

---

A obstrução de Euler de uma função

*Daiane Alice Henrique*

---

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

## A obstrução de Euler de uma função

**Daiane Alice Henrique**

*Orientador:* Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Júnior

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

**USP – São Carlos**  
**Março de 2013**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H518o Henrique, Daiane Alice  
A obstrução de Euler de uma função / Daiane Alice  
Henrique; orientador Nivaldo de Góes Grulha Júnior. --  
São Carlos, 2013.  
82 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em  
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e  
de Computação, Universidade de São Paulo, 2013.

1. Obstrução de Euler de uma função. 2. Obstrução de  
Euler. 3. Número de Milnor. 4. Modificação de Nash.  
5. Estratificação de Whitney. I. de Góes Grulha  
Júnior, Nivaldo, orient. II. Título.

*Aos meus pais José e Natália.*  
*Aos meus irmãos Débora e Deivid.*  
*E ao meu amado Andrews.*



"Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real".

Lobachevsky



# Agradecimentos

---

Sem o apoio e o incentivo das pessoas que amo, não poderia de modo algum realizar este sonho, agradeço a todos vocês que me auxiliaram nessa caminhada, em especial...

Agradeço a Deus, pela minha vida, pelas forças renovadas todos os dias e por mais esse sonho realizado.

Aos meus pais, por todos os ensinamentos, por todo amor e por toda a dedicação.

Aos meus irmãos, por todo apoio, pela compreensão e carinho.

Ao meu noivo Andrews, por todo o incentivo e amor, obrigada por acreditar em mim mais do que eu mesma.

Às amigas Amanda e Carol, pela companhia nos estudos e pela grande amizade.

Às amigas Camila e Thaís, pela disponibilidade e por toda ajuda.

Ao meu orientador Nivaldo, pela confiança e dedicação. Por sua paciência e pelos grandes ensinamentos.

À professora Eliris, pela amizade, por todo apoio e por sempre ter me incentivado a lutar por esse sonho.

Aos professores e funcionários do departamento de Matemática da UNESP/Rio Claro e do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da USP/São Carlos.

Aos amigos que conheci durante minha graduação na Unesp/Rio Claro e durante o mestrado na USP/São Carlos. Muito obrigada!

À Fapesp pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.





# Resumo

---

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a obstrução de Euler de uma função, este conceito foi definido por J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran e J. Seade, e generaliza dois conceitos importantes, a obstrução de Euler definida por R. D. MacPherson assim como o número de Milnor de uma função.

O resultado principal deste trabalho mostra a relação existente entre a obstrução de Euler e a obstrução de Euler de uma função.



# Abstract

---

Our goal in this work is to study the Euler obstruction of a function, this concept was defined by J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran and J. Seade, and it generalizes two important concepts, the Euler obstruction defined by R. D. MacPherson and the Milnor number of a function.

The main result of this study shows the relation between the Euler obstruction and the Euler obstruction of a function.



# Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>17</b>
1.1 Variedades diferenciáveis . . . . .	17
1.2 Homotopia . . . . .	30
1.3 Homologia singular . . . . .	32
1.4 Cohomologia . . . . .	37
1.5 Teoria de singularidades . . . . .	44
1.6 Variedades algébricas e espaços analíticos complexos . . . . .	45
<b>2 Obstrução de Euler de <math>f</math></b>	<b>51</b>
2.1 Estratificação de Whitney . . . . .	51
2.2 Modificação de Nash . . . . .	54
2.3 Obstrução de Euler . . . . .	56
2.4 Uma Fórmula Topológica . . . . .	59
2.5 Obstrução de Euler de $f$ . . . . .	60
<b>3 Teorema Principal</b>	<b>67</b>
3.1 Teorema Principal . . . . .	67
3.2 Lemas . . . . .	73
3.3 Demonstração do Lema 3.1.2 . . . . .	77
<b>4 Conclusão</b>	<b>79</b>



# Introdução

---

A obstrução local de Euler, ou simplesmente obstrução de Euler, foi introduzida por R. D. MacPherson em [16] como uma de suas principais ferramentas na demonstração da conjectura de Deligne e Grothendieck sobre a existência e unicidade de classes características de variedades singulares. Uma definição equivalente deste conceito foi dada por J.-P. Brasselet e M.-H. Schwartz em [2] utilizando teoria de obstrução, neste trabalho os autores provaram que as classes de Schwartz de uma variedade singular coincide com as classes de MacPherson.

Usando a definição de R. D. MacPherson, a obstrução de Euler não é facilmente computável, o que motivou a obtenção de fórmulas que facilitassem o seu cálculo. Em [4], os autores apresentaram uma fórmula de natureza topológica para a obstrução de Euler, mais precisamente essa fórmula diz que a obstrução de Euler de  $X$  em 0 satisfaz:

$$Eu_X(0) = \sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_i),$$

onde  $X \subset U$  é um representante de  $(X, 0)$  germe de espaço analítico complexo, equidimensional, com  $U$  aberto de  $\mathbb{C}^n$ ,  $\{V_i\}$  uma estratificação de Whitney de  $X$ ,  $\ell : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  uma forma linear genérica,  $\mathbb{B}_\varepsilon$  é uma pequena bola fechada em torno da origem em  $\mathbb{C}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  está suficientemente próximo a origem e  $Eu_X(V_i)$  é a obstrução de Euler de  $X$  em qualquer ponto do estrato  $V_i$ .



Esta fórmula é na realidade equivalente a dizer que a obstrução de Euler, como uma função construtível em  $X$ , satisfaz a chamada condição local de Euler com respeito a uma forma linear genérica.

Uma sequência natural deste resultado é o trabalho [1], de J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran e J. Seade, onde um dos objetivos é investigar o que impede a obstrução de Euler de satisfazer a condição local de Euler se trocarmos a forma linear genérica por uma função  $f$  com singularidade isolada na origem. Este "defeito" que aparece na nova fórmula é chamado de obstrução de Euler de uma função.

Em certos aspectos, a obstrução de Euler de uma função é uma generalização do importante invariante da Teoria de Singularidades, o número de Milnor.

No capítulo 1, apresentaremos algumas definições básicas que serão utilizadas ao longo do texto. Procuramos nos limitar ao que realmente é necessário para a compreensão dos capítulos seguintes.

Nosso objetivo no capítulo 2 é expor os estudos referentes à obstrução de Euler de uma função. A seção 2.2 traz as definições de modificação de Nash  $\tilde{X}$  de  $X$  e de fibrado de Nash  $\tilde{T}$  sobre a modificação de Nash  $\tilde{X}$ , que serão essenciais nas definições de obstrução de Euler e obstrução de Euler de uma função. Na seção 2.3, definiremos a obstrução de Euler e na seção 2.4 exibiremos uma demonstração de uma fórmula topológica para essa.

Na última seção deste capítulo, estudaremos a obstrução de Euler de uma função, denotada por  $Eu_{f,X}(0)$ , onde  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função analítica com singularidade isolada na origem.  $Eu_{f,X}(0)$  é a obstrução para se construir uma seção de  $\tilde{T}$  que estenda o levantamento do campo  $\bar{\nabla}_X f$ , que é um campo homotópico ao campo gradiente conjugado de  $f$  em  $X$ .

O capítulo 3 é totalmente dedicado à demonstração do teorema principal de [1], resultado que compara a obstrução de Euler e a obstrução de Euler de uma função pela fórmula

$$Eu_V(0) = \left( \sum \chi(V_\alpha \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_V(V_\alpha) \right) + Eu_{f,V}(0).$$

A demonstração deste resultado é bastante técnica e por isso este capítulo conta com a demonstração de vários lemas.

---

# Preliminares

---

Temos como objetivo para este capítulo apresentar uma breve introdução dos conceitos que utilizaremos neste trabalho, buscando proporcionar os principais resultados necessários para a compreensão do tema que abordaremos.

## 1.1 Variedades diferenciáveis

Nesta seção, apresentaremos a definição de variedades diferenciáveis, analisaremos algumas de suas propriedades e veremos alguns conceitos importantes relacionados a variedades, que serão fundamentais para o desenvolvimento de nosso trabalho.

**Definição 1.1.1.** *Seja  $M$  um espaço topológico. Um sistema de coordenadas locais ou uma carta em  $M$  é um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  de um subconjunto aberto  $U \subset M$  sobre um aberto  $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ .*

**Definição 1.1.2.** *Um atlas  $\mathcal{U}$   $m$ -dimensional de um espaço topológico  $M$  é uma família de sistemas de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ , tal que os domínios dos sistemas de coordenadas cubram  $M$ .*

**Definição 1.1.3.** *Dados os sistemas de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  no espaço topológico  $M$ , tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ , então o homeomorfismo*

$$\phi_{\varphi\psi} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

*é chamado mudança de coordenadas.*

**Observação 1.1.4.** *Seja a mudança de coordenadas  $\phi_{\varphi\psi} = \psi \circ \varphi^{-1}$ , então  $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1} = \phi_{\psi\varphi}$  é também uma mudança de coordenadas.*

**Definição 1.1.5.** *Um atlas  $\mathcal{U}$  em um espaço topológico  $M$  é diferenciável de classe  $C^k$ , se todas as mudanças de coordenadas  $\phi_{\varphi\psi}$  forem aplicações diferenciáveis de classe  $C^k$ .*

**Observação 1.1.6.** *Da Observação 1.1.4 e da Definição 1.1.5 segue que em um atlas diferenciável  $\mathcal{U}$  todas as mudanças de coordenadas  $\phi_{\varphi\psi}$  são difeomorfismos.*

**Definição 1.1.7.** *Uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional de classe  $C^k$  é um par  $(M, \mathcal{U})$ , em que  $M$  é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável e  $\mathcal{U}$  é um atlas  $m$ -dimensional de classe  $C^k$ .*

Como vimos na Observação 1.1.6 em um atlas diferenciável  $\mathcal{U}$  todas as mudanças de coordenadas  $\phi_{\varphi\psi}$  são difeomorfismos. É exatamente esta propriedade que nos permite transportar todas as noções do Cálculo Diferencial do  $\mathbb{R}^m$  para as variedades diferenciáveis.

