^T mede o contato de γ com planos tipo espaço em $\mathbb{R}_1^3$. Genericamente, este contato pode ser A_k , $1 \leq k \leq 3$ e as condições que caracterizam as singularidades A_k , $1 \leq k \leq 3$ podem ser obtidas da próxima proposição.

O conjunto de bifurcação de H^T é

$$\mathfrak{Bif}(H^T) = \left\{ v \in H^2(-1) \mid \frac{\partial H^T}{\partial s}(s, v) = \frac{\partial^2 H^T}{\partial s^2}(s, v) = 0 \text{ em } (s, v) \text{ para algum } s \right\}$$

Para todo $(s, v) \in I \times H^2(-1)$, temos que $(h_v^T)'(s) = 0$ se, e somente se, $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$, onde $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $-\varepsilon(\gamma(s))\mu^2 + \lambda^2 = -1$. Então é importante fazer a seguinte observação.

Observação 3.2.3. *No caso em que γ é uma curva tipo tempo, ou seja, $\varepsilon(\gamma(s)) = -1$, não existe $v \in H^2(-1)$ tal que $(h_v^T)'(s) = 0$ para algum $s \in I$. Assim, temos que o conjunto de bifurcação de H^T , $\mathfrak{Bif}(H^T)$, para uma curva tipo tempo é vazio. Então para o estudo do conjunto de bifurcação de H^T consideramos apenas curvas tipo espaço sobre a superfície tipo tempo M .*

Observe que pela demonstração de (2) na proposição abaixo, para os pontos da curva onde $k_n^2(s) \leq k_g^2(s)$ a função altura h_v^T não tem singularidade $A_{\geq 2}$ em s . Então, se γ for uma curva tipo espaço onde vale essa desigualdade, para qualquer $s \in I$, o conjunto de bifurcação de H^T sobre γ não está definido. Temos a seguinte proposição.

Proposição 3.2.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco e M uma superfície tipo tempo em $\mathbb{R}_1^3$, tal que existe um subintervalo de I onde $k_n^2(s) > k_g^2(s)$. Suponha que $t'(s) \neq 0$. Para qualquer $(s, v) \in I \times H^2(-1)$, temos o seguinte:*

$$(1) \quad (h_v^T)'(s) = 0 \text{ se, e somente se, } v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s), \text{ onde } \mu, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } -\mu^2 + \lambda^2 = -1.$$

$$(2) \quad (h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = 0 \text{ se, e somente se,}$$

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} \left(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s) \right).$$

$$(3) \quad (h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = (h_v^T)'''(s) = 0 \text{ se, e somente se,}$$

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} \left(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s) \right)$$

e $\sigma_H(s) = 0$, onde $\sigma_H(s) = (k_g k'_n + k_n^2 \tau_g - k'_g k_n - k_g^2 \tau_g)(s)$.

(4) $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = (h_v^T)'''(s) = (h_v^T)^{(4)}(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} \left(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s) \right),$$

$\sigma_H(s) = 0$ e $(\sigma_H)'(s) = 0$.

Demonstração. (1) Consideremos as fórmulas tipo Frenet-Serret no caso em que γ é tipo espaço. Então,

$$(h_v^T)'(s) = \langle \gamma'(s), v \rangle = \langle t(s), v \rangle = 0,$$

isto é, existem $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s)$, e como $v \in H^2(-1)$, temos que $-\mu^2 + \lambda^2 = -1$.

(2) $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = 0$ se, e somente se, $\langle t'(s), \mu b(s) + \lambda n_\gamma(s) \rangle = 0$ com $-\mu^2 + \lambda^2 = -1$, que é equivalente à $k_g(s)\mu + k_n(s)\lambda = 0$ com $-\mu^2 + \lambda^2 = -1$, logo $\mu^2(k_n^2(s) - k_g^2(s)) = k_n^2(s)$. Portanto, $k_n^2(s) > k_g^2(s)$ e temos

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} \left(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s) \right).$$

Para (3) temos que $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = (h_v^T)'''(s) = 0$ se acrescentarmos a condição $(k_g k'_n + k_n^2 \tau_g - k'_g k_n - k_g^2 \tau_g)(s) = 0$. Então definimos $\sigma_H(s) = (k_g k'_n + k_n^2 \tau_g - k'_g k_n - k_g^2 \tau_g)(s)$.

Para (4) temos que $(h_v^T)'(s) = (h_v^T)''(s) = (h_v^T)'''(s) = (h_v^T)^{(4)}(s) = 0$ se acrescentarmos $\sigma'_H(s) = 0$, onde $\sigma'_H(s) = (k_g k''_n - k''_g k_n + 2k_n k'_n \tau_g + k_n^2 \tau'_g - 2k_g k'_g \tau_g - k_g^2 \tau'_g)(s)$.

□

Similarmente à Proposição 3.2.1, a proposição acima induz um invariante σ_H e motivados pelos cálculos acima definimos uma curva $h_\gamma : I \rightarrow H^2(-1)$ por

$$h_\gamma(s) = -\frac{k_g(s)}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} n_\gamma(s) + \frac{k_n(s)}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} b(s).$$

Chamamos h_γ de *imagem normal Darboux hiperbólica* de γ .

Observemos que a imagem normal Darboux hiperbólica h_γ pode ter partes em $H_+^2(-1)$ ou em $H_-^2(-1)$. Se h_γ tiver contida em $H_-^2(-1)$ podemos considerar $-h_\gamma$ ao invés de h_γ e desenvolver o estudo análogo. Consequentemente consideramos apenas o caso quando h_γ está em $H_+^2(-1)$. Se necessário diminuiremos o intervalo I para termos $h_\gamma(I)$ em $H_+^2(-1)$ localmente próximo da região de interesse.

No que foi exposto acima, se γ é tipo espaço para os pontos onde $k_g^2(s) - k_n^2(s) > 0$ temos que a imagem normal Darboux de Sitter está definida, ou seja, a superfície focal (Seção 2.1) intercepta S_1^2 ; se $k_g^2(s) - k_n^2(s) < 0$ temos que a imagem normal Darboux hiperbólica está definida, ou seja, a superfície focal intercepta $H^2(-1)$. Se γ é tipo tempo, temos que $k_g^2(s) + k_n^2(s) > 0$ sempre, pois $t'(s) \neq 0$, ou seja, $k_g(s) \neq 0$ ou $k_n(s) \neq 0$ e então somente a imagem normal Darboux de Sitter está definida e a superfície focal intercepta apenas S_1^2 .

Temos um resultado análogo ao Lemma 3.2.2.

Lema 3.2.5. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco e suponha $t'(s) \neq 0$. Então $h'_\gamma(s) = 0$ se, e somente se, $\sigma_H(s) = 0$, ou seja, a imagem normal Darboux hiperbólica de γ é constante se, e somente se, $\sigma_H(s) = 0$, para qualquer $s \in I$.*

Demonstração. Temos que

$$h'_\gamma(s) = \left(\left(\frac{-k_n k'_g + k'_n k_g - k_g^2 \tau_g + k_n^2 \tau_g}{(k_n^2 - k_g^2) \sqrt{k_n^2 - k_g^2}} \right) (k_n n_\gamma - k_g b) \right)(s).$$

Como $t'(s) \neq 0$, então

$$h'_\gamma(s) = 0 \text{ se, e somente se, } \sigma_H(s) = (k'_n k_g - k_n k'_g - k_g^2 \tau_g + k_n^2 \tau_g)(s) = 0.$$

□

Também chamamos d_γ e h_γ de *imagens normal Darboux pseudo-esféricas* de γ . Pelo Lemma 3.2.2, a imagem normal Darboux $d_\gamma(s) = v_0$ é constante se, e somente se, $\sigma_D \equiv 0$. Neste caso, pela Proposição 3.2.1 (2), $h_{v_0}^S$ é constante, isto é, existe um número real $c \in \mathbb{R}$ tal que $\langle \gamma(s), v_0 \rangle = c$. Isto significa que $\text{Im} \gamma \subset P(v_0, c) \cap M$, onde $P(v_0, c)$ é um plano tipo tempo. Isto sugere que curvas da forma $P(v, c) \cap M$ para $v \in S_1^2$ são candidatas à curvas modelo em M . As curvas dadas por $P(v, c) \cap M$ para $v \in S_1^2$ são

chamadas curvas *fatia de Sitter* (ou, uma *D-fatia*) de M . Aqui observamos que vamos considerar a *D-fatia* sob a condição $k_n \neq 0$ para termos $P(v, c) \cap M$ uma curva regular, caso contrário $P(v, c) \cap M$ é uma curva singular. De fato, se $k_n(s_0) = 0$, temos $d_\gamma(s_0) = v$, onde $v = n_\gamma(s_0)$ ou $v = -n_\gamma(s_0)$ a assim $P(v, c_0)$ é o plano tangente $T_{\gamma(s_0)}M$ de M , onde $c_0 = h_v^S(s_0)$ e $P(v, c_0) \cap M$ tem um ponto singular, pois ele é a interseção de duas superfícies não transversais em um espaço de dimensão 3.

Da mesma maneira, pelo Lemma 3.2.5, a imagem normal Darboux $h_\gamma(s) = v_0$ se, e somente se, $\sigma_H(s) = 0$. Ou seja, $\text{Im}\gamma \subset P(v_0, c) \cap M$, onde $P(v_0, c)$ é um plano tipo espaço. As curvas dadas por $P(v, c) \cap M$ para $v \in H^2(-1)$ são chamadas curvas *fatia hiperbólica* (ou, uma *H-fatia*) de M . Visto que $P(v, c)$ para $v \in H^2(-1)$ é um plano tipo espaço e como M é uma superfície tipo tempo, segue que uma *H-fatia* é sempre uma curva regular.

Do que foi exposto acima e dos Lemas 3.2.2 e 3.2.5 segue o resultado.

Proposição 3.2.6. (a) *A imagem normal Darboux de Sitter de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ tipo espaço ou tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco é uma constante $v_0 \in S_1^2$ se, e somente se, $\sigma_D(s) = 0$ para todo $s \in I$ se, e somente se, γ é parte da curva *D-fatia* de M , dada por $P(v_0, c) \cap M$.*

(b) *A imagem normal Darboux hiperbólica de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco é uma constante $v_0 \in H_+^2(-1)$ se, e somente se, $\sigma_H(s) = 0$ para todo $s \in I$ se, e somente se, γ é parte da curva *H-fatia* de M , dada por $P(v_0, c) \cap M$.*

Como uma consequência do resultado acima, temos que γ é uma curva modelo em M se, e somente se, suas imagens normal Darboux pseudo-esféricas são constantes, isto é, $h'_\gamma \equiv 0$ ou $d'_\gamma \equiv 0$, ou equivalentemente, os invariantes são funções nulas.

Vamos estudar mais sobre a geometria dada pelos invariantes σ_D e σ_H . Para isso, introduzimos outra família de funções:

$$\mathcal{H}^S : \mathbb{R}_1^3 \times S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, v) \mapsto \langle x, v \rangle.$$

Denotamos $\mathfrak{h}_v^S(x) = \mathcal{H}^S(x, v)$ para algum $v \in S_1^2$ fixado, então temos

$$h_v^S(s) = \langle \gamma(s), v \rangle = \mathcal{H}^S(\gamma(s), v) = \mathfrak{h}_v^S(\gamma(s)).$$

Além disso, dado $v_0 = d_\gamma(s_0)$ com $s_0 \in I$, $(\mathfrak{h}_{v_0}^S |_M)^{-1}(c)$ é uma D -fatia de M .

Pela Proposição 3.2.1, $(\mathfrak{h}_{v_0}^S)^{-1}(c_0) = P(v_0, c_0)$ é tangente à γ em $\gamma(s_0)$, onde $c_0 = h_{v_0}^S(s_0)$. Denotemos $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T = P(v_0, c_0)$ o qual é chamado um *plano tangente tipo tempo* de γ em $\gamma(s_0)$ com respeito à $v_0 = d_\gamma(s_0)$.

Os resultados a seguir serão fortemente usados na próxima seção.

Lema 3.2.7. *Sejam $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva regular tipo espaço ou tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco, $c_0 = h_{v_0}^S(s_0)$ e $v_0 = d_\gamma(s_0)$. Se $k_n(s_0) \neq 0$, isto é, a curva D -fatia $(\mathfrak{h}_{v_0}^S |_M)^{-1}(c_0)$ é não singular em $\gamma(s_0)$, e $\sigma_D \not\equiv 0$, então a D -fatia é uma curva de M tangente a γ em $\gamma(s_0)$.*

Demonstração. Suponhamos que a D -fatia $(\mathfrak{h}_{v_0}^S |_M)^{-1}(c_0)$ e γ se interceptam transversalmente em $\gamma(s_0)$. Como $P(v_0, c_0)$ é tangente à γ em $\gamma(s_0)$ e a D -fatia está contida em $P(v_0, c_0)$, segue que $\gamma'(s_0)$ e o vetor tangente à D -fatia em $\gamma(s_0)$ geram o plano tangente à M em $\gamma(s_0)$. Portanto, concluímos que $P(v_0, c_0)$ é exatamente este plano, isto é, a D -fatia é singular e portanto temos uma contradição. $\square$

Os resultados 3.2.6 (a) e 3.2.7 mostram que se $\sigma_D \equiv 0$ então γ é parte de uma curva D -fatia de M e se $\sigma_D \not\equiv 0$ então γ e a curva D -fatia de M são tangentes. Observamos que nestes resultados estamos usando um plano tangente tipo tempo que intercepta M em uma curva (D -fatia).

Definição 3.2.8. *Seja $F : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $F |_M : M \rightarrow \mathbb{R}$) uma submersão e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva regular. Dizemos que γ e $F^{-1}(0)$ (respectivamente $F^{-1}(0) \cap M$) têm contato de ordem k em s_0 se a função $g(s) = F \circ \gamma(s)$ satisfaz $g(s_0) = g'(s_0) = \dots = g^{(k)}(s_0) = 0$ e $g^{(k+1)}(s_0) \neq 0$, isto é, g tem singularidade do tipo A_k em s_0 .*

Chamamos a D -fatia $(\mathfrak{h}_{v_0}^S |_M)^{-1}(c_0)$ do Lema 3.2.7 de uma D -fatia tangente de γ em $\gamma(s_0)$ e denotamos por $T_{M, \gamma(s_0)}^D$. Pela Proposição 3.2.1, concluímos que γ e $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T$ têm contato de ordem três em $\gamma(s_0)$ se, e somente se, $\sigma_D(s_0) = 0$ e $\sigma'_D(s_0) \neq 0$. Assumindo que $k_n(s_0) \neq 0$, as condições acima são equivalentes à condição que γ e $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ têm contato de ordem três em $\gamma(s_0)$. Portanto, temos o seguinte lema:

Lema 3.2.9. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva regular em M parametrizada pelo comprimento de arco tal que existe um subintervalo de I onde $k_g^2(s) > \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)$ e $t'(s) \neq 0$. Então, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) γ e o plano tangente tipo tempo $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T$ têm contato de ordem três, onde $v_0 = d_\gamma(s_0)$,

(2) $\sigma_D(s_0) = 0$ e $\sigma'_D(s_0) \neq 0$.

(3) Se $k_n(s_0) \neq 0$, então a D -fatia tangente $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ de γ em $\gamma(s_0)$ é não singular, e γ e a D -fatia tangente $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ têm contato de ordem três.

Demonstração. Para $v_0 = d_\gamma(s_0)$ e $c_0 = h_{v_0}^S(s_0)$, definimos $F = \widetilde{\mathfrak{h}}_{v_0}^S : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) = \widetilde{\mathfrak{h}}_{v_0}^S(x) = \langle x, v_0 \rangle - c_0$ e consideremos $g = F \circ \gamma$. Assim a prova segue da Definição 3.2.8, onde o contato é medido pela g , e da Proposição 3.2.1. $\square$

Lembre-se que uma H -fatia é sempre uma curva regular. Definimos também

$$\mathcal{H}^T : \mathbb{R}_1^3 \times H_+^2(-1) \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, v) \mapsto \langle x, v \rangle.$$

Denotamos $\mathfrak{h}_v^T(x) = \mathcal{H}^T(x, v)$ para algum $v \in H_+^2(-1)$ fixado, então temos

$$h_v^T(s) = \langle \gamma(s), v \rangle = \mathcal{H}^T(\gamma(s), v) = \mathfrak{h}_v^T(\gamma(s)).$$

Além disso, dado $v_0 = h_\gamma(s_0)$ com $s_0 \in I$, $(\mathfrak{h}_{v_0}^T|_M)^{-1}(c)$ é uma H -fatia de M .

Pela Proposição 3.2.4, $(\mathfrak{h}_{v_0}^T)^{-1}(c_0) = P(v_0, c_0)$ é tangente à γ em $\gamma(s_0)$, onde $c_0 = h_{v_0}^T(s_0)$. Denotemos $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^S = P(v_0, c_0)$ o qual é chamado um *plano tangente tipo espaço de γ em $\gamma(s_0)$ com respeito à $v_0 = h_\gamma(s_0)$* .

Lema 3.2.10. *Sejam $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, $c_0 = h_{v_0}^T(s_0)$ e $v_0 = h_\gamma(s_0)$. Se $\sigma_H \not\equiv 0$ então a H -fatia $(\mathfrak{h}_{v_0}^T|_M)^{-1}(c_0)$ é uma curva de M tangente a γ em $\gamma(s_0)$.*

Demonstração. Suponhamos que a H -fatia $(\mathfrak{h}_{v_0}^T|_M)^{-1}(c_0)$ e γ se interceptam transversalmente em $\gamma(s_0)$. Como $P(v_0, c_0)$ é tangente à γ em $\gamma(s_0)$ e a H -fatia está contida em $P(v_0, c_0)$, segue que $\gamma'(s_0)$ e o vetor tangente à H -fatia em $\gamma(s_0)$ geram o plano tangente à M em $\gamma(s_0)$. Portanto, concluímos que $P(v_0, c_0)$ é exatamente este plano, isto é, a H -fatia é singular. Portanto temos uma contradição, pois a H -fatia tangente é sempre não singular em $\gamma(s_0)$. $\square$

Os resultados 3.2.6 (b) e 3.2.10 mostram que se $\sigma_H \equiv 0$ então γ é parte de uma curva H -fatia de M e se $\sigma_H \not\equiv 0$ então γ e a curva H -fatia de M são tangentes. Observamos

que nestes resultados estamos usando um plano tangente tipo espaço que intercepta M em uma curva (H -fatia).

Chamamos a H -fatia $(\mathfrak{h}_{v_0}^T|_M)^{-1}(c_0)$ do Lema 3.2.10 de uma H -fatia tangente de γ em $\gamma(s_0)$ e denotamos por $T_{M,\gamma(s_0)}^H$. Neste caso segue da Proposição 3.2.4 que γ e $T_{M,\gamma(s_0)}^H$ têm contato de ordem três em $\gamma(s_0)$ se, e somente se, $\sigma_H(s_0) = 0$ e $\sigma'_H(s_0) \neq 0$.

