Resolubilidade global para uma classe de sistemas involutivos

Cleber de Medeira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:________________________

Resolubilidade global para uma classe de sistemas involutivos[1]

Cleber de Medeira

Orientador: **Prof. Dr. Adalberto Panobianco Bergamasco**
Coorientador: **Prof. Dr. Sérgio Luís Zani**

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática. *VERSÃO REVISADA.*

USP – São Carlos
Maio de 2012

[1] Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP e da CAPES.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

de Medeira, Cleber
d488r Resolubilidade global para uma classe de sistemas involutivos / Cleber de Medeira; orientador Adalberto Panobianco Bergamasco; co-orientador Sérgio Luís Zani. -- São Carlos, 2012.
68 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2012.

1. Campos vetoriais complexos. 2. Resolubilidade global. 3. Sistemas involutivos. 4. Números de Liouville. I. Panobianco Bergamasco, Adalberto , orient. II. Zani, Sérgio Luís, co-orient. III. Título.

Aos meus pais
João e Teresinha;
e à minha esposa
Ana Eliza.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida e por despertar em mim o gosto pela Matemática.

Sou grato aos meus pais Teresinha e João de Medeira, por minha formação como pessoa e pelo constante incentivo na vida estudantil;

À minha esposa Ana Eliza que tem sido minha grande companheira nesses árduos anos de estudo e distância, sempre com muita compreensão e carinho;

Aos meus irmãos Cleverson e Gabriel de Medeira, pelo apoio recebido em todos os momentos importantes da minha vida;

Aos meus orientadores do doutorado, Prof. Adalberto e Prof. Zani, pela confiança depositada em mim, pela paciência e dedicação durante estes últimos anos;

Ao meu orientador da iniciação científica, prof. Luis Grados (UEPG), e ao meu orientador do mestrado, prof. Higidio Oquendo (UFPR), pelo incentivo para a carreira acadêmica;

Aos professores e funcionários do ICMC, em especial o grupo de EDP's lineares, professores Adalberto Bergamasco, Sérgio Zani, Paulo Dattori, Wagner Nunes, Evandro da Silva e Alexandre Kirilov (UFPR) e aos colegas Giuliano, Rafael, Wanderley e Renato;

A todos os colegas de pós-graduação, em especial: André Furtado, Suzete Afonso, Marcos Pimenta, Éder Ritis, Márcio Jorge, José Claudinei, Thiago Catalan, John Beiro, Ligia, Vinicius e Alisson;

Aos amigos da "vila do Chaves", Josuel Kruppa, Luis Felipe e Lidiane;

Finalmente agradeço à FAPESP pelo suporte financeiro, fundamental para a realização deste trabalho.

Resumo

Estudamos a resolubilidade global de uma classe de sistemas involutivos com n campos vetoriais suaves definidos no toro de dimensão $n+1$. Obtemos uma caracterização completa para o caso desacoplado desta classe em termos de formas de Liouville e da conexidade de todos os subníveis e superníveis, no espaço de recobrimento minimal, de uma primitiva global da 1-forma associada ao sistema. Além disso, apresentamos uma situação especial na qual o sistema não é globalmente resolúvel e usamos isso para obter alguns resultados em um caso com acoplamento mais forte.

Abstract

We study the global solvability of a class of involutive systems with n smooth vector fields on the torus of dimension $n+1$. We obtain a complete characterization for the uncoupled case of this class in terms of Liouville forms and of the connectedness of all sublevel and superlevel sets of the primitive of a certain 1-form in the minimal covering space. Also, we exhibit a special situation where the system is not globally solvable and we use this to obtain some results in a more general case.

Sumário

Introdução

Nosso interesse neste trabalho é estudar a *resolubilidade global* de sistemas de campos vetoriais complexos do tipo

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + c_j(t)\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

definidos no toro $\mathbb{T}^{n+1} \simeq (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{n+1}$, sendo $c_j \in C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{C})$ para $j = 1, \ldots, n$ e $(t, x) = (t_1, \ldots, t_n, x)$ as coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1}$. O sistema (1) é do tipo tubo (veja [BCH] página 24) e neste trabalho vamos supor que seja involutivo o que equivale à 1-forma $c(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)dt_j$ ser fechada.

O estudo da resolubilidade global do sistema (1) consiste em obter condições necessárias e/ou suficientes para que, dadas funções $f_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, $j = 1, \ldots, n$, satisfazendo certas condições naturais de compatibilidade, exista solução u das equações diferenciais parciais

$$L_j u = f_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Não é conhecida uma resposta no caso geral para esse problema. Alguns trabalhos nos indicam condições para a resolubilidade do sistema (1) a partir de certas hipóteses. Pelo memorável trabalho [T1] de François Treves, a *resolubilidade local* do sistema (1) está relacionada com a conexidade de todos os conjuntos de subnível e supernível da parte imaginária de uma *primitiva local* da 1-forma c. Propriedades dessa natureza aparecem pela primeira vez nesse trabalho que trata de operadores em um contexto mais geral e em todos os níveis do complexo associado.

Pelo trabalho [CH] de Cardoso e Hounie, posterior a [T1], quando a 1-forma c for exata, o sistema (1) será *globalmente resolúvel* se, e somente se, a parte imaginária de uma *primitiva global* de c possuir todos os subníveis e superníveis conexos em $\mathbb{T}^n$.

Quando a 1-forma c não é exata, ela não possui uma primitiva global definida em $\mathbb{T}^n$, o que exige nova abordagem.

O trabalho [H] de Hounie apresenta uma resposta completa para a resolubilidade global quando o sistema (1) é composto por um único campo, isto é,

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + c(t)\frac{\partial}{\partial x}$$

definido em $\mathbb{T}^2$. Neste caso, a resolubilidade global envolve também condições sobre a parte real $\mathrm{Re}(c)$. Mais precisamente, se c_0 é a média da função c então o campo L é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^2$ se, e somente se, vale alguma das seguintes condições:

1. Se $\mathrm{Im}(c) \equiv 0$ então c_0 não é um número de Liouville;

2. Se $\mathrm{Im}(c) \not\equiv 0$ e $c_0 \in \mathbb{R}$ então uma primitiva de $\mathrm{Im}(c)$ possui apenas subníveis e superníveis conexos em $\mathbb{T}^1$ e $c_0 \in \mathbb{Z}$;

3. Se $\mathrm{Im}(c) \not\equiv 0$ e $c_0 \notin \mathbb{R}$ então $\mathrm{Im}(c)$ não muda de sinal.

Bergamasco e Kirilov estudaram em [BK] a resolubilidade global do sistema (1) considerando dois campos em $\mathbb{T}^3$ e $c = ib$, sendo $b = b_1 dt_1 + b_2 dt_2$ uma 1-forma real com períodos b_{10} e b_{20} racionalmente independentes. Neste caso, a 1-forma b não possui uma primitiva global definida em $\mathbb{T}^2$, então o que se utiliza é o *pull-back* de b por meio do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Desse modo, o sistema (1) é *globalmente resolúvel* se, e somente se, todos os conjuntos de subnível e supernível de uma primitiva global do *pull-back* $\Pi^* b$ são conexos em $\mathbb{R}^2$.

O caso em que $c = ib$ sendo $b = b_1 dt_1 + b_2 dt_2$ uma 1-forma real com períodos b_{10} e b_{20} racionalmente dependentes (não ambos nulos) foi estudado por Bergamasco, Kirilov, Zani e Nunes em [BKNZ]. Os autores mostraram que para esse caso a resolubilidade global é equivalente à conexidade de todos os subníveis e superníveis de uma primitiva global do *pull-back* de b em $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^1$.

Portanto, os trabalhos [CH], [BKNZ] e [BK], respectivamente, mostram que para $n = 2$ e $c = ib$ a resolubilidade global do sistema (1) é equivalente à conexidade de todos os subníveis e superníveis de uma primitiva global do *pull-back* de b no chamado espaço de *recobrimento minimal* de $\mathbb{T}^2$ com relação à 1-forma b. O recobrimento minimal é isomorfo a $\mathbb{R}^r \times \mathbb{T}^{2-r}$, onde $r = 0, 1, 2$ depende dos períodos b_{10} e b_{20}. Isso nos dá uma ideia da complexidade desse problema mesmo em dimensão $n = 2$.

Outros artigos que tratam de questões semelhantes são [BCM], [BCP1], [BCP2], [BNZ1], [BNZ2] e [BZ].

No primeiro capítulo do trabalho estabelecemos as notações e resultados preliminares que são importantes para a compreensão do texto. Apresentamos o sistema de campos vetoriais complexos (1) inserido na teoria das estruturas localmente integráveis. Em seguida, definimos o significado de resolubilidade global para este trabalho. Além disso, definimos e expomos alguns resultados sobre números de Liouville, porém em vez de números reais são considerados vetores do $\mathbb{R}^m$ (ver Definição 1.5).

O Capítulo 2 trata da resolubilidade global do sistema (1) no caso n-dimensional assumindo que a parte imaginária de cada função c_j depende apenas da variável t_j correspondente, ou seja, $c_j(t) = a_j(t)+ib_j(t_j)$, $j = 1,\ldots,n$. Após uma certa conjugação mostramos que, para o estudo da resolubilidade global, basta considerar cada função a_j constante, isto é,

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j0} + ib_j(t_j))\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1,\ldots,n,$$

com a_{j0} a média da função a_j. Para esse sistema damos o nome de *sistema desacoplado*.

Conseguimos condições necessárias e suficientes para que o sistema desacoplado seja globalmente resolúvel (ver Teorema 2.1). Essas condições novamente envolvem a propriedade de conexidade dos subníveis e superníveis de uma primitiva global do *pull-back* de $b = \mathrm{Im}(c)$ no recobrimento minimal de $\mathbb{T}^n$ com relação à 1-forma b. Como consequência dos resultados obtidos temos que o sistema

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + (\frac{1}{2} + i\,\mathrm{sen}\, t_2)\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^3$, enquanto que

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + (\frac{1}{4} + i\,\mathrm{sen}\, t_2)\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

não é globalmente resolúvel (ver Proposição 2.4).

Por fim, no Capítulo 3 apresentamos uma situação de não resolubilidade do sistema (1) quando $c = ib$, sendo b uma 1-forma real, fechada e suave definida em $\mathbb{T}^n$ satisfazendo hipóteses adicionais. Como aplicação disso e usando resultados do trabalho [BK] obtemos condições necessárias e suficientes para a resolubilidade global em um caso parcialmente acoplado.

Capítulo

1

Considerações iniciais

Neste capítulo vamos introduzir algumas notações e resultados que irão nortear o desenvolvimento do trabalho.

Começamos apresentando o sistema de equações cuja resolubilidade global estamos interessados em estudar. Em seguida, com base no trabalho [BKNZ], definimos o espaço de recobrimento minimal do toro $\mathbb{T}^n$ com relação a uma 1-forma real, fechada e suave. Por fim, faremos uma breve exposição sobre um conceito muito importante para este trabalho, a saber, os números de Liouville.

1.1 O sistema de equações

Seja $c(t) = c_1(t)dt_1 + \cdots + c_n(t)dt_n$ uma 1-forma complexa fechada de classe C^∞ definida no toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Considere o subfibrado vetorial T' gerado pela 1-forma $dx - c \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{S}^1) \simeq \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ na qual x denota a variável em $\mathbb{S}^1$. Portanto T' é um subfibrado de posto 1 do fibrado cotangente complexificado $\mathbb{C} \otimes T^*(\mathbb{T}^{n+1})$ e o ortogonal $\mathcal{V} = (T')^\perp$ é um subfibrado vetorial de posto n do fibrado tangente complexificado $\mathbb{C} \otimes T(\mathbb{T}^{n+1})$. Além disso, $\mathcal{V}$ é gerado pelos campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + c_j(t)\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.1}$$

sendo $(t, x) = (t_1, \dots, t_n, x)$ as coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1}$. Definido desta forma, o subfibrado $\mathcal{V}$ é uma estrutura localmente integrável de codimensão 1 sobre $\mathbb{T}^{n+1}$.

Como c é uma 1-forma fechada temos

$$\frac{\partial}{\partial t_j} c_k = \frac{\partial}{\partial t_k} c_j, \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Portanto, os campos vetoriais (1.1) satisfazem

$$[L_j, L_k]v \doteq L_j(L_k v) - L_k(L_j v) = \Big(\frac{\partial}{\partial t_j} c_k - \frac{\partial}{\partial t_k} c_j\Big)\frac{\partial}{\partial x} v = 0, \quad v \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}).$$

Uma exposição mais completa dessas ideias e conceitos encontra-se nos livros [T2] de Treves e [BCH] de Berhanu, Cordaro e Hounie.

Além disso, o sistema (1.1) dá origem a um complexo diferencial de operadores $\mathbb{L}$ o qual age, no primeiro nível, do seguinte modo

$$\mathbb{L}u = d_t u + c(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x} u, \quad u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1}) \,(\text{ou } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})),$$

sendo d_t a derivada exterior em $\mathbb{T}^n_t$.

Nosso interesse é a resolubilidade global no primeiro nível desse complexo; mais precisamente, estudamos a resolubilidade global da equação $\mathbb{L}u = f$ com $f \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ e $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$. Para que essa equação tenha solução é necessário que f seja da seguinte forma

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_j(t, x) dt_j,$$

e além disso,

$$L_j u = f_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

1.2 Condições de compatibilidade

O intuito desta seção é estabelecer critérios para a escolha das 1-formas f em $\bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ de modo que faça sentido a questão da existência de solução da equação $\mathbb{L}u = f$.

Consideramos inicialmente as séries parciais de Fourier de u e f dadas por

$$u(t, x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t, \xi) e^{i\xi x} \quad \text{e} \quad f(t, x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}(t, \xi) e^{i\xi x}, \tag{1.2}$$

sendo $\hat{f}(t, \xi) = \sum_{j=1}^n \hat{f}_j(t, \xi) dt_j$. No caso em que u é função (integrável), a expressão $\hat{u}(t, \xi)$ é dada por

$$\hat{u}(t, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, s) e^{-i\xi s} ds.$$

Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ então, para cada ξ, o coeficiente $\hat{u}(\cdot,\xi)$ é uma distribuição dada por

$$\langle \hat{u}(\cdot,\xi), \phi\rangle \doteq \frac{1}{2\pi}\langle u, \phi\otimes e_{-\xi}\rangle, \quad \phi \in C^\infty(\mathbb{T}^n_t),$$

sendo $\phi\otimes e_{-\xi}(t,x) = \phi(t)e^{-i\xi x} \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$.

Quando os coeficientes $\hat{u}(\cdot,\xi)$ são funções suaves em $\mathbb{T}^n$, temos a seguinte caracterização: a expressão u dada por (1.2) é uma função suave se, e somente se, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ e todo $N \in \mathbb{N}$ vale

$$\sup_{\xi\in\mathbb{Z}}\Big\{\max_{t\in\mathbb{T}^n}\{|\partial^\alpha \hat{u}(t,\xi)|(1+|\xi|)^N\}\Big\} < \infty.$$

Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ então existem $C>0$ e $N\in\mathbb{N}$ de forma que

$$|\langle \hat{u}(\cdot,\xi),\phi\rangle| \leq C|p_N(\phi)|(1+|\xi|)^N, \quad \forall\phi\in C^\infty(\mathbb{T}^n), \forall\xi\in\mathbb{Z},$$

sendo

$$p_N(\phi) = \sup\{|\partial^\alpha\phi(t)|;\ t\in\mathbb{T}^n \text{ e } |\alpha|\leq N\}.$$

Como a 1-forma c é fechada, pelo Teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} & [c_1(s_1,t_2,\ldots,t_n) - c_1(s_1,t_2,\ldots,t_{n-1},0)]ds_1 \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{t_n}\frac{\partial}{\partial s_n}c_1(s_1,t_2,\ldots,t_{n-1},s_n)ds_nds_1 \\
&= \int_0^{t_n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial s_n}c_1(s_1,t_2,\ldots,t_{n-1},s_n)ds_1ds_n \\
&= \int_0^{t_n}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial s_1}c_n(s_1,t_2,\ldots,t_{n-1},s_n)ds_1ds_n = 0;
\end{aligned}$$

repetindo este procedimento para as demais variáveis é possível concluir que

$$\int_0^{2\pi}[c_1(s_1,t_2,\ldots,t_n) - c_1(s_1,0,\ldots,0)]ds_1 = 0,$$

para todo $(t_2,\ldots,t_n)$. Isto nos leva a definir as médias

$$c_{j0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}c_j(0,\ldots,s_j,\ldots,0)ds_j, \quad j=1,\ldots,n.$$

Dando continuidade, escrevemos a 1-forma complexa c no seguinte formato

$$c = c_0 + d_tC,$$

no qual C é uma função suave de $t \in \mathbb{T}_t^n$ a valores complexos e $c_0 \in \bigwedge^1 \mathbb{C}^n$. Identificamos a 1-forma c_0 com o vetor $(c_{10}, \dots, c_{n0})$ em $\mathbb{C}^n$ consistindo das médias $c_{j0} = a_{j0} + ib_{j0}$ sendo

$$a_{j0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_j(0, \dots, s_j, \dots, 0) ds_j \;\text{ e }\; b_{j0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b_j(0, \dots, s_j, \dots, 0) ds_j.$$

Usaremos também as notações $a_0 = (a_{10}, \dots, a_{n0})$ e $b_0 = (b_{10}, \dots, b_{n0})$.

Lema 1.1. *Se existe uma solução $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ da equação $\mathbb{L}u = f$ com $f \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ então*

$$\mathbb{L}f = 0 \tag{1.3}$$

e

$$\hat{f}(t, \xi) e^{i\xi(c_0 \cdot t + C(t))} \textit{ é exata sempre que } \xi \in \mathbb{Z} \textit{ satisfaz } \xi c_0 \in \mathbb{Z}^n. \tag{1.4}$$

Demonstração. A validade de (1.3) é consequência de que $\mathbb{L}$ gera um complexo e que $\mathbb{L}f = \mathbb{L}(\mathbb{L}u)$. Para maior clareza apresentamos a seguir os cálculos correspondentes. Uma vez que $\mathbb{L}u = L_1 u dt_1 + \cdots + L_n u dt_n$, obtemos

$$\mathbb{L}(\mathbb{L}u) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^{n} \big(L_k(L_j u) - L_j(L_k u)\big) dt_k \wedge dt_j = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j>k}^{n} [L_k, L_j](u) dt_k \wedge dt_j = 0,$$

ou seja, $0 = \mathbb{L}(\mathbb{L}u) = \mathbb{L}f$.

Considere agora as séries de Fourier em relação à variável x dadas por (1.2). Então, da equação $\mathbb{L}u = f$ temos

$$d_t \hat{u}(t, \xi) + i\xi c(t) \wedge \hat{u}(t, \xi) = \hat{f}(t, \xi), \quad \xi \in \mathbb{Z},$$

ou equivalentemente

$$(d_t + i\xi c_0 \wedge) e^{i\xi C(t)} \hat{u}(t, \xi) = e^{i\xi C(t)} \hat{f}(t, \xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}.$$

Seja $\xi \in \mathbb{Z}$ tal que $\xi c_0 \in \mathbb{Z}^n$; assim $e^{i\xi c_0 \cdot t}$ é bem definido para $t \in \mathbb{T}^n$ e

$$d_t\big(e^{i\xi(c_0 \cdot t + C(t))} \hat{u}(t, \xi)\big) = e^{i\xi(c_0 \cdot t + C(t))} \hat{f}(t, \xi),$$

portanto, $e^{i\xi(c_0 \cdot t + C(t))} \hat{f}(t, \xi)$ é exata.

□

Motivados pelo lema anterior, definimos o seguinte espaço

$$\mathbb{E} = \big\{ f \in \bigwedge{}^1 C^\infty(\mathbb{T}^{n+1});\;\; \mathbb{L}f = 0 \;\text{ e vale (1.4)} \big\}. \tag{1.5}$$

Definição 1.2. *Dizemos que o operador diferencial $\mathbb{L}$ é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$ se para cada $f \in \mathbb{E}$ existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $\mathbb{L}u = f$.*

1.3 Recobrimento minimal de $\mathbb{T}^n$

Dada uma 1-forma real, fechada e suave b definida no toro $\mathbb{T}^n \simeq (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$, vamos apresentar um conceito que chamaremos de *recobrimento minimal* de $\mathbb{T}^n$ com relação a b. Esse conceito foi introduzido primeiramente no trabalho [BKNZ]. A 1-forma $b \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^n;\mathbb{R})$ será neste trabalho a parte imaginária da 1-forma complexa c considerada na seção anterior; ou seja, escrevemos $c = a + ib$ sendo $a(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t)dt_j$ e $b(t) = \sum_{j=1}^n b_j(t)dt_j$ 1-formas reais sobre $\mathbb{T}^n$.

O recobrimento minimal dependerá dos períodos

$$b_{j0} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b_j(0,\ldots,s_j,\ldots,0)ds_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

das funções b_j.

Considere o grupo de períodos da 1-forma b definido por

$$Per(b) \doteq \Big\{\frac{1}{2\pi}\int_\sigma b\ ;\ \ \sigma \text{ é um 1-ciclo em } \mathbb{T}^n\Big\}.$$

Equivalentemente, $Per(b)$ é o subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ consistindo de todas as combinações inteiras dos números $b_{10},\ldots,b_{n0}$. Assim, se $r \doteq \text{posto}(Per(b))$ temos que r é o maior número de períodos racionalmente independentes dentre $b_{10},\ldots,b_{n0}$. Logo, as possibilidades para posto$(Per(b))$ são $r = 0,1,\ldots,n$.

Dados dois recobrimentos $\Pi_1 : \mathcal{T}_1 \to \mathbb{T}^n$ e $\Pi_2 : \mathcal{T}_2 \to \mathbb{T}^n$ do toro $\mathbb{T}^n$ tais que os respectivos *pull-backs* $\Pi_1^* b$ e $\Pi_2^* b$ são formas exatas, escrevemos $\mathcal{T}_1 \preceq \mathcal{T}_2$ quando $\mathcal{T}_2$ for um recobrimento de $\mathcal{T}_1$. Definido dessa forma, $\preceq$ é uma relação de ordem parcial.

Definição 1.3. *Seja b uma 1-forma real, suave e fechada definida em $\mathbb{T}^n$. Um recobrimento minimal do toro $\mathbb{T}^n$ com relação a b é um espaço de recobrimento de $\mathbb{T}^n$ que é minimal no sentido da relação $\preceq$.*

Se $\mathcal{T}$ é um recobrimento minimal de $\mathbb{T}^n$ com relação à uma 1-forma real, fechada e suave b então $\mathcal{T}$ é isomorfo a $\mathbb{T}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$, sendo r o posto do grupo de períodos da 1-forma b.

Daqui em diante, em vez de dizer um recobrimento minimal vamos dizer o recobrimento minimal de $\mathbb{T}^n$ e escrever $\mathcal{T} = \mathbb{T}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$.

Veja que $r = 0$ se, e somente se, a 1-forma b é exata e neste caso $\mathcal{T} = \mathbb{T}^n$. O outro caso extremo será quando $r = n$. Neste caso $\mathcal{T} = \mathbb{R}^n$ e $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ é o recobrimento universal de $\mathbb{T}^n$.

Essa definição nos interessa pois garante a existência de uma *primitiva global* da 1-forma $\Pi^* b$ definida no recobrimento minimal $\mathcal{T}$.

Se a 1-forma b é exata, além de possuir uma primitiva global em $\mathbb{T}^n$, o *pull-back* de b em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^{n-m}$, $m = 1, \ldots, n$, ainda é uma 1-forma exata e, portanto, possui primitiva global nesses espaços. Poderíamos pensar em estudar a resolubilidade global usando um deles, porém no caso em que b é exata pode ser essencial o uso da definição do recobrimento minimal conforme mostra o exemplo a seguir.

Se $b(t_1, t_2) = i \cos t_2 dt_2$, então o sistema

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + i \cos t_2 \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^3$ (pelo trabalho [CH]) pois $B(t_1, t_2) = \operatorname{sen} t_2$ é uma primitiva global de b que tem todos os subníveis e superníveis conexos em $\mathbb{T}^2$, porém em $\mathbb{T}^1_{t_1} \times \mathbb{R}_{t_2}$ e em $\mathbb{R}^2$ existem subníveis e superníveis desconexos das respectivas primitivas. Ou seja, a propriedade de conexidade de todos os subníveis e superníveis depende de onde estamos considerando a primitiva global da 1-forma b.

Se $b = b_1 dt_1 + b_2 dt_2$ é uma 1-forma real fechada e suave definida em $\mathbb{T}^2$, os trabalhos [CH] (quando $r = 0$), [BKNZ] (quando $r = 1$) e [BK] (quando $r = 2$) nos mostram que a resolubilidade global do operador

$$\mathbb{L} = d_t + ib(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$$

é equivalente à propriedade de todos os conjuntos de subnível e supernível de uma primitiva global de $\Pi^* b$ serem conexos no recobrimento minimal $\mathcal{T}$.

Aproveitamos para provar nesta seção um resultado de normalização para os períodos $b_{10}, \ldots, b_{n0}$. Vamos denotar por $s \doteq n - r$ o coposto do grupo de períodos $Per(b)$, sendo $r = \text{posto}(Per(b))$.

Se b for uma 1-forma exata então $r = 0$ ou equivalentemente $(b_{10}, \ldots, b_{n0}) = 0$. Se a 1-forma b não for exata temos

$$1 \leq r \leq n \quad \text{e} \quad 0 \leq s \leq n - 1,$$

e vale o seguinte resultado:

Lema 1.4. *Seja $b = \sum_{j=1}^n b_j dt_j \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ uma 1-forma fechada. Se b não é exata então existe um sistema de coordenadas em $\mathbb{T}^n$ no qual os períodos da 1-forma b satisfazem:*

(i) $b_{10} = \cdots = b_{s0} = 0$ *e* $b_{n0} < \cdots < b_{(s+1)0} < 0$*, quando* $s \geq 1$*;*

(ii) $b_{n0} < \cdots < b_{10} < 0$, *quando* $s = 0$.

Demonstração. Seja B uma primitiva global do *pull-back* $\Pi^* b$ através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$. Podemos escrever $B(t) = b_0 \cdot t + P(t)$ sendo P uma função suave e 2π-periódica.

Começamos com o caso $s \geq 1$. Neste caso, os períodos $b_{10}, \ldots, b_{n0}$ são racionalmente dependentes.