Seja  $M$  uma variedade de classe  $C^k$  e seja  $p$  um ponto de  $M$ . Indicamos por  $C_p$  o conjunto de todos os caminhos  $\lambda : I \rightarrow M$ , definidos em um intervalo aberto  $I$ , contendo 0, tais que  $\lambda(0) = p$  e  $\lambda$  é diferenciável em 0 (ver Exemplo 3, p. 132, [15]). Diremos que dois caminhos  $\lambda, \mu \in C_p$  são equivalentes, e escreveremos  $\lambda \sim \mu$ , quando existir um sistema de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , com  $p \in U$ , tal que  $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$ . Como as mudanças de coordenadas são difeomorfismos, a igualdade  $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \mu)'(0)$  será verdadeira para todo sistema de coordenadas  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ ,  $p \in U$ . Resulta daí que a relação acima é uma relação de equivalência.

O vetor velocidade  $\lambda'$  de um caminho  $\lambda \in C_p$  é, por definição, a classe de equivalência de  $\lambda$ , ou seja,  $\lambda' = \{\mu \in C_p : \mu \sim \lambda\}$ .

**Definição 1.1.8.** *Definimos o espaço tangente à variedade  $M$  no ponto  $p$  como sendo o conjunto quociente  $C_p/\sim$ . Denotaremos o espaço tangente à variedade  $M$  no ponto  $p$  por  $T_pM$ .*

É possível mostrar que o espaço tangente à variedade diferenciável  $M$  em um ponto  $p \in M$  é um espaço vetorial de mesma dimensão que  $M$ .

Dada uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional  $M$ , podemos obter uma nova variedade  $2m$ -dimensional a partir de uma “união” dos espaços tangentes  $T_pM$ , em todos os pontos  $p \in M$ .

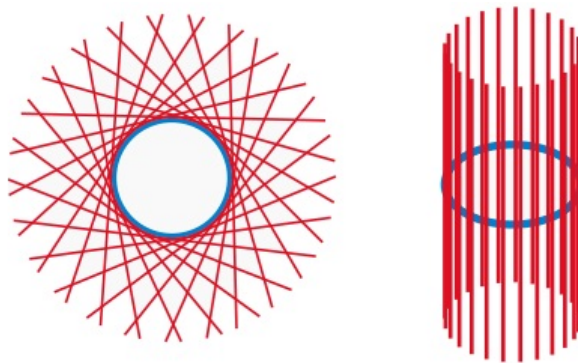
**Definição 1.1.9.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$ . O conjunto*

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM$$

*de todos os espaços tangente  $T_pM$ , com  $p \in M$ , “colados” de uma maneira natural é chamado de fibrado tangente de  $M$ .*

**Proposição 1.1.10** ([14], p. 98). *Dada uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional  $M$ , o fibrado tangente  $TM$  tem naturalmente a estrutura de uma variedade  $2m$ -dimensional.*

Informalmente, o fibrado tangente de uma variedade é obtido por considerar-se todos os espaços tangentes, e reuní-los em um conjunto diferenciável e sem sobreposição, como ilustra a Figura 1.1 onde a variedade em questão é o círculo unitário em  $\mathbb{R}^2$ .



**Figura 1.1:** Representação do fibrado tangente de  $S^1$

Agora, que já vimos a definição de espaço vetorial tangente, podemos definir o conceito de diferenciabilidade de uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  entre variedades diferenciáveis,

utilizando nosso conhecimento prévio a cerca das aplicações diferenciáveis definidas em um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^m$  com valores em  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.1.11.** *Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis e uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ , dizemos que  $f$  é diferenciável em  $p \in M$  se existem cartas  $\varphi : U_1 \rightarrow V_1$  para  $M$  com  $p \in U_1$  e  $\psi : U_2 \rightarrow V_2$  para  $N$  com  $f(U_1) \subset U_2$  tal que  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  é diferenciável em  $\varphi(p)$ . Diremos simplesmente que  $f$  é diferenciável se ela o for em todos os pontos de  $M$ . E chamaremos  $f$  uma aplicação de classe  $C^k$  quando  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  for de classe  $C^k$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 V_1 & \xrightarrow{\psi \circ f \circ \varphi^{-1}} & V_2
 \end{array}$$

Podemos provar que a definição acima não depende das escolhas das parametrizações  $\varphi$  e  $\psi$ , sendo então coerente.

**Teorema 1.1.12** ([14], Lema 2). *Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional conexa. Dados dois pontos quaisquer  $p, q \in M$ , existe uma carta  $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $M$ , com  $p, q \in V$ , tal que,  $\varphi(V) = \mathbb{R}^n$ .*

Nem sempre é fácil verificar se um espaço topológico  $M$  é uma variedade diferenciável, porém, existe um importante resultado relacionado ao conceito de *valor regular* que nos ajuda a decidir se  $M$  é uma variedade diferenciável.

**Definição 1.1.13.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional,  $N$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Dizemos que:*

- (1)  *$f$  é uma imersão em  $p$  se a aplicação derivada  $df_p$  é injetiva (portanto  $n \geq m$ ) em  $p \in M$ . Isto é, o posto da matriz jacobiana  $[Jf(p)]_{n \times m}$  é igual a  $m$ ;*
- (2)  *$f$  é uma submersão em  $p$  se a aplicação derivada  $df_p$  é sobrejetora (portanto  $m \geq n$ ) em  $p \in M$ . Isto é, o posto da matriz jacobiana  $[Jf(p)]_{n \times m}$  é igual a  $n$ .*

Se em  $p \in M$  a aplicação  $f : M \rightarrow N$  for uma submersão,  $p$  é dito *ponto regular* de  $f$ . Um ponto  $q \in N$  é chamado *valor regular* de  $f$  se sua imagem inversa  $f^{-1}(q)$  só contém pontos regulares.

Se em  $p \in M$  a aplicação  $f : M \rightarrow N$  não é submersão e nem imersão, então  $p$  é dito *ponto singular* de  $f$  e  $f(p)$  é dito um valor singular de  $f$ .

**Teorema 1.1.14** ([15], Proposição 1). *Sejam  $N$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional,  $P$  uma variedade diferenciável  $p$ -dimensional,  $f : N \rightarrow P$  uma aplicação diferenciável e  $p \in P$  um valor regular de  $f$ . Então,  $f^{-1}(p) = M$  é uma subvariedade  $(n-p)$ -dimensional de  $N$  e dado  $q \in M$ , temos  $T_q M = \text{Ker}(df_q)$ , onde  $df_q$  representa a aplicação derivada de  $f$  no ponto  $q$ .*

Dada uma aplicação  $f : M \rightarrow N$  de classe  $C^1$ , existe um resultado importantíssimo acerca dos valores regulares da aplicação  $f$ , este resultado é conhecido como Teorema de Sard.

**Teorema 1.1.15** (Teorema de Sard). *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação de classe  $C^1$ , o subconjunto formado pelos valores regulares de  $f$  é denso em  $N$ .*

Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis,  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável e um ponto  $p \in N$  vimos, no Teorema 1.1.14, que uma condição suficiente para que  $f^{-1}(p)$  seja uma subvariedade de  $M$  é que  $p$  seja um valor regular de  $f$ . Deste fato é natural que façamos a seguinte pergunta: dada  $S \subset N$  uma subvariedade de  $N$ , em que condições a imagem inversa  $f^{-1}(S)$  é uma subvariedade de  $M$ ? Uma resposta a esta questão é dada pela noção de *transversalidade*. Trata-se de uma generalização natural do conceito de valor regular.

**Definição 1.1.16.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional,  $N$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional,  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável e  $P \subset N$  uma subvariedade  $p$ -dimensional de  $N$ , dizemos que  $f$  é transversal à  $P$  no ponto  $q \in f^{-1}(P)$  quando*

$$df_q(T_q M) + T_{f(q)} P = T_{f(q)} N$$

ou seja, quando a imagem de  $df_q$  junto com o espaço tangente à  $P$  em  $f(q)$  geram todo  $T_{f(q)}N$ . Dizemos ainda que  $f$  é transversal à  $P$  se,  $f$  é transversal à  $P$  em  $q$ , para todo ponto  $q \in f^{-1}(P)$ .

**Teorema 1.1.17** ([15], Proposição 4). *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional,  $N$  uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional,  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável e  $P \subset N$  uma subvariedade  $p$ -dimensional de  $N$ . Se a aplicação  $f$  é transversal à subvariedade  $P$  então, ou  $f^{-1}(P) = \emptyset$  ou  $f^{-1}(P)$  é uma subvariedade  $(m - n + p)$ -dimensional de  $M$ .*

**Corolário 1.1.18** ([15], Corolário 1). *Seja  $f : M \rightarrow N$  uma submersão, então para toda variedade  $P \subset N$ , ou  $f^{-1}(P) = \emptyset$  ou  $f^{-1}(P)$  é uma subvariedade de  $M$ .*

O conceito de transversalidade é de grande importância, tendo várias aplicações, como, por exemplo, o teorema que apresentaremos a seguir.

**Teorema 1.1.19.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável. Consideremos um ponto  $a \in \mathbb{R}^m$ , um vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  em  $\mathbb{R}^m$ , e a reta  $\Delta_a = \{a + tv : t \in \mathbb{R}\}$ , que é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^m$ . Definamos a aplicação  $\tilde{f} : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dada por*

$$\tilde{f}(p, t) = f(p) + tv.$$

*Nessas condições,  $f$  é transversal à  $\Delta_a$  se, e somente se,  $a \in \mathbb{R}^m$  é valor regular de  $\tilde{f}$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varphi : V \rightarrow U$  uma carta de  $M$ , se  $p \in V$ , representaremos por  $[Jf(p)]_{m \times m}$  a matriz jacobiana de  $f$ , calculada no ponto  $p$ . As colunas de  $[Jf(p)]$  são os vetores imagens, pela aplicação linear  $df_p$ , dos vetores da base de  $T_pM$  associada a carta  $\varphi$ .

Acrescentemos à direita da matriz  $[Jf(p)]$  a coluna formada pelas componentes do vetor  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^m$ , e indiquemos a matriz assim obtida com o símbolo  $[Jf(p), \vec{v}]_{m \times m+1}$ . Observemos que  $[Jf(p), \vec{v}]$  é exatamente a matriz jacobiana da aplicação  $\tilde{f}$ , calculada no ponto  $(p, t) \in M \times \mathbb{R}$ . Assim, se  $f$  é transversal à  $\Delta_a$  para todo  $p \in M$ , tal que  $f(p) \in \Delta_a$ , então

$$df_p(T_pM) + T_{f(p)}\Delta_a = \mathbb{R}^m$$

e notemos que  $T_{f(p)}\Delta_a = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$ .