Lema 3.2.11. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva tipo espaço em M parametrizada pelo comprimento de arco tal que existe um subintervalo de I onde $k_n^2(s) > k_g^2(s)$ e $t'(s) \neq 0$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (1) γ e o plano tangente tipo espaço $TP_{v_0,\gamma(s_0)}^S$ têm contato de ordem três, onde $v_0 = h_\gamma(s_0)$,
- (2) $\sigma_H(s_0) = 0$ e $\sigma'_H(s_0) \neq 0$,
- (3) γ e a H -fatia tangente $T_{M,\gamma(s_0)}^H$ têm contato de ordem três.

Demonstração. Para $v_0 = h_\gamma(s_0)$ e $c_0 = h_{v_0}^T(s_0)$, definimos $G = \widetilde{\mathfrak{h}_{v_0}^T} : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $G(x) = \widetilde{\mathfrak{h}_{v_0}^T}(x) = \langle x, v_0 \rangle - c_0$ e consideremos $g = G \circ \gamma$. Assim a prova segue da Definição 3.2.8 e da Proposição 3.2.4. $\square$

3.3 Geometria das imagens normal Darboux pseudo-esféricas

Nesta seção, investigamos as singularidades das imagens normal Darboux pseudo-esféricas e usamos um teorema bem conhecido na teoria dos desdobramentos para obter a geometria local das imagens normal Darboux pseudo-esféricas.

A seguir mostramos que as imagens normal Darboux de Sitter e hiperbólica de γ são respectivamente os conjuntos de bifurcações das famílias de funções altura H^S e H^T .

Proposição 3.3.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s com $t'(s) \neq 0$.*

- (1) *Para uma curva γ tipo tempo, $B_{H^S} = \{d_\gamma(s) \mid s \in I\}$ e B_{H^T} é vazio.*
- (2) *Para uma curva tipo espaço, temos que*
 - (a) *se $k_g^2(s) - k_n^2(s) > 0$, então $B_{H^S} = \{d_\gamma(s) \mid s \in I\}$ e B_{H^T} é vazio.*
 - (b) *se $k_g^2(s) - k_n^2(s) < 0$, então B_{H^S} é vazio e $B_{H^T} = \{h_\gamma(s) \mid s \in I\}$.*

Demonstração. A prova segue da definição de conjunto de bifurcação dada no Capítulo 1 e das Proposições 3.2.1 e 3.2.4 (2), comparando as condições sobre as derivadas de H^S e H^T respectivamente para cada conjunto de bifurcação. $\square$

Temos a seguinte proposição.

Proposição 3.3.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s com $t'(s_0) \neq 0$.*

Para γ tipo espaço ou tipo tempo temos:

- (1) *Se $h_{v_0}^S$ tem singularidade do tipo A_3 em s_0 , então H^S é um desdobramento (p) -versal de $h_{v_0}^S$ em s_0 .*

Para γ tipo espaço temos:

- (2) *Se $h_{v_0}^T$ tem singularidade do tipo A_3 em s_0 , então H^T é um desdobramento (p) -versal de $h_{v_0}^T$ em s_0 .*

Demonstração. (1) Denotamos $\gamma(s) = (x_0(s), x_1(s), x_2(s))$, $\mathbf{v} = (v_0, v_1, \sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}) \in S_1^2$. Portanto, temos

$$H^S(s, \mathbf{v}) = -x_0(s)v_0 + x_1(s)v_1 + x_2(s)\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2} \quad e$$

$$\frac{\partial H^S}{\partial v_0} = -x_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x_2(s), \quad \frac{\partial H^S}{\partial v_1} = x_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x_2(s)$$

$$\frac{\partial^2 H^S}{\partial s \partial v_0} = -x'_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x'_2(s), \quad \frac{\partial^2 H^S}{\partial s \partial v_1} = x'_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x'_2(s)$$

$$\frac{\partial^3 H^S}{\partial s^2 \partial v_0} = -x''_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x''_2(s), \quad \frac{\partial^3 H^S}{\partial s^2 \partial v_1} = x''_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x''_2(s)$$

Portanto, temos a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} -x'_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x'_2(s) & x'_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x'_2(s) \\ -x''_0(s) + \frac{v_0}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x''_2(s) & x''_1(s) - \frac{v_1}{\sqrt{1 + v_0^2 - v_1^2}}x''_2(s) \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 3.2.1, temos que h_v^S tem singularidade do tipo A_3 em s se, e somente se,

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}}(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)), \quad \sigma_D(s) = 0 \text{ e } \sigma'_D(s) \neq 0.$$

Para provar a afirmação (1), temos que mostrar que a matriz é não singular, isto é, $\det A \neq 0$. Portanto, calculamos o determinante desta matriz.

$$\begin{aligned} \det A &= (-(x'_1x''_2 - x'_2x''_1), x'_2x''_0 - x'_0x''_2, x'_0x''_1 - x'_1x''_0) \begin{pmatrix} \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \\ \frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= ((x'_0, x'_1, x'_2) \wedge (x''_0, x''_1, x''_2)) \begin{pmatrix} \frac{v_0}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \\ \frac{v_1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}(t \wedge (-\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s) + k_n(s)n_\gamma(s))) \begin{pmatrix} -v_0 \\ v_1 \\ \sqrt{1+v_0^2-v_1^2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}}\langle k_g(s)n_\gamma(s) - k_n(s)b(s), \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}}(k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)) \rangle \\ &= \pm \frac{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}}{\sqrt{1+v_0^2-v_1^2}} \neq 0, \text{ pois } k_g^2(s) > \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s). \end{aligned}$$

De maneira análoga, se considerarmos a função altura tipo tempo H^T , podemos provar (2). $\square$

Como uma consequência de resultados anteriores, temos os seguintes teoremas que relacionam agora as imagens normal Darboux pseudo-esféricas, os invariantes, e o contato de γ com plano tangente e as curvas fatias.

Teorema 3.3.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco tal que $t'(s) \neq 0$. Então temos as seguintes afirmações:*

(1) A imagem normal Darboux de Sitter em s_0 é regular se $\sigma_D(s_0) \neq 0$.

(2) As seguintes condições são equivalentes:

(i) o germe da imagem normal Darboux de Sitter próximo de s_0 é difeomorfo à cúspide ordinária C , onde $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^3\}$;

(ii) $\sigma_D(s_0) = 0$ e $\sigma'_D(s_0) \neq 0$;

(iii) γ e o plano tangente tipo tempo $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^T$ têm contato de ordem três, onde $v_0 = d_\gamma(s_0)$;

(iv) se $k_n(s_0) \neq 0$, então a D -fatia tangente $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ de γ em $\gamma(s_0)$ é não singular, e γ e a D -fatia tangente $T_{M, \gamma(s_0)}^D$ têm contato de ordem três.

Demonstração. (1) Pelo Lema 3.2.2, temos $d'_\gamma(s) = 0$ se, e somente se, $\sigma_D(s) = 0$. Isto significa que a imagem normal Darboux de Sitter em s_0 é regular se $\sigma_D(s_0) \neq 0$.

(2) Pela Proposição 3.2.1, o conjunto de bifurcação de H^S é

$$\mathfrak{Bif}(H^S) = \left\{ v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_n^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)) \right\}.$$

Pelo Teorema 1.3.2 e Proposição 3.3.2, o germe do conjunto de bifurcação é difeomorfo à cúspide ordinária se, e somente se, $\sigma_D(s_0) = 0$ e $\sigma'_D(s_0) \neq 0$. Além disso, temos as outras equivalências pelo Lema 3.2.9. $\square$

Teorema 3.3.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco tal que $t'(s) \neq 0$. Então temos as seguintes afirmações:*

(1) A imagem normal Darboux hiperbólica em s_0 é regular se $\sigma_H(s_0) \neq 0$.

(2) As seguintes condições são equivalentes:

(i) o germe da imagem normal Darboux hiperbólica próximo de s_0 é difeomorfo à cúspide ordinária C ;

(ii) $\sigma_H(s_0) = 0$ e $\sigma'_H(s_0) \neq 0$;

(iii) γ e o plano tangente tipo espaço $TP_{v_0, \gamma(s_0)}^S$ têm contato de ordem três, onde $v_0 = h_\gamma(s_0)$;

(iv) γ e a H -fatia tangente $T_{M, \gamma(s_0)}^H$ têm contato de ordem três.

Demonstração. (1) Pelo Lema 3.2.5, temos $h'_\gamma(s) = 0$ se, e somente se, $\sigma_H(s) = 0$. Isto significa que a imagem normal Darboux hiperbólica em s_0 é regular se $\sigma_H(s_0) \neq 0$.

(2) Pela Proposição 3.2.4, o conjunto de bifurcação de H^T é

$$\mathfrak{Bif}(H^T) = \left\{ v = \pm \frac{1}{\sqrt{k_n^2(s) - k_g^2(s)}} (k_n(s)b(s) - k_g(s)n_\gamma(s)) \right\}.$$

Pelo Teorema 1.3.2 e Proposição 3.3.2, o germe do conjunto de bifurcação é difeomorfo à cúspide ordinária se, e somente se, $\sigma_H(s_0) = 0$ e $\sigma'_H(s_0) \neq 0$. Além disso, as equivalências de (ii), (iii) e (iv) seguem do Lema 3.2.11. $\square$

3.4 Exemplos

Agora, consideremos dois exemplos de curvas sobre superfícies tipo tempo: curvas sobre um plano tipo tempo, $\mathbb{R}_1^2$, e curvas sobre o espaço de Sitter, S_1^2 . Veremos abaixo o que acontece com as imagens normal Darboux pseudo-esféricas nestes casos.

Exemplo 3.4.1. *Suponha que a superfície tipo tempo seja $M = \mathbb{R}_1^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}_1^3$. Consideremos uma curva plana $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso, pelas fórmulas e vetores definidos no início deste Capítulo temos que $n_\gamma(s) = e_3$, $t(s) = \gamma'(s)$ e $b(s) = e_3 \wedge t(s)$ e que $k_n(s) \equiv \tau_g(s) \equiv 0$ e $k_g(s) = \langle b(s), t'(s) \rangle$. Então temos que as fórmulas dadas no início coincidem com as fórmulas tipo Frenet-Serret no plano de Minkowski (ver [26]):*

$$\begin{cases} b'(s) = k(s)t(s) \\ t'(s) = k(s)b(s) \end{cases}$$

onde $k(s) = k_g(s)$ e $\{t, b\}$ é a base pseudo-ortonormal em movimento sobre a curva, em $\mathbb{R}_1^2$. Calculando o invariante σ_D temos que $\sigma_D \equiv 0$ e a imagem normal Darboux de Sitter

de γ é constante, $d_\gamma(s) = n_\gamma(s) = e_3$ (Lema 3.2.2). Isto significa que o conjunto D -fatia é $\mathbb{R}_1^2$ pois $M = P(e_3, c) \cap M$. Além disso, temos que $\sigma_H \equiv 0$, mas não temos imagens normal Darboux hiperbólicas já que $k_n(s) \equiv 0$. A evoluta de γ em $\mathbb{R}_1^2$ foi estudada em [26]. Em todos estes casos, as evolutas são dadas pela interseção da superfície focal de γ , estudada no Capítulo 2, com as pseudo-esferas (onde obtemos as imagens normal Darboux de Sitter e hiperbólica) ou com $\mathbb{R}_1^2$. Portanto concluímos que a superfície focal de γ intercepta a pseudo-esfera de Sitter S_1^2 em um único ponto, e que a superfície focal não intercepta a pseudo-esfera hiperbólica $H^2(-1)$.

No exemplo acima observe que $k_n \equiv 0$, por isso temos que $\mathbb{R}_1^2 = M = P(e_3, c) \cap M$ e γ não é considerada uma curva modelo em M mesmo com a imagem normal Darboux de Sitter sendo constante.

Exemplo 3.4.2. Suponha agora que a superfície tipo tempo seja $M = S_1^2$. Consideremos $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ curva parametrizada pelo comprimento de arco. Neste caso, pelas fórmulas e vetores definidos no início deste capítulo, temos $n_\gamma(s) = \gamma(s)$, $t(s) = \gamma'(s)$ com $\|t(s)\| = 1$ e $b(s) = \gamma(s) \wedge t(s)$ e $\tau_g(s) = 0$, $k_n(s) = -\varepsilon(\gamma(s))$, onde $\varepsilon(\gamma(s)) = 1$ se γ é tipo espaço e $\varepsilon(\gamma(s)) = -1$ se γ é tipo tempo. Como era esperado, pelas fórmulas tipo Frenet-Serret visto nesta seção, obtemos as fórmulas da Seção 2.3:

$$\begin{cases} t'(s) = -\varepsilon(\gamma(s))\gamma(s) - \varepsilon(\gamma(s))k_g(s)b(s) \\ \gamma'(s) = t(s) \\ b'(s) = -\varepsilon(\gamma(s))k_g(s)t(s) \end{cases}$$

onde $b(s)$ deste capítulo representa o vetor $n(s)$ da Seção 2.3, e daqui para frente neste exemplo usaremos a notação $n(s)$.

Calculando os invariantes temos $\sigma_D(s) = -\varepsilon k'_g(s)$, e $\sigma_H(s) = k'_g(s)$, e temos a imagem normal Darboux de Sitter de γ dada por

$$d_\gamma(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))}}\gamma(s) + \frac{\varepsilon(\gamma(s))}{\sqrt{k_g^2(s) - \varepsilon(\gamma(s))}}n(s).$$

Como vimos, a imagem normal Darboux hiperbólica de γ , é definida apenas se γ é tipo

espaço como

$$h_\gamma(s) = -\frac{k_g(s)}{\sqrt{1-k_g^2(s)}}\gamma(s) - \frac{1}{\sqrt{1-k_g^2(s)}}n(s).$$

O estudo da imagem normal Darboux de Sitter foi feita no Capítulo 2 na Seção 2.3, onde concluímos que os pontos singulares da imagem normal Darboux de Sitter são os pontos onde $k'_g(s) = 0$. Como esperado, este fato coincide com as conclusões dos resultados estudados neste capítulo, como comentamos a seguir. Pelos Teoremas 3.3.3 e 3.3.4, a imagem normal Darboux de Sitter em s_0 e a imagem normal Darboux hiperbólica em s_0 são regulares se $k'_g(s_0) \neq 0$, pois $\sigma_D(s_0) = -\varepsilon k'_g(s_0) \neq 0$ e $\sigma_H(s_0) = k'_g(s_0) \neq 0$. Portanto, as cúspides ordinárias das imagens normal Darboux pseudo-esféricas correspondem aos pontos onde $k'_g(s) = 0$ e $k''_g(s) \neq 0$. Logo como visto no Capítulo 2, os pontos singulares destas imagens normal Darboux são os pontos onde $k'_g(s) = 0$.

3.5 Superfície tipo luz em $\mathbb{R}_1^3$ ao longo de curvas planas tipo espaço de Sitter

Vimos na Seção 3.2 que se γ é tipo espaço então estão definidas ambas as imagens normal Darboux, imagem normal Darboux de Sitter e imagem normal Darboux hiperbólica.

Nesta seção investigaremos a relação da imagem normal Darboux de Sitter e da imagem normal Darboux hiperbólica de uma curva tipo espaço γ em S_1^2 com a superfície tipo luz em $\mathbb{R}_1^3$ ao longo de γ . Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, então temos na Seção 2.3 que as fórmulas tipo Frenet-Serret de γ é dada por

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = -\gamma(s) - k_g(s) n(s) , \\ n'(s) = -k_g(s) t(s) \end{cases}$$

onde $k_g(s) = \langle \gamma''(s), n(s) \rangle$ é a curvatura geodésica de γ em s . Dizemos que uma superfície é tipo luz se cada plano tangente nos pontos regulares da superfície é tipo luz. Seguindo a definição de hipersuperfície tipo luz ao longo de subvariedades tipo espaço em [17], as superfícies tipo luz ao longo de γ são dadas pelas aplicações $\mathbb{LS}_\gamma^\pm : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ definidas

por

$$\mathbb{LS}_\gamma^\pm(s, \mu) = \gamma(s) + \mu(n(s) \pm \gamma(s)).$$

Consideremos apenas $\mathbb{LS}_\gamma^+$ e então a denotemos por $\mathbb{LS}_\gamma$.

Temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{LS}_\gamma}{\partial s} &= (1 - \mu k_g(s) + \mu)t(s) \\ \frac{\partial \mathbb{LS}_\gamma}{\partial \mu} &= n(s) + \gamma(s). \end{aligned}$$

Se $k_g(s) = 1$ temos que $\left\{ \frac{\partial \mathbb{LS}_\gamma}{\partial s}, \frac{\partial \mathbb{LS}_\gamma}{\partial \mu} \right\}$ é linearmente independente. Agora sob a condição que $k_g(s) \neq 1$, $\left\{ \frac{\partial \mathbb{LS}_\gamma}{\partial s}, \frac{\partial \mathbb{LS}_\gamma}{\partial \mu} \right\}$ é linearmente dependente se, e somente se, $1 - \mu k_g(s) + \mu = 0$. Portanto, (s, μ) é um ponto singular de $\mathbb{LS}_\gamma$ se, e somente se, $\mu = \frac{1}{k_g(s) - 1}$. Em [17], o *conjunto focal tipo luz* da subvariedade é definido como sendo o conjunto de valores críticos da hipersuperfície tipo luz ao longo de uma subvariedade tipo espaço, então pelas contas acima o conjunto focal tipo luz de γ é dado pela curva

$$\beta(s) = \mathbb{LS}_\gamma(s, \mu(s)) = \left(\frac{k_g(s)}{k_g(s) - 1} \right) \gamma(s) + \left(\frac{1}{k_g(s) - 1} \right) n(s),$$

onde $k_g(s) \neq 1$.

Visto que $\langle \beta(s), \beta(s) \rangle = \frac{k_g^2(s) - 1}{(k_g(s) - 1)^2}$, temos

$$\beta(s) \text{ é } \begin{cases} \text{tipo espaço se } k_g^2(s) - 1 > 0 \\ \text{tipo luz se } k_g(s) = -1 \\ \text{tipo tempo se } k_g^2(s) - 1 < 0 \end{cases}$$

Definimos a aplicação

$$\Phi : \mathbb{R}_1^3 \setminus LC^* \rightarrow H^2(-1) \cup S_1^2$$

por $\Phi(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Temos $\mathbb{R}_1^3 \setminus LC^* = S \cup T$, onde $S = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle > 0\}$ e $T = \{x \in \mathbb{R}_1^3 \mid \langle x, x \rangle < 0\}$. Portanto, temos as projeções $\Phi^S = \Phi|_S : S \rightarrow S_1^2$ e

$\Phi^T = \Phi|_T : T \rightarrow H^2(-1)$. Suponha que $k_g^2(s) - 1 > 0$, então temos

$$\Phi^S \circ \beta(s) = \frac{k_g(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - 1}} \gamma(s) + \frac{1}{\sqrt{k_g^2(s) - 1}} n(s)$$

que coincide com a imagem normal Darboux de Sitter de γ , d_γ , (ver Exemplo 3.4.2).