Afirmação: existe um sistema de coordenadas em $\mathbb{T}^n$ tal que $b_{10} = 0$. De fato, se existir algum período $b_{j0} = 0$ basta considerar o difeomorfismo $(t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_n) \mapsto (t_j, \ldots, t_1, \ldots, t_n)$. Caso isso não ocorra, podemos escrever algum período b_{j0} como combinação racional dos demais. Logo, existem $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ tais que $\mathrm{mdc}(k_1, \ldots, k_n) = 1$ e

$$k_1 b_{10} + \cdots + k_n b_{n0} = 0. \tag{1.6}$$

Seja $d = \mathrm{mdc}(k_1, k_n)$, então existem inteiros p e q satisfazendo $d = pk_1 + qk_n$, logo $1 = p\alpha + q\beta$ sendo $\alpha = k_1/d$ e $\beta = k_n/d$. Considere o difeomorfismo $t \mapsto t' \doteq A_1^{-1} t$ no qual

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & -q \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & 1 & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Note que este difeomorfismo fica bem definido uma vez que $A_1 \in SL(n; \mathbb{Z})$, sendo $SL(n; \mathbb{Z})$ o grupo das matrizes de ordem n, com entradas inteiras, invertíveis e com determinante igual a 1.

Além disso,

$$\begin{aligned} b_0 \cdot t(t') &= (\alpha t'_1 - q t'_n) b_{10} + t'_2 b_{20} + \cdots + t'_{n-1} b_{(n-1)0} + (\beta t'_1 + p t'_n) b_{n0} \\ &= t'_1 (\alpha b_{10} + \beta b_{n0}) + t'_2 b_{20} + \cdots + t'_{n-1} b_{(n-1)0} + t'_n (p b_{n0} - q b_{10}), \end{aligned}$$

ou seja, nas novas coordenadas temos

$$b'_{10} = \alpha b_{10} + \beta b_{n0}, \quad b'_{j0} = b_{j0},\ j = 2, \ldots, n-1, \quad b'_{n0} = p b_{n0} - q b_{10}.$$

Note agora que, tomando $k'_1 = d$, $k'_j = k_j, j = 2, \ldots, n-1$, e $k'_n = 0$ temos $\mathrm{mdc}(k'_1, \ldots, k'_{n-1}) = 1$ e além disso por (1.6) obtemos

$$\begin{gathered} k'_1 b'_{10} + \cdots + k'_{n-1} b'_{(n-1)0} = \\ d(\alpha b_{10} + \beta b_{n0}) + k_2 b_{20} + \cdots + k_{n-1} b_{(n-1)0} = 0. \end{gathered}$$

Isto significa que nas novas coordenadas os períodos $b'_{10},\dots,b'_{(n-1)0}$ são racionalmente dependentes.

Para não sobrecarregar a notação voltamos a escrever $t=t'$ e $k_j=k'_j$ para $j=1,\dots,n-1$. Assim, existem inteiros $k_1,\dots,k_{n-1}$ tais que $\operatorname{mdc}(k_1,\dots,k_{n-1})=1$ e $k_1b_{10}+\cdots+k_{n-1}b_{(n-1)0}=0$.

Seja agora $d=\operatorname{mdc}(k_1,k_{n-1})$, então existem inteiros p e q tais que $d=pk_1+qk_{n-1}$, daqui $1=p\alpha+q\beta$ sendo $\alpha=k_1/d$ e $\beta=k_{n-1}/d$. Considere o difeomorfismo $t\mapsto t'\doteq A_2^{-1}t$ no qual

$$A_2=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & -q & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots\\ \beta & \vdots & & p & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Novamente $A_2\in SL(n;\mathbb{Z})$ e obtemos

$$\begin{aligned} b_0\cdot t(t') &= (\alpha t'_1-qt'_{n-1})b_{10}+t'_2b_{20}+\cdots+(\beta t'_1+pt'_{n-1})b_{(n-1)0}+t'_nb_{n0}\\ &= t'_1(\alpha b_{10}+\beta b_{(n-1)0})+t'_2b_{20}+\cdots+t'_{n-1}(pb_{(n-1)0}-qb_{10})+t'_nb_{n0}, \end{aligned}$$

ou seja, nas novas coordenadas $t'_1,\dots,t'_n$ temos

$$b'_{10}=\alpha b_{10}+\beta b_{(n-1)0},\quad b'_{j0}=b_{j0},\ j=2,\dots,n-2,n,$$

$$b'_{(n-1)0}=pb_{(n-1)0}-qb_{10}.$$

Escolhemos $k'_1=d,\ k'_j=k_j, j=2,\dots,n-2$ e $k'_{n-1}=k'_n=0$ e concluímos que $\operatorname{mdc}(k'_1,\dots,k'_{n-2})=1$ e

$$k'_1b'_{10}+\cdots+k'_{n-2}b'_{(n-2)0}=0.$$

Assim por diante, quando $n>2$, construímos matrizes $A_1,\dots,A_{n-2}\in SL(n;\mathbb{Z})$ e um difeomorfismo $t\mapsto A_{n-2}^{-1}\dots A_1^{-1}t$ de forma que no novo sistema de coordenadas (também denotado por $t_1,\dots,t_n$) o período b_{10} é um múltiplo racional de b_{20}. Isto é, existem inteiros k_1 e k_2 tais que $\operatorname{mdc}(k_1,k_2)=1$ e

$$k_1b_{10}+k_2b_{20}=0.$$

Para finalizar nossa afirmação, considere inteiros p e q tais que $1 = pk_1 + qk_2$. Definimos o difeomorfismo $t \mapsto t' \doteq A_{n-1}^{-1} t$ no qual

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} k_1 & -q & \cdots & 0 & 0 \\ k_2 & p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que este difeomorfismo fica bem definido pois $A_{n-1} \in SL(n;\mathbb{Z})$. Além disso,

$$\begin{aligned} b_0 \cdot t(t') &= (k_1 t_1' - q t_2') b_{10} + (k_2 t_1' + p t_2') b_{20} + \cdots + t_n' b_{n0} \\ &= t_1'(k_1 b_{10} + k_2 b_{20}) + t_2'(p b_{20} - q b_{10}) + t_3' b_{30} + \cdots + t_n' b_{n0}, \end{aligned}$$

ou seja, nas novas coordenadas temos

$$b_{10}' = k_1 b_{10} + k_2 b_{20} = 0, \quad b_{20}' = p b_{20} - q b_{10}, \quad b_{j0}' = b_{j0},\ j = 3, \ldots, n.$$

Dessa forma, concluímos a prova da afirmação feita no início desta demonstração. Este processo pode ser repetido $s = n - r$ vezes de modo a obter $b_{10} = \cdots = b_{s0} = 0$ e $b_{(s+1)0}, \ldots, b_{n0}$ racionalmente independentes.

Por fim, considere a matriz

$$A = (a_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j = 1, \ldots, s \\ 1 & \text{se } i = j \text{ e } b_{j0} < 0 \\ -1 & \text{se } i = j \text{ e } b_{j0} > 0 \end{cases}.$$

Então, a aplicação $t \mapsto t' = A^{-1} t$ define um difeomorfismo que produz coordenadas em $\mathbb{T}^n$ onde $b_{10} = \cdots = b_{s0} = 0$ e $b_{j0} < 0,\ j = s+1, \ldots, n$.

A ordenação $b_{n0} < \cdots < b_{(s+1)0} < 0$, para $s \geq 0$, mencionada em (i) e (ii) pode ser obtida reordenando as coordenadas em $\mathbb{T}^n$.

□

1.4 Números de Liouville

Utilizamos neste trabalho um importante conceito da *teoria dos números*, os chamados números de Liouville (ver [MMST] página 356). No entanto, como vamos trabalhar com sistemas de mais de um campo, precisamos definir uma generalização desse conceito para vetores do $\mathbb{R}^N$.

Dado $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, dizemos que α é um *número de Liouville* se para cada $m \in \mathbb{N}$ existem infinitos racionais p/q satisfazendo

$$\big|\alpha - \frac{p}{q}\big| < \frac{1}{q^m},$$

ou equivalentemente, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ é um número de Liouville se existir uma sequência p_l/q_l de números racionais tal que

$$\big|\alpha - \frac{p_l}{q_l}\big| < \frac{1}{(q_l)^l}, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Definição 1.5. *Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{Q}^N$, dizemos que α é Liouville se existem uma constante $C > 0$ e uma sequência $\{(\kappa_l, \xi_l)\}$ em $\mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}$ ($\xi_l \geq 2$) tais que*

$$\max_{j=1,\ldots,N}\Big|\alpha_j - \frac{\kappa_l^{(j)}}{\xi_l}\Big| < \frac{C}{(\xi_l)^l}, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Essa definição é equivalente a uma definição análoga com a constante $C = 1$.

Se $\alpha \notin \mathbb{Q}^N$ é Liouville então pela Definição 1.5 cada $\alpha_j \notin \mathbb{Q}$ é um número de Liouville, porém se cada α_j é um número de Liouville, não necessariamente o vetor α é Liouville. No trabalho [B] de Bergamasco é apresentado um exemplo (Exemplo 4.9) na classe *exponencial Liouville* onde α_1 e α_2 são exponenciais Liouville e, portanto, números de Liouville, no entanto o vetor (α_1, α_2) não é exponencial Liouville. Mais ainda, o autor mostra que o vetor (α_1, α_2) não é sequer Liouville no sentido da Definição 1.5.

Lema 1.6. *Se $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \notin \mathbb{Q}^N$ é Liouville então existem uma constante $C > 0$ e uma sequência $\{(\kappa_l, \xi_l)\}$ em $\mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}$ ($\xi_l \geq 2$) tais que*

$$\max_{j=1,\ldots,N}\Big|\alpha_j - \frac{\kappa_l^{(j)}}{\xi_l}\Big| < \frac{C}{\big|(\kappa_l, \xi_l)\big|^l}, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Sejam $C > 0$ a constante e $\{(\kappa_l, \xi_l)\}$ a sequência obtidas pela Definição 1.5. Note que

$$|k_l^{(j)}| < C(\xi_l)^{1-l} + |\alpha_j|\xi_l \leq \xi_l(C + |\alpha|), \quad j = 1, \ldots, N, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Assim, $\big|(\kappa_l, \xi_l)\big| \leq |\kappa_l^{(1)}| + \cdots + |\kappa_l^{(N)}| + |\xi_l| < \widetilde{C}\xi_l$ sendo $\widetilde{C} = 1 + N(C + |\alpha|)$ e segue facilmente a conclusão.

□

Lema 1.7. *Sejam* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \notin \mathbb{Q}^N$ *e* $\eta \in \mathbb{N}$. *Se* α *é Liouville então existem uma constante* $C > 0$ *e uma sequência* $\{(\kappa_l, \xi_l)\}$ *em* $(\eta\mathbb{Z})^N \times \eta\mathbb{Z}$ *(*$\xi_l \geq 2$*) tais que*

$$\max_{j=1,\ldots,N} \left| \alpha_j - \frac{\kappa_l^{(j)}}{\xi_l} \right| < \frac{C}{(\xi_l)^l}, \ \forall l \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Como α é Liouville, por definição, existem uma constante $C > 0$ e uma sequência $\{(\kappa_l, \xi_l)\}$ em $\mathbb{Z}^N \times \mathbb{Z}$ ($\xi_l \geq 2$) tais que

$$\max_{j=1,\ldots,N} \left| \alpha_j - \frac{\kappa_l^{(j)}}{\xi_l} \right| < \frac{C}{(\xi_l)^l}, \ \forall l \in \mathbb{N},$$

sendo que podemos assumir que $\xi_l < \xi_{l+1}$, $\forall l \in \mathbb{N}$.

Para $\eta = 1$ a conclusão é imediata da Definição 1.5. Para $\eta > 1$ temos $\eta \leq \xi_\eta \leq \xi_{\eta l} \leq (\xi_{\eta l})^{\eta - 1}$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Note que a constante C anterior e a sequência $(\widetilde{\kappa}_l, \widetilde{\xi_l}) \doteq (\eta\kappa_{\eta l}, \eta\xi_{\eta l})$, $l \in \mathbb{N}$, satisfazem a condição desejada. Com efeito,

$$\max_{j=1,\ldots,N} \left| \alpha_j - \frac{\eta\kappa_{\eta l}^{(j)}}{\eta\xi_{\eta l}} \right| \leq C(\xi_{\eta l})^{-\eta l} = C \underbrace{(\eta^l \xi_{\eta l}^{-(\eta-1)l})}_{\leq 1} (\eta\xi_{\eta l})^{-l} \leq C(\eta\xi_{\eta l})^{-l}, \quad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Capítulo

2

Sistemas involutivos desacoplados

Neste capítulo estudamos a resolubilidade global do operador $\mathbb{L}$ no caso em que cada função b_j depende apenas da variável t_j correspondente. Mais precisamente, consideramos o operador diferencial

$$\mathbb{L} = d_t + (a(t) + ib(t)) \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.1}$$

com $a(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t)dt_j$ e $b(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j(t_j)dt_j$ 1-formas reais. Esse operador está associado ao sistema de campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_j(t) + ib_j(t_j))\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

no qual $a_j \in C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, $b_j \in C^\infty(\mathbb{T}^1; \mathbb{R})$ e $(t, x) = (t_1, \ldots, t_n, x)$ são as coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1} \simeq (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{n+1}$.

Considere o espaço de recobrimento minimal $\mathcal{T} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{T}^{n-r}$ com relação à 1-forma real b, segundo a Definição 1.3. Assim, a 1-forma $\Pi^* b$ possui uma primitiva global B definida em $\mathcal{T}$. Uma vez que cada função b_j depende apenas da variável t_j, a função $B : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita na seguinte forma $B(t) = \sum_{j=1}^{n} B_j(t_j)$.

Sejam $J = \{j_1, \ldots, j_m\} \subset \{1, \ldots, n\}$ com $j_1 < \cdots < j_m$ e $a_0 \doteq (a_{10}, \ldots, a_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ sendo cada a_{j0} a média da função a_j. Quando $a_0 \in \mathbb{Q}^n$ e $J \neq \emptyset$, denotamos por q_J o menor inteiro positivo que satisfaz $q_J(a_{j_1 0}, \ldots, a_{j_m 0}) \in \mathbb{Z}^m$. No caso em que

$J = \{1, \ldots, n\}$ usamos a notação q_*. Assim, qualquer que seja $J = \{j_1, \ldots, j_m\} \neq \emptyset$ com $1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$ teremos $q_J \leq q_*$ e além disso q_J divide q_*.

Daqui em diante vamos considerar o conjunto $J = \{j \in \{1, \ldots, n\};\ b_j \equiv 0\}$ e vamos escreve-lo da seguinte forma $J = \{j_1 < \cdots < j_m\}$.

Sob estas notações, vamos enunciar o teorema que é o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.1. *Seja B uma primitiva global de Π^*b definida no recobrimento minimal $\mathcal{T}$. O operador $\mathbb{L}$ definido em (2.1) é globalmente resolúvel se, e somente se, pelo menos uma das duas situações ocorre:*

I) $J \neq \emptyset$ e $(a_{j_1 0}, \ldots, a_{j_m 0}) \notin \mathbb{Q}^m$ é não-Liouville.

II) Os subníveis $\Omega_s = \{t \in \mathcal{T};\ B(t) < s\}$ e superníveis $\Omega^s = \{t \in \mathcal{T};\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$ e além disso uma das seguintes condições é satisfeita:

1. *$J = \emptyset$, b é exata e $a_0 \in \mathbb{Z}^n$;*
2. *$J \neq \emptyset$, b é exata, $a_0 \in \mathbb{Q}^n$ e $q_J = q_*$;*
3. *b é não exata.*

Note que quando $J = \{1, \ldots, n\}$ então $b = 0$, portanto, b é exata e $q_J = q_*$. Nestas condições, o teorema anterior diz que $\mathbb{L}$ é globalmente resolúvel se, e somente se, $a_0 \notin \mathbb{Q}^n$ é não-Liouville ou $a_0 \in \mathbb{Q}^n$, o que condiz com o resultado do trabalho de Bergamasco e Petronilho [BP].

Quando $b = \sum_{j=1}^n b_j(t_j)dt_j$ é uma 1-forma não exata, a propriedade de todos os subníveis e superníveis de uma primitiva global de Π^*b serem conexos no recobrimento minimal $\mathcal{T}$ está intimamente ligada com a existência de uma função $b_j \not\equiv 0$ que não muda de sinal, conforme mostra o seguinte resultado:

Lema 2.2. *Sejam $b = \sum_{j=1}^n b_j(t_j)dt_j$ uma 1-forma não exata e $B = \sum_{j=1}^n B_j(t_j)$ uma primitiva global de b definida no recobrimento minimal $\mathcal{T} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{T}^{n-r}$. Então os subníveis $\Omega_s = \{t \in \mathcal{T};\ B(t) < s\}$ e superníveis $\Omega^s = \{t \in \mathcal{T};\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$ se, e somente se, existe uma função $b_j \not\equiv 0$ que não muda de sinal.*

Demonstração. Suponha que cada função $b_j \not\equiv 0$ muda de sinal. Então, cada primitiva $B_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, r$, tem um supernível desconexo em $\mathbb{R}$, logo existem um número real s_j e um intervalo aberto limitado I_j o qual é uma componente conexa de $\{t_j \in \mathbb{R};\ B_j(t_j) > s_j\}$. Escrevemos $I_j = (p_j, q_j)$ e $M_j \doteq \max\{B_j(t_j),\ t_j \in [p_j, q_j]\}$, assim $s_j = B_j(p_j) = B_j(q_j) < M_j$, $j = 1, \ldots, r$. Além disso, denotamos por M' o máximo da função $B_{r+1} + \cdots + B_n$ sobre $\mathbb{T}^{n-r}$.

Considere os conjuntos $I = I_1 \times \cdots \times I_r$ e $U \doteq I \times \mathbb{T}^{n-r}$. Tomamos $t^* = (t_1^*, \ldots, t_n^*) \in U$ tal que $B_j(t_j^*) = M_j$, $j = 1, \ldots, r$ e $B_{r+1}(t_{r+1}^*) + \cdots + B_n(t_n^*) = M'$, assim se $M \doteq B(t^*)$ então $B(t) \leq M$, para todo $t \in U$ e $B(t) < M$, para todo $t \in \partial I \times \mathbb{T}^{n-r}$.

Escolhemos agora $\widetilde{M} < s < M$ sendo $\widetilde{M} \doteq \max\{B(t);\ t \in \partial I \times \mathbb{T}^{n-r}\}$. Afirmamos que o supernível Ω^s é desconexo em $\mathcal{T}$. De fato, escrevendo $\Omega^s = (U \cap \Omega^s) \cup (\Omega^s \setminus U)$ temos $U \cap \Omega^s \neq \emptyset$ e $\Omega^s \setminus U \neq \emptyset$. Como U é aberto em $\mathcal{T}$ então $U \cap \Omega^s$ é aberto em Ω^s (na topologia induzida por $\mathcal{T}$). Provaremos agora que $\Omega^s \setminus U$ também é aberto em Ω^s.

Seja $t = (t', t'') \in \Omega^s \setminus U = \Omega^s \cap (\mathcal{T} \setminus U)$ sendo $t' = (t_1, \ldots, t_r)$ e $t'' = (t_{r+1}, \ldots, t_n)$, logo $t' \in \mathbb{R}^r \setminus I$. Portanto, existe uma vizinhança $V_{t'}$ de t' tal que $V_{t'} \subset \mathbb{R}^r \setminus I$. Caso contrário, teríamos $V_{t'} \cap I \neq \emptyset$ para cada vizinhança $V_{t'} \subset \mathbb{R}^r$ de t' o que implicaria em $t' \in \partial I$, assim $B(t) \leq \widetilde{M} < s$, o que é uma contradição. Definimos então $V_t = V_{t'} \times \mathbb{T}^{n-r} \subset \mathcal{T} \setminus U$. Além disso, pela continuidade da função B existe uma vizinhança $W_t \subset \mathcal{T}$ de t tal que $W_t \subset \Omega^s$. Portanto, $V_t \cap W_t \subset \Omega^s \cap (\mathcal{T} \setminus U)$ donde concluímos que $\Omega^s \setminus U$ é um aberto em $\mathcal{T}$ e logo em Ω^s.

Por outro lado, suponha que existe $b_j \not\equiv 0$ que não muda de sinal. Vamos considerar que $b_j(t_j) \leq 0$ para todo $t_j \in \mathbb{R}$, assim B_j é uma função não-crescente em $\mathbb{R}$. Caso $b_j(t_j) \geq 0$ para todo $t_j \in \mathbb{R}$, os argumentos são semelhantes aos usados a seguir.

Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $p = (p_1, \ldots, p_n), q = (q_1, \ldots, q_n) \in \Omega_s$. Vamos assumir que $p_j \leq q_j$. Para cada $k = 1, \ldots, n$, $k \neq j$, existe um caminho σ_k (em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{S}^1$) conectando q_k e p_k. Denotamos por M o maior $M_k \doteq \max\{B_k(\tau);\ \tau \in \sigma_k\}$.

Seja $C > 0$ uma constante tal que $(n-1)M + B_j(q_j + C) < s$. Como B é da forma $B(t) = \sum_{k=1}^{n} B_k(t_k)$ e B_j é uma função não-crescente, existe um caminho γ_1 contido no subnível Ω_s conectando q and $(q_1, \ldots, q_j + C, \ldots, q_n)$. Definimos agora o caminho $\gamma_2 \doteq (\sigma_1, \ldots, q_j + C, \ldots, \sigma_n)$, logo $B(\gamma_2(\xi)) \leq (n-1)M + B_j(q_j + C) < s$, $\xi \in \mathbb{R}$. Portanto, γ_2 é um caminho contido em Ω_s conectando $(q_1, \ldots, q_j + C, \ldots, q_n)$ e $(p_1, \ldots, q_j + C, \ldots, p_n)$.

Finalmente, uma vez que $p \in \Omega_s$ e $p_j \leq q_j + C$, existe um caminho γ_3 contido em Ω_s conectando p e $(p_1, \ldots, q_j + C, \ldots, p_n)$. Assim, concluímos que o subnível Ω_s é conexo por caminhos. Usando ideias semelhantes às anteriores é possível concluir que o supernível Ω^s também é conexo por caminhos.

$\square$

Como discutido anteriorente, se $J = \{1, \ldots, n\}$, então o Teorema 2.1 é válido pelo trabalho [BP]. Assim, para que o Teorema 2.1 fique demonstrado, resta verificar os outros dois casos, ou seja, $J = \emptyset$ e $\emptyset \neq J \neq \{1, \ldots, n\}$. Usando o Lema 2.2, percebe-se que esses dois casos do Teorema 2.1 são exatamente as seguintes proposições:

Proposição 2.3. *Se $J = \emptyset$ então o operador $\mathbb{L}$ é globalmente resolúvel se, e somente se, ocorre alguma das alternativas a seguir:*

(i) Existe uma função b_j que não muda de sinal;

(ii) $a_0 \in \mathbb{Z}^n$, b é exata e os subníveis $\Omega_s = \{t \in \mathbb{T}^n;\ B(t) < s\}$ e superníveis $\Omega^s = \{t \in \mathbb{T}^n;\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.4. *Se $\emptyset \neq J \neq \{1, \dots, n\}$ então $\mathbb{L}$ é globalmente resolúvel se, e somente se, ocorre alguma das alternativas a seguir:*

(i) Existe uma função $b_j \not\equiv 0$ que não muda de sinal;

(ii) $(a_{j_1 0}, \dots, a_{j_m 0}) \notin \mathbb{Q}^m$ é não-Liouville;

(iii) $a_0 \in \mathbb{Q}^n$, $q_J = q_*$, b é exata e os subníveis $\Omega_s = \{t \in \mathbb{T}^n;\ B(t) < s\}$ e superníveis $\Omega^s = \{t \in \mathbb{T}^n;\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.5. *Como consequência da Proposição 2.4 obtemos um interessante exemplo.*

Como $B(t_1, t_2) = -\cos t_2$ possui apenas subníveis e superníveis conexos em $\mathbb{T}^2$, o sistema

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + (\frac{1}{2} + i \operatorname{sen} t_2)\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^3$ uma vez que $q_J = q_* = 4$, enquanto

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + (\frac{1}{4} + i \operatorname{sen} t_2)\frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

não é globalmente resolúvel, pois nesse caso $q_J = 2 < 4 = q_*$.

De modo a simplificar a demonstração das Proposições 2.3 e 2.4, mostraremos que para efeito da resolubilidade global, o operador $\mathbb{L}$ definido em (2.1) pode ser considerado com funções a_j constantes, mais precisamente:

O operador $\mathbb{L} = d_t + (a(t) + ib(t)) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$ se, e somente se, o operador

$$d_t + (a_0 + ib(t)) \wedge \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.2}$$

é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$, sendo $a_0 = \sum_{j=1}^n a_{j0} dt_j$ e a_{j0} a média da função a_j.

De fato, começamos escrevendo a 1-forma real a no seguinte formato

$$a = a_0 + d_t A,$$

no qual $A \in C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ e definimos

$$\begin{aligned} S : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) \\ \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} &\longmapsto \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi) e^{i\xi A(t)} e^{i\xi x}. \end{aligned}$$

Assim, a aplicação S é um automorfismo de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ e de $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Além disso, a seguinte igualdade ocorre

$$S\mathbb{L}S^{-1} = d_t + (a_0 + ib(t)) \wedge \frac{\partial}{\partial x},$$

o que assegura a afirmação feita anteriormente.

Para simplificar as notações, a partir de agora até o fim do capítulo iremos denotar por $\mathbb{L}$ o operador definido em (2.2).

O novo operador $\mathbb{L} = d_t + (a_0 + ib(t)) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ está associado ao seguinte sistema de campos vetoriais complexos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j0} + ib_j(t_j))\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Observe que em cada campo L_j do sistema (2.3) o coeficiente da derivada em x depende apenas da variável t_j correspondente. Isso motiva o título dado ao capítulo.

2.1 Proposição 2.3: demonstração da suficiência

2.1.1 Condição suficiente (i)

Na Proposição 2.3 estamos supondo que $J = \emptyset$, ou seja, todas as funções b_k são não identicamente nulas. Nesta primeira parte da demonstração da suficiência vamos supor que existe j tal que a função b_j não muda de sinal.

Podemos assumir que $b_j(t_j) \leq 0$ para todo t_j, caso contrário basta usar o difeomorfismo $(t,x) \mapsto (t,-x)$ para obter novas coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1}$ onde esta propriedade é válida. Portanto, a primitiva B_j é uma função monótona não-crescente e $b_{j0} < 0$.