Mas, dado um ponto  $(p, h) \in M \times \mathbb{R}$ , temos

$$d\tilde{f}_{(p,h)}(T_pM \times \mathbb{R}) = df_p(T_pM) + tv, \quad \text{onde } t \in \mathbb{R}.$$

Da condição de transversalidade, temos que  $d\tilde{f}_{(p,h)}(T_pM \times \mathbb{R}) = df_p(T_pM) + tv = \mathbb{R}^m$ , onde  $t \in \mathbb{R}$ , daí decorre que a matriz  $[Jf(p), \vec{v}]$  tem posto igual  $m$ . Por fim notemos que, se  $p \in M$  é tal que  $\tilde{f}(p, t) = a$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ , então  $\tilde{f}(p, t) = f(p) + t \vec{v} = a$ , o que implica que  $f(p) \in \Delta_a$ . Logo, o ponto  $a \in \mathbb{R}^m$  é um valor regular de  $\tilde{f}$ .

Por outro lado, suponhamos que o ponto  $a \in \mathbb{R}^m$  é valor regular de  $\tilde{f}$ , então para todo ponto  $(p, t) \in \tilde{f}^{-1}(a)$ , temos  $d\tilde{f}_{(p,t)}(T_pM \times \mathbb{R}) = df_p(T_pM) + tv = \mathbb{R}^m$ . Mas, se o ponto  $(p, t)$  pertence a  $\tilde{f}^{-1}(a)$  significa que  $f(p) = a - tv$ , ou seja, que  $f(p) \in \Delta_a$ . Portanto,  $f$  é transversal à  $\Delta_a$ .  $\square$

Apresentaremos a seguir a definição de orientação sobre espaços vetoriais. Utilizaremos esta definição e o conceito de espaço tangente para definirmos orientação sobre variedades.

Suponha que  $V$  é um espaço vetorial real de dimensão finita e  $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$  é uma base ordenada de  $V$ . Se  $\beta' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$  é outra base ordenada de  $V$ , então existe um único isomorfismo  $I : V \rightarrow V$ , tal que  $I(\beta) = \beta'$ , a saber

$$I(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 v'_1 + \dots + \alpha_n v'_n.$$

Dizemos que  $\beta$  e  $\beta'$  tem orientação equivalente se o determinante da transformação linear  $I$  é positivo. Isto é, se escrevemos

$$\begin{aligned} I(v_1) &= v'_1 = a_{11}v_1 + \dots + a_{n1}v_n \\ &\vdots \\ I(v_n) &= v'_n = a_{1n}v_1 + \dots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$



então,  $\beta$  e  $\beta'$  têm orientação equivalente se  $\det[I]_\beta > 0$ , onde

$$[I]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observemos que como  $I$  é um isomorfismo  $\det[I]_\beta \neq 0$ . Note também, que  $[I]_\beta = M_\beta^{\beta'}$ , ou seja, a matriz da transformação  $I$  com relação a base  $\beta$  é igual a matriz de mudança de base  $\beta$  para  $\beta'$ . Então, utilizando a regra do produto para determinantes e a igualdade

$$M_\beta^{\beta''} = M_{\beta'}^{\beta''} M_\beta^{\beta'},$$

temos que dadas bases  $\beta$ ,  $\beta'$  e  $\beta''$  de  $V$  e  $I_1, I_2$  os isomorfismos de  $V$  em  $V$ , tais que  $I_1(\beta) = \beta'$  e  $I_2(\beta') = \beta''$ , temos

$$[I_2 \circ I_1] = M_\beta^{\beta''} = M_{\beta'}^{\beta''} M_\beta^{\beta'},$$

logo  $\det[I_2 \circ I_1]_\beta = \det[I_2]_{\beta'} \det[I_1]_\beta$ .

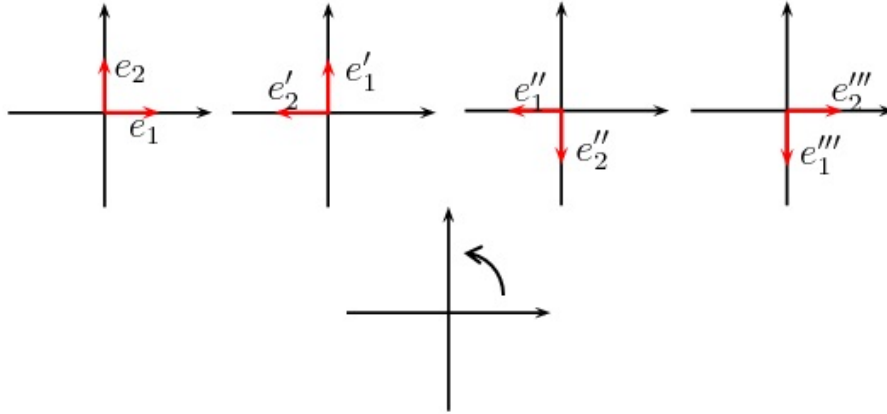
Assim, este processo define uma relação de equivalência, particionando o conjunto de todas as bases ordenadas de  $V$  em duas classes.

**Definição 1.1.20.** *Uma orientação de  $V$  é uma decisão arbitrária para fixar um sinal positivo para elementos de uma classe de equivalência e um sinal negativo para os outros. Um espaço vetorial orientado  $V$  é um par formado pelo espaço vetorial  $V$  e uma orientação de  $V$ . As bases de  $V$  pertencentes a esta orientação serão chamadas de positivas e as outras de negativas.*

**Exemplo 1.1.21.** Por exemplo, o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  será sempre orientado positivamente pela base canônica.

**Observação 1.1.22.** Dado  $V$  um espaço vetorial real de dimensão finita, quando falamos de uma orientação de  $V$  é indispensável considerarmos as suas bases ordenadas. Por exemplo, se considerarmos  $\beta = \{e_1, e_2\}$  como sendo uma base positiva de  $\mathbb{R}^2$ , onde

$e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ , então a base  $\beta' = \{e'_1, e'_2\}$ , com  $e'_1 = (0, 1)$  e  $e'_2 = (-1, 0)$ , é equivalente a  $\beta$ , porém a base  $\alpha = \{f_1, f_2\}$ , com  $f_1 = (-1, 0)$  e  $f_2 = (0, 1)$ , não é equivalente a base  $\beta$ .



**Figura 1.2:** Exemplo de orientação em  $\mathbb{R}^2$

Dados  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais de mesma dimensão  $n$ , se  $I : V \rightarrow W$  é um isomorfismo de  $V$  em  $W$  sabemos que  $I$  leva uma base de  $V$  em uma base de  $W$ . Assim, temos a seguinte definição.

**Definição 1.1.23.** *Sejam  $V$  e  $W$  dois espaços vetoriais  $n$ -dimensionais e orientados, se  $I : V \rightarrow W$  é um isomorfismo de  $V$  em  $W$ , dizemos que  $I$  preserva orientação se  $I$  leva base positiva de  $V$  em uma base positiva de  $W$ , ou equivalentemente se  $I$  leva base negativa de  $V$  em uma base negativa de  $W$ . Caso contrário, diremos que  $I$  inverte orientação. Quando um isomorfismo entre espaços vetoriais orientados preserva (inverte) orientação, dizemos também que esse isomorfismo é positivo (negativo).*

Agora, voltemos para variedades.

**Definição 1.1.24.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional, dizemos que  $M$  é orientável se existe uma escolha contínua de orientações para todos os espaços tangentes  $T_p M$ . A condição de continuidade pode ser interpretada no seguinte sentido: próximo de cada ponto  $p \in M$  deve existir uma carta  $\varphi : U \rightarrow V$ , com  $p \in U$ , tal que  $d\varphi_u : T_u M \rightarrow \mathbb{R}^m$  preserva orientação em cada ponto  $u \in U$ . Uma variedade orientada é um par  $(M, \mathcal{O})$  onde  $M$  é uma variedade diferenciável e  $\mathcal{O}$  é uma orientação em  $M$ .*

**Exemplo 1.1.25.** A circunferência unitária  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é orientável.

**Exemplo 1.1.26.** Dada uma variedade diferenciável  $M$ , o fibrado tangente  $TM$  de  $M$  é uma variedade diferenciável orientável, quer  $M$  o seja, quer não.

**Observação 1.1.27.** Dada uma variedade diferenciável  $M$   $m$ -dimensional, já vimos que para cada ponto  $p \in M$  obtemos o espaço vetorial  $T_pM$ . Dada  $\varphi : V \rightarrow U$  uma carta de  $M$  com  $p \in V$ , denotaremos por  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$  a base  $\left\{ d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(e_1), \dots, d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(e_m) \right\}$  de  $T_pM$ , onde  $\{e_1, \dots, e_m\}$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^m$  e  $\varphi(p) = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ . Além disso, consideraremos o espaço vetorial  $T_pM$  positivamente orientado pela base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$ , salvo o caso em que digamos o contrário.

**Definição 1.1.28.** *Sejam  $M, N$  variedades diferenciáveis  $n$ -dimensionais, orientadas e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Dados um valor regular  $p \in N$  de  $f$  e os pontos regulares  $q \in f^{-1}(p)$  diremos que o ponto  $q$  é positivo ( $q > 0$ ) se o isomorfismo  $df_q : T_qM \rightarrow T_pN$  preserva a orientação e diremos que o ponto  $q$  é negativo ( $q < 0$ ) se o isomorfismo  $df_q : T_qM \rightarrow T_pN$  inverte a orientação.*

**Teorema 1.1.29.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis  $m$ -dimensionais orientadas, com  $M$  conexa. Se  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo local, então  $df_x : T_xM \rightarrow T_{f(x)}N$  preserva ou inverte orientação, para todo  $x \in M$ .*

Apresentaremos a seguir, o conceito de variedades diferenciáveis com bordo. Uma referência deste assunto é [5].