Por outro lado, suponha que $k_g^2(s) - 1 < 0$, então temos

$$\Phi^T \circ \beta(s) = -\frac{k_g(s)}{\sqrt{1 - k_g^2(s)}} \gamma(s) - \frac{1}{\sqrt{1 - k_g^2(s)}} n(s)$$

que coincide com a imagem normal Darboux hiperbólica de γ , h_γ , (ver Exemplo 3.4.2).

Agora definimos

$$\beta_\gamma^S = \{\beta(s) \mid s \in I, k_g^2(s) > 1\},$$

$$\beta_\gamma^T = \{\beta(s) \mid s \in I, k_g^2(s) < 1\}.$$

Chamamos β_γ^S a *parte tipo espaço do conjunto focal tipo luz de γ* e β_γ^T a *parte tipo tempo do conjunto focal tipo luz de γ* . Então temos

$$\Phi^S(\beta_\gamma^S) = d_\gamma(I_{>1}) \text{ and } \Phi^T(\beta_\gamma^T) = h_\gamma(I_{<1}),$$

onde $I_{>1} = \{s \in I \mid k_g^2(s) > 1\}$ e $I_{<1} = \{s \in I \mid k_g^2(s) < 1\}$. Portanto provamos acima o seguinte resultado.

Teorema 3.5.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco s com $k_g \neq \pm 1$. A imagem normal Darboux de Sitter (resp. hiperbólica) é a projeção da parte tipo espaço (resp. tipo tempo) do conjunto focal tipo luz de γ por Φ^S (resp. Φ^T).*

Agora consideremos a família de funções distância ao quadrado sobre uma curva tipo espaço no espaço de Sitter a fim de relacioná-la com a superfície tipo luz da curva tipo espaço. Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco. Temos que a família de funções distância ao quadrado

$$f : I \times \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

é dada por $f(s, v) = \langle \gamma(s) - v, \gamma(s) - v \rangle$, onde $f_v(s) = f(s, v)$.

Observemos que $n(s)$ é sempre tipo tempo pois $\langle n(s), n(s) \rangle = -\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = -1$. Então na proposição abaixo a condição $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 0$ significa $1 - k_g^2(s) \neq 0$, ou seja, $k_g(s) \neq \pm 1$.

Proposição 3.5.2. *Para uma curva tipo espaço $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ parametrizada pelo comprimento de arco com $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 0$, temos o seguinte:*

(1) $f_v(s) = f'_v(s) = 0$ se, e somente se, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $v = \gamma(s) + \mu(n(s) \pm \gamma(s))$.

(2) $f_v(s) = f'_v(s) = f''_v(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \mp 1} \left(n(s) \pm \gamma(s) \right).$$

(3) $f_v(s) = f'_v(s) = f''_v(s) = f'''_v(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \mp 1} \left(n(s) \pm \gamma(s) \right) \text{ e } k'_g(s) = 0.$$

Demonstração. (1) Temos $f'_v(s) = \langle \gamma(s) - v, t(s) \rangle = 0$ se, e somente se, existem $\bar{\mu}, \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(s) - v = \lambda\gamma(s) + \bar{\mu}n(s)$, onde $\gamma(s)$ e $n(s)$ geram o plano pseudo-normal. Então, $f_v(s) = f'_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \gamma(s) - \bar{\mu}(n(s) \pm \gamma(s)) = \gamma(s) + \mu(n(s) \pm \gamma(s))$, onde chamamos $\mu = -\bar{\mu}$.

(2) Acrescentando a condição que $\frac{1}{2}f''_v(s) = 1 + \langle \gamma(s) - v, -\gamma(s) - k_g(s)n(s) \rangle = 0$, temos que $\mu = \frac{1}{k_g(s) \mp 1}$ e

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \mp 1} \left(n(s) \pm \gamma(s) \right).$$

(3) Acrescentando $\frac{1}{2}f'''_v(s) = \langle \gamma(s) - v, -\gamma'(s) - k'_g(s)n(s) + k_g^2(s)t(s) \rangle = 0$, encontramos

$$v = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \mp 1} \left(n(s) \pm \gamma(s) \right) \text{ e } k'_g(s) = 0.$$

□

Pela definição do Capítulo 1, Seção 1.3, e Proposição 3.5.2, temos que o conjunto discriminante da família de funções distância ao quadrado $f(s, v)$ sobre γ é dado por

$\mathfrak{D}_f = \mathfrak{D}_f^+ \cup \mathfrak{D}_f^-$, onde

$$\mathfrak{D}_f^\pm = \{\gamma(s) + \mu(n(s) \pm \gamma(s)) \mid s \in I, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Se γ é uma curva tipo espaço em S_1^2 então $\mathfrak{D}_f$ coincide com a superfícies tipo luz $\mathbb{LS}_\gamma^\pm$. Vimos que o conjunto singular de $\mathbb{LS}_\gamma$ e portanto de $\mathfrak{D}_f^+$ é a curva β .

Para uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ tipo espaço ou tipo tempo parametrizada pelo comprimento de arco com $k(s) \neq 0$ e $\tau(s) \neq 0$, vimos no Capítulo 2, Seção 2.1, que a *superfície focal* (conjunto de bifurcação de $f(s, v)$) de γ é dada por $\mathfrak{B}$ (Equação 2.1.1), e a *curva cuspidal* de $\mathfrak{B}$ por $\mathcal{C}$ (Equação 2.1.2). Então, pelo Capítulo 2 sabemos que:

- (a) Se γ é tipo espaço sua superfície focal $\mathfrak{B}$ em $\mathbb{R}_1^3$ é tipo tempo, e se γ é tipo tempo sua superfície focal $\mathfrak{B}$ em $\mathbb{R}_1^3$ é tipo espaço;
- (b) a imagem normal Darboux de Sitter de γ é a curva $\mathfrak{B} \cap S_1^2$;
- (c) a imagem normal Darboux hiperbólica de γ é a curva $\mathfrak{B} \cap H^2(-1)$ (ver por exemplo [16] para o caso em que a curva esta em $H^2(-1)$);
- (d) a curva singular da superfície focal $\mathfrak{B}$ é a curva cuspidal $\mathcal{C}$.

Claramente (a) até (d) são verdadeiras para $\gamma : I \rightarrow S_1^2$. Além disso, para uma curva tipo espaço $\gamma : I \rightarrow S_1^2$, onde β é o conjunto focal tipo luz de γ , pelo Teorema 3.5.1, temos o seguinte:

- (e) a projeção da parte tipo espaço de β em S_1^2 é a imagem normal Darboux de Sitter de γ ;
- (f) a projeção da parte tipo tempo de β em $H^2(-1)$ é a imagem normal Darboux hiperbólica de γ .

Pelos resultados acima e fazendo a análise do conjunto discriminante $\mathfrak{D}_f^+$ e do conjunto de bifurcação $\mathfrak{B}$ através das derivadas da função distância ao quadrado, temos a Proposição 3.5.4. Para a Proposição 3.5.4 (ii) precisamos do seguinte resultado.

Proposição 3.5.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com $\langle t'(s_0), t'(s_0) \rangle \neq 0$. Se f_v tem singularidade A_3 em s_0 , então f é um desdobramento versal de f_v em s_0 .*

Demonstração. Denotemos $\gamma(s) = (x_0(s), x_1(s), x_2(s))$, $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2)$. Portanto temos

$$f(s, \mathbf{v}) = -(x_0(s) - v_0)^2 + (x_1(s) - v_1)^2 + (x_2(s) - v_2)^2, \quad e$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v_0} &= 2(x_0(s) - v_0), \quad \frac{\partial f}{\partial v_1} = -2(x_1(s) - v_1), \quad \frac{\partial f}{\partial v_2} = -2(x_2(s) - v_2) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial v_0} &= 2x'_0(s), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial v_1} = -2x'_1(s), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial v_2} = -2x'_2(s) \\ \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial v_0} &= 2x''_0(s), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial v_1} = -2x''_1(s), \quad \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial v_2} = -2x''_2(s) \end{aligned}$$

Assim, temos a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2(x_0(s) - v_0) & -2(x_1(s) - v_1) & -2(x_2(s) - v_2) \\ 2x'_0(s) & -2x'_1(s) & -2x'_2(s) \\ 2x''_0(s) & -2x''_1(s) & -2x''_2(s) \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 3.5.2, temos que $f_{\mathbf{v}}$ tem singularidades A_3 em s se, e somente se,

$$\mathbf{v} = \gamma(s) + \frac{1}{k_g(s) \mp 1} (n(s) \pm \gamma(s)), \quad k'_g(s) = 0 \quad e \quad k''_g(s) \neq 0.$$

Para provar a afirmação, temos que mostrar que a matriz é não singular, isto é, $\det A \neq 0$. Visto que

$$\begin{aligned} \det A &= 8 \langle (x_0, x_1, x_2), (x'_0, x'_1, x'_2) \wedge (x''_0, x''_1, x''_2) \rangle - 8 \langle (v_0, v_1, v_2), (x'_0, x'_1, x'_2) \wedge (x''_0, x''_1, x''_2) \rangle \\ &= 8 \langle \gamma(s) - \mathbf{v}, \gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \rangle \\ &= 8 \left\langle \frac{-1}{k_g(s) \mp 1} (n(s) \pm \gamma(s)), n(s) + k_g(s) \gamma(s) \right\rangle = \mp 8 \neq 0, \end{aligned}$$

então f é um desdobramento versal de $f_{\mathbf{v}}$ em s . □

Proposição 3.5.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^2$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco s com $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 0$. Temos o seguinte:*

- (i) o conjunto focal tipo luz β de γ , ou seja, o conjunto singular de $\mathfrak{D}_f^+$, é a curva $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D}_f^+$;

(ii) genericamente, os pontos singulares, $v = \beta(s)$, de β são pontos isolados dados por $\beta \cap \mathcal{C}$, isto é, onde $k'_g(s) = 0$. Além disso, se $k''_g(s) \neq 0$ (isto é, f_v tem singularidade A_3 em s) então $\mathfrak{D}_f^+$ é localmente difeomorfo ao rabo de andorinha que intercepta a curva cuspidal $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{B}$ exatamente nos pontos singulares de β (ver Figura 3.1). A curva β é regular em s_0 se, e somente se, $k'_g(s_0) \neq 0$, e a parte regular de β está contida na parte regular de $\mathfrak{B}$;

(iii) os pontos singulares da parte tipo espaço β_γ^S , de β , são projetados nos pontos singulares da imagem normal Darboux de Sitter;

(iv) os pontos singulares da parte tipo tempo β_γ^T , de β , são projetados nos pontos singulares da imagem normal Darboux hiperbólica;

Demonstração. (i) Pela Proposição 3.5.2 (2), temos que o conjunto o conjunto focal tipo luz β é dado pelo $v \in \mathbb{R}_1^3$ tal que $f_v(s) = f'_v(s) = f''_v(s) = 0$, ou seja, $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{D}_f^+$.

(ii) Agora veja que

$$\beta'(s) = \frac{-k'_g(s)}{(k_g^2(s) - 1)^2} \gamma(s) + \frac{k'_g(s)}{(k_g^2(s) - 1)^2} n(s),$$

então $\beta'(s) = 0$ se, e somente se, $k'_g(s) = 0$. Ainda pela Proposição 3.5.2 (3) nos pontos singulares de β temos que $f_v(s) = f'_v(s) = f''_v(s) = f'''_v(s) = 0$, ou seja, ponto singular de $\beta(s)$ é um ponto da curva cuspidal $\mathcal{C}$. Genericamente $k'_g \not\equiv 0$, caso contrário existiria um intervalo J onde $k'_g(s) = 0$ e $k''_g(s) = 0$ para todo $s \in J$ e assim teríamos que f_v tem singularidade $A_{\geq 4}$ em s . Se $k'_g(s) = 0$ e $k''_g(s) \neq 0$ (singularidade A_3 de f_v), então pela Proposição 3.5.3 a família f é um desdobramento versal de $f_v(s)$ e $\mathfrak{D}_f^+$ é localmente difeomorfo ao rabo de andorinha (see [3]).

(iii), (iv) seguem do seguinte fato: s é um ponto singular de β se, e somente se, $k'_g(s) = 0$ se, e somente se, s é um ponto singular da imagem normal Darboux de Sitter ou da imagem normal Darboux hiperbólica (Exemplo 3.4.2). $\square$

Figura 3.1

Superfícies horoesférica e dual hiperbólica de curvas tipo espaço em S_1^3

Neste capítulo estudamos a superfície horoesférica e a superfície dual hiperbólica de curvas tipo espaço no espaço de Sitter, S_1^3 . Além disso, damos uma relação entre estas superfícies do ponto de vista de dualidades Legendrianas, as quais foram introduzidas em [11] por Shyuichi Izumiya. Curvas no espaço hiperbólico $H^3(-1)$ em $\mathbb{R}_1^4$ foram investigadas nos artigos [7], [8], [15].

Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco e seja $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ a base ortonormal de $\mathbb{R}_1^4$ ao longo de γ dada no Capítulo 2, Seção 2.4. Definimos as aplicações

$$HS_\gamma^\pm : I \times J \rightarrow LC^* \quad \text{e} \quad HD_\gamma^\pm : I \times J \rightarrow H^3(-1)$$

por $HS_\gamma^\pm(s, \mu) = \gamma(s) + \mu n(s) + \lambda e(s)$ e $HD_\gamma^\pm(s, \mu) = \mu n(s) + \lambda e(s)$, respectivamente, com $\lambda^2 - \mu^2 = \delta(\gamma(s))$, onde $\delta(\gamma(s)) = \text{sin}(\alpha(n(s)))$ é 1 se $n(s)$ for tipo espaço ou -1 se $n(s)$ for tipo tempo. Ou seja, $HS_\gamma^\pm(s, \mu) = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))} e(s)$ e $HD_\gamma^\pm(s, \mu) = \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))} e(s)$ com $\mu^2 + \delta(\gamma(s)) \geq 0$, isto é, $\mu \in \mathbb{R} = J$ para $n(s)$ tipo espaço ou $\mu \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) = J$ para $n(s)$ tipo tempo. Chamamos $HS_\gamma^\pm$ a *superfície horoesférica de γ* e $HD_\gamma^\pm$ a *superfície dual hiperbólica de γ* . Podemos pensar em λ e μ como $\cosh(t)$ e $\sinh(t)$ dependendo de $\delta(\gamma(s))$.

Usamos famílias de funções altura sobre curvas em S_1^3 e técnicas da teoria de singula-

ridades para estudar estas superfícies. Para usar estas técnicas mostramos no Corolário 4.1.2 que a superfície horoesférica de γ é o conjunto discriminante da família de funções altura horoesférica, e no Corolário 4.3.3 que a superfície dual hiperbólica de γ é o discriminante da família de funções altura hiperbólica.

Observe que os conjuntos discriminantes da família de funções altura horoesférica e da família de funções altura hiperbólica sobre curvas tipo tempo em S_1^3 são vazios. Por isso, estamos apenas considerando curvas tipo espaço em S_1^3 .

4.1 Família de funções altura horoesférica

Introduzimos uma família de funções sobre uma curva, que é útil para o estudo da superfície horoesférica. Para uma curva tipo espaço $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ parametrizada pelo comprimento de arco, definimos uma função $H : I \times LC^* \rightarrow \mathbb{R}$ por $H(s, v) = \langle \gamma(s), v \rangle - 1$. Chamamos H de *família de funções altura horoesférica sobre γ* . Denotamos $h_v(s) = H(s, v)$ para todo $v \in LC^*$ fixado. A família de funções altura horoesférica H mede o contato de γ com hiperplanos tipo luz in $\mathbb{R}_1^4$. Genericamente, este contato pode ser A_k , $1 \leq k \leq 3$.

A partir do seguinte resultado podemos obter condições equivalentes para cada singularidade A_k , $1 \leq k \leq 3$. Por exemplo, h_v tem singularidade A_2 em s se, e somente se, $v = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s)$, $\mu = \frac{1}{k_g(s)\delta(\gamma(s))}$ e $\sigma_{h_v}(s) \neq 0$.

Lembre-se que estamos supondo $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 1$ (condição genérica), que é equivalente a $k_g(s) = \|t'(s) + \gamma(s)\| \neq 0$ para $s \in I$, para definirmos $n(s) = \frac{t'(s) + \gamma(s)}{\|t'(s) + \gamma(s)\|}$. Portanto $k_g(s) \neq 0$ nos resultados abaixo significa $k_g(s) > 0$.

Proposição 4.1.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g(s) \neq 0$. Então temos o seguinte:*

(1) $h_v(s) = 0$ se, e somente se, existem números reais μ, λ, η com $\eta^2 + \delta(\gamma(s))\mu^2 - \delta(\gamma(s))\lambda^2 = -1$ tal que $v = \gamma(s) + \eta t(s) + \mu n(s) + \lambda e(s)$.

(2) $h_v(s) = h'_v(s) = 0$ se, e somente se, existem números reais μ, λ tal que $v = \gamma(s) + \mu n(s) + \lambda e(s)$ com $\lambda^2 - \mu^2 = \delta(\gamma(s))$.