Seja $f = \sum_{k=1}^n f_k(t,x)dt_k \in \mathbb{E}$. Nos cálculos feitos no decorrer desta demonstração usamos série parcial de Fourier na variável x . Escrevemos então as séries formais de u e f_k, $k = 1, \ldots, n$, do seguinte modo

$$u(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} \tag{2.4}$$

e

$$f_k(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k(t,\xi) e^{i\xi x}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Substituindo as séries (2.4) e (2.5) na equação $L_j u = f_j$, sendo L_j o campo dado em (2.3), obtemos para cada $\xi \in \mathbb{Z}$ a seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\hat{u}(t,\xi) + i\xi(a_{j0} + ib_j(t_j))\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}_j(t,\xi).$$

Como $b_{j0} \neq 0$, para cada $\xi \neq 0$ a equação anterior possui uma única solução dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = d_{j\xi}\int_0^{t_j} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(s_j)-\mathcal{C}_j(t_j))}\hat{f}_j(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)ds_j + \\ +(d_{j\xi}-1)\int_{t_j}^{2\pi} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(s_j)-\mathcal{C}_j(t_j))}\hat{f}_j(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)ds_j, \tag{2.6}$$

na qual

$$d_{j\xi} = (1-e^{-i2\pi\xi c_{j0}})^{-1} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_j(t_j) = a_{j0}t_j + iB_j(t_j).$$

Para $\xi = 0$, uma solução da equação

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\hat{u}(t,0) = \hat{f}_j(t,0),$$

é dada por

$$\hat{u}(t,0) = \int_0^{t_j}\hat{f}_j(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,0)ds_j, \tag{2.7}$$

a qual é bem definida uma vez que $\hat{f}(t,0)$ é exata (veja a definição de $\mathbb{E}$ em (1.5)).

Antes de continuar a demonstração, provamos o seguinte resultado que será muito útil no decorrer dos cálculos.

Lema 2.6. *Sejam $b_{j0} < 0$ e $d_{j\xi} \doteq \left(1-e^{-i2\pi\xi(a_{j0}+ib_{j0})}\right)^{-1}$, $\xi \in \mathbb{Z}^*$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$C^{-1} \leq |d_{j\xi}| \leq C, \quad \forall\xi \geq 1 \quad e \quad C^{-1} \leq |d_{j\xi}-1| \leq C, \quad \forall\xi \leq -1.$$

Demonstração. Consideramos primeiramente $\xi \geq 1$, assim

$$\left|1-e^{-i2\pi\xi(a_{j0}+ib_{j0})}\right| \leq 1 + e^{2\pi\xi b_{j0}} < \sum_{k=0}^{\infty}(e^{2\pi b_{j0}})^k = \frac{1}{1-e^{2\pi b_{j0}}} \doteq C, \quad \forall\xi \geq 1.$$

Por outro lado,

$$\left|1-e^{-i2\pi\xi(a_{j0}+ib_{j0})}\right| \geq \left|1-|e^{-i2\pi\xi(a_{j0}+ib_{j0})}|\right| = 1-e^{2\pi\xi b_{j0}} \geq 1-e^{2\pi b_{j0}} = C^{-1}, \quad \forall\xi \geq 1.$$

Agora para $\xi \leq -1$. Como $d_{j\xi} - 1 = (e^{i2\pi\xi(a_{j0}+ib_{j0})} - 1)^{-1}$, temos

$$\left|e^{i2\pi\xi(a_{j0}+ib_{j0})} - 1\right| \leq e^{-2\pi\xi b_{j0}} + 1 \leq \sum_{k=0}^{\infty}(e^{2\pi b_{j0}})^k = C, \quad \forall\xi \leq -1,$$

além disso,

$$\left|e^{i2\pi\xi(a_{j0}+ib_{j0})} - 1\right| \geq 1 - e^{-2\pi\xi b_{j0}} \geq 1 - e^{2\pi b_{j0}} = C^{-1}, \quad \forall\xi \leq -1.$$

□

Vamos mostrar que u definida por (2.4) é uma função suave, sendo $\hat{u}(t,\xi)$ os coeficientes dados pelas fórmulas (2.6) e (2.7), e além disso, u é uma solução da equação $\mathbb{L}u = f$. Com efeito, reescrevemos (2.6) na seguinte forma

$$\hat{u}(t,\xi) = d_{j\xi}\int_0^{t_j} e^{i\xi a_{j0}(s_j - tj)}e^{\xi(B_j(t_j)-B_j(s_j))}\hat{f}_j(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)ds_j +$$

$$+\underbrace{e^{i2\pi\xi c_{j0}}(d_{j\xi}-1)}_{d_{j\xi}}\int_{t_j}^{2\pi} e^{i\xi a_{j0}(s_j-tj-2\pi)}e^{\xi(B_j(t_j)-B_j(s_j)+2\pi b_{j0})}\hat{f}_j(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)ds_j.$$

Note que na primeira integral $0 \leq s_j \leq t_j$, logo obtemos $\xi(B_j(t_j) - B_j(s_j)) \leq 0$, para todo $\xi \geq 1$. Na segunda integral $t_j \leq s_j \leq 2\pi$, portanto

$$B_j(t_j) - B_j(s_j) + 2\pi b_{j0} = -\int_{t_j}^{s_j} b_j(\tau_j)d\tau_j + 2\pi b_{j0} \leq 0,$$

o que implica $\xi\big(B_j(t_j) - B_j(s_j) + 2\pi b_{j0}\big) \leq 0$, para todo $\xi \geq 1$.

Obtemos dessa forma a seguinte desigualdade

$$|\hat{u}(t,\xi)| \leq 2\pi C \max_{s\in\mathbb{T}^n}\left|\hat{f}_j(s,\xi)\right|, \ \forall t \in \mathbb{T}^n, \forall\xi \geq 1,$$

sendo $C > 0$ a constante do Lema 2.6.

Reescrevemos agora (2.6) como segue

$$\hat{u}(t,\xi) = \underbrace{e^{-i2\pi\xi c_{j0}}d_{j\xi}}_{dj\xi-1}\int_0^{t_j} e^{i\xi a_{j0}(s_j-tj+2\pi)}e^{\xi(B_j(t_j)-B_j(s_j)-2\pi b_{j0})}\hat{f}_j(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)ds_j +$$

$$+(d_{j\xi}-1)\int_{t_j}^{2\pi} e^{i\xi a_{j0}(s_j-tj)}e^{\xi(B_j(t_j)-B_j(s_j))}\hat{f}_j(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)ds_j.$$

Na primeira integral $0 \leq s_j \leq t_j$, logo

$$B_j(t_j) - B_j(s_j) - 2\pi b_{j0} = \int_{s_j}^{t_j} b_j(\tau_j)d\tau_j - 2\pi b_{j0} \geq 0,$$

o que implica $\xi\big(B_j(t_j) - B_j(s_j) - 2\pi b_{j0}\big) \leq 0$, para todo $\xi \leq -1$.

Na segunda integral $t_j \leq s_j \leq 2\pi$, donde concluímos que $\xi(B_j(t_j) - B_j(s_j)) \leq 0$, para todo $\xi \leq -1$. Portanto, obtemos a desigualdade

$$|\hat{u}(t,\xi)| \leq 2\pi C \max_{s\in\mathbb{T}^n} \big|\hat{f}_j(s,\xi)\big|, \; \forall t \in \mathbb{T}^n, \forall \xi \leq -1,$$

na qual $C > 0$ é a constante do Lema 2.6.

Para $\xi = 0$ temos $|\hat{u}(t,0)| \leq 2\pi C \max\limits_{s\in\mathbb{T}^n} |\hat{f}_j(s,0)|$ por (2.7). Assim, provamos até este momento a seguinte estimativa

$$|\hat{u}(t,\xi)| \leq 2\pi C \max_{s\in\mathbb{T}^n} \big|\hat{f}_j(s,\xi)\big|, \; \forall t \in \mathbb{T}^n, \forall \xi \in \mathbb{Z}.$$

Faremos agora estimativas para as derivadas de $\hat{u}(\cdot,\xi)$, $\xi \in \mathbb{Z}$.

Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ considere o operador diferencial

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1} \ldots \partial t_n^{\alpha_n}},$$

no qual $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Assim, $|\partial^\alpha \hat{u}(t,0)| \leq 2\pi |\partial^\alpha \hat{f}_j(t,0)|$ se $\alpha_j = 0$ e $\partial^\alpha \hat{u}(t,0) = \partial^{\alpha - e_j} \hat{f}_j(t,0)$ se $\alpha_j \geq 1$, sendo $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ com 1 na j-ésima posição.

Sejam $\xi \in \mathbb{Z}^*$ e $\beta = \alpha - \alpha_j e_j$ então

$$\begin{aligned} \partial^\beta \hat{u}(t,\xi) &= d_{j\xi} \int_0^{t_j} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(s_j) - \mathcal{C}_j(t_j))} \partial^\beta \hat{f}_j(t_1, \ldots, s_j, \ldots, t_n, \xi) ds_j + \\ &+ (d_{j\xi} - 1) \int_{t_j}^{2\pi} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(s_j) - \mathcal{C}_j(t_j))} \partial^\beta \hat{f}_j(t_1, \ldots, s_j, \ldots, t_n, \xi) ds_j. \end{aligned}$$

Note que, como antes vale a desigualdade

$$|\partial^\beta \hat{u}(t,\xi)| \leq 2\pi C \max_{s\in\mathbb{T}^n} \big|\partial^\beta \hat{f}_j(s,\xi)\big|, \; \forall t \in \mathbb{T}^n, \forall \xi \in \mathbb{Z}^*.$$

Vamos calcular agora as derivadas de $\partial^\beta \hat{u}(\cdot,\xi)$, $\xi \in \mathbb{Z}^*$, em relação a variável t_j.

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \partial^\beta \hat{u}(t,\xi) = -i\xi c_j(t_j) \partial^\beta \hat{u}(t,\xi) + \partial^\beta \hat{f}_j(t,\xi),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_j^2} \partial^\beta \hat{u}(t,\xi) = \big[-i^2\xi^2 c_j{}^2(t_j) - i\xi \frac{\partial c_j}{\partial t_j}(t_j) \big] \partial^\beta \hat{u}(t,\xi) + i\xi c_j(t_j) \partial^\beta \hat{f}_j(t,\xi) + \frac{\partial}{\partial t_j} \partial^\beta \hat{f}_j(t,\xi),$$

sendo $c_j(t_j) = a_{j0} + ib_j(t_j)$. Portanto, para $m \in \mathbb{N}$ obtemos a seguinte igualdade

$$\frac{\partial^m}{\partial t_j^m} \partial^\beta \hat{u}(t,\xi) = P(t_j,\xi) \partial^\beta \hat{u}(t,\xi) + Q(t,\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}^*, \tag{2.8}$$

na qual P é um polinômio que depende das derivadas de c_j (de ordem até m) e de potências de ξ com grau no máximo m. Q é outro polinômio em ξ de grau menor que m, cujos coeficientes envolvem derivadas de c_j e $\partial^\beta \hat{f}_j(t,\xi)$. Como c_j e suas derivadas de ordem até m são limitadas em $\mathbb{T}^1$, existe uma constante $C_m > 0$ tal que

$$|P(t_j,\xi)| \leq C_m|\xi|^m \;\text{ e }\; |Q(t,\xi)| \leq C_m|\xi|^m \sum_{k=0}^{m-1} \Big|\frac{\partial^k}{\partial t_j^k}\partial^\beta \hat{f}_j(t,\xi)\Big|,\ \forall t \in \mathbb{T}^n.$$

Se $m = \alpha_j$, então da igualdade (2.8) segue

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \hat{u}(t,\xi)| &\leq C_{\alpha_j}|\xi|^{\alpha_j}\Big(|\partial^\beta \hat{u}(t,\xi)| + \sum_{k=0}^{\alpha_j-1}\Big|\frac{\partial^k}{\partial t_j^k}\partial^\beta \hat{f}_j(t,\xi)\Big|\Big) \\ &\leq \tilde{C}_{\alpha_j}|\xi|^{\alpha_j}\sum_{k=0}^{\alpha_j-1}\max_{s\in\mathbb{T}^n}\Big|\frac{\partial^k}{\partial t_j^k}\partial^\beta \hat{f}_j(s,\xi)\Big|,\ \forall t \in \mathbb{T}^n, \forall \xi \in \mathbb{Z}^*, \end{aligned}$$

e se $\alpha_j = 0$ temos

$$|\partial^\alpha \hat{u}(t,\xi)| \leq 2\pi C \max_{s\in\mathbb{T}^n}\big|\partial^\alpha \hat{f}_j(s,\xi)\big|,\ \forall t \in \mathbb{T}^n, \forall \xi \in \mathbb{Z}^*.$$

Uma vez que a função f_j é suave, as desigualdades anteriores implicam que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Nosso próximo passo é mostrar que u é solução global do sistema $L_k u = f_k$, $k = 1,\ldots,n$. Em vista da construção da função u temos $L_j u = f_j$, logo resta provar que $L_k u = f_k$ para $k \neq j$:

$$\begin{aligned} &\widehat{L_k u}(t,\xi) = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t_k}(t,\xi) + i\xi c_k(t_k)\hat{u}(t,\xi) \\ = \;& d_{j\xi}\int_0^{t_j} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(s_j)-\mathcal{C}_j(t_j))}\widehat{L_k f_j}(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi) + \\ + \;& (d_{j\xi}-1)\int_{t_j}^{2\pi} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(s_j)-\mathcal{C}_j(t_j))}\widehat{L_k f_j}(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)\Big)ds_j \\ = \;& d_{j\xi}\int_0^{t_j} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(s_j)-\mathcal{C}_j(t_j))}\widehat{L_j f_k}(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi) + \\ + \;& (d_{j\xi}-1)\int_{t_j}^{2\pi} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(s_j)-\mathcal{C}_j(t_j))}\widehat{L_j f_k}(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)\Big)ds_j \\ = \;& d_{j\xi}e^{-i\xi\mathcal{C}_j(t_j)}\int_0^{t_j}\frac{\partial}{\partial s_j}\Big(e^{i\xi\mathcal{C}_j(s_j)}\hat{f}_k(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)\Big)ds_j + \\ + \;& (d_{j\xi}-1)e^{-i\xi\mathcal{C}_j(t_j)}\int_{t_j}^{2\pi}\frac{\partial}{\partial s_j}\Big(e^{i\xi\mathcal{C}_j(s_j)}\hat{f}_k(t_1,\ldots,s_j,\ldots,t_n,\xi)\Big)ds_j \\ = \;& d_{j\xi}\Big(\hat{f}_k(t,\xi) - e^{-i\xi\mathcal{C}_j(t_j)}e^{i\xi\mathcal{C}_j(0)}\hat{f}_k(t_1,\ldots,0,\ldots,t_n,\xi)\Big) + \\ + \;& (d_{j\xi}-1)\Big(e^{-i\xi\mathcal{C}_j(t_j)}e^{i\xi\mathcal{C}_j(2\pi)}\hat{f}_k(t_1,\ldots,2\pi,\ldots,t_n,\xi) - \hat{f}_k(t,\xi)\Big) \\ = \;& \hat{f}_k(t,\xi), \end{aligned}$$

pois $(d_{j\xi}-1)e^{i\xi\mathcal{C}_j(2\pi)} = d_{j\xi}e^{i\xi\mathcal{C}_j(0)}$ e $\hat{f}_k(\cdot,\xi)$ é 2π-periódica.

2.1.2 Condição suficiente (ii)

Lembremos que as hipóteses da condição (ii) são: b é exata (logo possui uma primitiva global B definida em $\mathbb{T}^n$), $a_0 \in \mathbb{Z}^n$ e os conjuntos de subnível $\Omega_s = \{t \in \mathbb{T}^n;\ B(t) < s\}$ bem como os de supernível $\Omega^s = \{t \in \mathbb{T}^n;\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$.

Considere a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} T : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}) \\ \displaystyle\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi)e^{i\xi x} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi)e^{-i\xi a_0\cdot t}e^{i\xi x}. \end{array}$$

Veja que T fica bem definida uma vez que $a_0 \in \mathbb{Z}^n$. Além disso, a aplicação T define um automorfismo de $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ (e de $C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$) e obtemos a seguinte identidade

$$T^{-1}\mathbb{L}T = \mathbb{L}_0 \doteq d_t + ib(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.9}$$

Conforme o trabalho [CH], o operador $\mathbb{L}_0$ é globalmente resolúvel se, e somente se, todos os subníveis e superníveis de B são conexos em $\mathbb{T}^n$, visto que a 1-forma b é exata. Portanto, por hipótese temos $\mathbb{L}_0$ globalmente resolúvel e da identidade $T^{-1}\mathbb{L}T = \mathbb{L}_0$ concluímos que $\mathbb{L}$ também é globalmente resolúvel.

2.2 Proposição 2.3: demonstração da necessidade

Como o título sugere, o objetivo desta seção será mostrar que para $\mathbb{L}$ ser globalmente resolúvel é necessário que alguma das condições (i) ou (ii) apresentadas na Proposição 2.3 esteja cumprida. Para isso vamos supor que (i) e (ii) não são válidas, ou seja, daqui em diante todas as funções b_j (as quais por hipótese não são identicamente nulas) mudam de sinal e alguma das seguintes condições não está satisfeita: b é exata, $a_0 \in \mathbb{Z}^n$ e todos os subníveis e superníveis de uma primitiva B da 1-forma b são conexos em $\mathbb{T}^n$.

Dando continuidade à demonstração, suponha que b é exata, $a_0 \in \mathbb{Z}^n$ e uma primitiva global B de b possui um subnível ou um supernível desconexo em $\mathbb{T}^n$. Então, o operador $\mathbb{L}_0 = d_t + ib(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ não é globalmente resolúvel por [CH], o que implica a não resolubilidade global de $\mathbb{L}$ por (2.9).

Suponha agora que b não é exata ou $a_0 \notin \mathbb{Z}^n$ o que equivale a supor que $c_0 = a_0 + ib_0 = (c_{10}, \ldots, c_{n0}) \notin \mathbb{Z}^n$. Consideramos dois casos, a saber:

- *Caso 1:* $\{c_{10}, \dots, c_{n0}\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$;
- *Caso 2:* $\{c_{10}, \dots, c_{n0}\} \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.

Passamos agora à demonstração da não resolubilidade de $\mathbb{L}$ no caso 1, a qual será dada pelas Proposições 2.8 e 2.9.

Caso 1: $\{c_{10}, \dots, c_{n0}\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

Seja $B = \sum_{j=1}^{n} B_j(t_j)$ uma primitiva do *pull-back* $\Pi^* b$ através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$. Uma vez que cada função b_j muda de sinal, cada função B_j possui extremos locais (pelo menos dois em cada intervalo de comprimento 2π, visto que b_j é periódica). Portanto, podemos assumir (fazendo uma translação) que o máximo de B sobre o cubo $[0, 2\pi]^n$ não ocorre na fronteira. Além disso, pelo Lema 1.4, sempre que $b_{j0} \neq 0$ podemos assumir que $b_{j0} < 0$. Assim, daqui em diante vamos considerar as seguintes condições:

⋆ $b_{j0} \leq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$;

⋆ O máximo de B sobre o cubo $[0, 2\pi]^n$ não ocorre na fronteira.

Podemos assumir também que $B(0) = 0$, pois caso isso não ocorra basta considerar a primitiva $B - B(0)$.

A ideia natural será construir uma 1-forma $f \in \mathbb{E}$ de modo que não exista solução $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ da equação $\mathbb{L}u = f$. Para que a 1-forma $f = f_1 dt_1 + \cdots + f_n dt_n$ pertença a $\mathbb{E}$ ela deve satisfazer $\mathbb{L}f = 0$, o que é equivalente a $L_j f_k - L_k f_j = 0$ para todo $k, j = 1, \dots, n$. Essa condição juntamente com $[L_j, L_k] = 0$, $k, j = 1, \dots, n$ implicam a seguinte identidade

$$L_n L_{n-1} \dots L_2 L_1 u = L_{\sigma(n)} L_{\sigma(n-1)} \dots L_{\sigma(2)} L_{\sigma(1)} u, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \tag{2.10}$$

sendo $\mathcal{S}_n$ o grupo das permutações dos inteiros $1, \dots, n$. Ou seja, se existe solução u da equação $\mathbb{L}u = f$ então vale a identidade anterior. Nosso plano será utilizar (2.10) para obter as funções $f_1, \dots, f_n$.

Motivados por (2.10), substituímos as séries formais

$$u(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} \quad \text{e} \quad h(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{h}(t,\xi) e^{i\xi x}$$

na equação

$$h = L_n L_{n-1} \dots L_1 u,$$

sendo a função h escolhida posteriormente. Obtemos assim para cada $\xi \in \mathbb{Z}$ a equação

$$\hat{h}(t,\xi) = \big(\frac{\partial}{\partial t_n} + i\xi c_n(t_n)\big)\cdots\big(\frac{\partial}{\partial t_1} + i\xi c_1(t_1)\big)\hat{u}(t,\xi). \tag{2.11}$$

Considere agora o conjunto $\mathcal{F} = \{c_{10}, \ldots, c_{n0}\} \cap \mathbb{Q}$. Se $c_{j0} \in \mathcal{F}$, escrevemos $c_{j0} = r_j/s_j$ com $r_j \in \mathbb{Z}$ e $s_j \in \mathbb{N}$ primos entre si e definimos o conjunto

$$\mathcal{G} = \bigcup_{c_{j0}\in\mathcal{F}} s_j\mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

Como cada $c_{j0} \notin \mathbb{Z}$, se $c_{j0} \in \mathcal{F}$ então $s_j > 1$, logo $\mathbb{Z}_\pm \setminus \mathcal{G}$ possui infinitos elementos. Para cada $j = 1, \ldots, n$ e cada elemento $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{G}$ a equação

$$\big(\frac{\partial}{\partial t_j} + i\xi c_j(t_j)\big)v(t,\xi) = g_\xi(t), \quad g_\xi \in C^\infty(\mathbb{T}^n),$$

possui uma única solução v dada pela fórmula

$$v(t,\xi) = d_{j\xi}\int_0^{2\pi} e^{i\xi(\mathcal{C}_j(t_j-s_j)-\mathcal{C}_j(t_j))} g_\xi(t_1, \ldots, t_j - s_j, \ldots, t_n)ds_j,$$

sendo $d_{j\xi} = (1 - e^{-i2\pi\xi c_{j0}})^{-1}$ e $\mathcal{C}_j(t) = a_{j0}t_j + iB_j(t_j)$. Consequentemente, para cada $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{G}$ a equação (2.11) possui uma única solução dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = d_\xi \int_{[0,2\pi]^n} e^{i\xi(\mathcal{C}(t-s)-\mathcal{C}(t))}\hat{h}(t-s,\xi)ds, \tag{2.13}$$

na qual $d_\xi = d_{1\xi}\ldots d_{n\xi}$ e $\mathcal{C}(t) = a_0 \cdot t + iB(t)$.

Seja $v(\cdot,\xi)$ a expressão definida pelo lado direito de (2.13), a qual é bem definida pois só depende da escolha da função h. Definimos então as funções

$$f_j(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}_+\setminus\mathcal{G}} \hat{f}_j(t,\xi)e^{i\xi x}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

nas quais os elementos $\hat{f}_j(\cdot,\xi)$ são dados por

$$\hat{f}_j(t,\xi) \doteq \big(\frac{\partial}{\partial t_j} + i\xi c_j(t_j)\big)v(t,\xi), \quad j = 1, \ldots, n, \quad \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}. \tag{2.14}$$

Vamos mostrar na Proposição 2.8 (adiante) que para uma certa escolha de h as funções $f_1, \ldots, f_n$ são suaves. Assim, se $f \doteq \sum_{j=1}^n f_j dt_j$ então a definição das funções f_j assegura que a condição de compatibilidade $\mathbb{L}f = 0$ estará satisfeita. De fato, basta notar que

$$\begin{aligned}
\widehat{L_k f_j}(t,\xi) &= \big(\frac{\partial}{\partial t_k} + i\xi c_k(t_k)\big)\big(\frac{\partial}{\partial t_j} + i\xi c_j(t_j)\big)v(t,\xi) = \\
&= \big(\frac{\partial}{\partial t_j} + i\xi c_j(t_j)\big)\big(\frac{\partial}{\partial t_k} + i\xi c_k(t_k)\big)v(t,\xi) = \widehat{L_j f_k}(t,\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G},
\end{aligned}$$

portanto $L_k f_j = L_j f_k$, $k, j = 1, \ldots, n$, o que equivale a $\mathbb{L}f = 0$.

Além disso, se $\xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}$ é tal que $\xi c_0 \in \mathbb{Z}^n$ então

$$\hat{f}_j(t,\xi)e^{i\xi(c_0 \cdot t + C(t))} = \frac{\partial}{\partial t_j}\big(v(t,\xi)e^{i\xi(c_0\cdot t + C(t))}\big), \quad j = 1, \ldots, n,$$

sendo $C(t) \doteq \mathcal{C}(t) - c_0 \cdot t$ uma função suave e periódica. Portanto a 1-forma

$$\hat{f}_1(t,\xi)e^{i\xi(c_0\cdot t + C(t))}dt_1 + \cdots + \hat{f}_n(t,\xi)e^{i\xi(c_0\cdot t+C(t))}dt_n$$

é exata sempre que $\xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}$ satisfaz $\xi c_0 \in \mathbb{Z}^n$.

Portanto, ao fazer uma escolha conveniente da função h teremos $f \in \mathbb{E}$ e pela definição de f se existir uma solução u da equação $\mathbb{L}u = f$ então os coeficientes parciais de Fourier $\hat{u}(\cdot,\xi)$ serão os dados em (2.13).

Desenvolvendo $\hat{f}_j(\cdot,\xi)$ em (2.14) chegamos à seguinte expressão

$$\hat{f}_j(t,\xi) = \frac{d_\xi}{d_{j\xi}} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} e^{i\xi(\mathcal{C}(t-s+s_je_j)-\mathcal{C}(t))}\hat{h}(t-s+s_je_j,\xi)ds^{(j)}, \tag{2.15}$$

na qual $ds^{(j)} = ds_1 \ldots ds_{j-1}ds_{j+1}\ldots ds_n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Construção da função h

Denotamos por M o máximo da função B sobre o cubo $[0,2\pi]^n$ e por $\widetilde{M}$ o maior $M_k \doteq \max\{B(t);\ t \in [0,2\pi]^n \cap \{t_k = 0\}\}$, $k = 1, \ldots, n$, no qual $\{t_k = 0\}$ denota o hiperplano $\{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n;\ t_k = 0\}$. Então, pelas argumentações feitas no início deste caso 1, temos $0 \le \widetilde{M} < M$.