**Definição 1.1.30.** *Uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional com bordo é um espaço topológico  $M$  com uma coleção de aplicações  $\varphi : V \rightarrow U$ , onde  $V$  é um aberto de  $M$  e  $U$  é um aberto do subconjunto  $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_m \geq 0\}$ , satisfazendo as condições da definição de variedades diferenciáveis (ver Definição 1.1.7).*

*Dizemos que  $p \in M$  é um ponto do bordo de  $M$ , se existe  $\varphi : V \rightarrow U$  tal que  $\varphi(p) = q$  onde  $q \in \partial\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_m = 0\}$ .*

*O bordo de uma variedade diferenciável  $m$ -dimensional com bordo  $M$  será denotado por  $\partial M$ .*

**Definição 1.1.31.** *Uma variedade diferenciável fechada é uma variedade compacta e sem bordo.*

Podemos definir também o conceito de variedades complexas. Uma referência deste assunto é [20].

**Definição 1.1.32.** *Dizemos que uma variedade diferenciável  $M$  de dimensão  $2m$  é uma variedade complexa de dimensão  $m$ , se  $M$  tem um atlas formado apenas por cartas em  $\mathbb{C}^m$ , tais que a mudança de coordenadas entre estas cartas seja holomorfa.*

Dado que aplicações holomorfas são muito mais especiais que as aplicações diferenciáveis, temos que a teoria de variedades diferenciáveis e variedades complexas têm aspectos muito diferentes. O teorema a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [20], serve de ilustração para este fato.

**Teorema 1.1.33** ([20], Lema 14.1). *Toda variedade complexa  $M$  é orientável.*

## Índice de Poincaré-Hopf

Nesta seção, consideraremos  $M, N$  variedades diferenciáveis  $n$ -dimensionais, orientadas e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Se  $M$  é compacta e  $N$  é conexa, então definiremos o grau de  $f$ , para isto considere a seguinte definição.

**Definição 1.1.34.** *Sejam  $M$  variedade fechada e  $N$  uma variedade conexa. Seja  $x \in M$  um ponto regular de  $f$  tal que  $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  é um isomorfismo entre espaços vetoriais orientados. Defina o sinal de  $df_x$ , denotado por  $\text{sign } df_x$ , como sendo 1 se  $df_x$  preserva orientação ou  $-1$  se  $df_x$  inverte orientação. Para todo valor regular  $y \in N$  definimos*

$$\text{grau}(f, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x.$$

**Teorema 1.1.35** ([19], Teorema A). *O inteiro  $\text{grau}(f, y)$  não depende da escolha do valor regular  $y$ .*

**Definição 1.1.36.** Definimos o grau de  $f$ , denotado por  $\text{grau}(f)$ , como sendo  $\text{grau}(f, y)$ , para algum valor regular  $y$ .

**Definição 1.1.37.** Considere um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  e um campo vetorial contínuo

$$v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

com uma singularidade isolada em  $a \in U$ . A aplicação

$$\phi(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

aplica uma pequena esfera de centro em  $a$  na esfera unitária.

O grau da aplicação  $\phi$  definida acima é chamado de índice de Poincaré-Hopf de  $v$  na singularidade  $a$ , que denotaremos por  $\text{Ind}_{PH}(v, a)$ .

**Definição 1.1.38.** Sejam  $M$  variedade fechada e  $N$  uma variedade conexa. Os campos de vetores  $v$  em  $M$  e  $v'$  em  $N$  correspondem sobre  $f$  se a derivada  $df$  leva  $v(x)$  sobre  $v'(f(x))$  para cada  $x \in M$ .

Se  $f$  é um difeomorfismo, então  $v'$  é unicamente determinado por  $v$ , usaremos a notação

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}.$$

**Lema 1.1.39** ([19], Lema 1). Se o campo de vetores  $v$  em  $U \subset \mathbb{R}^n$  corresponde a  $v' = df \circ v \circ f^{-1}$  em  $U' \subset \mathbb{R}^n$  sobre um difeomorfismo  $f : U \rightarrow U'$ . Então, o índice de Poincaré-Hopf de  $v$  em uma singularidade isolada  $a$  é igual ao índice de Poincaré-Hopf de  $v'$  em  $f(a)$ .

Assumindo o Lema 1.1.39, podemos definir o conceito de índice de Poincaré-Hopf para um campo de vetores  $w$  em uma variedade arbitrária  $M$ .

**Definição 1.1.40.** Se  $g : U \rightarrow M$  é uma parametrização de uma vizinhança de  $a$  em  $M$ , então o índice de Poincaré-Hopf de  $w$  em  $a$ , denotado por  $\text{Ind}_{PH}(w, a)$ , é o índice do campo de vetores correspondente  $dg^{-1} \circ w \circ g$  em  $U$  na singularidade  $g^{-1}(a)$ .

**Teorema 1.1.41** (Teorema de Poincaré-Hopf). *Seja  $M$  uma variedade fechada e  $v$  um campo de vetores contínuo em  $M$  com singularidades isoladas. Então, a soma dos índices de Poincaré-Hopf das singularidades de  $v$  é igual a característica de Euler de  $M$ , isto é,*

$$\chi(M) = \sum_a \text{Ind}_{PH}(v, a)$$

Podemos citar como uma referência para a demonstração deste teorema [19]. Temos o Teorema de Poincaré-Hopf para o caso em que  $M$  é uma variedade compacta orientada com bordo, a demonstração deste resultado pode ser vista em [3].

**Teorema 1.1.42.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável, compacta, orientada e com bordo  $\partial M$ , e  $v$  um campo de vetores sem singularidades em uma vizinhança  $U$  de  $\partial M$ . Então:*

- i) O campo de vetores  $v$  pode ser estendido para o interior de  $M$  com uma quantidade finita de singularidades;
- ii) A soma dos índices de Poincaré-Hopf das singularidade de  $v$  em  $M$ , independe da maneira como estendemos o campo  $v$  para o interior de  $M$ ;
- iii) Seja  $\tilde{v}$  uma extensão de  $v$  em  $M$ , se  $\tilde{v}$  é transversal ao bordo de  $M$  e aponta para “fora” de  $M$ , então temos que

$$\chi(M) = \sum_a \text{Ind}_{PH}(\tilde{v}, a).$$

Se  $\tilde{v}$  é transversal a  $\partial M$  e aponta para “dentro” de  $M$ , então

$$\chi(M) - \chi(\partial M) = \sum_a \text{Ind}_{PH}(\tilde{v}, a).$$

## 1.2 Homotopia

Nesta seção introduziremos noções básicas sobre homotopia, procurando ilustrá-las com alguns exemplos.

**Definição 1.2.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos, dizemos que duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicas quando existe uma aplicação contínua*

$$H : X \times I \rightarrow Y, \quad \text{com } I = [0, 1]$$

*tal que  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in X$ . Chamaremos a aplicação  $H$  de homotopia entre  $f$  e  $g$  e escreveremos  $f \simeq g$ .*

**Exemplo 1.2.2.** Sejam  $E$  um espaço vetorial normado,  $Y \subset E$  um espaço topológico com a topologia induzida de  $E$  e  $X$  um espaço topológico qualquer. Dadas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$ , suponhamos que, para todo  $x \in X$ , o segmento de reta  $[f(x), g(x)]$  esteja contido em  $Y$ . Então,  $f \simeq g$ .

De fato, denotando o intervalo  $[0, 1]$  por  $I$ , basta definirmos  $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$  para obtermos uma homotopia  $H : X \times I \rightarrow Y$  entre  $f$  e  $g$ .

Em particular, dada uma aplicação constante

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto c \end{aligned}$$

toda aplicação contínua  $g : X \rightarrow E$  é homotópica à  $f$ .

**Exemplo 1.2.3.** Seja  $\mathbb{S}^n$  a esfera unitária de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , dadas duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ , se  $f(x) \neq -g(x)$  para todo  $x \in X$ , isto é, se  $f(x)$  e  $g(x)$  nunca são pontos antípodas, então  $f \simeq g$ .

**Proposição 1.2.4** ([14], Lema 1). *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. A relação de homotopia  $f \simeq g$  é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de  $X$  e  $Y$ .*

**Proposição 1.2.5.** *Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  espaços topológicos, consideremos aplicações  $f, f' : X \rightarrow Y$  e  $g, g' : Y \rightarrow Z$  aplicações contínuas. Se  $f \simeq f'$  e  $g \simeq g'$ , então  $g \circ f \simeq g' \circ f'$ .*

*Demonstração.* Seja  $I = [0, 1]$ , denotemos por  $H : X \times I \rightarrow Y$  uma homotopia entre  $f$  e  $f'$  e por  $K : Y \times I \rightarrow Z$  uma homotopia entre  $g$  e  $g'$ . Definindo  $L : X \times I \rightarrow Z$  por  $L(x, t) = K(H(x, t), t)$ , temos que  $L$  é uma homotopia entre  $g \circ f$  e  $g' \circ f'$ .  $\square$

Existe uma estreita relação entre homotopia e o problema de estender continuamente a todo o espaço uma aplicação contínua definida em um subconjunto fechado desse espaço. Um exemplo disto pode ser visto na seguinte proposição.

**Proposição 1.2.6** ([14], Proposição 1). *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $\overline{\mathbb{B}}_1(0)$  a bola fechada de centro 0 e raio 1 de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Uma aplicação contínua  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$  estende-se continuamente à  $\overline{\mathbb{B}}_1(0)$  se, e somente se, é homotópica à uma constante.*

*Demonstração.* Denotemos por  $I$  o intervalo  $[0, 1]$  e consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^n \times I &\longrightarrow \overline{\mathbb{B}}_1(0) \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)x \end{aligned}$$

que é contínua, sobrejetora e igual a 0 em  $\mathbb{S}^n \times 1$ . Se  $\tilde{f} : \overline{\mathbb{B}}_1(0) \rightarrow X$  é uma extensão contínua de  $f : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ , então

$$H = \tilde{f} \circ \varphi : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$$

é uma homotopia entre  $f$  e a aplicação constante  $g : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ , definida por  $g(x) = \tilde{f}(0)$ . Reciprocamente, suponhamos que  $H : \mathbb{S}^n \times I \rightarrow X$  seja uma homotopia entre  $f$  e uma aplicação constante  $g : \mathbb{S}^n \rightarrow X$ , dada por  $g(x) = p$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^n$ . Seja a aplicação  $\tilde{f} : \overline{\mathbb{B}}_1(0) \rightarrow X$  definida da seguinte maneira,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} H\left(\frac{x}{|x|}, 1 - |x|\right), & \text{se } x \neq 0 \\ p, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Assim, temos que  $\tilde{f}$  é contínua e  $\tilde{f}|_{\mathbb{S}^n} = f$ .  $\square$



A seguir apresentamos um resultado, cuja demonstração pode ser vista em [14].