(3) $h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s)$ com $\mu = \frac{1}{k_g(s)\delta(\gamma(s))}$.

$$(4) \quad h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = 0 \text{ se, e somente se, } v = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s), \mu = \frac{1}{k_g(s)\delta(\gamma(s))} \text{ e } \sigma_{h_v}(s) = 0, \text{ onde}$$

$$\sigma_{h_v}(s) = (k'_g \pm k_g \tau_g(-\delta) \sqrt{1 + k_g^2 \delta})(s).$$

$$(5) \quad (i) \text{ Se } n(s) \text{ for tipo tempo com } k_g(s) = 1 \text{ então } h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = h_v^{(4)}(s) = 0 \text{ se, e somente se, } v = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s), \mu = \frac{1}{k_g(s)\delta(\gamma(s))}, \sigma_{h_v}(s) = 0 \text{ e } k''_g(s) + \tau_g^2(s) = 0.$$

$$(ii) \text{ Caso contrário, se } n(s) \text{ é tipo tempo com } k_g(s) \neq 1 \text{ ou se } n(s) \text{ é tipo espaço, } h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = h_v^{(4)}(s) = 0 \text{ se, e somente se, } v = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s), \mu = \frac{1}{k_g(s)\delta(\gamma(s))} \text{ e } \sigma_{h_v}(s) = \sigma'_{h_v}(s) = 0.$$

Demonstração. Visto que $h_v(s) = \langle \gamma(s), v \rangle - 1$, usando as fórmulas tipo Frenet-Serret temos

$$(a) \quad h'_v(s) = \langle t(s), v \rangle,$$

$$(b) \quad h''_v(s) = \langle -\gamma(s) + k_g(s)n(s), v \rangle,$$

$$(c) \quad h'''_v(s) = \langle (-1 - k_g^2(s)\delta(\gamma(s)))\gamma(s) + k'_g(s)n(s) + k_g(s)\tau_g(s), v \rangle,$$

$$(d) \quad h^{(4)}_v(s) = \langle (1 + k_g^2(s)\delta(\gamma(s)))\gamma(s) - 3\delta(\gamma(s))k'_g(s)k_g(s)t(s) + (-k_g(s) + k''_g(s) + k_g(s)\tau_g^2(s) - k_g^3(s)\delta(\gamma(s)))n(s) + (2k'_g(s)\tau_g(s) + k_g(s)\tau'_g(s))e(s), v \rangle.$$

A afirmação (1) segue de cálculos simples. Usando a relação (a), $h_v(s) = h'_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \gamma(s) + \mu n(s) + \lambda e(s)$ com $\lambda^2 - \mu^2 = \delta(\gamma(s))$, isto prova (2). Acrescentando a relação (b), obtemos a afirmação (3). As outras afirmações seguem analogamente usando (c) e (d), mas precisamos contudo, de cálculos mais longos. Logo omitimos os detalhes. Esclarecemos que o item (5)(ii) foi dado usando $\sigma_{h_v}(s)$ e sua derivada. Porém $\sigma'_{h_v}(s)$ não existe se $n(s)$ for tipo tempo e $k_g(s) = 1$, por isso reescrevemos as condições em (5)(i) para este caso. $\square$

Corolário 4.1.2. *A superfície horoesférica de γ é o conjunto discriminante, $\mathfrak{D}_H$, da família de funções altura horoesférica H .*

Demonstração. A prova segue imediatamente da definição de conjunto discriminante dada no Capítulo 1 e da Proposição 4.1.1 (2). $\square$

Pela proposição acima, definimos o invariante $\sigma_{h_v}(s) = (k'_g \pm k_g \tau_g(-\delta) \sqrt{1 + k_g^2 \delta})(s)$. No próximo resultado mostramos que a família de funções altura horoesférica sobre uma curva tipo espaço é um desdobramento versal de uma singularidade A_k , $k = 2, 3$.

Proposição 4.1.3. *Seja $H : I \times LC^* \rightarrow \mathbb{R}$ a família de funções altura horoesférica sobre uma curva tipo espaço $\gamma(s)$ com $k_g(s) \neq 0$. Se h_v tem uma singularidade A_2 em s_0 , então H é um desdobramento versal de h_v . Se h_v tem uma singularidade A_3 em s_0 , e se $n(s_0)$ é tipo tempo com $k_g(s_0) \neq 1$ (condição genérica) ou se $n(s_0)$ é tipo espaço, então H é um desdobramento versal de h_v .*

Demonstração. Temos

$$H(s, v) = -v_1 x_1(s) + v_2 x_2(s) + v_3 x_3(s) + v_4 x_4(s) - 1,$$

onde $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s), x_4(s))$, $v_1 = \sqrt{v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$ e $x_1(s) = \sqrt{x_2^2(s) + x_3^2(s) + x_4^2(s) - 1}$, pois $v \in LC^*$ e $\gamma(s) \in S_1^3$.

Reescrevendo $H(s, v)$ como $H(s, v_2, v_3, v_4) = -(\sqrt{v_2^2 + v_3^2 + v_4^2})x_1(s) + v_2 x_2(s) + v_3 x_3(s) + v_4 x_4(s) - 1$, temos

$$\frac{\partial H}{\partial v_i} = x_i(s) - \frac{v_i}{v_1} x_1(s),$$

para $i = 2, 3, 4$. Portanto, o 2-jato de $\frac{\partial H}{\partial v_i}$ em s_0 é:

$$x_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x_1(s_0) + \left(x'_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x'_1(s_0) \right) (s - s_0) + \frac{1}{2} \left(x''_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x''_1(s_0) \right) (s - s_0)^2.$$

Primeiro damos a prova para $k = 3$. Assumimos que h_v tem uma singularidade A_3 em $s = s_0$. Neste caso, mostramos que o determinante da matriz 3×3

$$A = \begin{pmatrix} x_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x_1(s_0) & x_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x_1(s_0) & x_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x_1(s_0) \\ x'_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x'_1(s_0) & x'_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x'_1(s_0) & x'_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x'_1(s_0) \\ x''_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x''_1(s_0) & x''_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x''_1(s_0) & x''_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x''_1(s_0) \end{pmatrix}$$

é não nulo. De fato, denotando

$$a = \begin{pmatrix} x_1(s_0) \\ x'_1(s_0) \\ x''_1(s_0) \end{pmatrix}, b_i = \begin{pmatrix} x_i(s_0) \\ x'_i(s_0) \\ x''_i(s_0) \end{pmatrix},$$

para $i = 2, 3, 4$, temos

$$\det A = \frac{v_1}{v_1} \det(b_2 \ b_3 \ b_4) - \frac{v_2}{v_1} \det(a \ b_3 \ b_4) - \frac{v_3}{v_1} \det(b_2 \ a \ b_4) - \frac{v_4}{v_1} \det(b_2 \ b_3 \ a).$$

Por outro lado, temos

$$(\gamma \wedge \gamma' \wedge \gamma'')(s_0) = (-\det(b_2 \ b_3 \ b_4), -\det(a \ b_3 \ b_4), -\det(b_2 \ a \ b_4), -\det(b_2 \ b_3 \ a)),$$

e portanto

$$\begin{aligned} \det A &= \left\langle \left(\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \frac{v_4}{v_1} \right), (\gamma \wedge \gamma' \wedge \gamma'')(s_0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{v_1} \langle \gamma(s_0) + \mu n(s_0) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta} e(s_0), k_g(s_0) e(s_0) \rangle \\ &= \pm \frac{1}{v_1} (-\delta) \sqrt{k_g^2(s_0) \delta + 1}. \end{aligned}$$

No caso em que $n(s_0)$ é um vetor tipo espaço, temos $\det A = \mp \frac{1}{v_1} \sqrt{k_g^2(s_0) + 1} \neq 0$ e portanto, H é um desdobramento versal de h_v at $s = s_0$. Quando $n(s_0)$ é um vetor tipo tempo, temos que $\det A = \pm \frac{1}{v_1} \sqrt{1 - k_g^2(s_0)}$ e portanto $\det A \neq 0$ sob a condição que $k_g(s_0) \neq 1$, que é uma condição genérica para um ponto de singularidade A_3 . Logo, genericamente, H é um desdobramento versal de h_v em $s = s_0$. Agora damos a prova para o caso $k = 2$. Neste caso, queremos que a matriz 2×3

$$B = \begin{pmatrix} x_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x_1(s_0) & x_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x_1(s_0) & x_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x_1(s_0) \\ x'_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x'_1(s_0) & x'_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x'_1(s_0) & x'_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x'_1(s_0) \end{pmatrix}$$

seja não singular. Visto que B é a primeira e segunda linha da matriz A , temos que se $n(s_0)$ é um vetor tipo espaço, a matriz B é não singular, pois $\det A \neq 0$. Se $n(s_0)$ é um vetor tipo tempo, a matriz B é não singular se $k_g(s_0) \neq 1$. Para o caso $k_g(s_0) = 1$,

calculamos o determinante da matriz Gram-Schmidt de B o qual é igual a $\frac{2(x_1(s_0) - v_1)}{v_1}$. Então é suficiente mostrar que $x_1(s_0) \neq v_1$. No caso quando $k_g(s_0) = 1$, temos

$$v(s_0) = \gamma(s_0) - n(s_0) = \gamma(s_0) - (t'(s_0) + \gamma(s_0))$$

pela Proposição 4.1.1 (2) e pela fórmula tipo Frenet-Serret. Portanto $v_1 = -x_1''(s_0)$. Visto que $t'(s_0) = n(s_0) - \gamma(s_0)$, temos $x_1''(s_0) = n_1(s_0) - x_1(s_0)$, isto é, $v_1 = x_1(s_0) - n_1(s_0)$, onde $n(s_0) = (n_1(s_0), n_2(s_0), n_3(s_0), n_4(s_0))$. Sem perda de generalidade podemos supor que $n_1(s_0) \neq 0$ e portanto temos $x_1(s_0) \neq v_1$. $\square$

Usando o Teorema 1.3.3 e a Proposição 4.1.3 podemos conhecer a forma geométrica da superfície horoesférica, e o principal resultado nesta seção é dado como segue.

Teorema 4.1.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com $k_g(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então temos o seguinte:*

- (1) *A superfície horoesférica $HS_\gamma^\pm$ de γ é singular em (s_0, μ_0) se, e somente se, $\mu_0 = \frac{1}{k_g(s_0)\delta(\gamma(s_0))}$.*
- (2) *A superfície horoesférica $HS_\gamma^\pm$ de γ é localmente difeomorfa ao eixo cuspidal $C \times \mathbb{R}$ em (s_0, μ_0) se, e somente se, $\mu_0 = \frac{1}{k_g(s_0)\delta(\gamma(s_0))}$ e $\sigma_{h_v}(s_0) \neq 0$.*
- (3) *A superfície horoesférica $HS_\gamma^\pm$ de γ é localmente difeomorfa ao rabo de andorinha SW em (s_0, μ_0) se, e somente se, $\mu_0 = \frac{1}{k_g(s_0)\delta(\gamma(s_0))}$, $\sigma_{h_v}(s_0) = 0$ e $\sigma'_{h_v}(s_0) \neq 0$, para $n(s_0)$ tipo tempo com $k_g(s_0) \neq 1$, ou para $n(s_0)$ tipo espaço.*

Demonstração. Considere a superfície horoesférica dada por $HS_\gamma^\pm(s, \mu) = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s)$. Então, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial HS_\gamma^\pm}{\partial s}(s, \mu) &= (1 - \mu\delta(\gamma(s))k_g(s))t(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}\tau_g(s)n(s) + \mu\tau_g(s)e(s) \quad e \\ \frac{\partial HS_\gamma^\pm}{\partial \mu}(s, \mu) &= n(s) \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}}e(s). \end{aligned}$$

Portanto, temos que os vetores $\left\{ \frac{\partial HS_\gamma^\pm}{\partial s}(s_0, \mu_0), \frac{\partial HS_\gamma^\pm}{\partial \mu}(s_0, \mu_0) \right\}$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\mu_0 = \frac{1}{k_g(s_0)\delta(\gamma(s_0))}$ e portanto a afirmação (1) está provada.

Pela Corolário 4.1.2, o conjunto discriminante $\mathfrak{D}_H$ da família de funções altura horoesférica H de γ é a superfície horoesférica de γ . Também segue das afirmações (3) e (4) da Proposição 4.1.1 que h_v tem singularidade do tipo A_2 (respectivamente, singularidade do tipo A_3) em $s = s_0$ se, e somente se, $\mu_0 = \frac{1}{k_g(s_0)\delta(\gamma(s_0))}$ e $\sigma_{h_v}(s_0) \neq 0$ (respectivamente, $\mu_0 = \frac{1}{k_g(s_0)\delta(\gamma(s_0))}$, $\sigma_{h_v}(s_0) = 0$ e $\sigma'_{h_v}(s_0) \neq 0$). Pelo Teorema 1.3.3 e Proposição 4.1.3, temos as afirmações (2) e (3). Observemos que em (3) se $n(s_0)$ for tipo tempo é necessário a condição genérica $k_g(s_0) \neq 1$ para valer a Proposição 4.1.3. $\square$

4.2 Invariantes e geometria especial da superfície horoesférica

Queremos estudar o significado geométrico do invariante $\sigma_{h_v}(s)$. Para isto introduzimos alguns conceitos.

Temos três tipos de superfície especiais em S_1^3 as quais são dadas pela interseção de S_1^3 e hiperplanos em $\mathbb{R}_1^4$ (ver [18]). Uma superfície $S_1^3 \cap P(v, c)$ é chamada uma quádrlica de Sitter elíptica, uma quádrlica de Sitter hiperbólica ou uma quádrlica de Sitter parabólica se $P(v, c)$ é tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz respectivamente, onde $P(v, c) = \{x \in \mathbb{R}_1^4 \mid \langle x, v \rangle = c\}$ é um hiperplano em $\mathbb{R}_1^4$. Denotamos a quádrlica de Sitter parabólica por $QDP(v, c)$, isto é, $QDP(v, c) = S_1^3 \cap P(v, c)$ com v tipo luz.

Sejam v um vetor tipo luz, w um vetor tipo espaço e z um vetor tipo tempo. Chamaremos as curvas espaciais de Sitter dadas pelas interseções $QDP(v, 1) \cap P(w, 0)$ e $QDP(v, 1) \cap P(z, 0)$, de T-horoparábolas e S-horoparábolas, respectivamente. Dada uma curva tipo espaço γ in S_1^3 parametrizada pelo comprimento de arco, o vetor normal unitário n pode ser um vetor tipo tempo ou um vetor tipo espaço. Provamos as seguintes proposições que dão condições para a curva γ estar numa quádrlica de Sitter parabólica. Isto está relacionado ao invariante $\sigma_{h_v}(s)$. Foi necessário dividir em dois casos: $n(s)$ tipo tempo (Proposição 4.2.1) e $n(s)$ tipo espaço (Proposição 4.2.2). Além disso, também damos condições para γ ser parte de uma T-horoparábola ou uma S-horoparábola.

Proposição 4.2.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com n campo vetorial tipo tempo. Considere os pontos singulares $HS_\gamma^\pm(s)$ da superfície horoesférica, portanto $0 < k_g(s) \leq 1$.*

(1) Suponha que $k_g(s) \equiv 1$. Então as seguintes condições são equivalentes:

(a) $HS_\gamma^\pm(s)$ é um vetor constante.

(b) $\tau_g(s) \equiv 0$.

(c) γ é uma parte da T-horoparábola.

(2) Suponha que o conjunto $\{s \in I \mid k_g(s) = 1\}$ consiste de pontos isolados. As seguintes condições são equivalentes:

(a) $HS_\gamma^\pm(s)$ é um vetor constante $v_0 \in LC^*$.

(b) $\sigma_{h_v}(s) \equiv 0$.

(c) γ está localizada sobre uma quádrlica de Sitter parabólica $QDP(v_0, 1)$.

Demonstração. Considere os pontos singulares $HS_\gamma^\pm(s)$ da superfície horoesférica que chamamos aqui de $v(s) = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 - 1}e(s)$ com $\mu = -\frac{1}{k_g(s)}$.

(1) Suponha que $k_g(s) \equiv 1$. Então $v(s) = \gamma(s) - n(s)$ e temos $v'(s) = -\tau_g(s)e(s)$. Portanto $v(s)$ é constante se, e somente se, $\tau_g(s) \equiv 0$, e as condições (a) e (b) de (1) são equivalentes. Se $v(s)$ é constante, então $\tau_g(s) \equiv 0$ e como $e'(s) = \tau_g(s)n(s)$, isto significa que $e(s)$ é vetor constante tipo espaço. Assim o hiperplano $P(e(s), 0)$ gerado por $\gamma(s)$, $t(s)$ e $n(s)$, é constante. Neste caso a quádrlica de Sitter parabólica $QDP(v(s), 1)$ também é constante. Com isso a imagem de γ é parte da T-horoparábola dada por $QDP(v(s), 1) \cap P(e(s), 0)$. Portanto (a) implica (c). Se γ é uma parte de uma T-horoparábola, então ela é uma curva plana de Sitter. Portanto, temos $\tau_g(s) \equiv 0$ e então (c) implica (b). Isto completa a prova da afirmação (1).

(2) Consideramos o caso $k_g(s) \neq 1$. Visto que $\mu(s) = -\frac{1}{k_g(s)}$, temos

$$v(s) = \gamma(s) - \frac{1}{k_g(s)}n(s) \pm \frac{\sqrt{1 - k_g^2(s)}}{k_g(s)}e(s).$$

Então

$$v'(s) = \left(\frac{k'_g \pm k_g \tau_g \sqrt{1 - k_g^2}}{k_g^2} \right) (s) n(s) - \left(\frac{k_g \tau_g \sqrt{1 - k_g^2} \pm k'_g}{k_g^2 \sqrt{1 - k_g^2}} \right) (s) e(s).$$

Portanto, $v'(s) \equiv 0$ se, e somente se, $\sigma_{h_v}(s) \equiv 0$, onde $\sigma_{h_v}(s) = (k'_g \pm (-k_g \tau_g) \sqrt{1 - k_g^2})(s)$, e as condições (a) e (b) de (2) são equivalentes. Pela hipótese de (2), o conjunto de pontos com $k_g(s) \neq 1$ é um subconjunto aberto e denso do intervalo I . Portanto, as condições (a) e (b) de (2) são equivalentes em todo ponto de I .

Agora consideremos a família de funções altura horoesférica $H(s, v)$ sobre γ . Se γ está localizada sobre a quádrlica de Sitter parabólica $QDP(v_0, 1)$, então isto significa que $H(s, v_0) \equiv 0$ e portanto todas as suas derivadas com relação a s se anulam. Pela afirmação (4) da Proposição 4.1.1, temos $(k'_g \pm k_g \tau_g \sqrt{1 - k_g^2})(s) \equiv 0$, logo (c) implica (b). Para (a) implicar (c), se $v(s)$ é um vetor constante v_0 tipo luz, temos que $h_{v_0}(s) = 0$ para todo $s \in I$, ou seja, $\langle \gamma(s), v_0 \rangle = 1$ para todo $s \in I$ e assim $\gamma(s) \in QDP(v_0, 1)$ para todo $s \in I$. Portanto, γ está localizada sobre uma quádrlica de Sitter parabólica. $\square$

Proposição 4.2.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com n campo vetorial tipo espaço e $k_g(s) \neq 0$. Considere os pontos singulares $HS_\gamma^\pm(s)$ da superfície horoesférica. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $HS_\gamma^\pm(s)$ é um vetor constante $v_0 \in LC^*$.
- (b) $\sigma_{h_v}(s) \equiv 0$.
- (c) γ está localizado sobre uma quádrlica de Sitter parabólica $QDP(v_0, 1)$.

Além disso, quando $\gamma \subset QDP(v_0, 1)$ e $\tau_g(s) \equiv 0$ então γ é parte de uma S -horoparábola.

Demonstração. Considere os pontos singulares $HS_\gamma^\pm(s)$ da superfície horoesférica que chamamos aqui de $v(s) = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + 1}e(s)$ com $\mu = \frac{1}{k_g(s)}$. Então,

$$v'(s) = \left(\frac{-k'_g \pm k_g \tau_g \sqrt{k_g^2 + 1}}{k_g^2} \right) (s) n(s) - \left(\frac{-k_g \tau_g \sqrt{k_g^2 + 1} \pm k'_g}{k_g^2 \sqrt{k_g^2 + 1}} \right) (s) e(s).$$

Portanto, $v'(s) \equiv 0$ se, e somente se, $\sigma_{h_v}(s) \equiv 0$, e as condições (a) e (b) são equivalentes.