Seja $0 < \delta < \pi/2$ constante. Considere uma função de corte $\chi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\chi_\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in Q_\delta \\ 0 & \text{se } t \notin Q_{2\delta} \end{cases}$$

e $0 \le \chi_\delta(t) \le 1$, para todo $t \in \mathbb{R}^n$, sendo $Q_\delta = \{t \in \mathbb{R}^n;\ |t| < \delta\}$.

Definimos assim as funções suaves e periódicas

$$p(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} a_0 \cdot (t^* - t - 2\pi\nu)\chi_\delta(t + 2\pi\nu), \quad t \in \mathbb{R}^n \quad \text{e}$$

$$q(t) = 1 + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}(|t+2\pi\nu|^2 - 1)\chi_\delta(t+2\pi\nu), \quad t \in \mathbb{R}^n,$$

sendo $t^* \in (0,2\pi)^n$ tal que $B(t^*) = M$.

As funções p e q gozam das seguintes propriedades:

- $q(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^n$ e $q(t) = 0$ se, e somente se, $t = 2\pi\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}^n$;
- Se $|t| < \delta$ então $p(t) = a_0 \cdot (t^* - t)$ e $q(t) = |t|^2$.

Finalmente, definimos a função h por

$$h(t,x) \doteq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}} \hat{h}(t,\xi) e^{i\xi x},$$

sendo os coeficientes $\hat{h}(\cdot,\xi)$ dados por

$$\hat{h}(t,\xi) = (d_\xi)^{-1} e^{-\xi(M + Kq(t) - \lambda - ip(t))}, \quad \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}, \tag{2.16}$$

com $K > 0$ e $0 < \lambda < (M - \widetilde{M})/2$ constantes. A constante K será escolhida suficientemente grande no decorrer do texto.

Proposição 2.7. $h \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$.

Demonstração. Note que $M + Kq(t) - \lambda \geq M - \lambda > 0$. Então, como existe uma constante $C > 0$ tal que $|(d_\xi)^{-1}| \leq C$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}$ (veja o Lema 2.6), segue a desigualdade

$$|\hat{h}(t,\xi)| \leq Ce^{-\xi(M-\lambda)}, \quad \forall t \in [0,2\pi]^n \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}.$$

Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, temos a identidade $\partial^\alpha \hat{h}(t,\xi) = P(t,\xi)\hat{h}(t,\xi)$ na qual $P(t,\xi)$ é um polinômio envolvendo potências de ξ com grau no máximo $|\alpha|$ e derivadas de p e q, as quais são limitadas em $[0,2\pi]^n$. Então, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$|P(t,\xi)| \leq C_\alpha \xi^{|\alpha|}, \quad \forall t \in [0,2\pi]^n \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}.$$

Portanto,

$$|\partial^\alpha \hat{h}(t,\xi)| \leq CC_\alpha \xi^{|\alpha|} e^{-\xi(M-\lambda)}, \quad \forall t \in [0,2\pi]^n \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G},$$

donde concluímos que $h \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$.

□

Agora, para cada $\xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}$, substituindo os coeficientes (2.16) em (2.13) e (2.15), obtemos as seguintes expressões

$$\hat{u}(t,\xi) = \int_{[0,2\pi]^n} e^{\xi(\varphi_1(t,s) + i\varphi_2(t,s))} ds, \tag{2.17}$$

e

$$\hat{f}_j(t,\xi) = \frac{1}{d_{j\xi}} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} e^{\xi(\varphi_1(t,s-s_je_j) + i\varphi_2(t,s-s_je_j))} ds^{(j)},\ j = 1, \ldots, n, \tag{2.18}$$

sendo $\varphi_1(t,s) \doteq B(t) - B(t-s) - Kq(t-s) - M + \lambda$ e $\varphi_2(t,s) \doteq p(t-s) - a_0 \cdot s$ funções a valores reais.

Proposição 2.8. *Para $K > 0$ suficientemente grande, $f_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, $j = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Vamos identificar $s - s_j e_j$ com $(s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{j+1}, \ldots, s_n)$. Iniciemos a demonstração definindo o conjunto

$$\mathcal{Q}_j \doteq \big\{(t, s - s_j e_j) \in [0, 2\pi]^{2n-1};\ q(t - s + s_j e_j) = 0\big\}.$$

Como $q(t - s + s_j e_j) = 0$ se, e somente se, $t - s + s_j e_j = 2\nu\pi$, $\nu \in \mathbb{Z}^n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t, s - s_j e_j) &= B(t) - B(t - s + s_j e_j) - Kq(t - s + s_j e_j) - M + \lambda \\
&= B(s - s_j e_j + 2\nu\pi) - B(2\nu\pi) - M + \lambda \\
&= B(s - s_j e_j) - M + \lambda \\
&\le \widetilde{M} - M + \lambda < \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad (t, s - s_j e_j) \in \mathcal{Q}_j.
\end{aligned}$$

O conjunto $\mathcal{Q}_j$ é fechado uma vez que a função $[0, 2\pi]^{2n-1} \ni (t, s - s_j e_j) \mapsto q(t - s + s_j e_j)$ é contínua. Assim, existe um aberto $U \supset \mathcal{Q}_j$ tal que

$$\varphi_1(t, s - s_j e_j) \le \frac{M - \widetilde{M}}{2}, \quad (t, s - s_j e_j) \in U.$$

Considere agora o compacto $[0, 2\pi]^{2n-1} \setminus U$ e as constantes

$$\sigma \doteq \min\{q(t - s + s_j e_j);\ (t, s - s_j e_j) \in [0, 2\pi]^{2n-1} \setminus U\}$$

e

$$\mu \doteq \min\{B(t - s + s_j e_j);\ (t, s - s_j e_j) \in [0, 2\pi]^{2n-1} \setminus U\}.$$

Note que $\sigma > 0$. Logo, escolhemos $K > 0$ de forma que

$$K \ge \frac{1}{\sigma}\Big(-\mu + \lambda + \frac{M - \widetilde{M}}{2}\Big),$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t, s - s_j e_j) &\le -\mu - K\sigma + \lambda \\
&\le \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad (t, s - s_j e_j) \in [0, 2\pi]^{2n-1} \setminus U.
\end{aligned}$$

Concluímos assim que

$$\varphi_1(t, s - s_j e_j) \le \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad (t, s - s_j e_j) \in [0, 2\pi]^{2n-1}.$$

Então por (2.18) chegamos na seguinte desigualdade

$$|\hat{f}_j(t, \xi)| \le Ce^{-\xi \frac{M - \widetilde{M}}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G},$$

na qual $C > 0$ é uma constante que não depende de t e ξ.

Seja $\varphi(t,s) = \varphi_1(t,s) + i\varphi_2(t,s)$. Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, novamente por (2.18) obtemos

$$\partial^\alpha \hat{f}_j(t,\xi) = \frac{1}{d_{j\xi}} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} P(t, s - s_j e_j, \xi) e^{\xi\varphi(t, s - s_j e_j)} ds^{(j)},$$

sendo P um polinômio que envolve potências de ξ com grau no máximo $|\alpha|$ e derivadas de φ, as quais são limitadas em $[0,2\pi]^{2n-1}$. Então, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$|P(t, s - s_j e_j, \xi)| \leq C_\alpha \xi^{|\alpha|}, \quad (t, s - s_j e_j) \in [0,2\pi]^{2n-1},$$

donde obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \hat{f}_j(t,\xi)| &\leq \frac{1}{|d_{j\xi}|} \int_{[0,2\pi]^{n-1}} |P(t, s - s_j e_j, \xi)| |e^{\xi\varphi(t, s - s_j e_j)}| ds^{(j)} \\ &\leq C C_\alpha \xi^{|\alpha|} e^{-\xi \frac{M - \widetilde{M}}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}, \end{aligned}$$

concluindo que $f_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$.

$\square$

Proposição 2.9. *Para $K > 0$ suficientemente grande, não existe distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ cujos coeficientes parciais de Fourier na variável x sejam os dados por* (2.17).

Demonstração. Uma vez que $B(0) = 0$, escolhemos $0 < \delta_0 < \delta$ tal que $|B(t)| < \lambda/2$ para todo $|t| < \delta_0$. Para este δ_0 escrevemos a igualdade

$$\hat{u}(t^*, \xi) = I_\xi + J_\xi,$$

na qual $t^* \in (0, 2\pi)^n$ satisfaz $B(t^*) = M$ (t^* é o mesmo ponto que aparecece na construção da função p) e

$$I_\xi = \int_{|s - t^*| < \delta_0} e^{i\xi(p(t^* - s) - a_0.s)} e^{-\xi(B(t^* - s) + Kq(t^* - s) - \lambda)} ds,$$

$$J_\xi = \int_{|s - t^*| \geq \delta_0} e^{i\xi(p(t^* - s) - a_0.s)} e^{-\xi(B(t^* - s) + Kq(t^* - s) - \lambda)} ds.$$

Vamos fazer estimativas para as sequências I_ξ e J_ξ com a finalidade de mostrar que os coeficientes $u(t^*, \xi)$ crescem muito rápido quando ξ tende ao infinito.

Lembrando as propriedades das funções p e q, para $|s - t^*| \leq \delta$ temos $q(s - t^*) = |s - t^*|^2$ e $p(s - t^*) = a_0 \cdot s$. Portanto, como $\delta_0 < \delta$, fazendo a mudança de variáveis $\sigma = \sqrt{K\xi}(t^* - s)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
I_\xi &= \int_{|s-t^*|<\delta_0} e^{-\xi(B(t^*-s)+K|t^*-s|^2-\lambda)} ds \\
&\geq e^{\xi\lambda/2} \int_{|s-t^*|<\delta_0} e^{-\xi K|t^*-s|^2} ds \\
&= e^{\xi\lambda/2} \frac{1}{(K\xi)^{n/2}} \int_{|\sigma|<\delta_0\sqrt{K\xi}} e^{-|\sigma|^2} d\sigma \\
&= e^{\xi\lambda/2} \frac{\mu_\xi}{(K\xi)^{n/2}} \geq e^{\xi\lambda/2} \frac{\mu_1}{(K\xi)^{n/2}},
\end{aligned}
$$

sendo $\mu_\xi = \int_{|\sigma|<\delta_0\sqrt{K\xi}} e^{-|\sigma|^2} d\sigma$, $\xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}$, uma sequência crescente de números reais positivos.

Por outro lado, existe uma constante $C > 0$ tal que $|J_\xi| \leq Ce^{-\xi\lambda/2}$ para todo $\xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}$. Com efeito, considere o cubo $Q^* = t^* - [0, 2\pi]^n$ e a constante $\sigma \doteq \min\{q(\tau);\ \tau \in Q^* \text{ e } |\tau| \geq \delta_0\}$, dessa forma temos $\sigma > 0$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
|J_\xi| &\leq \int_{|s-t^*|\geq\delta_0} \left|e^{i\xi(p(t^*-s)-a_0\cdot s)}\right| e^{-\xi(B(t^*-s)+Kq(t^*-s)-\lambda)} ds \\
&= \int_{|s-t^*|\geq\delta_0} e^{-\xi(B(t^*-s)+Kq(t^*-s)-\lambda)} ds \\
&\leq \int_{|s-t^*|\geq\delta_0} e^{-\xi(B(t^*-s)+K\sigma-\lambda)} ds.
\end{aligned}
$$

Escolhemos agora $K > \sigma^{-1}(3\lambda/2 - \mu)$ com $\mu \doteq \min\{B(t^* - s);\ \ |s - t^*| \geq \delta_0\}$. Logo, da desigualdade anterior temos

$$
|J_\xi| \leq \int_{|s-t^*|\geq\delta_0} e^{-\xi\lambda/2} ds = Ce^{-\xi\lambda/2}.
$$

Escolhemos também $\xi_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$
e^{\xi\lambda/4} \geq \widetilde{C}\xi^{n/2}, \quad \forall \xi \geq \xi_0,
$$

sendo $\widetilde{C} = \dfrac{K^{n/2}}{\mu_1}(1 + C)$. Assim,

$$
e^{\xi\lambda/4} \geq \widetilde{C}\xi^{n/2} \geq \frac{K^{n/2}}{\mu_1}(1 + \frac{C}{e^{\xi 3\lambda/4}})\xi^{n/2}.
$$

Multiplicando a desigualdade acima por $e^{\xi\lambda/4}$ obtemos

$$
\frac{\mu_1}{(K\xi)^{n/2}} e^{\xi\lambda/2} - Ce^{-\xi\lambda/2} \geq e^{\xi\lambda/4},
$$

e segue que

$$|\hat{u}(t^*,\xi)| \geq |I_\xi| - |J_\xi| \geq \frac{\mu_1}{(K\xi)^{n/2}} e^{\xi\lambda/2} - Ce^{-\xi\lambda/2} \geq e^{\xi\lambda/4}, \quad \forall \xi \geq \xi_0,\ \xi \in \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}.$$

Portanto, a sequência $\hat{u}(\cdot,\xi)$ não é uma sequência de coeficientes parciais de Fourier de nenhuma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$. Encerramos assim a demonstração no caso 1.

$\square$

Caso 2: $\{c_{10},\ldots,c_{n0}\} \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$

Ainda estamos trabalhando sob a hipótese $c_0 \notin \mathbb{Z}^n$. Vamos considerar agora o caso em que existem períodos $c_{j0} \in \mathbb{Z}$.

Reordenando os campos L_j, podemos assumir que $c_{j0} \notin \mathbb{Z}$, $j = 1,\ldots,p$, e $c_{j0} \in \mathbb{Z}$, $j = p+1,\ldots,n$, para algum $1 \leq p \leq n-1$. Então, o caso 1 juntamente com o Lema 2.10, dado a seguir, conclui a demonstração no caso 2.

Lema 2.10. *Sejam $1 \leq p \leq n$ e $\mathbb{L}$ o operador dado em* (2.2)*. Se o operador determinado pelos campos $L_1,\ldots,L_p$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{p+1}$ e $c_{(p+1)0},\ldots,c_{n0} \in \mathbb{Z}$ então $\mathbb{L}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$.*

Demonstração. Denotamos as coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1}$ por (t', t'', x), sendo $t' = (t_1,\ldots,t_p)$ e $t'' = (t_{p+1},\ldots,t_n)$. Similarmente, usamos a notação $c_0 = (c_0', c_0'')$, na qual $c_0' = (c_{10},\ldots,c_{p0})$ e $c_0'' = (c_{(p+1)0},\ldots,c_{n0})$.

Considere o operador $\mathbb{L}^\#$ determinado pelos campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + (a_{j0} + ib_j(t_j))\frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1,\ldots,p, \tag{2.19}$$

e $\mathbb{E}^\#$ seu correspondente espaço de condições de compatibilidade, conforme definido em (1.5). Uma vez que $\mathbb{L}^\#$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{p+1}$, existe $g(t',x) = \sum_{j=1}^p g_j(t',x)dt_j \in \mathbb{E}^\#$ tal que a equação $\mathbb{L}^\# v = g$ não possui solução $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{p+1})$.

Seja $B(t) \doteq \mathcal{B}_1(t') + \mathcal{B}_2(t'')$ uma primitiva global do *pull-back* $\Pi^* b$, definida no recobrimento minimal $\mathcal{T} = \mathbb{R}^r \times \mathbb{T}^{n-r}$, sendo r o posto do grupo de períodos da 1-forma b. Como por hipótese $c_0'' \in \mathbb{Z}^{n-p}$ (o que equivale a $b_0'' = 0$ e $a_0'' \in \mathbb{Z}^{n-p}$) temos que $0 \leq r \leq p$ e que $\mathcal{B}_2$ está definida em $\mathbb{T}^{n-p}$.

Definimos agora as funções

$$f_j(t,x) \doteq \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \hat{f}_j(t,\xi) e^{i\xi x}, \quad j = 1,\ldots,p,$$

nas quais, os coeficientes $\hat{f}_j(\cdot,\xi)$ são dados por

$$\hat{f}_j(t,\xi) \doteq \begin{cases} \hat{g}_j(t',\xi) e^{\xi(\mathcal{B}_2(t'') - M - ia_0''\cdot t'')} & \text{se } \xi \geq 0 \\ \hat{g}_j(t',\xi) e^{\xi(\mathcal{B}_2(t'') - m - ia_0''\cdot t'')} & \text{se } \xi < 0 \end{cases},$$

sendo $M \doteq \max\{\mathcal{B}_2(t'');\ t'' \in \mathbb{T}^{n-p}\}$ e $m \doteq \min\{\mathcal{B}_2(t'');\ t'' \in \mathbb{T}^{n-p}\}$.

Escolhemos também

$$f_j \equiv 0, \quad j = p+1, \dots, n.$$

Dado $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, para cada $j = 1, \dots, p$ obtemos a igualdade

$$\partial^\alpha \hat{f}_j(t,\xi) = \big(\partial^{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)} g_j(t',\xi)\big) P(t'',\xi) e^{\xi(\mathcal{B}_2(t'') - M - ia_0''\cdot t'')}, \quad \xi \in \mathbb{Z}_+,$$

na qual P é um polinômio envolvendo apenas potências de ξ (potências de grau no máximo $|\alpha''| \doteq \alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_n$) e derivadas de $\mathcal{B}_2(t'') - ia_0'' \cdot t''$ as quais são limitadas em $\mathbb{T}^{n-p}$. Deste modo, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que $|P(t'',\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{|\alpha''|}$ para todo t''. Portanto,

$$|\partial^\alpha \hat{f}_j(t,\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{|\alpha''|} |\partial^{(\alpha_1,\dots,\alpha_p)} g_j(t',\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{Z}_+.$$

Analogamente, obtemos a mesma desigualdade para $\xi \in \mathbb{Z}_-$. Como g_j são funções suaves é possível concluir, pela desigualdade anterior, que as funções f_j também são suaves.

Finalmente definimos $f = \sum_{j=1}^n f_j dt_j$. Vejamos que $f \in \mathbb{E}$.

Primeiramente precisamos verificar que $L_j f_k = L_k f_j$, $j,k = 1,\dots,n$. Para $j,k = 1,\dots,p$ facilmente vemos que $L_j f_k = L_k f_j$ uma vez que $L_j g_k = L_k g_j$. Para $j,k = p+1,\dots,n$ temos $L_j f_k = L_k f_j = 0$. Resta-nos verificar que $L_j f_k = L_k f_j$ quando $j = 1,\dots,p$ e $k = p+1,\dots,n$. Neste caso,

$$\widehat{L_k f_j}(t,\xi) = (b_k(t_k) - ia_{k0}) \hat{g}_j(t',\xi) e^{\xi(\mathcal{B}(t'') - M - ia_0''\cdot t'')} +$$

$$+ i\xi(a_{k0} + ib_k(t_k)) \hat{g}_j(t,\xi) e^{\xi(\mathcal{B}(t'') - M - ia_0''\cdot t'')} = 0 = \widehat{L_j f_k}(t,\xi), \quad \forall t \in \mathbb{T}^n,\ \forall \xi \geq 1.$$

Analogamente $\widehat{L_k f_j}(t,\xi) = 0 = \widehat{L_j f_k}(t,\xi)$, $\forall t \in \mathbb{T}^n$, $\forall \xi \leq -1$. Quando $\xi = 0$ é direto.

Vejamos agora que f cumpre a outra condição de compatibilidade. Com efeito, a função suave e periódica $C(t) = i(B(t) - b_0 \cdot t)$ satisfaz

$$d_t C = i(b - b_0) = a_0 + ib - (a_0 + ib_0) = c - c_0,$$

sendo $c(t) = \sum_{j=1}^n (a_{j0} + ib_j(t_j)) dt_j$ e $c_0 = \sum_{j=1}^n (a_{j0} + ib_{j0}) dt_j$. Afirmamos que a 1-forma $\hat{f}(t,\xi) e^{i\xi(c_0\cdot t + C(t))}$ é exata sempre que $\xi \in \mathbb{Z}$ satisfaz $\xi c_0 \in \mathbb{Z}^n$.

De fato, se $\xi \in \mathbb{Z}$ é tal que $\xi(c_0', c_0'') \in \mathbb{Z}^n$ então $\xi c_0' \in \mathbb{Z}^p$, logo $\hat{g}(t',\xi) e^{i\xi(c_0'\cdot t' + C_1(t'))}$ é exata, sendo $C_1(t') = i(\mathcal{B}_1(t') - b_0' \cdot t')$. Ou seja, existe uma função $\gamma_\xi \in C^\infty(\mathbb{T}_{t'}^p)$ tal que

$$\begin{aligned} d_{t'}\gamma_\xi(t') &= \hat{g}(t',\xi)e^{i\xi(c_0'\cdot t'+C_1(t'))} \\ &= \hat{g}(t',\xi)e^{i\xi(a_0'\cdot t'+i\mathcal{B}_1(t'))} \\ &= \hat{g}(t',\xi)e^{i\xi(-a_0''\cdot t''-i\mathcal{B}_2(t''))}e^{i\xi(a_0\cdot t+iB(t))} \\ &= \hat{g}(t',\xi)e^{i\xi(-a_0''\cdot t''-i\mathcal{B}_2(t''))}e^{i\xi(c_0\cdot t+C(t))}. \end{aligned}$$

Se $\xi \geq 0$ multiplicamos a equação acima por $e^{-\xi M}$ e obtemos:

$$d_{t'}(e^{-\xi M}\gamma_\xi(t')) = \hat{f}(t,\xi)e^{i\xi(c_0\cdot t+C(t))}.$$

Se $\xi < 0$ multiplicamos por $e^{-\xi m}$, e portanto

$$d_{t'}(e^{-\xi m}\gamma_\xi(t')) = \hat{f}(t,\xi)e^{i\xi(c_0\cdot t+C(t))}.$$

Dessa forma, concluímos que $f \in \mathbb{E}$.

Suponha por absurdo que existe $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $\mathbb{L}u = f$. Se $u(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi)e^{i\xi x}$, para cada $\xi \in \mathbb{Z}$, obtemos as equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_j}\hat{u}(t,\xi) + i\xi(a_{j0}+ib_j(t_j))\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}_j(t,\xi), & j = 1,\dots,p, \\ \dfrac{\partial}{\partial t_j}\hat{u}(t,\xi) + i\xi(a_{j0}+ib_j(t_j))\hat{u}(t,\xi) = 0, & j = p+1,\dots,n, \end{cases}$$

as quais podem ser reescritas na seguinte forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_j}w(t,\xi) + i\xi(a_{j0}+ib_j(t_j))w(t,\xi) = e^{i\xi a_0''\cdot t''}\hat{f}_j(t,\xi), & j = 1,\dots,p, \\ \dfrac{\partial}{\partial t_j}w(t,\xi) - \xi b_j(t_j)w(t,\xi) = 0, & j = p+1,\dots,n, \end{cases}$$

sendo $w(t,\xi) \doteq \hat{u}(t,\xi)e^{i\xi a_0''\cdot t''}$. De acordo com cada $\xi \in \mathbb{Z}$, para $j = p+1,\dots,n$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_j}\Big(w(t,\xi)e^{-\xi(\mathcal{B}_2(t'')-M)}\Big) &= 0, \quad \text{se } \xi \geq 0, \\ \frac{\partial}{\partial t_j}\Big(w(t,\xi)e^{-\xi(\mathcal{B}_2(t'')-m)}\Big) &= 0, \quad \text{se } \xi < 0. \end{aligned}$$

Assim, existem funções ϕ_ξ, $\xi \in \mathbb{Z}$, tais que

$$\begin{aligned} &w(t,\xi)e^{-\xi(\mathcal{B}_2(t'')-M)} \doteq \phi_\xi(t'), \quad \xi \geq 0, \\ &w(t,\xi)e^{-\xi(\mathcal{B}_2(t'')-m)} \doteq \phi_\xi(t'), \quad \xi < 0. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Vejamos que

$$\varphi(t',x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \phi_\xi(t')e^{i\xi x},$$

define uma distribuição em $\mathbb{T}^{p+1}$. De fato, sejam t''_M e $t''_m \in \mathbb{T}^{n-p}$ tais que $\mathcal{B}_2(t''_M) = M$ e $\mathcal{B}_2(t''_m) = m$. Então, dado $\beta \in \mathbb{Z}^p_+$ segue que

$$|\partial^\beta \phi_\xi(t')| = |\partial^\beta w(t', t''_M, \xi)| = |\partial^\beta \hat{u}(t', t''_M, \xi)|, \quad \forall \xi \geq 0,$$

$$|\partial^\beta \phi_\xi(t')| = |\partial^\beta w(t', t''_m, \xi)| = |\partial^\beta \hat{u}(t', t''_m, \xi)|, \quad \forall \xi < 0.$$

Portanto $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{p+1})$, uma vez que u é distribuição.

Por outro lado, para $j = 1, \ldots, p$ vimos que

$$\frac{\partial}{\partial t_j} w(t,\xi) + i\xi(a_{j0} + ib_j(t_j))w(t,\xi) = e^{i\xi a''_0 \cdot t''} \hat{f}_j(t,\xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo (2.20) na equação anterior, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\phi_\xi(t') + i\xi\big(a_{j0} + ib_j(t_j)\big)\phi_\xi(t') = e^{-\xi(\mathcal{B}_2(t'')-M)} e^{i\xi a''_0 \cdot t''} \hat{f}_j(t,\xi) = \hat{g}_j(t',\xi), \quad \xi \geq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_j}\phi_\xi(t') + i\xi\big(a_{j0} + ib_j(t_j)\big)\phi_\xi(t') = e^{-\xi(\mathcal{B}_2(t'')-m)} e^{i\xi a''_0 \cdot t''} \hat{f}_j(t,\xi) = \hat{g}_j(t',\xi), \quad \xi < 0,$$

donde concluímos que $L_j\varphi = g_j$ para $j = 1, \ldots, p$, ou seja, $\mathbb{L}^\#\varphi = g$, o que é um absurdo.

□

2.3 Proposição 2.4: demonstração da suficiência

Na Proposição 2.3 tratamos da resolubilidade global do operador $\mathbb{L}$, definido em (2.2), quando todas as funções b_j são não identicamente nulas. Naquele caso, vimos que a parte real a_0 interfere na resolubilidade global de $\mathbb{L}$ somente quando a 1-forma b é exata. Já na Proposição 2.4, onde consideramos a existência de funções b_j identicamente nulas, veremos que a parte real a_0 pode ser determinante na resolubilidade global de $\mathbb{L}$ independente de b ser exata ou não.