**Teorema 1.2.7** ([14], Teorema 1). *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis compactas, então toda aplicação contínua  $f : M \rightarrow N$  é homotópica à uma aplicação  $g : M \rightarrow N$  de classe  $C^1$ .*

## 1.3 Homologia singular

Nesta seção apresentaremos uma análise da teoria de homologia singular. Analisaremos os  $\mathbb{R}$ -módulos de homologia singular com coeficientes em um anel  $\mathbb{R}$  comutativo com identidade. Uma referência para este assunto é [21].

### Simplexos em $\mathbb{R}^n$

**Definição 1.3.1.** *Dados  $(p + 1)$  pontos em  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \leq n$ , dizemos que  $\{X_0, \dots, X_p\}$  é uma coleção geometricamente independente se os vetores  $\vec{v}_1 = X_1 - X_0, \vec{v}_2 = X_2 - X_0, \dots, \vec{v}_p = X_p - X_0$  são linearmente independentes.*

**Definição 1.3.2.** *Seja  $\{X_0, \dots, X_p\} \subset \mathbb{R}^n$  uma coleção geometricamente independente de  $\mathbb{R}^n$ ,  $p \leq n$ . O  $p$ -simplexo  $S$  gerado por  $X_0, \dots, X_p$  é a envoltória convexa:*

$$S = EC(\{X_0, \dots, X_p\}).$$

Os pontos  $X_i$  são chamados vértices do  $p$ -simplexo  $S$ .

**Teorema 1.3.3** (Teorema das coordenadas baricêntricas). *Sejam  $\{X_0, \dots, X_p\}$  uma coleção de  $(p + 1)$  pontos geometricamente independentes em  $\mathbb{R}^n$ , com  $p \leq n$ . Considere o seguinte conjunto:*

$$A_p = \{t_0 X_0 + \dots + t_p X_p; 0 \leq t_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=0}^p t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

(i)  $A_p = EC(\{X_0, \dots, X_p\}) = p$ -simplexo gerado por  $X_0, \dots, X_p$ ;

(ii) Se  $\sum_{i=0}^p t_i X_i = \sum_{i=0}^p s_i X_i$ ,  $0 \leq t_i, s_i \leq 1$  com  $\sum_{i=0}^p t_i = \sum_{i=0}^p s_i = 1$ , então  $t_i = s_i$  para todo  $i = 1, \dots, p$ , ou seja: todo elemento de  $A_p$  se escreve de maneira única como combinação linear dos pontos  $\{X_0, \dots, X_p\}$ .

**Observação 1.3.4.** Concluimos que escolhida uma ordenação  $\{X_0, \dots, X_p\}$  para  $(p+1)$  pontos geometricamente independentes em  $\mathbb{R}^n$ , com  $p \leq n$ , cada ponto  $X \in EC(\{X_0, \dots, X_p\})$  é univocamente determinado por uma  $(p+1)$ -upla  $(t_0, t_1, \dots, t_p)$ , com  $0 \leq t_i \leq 1$  e  $\sum_{i=0}^p t_i = 1$  denominada as coordenadas baricêntricas do ponto  $X$ .

**Definição 1.3.5.** Sejam  $X_0 = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $X_1 = e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots$ ,  $X_p = e_{p+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$ . O  $p$ -simplexo  $EC(\{X_0, \dots, X_p\})$ , nesse caso, é denominado  $p$ -simplexo padrão e será denotado por  $\Delta_p \in \mathbb{R}^{p+1}$

## Homologia singular de um espaço topológico $X$ com coeficientes em um anel $R$

Fixemos  $R$  um anel comutativo com a identidade  $1_R$  e consideremos  $\Delta_p \subset \mathbb{R}^{p+1}$  o  $p$ -simplexo padrão munido da topologia induzida de subespaço em  $\mathbb{R}^{p+1}$  (munido da topologia usual).

**Definição 1.3.6.** Para cada espaço topológico  $X$ , um  $p$ -simplexo singular em  $X$  é uma função contínua  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ .

Denotaremos por

$$C_p(X) = \{\sigma : \Delta_p \rightarrow X; \sigma \text{ é contínua}\}$$

o conjunto de todos os  $p$ -simplexos singulares de  $X$ .

**Definição 1.3.7.** Para cada  $p \geq 0$ , definimos o  $R$ -módulo livre cuja base é o conjunto de todos os  $p$ -simplexos singulares de  $X$ :

$$S_p(C_p(X), R) = \{f : C_p(X) \rightarrow R; f(\sigma) \neq 0, \text{ apenas para um número finito de elementos } \sigma\}.$$

Um elemento típico de  $S_p(C_p(X), R)$  é uma combinação linear formal  $\alpha_1\sigma_1 + \dots + \alpha_r\sigma_r$ , onde  $\alpha_i \in R$  e  $\sigma_i : \Delta_p \rightarrow X$  é um  $p$ -simplexo singular de  $X$ .

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \sigma_i \longmapsto f : C_p(X) \rightarrow R$$

$$\sigma \quad \mapsto \quad f(\sigma) = \begin{cases} \alpha_i; & \text{se } \sigma = \sigma_i \text{ } i = 1, \dots, r \\ 0, & \text{se } \sigma \neq \sigma_i \end{cases}$$

Os elementos de  $S_p(C_p(X); R)$  são chamados  $p$ -cadeias singulares de  $X$  com coeficientes em  $R$ .

A seguir, definiremos o complexo de cadeias  $\{S_p(X; R); \partial\}_{p \geq 0}$ . Para isso, convencionaremos que  $\{S_p(X; R)\} = \{0\}$  para todo  $p < 0$ .

## Os operadores face

**Definição 1.3.8.** *Seja  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$  um  $p$ -simplexo singular de  $X$ . Considere a inclusão*

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{p-1} & \xrightarrow{\varepsilon_i} & \Delta_p \\ (t_0, \dots, t_i, \dots, t_{p-1}) & \hookrightarrow & (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}), \end{array}$$

que insere o zero na  $i$ -ésima posição. Para cada  $i = 1, \dots, p$  definimos a  $i$ -ésima face de  $\sigma$  como sendo o  $(p-1)$ -simplexo singular de  $X$  dado pela composição

$$\sigma \circ \varepsilon_i : \Delta_{p-1} \rightarrow X,$$

que é contínua e denotada por  $\partial_i \sigma : \Delta_{p-1} \rightarrow X$ .

Assim, para cada  $i = 1, \dots, p$  e para cada  $p$ -simplexo singular  $\sigma \in C_p(X)$ , associamos a sua  $i$ -ésima face  $\partial_i \sigma \in C_{p-1}(X)$ . Isso define uma função

$$\begin{array}{ccc} \partial_i : C_p(X) & \longrightarrow & C_{p-1}(X) \subset S_{p-1}(X; R) \\ \sigma & \longmapsto & \partial_i \sigma \end{array}$$

para todo  $i = 1, \dots, p$ , e desde que  $C_p(X)$  é base para o  $R$ -módulo livre  $S_p(X; R)$ ,  $\partial_i$  se estende por linearidade a um único  $R$ -homomorfismo  $\partial_i : S_p(X; R) \rightarrow S_{p-1}(X; R)$ , chamado operador face. O  $R$ -homomorfismo  $\partial : S_p(X; R) \rightarrow S_{p-1}(X; R)$  dado pela soma alternada dos operadores face

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots + (-1)^p \partial_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i$$

é chamado operador bordo.

**Teorema 1.3.9** ([21], Teorema 29.1). *O operador  $\partial : S_p(X; R) \rightarrow S_{p-1}(X; R)$ , definido por  $\sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_i$ , é tal que  $\partial \circ \partial = 0$ .*

**Definição 1.3.10.** *Fixado um anel comutativo com identidade  $R$  para cada espaço topológico  $X$ , criamos um complexo de cadeias  $S_*(X; R) = \{S_p(X; R), \partial\}_{p \geq 0}$ , ou seja,*

$$S_*(X; R) : \dots \xrightarrow{\partial} S_p(X; R) \xrightarrow{\partial} S_{p-1}(X; R) \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} S_1(X; R) \xrightarrow{\partial} S_0(X; R) \xrightarrow{\partial} 0,$$

usaremos as seguintes terminologias:

$Z_p(S_*(X; R)) \doteq Z_p(X; R) = \text{Ker}(\partial)$  o submódulo dos  $p$ -ciclos,

$B_p(S_*(X; R)) \doteq B_p(X; R) = \text{Im}(\partial)$  o submódulo dos  $p$ -bordos e

$H_p(S_*(X; R)) \doteq H_p(X; R) = \frac{Z_p(X; R)}{B_p(X; R)}$  o  $p$ -ésimo  $R$ -módulo de homologia de  $X$  com coeficientes em  $R$ .

Um elemento típico de  $H_p(X; R)$  é da forma

$$\mu = z_p + B_p(X; R),$$

onde  $z_p \in Z_p(X; R)$  é um  $p$ -ciclo;  $\mu$  é chamada classe de homologia de  $X$  com coeficientes em  $R$ , representada pelo  $p$ -ciclo  $z_p$ .

## Construção do $R$ -homomorfismo induzido em homologia

Dada uma função contínua  $f : X \rightarrow Y$ , queremos definir um  $R$ -homomorfismo  $f_* : H_p(X; R) \rightarrow H_p(Y; R)$  para cada  $p \geq 0$ . Para isso, precisamos definir uma aplicação de cadeias

$$f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$$

para cada  $p \geq 0$ , entre os complexos de cadeias  $S_p(X; R)$  e  $S_p(Y; R)$ .