Considere a família de funções altura horoesférica $H(s, v)$ sobre γ . Se γ está localizada sobre a quádrlica de Sitter parabólica $QDP(v_0, 1)$, então isto significa que $H(s, v_0) \equiv 0$ e portanto todas as suas derivadas com relação a s se anulam. Pela afirmação (4) da

Proposição 4.1.1, temos $(k'_g \pm (-k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 + 1})(s) \equiv 0$, logo (c) implica (b). Para (a) implicar (c), se $v(s)$ é um vetor constante v_0 tipo luz, temos que $\langle \gamma(s), v_0 \rangle = 1$ para todo $s \in I$ e assim $\gamma(s) \in QDP(v_0, 1)$ para todo $s \in I$. Portanto, γ está localizada sobre uma quádrlica de Sitter parabólica.

Agora suponha que $\tau_g(s) \equiv 0$. Como $e'(s) = \tau_g(s)n(s)$, significa que $e(s)$ é vetor constante tipo tempo. Assim o hiperplano $P(e(s), 0)$ gerado por $\gamma(s)$, $t(s)$ e $n(s)$, é constante. Como, $\gamma \subset QDP(v_0, 1)$ para algum v_0 , então a imagem de γ é parte da S-horoparábola dada por $QDP(v_0, 1) \cap P(e(s), 0)$.

□

4.3 Família de funções altura hiperbólica

Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco. Lembre-se que estamos supondo $\langle t'(s), t'(s) \rangle \neq 1$ (condição genérica), que é equivalente a $k_g(s) = \|t'(s) + \gamma(s)\| \neq 0$ para $s \in I$, para definirmos $n(s) = \frac{t'(s) + \gamma(s)}{\|t'(s) + \gamma(s)\|}$. Então $n(s)$ é um campo de vetores normais tipo espaço ou um campo de vetores normais tipo tempo de γ . A próxima proposição dá informações sobre a geometria da superfície dual hiperbólica.

Proposição 4.3.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g(s) \neq 0$ para todo $s \in I$.*

- (1) *Se $n(s)$ é um campo de vetores normais tipo espaço, a superfície dual hiperbólica $HD_\gamma^\pm$ de γ é singular em (s_0, μ_0) se, e somente se, $\mu_0 = 0$. Ou seja, os pontos singulares da superfície dual hiperbólica são dados por $HD_\gamma^\pm(s) = HD_\gamma^\pm(s, 0)$, $s \in I$.*
- (2) *Se $n(s)$ é um campo de vetores normais tipo tempo, a superfície dual hiperbólica $HD_\gamma^\pm$ de γ não tem pontos singulares.*

Demonstração. Considere a superfície dual hiperbólica de γ dada por

$$HD_\gamma^\pm(s, \mu) = \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))} e(s).$$

Então, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial HD_{\gamma}^{\pm}}{\partial s}(s, \mu) &= -\delta(\gamma(s))\mu k_g(s)t(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}\tau_g(s)n(s) + \mu\tau_g(s)e(s) \quad e \\ \frac{\partial HD_{\gamma}^{\pm}}{\partial \mu}(s, \mu) &= n(s) \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}}e(s).\end{aligned}$$

Assim, os vetores $\left\{ \frac{\partial HD_{\gamma}^{\pm}}{\partial s}(s_0, \mu_0), \frac{\partial HD_{\gamma}^{\pm}}{\partial \mu}(s_0, \mu_0) \right\}$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\mu_0 = 0$. Se $n(s)$ é um campo de vetores normais tipo espaço a afirmação (1) está provada. Contudo, se $n(s)$ é um campo de vetores normais tipo tempo, temos que para $\mu_0 = 0$ a superfície dual hiperbólica não está definida e portanto a afirmação (2) está provada. $\square$

Pela proposição acima, temos que a superfície dual hiperbólica de uma curva tipo espaço com $n(s)$ um campo de vetores normais tipo tempo, não tem pontos singulares. Assim, na próxima seção, usamos técnicas da teoria de singularidades para estudar a superfície dual hiperbólica de uma curva tipo espaço apenas quando $n(s)$ é um campo de vetores normais tipo espaço.

Nesta seção, também introduzimos uma família de funções sobre uma curva a qual é útil para o estudo da superfície dual hiperbólica de uma curva γ com singularidades. Ou seja, a superfície $HD_{\gamma}^{\pm}(s, \mu) = \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s)$ com $n(s)$ um campo de vetores normais tipo espaço (Proposição 4.3.1). Para esta curva tipo espaço $\gamma : I \rightarrow S_1^3$, definimos uma família de funções $H : I \times H^3(-1) \rightarrow \mathbb{R}$ por $H(s, v) = \langle \gamma(s), v \rangle$. Chamamos H uma *família de funções altura hiperbólica sobre γ* e denotamos $h_v(s) = H(s, v)$ para todo $v \in H^3(-1)$ fixado. A família de funções altura hiperbólica H mede o contato de γ com hiperplanos tipo espaço in $\mathbb{R}_1^4$. Genericamente, este contato pode ser A_k , $1 \leq k \leq 3$.

A partir do seguinte resultado podemos obter condições equivalentes para cada singularidade A_k , $1 \leq k \leq 3$.

Proposição 4.3.2. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com $n(s)$ um campo de vetores tipo espaço e $k_g(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então temos o seguinte:*

- (1) $h_v(s) = 0$ se, e somente se, existem números reais μ, λ, η com $\eta^2 + \mu^2 - \lambda^2 = -1$ tal que $v = \eta t(s) + \mu n(s) + \lambda e(s)$.

(2) $h_v(s) = h'_v(s) = 0$ se, e somente se, existem números reais μ, λ tal que $v = \mu n(s) + \lambda e(s)$ com $\lambda^2 - \mu^2 = 1$.

(3) $h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \pm e(s)$.

(4) $h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \pm e(s)$ e $\tau_g(s) = 0$.

(5) $h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = h_v^{(4)}(s) = 0$ se, e somente se, $v = \pm e(s)$ e $\tau_g(s) = \tau'_g(s) = 0$.

Demonstração. Visto que $h_v(s) = \langle \gamma(s), v \rangle$, temos os seguintes cálculos:

(a) $h'_v(s) = \langle t(s), v \rangle,$

(b) $h''_v(s) = \langle -\gamma(s) + k_g(s)n(s), v \rangle,$

(c) $h'''_v(s) = \langle (-1 - k_g^2(s))\gamma(s) + k'_g(s)n(s) + k_g(s)\tau_g(s), v \rangle,$

(d) $h_v^{(4)}(s) = \langle (1 + k_g^2(s))\gamma(s) - 3k'_g(s)k_g(s)t(s) + (-k_g(s) + k''_g(s) + k_g(s)\tau_g^2(s) - k_g^3(s))n(s) + (2k'_g(s)\tau_g(s) + k_g(s)\tau'_g(s))e(s), v \rangle.$

A afirmação (1) segue da definição. Com a relação (a), $h_v(s) = h'_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \mu n(s) + \lambda e(s)$ com $\lambda^2 - \mu^2 = 1$. Acrescentando a relação (b), $h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + 1}e(s)$ e $0 = \langle -\gamma(s) + k_g(s)n(s), v \rangle = \mu k_g(s)$. Isto significa que as afirmações (2) e (3) são verdadeiras. Com a fórmula (c), $h_v(s) = h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \pm e(s)$ e $\tau_g(s) = 0$. Isto significa que a afirmação (4) vale. Por argumentos similares, podemos mostrar a afirmação (5). $\square$

Corolário 4.3.3. *A superfície dual hiperbólica de γ é o conjunto discriminante, $\mathfrak{D}_H$, da família de funções altura hiperbólica H .*

Demonstração. A prova segue diretamente da definição de conjunto discriminante dada no Capítulo 1 e da Proposição 4.3.2 (2). $\square$

No próximo resultado mostramos que a função altura hiperbólica sobre uma curva tipo espaço, com $n(s)$ campo de vetores tipo espaço, é um desdobramento versal de uma singularidade A_k , $k = 2, 3$.

Proposição 4.3.4. *Sejam $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com n campo vetorial tipo espaço, $k_g(s) \neq 0$ e $H : I \times H^3(-1) \rightarrow \mathbb{R}$ a família de funções altura hiperbólica sobre $\gamma(s)$. Se h_v tem uma singularidade A_k ($k = 2, 3$) em s_0 , então H é um desdobramento versal de h_v .*

Demonstração. Temos

$$H(s, v) = -v_1 x_1(s) + v_2 x_2(s) + v_3 x_3(s) + v_4 x_4(s),$$

onde $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $\gamma(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s), x_4(s))$, $v_1 = \sqrt{1 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$ e $x_1(s) = \sqrt{x_2^2(s) + x_3^2(s) + x_4^2(s) - 1}$, pois $v \in H^3(-1)$ e $\gamma(s) \in S_1^3$.

Reescrevendo $H(s, v)$ como $H(s, v_2, v_3, v_4) = -(\sqrt{1 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2})x_1(s) + v_2 x_2(s) + v_3 x_3(s) + v_4 x_4(s) - 1$, temos

$$\frac{\partial H}{\partial v_i} = x_i(s) - \frac{v_i}{v_1} x_1(s),$$

para $i = 2, 3, 4$. Portanto, o 2-jato de $\frac{\partial H}{\partial v_i}$ em s_0 é:

$$x_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x_1(s_0) + \left(x'_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x'_1(s_0) \right) (s - s_0) + \frac{1}{2} \left(x''_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x''_1(s_0) \right) (s - s_0)^2.$$

Assumimos que h_v tem uma singularidade A_3 em $s = s_0$. Neste caso, mostramos que o determinante da matriz 3×3

$$A = \begin{pmatrix} x_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x_1(s_0) & x_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x_1(s_0) & x_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x_1(s_0) \\ x'_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x'_1(s_0) & x'_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x'_1(s_0) & x'_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x'_1(s_0) \\ x''_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x''_1(s_0) & x''_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x''_1(s_0) & x''_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x''_1(s_0) \end{pmatrix}$$

é não nulo. De fato, denotando

$$a = \begin{pmatrix} x_1(s_0) \\ x'_1(s_0) \\ x''_1(s_0) \end{pmatrix}, b_i = \begin{pmatrix} x_i(s_0) \\ x'_i(s_0) \\ x''_i(s_0) \end{pmatrix},$$

para $i = 2, 3, 4$, temos

$$\det A = \frac{v_1}{v_1} \det(b_2 \ b_3 \ b_4) - \frac{v_2}{v_1} \det(a \ b_3 \ b_4) - \frac{v_3}{v_1} \det(b_2 \ a \ b_4) - \frac{v_4}{v_1} \det(b_2 \ b_3 \ a).$$

Por outro lado, temos

$$(\gamma \wedge \gamma' \wedge \gamma'')(s_0) = (-\det(b_2 \ b_3 \ b_4), -\det(a \ b_3 \ b_4), -\det(b_2 \ a \ b_4), -\det(b_2 \ b_3 \ a)).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \det A &= \left\langle \left(\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \frac{v_4}{v_1} \right), (\gamma \wedge \gamma' \wedge \gamma'')(s_0) \right\rangle \\ &= \frac{1}{v_1} \langle \pm e(s_0), k_g(s_0) e(s_0) \rangle \\ &= \mp \frac{1}{v_1} k_g(s_0), \end{aligned}$$

e por hipótese como $k_g(s_0) \neq 0$ então, H é um desdobramento versal de h_v em $s = s_0$.

Agora damos a prova para o caso $k = 2$. Neste caso, queremos que a matriz 2×3

$$B = \begin{pmatrix} x_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x_1(s_0) & x_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x_1(s_0) & x_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x_1(s_0) \\ x'_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x'_1(s_0) & x'_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x'_1(s_0) & x'_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x'_1(s_0) \end{pmatrix}$$

seja não singular. Visto que B é a primeira e segunda linha de A , temos que o posto de B é 2. □

A proposição acima é fundamental para provar a próxima proposição que dá a forma geométrica da superfície dual hiperbólica com singularidades.

Teorema 4.3.5. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com $n(s)$ um campo de vetores tipo espaço e $k_g(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então temos o seguinte.*

- (1) *A superfície dual hiperbólica $HD_\gamma^\pm$ de γ é localmente difeomorfa ao eixo cuspidal $C \times \mathbb{R}$ em (s_0, μ_0) se, e somente se, $\mu_0 = 0$ e $\tau_g(s_0) \neq 0$.*
- (2) *A superfície dual hiperbólica $HD_\gamma^\pm$ de γ é localmente difeomorfa ao rabo de andorinha SW em (s_0, μ_0) se, e somente se, $\mu_0 = 0$, $\tau_g(s_0) = 0$ e $\tau'_g(s_0) \neq 0$.*

Demonstração. Pelo Corolário 4.3.3, o conjunto discriminante $\mathfrak{D}_H$ da família de funções altura hiperbólica H de γ é a superfície dual hiperbólica de γ . Segue da Proposição 4.3.2, (3) e (4), que h_v tem singularidade do tipo A_2 (respectivamente, singularidade do tipo A_3) em s_0 se, e somente se, $\mu_0 = 0$ e $\tau_g(s_0) \neq 0$ (respectivamente, $\mu_0 = 0$, $\tau_g(s_0) = 0$ e $\tau'_g(s_0) \neq 0$). Pelo Teorema 1.3.3 e Proposição 4.3.4, temos as afirmações (1) e (2). $\square$

4.4 Invariante e geometria especial da superfície dual hiperbólica

Nesta seção, investigamos as propriedades geométricas da superfície dual hiperbólica $HD_\gamma^\pm$ próximo de suas singularidades, usando o invariante τ_g de γ .

Denominamos $QDE(v, 0) = S_1^3 \cap P(v, 0)$ a quádrlica de Sitter elíptica, onde $P(v, 0)$ é um hiperplano tipo espaço, isto é, v é um vetor tipo tempo.

Proposição 4.4.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com n campo vetorial tipo espaço e $k_g(s) \neq 0$. Considere os pontos singulares $HD_\gamma^\pm(s)$ da superfície dual hiperbólica. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $HD_\gamma^\pm(s)$ é um vetor constante $v_0 \in H^3(-1)$.
- (b) $\tau_g(s) \equiv 0$,
- (c) γ é uma parte da quádrlica de Sitter elíptica $QDE(v_0, 0)$.

Demonstração. Se a superfície dual hiperbólica é singular em (s, μ_0) então $\mu_0 = 0$ pela Proposição 4.3.1 (1). Logo $HD_\gamma^\pm(s, \mu_0) = \pm e(s)$ e $\frac{\partial HD_\gamma^\pm}{\partial s}(s, \mu_0) = \pm \tau_g(s)n(s) \equiv 0$ se, e somente se, $\tau_g \equiv 0$. Isto significa que a condição (a) é equivalente a condição (b). Suponha que $\tau_g \equiv 0$ então $HD_\gamma^\pm(s, \mu_0) = \pm e(s) = \pm v_0$ constante. Além disso, como $\langle \gamma(s), \pm e(s) \rangle = 0$, então $\gamma(s) \in S_1^3 \cap P(e(s), 0)$, onde $v_0 = e(s)$ que é um vetor tipo tempo. Portanto a condição (b) implica a condição (c).

Para (c) implicar (b), suponha que $Im\gamma \subset QDE(v, 0) = S_1^3 \cap P(v, 0)$ onde v é tipo tempo. Então temos $h_v(s) = \langle \gamma(s), v \rangle = 0$ para todo $s \in I$ e portanto todas as derivadas se anulam. Logo pela Proposição 4.3.2 (4) temos $\tau_g(s) \equiv 0$. $\square$

Pelo resultado acima, caracterizamos quando a curva γ está contida na quádrlica de Sitter elíptica. Isto significa que $\tau_g(s) \equiv 0$. Caso contrário, se $\tau_g(s) \not\equiv 0$, o teorema abaixo mostra que a degenerância das singularidades de $HD_\gamma^\pm$ caracteriza o contato da curva com a quádrlica de Sitter elíptica.

Usaremos a seguinte definição no próximo resultado.

Definição 4.4.2. *Seja $F : \mathbb{R}_1^4 \rightarrow \mathbb{R}$ (respectivamente, $F|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$) uma submersão e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva regular, onde M é uma hipersuperfície em $\mathbb{R}_1^4$. Dizemos que γ e $F^{-1}(0)$ (respectivamente $F^{-1}(0) \cap M$) têm contato de ordem k em s_0 se a função $g(s) = F \circ \gamma(s)$ satisfaz $g(s_0) = g'(s_0) = \dots = g^{(k)}(s_0) = 0$ e $g^{(k+1)}(s_0) \neq 0$, isto é, g tem singularidade do tipo A_k em s_0 .*

Teorema 4.4.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco, com $n(s)$ um campo de vetores tipo espaço, $k_g(s) \neq 0$ e $\tau_g \not\equiv 0$. Para $v_0 = HD_\gamma^\pm(s_0, \mu_0)$, temos o seguinte:*

- (1) *γ tem pelo menos contato de ordem 2 com $QDE(v_0, 0)$ em s_0 se, e somente se, $\mu_0 = 0$ se, e somente se, a superfície dual hiperbólica de γ é singular em (s_0, μ_0) .*
- (2) *γ tem contato de ordem 2 com $QDE(v_0, 0)$ e s_0 se, e somente se, $\mu_0 = 0$ e $\tau_g(s_0) \neq 0$ se, e somente se, a superfície dual hiperbólica de γ é localmente difeomorfa ao eixo cuspidal $C \times \mathbb{R}$ em (s_0, μ_0) .*
- (3) *γ tem contato de ordem 3 com $QDE(v_0, 0)$ em s_0 se, e somente se, $\mu_0 = 0$, $\tau_g(s_0) = 0$ e $\tau'_g(s_0) \neq 0$ se, e somente se, a superfície dual hiperbólica de γ é localmente difeomorfa ao rabo de andorinha SW em (s_0, μ_0) .*

Demonstração. Para $v_0 = HD_\gamma^\pm(s_0, \mu_0)$ definimos a aplicação $\tilde{h}_{v_0} : S_1^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $\tilde{h}_{v_0}(x) = \langle x, v_0 \rangle$. Desta maneira temos que $(\tilde{h}_{v_0})^{-1}(0) = QDE(v_0, 0)$. Neste caso $g(s) = \tilde{h}_{v_0} \circ \gamma(s) = h_{v_0}(s)$ é a função altura hiperbólica que mede o contato de γ com o hiperplano $P(v_0, 0)$. O contato de γ com o hiperplano $P(v_0, 0)$ é o mesmo contato de γ com a quádrlica de Sitter elíptica $QDE(v_0, 0)$. Então a prova da primeira parte (primeiras equivalências em (1), (2) ou (3)) deste teorema segue da Definição 4.4.2 e da Proposição 4.3.2. A prova da segunda parte (segundas equivalências em (1), (2) ou (3)) segue da Proposição 4.3.2 e do Teorema 4.3.5. $\square$

4.5 Relações duais entre as superfícies horoesférica e dual hiperbólica

Precisamos de algumas propriedades de variedades contato e subvariedades Legendrianas para a dualidade estudada nesta seção, e agora revisamos estes conceitos (para mais detalhes ver por exemplo [1]). Seja N uma variedade suave de dimensão $(2m + 1)$ e K um campo de hiperplanos tangentes sobre N . Localmente tal campo é definido como o campo de zeros da 1-forma α . O campo de hiperplano tangente K é *não-degenerado* se $\alpha \wedge (d\alpha)^m \neq 0$ em todo ponto em N . O par (N, K) é uma *variedade contato* se K é um campo de hiperplanos não-degenerado. Neste caso K é chamado uma *estrutura de contato* e α uma *forma contato*. Uma subvariedade $i : L \subset N$ de uma variedade contato (N, K) é *Legendriana* se $\dim L = m$ e $di_x(T_x L) \subset K_{i(x)}$ em todo $x \in L$. Um feixe de fibras suave $\pi : E \rightarrow M$ é chamada uma *fibração Legendriana* se seu espaço total E está equipado com uma estrutura de contato e as fibras de π são subvariedades Legendrianas. Seja $\pi : E \rightarrow M$ uma fibração Legendriana. Para uma subvariedade Legendriana $i : L \subset E$, $\pi \circ i : L \rightarrow M$ é chamada uma *aplicação Legendriana*. A imagem da aplicação Legendriana $\pi \circ i$ é chamada conjunto *wavefront* de i e é denotado por $W(i)$.