Semelhantemente à Proposição 2.3, a existência de uma função $b_j \not\equiv 0$ que não muda de sinal, é suficiente para que $\mathbb{L}$ seja globalmente resolúvel. A demonstração é análoga à feita na Seção 2.1.1. Assim, nos resta provar que cada uma das condições (ii) e (iii) é suficiente para $\mathbb{L}$ ser globalmente resolúvel.

Para cada $k = 1, \ldots, m$ considere o difeomorfismo

$$(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_{j_k}, \ldots, t_n, x) \mapsto (t_1, \ldots, t_{j_k}, \ldots, t_k, \ldots, t_n, x).$$

Estes difeomorfismos produzem novas coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1}$, nas quais

$$J \doteq \{j = 1, \ldots, n;\ b_j \equiv 0\} = \{1, \ldots, m\}.$$

Além disso, a estrutura localmente integrável gerada pelos novos campos permanece a mesma anterior uma vez que só houve uma reordenação dos campos L_j.

2.3.1 Condição suficiente (ii)

Suponhamos que $(a_{10}, \ldots, a_{m0}) \notin \mathbb{Q}^m$ é não-Liouville. Assim, existe uma constante $C > 0$ e um número inteiro $s > 1$ tal que

$$\max_{1\leq j\leq m} |\xi a_{j0} - \kappa_j| \geq \frac{C}{|\xi|^{s-1}}, \quad \forall(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Seja $f = \sum_{j=1}^n f_j dt_j \in \mathbb{E}$. No decorrer desta seção, denotaremos por $t = (t', t'', x)$ as coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1}$, sendo $t' = (t_1, \ldots, t_m)$ e $t'' = (t_{m+1}, \ldots, t_n)$.

Usaremos série parcial de Fourier nas variáveis (t', x) para obter uma solução u da equação $\mathbb{L}u = f$. Considere então as séries formais

$$u(t, x) = \sum_{(\kappa,\xi)\in\mathbb{Z}^m\times\mathbb{Z}} \hat{u}(t'', \kappa, \xi) e^{i(\kappa\cdot t' + \xi x)} \tag{2.22}$$

e

$$f_j(t, x) = \sum_{(\kappa,\xi)\in\mathbb{Z}^m\times\mathbb{Z}} \hat{f}_j(t'', \kappa, \xi) e^{i(\kappa\cdot t' + \xi x)} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.23}$$

Substituindo (2.22) e (2.23) nas equações $L_j u = f_j$, $j = 1, \ldots, m$, obtemos para cada $(\kappa, \xi) \neq (0, 0)$ as equações

$$i(\kappa_j + \xi a_{j0})\hat{u}(t'', \kappa, \xi) = \hat{f}_j(t'', \kappa, \xi), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Além disso, da condição de compatibilidade $\mathbb{L}f = 0$ temos $L_j f_\ell = L_\ell f_j$, $j, \ell = 1, \ldots m$, donde obtemos as equações

$$(\kappa_j + \xi a_{j0})\hat{f}_\ell(t'', \kappa, \xi) = (\kappa_\ell + \xi a_{\ell 0})\hat{f}_j(t'', \kappa, \xi), \ \ j, \ell = 1, \ldots, m.$$

Portanto, as equações anteriores implicam a seguinte igualdade

$$\hat{u}(t'', \kappa, \xi) = \frac{1}{i(\kappa_M + \xi a_{M0})}\hat{f}_M(t'', \kappa, \xi), \quad (\kappa, \xi) \neq (0, 0), \tag{2.24}$$

sendo $1 \leq M \leq m$, $M = M(\xi)$, tal que

$$|\kappa_M + \xi a_{M0}| \doteq \max_{1\leq j\leq m} |\kappa_j + \xi a_{j0}|.$$

Uma vez que $f \in \mathbb{E}$ segue que $\hat{f}(t'', 0, 0)$ é exata (ver definição de $\mathbb{E}$ em (1.5)). Desse modo, existe uma função suave v definida em $\mathbb{T}^{n-m}_{t''}$ tal que $d_{t''}v = \hat{f}(\cdot, 0, 0)$. Escolhemos então $\hat{u}(t'', 0, 0) = v(t'')$.

Vejamos que a série u definida por (2.22), com coeficientes $\hat{u}(\cdot, \kappa, \xi)$ dados por (2.24) e $\hat{u}(t'', 0, 0) = v(t'')$, é uma solução suave da equação $\mathbb{L}u = f$.

Dado $\alpha \in \mathbb{Z}^{n-m}_{+}$, a desigualdade (2.21) juntamente com a fórmula (2.24) resultam em

$$|\partial^\alpha \hat{u}(t'', \kappa, \xi)| \leq \frac{1}{C}|\xi|^{s-1}|\partial^\alpha \hat{f}_M(t'', \kappa, \xi)|, \quad (\kappa, \xi) \neq (0, 0).$$

Uma vez que cada função f_j é suave, dado um inteiro positivo L, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que pela desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha \hat{u}(t'', \kappa, \xi)| &\leq \frac{1}{C}|\xi|^{s-1}|\partial^\alpha \hat{f}_M(t'', \kappa, \xi)| \\ &\leq C_\alpha \frac{1}{(1 + |(\kappa, \xi)|)^L}, \quad (\kappa, \xi) \neq (0, 0), \end{aligned}$$

donde concluímos que $u \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. Da forma que foi construída, a função u satisfaz $L_j u = f_j$, $j = 1, \ldots, m$. Verifiquemos que u também satisfaz as equações

$$L_j u = f_j, \quad j = m + 1, \ldots, n.$$

Seja $j = m + 1, \ldots, n$. Dado $(\kappa, \xi) \neq (0, 0)$, podemos escrever

$$\hat{u}(t'', \kappa, \xi) = \frac{1}{i(\kappa_M + \xi a_{M0})}\hat{f}_M(t'', \kappa, \xi),$$

conforme (2.24). Além disso, da condição de compatibilidade $L_j f_M = L_M f_j$ temos

$$i(\kappa_M + \xi a_{M0})\hat{f}_j(t'', \kappa, \xi) = \frac{\partial}{\partial t_j}\hat{f}_M(t'', \kappa, \xi) + i\xi c_j(t_j)\hat{f}_M(t'', \kappa, \xi).$$

Assim, as duas últimas igualdades implicam

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_j}\hat{u}(t'', \kappa, \xi) + i\xi c_j(t_j)\hat{u}(t'', \kappa, \xi) = \\ = \; & \frac{1}{i(\kappa_M + \xi a_{M0})}\frac{\partial}{\partial t_j}\hat{f}_M(t'', \kappa, \xi) + i\xi c_j(t_j)\frac{1}{i(\kappa_M + \xi a_{M0})}\hat{f}_M(t'', \kappa, \xi) \\ = \; & \frac{1}{i(\kappa_M + \xi a_{M0})}\Big(\frac{\partial}{\partial t_j}\hat{f}_M(t'', \kappa, \xi) + i\xi c_j(t_j)\hat{f}_M(t'', \kappa, \xi)\Big) \\ = \; & \hat{f}_j(t'', \kappa, \xi). \end{aligned}$$

Finalmente, para $(\kappa, \xi) = (0, 0)$ temos $\frac{\partial}{\partial t_j}\hat{u}(t'', 0, 0) = \hat{f}_j(t'', 0, 0)$.

$\square$

2.3.2 Condição suficiente (iii)

Vamos relembrar as hipóteses da condição (iii): b é exata, $a_0 \in \mathbb{Q}^n$, $q_J = q_*$, e se B é uma primitiva de b então todos os subníveis e superníveis de B são conexos em $\mathbb{T}^n$.

Seja $\mathcal{A} \doteq q_*\mathbb{Z}$ e $\mathcal{B} \doteq \mathbb{Z} \setminus \mathcal{A}$. Definimos o espaço

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^{n+1}) &\doteq \big\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}); \quad u(t,x) = \sum_{\xi \in \mathcal{A}} \hat{u}(t,\xi) e^{i\xi x}\big\} \\
&= \big\{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1}); \quad u(t,x) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t,q_* N) e^{iq_* N x}\big\}.
\end{aligned}$$

Analogamente definimos $\mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}^{n+1})$.

Denotamos por $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ o operador $\mathbb{L}$ agindo sobre $\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^{n+1})$. Similarmente, usamos a notação $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}$ para o operador $\mathbb{L}$ agindo sobre $\mathcal{D}'_{\mathcal{B}}(\mathbb{T}^{n+1})$.

Pelo trabalho [BCP1] temos o seguinte resultado:

Lema 2.11. *O operador $\mathbb{L}$ é globalmente resolúvel se, e somente se, os operadores $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ e $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}$ são globalmente resolúveis.*

Lema 2.12. *O operador $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ é globalmente resolúvel.*

Demonstração. Como $q_* a_0 \in \mathbb{Z}^n$, podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}
T : \mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^{n+1}) &\longrightarrow \mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^{n+1}) \\
\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t, q_*\xi) e^{iq_*\xi x} &\longmapsto \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t, q_*\xi) e^{-iq_*\xi a_0 \cdot t} e^{iq_*\xi x}.
\end{aligned}$$

A aplicação T define um automorfismo de $\mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^{n+1})$ e $C^\infty_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^{n+1})$. Além disso, vale a seguinte conjugação

$$T^{-1}\mathbb{L}_{\mathcal{A}} T = \mathbb{L}_{0,\mathcal{A}},$$

sendo $\mathbb{L}_0 \doteq d_t + ib(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$.

Seja B uma primitiva global da 1-forma b. Por hipótese, B possui apenas subníveis e superníveis conexos em $\mathbb{T}^n$, logo o operador $\mathbb{L}_0$ é globalmente resolúvel pelo trabalho [CH]. Portanto, $\mathbb{L}_{0,\mathcal{A}}$ é globalmente resolúvel e pela conjugação $T^{-1}\mathbb{L}_{\mathcal{A}}T = \mathbb{L}_{0,\mathcal{A}}$ concluímos que $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ também é globalmente resolúvel.

□

Lema 2.13. *O operador $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}$ é globalmente resolúvel.*

Demonstração. Seja $(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z}^m \times \mathcal{B}$. Uma vez que $q_J = q_*$, ou seja, q_* é o menor inteiro positivo que satisfaz $q_*(a_{10}, \ldots, a_{m0}) \in \mathbb{Z}^m$, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que

$$\left| a_{j0} - \frac{\kappa_j}{\xi} \right| \geq \frac{C}{|\xi|},$$

sendo $C = 1/q_*$. Assim,

$$\max_{\ell=1,\ldots,m} \left| a_{\ell 0} - \frac{\kappa_\ell}{\xi} \right| \geq \left| a_{j0} - \frac{\kappa_j}{\xi} \right| \geq \frac{C}{|\xi|}, \quad (\kappa, \xi) \in \mathbb{Z}^m \times \mathcal{B}.$$

Ou seja, se os denominadores $\xi \in \mathcal{B}$ então $a_0' = (a_{10}, \ldots, a_{m0})$ se comporta como não Liouville. Logo, semelhantemente à demonstração feita na Seção 2.3.1, concluímos que o operador $\mathbb{L}_\mathcal{B}$ é globalmente resolúvel.

$\square$

2.4 Proposição 2.4: demonstração da necessidade

Nesta seção, mostraremos que quando $\emptyset \neq J \doteq \{j,\ b_j \equiv 0\} \neq \{1, \ldots, n\}$, o operador $\mathbb{L}$ definido por (2.2) será globalmente resolúvel se alguma das três condições apresentadas na Proposição 2.4 estiver satisfeita. Para isso, suponhamos que as condições (i), (ii) e (iii) não são válidas, isto é, no decorrer desta seção todas as funções $b_j \not\equiv 0$ mudam de sinal e além disso temos dois casos a considerar. O primeiro será quando $(a_{j_1 0}, \ldots, a_{j_m 0}) \notin \mathbb{Q}^m$, neste caso vamos supor que $(a_{j_1 0}, \ldots, a_{j_m 0})$ é Liouville. O outro será quando $(a_{j_1 0}, \ldots, a_{j_m 0}) \in \mathbb{Q}^m$, neste caso vamos supor que a condição (iii) não está satisfeita.

Como na seção anterior vamos assumir que $J = \{1, \ldots, m\}$, $1 \leq m \leq n-1$. Além disso, continuamos denotando por (t', t'', x) as coordenadas em $\mathbb{T}^{n+1}$, sendo $t' = (t_1, \ldots, t_m)$ e $t'' = (t_{m+1}, \ldots, t_n)$. Usamos também a notação $c_0 = (c_0', c_0'')$ com $c_0' = (c_{10}, \ldots, c_{m0})$ e $c_0'' = (c_{(m+1)0}, \ldots, c_{n0})$. A demonstração será feita de acordo com os casos a seguir:

Caso 1: $a_0' = (a_{10}, \ldots, a_{m0}) \notin \mathbb{Q}^m$ é Liouville;

Caso 2: $a_0' = (a_{10}, \ldots, a_{m0}) \in \mathbb{Q}^m$.

2.4.1 Caso 1: $a_0' \notin \mathbb{Q}^m$ é Liouville.

Dentro do caso 1, consideramos dois subcasos, a saber:

- *Caso 1.1:* $c_0'' = (c_{(m+1)0}, \ldots, c_{n0}) \in \mathbb{Q}^{n-m}$;
- *Caso 1.2:* $c_0'' = (c_{(m+1)0}, \ldots, c_{n0}) \notin \mathbb{Q}^{n-m}$.

Caso 1.1: $c_0'' \in \mathbb{Q}^{n-m}$

Considere o operador $\mathbb{L}^{\#}$ associado aos campos vetoriais $L_1, \ldots, L_m$ e o conjunto $\mathcal{A} = \eta\mathbb{Z}$ no qual $\eta \in \mathbb{N}$ satisfaz $\eta c_0'' \in \mathbb{Z}^{n-m}$. Uma vez que $a_0' \notin \mathbb{Q}^m$ é Liouville, afirmamos que $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{m+1}$. As ideias da demonstração dessa afirmação, que será apresentada a seguir, foram inspiradas no trabalho [BP].

Como a_0' é Liouville, pelos Lemas 1.6 e 1.7 é possível obter uma constante $C > 0$ e uma sequência $\{(\kappa_l, \xi_l)\}$ em $(\eta\mathbb{Z})^m \times \eta\mathbb{Z}$, $\xi_l \geq 2$, tal que

$$\max_{j=1,\ldots,m} \left|\xi_l a_{j0} + \kappa_l^{(j)}\right| < C|(\kappa_l, \xi_l)|^{-l}, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Seja $\gamma_l \doteq |(\kappa_l, \xi_l)|^{l/2}$, $l \in \mathbb{N}$. Definimos

$$v_l(t', x) = \gamma_l e^{i(\kappa_l \cdot t' + \xi_l x)} \in C^\infty(\mathbb{T}^{m+1}), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Então para cada $j = 1, \ldots, m$, obtemos

$$L_j v_l = i\gamma_l \big(\kappa_j^{(j)} + \xi_l a_{j0}\big) e^{i(\kappa_l \cdot t' + \xi_l x)} \quad l \in \mathbb{N}.$$

Definimos então

$$g(t', x) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \hat{g}(\kappa_l, \xi_l) e^{i(\kappa_l \cdot t' + \xi_l x)},$$

sendo

$$\hat{g}(\kappa_l, \xi_l) \doteq i\gamma_l \sum_{j=1}^{m} \big(\kappa_l^{(j)} + \xi_l a_{j0}\big) dt_j.$$

Note que $g \in \bigwedge^1 C^\infty_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^{m+1})$ e pela construção garantimos que $g \in \mathbb{E}^{\#}_{\mathcal{A}}$. Suponha por absurdo que existe $u \in \mathcal{D}'_{\mathcal{A}}(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}} u = g$. Portanto, como

$$\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}} u = d_{t'} u + a_0' \wedge \frac{\partial}{\partial x} u,$$

se

$$u(t, x) = \sum_{(\kappa, \xi) \in \mathcal{A}^m \times \mathcal{A}} \hat{u}(\kappa, \xi) e^{i(\kappa \cdot t' + \xi x)}$$

segue que

$$\widehat{\mathbb{L}^{\#} u}(\kappa_l, \xi_l) = i\hat{u}(\kappa_l, \xi_l) \sum_{j=1}^{m} \big(\kappa_l^{(j)} + \xi_l a_{j0}\big) dt_j = \hat{g}(\kappa_l, \xi_l), \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

donde concluímos que

$$\widehat{u}(\kappa_l, \xi_l) = \gamma_l, \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

o que é uma absurdo pois a sequência $(\gamma_l)_{l \in \mathbb{N}}$ não corresponde a nenhuma distribuição definida em $\mathbb{T}^{m+1}$. Concluímos assim a demonstração da não resolubilidade de $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}}$ em $\mathbb{T}^{m+1}$. Esse resultado juntamente com Lema 2.14, enunciado a seguir, concluem a demonstração no caso 1.1.

Lema 2.14. *Sejam $1 \leq p \leq n$ e $\mathbb{L}^{\#}$ o operador associado aos campos $L_1, \ldots, L_p$. Considere o conjunto $\mathcal{A} = \eta\mathbb{Z}$ no qual $\eta \in \mathbb{N}$. Sob estas condições, se $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{p+1}$ e $\eta(c_{(p+1)0}, \ldots, c_{n0}) \in \mathbb{Z}^{n-p}$ então $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$.*

A demonstração do Lema 2.14 será omitida uma vez que é uma adaptação do Lema 2.10.

Caso 1.2: $c_0'' \notin \mathbb{Q}^{n-m}$

Assuma primeiramente que $\{c_{(m+1)0}, \ldots, c_{n0}\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$. Neste caso, a não resolubilidade de $\mathbb{L}$ será dada pelas Proposições $2.16 - 2.18$.

Seja B uma primitiva global do *pull-back* $\Pi^* b$ através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$. Uma vez que $b_j \equiv 0$, $j = 1, \ldots, m$, a função B pode ser escrita na seguinte forma $B(t) = B(t'') = \sum_{j=m+1}^{n} B_j(t_j)$ e como cada função $b_j \not\equiv 0$ muda de sinal, vamos assumir que o máximo da função $B = B(t'')$ não ocorre na fronteira do cubo $[0, 2\pi]^{n-m}_{t''}$ conforme feito no caso 1 da Seção 2.2. Assim, daqui em diante estaremos trabalhando nas seguintes condições:

- $\star$ $b_{j0} \leq 0$, $j = m+1, \ldots, n$.
- $\star$ O máximo da função $B = B(t'')$ não ocorre na fronteira do cubo $[0, 2\pi]^{n-m}_{t''}$.
- $\star$ $B(0) = 0$.

Ainda, relembrando as argumentações da Seção 2.2, vamos utilizar a condição

$$h \doteq L_{\sigma(n)} \ldots L_{\sigma(2)} L_{\sigma(1)} u, \quad \sigma \in \mathcal{S}_n, \tag{2.25}$$

para construir uma 1-forma $f \in \mathbb{E}$ de modo que não exista solução $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ da equação $\mathbb{L}u = f$. No entanto, aqui usamos série parcial de Fourier nas variáveis (t', x), ou seja, faremos uso das séries formais

$$u(t, x) = \sum_{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}} \hat{u}(t'', \kappa, \xi) e^{i(\kappa \cdot t' + \xi x)} \tag{2.26}$$

e

$$h(t, x) = \sum_{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}} \hat{h}(t'', \kappa, \xi) e^{i(\kappa \cdot t' + \xi x)}. \tag{2.27}$$

Motivados por (2.25), substituímos as séries (2.26) e (2.27) na equação

$$h = L_n L_{n-1} \ldots L_1 u,$$

donde obtemos para cada $(\kappa,\xi)\in\mathbb{Z}^m\times\mathbb{Z}$ a seguinte igualdade

$$\hat{h}(t'',\kappa,\xi)=\Big(\prod_{j=m+1}^{n}\big(\partial_{t_j}+i\xi c_j(t_j)\big)\prod_{j=1}^{m}i(\kappa_j+\xi a_{j0})\Big)\hat{u}(t'',\kappa,\xi),\tag{2.28}$$

na qual $c_j(t_j)=a_{j0}+ib_j(t_j)$, $j=m+1,\dots,n$.

Como $a_0'=(a_{10},\dots,a_{m0})\notin\mathbb{Q}^m$ é Liouville, existe uma constante $C>0$ e uma sequência $\{(\kappa_l,\xi_l)\}$ em $\mathbb{Z}^m\times\mathbb{Z}$, $\xi_l\geq 2$, tal que

$$\left|\xi_l a_0'+\kappa_l\right|\doteq\max_{j=1,\dots,m}\left|\xi_l a_{j0}+\kappa_l^{(j)}\right|<C|(\kappa_l,\xi_l)|^{-l},\ \forall l\in\mathbb{N}.\tag{2.29}$$

Logo, como $c_{j0}\notin\mathbb{Q}$, $j=m+1,\dots,n$, para cada $l\in\mathbb{N}$ a equação (2.28) possui uma única solução dada por

$$\hat{u}(t'',\kappa_l,\xi_l)=\delta_l\int_{[0,2\pi]^{n-m}}e^{i\xi_l(\mathcal{C}(t''-s'')-\mathcal{C}(t''))}\hat{h}(t''-s'',\kappa_l,\xi_l)ds'',\tag{2.30}$$

sendo

$$\delta_l=\prod_{j=1}^{m}[i(\kappa_l^{(j)}+\xi_l a_{j0})]^{-1}\prod_{j=m+1}^{n}[1-e^{-i2\pi\xi_l c_{j0}}]^{-1}\quad\text{e}\quad\mathcal{C}(t'')=a_0''\cdot t''+iB(t'').$$

Seja $v(t'',\kappa_l,\xi_l)$ a expressão integral dada pelo lado direito de (2.30). Dessa forma definimos as funções f_j como segue

$$f_j(t,x)=\sum_{l\in\mathbb{N}}\hat{f}_j(t'',\kappa_l,\xi_l)e^{i(\kappa_l\cdot t'+\xi_l x)},\quad j=1,\dots,n,$$

nas quais para cada $l\in\mathbb{N}$ temos

$$\hat{f}_j(t'',\kappa_l,\xi_l)\doteq\begin{cases}i(\kappa_l^{(j)}+\xi_l a_{j0})v(t'',\kappa_l,\xi_l) & \text{se } j=1,\dots,m\\ (\frac{\partial}{\partial t_j}+i\xi_l c_j(t_j))v(t'',\kappa_l,\xi_l) & \text{se } j=m+1,\dots,n\end{cases}.$$

As funções $\hat{f}_j(\cdot,\kappa_l,\xi_l)$ ficam bem definidas pois dependem apenas da escolha de $\hat{h}(\cdot,\kappa_l,\xi_l)$. Obtemos dessa definição as seguintes fórmulas:

$$\hat{f}_j(t'',\kappa_l,\xi_l)\ =\ i(\kappa_l^{(j)}+\xi_l a_{j0})\delta_l\int_{[0,2\pi]^{n-m}}e^{i\xi_l(\mathcal{C}(t''-s'')-\mathcal{C}(t''))}\hat{h}(t''-s'',\kappa_l,\xi_l)ds'',\tag{2.31}$$

para $j=1,\dots,m$, e

$$\hat{f}_j(t'',\kappa_l,\xi_l)=\frac{\delta_l}{d_{j\xi_l}}\int_{[0,2\pi]^{n-m-1}}e^{i\xi_l(\mathcal{C}(t''-s''+s_je_j)-\mathcal{C}(t''))}\hat{h}(t''-s''+s_je_j,\kappa_l,\xi_l)ds''_{(j)},\tag{2.32}$$

para $j=m+1,\dots,n$, sendo $d_{j\xi_l}=(1-e^{-i2\pi\xi_l c_{j0}})^{-1}$ e $ds''_{(j)}=ds_{m+1}\dots ds_{j-1}ds_{j+1}\dots ds_n$.

Construção da função h

Denotamos por M o máximo da função $B = B(t'')$ sobre o cubo $[0, 2\pi]^{n-m}_{t''}$ e por M_j o máximo de B sobre $[0, 2\pi]^{n-m}_{t''} \cap \{t_j = 0\}$, $j = m+1, \ldots, n$. Logo, pelas argumentações feitas anteriormente temos $0 \leq \widetilde{M} < M$ sendo $\widetilde{M}$ o maior M_j com $j = m+1, \ldots, n$.

A partir da sequência $\{(\kappa_l, \xi_l)\}$ que obtemos por a_0' ser Liouville e que satisfaz (2.29), definimos os conjuntos

$$\mathcal{F}_1 = \{l \in \mathbb{N}; \quad e^{\xi_l \frac{M-\widetilde{M}}{2}} |\kappa_l + \xi_l a_0'| \leq 1\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{l \in \mathbb{N}; \quad e^{\xi_l \frac{M-\widetilde{M}}{2}} |\kappa_l + \xi_l a_0'| > 1\}.$$

Com base nesses conjuntos definimos a sequência $(\gamma_l)_{l\in\mathbb{N}}$ dada por

$$\gamma_l = \begin{cases} e^{\lambda \xi_l} & \text{se } l \in \mathcal{F}_1 \\ |\kappa_l + \xi_l a_0'|^{-1/2} & \text{se } l \in \mathcal{F}_2 \end{cases}, \tag{2.33}$$

na qual $0 < \lambda < (M - \widetilde{M})/2$ é uma constante.

Sejam $0 < \delta < \pi/2$ e $\mathcal{Q}_\delta = \{t'' \in \mathbb{R}^{n-m}, \ |t''| < \delta\}$. Considere então uma função de corte $\chi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-m})$ tal que

$$\chi_\delta(t'') = \begin{cases} 1 & \text{se } t'' \in \mathcal{Q}_\delta \\ 0 & \text{se } t'' \notin \mathcal{Q}_{2\delta} \end{cases}$$

e $0 \leq \chi_\delta(t'') \leq 1$, para todo $t'' \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Utilizando-se da função χ_δ, definimos três funções periódicas suaves que serão fundamentais na posterior definição de h. Seja $t''_* \in (0, 2\pi)^{n-m}$ tal que $B(t''_*) = M$, então definimos

$$p(t'') = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^{n-m}} a_0'' \cdot (t''_* - t'' - 2\pi\nu)\chi_\delta(t'' + 2\pi\nu),$$

$$q(t'') = 1 + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^{n-m}} (|t'' + 2\pi\nu|^2 - 1)\chi_\delta(t'' + 2\pi\nu),$$

$$r(t'') = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^{n-m}} B(t'' + 2\pi\nu)\chi_\delta(t'' + 2\pi\nu).$$

As funções p, q e r possuem as seguintes propriedades:

- $q(t'') \geq 0, \ \ \forall t'' \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $q(t'') = 0$ se, e somente se, $t'' = 2\pi\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}^{n-m}$.
- $r(2\pi\nu) = 0$, $\forall \nu \in \mathbb{Z}^{n-m}$.
- Se $|t''| < \delta$, temos $p(t'') = a_0'' \cdot (t''_* - t'')$, $q(t'') = |t''|^2$ e $r(t'') = B(t'')$.