Observemos que, dado um  $p$ -simplexo singular de  $X$ ,  $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ , a composição

$$f \circ \sigma : \Delta_p \xrightarrow{\sigma} X \xrightarrow{f} Y$$

é um  $p$ -simplexo singular de  $Y$  e determina uma função

$$\begin{aligned} C_p(X) &\longrightarrow C_p(Y) \subset S_p(Y; R) \\ \sigma &\longmapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

para cada  $p \geq 0$ . Desde que  $C_p(X)$  é base para o  $R$ -módulo livre  $S_p(X; R)$  e  $C_p(Y) \subset S_p(Y; R)$  tal função se estende por linearidade a um único  $R$ -homomorfismo  $f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$ , definido por

$$f_{\#}(\alpha_1 \sigma_1 + \dots + \alpha_r \sigma_r) = \alpha_1 (f \circ \sigma_1) + \dots + \alpha_r (f \circ \sigma_r).$$

**Teorema 1.3.11** ([21], Teorema 29.1). *O  $R$ -homomorfismo  $f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$  é uma aplicação de cadeias.*

Portanto,  $f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$  induz um bem definido  $R$ -homomorfismo  $f_* : H_p(X; R) \rightarrow H_p(Y; R)$ , dado por

$$f_*(z_p + B_p(X; R)) = f_{\#}(z_p) + B_p(Y; R),$$

onde

$$f_{\#}(z_p) = f_{\#}(\alpha_1 \sigma_1 + \dots + \alpha_r \sigma_r) = \alpha_1 (f \circ \sigma_1) + \dots + \alpha_r (f \circ \sigma_r).$$

## 1.4 Cohomologia

Nesta seção apresentaremos alguns conceitos sobre cohomologia que serão necessários no decorrer deste texto. Uma referência para este assunto é [21].

### Axiomas de Cohomologia

Dados um conjunto  $\mathcal{A}$  de pares de espaços topológicos  $(X, A)$  e um grupo abeliano  $G$ , uma Teoria de Cohomologia em  $\mathcal{A}$  com coeficientes em  $G$  consiste de:

- (1) Uma função definida para cada inteiro  $p$  e para cada par  $(X, A)$  que associa a estes um grupo abeliano  $H^p(X, A; G)$ ;
- (2) Uma função contínua  $h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  a qual induz um homomorfismo

$$h^p : H^p(Y, B; G) \rightarrow H^p(X, A; G);$$

- (3) Para cada par  $(X, A)$  tem-se um homomorfismo

$$\delta^p : H^{p-1}(A; G) \rightarrow H^p(X, A; G).$$

Satisfazendo os seguintes axiomas:

- (1) Se  $i : (X, A) \rightarrow (X, A)$  é a identidade, então  $i^p : H^p(X, A; G) \rightarrow H^p(X, A; G)$  também o é, para todo inteiro  $p$ ;
- (2) Dadas  $h : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $k : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ , temos  $(k \circ h)^p = h^p \circ k^p$ , para todo inteiro  $p$ ;
- (3) Dada  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  contínua,  $\delta^p$  é uma aplicação natural, isto é, o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A; G) & \xleftarrow{f^p} & H^p(Y, B; G) \\ \delta^p \uparrow & & \uparrow \delta^p \\ H^{p-1}(A; G) & \xleftarrow{f^{p-1}} & H^{p-1}(B; G) \end{array}$$

(4) Dadas as inclusões  $i : (A, \emptyset) \rightarrow (X, \emptyset)$  e  $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ , então a sequência abaixo é exata,

$$\dots \leftarrow H^p(A; G) \xleftarrow{i^*} H^p(X; G) \xleftarrow{j^*} H^p(X, A; G) \xleftarrow{\delta^*} H^{p-1}(A; G) \leftarrow \dots$$

(5) Se  $h \simeq k$  (homotópicas), então  $h^p = k^p$ , para todo inteiro  $p$ ;

(6) Sejam  $(X, A)$  e  $U \subset X$  aberto tal que  $\bar{U} \subset \text{int}(A)$ . Então, a inclusão  $j : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  induz um isomorfismo:

$$j^* : H^p(X, A; G) \rightarrow H^p(X - U, A - U; G);$$

(7) Se  $X = \{x\}$  então  $H^0(X; G) = G$  e  $H^p(X; G) = 0$ , para  $p \neq 0$ .

## Cohomologia Singular

Seja  $A$  um anel comutativo com unidade.

**Definição 1.4.1.** Um complexo de cocadeias é uma sequência  $C = (C^p, \delta^p)$ ,  $p \geq 0$ , de  $A$ -módulos  $C^p$  e homomorfismos  $\delta^p : C^p \rightarrow C^{p+1}$  tais que  $\delta^{p+1} \circ \delta^p = 0$ .

**Definição 1.4.2.** (1) Cada elemento  $u \in C^p$  é chamado cocadeia de dimensão  $p$ ;

(2) Se  $\delta^p u = 0$  então  $u$  é chamado cociclo de dimensão  $p$ ;

(3)  $Z^p = Z^p(C) = \text{Ker} \delta^p$  é o conjunto de todos os cociclos de dimensão  $p$ ;

(4)  $B^p = B^p(C) = \text{Im} \delta^{p-1}$  é o conjunto de todas as cocadeias de dimensão  $p$ .

**Definição 1.4.3.** O grupo de cohomologia de dimensão  $p$  do complexo  $C$  é definido por:

$$H^p(C) = \frac{Z^p}{B^p}.$$

**Exemplo 1.4.4.** Dado um complexo de cadeias  $(C_p, \partial_p)$ .

Considere,  $C^p = \text{Hom}(C_p; A) = \{h : C_p \rightarrow A; h \text{ é homomorfismo}\}$  e  $\delta^p : C^p \rightarrow C^{p+1}$  definido por

$$\begin{aligned} \delta^p : C^p &\rightarrow C^{p+1} \\ u &\mapsto \delta^p(u) : C_{p+1} \rightarrow A \\ x &\mapsto (\delta^p(u))(x) = u(\partial_p(x)) \end{aligned}$$

Obtemos assim,  $(C^p, \delta^p)$  um complexo de cocadeias.

**Observação 1.4.5.** Portanto, a partir de uma homologia podemos definir uma cohomologia.

**Definição 1.4.6.** Dados  $A, B$  grupos abelianos. Um homomorfismo  $f : A \rightarrow B$  induz um homomorfismo dual

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \text{Hom}(B; G) &\rightarrow \text{Hom}(A; G) \\ (\phi : B \rightarrow G) &\mapsto \tilde{f}(\phi) = \phi \circ f \end{aligned}$$

**Exemplo 1.4.7.** Seja a sequência exata de grupos

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

$$\text{onde } f(n) = 2n \text{ e } g(n) = \begin{cases} 0; & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Então o dual da sequência é

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Temos  $\text{Hom}(\mathbb{Z}_2; \mathbb{Z}) = 0$  e  $\text{Hom}(\mathbb{Z}; \mathbb{Z})$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , pois é grupo cíclico infinito. Agora, como  $f$  é a multiplicação por 2, então  $f^*$  também será. Assim,  $f^*$  não é sobrejetora, conseqüentemente, o dual da sequência não é exata.

**Observação 1.4.8.** Isto mostra que nem sempre o dual de uma sequência exata é exata.

O teorema a seguir nos dá uma condição necessária para que o dual de uma sequência exata seja exata.



**Teorema 1.4.9** ([21], Teorema 41.2). *Dados uma seqüência exata curta de  $A$ -módulos*

$$0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$$

*e um  $A$ -módulo  $Y$ , tal que a seqüência acima cinde. Então,*

$$0 \rightarrow \text{Hom}(X'', Y) \rightarrow \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(X', Y) \rightarrow 0$$

*é exata.*

Dados  $X$  um espaço topológico e  $R$  um anel comutativo com unidade. Seja  $S_r(X)$  o  $R$ -módulo livre das cadeias de dimensão  $r$ , ou seja,

$$S_r(X) = \left\{ \sum_{\sigma} x_{\sigma} \sigma; \sigma \text{ é um } r\text{-simplexo singular e } x_{\sigma} \in R \right\}.$$

Dessa forma, podemos considerar

$$S^r(X) = \text{Hom}(S_r(X); R) = \{u : S_r(X) \rightarrow R; u \text{ é homomorfismo}\}.$$

Além disso, definimos  $\delta : S^r(X) \rightarrow S^{r+1}(X)$ , por  $(\delta u)(x) = u(\partial x)$ . Com isso, obtemos que  $\delta \circ \delta = 0$ .

**Definição 1.4.10.** *A cohomologia singular de  $X$  com coeficientes em  $R$  é definida por:*

$$H^r(X) = \frac{\text{Ker}(\delta^r)}{\text{Im}(\delta^{r-1})}.$$

**Definição 1.4.11.** *Dada  $f : X \rightarrow Y$  contínua e a aplicação de cadeias correspondente  $f_{\#} : S_p(X; R) \rightarrow S_p(Y; R)$ . O dual de  $f_{\#}$  é denotado por  $f^{\#}$  e é tal que*

$$\begin{aligned} f^{\#} : S^p(Y; R) &\rightarrow S^p(X; R) \\ \varphi^p &\mapsto (f^{\#}(\varphi^p))(\sigma_p) = \varphi^p(f_{\#}(\sigma_p)) \end{aligned}$$

**Definição 1.4.12.** *Dada  $f : X \rightarrow Y$ , temos que  $f$  induz um homomorfismo em nível de cohomologia:*

$$\begin{aligned} f^* : H^p(Y) &\rightarrow H^p(X) \\ u^p &\mapsto (f^*(u^p))(v_p) = u^p(f_*(v_p)) \end{aligned}$$

## Produto Cap

O produto cap é uma família de  $R$ -funções lineares:

$$\begin{aligned} H^k(X, A; M) \otimes H_n(X, A \cup B; N) &\rightarrow H_{n-k}(X, B; M \otimes_R N) \\ x \otimes y &\mapsto x \cap y \end{aligned}$$

$M, N$  são  $R$ -módulos e  $(A, B)$  um par excisivo em  $X$ .

Em geral, usa-se  $M = N = M \otimes N = R$ .