O conceito de dualidade que usamos aqui são aqueles introduzidos em [11] e [10] (as dualidades Legendrianas entre pseudo-esferas no espaço Lorentz-Minkowski), onde cinco fibrações duplas Legendrianas são consideradas sobre os subconjuntos Δ_i , $i = 1, \dots, 5$ do produto de duas das pseudo esferas $H^n(-1)$, S_1^n e LC^* . A ideia geométrica por trás da escolha dos subconjuntos Δ_i e das fibrações duplas Legendrianas é como segue (ver [19]). Aqui usamos apenas $i = 1, 2, 3$.

Seja M uma hipersuperfície mergulhada em $H^n(-1)$. Considere um mergulho $x : U \rightarrow H^n(-1)$ de um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Escrevemos $M = x(U)$ e identificamos M e U através do mergulho x . Visto que $\langle x, x \rangle \equiv -1$, temos $\langle x_{u_i}, x \rangle \equiv 0$, para $i = 1, \dots, n-1$, onde $u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in U$. Podemos construir um vetor normal unitário tipo espaço $e(u)$ à M em $x(u)$ por

$$e(u) = \frac{x(u) \wedge x_{u_1}(u) \wedge \dots \wedge x_{u_{n-1}}(u)}{\|x_{u_1}(u) \wedge \dots \wedge x_{u_{n-1}}(u)\|},$$

onde $\wedge$ denota o pseudo produto vetorial de n vetores em $\mathbb{R}_1^{n+1}$. Então temos $\langle e, x_{u_i} \rangle = 0$,

$\langle e, x \rangle = 0$ e $\langle e, e \rangle = 1$. Logo segue que o vetor $x \pm e$ é um vetor tipo luz. Seja

$$\mathbb{E} : U \rightarrow S_1^n \text{ and } \mathbb{L}^\pm : U \rightarrow LC^*$$

as aplicações definidas por $\mathbb{E}(u) = e(u)$ e $\mathbb{L}^\pm(u) = x(u) \pm e(u)$. Estas são chamadas, respectivamente, a *aplicação de Gauss de Sitter* e *aplicação de Gauss cone de luz* de M .

Considere o par de mergulhos $\mathcal{L}_1 : U \rightarrow H^n(-1) \times S_1^n$ dado por $\mathcal{L}_1(u) = (x(u), \mathbb{E}(u))$. Podemos mostrar que $\mathcal{L}_1$ é um mergulho Legendriano no subconjunto $\Delta_1 = \{(v, w) \in H^n(-1) \times S_1^n \mid \langle v, w \rangle = 0\}$. (A estrutura de contato sobre Δ_1 é dada abaixo). Isto significa que $M = x(U)$ e $M^* = \mathbb{E}(U)$ são duais. Chamamos esta dualidade de Δ_1 -dualidade.

Considere agora a aplicação de Gauss cone de luz $\mathbb{L}^\pm : U \rightarrow LC^*$ a qual satisfaz $\langle x(u), \mathbb{L}^\pm(u) \rangle = -1$. O par $(x, \mathbb{L}^\pm) : U \rightarrow H^n(-1) \times LC^*$ determina o mergulho Legendriano no conjunto $\Delta_2 = \{(v, w) \in H^n(-1) \times LC^* \mid \langle v, w \rangle = -1\}$, assim $M = x(U)$ e $M^* = \mathbb{L}^\pm(U)$ são duais. Chamamos esta dualidade de Δ_2 -dualidade.

Similarmente, temos $\langle \mathbb{E}(u) \pm x(u), \mathbb{E}(u) \rangle = 1$ que leva ao conceito de Δ_3 -dualidade.

Nesta seção, definimos 1-formas $\langle dv, w \rangle = w_0 dv_0 + \sum_{i=1}^n w_i dv_i$, $\langle v, dw \rangle = v_0 dw_0 + \sum_{i=1}^n v_i dw_i$ em $\mathbb{R}_1^{n+1} \times \mathbb{R}_1^{n+1}$, e consideramos as seguintes três fibrações duplas Legendrianas.

$$\begin{aligned} (1) \quad (a) \quad & H^n(-1) \times S_1^n \supset \Delta_1 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = 0\}, \\ (b) \quad & \pi_{11} : \Delta_1 \rightarrow H^n(-1), \quad \pi_{12} : \Delta_1 \rightarrow S_1^n, \\ (c) \quad & \theta_{11} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_1}, \quad \theta_{12} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad (a) \quad & H^n(-1) \times LC^* \supset \Delta_2 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = -1\}, \\ (b) \quad & \pi_{21} : \Delta_2 \rightarrow H^n(-1), \quad \pi_{22} : \Delta_2 \rightarrow LC^*, \\ (c) \quad & \theta_{21} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_2}, \quad \theta_{22} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (a) \quad & LC^* \times S_1^n \supset \Delta_3 = \{(v, w) \mid \langle v, w \rangle = 1\}, \\ (b) \quad & \pi_{31} : \Delta_3 \rightarrow LC^*, \quad \pi_{32} : \Delta_3 \rightarrow S_1^n, \\ (c) \quad & \theta_{31} = \langle dv, w \rangle|_{\Delta_3}, \quad \theta_{32} = \langle v, dw \rangle|_{\Delta_3}. \end{aligned}$$

Aqui, $\pi_{i1}(v, w) = v$, $\pi_{i2}(v, w) = w$ são as projeções canônicas. Observe que $\theta_{i1}^{-1}(0)$ e $\theta_{i2}^{-1}(0)$ definem o mesmo campo de hiperplanos tangentes sobre Δ_i o qual é denotado por K_i , ($i = 1, 2, 3$). Foi demonstrado em [11] que cada (Δ_i, K_i) ($i = 1, 2, 3$) é uma variedade contato e π_{i1} e π_{i2} ($i = 1, 2, 3$) são fibrações Legendrianas. Além disso, as variedades de contato (Δ_1, K_1) , (Δ_2, K_2) e (Δ_3, K_3) são contatos difeomorfos umas com as outras.

Dada uma subvariedade Legendriana $i : L \rightarrow \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$, dizemos que $\pi_{i1}(i(L))$ é o Δ_i -dual de $\pi_{i2}(i(L))$ e vice-versa (ver [8]). No próximo resultado, para mostrar a dualidade teremos então que mostrar que a imersão $i : L \rightarrow \Delta_i$, $i = 1, 2, 3$, é uma imersão Legendriana, ou seja, como já vimos, $\dim L = m$ e $di_x(T_x L) \subset K_{i(x)}$ para todo $x \in L$ (ver também [11]). Equivalentemente, i é uma imersão Legendriana se $\dim L = m$ e $i^*\theta_{i1} = 0$ (ver, por exemplo, [22]). Portanto, podemos mostrar que uma subvariedade é Legendriana usando a segunda definição.

Visto que $\mathcal{L}_1$ é um mergulho Legendriano, temos $\langle dx(u), \mathbb{E}(u) \rangle = 0$, de modo que $\mathbb{E}(u)$ pertence ao plano normal de $M = x(U)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, temos as seguintes propriedades geométricas para uma subvariedade Legendriana $\mathcal{L}_1(U) \subset \Delta_1$. Se $\pi_{11}(\mathcal{L}_1(U))$ é suave no ponto $\pi_{11}(\mathcal{L}_1(u))$, então $\pi_{12}(\mathcal{L}_1(u))$ é o vetor normal à hipersuperfície $\pi_{11}(\mathcal{L}_1(U)) \subset H^n(-1)$ em $\pi_{11}(\mathcal{L}_1(u))$. Reciprocamente, se $\pi_{12}(\mathcal{L}_1(U))$ é suave no ponto $\pi_{12}(\mathcal{L}_1(u))$, então $\pi_{11}(\mathcal{L}_1(u))$ é o vetor normal à hipersuperfície $\pi_{12}(\mathcal{L}_1(U)) \subset S_1^n$. Para a Δ_i -dualidade, $i = 2, \dots, 5$, podemos pensar da mesma maneira (ver [19]).

Então temos as seguintes relações duais sobre as superfícies horoesférica e dual hiperbólica. Observe que aqui $n = 3$, $m = 2$ e $\dim \Delta_i = 5$, $i = 1, 2, 3$.

Teorema 4.5.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow S_1^3$ uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g(s) \neq 0$ para todo $s \in I$. Então*

(1) γ é Δ_1 -dual da superfície dual hiperbólica $HD_\gamma^\pm$.

(2) γ é Δ_3 -dual da superfície horoesférica $HS_\gamma^\pm$.

(3) $HD_\gamma^\pm$ é Δ_2 -dual de $HS_\gamma^\pm$.

Demonstração. (1) Considere a aplicação $\mathcal{L}_1 : I \times J \rightarrow \Delta_1$, $U = I \times J$, definida por $\mathcal{L}_1(s, \mu) = (HD_\gamma^\pm(s, \mu), \gamma(s))$, onde $M = \pi_{11}(\mathcal{L}_1(U)) = HD_\gamma^\pm(s, \mu) = \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s)$ e $M^* = \pi_{12}(\mathcal{L}_1(U)) = \gamma(s)$.

Então temos $\langle HD_\gamma^\pm(s, \mu), \gamma(s) \rangle = 0$ e a aplicação está bem definida, isto é, $\mathcal{L}_1(s, \mu) \in$

Δ_1 . Visto que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial s}(s, \mu) &= (-\delta(\gamma(s))\mu k_g(s)t(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}\tau_g(s)n(s) + \mu\tau_g(s)e(s), t(s)) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \mu}(s, \mu) &= (n(s) \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}}e(s), 0),\end{aligned}$$

temos que $\mathcal{L}_1$ é uma imersão. Além disso, $\mathcal{L}_1^*\theta_{12} = \langle HD_\gamma^\pm(s, \mu), t(s) \rangle ds = 0$. Portanto, por definição $\mathcal{L}_1(I \times J)$ é uma subvariedade Legendriana em Δ_1 .

(2) Consideramos também a aplicação $\mathcal{L}_3 : I \times J \rightarrow \Delta_3$ definida por $\mathcal{L}_3(s, \mu) = (HS_\gamma^\pm(s, \mu), \gamma(s))$, onde $HS_\gamma^\pm(s, \mu) = \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}e(s)$.

Logo, $\langle HS_\gamma^\pm(s, \mu), \gamma(s) \rangle = 1$, isto é, $\mathcal{L}_3(s, \mu) \in \Delta_3$. Como

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial s}(s, \mu) &= ((1 - \delta(\gamma(s))\mu k_g(s))t(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}\tau_g(s)n(s) + \mu\tau_g(s)e(s), t(s)) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial \mu}(s, \mu) &= (n(s) \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}}e(s), 0),\end{aligned}$$

temos que $\mathcal{L}_3$ é uma imersão. Além disso, $\mathcal{L}_3^*\theta_{32} = \langle HS_\gamma^\pm(s, \mu), t(s) \rangle ds = 0$. Portanto, $\mathcal{L}_3(I \times J)$ é uma subvariedade Legendriana em Δ_3 .

(3) Agora considere a aplicação $\mathcal{L}_2 : I \times J \rightarrow \Delta_2$ definida por $\mathcal{L}_2(s, \mu) = (HD_\gamma^\pm(s, \mu), HS_\gamma^\pm(s, \mu))$. Então temos

$$\langle HD_\gamma^\pm(s, \mu), HS_\gamma^\pm(s, \mu) \rangle = \mu^2\delta(\gamma(s)) + (\mu^2 + \delta(\gamma(s)))(-\delta(\gamma(s))) = -1.$$

Assim, $\mathcal{L}_2(s, \mu) \in \Delta_2$ e a aplicação está bem definida. Visto que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial s}(s, \mu) &= (-\delta(\gamma(s))\mu k_g(s)t(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}\tau_g(s)n(s) + \mu\tau_g(s)e(s), (1 - \delta(\gamma(s))\mu k_g(s))t(s) \\ &\quad \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}\tau_g(s)n(s) + \mu\tau_g(s)e(s)) \\ \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \mu}(s, \mu) &= (n(s) \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}}e(s), n(s) \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}}e(s)),\end{aligned}$$

temos que $\mathcal{L}_2$ é uma imersão, pois $-\delta(\gamma(s))\mu k_g(s) = 0$ e $1 - \delta(\gamma(s))\mu k_g(s) = 0$ nunca

ocorrem ao mesmo tempo, e $\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial s}(s, \mu)$ e $\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial \mu}(s, \mu)$ nunca se anulam. Além disso,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2^* \theta_{21} &= \langle d(HD_\gamma^\pm(s, \mu)), HS_\gamma^\pm(s, \mu) \rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial HD_\gamma^\pm}{\partial s}(s, \mu) ds + \frac{\partial HD_\gamma^\pm}{\partial \mu}(s, \mu) d\mu, HS_\gamma^\pm(s, \mu) \right\rangle \\
&= \left\langle -\mu \delta(\gamma(s)) k_g(s) t(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))} \tau_g(s) n(s) + \mu \tau_g(s) e(s), \gamma(s) \right\rangle ds \\
&+ \left\langle -\mu \delta(\gamma(s)) k_g(s) t(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))} \tau_g(s) n(s) + \mu \tau_g(s) e(s), \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))} e(s) \right\rangle ds \\
&+ \left\langle n(s) \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))}} e(s), \gamma(s) + \mu n(s) \pm \sqrt{\mu^2 + \delta(\gamma(s))} e(s) \right\rangle d\mu = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{L}_2(I \times J)$ é uma subvariedade Legendriana em Δ_2 . □

Curvas sobre hipersuperfícies tipo espaço

Neste capítulo estudamos curvas sobre hipersuperfícies tipo espaço. Consideramos um mergulho tipo espaço $X : U \rightarrow \mathbb{R}_1^4$ de um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^3$. Escrevemos $M = X(U)$ e indentificamos M e U através do mergulho X . Dizemos que X é um *mergulho tipo espaço* se o espaço tangente $T_p M$ consiste de vetores tipo espaço em todo $p = X(u)$. Seja $\bar{\gamma} : I \rightarrow U$ uma curva regular, assim definimos uma curva $\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^4$ por $\gamma(s) = X(\bar{\gamma}(s))$. γ é uma *curva sobre a hipersuperfície tipo espaço* M . Como γ é uma curva tipo espaço, podemos reparametrizá-la pelo comprimento de arco s . Então, temos o vetor tangente unitário $t(s) = \gamma'(s)$ de $\gamma(s)$. Como X é um mergulho tipo espaço, temos um campo de vetores normais tipo tempo unitários ao longo de $M = X(U)$ definido por

$$n(p) = \frac{X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u) \wedge X_{u_3}(u)}{\| X_{u_1}(u) \wedge X_{u_2}(u) \wedge X_{u_3}(u) \|},$$

para $p = X(u)$. Dizemos que n é *direção futura* se $\langle n, e_1 \rangle < 0$, onde e_1 é o vetor da base canônica de $\mathbb{R}_1^{n+1}$ conforme o Capítulo 1. Escolhemos a orientação de M tal que n seja direção futura. Definimos $n_\gamma(s) = n \circ \gamma(s)$, de modo que temos um campo de vetores normais tipo tempo unitários n_γ ao longo de γ . Sob a hipótese que $\| \langle n_\gamma(s), t'(s) \rangle n_\gamma(s) + t'(s) \| \neq 0$, definimos

$$n_1(s) = \frac{\langle n_\gamma(s), t'(s) \rangle n_\gamma(s) + t'(s)}{\| \langle n_\gamma(s), t'(s) \rangle n_\gamma(s) + t'(s) \|}.$$

Assim segue que $\langle t, n_1 \rangle = 0$ e $\langle n_\gamma, n_1 \rangle = 0$. Portanto, podemos construir um vetor unitário tipo espaço $n_2(s) = n_\gamma(s) \wedge t(s) \wedge n_1(s)$. Então, temos uma base pseudo-ortonormal $\{n_\gamma(s), t(s), n_1(s), n_2(s)\}$ ao longo de γ , que é chamada *Lorentzian Darboux frame* ao longo de γ . Por argumentos canônicos, temos as seguintes fórmulas tipo Frenet-Serret:

$$\begin{cases} n'_\gamma(s) = k_n(s) t(s) + \tau_1(s) n_1(s) + \tau_2(s) n_2(s) \\ t'(s) = k_n(s) n_\gamma(s) + k_g(s) n_1(s) \\ n'_1(s) = \tau_1(s) n_\gamma(s) - k_g(s) t(s) + \tau_g(s) n_2(s) \\ n'_2(s) = \tau_2(s) n_\gamma(s) - \tau_g(s) n_1(s) \end{cases}$$

onde $k_n(s) = -\langle n_\gamma(s), t'(s) \rangle$ é a curvatura normal, $\tau_1(s) = \langle n_1(s), n'_\gamma(s) \rangle$ é a primeira torção normal, $\tau_2(s) = \langle n_2(s), n'_\gamma(s) \rangle$ é a segunda torção normal, $k_g(s) = \|\langle n_\gamma(s), t'(s) \rangle n_\gamma(s) + t'(s)\| = \|-k_n(s) n_\gamma(s) + t'(s)\|$ é a curvatura geodésica e $\tau_g(s) = \langle -n'_2(s), n_1(s) \rangle$ é a torção geodésica.