Finalmente definimos

$$h(t,x)=\sum_{l\in\mathbb{N}}\hat{h}(t'',\kappa_l,\xi_l)e^{i(\kappa_l\cdot t'+\xi_l x)},$$

sendo $\hat{h}(\cdot,\kappa_l,\xi_l)$ os coeficientes dados por

$$\hat{h}(t'',\kappa_l,\xi_l)=\frac{\gamma_l}{\delta_l}e^{\xi_l(-Kq(t'')+r(t'')-M+ip(t''))}. \tag{2.34}$$

Proposição 2.15. *Para $K>0$ suficientemente grade, $h\in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$.*

Demonstração. Seja $\phi(t'')=-Kq(t'')+r(t'')-M$, então $\phi(2\nu\pi)=-M$ para todo $\nu\in\mathbb{Z}^{n-m}$. Como ϕ é contínua, existe uma vizinhança U dos vértices do cubo $[0,2\pi]^{n-m}$ tal que

$$\phi(t'')<-M+\lambda,\quad \forall t''\in U.$$

Considere $\sigma\doteq\min\{q(t'');\ \ t''\in[0,2\pi]^{n-m}\setminus U\}$. Uma vez que a função q é não negativa e, restrita ao cubo $[0,2\pi]^{n-m}$, anula-se apenas nos vértices, segue que $\sigma>0$. Logo, escolhendo $K>(\eta-\lambda)/\sigma$ com $\eta\doteq\max\{r(t'');\ t''\in[0,2\pi]^{n-m}\setminus U\}$ obtemos

$$\phi(t'')<-M+\lambda,\quad \forall t''\in[0,2\pi]^{n-m}\setminus U.$$

Por outro lado, fazendo uso do Lema 2.6, existe uma constante $C>0$ tal que

$$\frac{1}{|\delta_l|}\leq C\big|\kappa_l+\xi_l a_0'\big|^m,\quad \forall l\in\mathbb{N}.$$

Portanto, segue da definição dos coeficientes $\hat{h}(\cdot,\kappa_l,\xi_l)$ em (2.34) a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}|\hat{h}(t'',\kappa_l,\xi_l)| &\leq C\gamma_l\big|\kappa_l+\xi_l a_0'\big|^m e^{-\xi_l(M-\lambda)}\\ &= \begin{cases} C\big|\kappa_l+\xi_l a_0'\big|^m e^{-\xi_l(M-2\lambda)} & \text{se } l\in\mathcal{F}_1\\ C\big|\kappa_l+\xi_l a_0'\big|^{(2m-1)/2}e^{-\xi_l(M-\lambda)} & \text{se } l\in\mathcal{F}_2\end{cases}.\end{aligned}$$

Estimativas similares para as derivadas de $\hat{h}(\cdot,\kappa_l,\xi_l)$ garantem que $h\in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$. □

Vejamos como ficam as fórmulas (2.30), (2.31) e (2.32) considerando os coeficientes $\hat{h}(\cdot,\kappa,\xi)$ definidos em (2.34).

$$\hat{u}(t'',\kappa_l,\xi_l)=\gamma_l\int_{[0,2\pi]^{n-m}}e^{\xi_l(\varphi_1(t'',s'')+i\varphi_2(t'',s''))}ds'', \tag{2.35}$$

$$\hat{f}_j(t'',\kappa_l,\xi_l)=i(\kappa_l^{(j)}+\xi_l a_{j0})\gamma_l\int_{[0,2\pi]^{n-m}}e^{\xi_l(\varphi_1(t'',s'')+i\varphi_2(t'',s''))}ds'', \tag{2.36}$$

para $j = 1, \ldots, m$,

$$\hat{f}_j(t'', \kappa_l, \xi_l) = \frac{\gamma_l}{d_{j\xi_l}} \int_{[0,2\pi]^{n-m-1}} e^{\xi_l(\varphi_1(t'', s''-s_j e_j)+i\varphi_2(t'', s''-s_j e_j))} ds''_{(j)}, \tag{2.37}$$

para $j = m+1, \ldots, n$. Sendo

$$\varphi_1(t'', s'') = B(t'') - B(t''-s'') - Kq(t''-s'') + r(t''-s'') - M$$

e

$$\varphi_2(t'', s'') = p(t''-s'') - a''_0 \cdot s''$$

funções a valores reais.

Proposição 2.16. *Para $K > 0$ suficientemente grande, $f_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, $j = 1, \ldots, m$.*

Demonstração. Afirmamos que $\varphi_1(t'', s'') \leq 0$, para todo $t'', s'' \in [0, 2\pi]^{n-m}$. Com efeito, denotamos por $\mathcal{F}$ a fronteira do cubo $[0, 2\pi]^{n-m}$. Como $B < M$ sobre $\mathcal{F}$, existe $0 < \delta_0 \leq \delta$ tal que $B \leq M$ sobre o aberto $U = \{\tau'' \in \mathbb{R}^{n-m};\ \operatorname{dist}(\tau'', \mathcal{F}) < \delta_0\}$.

Para cada $2\pi\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}^{n-m}$, considere a bola aberta de raio δ_0 centrada em $2\pi\nu$. Denotamos por V a união (disjunta) dessas bolas.

Dados $t'', s'' \in [0, 2\pi]^{n-m}$ veja que a diferença $t'' - s'' \in [-2\pi, 2\pi]^{n-m}$.

Se $t'' - s'' \in V$, então $|(t'' - s'') - 2\pi\nu| < \delta_0$ para algum $2\pi\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}^{n-m}$, logo $r(t'' - s'') = r(t'' - s'' - 2\nu\pi) = B(t'' - s'' - 2\nu\pi)$ e

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t'', s'') &= B(t'') - B(t''-s'') - Kq(t''-s'') + r(t''-s'') - M \\
&= B(t'') - B(t''-s'') - Kq(t''-s'') + B(t''-s''-2\nu\pi) - M \\
&= B(t'') - M - Kq(t''-s'') - 2\pi\nu \cdot b_0 \\
&= B(t''-2\pi\nu) - M - Kq(t''-s'') \leq B(t''-2\pi\nu) - M.
\end{aligned}$$

Observe na desigualdade anterior que, caso $\nu = 0$ então $\varphi_1(t'', s'') \leq 0$. Caso $\nu \neq 0$ temos $(t'' - 2\pi\nu) \notin (0, 2\pi)^{n-m}$, então

$$\operatorname{dist}(t'' - 2\pi\nu, \mathcal{F}) \leq \operatorname{dist}(t'' - 2\pi\nu, s'') = \operatorname{dist}(t'' - s'', 2\pi\nu) < \delta_0,$$

logo $t'' - 2\pi\nu \in U$ e $\varphi_1(t'', s'') \leq 0$.

Se $t'' - s'' \notin V$ então

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t'', s'') &\leq -B(t''-s'') - Kq(t''-s'') + r(t''-s'') \\
&\leq C - K\sigma,
\end{aligned}$$

sendo

$$C \doteq \max\{r(\tau'') - B(\tau'');\ \tau'' \in [-2\pi, 2\pi]^{n-m} \setminus V\},$$

e

$$0 < \sigma \doteq \min\left\{q(\tau''); \quad \tau'' \in [-2\pi, 2\pi]^{n-m} \setminus V\right\}.$$

Assim, escolhendo $K > 0$ tal que $C \leq K\sigma$, concluímos a afirmação feita no início da demonstração. Obtemos assim a seguinte estimativa para as funções $\hat{f}_j(t'', \kappa, \xi)$ dadas em (2.36),

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_j(t'', \kappa_l, \xi_l)| &\leq (2\pi)^{n-m}\gamma_l|\kappa_l + \xi_l a_0'| \\
&\leq (2\pi)^{n-m}\begin{cases} e^{-\xi_l(\frac{M-\widetilde{M}}{2}-\lambda)} & \text{se } l \in \mathcal{F}_1 \\ \left|\kappa_l + \xi_l a_0'\right|^{1/2} & \text{se } l \in \mathcal{F}_2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vejamos que uma estimativa semelhante ocorre para as derivadas de $\hat{f}_j(t'', \kappa, \xi)$. De fato, dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{n-m}$ temos

$$\partial^\alpha \hat{f}_j(t'', \kappa_l, \xi_l) = i(\kappa_l^{(j)} + \xi_l a_{j0})\gamma_l \int_{[0,2\pi]^{m-n}} P(t'', s'', \xi_l)e^{\xi_l\varphi(t'',s'')}ds'',$$

sendo $\varphi \doteq \varphi_1 + i\varphi_2$ e P um polinômio envolvendo potências de ξ_l (com grau menor ou igual a $|\alpha|$) e derivadas parciais de φ, as quais são limitadas em $[0, 2\pi]^{2(n-m)}$. Então, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$|P(t'', s'', \xi_l)| \leq C_\alpha \xi_l^{|\alpha|}, \quad \forall t'', s'' \in [0, 2\pi]^{n-m}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|\partial^\alpha \hat{f}_j(t'', \kappa_l, \xi_l)| &\leq \gamma_l|\kappa_l + \xi_l a_0'| \int_{[0,2\pi]^{n-m}} |P(t'', s'', \xi_l)||e^{\xi_l\varphi(t'',s'')}|ds'' \\
&\leq (2\pi)^{n-m}C_\alpha\xi_l^{|\alpha|}|\kappa_l + \xi_l a_0'|\gamma_l \\
&\leq (2\pi)^{n-m}C_\alpha\xi_l^{|\alpha|}\begin{cases} e^{-\xi_l(\frac{M-\widetilde{M}}{2}-\lambda)} & \text{se } l \in \mathcal{F}_1 \\ \left|\kappa_l + \xi_l a_0'\right|^{1/2} & \text{se } l \in \mathcal{F}_2 \end{cases}.
\end{aligned}$$

e segue que $f_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$, $j = 1, \ldots, m$.

Proposição 2.17. *Para $K > 0$ suficientemente grande, $f_j \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$ para $j = m+1, \ldots, n$.*

Demonstração. Fixamos um $j \in \{s+1, \dots, n\}$ e identificamos os pontos $s'' - s_j e_j$ com $(s_{m+1}, \dots, s_{j-1},\ s_{j+1}, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n-m-1}$. Afirmamos que $\varphi_1(t'', s'' - s_j e_j) \leq (\widetilde{M} - M)/2$, para todo $t'', s'' \in [0, 2\pi]^{n-m}$. Com efeito, considere o conjunto

$$\mathcal{Q}_j = \{(t'', s'' - s_j e_j) \in [0, 2\pi]^{n-m} \times [0, 2\pi]^{n-m-1};\ q(t'' - s'' + s_j e_j) = 0\}.$$

Note que o conjunto $\mathcal{Q}_j$ é fechado uma vez que a função q é contínua. Além disso $(t'', s'' - s_j e_j) \in \mathcal{Q}_j$ se, e somente se, $t'' - s'' + s_j e_j = 2\nu\pi \in [0, 2\pi]^{n-m}$ com $\nu \in \mathbb{Z}^{n-m}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t'', s'' - s_j e_j) &= B(t'') - B(t'' - s'' + s_j e_j) - r(t'' - s'' + s_j e_j) - M \\
&= B(s'' - s_j e_j + 2\nu\pi) - B(2\nu\pi) + r(2\nu\pi) - M \\
&= B(s'' - s_j e_j) - M \\
&\leq M_j - M < \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad (t'', s'' - s_j e_j) \in \mathcal{Q}_j.
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{Q}_j$ é fechado existe um aberto $U \supset \mathcal{Q}_j$ tal que

$$\varphi_1(t'', s'' - s_j e_j) \leq \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad (t'', s'' - s_j e_j) \in U.$$

Sejam

$$\sigma \doteq \min\{q(t'' - s'' + s_j e_j);\ (t'', s'' - s_j e_j) \in \mathcal{K}\}$$

e

$$\mu \doteq \min\{B(t'' - s'' + s_j e_j) + r(t'' - s'' + s_j e_j);\ \ (t'', s'' - s_j e_j) \in \mathcal{K}\},$$

sendo $\mathcal{K}$ o compacto $([0, 2\pi]^{n-m} \times [0, 2\pi]^{n-m-1}) \setminus U$. Dessa forma, $\sigma > 0$ e escolhendo K positivo tal que $K \geq (\frac{M - \widetilde{M}}{2} - \mu)/\sigma$ temos

$$\varphi_1(t'', s'' - s_j e_j) \leq -\mu - K\sigma \leq \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad (t'', s'' - s_j e_j) \in \mathcal{K},$$

concluindo a afirmação feita.

Segue a seguinte estimativa para os coeficientes $\hat{f}_j(\cdot, \kappa_l, \xi_l)$ dados em (2.37):

$$\begin{aligned}
|\hat{f}_j(t'', \kappa_l, \xi_l)| \leq C\gamma_l e^{-\xi_l \frac{M - \widetilde{M}}{2}} &= \begin{cases} Ce^{-\xi_l(\frac{M - \widetilde{M}}{2} - \lambda)} & \text{se } l \in \mathcal{F}_1 \\ C|\kappa_l + \xi_l a_0'|^{-1/2} e^{-\xi_l \frac{M - \widetilde{M}}{2}} & \text{se } l \in \mathcal{F}_2 \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} Ce^{-\xi_l(\frac{M - \widetilde{M}}{2} - \lambda)} & \text{se } l \in \mathcal{F}_1 \\ Ce^{-\xi_l(\frac{M - \widetilde{M}}{4})} & \text{se } l \in \mathcal{F}_2, \end{cases}
\end{aligned}$$

sendo $C > 0$ uma constante que não depende de t'' e (κ_l, ξ_l). É possível obter estimativas semelhantes para as derivadas de $\hat{f}_j(\cdot, \kappa_l, \xi_l)$ como feito na Proposição 2.16. Concluímos dessa forma que $f_{m+1}, \dots, f_n$ são funções suaves.

Proposição 2.18. *Para $K>0$ suficientemente grande, não existe distribuição $u\in\mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ cujos coeficientes parciais de Fourier nas variáveis $t_1,\dots,t_m,x$, sejam os dados em (2.35).*

Demonstração. Seja $t''_*\in(0,2\pi)^{n-m}$ tal que $B(t''_*)=M$. Escrevemos

$$\hat{u}(t''_*,\kappa_l,\xi_l)=\gamma_l(I_l+J_l),$$

sendo

$$I_l=\int_{|t''_*-s''|<\delta}e^{\xi_l(\varphi_1(t''_*,s'')+i\varphi_2(t''_*-s''))}ds'',$$

$$J_l=\int_{|t''_*-s''|\geq\delta}e^{\xi_l(\varphi_1(t''_*,s'')+i\varphi_2(t''_*-s''))}ds''.$$

Se $|t''_*-s''|<\delta$ temos $p(t''_*-s'')=a''_0\cdot(t''_*-(t''_*-s''))=a''_0\cdot s''$, $q(t''_*-s'')=|t''_*-s''|^2$ e $r(t''_*-s'')=B(t''_*-s'')$. Logo, fazendo a mudança de variáveis $\xi_lK(t''_*-s'')=\sigma$ chegamos à seguinte igualdade

$$\begin{aligned} I_l &= \int_{|t''_*-s''|<\delta}e^{\xi_l\varphi_1(t''_*,s'')}e^{i\xi_l\varphi_2(t''_*-s'')}ds'' \\ &= \int_{|t''_*-s''|<\delta}e^{-K\xi_l|t''_*-s''|^2}ds'' \\ &= \frac{1}{(K\xi_l)^{(n-m)/2}}\int_{|\sigma|<\delta\sqrt{K\xi_l}}e^{-|\sigma|^2}d\sigma=\frac{1}{(K\xi_l)^{(n-m)/2}}\mu_{\xi_l}, \end{aligned}$$

na qual $\mu_{\xi_l}\doteq\int_{|\sigma|<\delta\sqrt{K\xi_l}}e^{-|\sigma|^2}d\sigma$ é uma sequência de números reais positivos a qual é crescente e limitada superiormente.

Por outro lado, temos $q(\tau)>0$ para todo $\tau\in Q^*=t^*-[0,2\pi]^{n-m}$. Portanto, a constante $\sigma=\min\{q(\tau);\ \tau\in Q^* \text{ e } |\tau|\geq\delta\}$ é positiva.

Para $K>0$ suficientemente grande obtemos a desigualdade

$$\varphi(t''_*,s'')\leq -K\sigma+r(t''_*-s'')-B(t''_*-s'')<-\lambda,\ \forall s''\in[0,2\pi]^{n-m}.$$

Portanto,

$$|J_l|\leq\int_{|t''_*-s''|\geq\delta}e^{\xi_l\varphi_1(t''_*,s'')}ds''\leq(2\pi)^{n-m}e^{-\xi_l\lambda}.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} |\hat{u}(t''_*,\kappa_l,\xi_l)| &\geq \gamma_l(|I_l|-|J_l|) \\ &\geq \gamma_l\Big(\frac{1}{(K\xi_l)^{(n-m)/2}}\mu_l-(2\pi)^{n-m}e^{-\xi_l\lambda}\Big). \end{aligned}$$

Agora, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{e^{\xi_l \lambda}\mu_1}{(2\pi)^{(n-m)}(K\xi_l)^{(n-m)/2}} \geq 1$ para todo $\xi_l > N$. Assim, da desigualdade anterior obtemos

$$\begin{aligned}
|\hat{u}(t''_*, \kappa_l, \xi_l)| &\geq \gamma_l \Big(\frac{1}{(K\xi_l)^{(n-m)/2}} \mu_l - (2\pi)^{n-m} e^{-\xi_l \lambda} \Big) \\
&\geq \gamma_l \Big(\frac{1}{(K\xi_l)^{(n-m)/2}} \mu_l - \frac{1}{(K\xi_l)^{(n-m)/2}} \mu_1 \Big) \\
&= \gamma_l (\mu_l - \mu_1) \frac{1}{(K\xi_l)^{(n-m)/2}} \\
&\geq \frac{(\mu_l - \mu_1)\gamma_l}{(K\xi_l)^{(n-m)/2}}, \quad \forall \xi_l > N.
\end{aligned}$$

Portanto, pela forma que foi definido $(\gamma_l)_{l\in\mathbb{N}}$ em (2.33), concluímos que a sequência $\{\hat{u}(\cdot, \kappa, \xi)\}$ não pode ser uma sequência de coeficientes parciais de Fourier de nenhuma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$.

$\square$

Concluiremos agora a demonstração no caso 1.2 supondo que $\mathbb{Q} \cap \{c_{(m+1)0}, \ldots, c_{n0}\} \neq \emptyset$, lembrando que ainda estamos trabalhando com a hipótese $c''_0 \notin \mathbb{Q}^{n-m}$.

Podemos assumir que $c_{(m+1)0}, \ldots, c_{p0} \notin \mathbb{Q}$ e que $c_{(p+1)0}, \ldots, c_{n0} \in \mathbb{Q}$ sendo $m+1 \leq p < n$. Sejam $\mathbb{L}^{\#}$ o operador associado aos campos vetoriais $L_1, \ldots, L_p$ e $\mathcal{A} = \eta\mathbb{Z}$ o conjunto dos múltiplos de um $\eta \in \mathbb{N}$ que satisfaz $\eta(c_{(p+1)0}, \ldots, c_{n0}) \in \mathbb{Z}^{n-p}$.

Pelo Lema 1.7, para cada $l \in \mathbb{N}$ podemos assumir que $\xi_l, \kappa_l^{(j)} \in \mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, m$, na sequência $\{(\kappa_l, \xi_l)\}$ que satisfaz (2.29) considerada previamente. Assim, $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n-p+1}$ pela primeira parte do caso 1.2. Finalmente, pelo Lema 2.14 concluímos que $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$.

2.4.2 Caso 2: $a'_0 \in \mathbb{Q}^m$

Uma vez que a condição (ii) já não pode ser válida visto que $a'_0 \in \mathbb{Q}^m$, vamos supor que todas as funções $b_j \not\equiv 0$ mudam de sinal e alguma das condições exibidas em (iii) não está satisfeita. Separamos a demonstração em três partes.

Começamos assumindo que $c''_0 = (c_{(m+1)0}, \ldots, c_{n0}) \notin \mathbb{Q}^{n-m}$, ou seja, a 1-forma b não é exata ou $a''_0 \notin \mathbb{Q}^{n-m}$. Reordenando os campos L_j, podemos assumir que $c_{(m+1)0}, \ldots, c_{p0} \in \mathbb{Q}$ e que $c_{(p+1)0}, \ldots, c_{n0} \notin \mathbb{Q}$ sendo $m \leq p \leq n-1$ ($p = m$ significa $c_{(m+1)0}, \ldots, c_{n0} \notin \mathbb{Q}$).

Seja $\mathcal{A} = \eta\mathbb{Z}$ com $\eta \in \mathbb{N}$ tal que $\eta(c_{10}, \ldots, c_{p0}) \in \mathbb{Z}^p$ e considere o operador $\mathbb{L}^{\#}$ associado aos campos vetoriais $L_{p+1}, \ldots, L_n$. Como $c_{(p+1)0}, \ldots, c_{n0} \notin \mathbb{Q}$, pela Proposição 2.3 concluímos que $\mathbb{L}^{\#}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n-p+1}$. Mais ainda, podemos afirmar que $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel. De fato, lembremos que na construção de f na Seção 2.2 usamos apenas frequências $\xi \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{G}$ sendo $\mathcal{G}$ definida em (2.12) a partir dos períodos c_{j0} racionais. Logo, como estamos assumindo $c_{(p+1)0}, \ldots, c_{n0} \notin \mathbb{Q}$ temos $\mathcal{G} = \emptyset$. Então, para o operador $\mathbb{L}^{\#}$, usando as mesmas ideias daquela seção, podemos construir g usando apenas frequências em $\mathcal{A}$ tal que $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}} v = g$ não possui solução $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n-m+1})$. Concluímos assim que $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n-p+1}$. Portanto, pelo Lema 2.14, o operador $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$.

Suponhamos agora que b é exata e $a_0'' \in \mathbb{Q}^{n-m}$ (ou seja, $c_0'' = (c_{(m+1)0}, \ldots, c_{n0}) \in \mathbb{Q}^{n-m}$), porém $q_J < q_*$. Logo, existe ao menos um período c_{j0}, $j = m+1, \ldots, n$, tal que $q_J c_{j0} \notin \mathbb{Z}$. Assim, reordenando os campos se necessário, vamos assumir que $q_J a_{10}, \ldots, q_J a_{p0} \in \mathbb{Z}$ e que $q_J a_{(p+1)0}, \ldots, q_J a_{n0} \notin \mathbb{Z}$ sendo $m \leq p \leq n-1$.

Escrevemos $a_{j0} = r_j/s_j$, $j = p+1, \ldots, n$ com $r_j \in \mathbb{Z}$ e $s_j \in \mathbb{N}$ primos entre si. Nessa notação, definimos o conjunto

$$\mathcal{G} = \bigcup_{j=p+1}^{n} s_j \mathbb{Z}_+.$$

Portanto, o conjunto $q_J \mathbb{Z}_+ \setminus \mathcal{G}$ possui infinitos elementos.

Denotamos por $\mathbb{L}^{\#}$ o operador associado aos campos vetoriais $L_{p+1}, \ldots, L_n$ e por $\mathcal{A}$ o conjunto $q_J \mathbb{Z}$. Novamente, usando argumentos semelhantes aos feitos na Seção 2.2 podemos concluir que $\mathbb{L}^{\#}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n-p+1}_{(t_{p+1},\ldots,t_n,x)}$. Assim, pelo Lema 2.14 concluímos que $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$.

Finalmente, suponha que $a_0 \in \mathbb{Q}^n$, b é exata e $q_J = q_*$, porém alguma primitiva global $B : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ da 1-forma b possui um subnível ou um supernível desconexo em $\mathbb{T}^n$.

Sejam $\mathcal{A} = q_* \mathbb{Z}$ e $\mathbb{L}_0 = d_t + ib(t) \wedge \partial/\partial x$. O automorfismo do Lema 2.12 garante que $\mathbb{L}_{\mathcal{A}}$ é globalmente resolúvel se, e somente se, $\mathbb{L}_{0,\mathcal{A}}$ é globalmente resolúvel. Portanto, como B possui um subnível ou um supernível desconexo em $\mathbb{T}^n$, o operador $\mathbb{L}_{0,\mathcal{A}}$ não é globalmente resolúvel pelo trabalho [CH] e, portanto, $\mathbb{L}$ não é globalmente resolúvel.

Capítulo

3

Resultados adicionais

Sejam $b \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^n;\mathbb{R})$ uma 1-forma fechada e $\mathbb{L}$ o operador definido por

$$\mathbb{L} = d_t + ib(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}.$$

Pelo trabalho [CH], se b for exata então o operador $\mathbb{L}$ será globalmente resolúvel se, e somente se, uma primitiva global de b possuir todos subníveis e superníveis conexos em $\mathbb{T}^n$.

Quando a 1-forma b não for exata, apresentaremos uma situação especial em que o operador $\mathbb{L}$ não é globalmente resolúvel. Usaremos isso para caracterizar a resolubilidade global em um caso parcialmente acoplado na Seção 3.3.

Daqui em diante vamos considerar b não exata. Logo, se r denota o posto do grupo de períodos $Per(b)$ da 1-forma b e $s \doteq n - r$ o coposto de $Per(b)$, então

$$1 \leq r \leq n \quad \text{e} \quad 0 \leq s \leq n-1,$$

e pelo Lema 1.4 podemos assumir que

(i) $b_{10} = \cdots = b_{s0} = 0$ e $b_{n0} < \cdots < b_{(s+1)0} < 0$, quando $s \geq 1$;

(ii) $b_{n0} < \cdots < b_{10} < 0$, quando $s = 0$.

Usaremos a notação $t = (t', t'')$ para as coordenadas em $\mathbb{T}^n$, sendo $t' = (t_1, \ldots, t_s)$ e $t'' = (t_{s+1}, \ldots, t_n)$. Quando $s = 0$, teremos apenas $t = t'' = (t_1, \ldots, t_n)$.