Primeiro define-se o produto cap em nível de cadeias e cocadeias e depois podemos estendê-lo por linearidade.

$$\begin{aligned} S^p(X; R) \otimes S_{p+q}(X; R) &\rightarrow S_q(X; R) \\ \varphi^p \otimes c_{p+q} &\mapsto \varphi^p \cap c_{p+q} \end{aligned}$$

Dados  $\varphi^p \in S^p(X; R)$ ,  $c_{p+q} : \Delta_{p+q} = [e_0, \dots, e_{p+q}] \rightarrow X$  e  $b \in R$ , definimos,

$$\varphi^p \cap (c_{p+q} \otimes b) = \varphi^p(c_{p+q}|_{[e_q, \dots, e_{p+q}]}) \cdot c_{p+q}|_{[e_0, \dots, e_q]} \otimes b.$$

Propriedades:

1. Seja  $f : X \rightarrow Y$  contínua,  $\varphi^p \in S^p(Y; R)$  e  $c_{p+q} \in S_{p+q}(X; R)$ . Então,

$$f_{\#}(f^{\#}(\varphi^p) \cap c_{p+q}) = \varphi^p \cap f_{\#}c_{p+q}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} f_{\#}c_{p+q} \cap \varphi^p &= \varphi^p(f_{\#}c_{p+q}|_{[e_q, \dots, e_{p+q}]}) \cdot f_{\#}c_{p+q}|_{[e_0, \dots, e_q]} = \\ &= f_{\#}(\varphi^p(f_{\#}c_{p+q}|_{[e_q, \dots, e_{p+q}]}) \cdot c_{p+q}|_{[e_0, \dots, e_q]}) = f_{\#}(f^{\#}(\varphi^p)c_{p+q}|_{[e_q, \dots, e_{p+q}]} \cdot c_{p+q}|_{[e_0, \dots, e_q]}) = \\ &= f_{\#}(f^{\#}(\varphi^p) \cap c_{p+q}). \end{aligned}$$

Temos o seguinte diagrama, o qual auxilia a compreensão da propriedade 1.

$$\begin{array}{ccccc} S^p(X; R) \otimes S_{p+q}(X; R) & \xrightarrow{\cap} & S_q(X; R) \\ \uparrow f^\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# \\ S^p(Y; R) \otimes S_{p+q}(Y; R) & \xrightarrow{\cap} & S_q(Y; R) \end{array}$$

$$2. \partial(\varphi^p \cap c_{p+q}) = (-1)^q \delta \varphi^p \cap c_{p+q} + \varphi^p \cap \partial c_{p+q}.$$

Agora, usando a propriedade 2, podemos definir o produto cap em nível de homologias e cohomologias, da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} H^p(X; R) \otimes H_{p+q}(X; R) & \rightarrow & H_q(X; R) \\ [c^p] \otimes [z_{p+q}] & \mapsto & [c^p] \cap [z_{p+q}] = [c^p \cap z_{p+q}] \end{array}$$

De fato, sejam  $[c^p] \in H^p(X; R)$  e  $[z_{p+q}] \in H_{p+q}(X; R)$  então  $\delta^p(c^p) = 0$  e  $\partial_{p+q}(z_{p+q}) = 0$ . Logo,

$$\partial_q(c^p \cap z_{p+q}) = (-1)^q (\delta^p(c^p) \cap z_{p+q}) + (c^p \cap \partial_{p+q}(z_{p+q})) = 0.$$

Portanto,  $c^p \cap z_{p+q} \in Z_q(X; R)$ , logo representa uma classe de homologia em  $H_q(X; R)$ .

## Produto Cap Relativo

Definiremos nessa seção o produto cap relativo, este conceito será utilizado nas definições de obstrução de Euler e de obstrução de Euler de uma função. Nos restringimos a uma breve introdução deste assunto, para maiores detalhes sugerimos [21].

Para cada subespaço  $A \subset X$ , sejam  $S^p(X; A; R) \subset S^p(X; R)$  e  $S_{p+q}(A; R) \subset S_{p+q}(X; R)$ , podemos considerar:

$$\begin{array}{ccc} S^p(X; A; R) \otimes S_{p+q}(A; R) & \subset & S^p(X; R) \otimes S_{p+q}(X; R) \xrightarrow{\cap} S_q(X; R) \\ & & (\varphi^p, c_{p+q}) \mapsto \varphi^p \cap c_{p+q} \end{array}$$

Então para  $\varphi^p \in S^p(X; A; R)$  e  $c_{p+q} \in S_{p+q}(A; R)$  temos:

$$\varphi^p \cap c_{p+q} := \varphi^p(c_{p+q}|_{[e_q, \dots, e_{p+q}]}) \cdot c_{p+q}|_{[e_0, \dots, e_q]} \in S_q(X; R).$$

Porém,  $S^p(X; A; R) = \{\varphi^p \in S^p(X; R); \varphi^p(S_p(A; R)) = 0\}$  e  $c_{p+q}|_{[e_q, \dots, e_{p+q}]}$  é um  $p$ -simplexo singular de  $A$ , logo,  $\varphi^p(c_{p+q}|_{[e_q, \dots, e_{p+q}]}) = 0$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} S^p(X; A; R) \otimes S_{p+q}(A; R) &\xrightarrow{\cap} S_q(X; R) \\ (\varphi^p, c_{p+q}) &\mapsto \varphi^p \cap c_{p+q} = 0 \end{aligned}$$

Assim, temos o produto bem definido:

$$\begin{aligned} S^p(X; A; R) \otimes S_{p+q}(X; A; R) &\xrightarrow{\cap} S_q(X; R) \\ (\varphi^p, c_{p+q} + S_{p+q}(A; R)) &\mapsto \varphi^p \cap (c_{p+q} + S_{p+q}(A; R)) \end{aligned}$$

onde,  $\varphi^p \cap (c_{p+q} + S_{p+q}(A; R)) := \varphi^p \cap [c_{p+q}] = \varphi^p \cap c_{p+q}$ .

O produto acima está bem definido.

De fato, se  $[c_{p+q}] = c_{p+q} + S_{p+q}(A; R) = c'_{p+q} + S_{p+q}(A; R) = [c'_{p+q}]$  então,

$$\begin{aligned} c_{p+q} - c'_{p+q} &\in S_{p+q}(A; R) \Rightarrow (c_{p+q} - c'_{p+q}) \cap \varphi^p = 0, \forall p \\ \Rightarrow \varphi^p \cap c_{p+q} - \varphi^p \cap c'_{p+q} &= 0 \Rightarrow \varphi^p \cap c_{p+q} = \varphi^p \cap c'_{p+q} \\ \Rightarrow \varphi^p \cap [c_{p+q}] &= \varphi^p \cap [c'_{p+q}]. \end{aligned}$$

E este produto induz um produto cap:

$$H^p(X; A; R) \otimes H_{p+q}(X; A; R) \xrightarrow{\cap} H_q(X; R)$$

definido por

$$\begin{aligned} c^p + B^p(X; A; R) \cap [z_{p+q}] + B_{p+q}(X; A; R) &:= (c^p \cap [z_{p+q}]) + B_q(X; R) = \\ &= c^p \cap z_{p+q} + B_q(X; R) = [c^p \cap z_{p+q}]. \end{aligned}$$

## 1.5 Teoria de singularidades

Nesta seção, apresentaremos as definições e os principais resultados da teoria de singularidades que serão usados para o desenvolvimento deste trabalho. Como referência para este assunto, recomendamos [9, 18, 26].

Um dos nossos objetivos é estudar localmente funções analíticas  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ . Para isso, introduziremos uma relação de equivalência no espaço das funções analíticas definidas em um aberto contendo a origem de  $\mathbb{C}^n$ , da seguinte forma:

**Definição 1.5.1.** *Dizemos que a função  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  é equivalente à função  $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , se existe um aberto  $U \subset \mathbb{C}^n$ , com  $0 \in U$ , tal que  $f|_U \equiv g|_U$ . As classes de equivalência são chamadas de germes, denotadas por  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ , ou simplesmente, por  $f$ . A coleção de todos esses germes de funções citados acima é denotada por  $\mathcal{O}_n$ . Observemos que  $\mathcal{O}_n$  é um anel noetheriano local cujo ideal maximal é dado por  $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n : f(0) = 0\}$ .*

**Teorema 1.5.2** ([18], Teorema 2.10). *Sejam  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  germe de função analítica,  $V = f^{-1}(0)$ ,  $\mathbb{B}_\varepsilon$  bola centrada na origem e de raio  $\varepsilon$  e  $K = V \cap \mathbb{S}^{2n-1}$ . Se  $\varepsilon$  for suficientemente pequeno temos que  $V \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  é homeomorfo ao cone  $C(K) = \{tz : 0 \leq t \leq 1, z \in K\}$ .*

Seja  $\phi : \mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$ , e denotemos  $\phi^{-1}(e^{i\theta}) = F_\theta$ .

O resultado básico da teoria de Milnor é o Teorema da Fibração, que mostra que  $\phi$  define uma fibração de  $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{S}^1$  com fibra  $F_\theta$ .

**Teorema 1.5.3** ([18], Teorema 4.8). *Para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno temos que  $\mathbb{S}_\varepsilon \setminus K$  é um fibrado diferenciável localmente trivial sobre  $\mathbb{S}^1$ , com projeção  $\phi$  e fibra  $F_\theta$  como acima.*

**Definição 1.5.4.**  *$F_\theta$  é dita a fibra de Milnor de  $f$ .*

Em [18], J. Milnor provou que as fibras  $F_\theta$  são todas difeomorfas, isto segue do fato que a base  $\mathbb{S}^1$  é uma variedade conexa. Também em [18], J. Milnor apresentou uma descrição alternativa da fibra de Milnor.

**Teorema 1.5.5** ([18], Teorema 5.11). *Sejam  $c \in \mathbb{C}^*$  um número complexo suficientemente próximo de zero e  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  germe de aplicação analítica, então a interseção*

da hipersuperfície complexa  $f^{-1}(c)$  com a bola aberta  $\mathbb{B}_\varepsilon(0)$  de centro 0 e raio  $\varepsilon$  de  $\mathbb{C}^n$  é uma variedade suave difeomorfa a fibra  $F_\theta$ .

Nas hipóteses do teorema acima, denotaremos  $f^{-1}(c) \cap \mathbb{B}_\varepsilon(0) = F_f$ .

O número de Milnor, que definiremos a seguir, é um invariante de suma importância na teoria de singularidades, auxiliando na teoria de classificação. Para este conceito e resultados a ele relacionados sugerimos [8] e [18].

**Teorema 1.5.6** ([18], Teorema 6.5). *Seja  $f \in \mathcal{O}_n$  germe de função analítica com singularidade isolada na origem, então cada fibra  $F_f$  tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de esferas  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

**Definição 1.5.7.** *Sejam  $f \in \mathcal{O}_n$ , germe de função analítica com singularidade isolada na origem. Definimos o número de Milnor  $\mu(f)$  como o número de esferas do buquê dado pelo Teorema anterior.*

**Teorema 1.5.8.** *Sejam  $f \in \mathcal{O}_n$ , germe de função analítica com singularidade isolada na origem e  $J(f)$  o ideal jacobiano de  $f$ . Então,*

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}.$$

## 1.6 Variedades algébricas e espaços analíticos complexos

Nesta seção trabalharemos com o caso complexo.