Observe que $\|\langle n_\gamma(s), t'(s) \rangle n_\gamma(s) + t'(s)\| \neq 0$ significa $k_g \neq 0$, e que portanto $k_g > 0$.

5.1 Família de funções altura tangencial tipo tempo

Nesta seção introduzimos uma família de funções sobre uma curva na hipersuperfície tipo espaço M : a família de funções altura tangencial tipo tempo. Além disso, definimos uma superfície através das singularidades da função altura tangencial tipo tempo e estudamos a geometria desta superfície.

Definimos a família de funções altura tangencial tipo tempo sobre uma curva, $\gamma : I \rightarrow M \subset \mathbb{R}_1^4$, em uma hipersuperfície tipo espaço M como:

$$H_t^T : I \times H^3(-1) \rightarrow \mathbb{R}; \quad (s, v) \mapsto \langle t(s), v \rangle.$$

Chamamos H_t^T a família de funções altura tangencial tipo tempo de γ sobre M . Denotamos por $(h_t^T)_v(s) = H_t^T(s, v)$ a função altura tangencial para $v \in H^3(-1)$ fixado. A família de funções altura tangencial tipo tempo H_t^T mede o contato da curva t com hiperplanos tipo espaço em $\mathbb{R}_1^4$. Genericamente, este contato pode ser A_k , $1 \leq k \leq 3$.

As condições que caracterizam as singularidades A_k , $1 \leq k \leq 3$ podem ser obtidas da próxima proposição.

Observe que pela demonstração de (2) na proposição abaixo, temos que se $k_g^2(s) \leq$

$k_n^2(s)$ então a função altura h_t^T não tem singularidade $A_{\geq 1}$. Ou seja, se γ for uma curva onde vale essa desigualdade, para qualquer $s \in I$, então o conjunto discriminante de H_t^T sobre γ não está definido. Vamos assumir então que existe um subintervalo $J \subset I$ tal que $k_g^2(s) > k_n^2(s)$ para $s \in J$. Além disso, a fim de evitar situações mais complicadas, assumimos que $k_n\tau_2 + k_g\tau_g \neq 0$.

Proposição 5.1.1. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g \neq 0$ e $k_n\tau_2 + k_g\tau_g \neq 0$. Então temos o seguinte:*

(1) $(h_t^T)_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \mu n_\gamma(s) + \lambda n_1(s) + \eta n_2(s)$, onde $\mu, \lambda, \eta \in \mathbb{R}$ tal que $-\mu^2 + \lambda^2 + \eta^2 = -1$.

(2) $(h_t^T)_v(s) = (h_t^T)'_v(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s).$$

(3) $(h_t^T)_v(s) = (h_t^T)'_v(s) = (h_t^T)''_v(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s)$$

$$e \tanh \theta = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s).$$

(4) $(h_t^T)_v(s) = (h_t^T)'_v(s) = (h_t^T)''_v(s) = (h_t^T)'''_v(s) = 0$ se, e somente se,

$$v = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s),$$

$$\tanh \theta = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s) \text{ e } \rho(s) = 0, \text{ onde}$$

$$\begin{aligned} \rho(s) = & ((-k_g k''_n - k_g k_n \tau_2^2 - 2k_g k'_g \tau_1 - k_g^2 \tau_1' - k_g^2 \tau_g \tau_2 + 2k_n k'_n \tau_1 + k_n^2 \tau_1' - k_n^2 k_g \tau_2 + k''_g k_n - \\ & k_g k_n \tau_g^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) + (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(2k'_n \tau_2 + k_n \tau_1 \tau_g + k_n \tau_2' + 2k'_g \tau_g + \\ & k_g \tau_1 \tau_2 + k_g \tau_g'))(s). \end{aligned}$$

$$(5) \quad (h_t^T)_v(s) = (h_t^T)'_v(s) = (h_t^T)''_v(s) = (h_t^T)'''_v(s) = (h_t^T)^{(4)}_v(s) = 0 \text{ se, e somente se,}$$

$$v = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s),$$

$$\tanh \theta = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s) \text{ e } \rho(s) = \rho'(s) = 0.$$

Demonstração. Temos $(h_t^T)_v(s) = 0$ se, e somente se, $\langle t(s), v \rangle = 0$. Isto é equivalente a $v = \mu n_\gamma(s) + \lambda n_1(s) + \eta n_2(s)$, onde $\mu, \lambda, \eta \in \mathbb{R}$ e $-\mu^2 + \lambda^2 + \eta^2 = -1$ e o item (1) está provado. Para o item (2), $(h_t^T)_v(s) = (h_t^T)'_v(s) = 0$ se, e somente se, $v = \mu n_\gamma(s) + \lambda n_1(s) + \eta n_2(s)$ com $-\mu^2 + \lambda^2 + \eta^2 = -1$ e $\langle t'(s), v \rangle = -\mu k_n + \lambda k_g = 0$. Isto é equivalente a

$$v = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s).$$

Para o item (3), $(h_t^T)_v(s) = (h_t^T)'_v(s) = (h_t^T)''_v(s) = 0$ se, e somente se

$$v = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s) \text{ e } \langle t''(s), v \rangle = 0.$$

Como $t''(s) = (k_n^2(s) - k_g^2(s))t(s) + (k'_n(s) + k_g(s)\tau_1(s))n_\gamma(s) + (k_n(s)\tau_1(s) + k'_g(s))n_1(s) + (k_n(s)\tau_2(s) + k_g(s)\tau_g(s))n_2(s)$, temos que a afirmação acima é equivalente a

$$v = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s)$$

$$\text{e } \tanh \theta = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s).$$

Para realizar os cálculos dos itens (4) e (5) acrescentamos $(h_t^T)'''_v(s) = 0$ e $(h_t^T)^{(4)}_v(s) = 0$, respectivamente, e além disso usamos as derivadas $t'''(s)$ e $t^{(4)}(s)$ e fórmulas tipo Frenet-Serret de γ . Como os cálculos são trabalhosos e muitos longos omitimos os detalhes aqui. $\square$

A proposição acima induz um invariante ρ . Motivado pelos cálculos acima definimos

a aplicação $S_\gamma : I \times \mathbb{R} \rightarrow H^3(-1)$ por

$$S_\gamma(s, \theta) = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s).$$

Desta forma, definimos uma superfície que chamamos de *superfície hiperbólica* de γ . Esta superfície existe pois estamos supondo que exista um subconjunto $J \subset I$ tal que $k_g^2(s) > k_n^2(s)$ para $s \in J$.

Corolário 5.1.2. *A superfície hiperbólica de γ é o conjunto discriminante, $\mathfrak{D}_{H_t^T}$, da família de funções altura tangencial tipo tempo H_t^T .*

Demonstração. A prova segue da definição de conjunto discriminante dada no Capítulo 1 e da Proposição 5.1.1 (2). $\square$

Proposição 5.1.3. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g \neq 0$ e $k_n\tau_2 + k_g\tau_g \neq 0$. Se $(h_t^T)_{v_0}$ tem uma singularidade tipo A_k ($k = 2, 3$) em s_0 e $(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0$, então H_t^T é um desdobramento versal de $(h_t^T)_{v_0}$. Em outras palavras, H_t^T é genericamente um desdobramento versal de $(h_t^T)_{v_0}$.*

Demonstração. Temos $H_t^T(s, v) = -v_1 x'_1(s) + v_2 x'_2(s) + v_3 x'_3(s) + v_4 x'_4(s)$, onde $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, $t(s) = (x'_1(s), x'_2(s), x'_3(s), x'_4(s))$, $v_1 = \sqrt{1 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$.

Assim temos

$$\frac{\partial H_t^T}{\partial v_i}(s, v) = x'_i(s) - \frac{v_i}{v_1} x'_1(s),$$

para $i = 2, 3, 4$. Portanto temos o 2-jato de $\frac{\partial H}{\partial v_i}(s, v)$ em s_0 como segue:

$$x'_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x'_1(s_0) + \left(x''_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x''_1(s_0) \right) (s - s_0) + \frac{1}{2} \left(x'''_i(s_0) - \frac{v_i}{v_1} x'''_1(s_0) \right) (s - s_0)^2.$$

Provemos para $k = 3$. Assumimos que $(h_t^T)_v$ tem uma singularidade do tipo A_3 em $s = s_0$.

Neste caso temos que mostrar que o determinante da matriz 3×3

$$A = \begin{pmatrix} x'_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x'_1(s_0) & x'_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x'_1(s_0) & x'_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x'_1(s_0) \\ x''_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x''_1(s_0) & x''_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x''_1(s_0) & x''_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x''_1(s_0) \\ x'''_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x'''_1(s_0) & x'''_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x'''_1(s_0) & x'''_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x'''_1(s_0) \end{pmatrix}$$

é não nulo. Denotando

$$a = \begin{pmatrix} x'_1(s_0) \\ x''_1(s_0) \\ x'''_1(s_0) \end{pmatrix}, b_i = \begin{pmatrix} x'_i(s_0) \\ x''_i(s_0) \\ x'''_i(s_0) \end{pmatrix},$$

para $i = 2, 3, 4$, temos

$$\det A = \frac{v_1}{v_1} \det(b_2 \ b_3 \ b_4) - \frac{v_2}{v_1} \det(a \ b_3 \ b_4) - \frac{v_3}{v_1} \det(b_2 \ a \ b_4) - \frac{v_4}{v_1} \det(b_2 \ b_3 \ a).$$

Por outro lado, temos

$$(\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''')(s_0) = (-\det(b_2 \ b_3 \ b_4), -\det(a \ b_3 \ b_4), -\det(b_2 \ a \ b_4), -\det(b_2 \ b_3 \ a)),$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \det A &= \left\langle \left(\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_2}{v_1}, \frac{v_3}{v_1}, \frac{v_4}{v_1} \right), (\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma''')(s_0) \right\rangle \\ &= \frac{\cosh \theta_0 (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)^2}{v_1 (k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0). \end{aligned}$$

Assim, se $(h_t^T)_{v_0}$ tem uma singularidade do tipo A_3 em s_0 e $(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0$, então $\det A \neq 0$ e H_t^T é um desdobramento versal de $(h_t^T)_{v_0}$.

Agora damos a prova para o caso $k = 2$. Neste caso queremos que a matriz 2×3

$$B = \begin{pmatrix} x'_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x'_1(s_0) & x'_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x'_1(s_0) & x'_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x'_1(s_0) \\ x''_2(s_0) - \frac{v_2}{v_1} x''_1(s_0) & x''_3(s_0) - \frac{v_3}{v_1} x''_1(s_0) & x''_4(s_0) - \frac{v_4}{v_1} x''_1(s_0) \end{pmatrix}$$

seja não singular. Visto que B é a primeira e a segunda linha de A , temos que o posto de B é 2 e isto completa a prova. $\square$

Teorema 5.1.4. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g \neq 0$ e $k_n \tau_2 + k_g \tau_g \neq 0$. Então temos o seguinte:*

(1) *A superfície hiperbólica S_γ de γ é singular em (s_0, θ_0) se, e somente se,*

$$\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0).$$

Logo os pontos singulares da superfície hiperbólica são dados por $S_\gamma(s) = S_\gamma(s, \theta(s))$, onde $\tanh \theta(s)$ satisfaz a equação acima.

(2) A superfície hiperbólica S_γ de γ é localmente difeomorfa ao eixo cuspidal $C \times \mathbb{R}$ em (s_0, θ_0) se

$$\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0), \quad (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0$$

e $\rho(s_0) \neq 0$.

(3) A superfície hiperbólica S_γ de γ é localmente difeomorfa ao rabo de andorinha SW em (s_0, θ_0) se

$$\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0), \quad (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0,$$

$\rho(s_0) = 0$ e $\rho'(s_0) \neq 0$.

Demonstração. Considere a superfície hiperbólica

$$S_\gamma(s, \theta) = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} (k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s),$$

então

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_\gamma}{\partial s}(s, \theta) &= \left(\frac{\cosh \theta (-k'_g k_n^2 + k_g k_n k'_n + k_n \tau_1 k_g^2 - k_n^3 \tau_1) + \sinh \theta \tau_2 (k_g^2 - k_n^2) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}{(k_g^2 - k_n^2) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}} \right) n_\gamma(s) \\ &+ \left(\frac{\cosh \theta (k_g^3 \tau_1 - k_g \tau_1 k_n^2 + k'_n k_g^2 - k_n k_g k'_g) - \sinh \theta \tau_g (k_g^2 - k_n^2) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}{(k_g^2 - k_n^2) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}} \right) n_1(s) \\ &+ \left(\frac{\cosh \theta (k_g \tau_2 + k_n \tau_g)}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}} \right) n_2(s) \quad e \end{aligned}$$

$$\frac{\partial S_\gamma}{\partial \theta}(s, \theta) = \frac{k_g(s) \sinh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} n_\gamma(s) + \frac{k_n(s) \sinh \theta}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} n_1(s) + \cosh \theta n_2(s).$$

Portanto temos que os vetores $\left\{ \frac{\partial S_\gamma}{\partial s}(s_0, \theta_0), \frac{\partial S_\gamma}{\partial \theta}(s_0, \theta_0) \right\}$ são linearmente dependentes se, e somente se, $\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0)$ e assim a afirmação (1) está provada.

Pelo Corolário 5.1.2, o conjunto discriminante $\mathfrak{D}_{H_t^T}$ da família de funções altura tangencial tipo tempo H_t^T de γ é a superfície hiperbólica S_γ de γ . Observe que as singularidades da superfície hiperbólica estão correspondendo aos pontos da Proposição 5.1.1, (3). Segue da Proposição 5.1.1, (4) e (5) que $(h_t^T)_{v_0}$ tem singularidade do tipo A_3 (respectivamente, singularidade do tipo A_4) em $s = s_0$ se, e somente se,

$$\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0) \text{ e } \rho(s_0) \neq 0$$

(respectivamente, $\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0)$, $\rho(s_0) = 0$, $\rho'(s_0) \neq 0$). Pelo Teorema 1.3.3 e Proposição 5.1.3, temos as afirmações (2) e (3), se $(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0$. $\square$

Temos três tipos de superfícies especiais em M que são dadas pela interseção de M e hiperplanos $P(v, c)$ em $\mathbb{R}_1^4$. Para v tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz, chamamos $M \cap P(v, c)$ de *superfície fatia* de M .

Na próxima proposição relacionamos uma curva da superfície hiperbólica com o invariante ρ e a superfície slice fatia.

Proposição 5.1.5. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g \neq 0$, $k_n \tau_2 + k_g \tau_g \neq 0$ e suponha que $k_g^2 > k_n^2$ para um subintervalo $J \subset I$. Sejam $S_\gamma(s, \theta(s))$ os pontos singulares da superfície hiperbólica de γ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (1) $S_\gamma(s, \theta(s))$ é um vetor constante,
- (2) $\rho(s) \equiv 0$,
- (3) $Im(\gamma) \subset M \cap P(v, c)$, para v tipo tempo.

Demonstração. Por definição, temos

$$S_\gamma(s, \theta(s)) = \frac{\cosh \theta(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} \left(k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s) + \frac{(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)}(s)n_2(s) \right).$$

Assim segue que

$$\begin{aligned} \frac{dS_\gamma(s, \theta(s))}{ds}(s) = & \left(\frac{\cosh \theta(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} \right)' \left(k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s) + \frac{(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)}(s)n_2(s) \right) \\ & + \left(\frac{\cosh \theta(s)}{\sqrt{k_g^2(s) - k_n^2(s)}} \right) \left(k_g(s)n_\gamma(s) + k_n(s)n_1(s) + \frac{(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)}(s)n_2(s) \right)'. \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$\theta'(s) = \left(\frac{X}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2} \left((k_g^2 - k_n^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)^2 - (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)^2 \right)} \right)(s),$$

$$\begin{aligned} \text{onde } X(s) = & \left((k_g k''_n + 2k_g k'_g \tau_1 + k_g^2 \tau'_1 - 2k_n k'_n \tau_1 - k_n^2 \tau'_1 - k_n k''_g)(k_g^2 - k_n^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) - (k_g k'_n + \right. \\ & \left. k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g) \left((k_g k'_g - k_n k'_n)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) + (k_g^2 - k_n^2)(k'_n \tau_2 + k_n \tau'_2 + k'_g \tau_g + k_g \tau'_g) \right) \right)(s). \end{aligned}$$

Substituindo as fórmulas tipo Frenet-Serret e $\theta'(s)$ na expressão da derivada acima e fazendo muitos cálculos para simplificar a expressão final, temos que

$$\frac{dS_\gamma(s, \theta(s))}{ds} = \frac{-\cosh \theta(an_\gamma + bn_1 + cn_2)\rho}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \left((k_g^2 - k_n^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)^2 - (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)^2 \right)}(s),$$

onde $a(s) = k_g(k'_n k_g + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k'_g k_n)(s)$, $b(s) = k_n(k'_n k_g + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k'_g k_n)(s)$, $c(s) = (k_g^2 - k_n^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)(s)$ e $\rho(s)$ é o invariante.