Seja $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma primitiva global do *pull-back* $\Pi^* b$ através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$. Denotamos por M o máximo da função B sobre o cubo $[0, 2\pi]^n$ e por M_j o máximo de B sobre $[0, 2\pi]^n \cap \{t_j = 0\}$, $j = 1, \ldots, n$. Nessas condições vamos supor que:

($\star$) Para cada $j = s+1, \ldots, n$ temos $M_j < M$.

Observação: Essa condição significa que o máximo da função B sobre o cubo $[0, 2\pi]^n$ não é atingido nas faces contidas nos planos $\{t_j = 0\}$, $j = s+1, \ldots, n$, cujos períodos $b_{j0} \neq 0$. E como os períodos $b_{(s+1)0}, \ldots, b_{n0}$ são negativos, o máximo de B sobre $[0, 2\pi]^n$ também não será atingido nas faces paralelas contidas nos planos $\{t_j = 2\pi\}$, $j = s+1, \ldots, n$. No caso em que $s = 0$, o máximo de B sobre o cubo $[0, 2\pi]^n$ não ocorre na fronteira.

Podemos assumir que $B(0) = 0$ considerando a primitiva $B - B(0)$. Dessa forma, se $\widetilde{M}$ é o maior M_j, $j = s+1, \ldots, n$, temos $\widetilde{M} \geq 0$ e $M - \widetilde{M} > 0$.

3.1 Um teorema de não resolubilidade

Teorema 3.1. *Seja $b = \sum_{j=1}^n b_j(t) dt_j \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ uma 1-forma fechada e não exata. Sob a condição ($\star$) mencionada anteriormente o operador*

$$\mathbb{L} = d_t + ib(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$$

não é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{n+1}$.

Demonstração. Vamos construir uma 1-forma $f = \sum_{j=1}^n f_j(t, x) dt_j \in \mathbb{E}$ de modo que a equação $\mathbb{L}u = f$ não possua solução $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$. Para esse operador $\mathbb{L}$ o espaço $\mathbb{E}$ é o seguinte:

$$\mathbb{E} = \Big\{ f \in \bigwedge{}^1 C^\infty(\mathbb{T}^{n+1});\ \mathbb{L}f = 0 \text{ e } \int_0^{2\pi} \hat{f}_j(0, \ldots, t_j, \ldots, 0, 0) dt_j = 0,\ j = 1, \ldots, n \Big\}.$$

Como queremos construir $f \in \mathbb{E}$ precisamos que $\mathbb{L}f = 0$ ou equivalentemente $L_j f_k = L_k f_j$, $j, k = 1, \ldots, n$. Esta condição juntamente com o fato do comutador $[L_j, L_k]$ ser nulo, resultam na seguinte igualdade

$$L_{\sigma(s+1)} \ldots L_{\sigma(n-1)} L_{\sigma(n)} u = L_{s+1} \ldots L_{n-1} L_n u, \tag{3.1}$$

para qualquer permutação σ dos inteiros $s+1, \ldots, n$. Ou seja, se a 1-forma $f \in \mathbb{E}$ e existe solução $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ da equação $\mathbb{L}u = f$ então u deve satisfazer (3.1).

Vamos construir funções $f_{s+1}, \dots, f_n$ motivados por (3.1) utilizando a seguinte equação

$$h \doteq L_{s+1} \dots L_{n-1} L_n u. \tag{3.2}$$

No caso em que $s \geq 1$, escolhemos as funções $f_1, \dots, f_s$ identicamente nulas.

Construção das funções $f_{s+1}, \dots, f_n$

Considere as séries parciais de Fourier de u e h definidas da seguinte forma

$$u(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi) e^{i\xi x} \quad \text{e} \quad h(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{h}(t,\xi) e^{i\xi x}.$$

Substituindo essas séries em (3.2), obtemos para cada $\xi \in \mathbb{Z}$ a seguinte equação

$$\hat{h}(t,\xi) = \Big(\frac{\partial}{\partial t_{s+1}} - \xi b_{s+1}(t)\Big) \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial t_n} - \xi b_n(t)\Big) \hat{u}(t,\xi).$$

Como $b_{j0} \neq 0$, $j = s+1, \dots, n$, para cada $\xi \neq 0$ a equação acima tem uma única solução dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = d_\xi \int_{[0,2\pi]^r} e^{-\xi(B(t',t''-\sigma'')-B(t))} \hat{h}(t', t''-\sigma'', \xi) d\sigma'', \tag{3.3}$$

sendo $d_\xi = d_{(s+1)\xi} \dots d_{n\xi}$, com $d_{j\xi} = (1 - e^{2\pi\xi b_{j0}})^{-1}$ e $d\sigma'' = d\sigma_{s+1} \dots d\sigma_n$.

As funções $\hat{h}(\cdot,\xi)$ serão construídas adiante e as funções $f_{s+1}, \dots, f_n$ dependerão dessa construção. Desse modo, vamos obter uma 1-forma $f = \sum_{j=1}^n f_j(t,x) dt_j \in \mathbb{E}$ e caso exista solução u da equação $\mathbb{L}u = f$ os coeficientes parciais de Fourier da distribuição u serão dados por (3.3).

Definimos

$$f_j(t,x) = \sum_{\xi=1}^{\infty} \hat{f}_j(t,\xi) e^{i\xi x}, \quad j = s+1, \dots, n,$$

sendo $\hat{f}_j(\cdot,\xi)$ dados como segue:

- Se $r = 1$ temos $s + 1 = n$, neste caso

$$\hat{f}_n(t,\xi) = \hat{h}(t,\xi), \quad \xi \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

- Se $r \geq 2$, definimos as funções $\hat{f}_j(\cdot,\xi)$ por

$$\hat{f}_j(t,\xi) = \Big(\frac{\partial}{\partial t_j} - \xi b_j(t)\Big) v(t,\xi), \quad \xi \in \mathbb{N},\ j = s+1, \dots, n,$$

sendo $v(\cdot,\xi)$ dada pelo lado direito de (3.3). Desenvolvendo o lado direito da igualdade acima chegamos a seguinte fórmula:

$$\hat{f}_j(t,\xi) = \frac{d_\xi}{d_{j\xi}} \int_{[0,2\pi]^{r-1}} e^{-\xi(B(t',t''-\sigma''+\sigma_j e_j)-B(t))} \hat{h}(t',t''-\sigma''+\sigma_j e_j,\xi) d\sigma''_{(j)}, \quad (3.5)$$

na qual $d\sigma''_{(j)} = d\sigma_{s+1}\dots d\sigma_{j-1}d\sigma_{j+1}\dots d\sigma_n$ e $e_j = (0,\dots,1,\dots,0) \in \mathbb{R}^r_{t''}$.

As funções $\hat{f}_j(\cdot,\xi)$ estão bem definidas, pois só dependem da escolha das funções $\hat{h}(\cdot,\xi)$ que passamos a descrever agora.

Construção da função h

Sejam $0 < \delta < \pi/2$ e $\mathcal{Q}_\delta = \{t'' \in \mathbb{R}^r,\ |t''| < \delta\}$. Considere uma função de corte $\chi_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^r)$ tal que

$$\chi_\delta(t'') = \begin{cases} 1 & \text{se } t'' \in \mathcal{Q}_\delta \\ 0 & \text{se } t'' \notin \mathcal{Q}_{2\delta} \end{cases}$$

e $0 \le \chi_\delta(t'') \le 1$, para todo $t'' \in \mathbb{R}^r$.

Usando a função χ_δ definimos a função

$$q(t'') = 1 + \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^r} (|t''+2\pi\nu|^2 - 1)\chi_\delta(t''+2\pi\nu), \quad t'' \in \mathbb{R}^r,$$

que possui as seguintes propriedades:

- q é suave e 2π-periódica;
- $q \ge 0$ e $q(t'') = 0$ se, e somente se, $t'' = 2\pi\nu,\ \nu \in \mathbb{Z}^r$;
- Se $|t''| < \delta$ então $q(t'') = |t''|^2$.

Finalmente definimos a função h da seguinte forma

$$h(t,x) = \sum_{\xi=1}^{\infty} \hat{h}(t,\xi)e^{i\xi x},$$

na qual

$$\hat{h}(t,\xi) = e^{-\xi(B(0,t'')-B(t)+Kq(t'')+M-\lambda)}, \quad \xi \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

com $0 < \lambda < (M - \widetilde{M})/2$ e $K > 0$ constantes. A constante K será suficientemente grande e escolhida posteriormente.

Proposição 3.2. *Para $K > 0$ suficientemente grande, $h \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$.*

Demonstração. Seja

$$\psi(t) = B(t) - B(0, t'') - Kq(t'') - M + \lambda, \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Afirmamos que $\psi(t) < (\widetilde{M} - M)/2$ para todo $t \in [0, 2\pi]^n$. De fato, considere o conjunto

$$Q = \{t'' \in [0, 2\pi]^r;\ q(t'') = 0\}.$$

Logo, $t'' \in Q$ se, e somente se, t'' é um vértice do cubo $[0, 2\pi]^r$, isto é, $t'' = 2\pi\nu$ com $\nu = (\nu_{s+1}, \ldots, \nu_n)$ onde cada entrada ν_j é igual a 0 ou 1. Portanto, para $t'' \in Q$ temos

$$\begin{aligned}
\psi(t', t'') &= B(t', 2\pi\nu) - B(0, 2\pi\nu) - M + \lambda \\
&= B(t', 0) - M + \lambda \\
&\leq \widetilde{M} - M + \lambda \\
&< \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad \forall (t', t'') \in [0, 2\pi]^s \times Q.
\end{aligned}$$

Como Q é um compacto, existe um aberto $U \supset [0, 2\pi]^s \times Q$ tal que

$$\psi(t) < \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad \forall t \in U.$$

Seja $\pi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ dada por $\pi_r(t', t'') = t''$ e $\tilde{q} = q \circ \pi_r$. Assim, se μ denota o mínimo da função $\tilde{q}$ sobre o compacto $\mathcal{K} = [0, 2\pi]^n \setminus U$ temos $\mu > 0$, caso contrário existiria $t \in \mathcal{K}$ tal que $0 = \tilde{q}(t) = q(t'')$ o que implicaria $t'' \in Q$ e portanto $t = (t', t'') \in [0, 2\pi]^s \times Q \subset U$, o que é um absurdo.

Escolhemos $K > (\frac{M - \widetilde{M}}{2} - \eta + \lambda)/\mu$ sendo $\eta = \min\{B(t);\ t \in [-2\pi, 2\pi]^n\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\psi(t) &\leq -B(0, t'') - Kq(t'') + \lambda \\
&= -B(0, t'') - K\tilde{q}(t) + \lambda \\
&\leq -\eta - K\mu + \lambda \\
&< \frac{\widetilde{M} - M}{2}, \quad \forall t \in \mathcal{K},
\end{aligned}$$

concluindo a afirmação feita anteriormente.

A desigualdade acima juntamente com os coeficientes (3.6) resultam na seguinte estimativa,

$$|\hat{h}(t, \xi)| \leq e^{-\xi \frac{M - \widetilde{M}}{2}}, \quad \forall t \in [0, 2\pi]^n,\ \forall \xi \in \mathbb{N}.$$

Além disso, valem estimativas semelhantes para as derivadas $\partial^\alpha \hat{h}(\cdot, \xi),\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

$\square$

Para cada $\xi \in \mathbb{N}$, vejamos como ficam as expressões dos coeficientes (3.3), (3.4) e (3.5) ao substituir os coeficientes definidos em (3.6).

- Qualquer que seja $1 \leq r \leq n$, temos

$$\hat{u}(t,\xi) = d_\xi \int_{[0,2\pi]^r} e^{-\xi(B(0,t''-\sigma'')-B(t)+Kq(t''-\sigma'')+M-\lambda)} d\sigma''. \tag{3.7}$$

- Se $r = 1$, temos

$$\hat{f}_n(t,\xi) = e^{-\xi(B(0,t_n)-B(t)+Kq(t_n)+M-\lambda)}; \tag{3.8}$$

- Se $r \geq 2$, temos para cada $j = s+1, \ldots, n$

$$\hat{f}_j(t,\xi) = \frac{d_\xi}{d_{j\xi}} \int_{[0,2\pi]^{r-1}} e^{-\xi(B(0,t''-\sigma''+\sigma_j e_j)-B(t)+Kq(t''-\sigma''+\sigma_j e_j)+M-\lambda)} d\sigma''_{(j)}, \tag{3.9}$$

Veja que $L_k f_j = L_j f_k$ para todo $j,k = 1,\ldots,n$ e também vale

$$\int_0^{2\pi} \hat{f}_j(0,\ldots,t_j,\ldots,0,0)dt_j = 0$$

pois $\hat{f}_j(\cdot,0) = 0$.

Proposição 3.3. $f_{s+1},\ldots,f_n \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1})$.

Demonstração. O caso em que $r = 1$ (logo $s = n-1$) se reduz à Proposição 3.2. Consideramos então $r \geq 2$ e fixamos um $j \in \{s+1,\ldots,n\}$. Vamos identificar os elementos $\sigma'' - \sigma_j e_j$ com $(\sigma_{s+1},\ldots,\sigma_{j-1},\sigma_{j+1},\ldots,\sigma_n)$.

Definimos o conjunto

$$Q_j = \{(t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in [0,2\pi]^r \times [0,2\pi]^{r-1};\ q(t''-\sigma''+\sigma_j e_j) = 0\}.$$

Logo, $(t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in Q_j$ se, e somente se, $t''-\sigma''+\sigma_j e_j = 2\pi\nu \in [-2\pi,2\pi]^r$, com $\nu \in \mathbb{Z}^r$.

Considere a função $\psi_j : [0,2\pi]^n \times [0,2\pi]^{r-1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi_j(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) = B(t',t'') - B(0,t''-\sigma''+\sigma_j e_j) - Kq(t''-\sigma''+\sigma_j e_j) - M + \lambda.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \psi_j(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) &= B(t',2\pi\nu+\sigma''-\sigma_j e_j) - B(0,2\pi\nu) - M + \lambda \\ &= B(t',\sigma_{s+1},\ldots,\sigma_{j-1},0,\sigma_{j+1},\ldots,\sigma_n) - M + \lambda \\ &< \frac{\widetilde{M}-M}{2}, \quad \forall (t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in [0,2\pi]^s \times Q_j. \end{aligned}$$

Como q é contínua, o conjunto Q_j é fechado (mais que isso, é compacto), logo existe um aberto $U \supset [0,2\pi]^s \times Q_j$ tal que

$$\psi_j(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) < \frac{\widetilde{M}-M}{2}, \quad \forall (t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in U.$$

Considere agora a função $\tilde{q} = q \circ \theta$ sendo $\theta : \mathbb{R}^{n+(r-1)} \to \mathbb{R}^r$ definida por

$$\theta(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) = t''-\sigma''+\sigma_j e_j = (t_{s+1}-\sigma_{s+1},\ldots,t_j,\ldots,t_n-\sigma_n).$$

Como $q \geq 0$, temos $\tilde{q} \geq 0$. Afirmamos que a função $\tilde{q}$ não se anula no compacto $\mathcal{K} = ([0,2\pi]^n \times [0,2\pi]^{r-1}) \setminus U$. De fato, se existisse $(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in \mathcal{K}$ tal que $0 = \tilde{q}(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) = q(t''-\sigma''+\sigma_j e_j)$, teríamos $(t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in Q_j$ e portanto $(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in [0,2\pi]^s \times Q_j$, o que é um absurdo. Como consequência

$$0 < \mu \doteq \min\{\tilde{q}(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j); \;\; (t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in \mathcal{K}\}.$$

Portanto, considerando o mesmo K escolhido na proposição anterior obtemos

$$\begin{aligned}
\psi_j(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) &\leq -B(0,t''-\sigma''+\sigma_j e_j) - Kq(t''-\sigma''+\sigma_j e_j) + \lambda \\
&\leq -B(0,t''-\sigma''+\sigma_j e_j) - K\tilde{q}(t''-\sigma''+\sigma_j e_j) + \lambda \\
&\leq -\eta - K\mu + \lambda \\
&< \frac{\widetilde{M}-M}{2}, \quad \forall (t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in \mathcal{K},
\end{aligned}$$

sendo $\eta = \min\{B(t);\; t \in [-2\pi,2\pi]^n\}$. Concluímos assim que

$$\psi_j(t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) < \frac{\widetilde{M}-M}{2}, \quad \forall (t',t'',\sigma''-\sigma_j e_j) \in [0,2\pi]^n \times [0,2\pi]^{r-1}.$$

Essa desigualdade juntamente com (3.9) resultam na seguinte estimativa

$$|\hat{f}_j(t,\xi)| \leq Ce^{-\xi\frac{M-\widetilde{M}}{2}}, \quad \forall t \in [0,2\pi]^n,\; \forall \xi \in \mathbb{N},$$

na qual a constante $C > 0$ não depende de t e ξ (veja o Lema 2.6 na Seção 2.1). Valem também estimativas semelhantes para as derivadas $\partial^\alpha \hat{f}_j(\cdot,\xi)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

$\square$

Proposição 3.4. *Não existe distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$ cujos coeficientes parciais de Fourier na variável x sejam os dados em (3.7).*

Demonstração. Sejam $t^* = (t'_*, t''_*) \in [0,2\pi]^n$ tal que $B(t^*) = M$ e $0 < \delta_0 < \delta$ tal que $|B(t)| < \lambda/2$ para todo $|t| < \delta_0$. Escrevemos $\hat{u}(t^*,\xi) = d_\xi(I_\xi + J_\xi)$ sendo

$$I_\xi = \int_{|t''_*-\sigma''|<\delta_0} e^{-\xi(B(0,t''_*-\sigma'')+K|t''_*-\sigma''|^2-\lambda)} d\sigma'',$$

e

$$J_\xi = \int_{|t''_* - \sigma''| \geq \delta_0} e^{-\xi(B(0,t''_* - \sigma'') + Kq(t''_* - \sigma'') - \lambda)} d\sigma''.$$

Como $|(0, t''_* - \sigma'')| = |t''_* - \sigma''| < \delta_0$ temos $B(0, t''_* - \sigma'') \leq \lambda/2$, o que implica a desigualdade

$$I_\xi \geq e^{\xi\lambda/2} \int_{|t''_* - \sigma''| < \delta_0} e^{-\xi K |t''_* - \sigma''|^2} d\sigma''.$$

Fazendo a mudança de variáveis $\tau = \sqrt{\xi K}(t''_* - \sigma'')$ na integral anterior obtemos

$$I_\xi \geq \frac{e^{\xi\lambda/2}}{(\xi K)^{r/2}} \int_{|\tau| < \delta_0 \sqrt{\xi K}} e^{-|\tau|^2} d\tau.$$

A sequência de números reais positivos $\mu_\xi = \displaystyle\int_{|\tau| < \delta_0 \sqrt{\xi K}} e^{-|\tau|^2} d\tau$ é crescente.

Pelo Lema 2.6 (da Seção 2.1) existe uma constante $C > 0$ tal que $C^{-1} \leq |d_\xi| \leq C$, para todo $\xi \geq 1$. Tomamos agora $\xi_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$e^{\xi\lambda/4} \geq \widetilde{C} \xi^{r/2}, \quad \forall \xi \geq \xi_0,$$

sendo $\widetilde{C} = \dfrac{CK^{r/2}}{\mu_1}$.

Multiplicando a desigualdade acima por $e^{\xi\lambda/4}$ obtemos

$$\frac{\mu_1}{CK^{r/2}} \frac{e^{\xi\lambda/2}}{\xi^{r/2}} \geq e^{\xi\lambda/4}, \quad \forall \xi \geq \xi_0.$$

Portanto, segue que

$$|\hat{u}(t^*, \xi)| \geq \frac{1}{C}(I_\xi + J_\xi) \geq \frac{1}{C} I_\xi \geq \frac{\mu_\xi}{CK^{r/2}} \frac{e^{\xi\lambda/2}}{\xi^{r/2}} \geq e^{\xi\lambda/4}, \quad \forall \xi \geq \xi_0.$$

donde concluímos que a sequência $\hat{u}(\cdot, \xi)$ não é uma sequência de coeficientes parciais de Fourier de nenhuma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^{n+1})$.

□

3.2 Um resultado sobre subníveis e superníveis

Sejam $1 \leq m \leq n$ e $b = \sum_{j=1}^n b_j dt_j \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$ uma 1-forma fechada com períodos $b_{10}, \ldots, b_{n0}$ racionalmente independentes tais que:

$$\begin{cases} b_j(t) = b_j(t_1, \ldots, t_m) & j = 1, \ldots, m \\ b_j(t) = b_j(t_{m+1}, \ldots, t_n) & j = m+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3.10}$$

Seja $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma primitiva global do *pull-back* Π^*b através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ que nesse caso coincide com o recobrimento minimal segundo a Definição 1.3 do primeiro capítulo. Como os períodos $b_{10}, \ldots, b_{n0}$ são racionalmente independentes, B recebe o nome de *função pseudoperiódica.* Essa nomenclatura é devida a Arnold (veja [A]).

Vamos denotar por $t = (t', t'')$ as coordenadas em $\mathbb{T}^n$ sendo $t' = (t_1, \ldots, t_m)$ e $t'' = (t_{m+1}, \ldots, t_n)$. Analogamente, $b_0 = (b_0', b_0'')$ sendo $b_0' = (b_{10}, \ldots, b_{m0})$ e $b_0'' = (b_{(m+1)0}, \ldots, b_{n0})$.

Existem funções suaves e 2π-periódicas $P_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e $P_2 : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$ tal que a função B pode ser escrita na seguinte forma:

$$B(t) = B_1(t') + B_2(t''),$$

na qual $B_1(t') = b_0' \cdot t' + P_1(t')$ e $B_2(t'') = b_0'' \cdot t'' + P_2(t'')$.

Considere as seguintes notações para os subníveis e superníveis das funções B, B_1 e B_2,

$$\Omega_s = \{t \in \mathbb{R}^n,\ B(t) < s\} \quad \text{e} \quad \Omega^s = \{t \in \mathbb{R}^n,\ B(t) > s\}, \quad s \in \mathbb{R},$$

e

$$\Omega_{j,s} = \{\tau,\ B_j(\tau) < s\} \quad \text{e} \quad \Omega_j^s = \{\tau,\ B_j(\tau) > s\}, \quad j = 1, 2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Na proposição a seguir, usaremos o seguinte resultado do trabalho [A]:

Se B é uma função pseudoperiódica suave, então cada subnível de B possui uma única componente conexa não limitada.

Proposição 3.5. *Sejam b a 1-forma definida em (3.10) com períodos racionalmente independentes e $B = B_1 + B_2$ uma primitiva global de Π^*b através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$. Então, todos os subníveis da função $B = B_1 + B_2$ são conexos em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, todos os subníveis da função B_1 são conexos em $\mathbb{R}^m$ ou todos os subníveis da função B_2 são conexos em $\mathbb{R}^{n-m}$.*

Demonstração. Suponha que B_1 e B_2 possuem subníveis desconexos. Sejam eles $\Omega_{1,r}$ e $\Omega_{2,s}$, com $r, s \in \mathbb{R}$. Pelo trabalho [A], os subníveis $\Omega_{1,r}$ e $\Omega_{2,s}$ possuem componentes conexas limitadas as quais denotamos por $\omega_1 \subset \Omega_{1,r}$ e por $\omega_2 \subset \Omega_{2,s}$. Assim, valem as seguintes propriedades:

- Se $\partial\omega_1$ denota a fronteira de ω_1 temos $\partial\omega_1 \subset \{t' \in \mathbb{R}^m,\ B_1(t') = r\}$, assim como $\partial\omega_2 \subset \{t'' \in \mathbb{R}^{m-n},\ B_2(t'') = s\}$;

- Se μ_1 denota o mínimo de B_1 sobre $\overline{\omega}_1$ e μ_2 o mínimo de B_2 sobre $\overline{\omega}_2$ então $r > \mu_1$ e $s > \mu_2$.

Considere o conjunto aberto $U = \omega_1 \times \omega_2$. Então, $B(t) = B_1(t') + B_2(t'') \geq \mu_1 + \mu_2 \doteq \mu$ para todo $t \in U$. Além disso, se $t = (t', t'') \in \partial U = \partial\omega_1 \times \overline{\omega}_2 \cup \overline{\omega}_1 \times \partial\omega_2$, então $B(t) = B_1(t') + B_2(t'') > \mu_1 + \mu_2 = \mu$, logo $\mu < \tilde{\mu} \doteq \min\{B(t);\ t \in \partial U\}$. Escolhemos agora $\mu < \delta < \tilde{\mu}$.

Afirmamos que o subnível $\Omega_\delta = \{t \in \mathbb{R}^n,\ B(t) < \delta\}$ é desconexo. De fato, escrevemos

$$\Omega_\delta = (U \cap \Omega_\delta) \cup (\Omega_\delta \setminus U),$$

e tomamos $t_* = (t'_*, t''_*) \in U$ tal que $B_1(t'_*) = \mu_1$ e $B_2(t''_*) = \mu_2$, assim $B(t_*) = \mu < \delta$ e, portanto, $t_* \in \Omega_\delta$ donde concluímos que $U \cap \Omega_\delta \neq \emptyset$. Temos também $\Omega_\delta \setminus U \neq \emptyset$, caso contrário $\Omega_\delta \subset U$ o que é um absurdo pois Ω_δ é não limitado.

Como $U \cap \Omega_\delta$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, ao mostrarmos que $\Omega_\delta \setminus U$ também é um aberto em $\mathbb{R}^n$ concluiremos nossa afirmação. Seja então $t \in \Omega_\delta \setminus U$. Existe uma vizinhança V de t em $\mathbb{R}^n$ tal que $V \cap U = \emptyset$, caso contrário teríamos $V_t \cap U \neq \emptyset$ para toda vizinhança V_t de t e dessa forma $t \in \partial U$, o que implicaria $B(t) \geq \tilde{\mu} > \delta$, o que é um absurdo uma vez que $t \in \Omega_\delta$.

Além disso, pela continuidade de B, existe uma vizinhança W de t tal que $W \subset \Omega_\delta$. Portanto, $V \cap W \neq \emptyset$ é um aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que $t \in V \cap W \subset \Omega_\delta \setminus U$.

Por outro lado, suponha que B_1 possui apenas subníveis conexos em $\mathbb{R}^m$. Dado $r \in \mathbb{R}$, vamos provar que o subnível $\Omega_r = \{t \in \mathbb{R}^n,\ B(t) < r\}$ é conexo por caminhos. De fato, sejam p e $q \in \Omega_r$. Vamos usar a notação $p = (p', p'')$ sendo $p' = (p_1, \ldots, p_m)$ e $p'' = (p_{m+1}, \ldots, p_n)$ e analogamente $q = (q', q'')$. Podemos supor que $B_2(p'') \leq B_2(q'')$, assim $B_1(q') + B_2(p'') \leq B_1(q') + B_2(q'') < r$ o que implica $(q', p'') \in \Omega_r$.

1º *Caminho:* Se $r_0 \doteq r - B_2(p'')$ obtemos $p', q' \in \Omega_{1,r_0}$. Como Ω_{1,r_0} é aberto e conexo, existe um caminho $\sigma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ contido em Ω_{1,r_0} tal que $\sigma_1(0) = p'$ e $\sigma_1(1) = q'$. Assim, se $\tilde{\sigma}_1 \doteq (\sigma_1, p'')$ segue que

$$B(\sigma_1(s), p'') = B_1(\sigma_1(s)) + B_2(p'') < r_0 + B_2(p'') = r, \quad \forall s \in [0,1],$$

ou seja, $\tilde{\sigma}_1$ é um caminho em $\mathbb{R}^n$ contido no subnível Ω_r que conecta os pontos $p = (p', p'')$ e (q', p'').

2º *Caminho:* Definimos agora o caminho $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{n-m}$ por

$$\gamma(s) = (sq_{m+1} + (1-s)p_{m+1}, \ldots, sq_n + (1-s)p_n).$$

Note que $\gamma(0) = p''$ e $\gamma(1) = q''$. Se $B(q', \gamma(s)) < r$ para todo $s \in [0,1]$, escolhemos $\sigma_2 = (q', \gamma)$ e a demonstração estará concluída tomando o caminho justaposto $\sigma = \tilde{\sigma}_1 + \sigma_2$. Caso isso não ocorra continuamos a construção.

Escolhemos $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que

$$B(q', \gamma(s)) < r + k(-2\pi(b_{10} + \cdots + b_{m0})), \quad \forall s \in [0,1].$$

Seja $K = (k, \ldots, k) \in \mathbb{Z}^m$. Então,

$$\begin{aligned} B(q' + 2\pi K, p'') &= B_1(q_1 + 2\pi k, \ldots, q_m + 2\pi k) + B_2(p'') \\ &= B_1(q') + 2\pi k(b_{10} + \cdots + b_{m0}) + B_2(p'') \\ &= B(q', p'') + 2\pi k(b_{10} + \cdots + b_{m0}) \\ &= B(q', \gamma(0)) + 2\pi k(b_{10} + \cdots + b_{m0}) < r. \end{aligned}$$

Portanto, $(q' + 2\pi K, p'') \in \Omega_r$ e $q' + 2\pi K \in \Omega_{1,r_0}$.

Como $q' + 2\pi K$ e $q' \in \Omega_{1,r_0}$, existe um caminho σ_2 em $\mathbb{R}^m$ contido no subnível Ω_{1,r_0}. Agora, analogamente à construção feita para o primeiro caminho $\tilde{\sigma}_1$, obtemos um caminho $\tilde{\sigma}_2$ contido em Ω_r conectando o ponto (q', p'') ao ponto $(q' + 2\pi K, p'')$.

3º *Caminho:* Considere $\sigma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definido por $\sigma_3 = (q' + 2\pi K, \gamma)$, sendo γ como anteriormente. Então

$$B(q' + 2\pi K, \gamma(s)) = B(q', \gamma(s)) + 2\pi k(b_{10} + \cdots + b_{m0}) < r, \quad \forall s \in [0,1].$$

Portanto, σ_3 é um caminho em $\mathbb{R}^n$ contido no subnível Ω_r conectando os pontos $(q' + 2\pi K, p'')$ e $(q' + 2\pi K, q'')$.

4º *Caminho:* Como $B_1(q') < r - B_2(q'') \doteq r_1$ temos $B_1(q' + 2\pi K) < B_1(q') < r_1$. Portanto, existe um caminho $\sigma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ contido no subnível Ω_{1,r_1} tal que $\sigma_4(0) = q' + 2\pi K$ e $\sigma_4(1) = q'$. Definimos $\tilde{\sigma}_4 = (\sigma_4, q'')$. Então,

$$B(\sigma_4(s), q'') < r_1 + B_2(q'') = r, \quad \forall s \in [0,1],$$

assim, $\tilde{\sigma}_4$ é um caminho em $\mathbb{R}^n$ contido no subnível Ω_r conectando $(q' + 2\pi K, q'')$ e $q = (q', q'')$.

Finalmente, o caminho justaposto formado pelos 4 caminhos anteriores está contido em Ω_r e conecta os pontos p e q.

□

Uma demonstração semelhante à feita para a proposição anterior garante que o mesmo ocorre como os superníveis, ou seja,

Proposição 3.6. *Sejam b a 1-forma definida em (3.10) com períodos racionalmente independentes e $B = B_1 + B_2$ uma primitiva global de $\Pi^* b$ através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$. Então, todos os superníveis da função $B = B_1 + B_2$ são conexos em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, todos os superníveis da função B_1 são conexos em $\mathbb{R}^m$ ou todos os superníveis da função B_2 são conexos em $\mathbb{R}^{n-m}$.*

Observação: No caso em que a 1-forma b possui períodos racionalmente dependentes podem não valer os resultados anteriores no recobrimento minimal de $\mathbb{T}^n$ com relação a b. De fato, seja $B : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$B(t_1, t_2) = -\cos t_1 + (\operatorname{sen} t_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} t_2).$$

Logo, todos os subníveis e superníveis da função $B_1(t_1) = -\cos t_1$ são conexos em $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{T}^1$. Por outro lado, pelo Lema 2.2, a função B possui subníveis e superníveis desconexos em $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ uma vez que $b_1(t_1) = \operatorname{sen} t_1$ e $b_2(t_2) = \cos t_2 - \sqrt{2}/2$ mudam de sinal.

3.3 Sistema parcialmente acoplado - um caso

Apresentamos nesta seção um sistema com um acoplamento mais forte. Obtemos condições necessárias e suficientes para a resolubilidade global desse sistema. Para isso, foram usados os resultados das duas seções anteriores e do trabalho [BK].

Considere o operador

$$\mathbb{L} = d_t + ib(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}, \tag{3.11}$$

sendo $b \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^{2n}; \mathbb{R})$ uma 1-forma fechada dada como segue:

$$b(t) = \sum_{j=1}^{n} b_{2j-1}(t_{2j-1}, t_{2j}) dt_{2j-1} + \sum_{j=1}^{n} b_{2j}(t_{2j-1}, t_{2j}) dt_{2j}. \tag{3.12}$$

Além disso, vamos supor que os períodos $b_{10}, \dots, b_{2n0}$ sejam racionalmente independentes, isto é, o posto do grupo de períodos da 1-forma b é igual a $2n$.

Seja $B : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ uma primitiva global do *pull-back* $\Pi^* b$ através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{T}^{2n}$. Então, a função B pode ser escrita na seguinte forma

$$B(t) = B_{12}(t_1, t_2) + B_{34}(t_3, t_4) + \cdots + B_{(2n-1)2n}(t_{2n-1}, t_{2n}). \tag{3.13}$$

Na demonstração da Proposição 3.8, apresentada a seguir, usamos resultados do trabalho [BK] que tratou da resolubilidade global do operador $\mathbb{L}$ definido em (3.11) no caso bidimensional; mais precisamente, o resultado provado foi o seguinte:

Teorema 3.7 (Bergamasco e Kirilov). *Sejam $b \in \bigwedge^1 C^\infty(\mathbb{T}^2; \mathbb{R})$ uma 1-forma fechada com períodos b_{10} e b_{20} racionalmente independentes e B uma primitiva global do pull-back $\Pi^* b$ através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Então, o operador $\mathbb{L}$ definido em (3.11) é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^3$ se, e somente se, os subníveis $\Omega_s = \{t \in \mathbb{R}^2,\ B(t) < s\}$ e superníveis $\Omega^s = \{t \in \mathbb{R}^2,\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Proposição 3.8. *Sejam b a 1-forma definida em (3.12) com períodos racionalmente independentes e B dada em (3.13) uma primitiva global do pull-back Π^*b através do recobrimento universal $\Pi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{T}^{2n}$. Então, o operador $\mathbb{L}$ definido em (3.11) é globalmente resolúvel em $\mathbb{T}^{2n+1}$ se, e somente se, os subníveis $\Omega_s = \{t \in \mathbb{R}^{2n},\ B(t) < s\}$ e superníveis $\Omega^s = \{t \in \mathbb{R}^{2n},\ B(t) > s\}$ são conexos para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Suponha que existe um subnível desconexo da função B em $\mathbb{R}^{2n}$. Então, pela Proposição 3.5 cada função $B_{(2j-1),2j}$, $j = 1, \ldots, n$, possui um subnível desconexo em $\mathbb{R}^2$. Caso exista um supernível desconexo de B, então cada função $B_{(2j-1)2j}$, $j = 1, \ldots, n$, também possui um supernível desconexo em $\mathbb{R}^2$.

Portanto, pelo trabalho [BK], existem difeomorfismos $\phi_1, \ldots, \phi_n$ em $\mathbb{T}^{2n}$ tais que cada ϕ_j age somente nas coordenadas t_{2j-1}, t_{2j} produzindo novas coordenadas de forma que o máximo da função $B_{(2j-1)2j}$ sobre o cubo $[0, 2\pi]^2_{t_{2j-1},t_{2j}}$ não ocorre na fronteira (ver Seção 5 de [BK]). Fazendo a composição desses difeomorfismos obtemos um sistema de coordenadas em $\mathbb{T}^{2n}$ de forma que o máximo da função B sobre o cubo $[0, 2\pi]^{2n}$ não ocorre na fronteira. Então, pelo Teorema 3.1 concluímos que $\mathbb{L}$ não é globalmente resolúvel em $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Passamos agora à demonstração da suficiência da proposição. Primeiramente obtemos caminhos de integração que serão convenientes para a construção de uma solução da equação $\mathbb{L}u = f$.

Lema 3.9. *Se todos os subníveis de B são conexos em $\mathbb{R}^{2n}$, então existe uma constante $C > 0$ tal que para cada $t \in [0, 2\pi]^{2n}$ e cada $\xi \in \mathbb{Z}$ existe um caminho poligonal $\gamma = \gamma(t, \xi)$ conectando os pontos t e $t + (2\pi, 0, \ldots, 0)$ com as seguintes propriedades:*

1. *$B(\tau) \leq B(t) + \dfrac{1}{1 + |\xi|}$ para todo $\tau \in \gamma(t, \xi)$;*
2. *O comprimento $|\gamma(t, \xi)| < C(1 + |\xi|)$.*

Demonstração. Como todos os subníveis de B são conexos em $\mathbb{R}^{2n}$, então pela Proposição 3.5 existe uma função $B_{(2j-1)2j}$, $j = 1, \ldots, n$, que possui todos os subníveis conexos em $\mathbb{R}^2$. Reordenando as coordenadas podemos assumir que $j = 1$, ou seja, todos os subníveis da função B_{12} são conexos em $\mathbb{R}^2$.

Vamos mostrar agora que existe uma faixa $S = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2;\ |b_{10}s_1 + b_{20}s_2| \leq \nu\}$ que contém todos os conjuntos de nível $B_{12}^{-1}\{B_{12}(\tau)\}$, $\tau \in [-2\pi, 4\pi] \times [0, 2\pi]$. Com efeito, considere a função 2π-periódica $P(s_1, s_2) = B_{12}(s_1, s_2) - b_{10}s_1 - b_{20}s_2$, dessa forma, se $s = (s_1, s_2) \in B_{12}^{-1}\{B_{12}(\tau)\}$ então

$$0 = B_{12}(\tau) - B_{12}(s) \leq 2\|P\|_\infty + b_{10}(\tau_1 - s_1) + b_{20}(\tau_2 - s_2), \quad \text{e}$$
$$0 = B_{12}(s) - B_{12}(\tau) \leq 2\|P\|_\infty + b_{10}(s_1 - \tau_1) + b_{20}(s_2 - \tau_2),$$

logo,

$$b_{10}s_1 + b_{20}s_2 \leq 2\|P\|_\infty + b_{10}\tau_1 + b_{20}\tau_2 \leq 2\|P\|_\infty + 4\pi|b_{10}| + 2\pi|b_{20}| \doteq \nu, \quad \text{e}$$
$$b_{10}s_1 + b_{20}s_2 \geq -2\|P\|_\infty + b_{10}\tau_1 + b_{20}\tau_2 \geq -2\|P\|_\infty - |b_{10}||\tau_1| - |b_{20}||\tau_2| \geq -\nu.$$

Fixemos $t = (t_1, \ldots, t_{2n}) \in [0, 2\pi]^{2n}$ e $\xi \in \mathbb{Z}$. Sejam $r = B_{12}(t_1, t_2) + 1/2(1 + |\xi|)$ e $\Omega_{1,r} = \{\tau \in \mathbb{R}^2;\ B_{12}(\tau) < r\}$. Afirmamos que o conjunto

$$K_r = \Omega_{1,r} \cap ([-2\pi, 4\pi] \times \mathbb{R}) \cap S$$

é limitado e conexo por caminhos. Antes de provar a afirmação feita, pelo Teorema 4.30 de [BK] é possível obter um sistema de coordenadas em $\mathbb{T}^{2n}$ tal que para cada $k \in \mathbb{Z}$ a função $\tau_2 \mapsto B_{12}(2\pi k, \tau_2)$ é decrescente.

Dando continuidade, uma vez que as faixas $[-2\pi, 4\pi] \times \mathbb{R}$ e S não são paralelas em $\mathbb{R}^2$ então K_r é limitado. Sejam agora $p, q \in K_r$, então existe um caminho σ contido no subnível $\Omega_{1,r}$ conectando p e q.

Se $\sigma \cap (-\infty, -2\pi) \times \mathbb{R} \neq \emptyset$, ou em outras palavras, o caminho σ sai pela esquerda da faixa $[-2\pi, 4\pi] \times \mathbb{R}$, então tome o primeiro ponto $p_0 \in \sigma$ e último ponto $q_0 \in \sigma$ (sobre a linha $-2\pi \times \mathbb{R}$) onde σ sai da faixa $[-2\pi, 4\pi] \times \mathbb{R}$ pela esquerda. Dessa forma, substituímos o segmento do caminho σ do ponto p_0 ao ponto q_0, pelo segmento de reta $[[p_0, q_0]] \subset \Omega_{1,r}$. Se o caminho σ sai pela direita da faixa $[-2\pi, 4\pi] \times \mathbb{R}$ repetimos o mesmo procedimento. Para concluir a demonstração de que K_r é conexo por caminhos, note que a reta $b_{10}s_1 + b_{20}s_2 = -\nu$ está contida no subnível $\Omega_{1,r}$, dessa forma, se o caminho σ sair da faixa S repetimos o procedimento usado anteriormente.

Seja D_0 a coleção de quadrados em $\mathbb{R}^2$ com lado 2π e com vértices em $2\pi\mathbb{Z}^2$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos por D_k a imagem de D_0 através da contração $\tau \mapsto 2^{-k}\tau$. Definimos agora os conjuntos

$$A_{kr} = \{Q \in D_k;\ Q \cap K_r \neq \emptyset\} \quad \text{e} \quad V_{kr} = \bigcup_{Q \in A_{kr}} Q.$$

Uma vez que K_r é limitado e conexo por caminhos então V_{kr} também possui estas propriedades. Como (t_1, t_2) e $(t_1, t_2) + (2\pi, 0) \in K_r$, então existe um caminho contido em V_{kr} conectando esses pontos. Seja $\gamma_0 : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$ esse caminho.

Construiremos um caminho poligonal a partir de γ_0 da seguinte forma: em cada quadrado $Q \in D_k$ tal que $Q \cap \gamma_0 \neq \emptyset$, tome o primeiro e o último ponto de intersecção. Ligando estes pontos obtemos uma poligonal γ_1 contida em V_{kr} conectando (t_1, t_2) e $(t_1, t_2) + (2\pi, 0)$.

Definimos agora o seguinte caminho poligonal em $\mathbb{R}^{2n}$. Seja $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ definido por $\gamma = (\gamma_1, t_3, t_4, \ldots, t_{2n})$. Vejamos que $\gamma = \gamma(t, \xi)$ possui as propriedades 1 e 2 enunciadas no lema.

Seja $s = (s_1, s_2, t_3, t_4, \ldots, t_{2n}) \in \gamma(t, \xi)$, assim $(s_1, s_2) \in \gamma_1 \subset V_{kr}$, ou seja, (s_1, s_2) pertence a algum quadrado $Q \in D_k$ tal que $Q \cap K_r \neq \emptyset$. Tome então $(s_1', s_2') \in Q \cap K_r$. Portanto, $B_{12}(s_1', s_2') < r$ e como a diagonal de cada quadrado da coleção D_k tem comprimento $(\pi\sqrt{2})2^{-(k-1)}$, segue que $|(s_1, s_2) - (s_1', s_2')| \leq (\pi\sqrt{2})2^{-(k-1)}$.

Vamos agora escolher um $k \in \mathbb{N}$ conveniente: tomamos o único $k \in \mathbb{N}$ que satisfaz

$$2^{k-1} < 4\pi\sqrt{2}(1 + |\xi|)\|b\|_\infty \leq 2^k, \tag{3.14}$$

logo,

$$\frac{1}{4(1 + |\xi|)} < \frac{\pi\sqrt{2}\|b\|_\infty}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2(1 + |\xi|)}.$$

Sejam $s' = (s_1', s_2', t_3, t_4, \ldots, t_{2n})$ e $r_0 = r + B_{34}(t_3, t_4) + \cdots + B_{(2n-1)2n}(t_{2n-1}, t_{2n})$, então

$$\begin{aligned}
B(s) &\leq |B(s) - B(s')| + B(s') \leq |B_{12}(s_1, s_2) - B_{12}(s_1', s_2')| + r_0 \\
&\leq \|b\|_\infty |(s_1, s_2) - (s_1', s_2')| + r_0 \leq \|b\|_\infty \frac{\pi\sqrt{2}}{2^{k-1}} + r_0 \\
&\leq \frac{1}{2(1 + |\xi|)} + r_0 = \frac{1}{2(1 + |\xi|)} + \Big(\frac{1}{2(1 + |\xi|)} + B(t)\Big) \\
&= B(t) + \frac{1}{1 + |\xi|},
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do item 1.

Além disso, se N é o número de quadrados em D_0 que intersectam K_r então o número de quadrados em D_k que intersectam o conjunto K_r é no máximo $4^k N$. Assim, por (3.14), o comprimento $|\gamma(t, \xi)|$ satisfaz

$$|\gamma(t, \xi)| = |\gamma_1(t, \xi)| \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{2^{k-1}} 4^k N = (4\pi N\sqrt{2})2^{k-1} < (4\pi N\sqrt{2})4\pi\sqrt{2}\|b\|_\infty(1 + |\xi|),$$

o que conclui a demonstração do lema.

□

Lema 3.10. *Se todos os superníveis de B são conexos em $\mathbb{R}^{2n}$, então existe uma constante $C > 0$ tal que para cada $t \in [0, 2\pi]^{2n}$ e cada $\xi \in \mathbb{Z}$ existe um caminho poligonal $\gamma = \gamma(t, \xi)$ conectando os pontos t e $t - (2\pi, 0, \ldots, 0)$ com as seguintes propriedades:*

1. $B(\tau) \geq B(t) - \dfrac{1}{1 + |\xi|}$ *para todo* $\tau \in \gamma(t, \xi)$;

2. O comprimento $|\gamma(t,\xi)| < C(1+|\xi|)$.

Demonstração. Basta considerar a função $\widetilde{B} = -B$ e aplicar mesmas ideias do lema anterior.

$\square$

Observação: Com pequenas correções nos caminhos $\gamma(t,\xi)$ construídos anteriormente, podemos supor que eles são suaves e ainda possuem as propriedades enunciadas nos Lemas 3.9 e 3.10.

Construção da Solução: seja $f \in \mathbb{E}$. Vamos usar série parcial de Fourier na variável x para construir uma solução suave u da equação $\mathbb{L}u = f$. Substituindo as séries formais

$$u(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi)e^{i\xi x} \quad \text{e} \quad f(t,x) = \sum_{\xi\in\mathbb{Z}} \hat{f}(t,\xi)e^{i\xi x}$$

na equação $\mathbb{L}u = d_t u + ib(t)\wedge \frac{\partial}{\partial x}u = f$, obtemos para cada $\xi \in \mathbb{Z}$

$$(d_t - \xi b(t)\wedge)\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(t,\xi), \quad t \in \mathbb{R}^{2n},$$

logo,

$$d_t(e^{-\xi B}\hat{u}(\cdot,\xi)) = e^{-\xi B}\hat{f}(\cdot,\xi).$$

Ou seja, $e^{-\xi B}\hat{f}(\cdot,\xi)$ é uma 1-forma exata em $\mathbb{R}^{2n}$ e uma solução geral da equação acima (em $\mathbb{R}^{2n}$) é dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = \int_{t_0}^{t} e^{-\xi(B(\tau)-B(t))}\hat{f}(\tau,\xi)d\tau + \hat{u}(t_0,\xi)e^{-\xi(B(t_0)-B(t))}.$$

Uma vez que a integral anterior não depende do caminho, escolhemos curvas suaves $\gamma_\pm : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ tais que $\gamma_\pm(0) = t_0$ e $\gamma_\pm(2\pi) = t_0 \mp (2\pi,0,\dots,0)$ cujas projeções no toro $\mathbb{T}^{2n}$ são curvas não homologas à zero. As curvas γ_+ e γ_- serão escolhidas dependendo do sinal de ξ. Portanto, quando $\xi \neq 0$ temos

$$\hat{u}(t_0,\xi)e^{-\xi B(t_0)} = \frac{1}{e^{\pm 2\pi\xi b_{10}} - 1}\int_0^{2\pi} e^{-\xi B(\gamma_\pm(\sigma))}\hat{f}(\gamma_\pm(\sigma),\xi)\gamma_\pm'(\sigma)d\sigma,$$

e assim obtemos

$$\hat{u}(\gamma_\pm(s),\xi) = \int_0^s g(\sigma,\xi)d\sigma + \frac{1}{e^{\pm 2\pi\xi b_{10}} - 1}\int_0^{2\pi} g(\sigma,\xi)d\sigma, \tag{3.15}$$

sendo $g(\sigma,\xi) = e^{-\xi[B(\gamma_\pm(\sigma))-B(\gamma_\pm(s))]}\hat{f}(\gamma_\pm(\sigma),\xi)\gamma_\pm'(\sigma)$. Para $\xi = 0$ temos

$$\hat{u}(\gamma_+(s),0) = \int_0^s \hat{f}(\gamma_+(\sigma),0)\gamma_+'(\sigma)d\sigma. \tag{3.16}$$

Por fim, considere u definida pela série

$$u(t,x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \hat{u}(t,\xi) e^{i\xi x},$$

na qual os coeficientes $\hat{u}(\cdot,\xi)$ são dados por (3.15) e (3.16). Para $\xi \geq 0$ escolhemos γ_+ a curva obtida no Lema 3.10 e para $\xi < 0$ escolhemos γ_- a curva obtida no Lema 3.9. Dessa forma, u é uma função C^∞ e é uma solução da equação $\mathbb{L}u = f$. A demonstração desse fato é análoga a feita no caso bidimensional que encontra-se em [BK].

$\square$

Referências Bibliográficas

[A] V. I. Arnold, *Topological and ergodic properties of closed* 1*-forms with incommensurable periods*, Functional Analysis and its Applications, **25** (1991), 81–90.

[B] A. P. Bergamasco, *Remarks about global analytic hypoellipticity*, Transactions of the American Mathematical Society, **351** (1999), 4113–4126.

[BCH] S. Berhanu, P. Cordaro e J. Hounie, *An Introduction to Involutive Structures,* Cambridge University Press, New York, 2008.

[BCM] A. P. Bergamasco, P. Cordaro e P. Malagutti, *Globally hypoelliptic systems of vector fields*, Journal of Functional Analysis, **114** (1993), 267–285.

[BCP1] A. P. Bergamasco, P. Cordaro e G. Petronilho, *Global Solvability for certain classes of undetermined of vector fields*, Math. Zeitschrift, **223** (1996), 261–274.

[BCP2] A. P. Bergamasco, P. Cordaro e G. Petronilho, *Global solvability for a class of complex vector fields on the two-torus*, Communications in Partial Differential Equations, **29** (2004), 785–819.

[BK] A. P. Bergamasco e A. Kirilov, *Global solvability for a class of overdetermined systems*, Journal of Functional Analysis, **252** (2007), 603–629.

[BKNZ] A. P. Bergamasco, A. Kirilov, W. Nunes e S. Zani, *On the global solvability for overdetermined systems*, Transactions of the American Mathematical Society, to appear.

[BNZ1] A. P. Bergamasco, W. Nunes e S. Zani, *Global analytic hypoellipticity and pseudoperiodic functions*, Matemática Contemporânea, **18** (2000), 43–57.

[BNZ2] A. P. Bergamasco, W. Nunes e S. Zani, *Global properties for a class of overdetermined systems*, Journal of Functional Analysis, **200** (2003), 31–64.

[BP] A. P. Bergamasco e G. Petronilho, *Global solvability of a class of involutive systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **233** (1999), 314–327.

[BZ] A. P. Bergamasco e S. Zani, *Prescribing analytic singularities for solutions of a class of vector fields on the torus*, Transactions of the American Mathematical Society, **357** (2005), 4159–4174.

[CH] F. Cardoso e J. Hounie, *Global solvability of an abstract complex*, Proceedings of the American Mathematical Society, **65** (1977), 117–124.

[H] J. Hounie, *Globally hypoelliptic and globally solvable first order evolution equations*, Transactions of the American Mathematical Society, **252** (1979), 233–248.

[MMST] F. Martinez, C. Moreira, N. Saldanha e E. Tengan, *Teoria dos Números, um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, Projeto Euclides, IMPA, 2010.

[T1] F. Treves, *Study of a model in the theory of complexes of pseudodifferential operators*, Annals of Mathematics, (2) **104** (1976), 269–324.

[T2] F. Treves, *Hypoanalytic Structures (Local Theory)*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

Índice Remissivo