Por hipótese $c(s) \neq 0$ e portanto, $\frac{dS_\gamma(s, \theta(s))}{ds} \equiv 0$ se, e somente se, $\rho(s) \equiv 0$. Isto significa que as condições (1) e (2) são equivalentes. Agora assuma que a condição (1) vale, então temos que

$$\langle \gamma(s), S_\gamma(s, \theta(s)) \rangle = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_g^2 - k_n^2}} \left(k_g \langle \gamma, n_\gamma \rangle + k_n \langle \gamma, n_1 \rangle + \frac{(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)}{k_n \tau_2 + k_g \tau_g} \langle \gamma, n_2 \rangle \right)(s).$$

Seja $g(s) = \langle \gamma(s), S_\gamma(s, \theta(s)) \rangle$, derivando, usando as fórmulas de Frenet-Serret e fazendo longos cálculos vimos que

$$g'(s) = g_1(s)\langle \gamma(s), n_\gamma(s) \rangle + g_2(s)\langle \gamma(s), n_1(s) \rangle + g_3(s)\langle \gamma(s), n_2(s) \rangle, \text{ onde}$$

$$g_1(s) = \frac{A(s) \cosh \theta(s)}{D(s)}, \quad g_2(s) = \frac{B(s) \cosh \theta(s)}{D(s)} \quad \text{e} \quad g_3(s) = \frac{C(s) \cosh \theta(s)}{D_1(s)}$$

com

$$\begin{aligned} A(s) = & \left(k_g(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g) \left[(k_g k''_n + 2k_g k'_g \tau_1 + k_g^2 \tau'_1 - 2k_n k'_n \tau_1 - k_n^2 \tau'_1 - k_n k''_g) \right. \right. \\ & (k_g^2 - k_n^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) - (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g) \left((k_g k'_g - k_n k'_n)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \right. \\ & \left. \left. + (k_g^2 - k_n^2)(k'_n \tau_2 + k_n \tau'_2 + k'_g \tau_g + k_g \tau'_g) \right) \right] - k_g(k_g k'_g - k_n k'_n)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)^3 (k_g^2 - k_n^2) \\ & + k_g(k_g k'_g - k_n k'_n)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)^2 + \left((k_n \tau_2 + k_g \tau_g)(k'_g + \right. \\ & k_n \tau_1) + \tau_2 k_g k'_n + \tau_2 k_g^2 \tau_1 - \tau_2 k_n^2 \tau_1 - \tau_2 k_n k'_g) (k_g^2 - k_n^2)^2 (k_n \tau_2 + k_g \tau_g)^2 - \left((k'_g + k_n \tau_1) \right. \\ & (k_n \tau_2 + k_g \tau_g) + \tau_2 k_g k'_n + \tau_2 k_g^2 \tau_1 - \tau_2 k_n^2 \tau_1 - \tau_2 k_n k'_g) (k_g^2 - k_n^2)(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - \\ & \left. \left. k_n k'_g)^2 \right) \right) (s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(s) = & \left(\sqrt{k_g^2 - k_n^2} (k_g^2 - k_n^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \left((k_g^2 - k_n^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)^2 - (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - \right. \right. \\ & \left. \left. k_n k'_g)^2 \right) \right) (s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(s) = & \left(k_n(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g) \left[(k_g k''_n + 2k_g k'_g \tau_1 + k_g^2 \tau'_1 - 2k_n k'_n \tau_1 - k_n^2 \tau'_1 - k_n k''_g) \right. \right. \\ & (k_g^2 - k_n^2)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) - (k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g) \left((k_g k'_g - k_n k'_n)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \right. \\ & \left. \left. + (k_g^2 - k_n^2)(k'_n \tau_2 + k_n \tau'_2 + k'_g \tau_g + k_g \tau'_g) \right) \right] - k_n(k_g k'_g - k_n k'_n)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)^3 (k_g^2 - k_n^2) \\ & + k_n(k_g k'_g - k_n k'_n)(k_n \tau_2 + k_g \tau_g)(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)^2 + (k_g k_n \tau_1 \tau_2 + k_n k'_n \tau_2 \\ & + \tau_g k_n^2 \tau_1 + \tau_g k_n k'_g) (k_g^2 - k_n^2)^2 (k_n \tau_2 + k_g \tau_g) - (k_g k_n \tau_1 \tau_2 + k_n k'_n \tau_2 + \tau_g k_n^2 \tau_1 + \tau_g k_n k'_g) \\ & \left. (k_g^2 - k_n^2)(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)^2 \right) (s), \end{aligned}$$

$$C(s) = \left(- (k_n\tau_2 + k_g\tau_g)(k_gk'_n + k_g^2\tau_1 - k_n^2\tau_1 - k_nk'_g)^2(k_g\tau_2 + k_n\tau_g) - (k_gk'_n + k_g^2\tau_1 - k_n^2\tau_1 - k_nk'_g)(k_n\tau_2 + k_g\tau_g)^2(k_gk'_g - k_nk'_n) + (k_gk'_n + k_g^2\tau_1 - k_n^2\tau_1 - k_nk'_g)(k'_n\tau_2 + k_n\tau_1\tau_g + k'_g\tau_g + k_g\tau_1\tau_2)(k_g^2 - k_n^2)(k_n\tau_2 + k_g\tau_g) \right)(s) \quad e$$

$$D_1(s) = \left(\sqrt{k_g^2 - k_n^2}(k_n\tau_2 + k_g\tau_g) \left((k_g^2 - k_n^2)(k_n\tau_2 + k_g\tau_g)^2 - (k_gk'_n + k_g^2\tau_1 - k_n^2\tau_1 - k_nk'_g)^2 \right) \right)(s).$$

Além disso, reorganizando os cálculos em $A(s)$, $B(s)$ e $C(s)$, mostramos que $A(s) = B(s) = C(s) = 0$ para todo $s \in I$ e assim $g_i(s) = 0$, $i = 1, 2, 3$, para todo $s \in I$, ou seja, $g'(s) = 0$ para todo $s \in I$ e portanto g é constante. Logo vale a condição (3). Para o inverso, assumamos que $\langle \gamma(s), v \rangle = c$ para um vetor constante v e um número real c , assim $\langle \gamma'(s), v \rangle = 0$, isto é, $(h_t^T)_v(s) = 0$ para todo s . Dessa maneira, temos $(h_t^T)_v(s) = (h_t^T)'_v(s) = (h_t^T)''_v(s) = (h_t^T)'''_v(s) = 0$ para todo s . Pela Proposição 5.1.1, temos que $v = S_\gamma(s, \theta(s))$ e $\rho(s) = 0$ para todo s . Logo vale a condição (1). $\square$

A Definição 4.4.2 é necessária também para a próxima proposição.

Proposição 5.1.6. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g \neq 0$, $k_n\tau_2 + k_g\tau_g \neq 0$ e $k_g^2 > k_n^2$ para um subintervalo $J \subset I$. Sejam $v_0 = S_\gamma(s_0, \theta_0)$ e $c = \langle \gamma(s_0), v_0 \rangle$. Então, temos o seguinte:*

- (1) γ e a superfície fatia $M \cap P(v_0, c)$ têm contato de ordem pelo menos 3 em s_0 se, e somente se, $(h_t^T)_{v_0}$ tem singularidade $A_{\geq 2}$ em s_0 .
- (2) γ e a superfície fatia $M \cap P(v_0, c)$, têm contato de ordem 4 em s_0 se, e somente se, $(h_t^T)_{v_0}$ tem singularidade A_3 em s_0 .

Demonstração. Para $v_0 = S_\gamma(s_0, \theta_0)$ e $c = \langle \gamma(s_0), v_0 \rangle$. Seja $D_{v_0} : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $D_{v_0}(x) = \langle x, v_0 \rangle - c$. Assim, temos que $D_{v_0}^{-1}(0) = M \cap P(v_0, c)$ é superfície fatia. Além disso, $D_{v_0}^{-1}(0)$ e γ tem contato de ordem pelo menos 3 em s_0 se, e somente se, a função $g(s) = D_{v_0} \circ \gamma(s) = \langle \gamma(s), v_0 \rangle - c$ satisfaz $g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = g'''(s_0) = 0$.

Esta condição é equivalente a condição que $g(s_0) = (h_t^T)_{v_0}(s_0) = (h_t^T)'_{v_0}(s_0) = (h_t^T)''_{v_0}(s_0) =$

0. Pela Proposição 5.1.1, temos ainda que esta condição é equivalente a condição que

$$v_0 = \frac{\cosh \theta_0}{\sqrt{k_g^2(s_0) - k_n^2(s_0)}} (k_g(s_0)n_\gamma(s_0) + k_n(s_0)n_1(s_0)) + \sinh \theta_0 n_2(s_0),$$

$\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0)$. A afirmação (2) segue das condições para $(h_t^T)_{v_0}$ ter singularidade A_3 em s_0 que podem ser obtidas de (4) e (5) da Proposição 5.1.1. $\square$

Definimos agora $CH_\gamma(s, \theta(s)) = S_\gamma(s, \theta(s))$, onde $\tanh \theta(s) = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s)$, para uma curva tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco $\gamma : I \rightarrow M$ com $k_g \neq 0$, $k_n \tau_2 + k_g \tau_g \neq 0$ onde $k_g^2 > k_n^2$ para um subintervalo $J \subset I$. Chamamos esta curva CH_γ de *curva hiperbólica* de γ . Pelo Teorema 5.1.4 (1), esta curva é o lugar dos pontos singulares da superfície hiperbólica de γ . Definindo $C(2, 3, 4) = \{(t^2, t^3, t^4) \mid t \in \mathbb{R}\}$, a qual é chamada uma $(2, 3, 4)$ -cúspide, temos o seguinte teorema.

Proposição 5.1.7. *Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $k_g \neq 0$, $k_n \tau_2 + k_g \tau_g \neq 0$ e $k_g^2 > k_n^2$ para um subintervalo $J \subset I$. Considere $v_0 = S_\gamma(s_0, \theta_0)$ e $c = \langle \gamma(s_0), v_0 \rangle$, então temos o seguinte:*

- (1) *A curva hiperbólica CH_γ de γ é localmente difeomorfa a uma reta em s_0 se γ e a superfície fatia $M \cap P(v_0, c)$ têm contato de ordem 3 em s_0 e $(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0$.*
- (2) *A curva hiperbólica CH_γ de γ é localmente difeomorfa à $(2, 3, 4)$ -cúspide $C(2, 3, 4)$ em s_0 se γ e a superfície fatia $M \cap P(v_0, c)$ têm contato de ordem 4 em s_0 e $(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0$.*

Demonstração. Para a prova, aplicaremos o Teorema 5.1.4.

(1) Se γ e a superfície fatia $M \cap P(v_0, c)$ têm contato de ordem 3 em s_0 , então temos que

$$v_0 = \frac{\cosh \theta_0}{\sqrt{k_g^2(s_0) - k_n^2(s_0)}} (k_g(s_0)n_\gamma(s_0) + k_n(s_0)n_1(s_0)) + \sinh \theta_0 n_2(s_0),$$

$\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0)$ e $\rho(s_0) \neq 0$. Além disso, temos por hipótese que $(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0$, então segue pelo Teorema 5.1.4 que a superfície hiperbólica S_γ é localmente difeomorfa ao eixo cuspidal $C \times \mathbb{R}$ em (s_0, θ_0) . Visto que o local das singularidades de $C \times \mathbb{R}$ é localmente difeomorfo a uma reta, a afirmação (1) está provada.

(2) Se γ e a superfície fatia $M \cap P(v_0, c)$ têm contato de ordem 4 em s_0 , então temos que

$$v_0 = \frac{\cosh \theta_0}{\sqrt{k_g^2(s_0) - k_n^2(s_0)}} (k_g(s_0)n_\gamma(s_0) + k_n(s_0)n_1(s_0)) + \sinh \theta_0 n_2(s_0),$$

$\tanh \theta_0 = \frac{k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g}{(k_n \tau_2 + k_g \tau_g) \sqrt{k_g^2 - k_n^2}}(s_0)$, $\rho(s_0) = 0$ e $\rho'(s_0) \neq 0$. Além disso, temos por hipótese que $(k_g k'_n + k_g^2 \tau_1 - k_n^2 \tau_1 - k_n k'_g)(s_0) \neq 0$, então segue pelo Teorema 5.1.4 que a superfície hiperbólica S_γ é localmente difeomorfa ao rabo de andorinha SW em (s_0, θ_0) . Visto que o local das singularidades de SW é localmente difeomorfo à $C(2, 3, 4)$, a afirmação (2) está provada. $\square$

5.2 Exemplos

Nesta seção consideramos dois exemplos de curvas sobre uma hipersuperfície tipo espaço: curvas sobre o espaço tipo espaço, $\mathbb{R}^3$, e curvas sobre o espaço hiperbólico, $H^3(-1)$.

Exemplo 5.2.1. *Seja $M = \mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}_1^4 \mid x_1 = 0\}$ hipersuperfície tipo espaço em $\mathbb{R}_1^4$. Para $\gamma : I \rightarrow M$ parametrizada pelo comprimento de arco, conforme o início desta seção, temos $n_\gamma = e_1$, $t(s) = \gamma'(s)$, $n_1(s) = n(s)$ e $n_2(s) = b(s)$. Aqui $\{t, n, b\}$ é a base ordinária de Frenet. Neste caso, $k_n = \tau_1 = \tau_2 = 0$, $k_g = k$ e $\tau_g = \tau$. As fórmulas tipo Frenet-Serret são as fórmulas Frenet-Serret original (ver [3]):*

$$\begin{cases} e'_1(s) = 0 \\ t'(s) = k_n(s) n(s) \\ n'(s) = -k(s) t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) = -\tau(s) n(s) \end{cases}$$

Neste caso a superfície hiperbólica de γ em $H^3(-1) \subset \mathbb{R}_1^4$ é dada por

$$S_\gamma(s, \theta) = \cosh \theta e_1 + \sinh \theta b(s)$$

e a curva hiperbólica de γ é dada por $CH_\gamma(s) = e_1$, ou seja, é constante.

Exemplo 5.2.2. Seja $M = H^3(-1)$. Para $\gamma : I \rightarrow H^3(-1)$ parametrizada pelo comprimento de arco, temos $n_\gamma(s) = \gamma(s)$, $t(s) = \gamma'(s)$, $n_1(s)$ e $n_2(s)$. Neste caso, $k_n(s) = 1$, $\tau_1(s) = \tau_2(s) = 0$, $k_g(s) = k_h(s)$ e $\tau_g(s) = \tau_h(s)$ e as fórmulas do início desta seção, como esperado, coincidem com as fórmulas tipo Frenet-Serret de γ em $H^3(-1)$ (ver [15]).

$$\begin{cases} \gamma'(s) = t(s) \\ t'(s) = \gamma(s) + k_h(s) n_1(s) \\ n_1'(s) = -k_h(s) t(s) + \tau_h(s) n_2(s) \\ n_2'(s) = -\tau_h(s) n_1(s) \end{cases}$$

A superfície hiperbólica de γ é dada por

$$S_\gamma(s, \theta) = \frac{\cosh \theta}{\sqrt{k_h^2(s) - 1}} (k_h(s) \gamma(s) + n_1(s)) + \sinh \theta n_2(s).$$

Dessa forma, temos que a superfície hiperbólica S_γ é justamente a superfície focal hiperbólica de γ dada em [7].

Vemos então que os conceitos desenvolvidos nesta seção generalizam estes exemplos, onde agora podemos considerar qualquer hipersuperfície tipo espaço em $\mathbb{R}_1^4$. Após a defesa desta tese, seguiremos estudando mais sobre curvas em hipersuperfícies tipo espaço.

Referências Bibliográficas

- [1] ARNOLD, V. I., GUSEIN-ZADE, S., AND VARCHENKO, A. N. *Singularities of Differentiable Maps-Vol. I: the Classification of Critical Points Caustics and Wave Fronts*. Birkhäuser, 1985.
- [2] BRUCE, J. W., AND GIBLIN, P. J. Generic isotopies of space curves. *Glasgow Math. J.* 29, 1 (1987), 41–63.
- [3] BRUCE, J. W., AND GIBLIN, P. J. *Curves and Singularities: a geometrical introduction to singularity theory*. Cambridge university press, 1992.
- [4] FUSHO, T., AND IZUMIYA, S. Lightlike surfaces of spacelike curves in de Sitter 3-space. *J. Geom.* 88, 1-2 (2008), 19–29.
- [5] GOLUBITSKY, M., AND GUILLEMIN, V. *Stable mappings and their singularities*, vol. 14. Springer New York, 1973.
- [6] HANANOI, S., ITO, N., AND IZUMIYA, S. Spherical darboux images of curves on surfaces. *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry* (2015), 1–11.
- [7] HAYASHI, R., IZUMIYA, S., AND SATO, T. Focal surfaces and evolutes of curves in Hyperbolic space. *Preprint* (2013).
- [8] HAYASHI, R., IZUMIYA, S., AND SATO, T. Duals of curves in hyperbolic space. *Note di Matematica* 33, 2 (2014), 97–106.
- [9] IZUMIYA, S. Generating families of developable surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Hokkaido University preprint series in mathematics* 512, 2001.

-
- [10] IZUMIYA, S. Timelike hypersurfaces in de Sitter space and legendrian singularities. *Journal of Mathematical Sciences* 144, 1 (2007), 3789–3803.
 - [11] IZUMIYA, S. Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone. *Mosc. Math. J* 9, 2 (2009), 325–357.
 - [12] IZUMIYA, S., NABARRO, A. C., AND SACRAMENTO, A. J. Horospherical surface and hyperbolic dual surface of spacelike curves in de Sitter space. *Preprint* (2014).
 - [13] IZUMIYA, S., NABARRO, A. C., AND SACRAMENTO, A. J. Pseudo-spherical normal Darboux images of curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz–Minkowski space. *Journal of Geometry and Physics* (2015).
 - [14] IZUMIYA, S., PEI, D., AND SANO, T. Singularities of hyperbolic gauss maps. *Proceedings of the London mathematical Society* 86, 2 (2003), 485–512.
 - [15] IZUMIYA, S., PEI, D., AND SANO, T. Horospherical surfaces of curves in hyperbolic space. *Publ. Math. Debrecen* 64, 1-2 (2004), 1–13.
 - [16] IZUMIYA, S., PEI, D. H., SANO, T., AND TORII, E. Evolutes of hyperbolic plane curves. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 20, 3 (2004), 543–550.
 - [17] IZUMIYA, S., AND SATO, T. Lightlike hypersurfaces along spacelike submanifolds in Minkowski space–time. *Journal of Geometry and Physics* 71 (2013), 30–52.
 - [18] IZUMIYA, S., TAKAHASHI, M., AND TARI, F. Folding maps on spacelike and timelike surfaces and duality. *Osaka J. Math.* 47, 3 (2010), 839–862.
 - [19] IZUMIYA, S., AND TARI, F. Projections of hypersurfaces in the hyperbolic space to hyperhorospheres and hyperplanes. *Revista Matemática Iberoamericana* 24, 3 (2008), 895–920.
 - [20] LÓPEZ, R. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *arXiv preprint arXiv:0810.3351* (2008).
 - [21] NABARRO, A. C., AND SACRAMENTO, A. J. Focal set of curves in the Minkowski space near lightlike points. *Preprint* (2013).
 - [22] OHNITA, Y. On deformation of 3-dimensional certain minimal Legendrian submanifolds. In *Proceedings of the 13th International Workshop on Differential Geometry*

- and Related Fields [Vol. 13]* (2009), Natl. Inst. Math. Sci. (NIMS), Taejuon, pp. 71–87.
- [23] PEI, D., AND SANO, T. The focal developable and the binormal indicatrix of a nonlightlike curve in Minkowski 3-space. *Tokyo Journal of Mathematics* 23, 1 (2000), 211–225.
- [24] PELLETIER, F. Quelques propriétés géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singulières. In *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1995), vol. 4, Université Paul Sabatier, pp. 87–199.
- [25] RATCLIFFE, J. *Foundations of hyperbolic manifolds*, vol. 149. Springer, 2006.
- [26] SALOOM, A., AND TARI, F. Curves in the Minkowski plane and their contact with pseudo-circles. *Geom. Dedicata* 159 (2012), 109–124.
- [27] SATO, T. Pseudo-spherical evolutes of curves on a spacelike surface in three dimensional Lorentz–Minkowski space. *Journal of Geometry* 103, 2 (2012), 319–331.
- [28] STELLER, M. A gauss-bonnet formula for metrics with varying signature. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 25, 2 (2006), 143–162.
- [29] TARI, F. Caustics of surfaces in the Minkowski 3-space. *Q. J. Math.* 63, 1 (2012), 189–209.
- [30] TARI, F. Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space. *Journal of the Mathematical Society of Japan* 65, 3 (2013), 723–731.