### Variedades algébricas

O  $n$ -espaço afim sobre  $\mathbb{C}$ , denotado por  $\mathbb{A}^n$  é o conjunto de todas as  $n$ -uplas de elementos de  $\mathbb{C}$ . Um ponto  $p \in \mathbb{A}^n$  é dado por  $p = (a_1, \dots, a_n)$ , com  $a_i \in \mathbb{C}$ , e  $a_i$  a  $i$ -ésima coordenada de  $p$ .

Seja  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  o anel de polinômios em  $n$  variáveis sobre  $\mathbb{C}$ . Podemos interpretar os elementos de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  como funções do espaço afim  $\mathbb{A}^n$  sobre  $\mathbb{C}$ , com  $f(p) = f(a_1, \dots, a_n)$ , onde  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  e  $p \in \mathbb{A}^n$ . Desta forma, faz sentido falar no conjunto de zeros de  $f$ , que denotaremos por  $Z(f) = \{p \in \mathbb{A}^n; f(p) = 0\}$ . De

uma forma mais geral, se  $T$  for um subconjunto de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , podemos definir o conjunto de zeros de  $T$  como sendo o conjunto de zeros comuns a todos os elementos de  $T$ . Denotaremos esse conjunto da seguinte forma,

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{A}^n; f(p) = 0 \forall f \in T\}.$$

Se  $I$  for o ideal de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  gerado por  $T$  então  $Z(T) = Z(I)$ . Mais ainda, como  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  é um anel Noetheriano, pelo Teorema da base de Hilbert qualquer ideal  $I$  tem um número finito de geradores  $f_1, \dots, f_r$ , logo  $Z(T)$  pode se expressar como o conjunto de zeros comuns de um número finito de polinômios  $f_1, \dots, f_r$ .

**Definição 1.6.1.** *Um subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{A}^n$  é chamado conjunto algébrico, se existe um subconjunto  $T \subset \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $Y = Z(T)$ .*

**Proposição 1.6.2** ([13], Proposição 1.11). *A união de dois conjuntos algébricos é um conjunto algébrico. A intersecção de uma família arbitrária de conjuntos algébricos também é um conjunto algébrico.*

Para a demonstração deste resultado e referência básica para o assunto ver [13].

**Definição 1.6.3.** *Os conjuntos algébricos são os conjuntos fechados de uma topologia de  $\mathbb{A}^n$ , denominada topologia de Zariski.*

**Definição 1.6.4.** *Dizemos que um subconjunto não vazio  $Y$  contido em  $X$  é irredutível, se o mesmo não pode se expressar como uma união  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , onde  $Y_1, Y_2$  são fechados em  $Y$ .*

**Definição 1.6.5.** *Uma variedade algébrica afim é um subconjunto irredutível de  $\mathbb{A}^n$  (com a topologia induzida).*

## Espaços analíticos complexos

Analogamente ao caso de polinômios, podemos também estudar o conjunto de zeros de uma ou mais funções analíticas. Estes são os chamados espaços analíticos. Nesta seção, trabalharemos com  $\mathbb{C}^n$  dotado da topologia usual.

**Definição 1.6.6.** *Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{C}^n$  e seja  $X$  um subconjunto de  $U$ . Dizemos que  $X$  é um subconjunto analítico de  $U$  se para todo  $a \in U$ , existem um domínio  $V$  tal que  $a \in V \subset U$  e funções analíticas  $f_1, \dots, f_r$  em  $V$  tais que:*

$$X \cap V = \{z \in V; f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}.$$

*Dizemos que  $X \subset \mathbb{C}^n$  é um conjunto analítico, se  $X$  é um subconjunto analítico de um aberto de  $\mathbb{C}^n$ .*

*Dizemos que  $X \subset \mathbb{C}^n$  é um conjunto analítico em  $z \in \mathbb{C}^n$ , se existe um domínio  $U \subset \mathbb{C}^n$  tal que  $z \in U$  e  $X \cap U$  é um subconjunto analítico de  $U$ . Observemos que  $X$  é um conjunto analítico se ele é um conjunto analítico em cada  $z \in X$ .*

**Definição 1.6.7.** *Seja  $X$  um conjunto analítico, dizemos que um ponto  $z$  de  $X$  é um ponto regular ou suave, se para alguma vizinhança  $U$  de  $z$ , o conjunto  $U \cap X$  pode ser descrito como o conjunto dos zeros de um número finito de funções analíticas em  $U$  que possuem  $z$  como ponto regular. Um ponto de  $X$  não regular é chamado de ponto singular de  $X$ .*

Agora consideremos a seguinte definição:

**Definição 1.6.8.** *Consideremos o conjunto de pares  $(V_\alpha, U_\alpha)$ , onde  $U_\alpha$  é uma vizinhança aberta da origem em  $\mathbb{C}^n$  e  $V_\alpha$  subconjuntos de  $U_\alpha$ . Dois tais pares  $(V_1, U_1)$  e  $(V_2, U_2)$  são equivalentes se existe uma vizinhança da origem  $W \subset U_1 \cap U_2$  tal que  $V_1 \cap W = V_2 \cap W$ . Uma classe de equivalência destes pares é chamada germe na origem em  $\mathbb{C}^n$ .*

Se  $f \in \mathcal{O}_n$ , a classe de equivalência do conjunto  $Z(f) = \{x : f(x) = 0\}$ , onde  $f$  é um representante do germe  $f$ , é denotada por  $\mathcal{V}(f)$ ; se  $f_1$  e  $f_2$  são dois representantes de um mesmo germe, então os conjuntos  $\mathcal{V}(f_1)$  e  $\mathcal{V}(f_2)$  são iguais.

**Definição 1.6.9.** *Um germe de espaço analítico  $(X, 0)$  em torno da origem é o germe do subconjunto*

$$X = Z(f_1) \cap \dots \cap Z(f_r) = Z(f_1, \dots, f_r),$$

*para  $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}_n$ .*



Definimos o ideal de um germe de espaço analítico  $X$  por

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathcal{O}_n : X \subset f^{-1}(0)\}.$$

**Definição 1.6.10.** Dizemos que um germe de espaço analítico  $X$  é irredutível, quando para quaisquer germes  $X_1$  e  $X_2$  tais que  $X = X_1 \cup X_2$  então  $X = X_1$  ou  $X = X_2$ . Neste caso, dizemos que  $X$  é uma variedade analítica.

O nosso objetivo é estudar a natureza de tais espaços analíticos na vizinhança de algum ponto fixado em  $\mathbb{C}^n$ , o qual sem perda de generalidade consideraremos a origem.

**Proposição 1.6.11.** Seja  $X$  um germe de espaço analítico, então existem um inteiro positivo  $p$  e  $X_1, \dots, X_p$  variedades irredutíveis, com  $X_i$  não contida em  $X_j$ , para todo  $i \neq j$ , tais que  $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$ . Essas variedades são unicamente determinadas, a menos da ordem, e são chamadas de componentes irredutíveis de  $X$ .

**Definição 1.6.12.** A dimensão de um germe de espaço analítico é a maior das dimensões de suas componentes irredutíveis.

**Definição 1.6.13.** Dizemos que um germe de espaço analítico  $X$  é equidimensional, quando todas as suas componentes irredutíveis tem a mesma dimensão.

**Definição 1.6.14.** Dizemos que um germe  $(X, 0)$  de  $X = Z(f_1, \dots, f_r)$  na origem é reduzido, se a  $\mathbb{C}$ -álgebra  $\frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}$  não possui elementos nilpotentes.

## Interseção completa com singularidade isolada

A definição de número de Milnor que vimos na seção 1.5 foi introduzida por J. Milnor em [18] para hipersuperfícies com singularidade isolada, existe também uma definição mais geral para este invariante, para a qual precisaremos da noção de interseção completa com singularidade isolada, que é um caso particular de variedade analítica.

Seja  $f : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^k$  uma aplicação holomorfa e consideremos  $V = f^{-1}(0)$ .

**Definição 1.6.15.** Dizemos que  $V$  é uma interseção completa (geométrica) se  $\dim_{\mathbb{C}} V = n$  e se  $V$  for definida como o conjunto comum de zeros de  $k$  funções holomorfas.

Também,  $V$  é uma interseção completa se o ideal  $\mathcal{I}(V) = \{g \in \mathcal{O}_{n+k} : V \subset g^{-1}(0)\}$  é gerado por  $k$  funções holomorfas.

**Proposição 1.6.16.** *Sejam  $f : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^k$  uma aplicação holomorfa e  $V = f^{-1}(0)$ . Então,  $V$  é uma interseção completa geométrica se, e somente se, é uma interseção completa.*

No caso em que  $V$  tenha singularidade isolada, ou seja,  $V$  seja uma interseção completa com singularidade isolada, abreviaremos por ICSI. Neste caso, podemos generalizar o número de Milnor, esta definição foi dada em [12] por H. Hamm.

**Teorema 1.6.17** ([12]). *Sejam  $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^k$  uma aplicação (germe) analítica,  $V = f^{-1}(0)$  uma ICSI e  $c \in \mathbb{C}^k$  suficientemente próximo de  $0 \in \mathbb{C}^k$ . Então, cada fibra  $F_f = f^{-1}(c) \cap \mathbb{B}_\varepsilon(0)$  tem o mesmo tipo de homotopia de um buquê de esferas  $\mathbb{S}^n$ .*

**Definição 1.6.18.** *Sejam  $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^k$  uma aplicação (germe) analítica e  $V = f^{-1}(0)$  uma ICSI na origem. Dada uma fibra  $F_f$ , definimos o número de Milnor de  $V$ ,  $\mu(V)$ , como sendo o número de esferas do buquê citado no teorema anterior.*

**Teorema 1.6.19** (Fórmula de Lê-Greuel). *[[6], Teorema 4.6] Seja uma aplicação analítica  $f = (f_1, \dots, f_k) : \mathbb{C}^{n+k} \rightarrow \mathbb{C}^k$  com uma singularidade isolada na origem. Seja  $V_1$  um germe na origem de uma ICSI em  $\mathbb{C}^n$  e  $V$  um germe na origem de uma ICSI definida em  $V_1$  por  $f_k = 0$ . Seja  $f_1, \dots, f_{k-1}$  um sistema dos geradores do ideal que define  $V_1$  na origem em  $\mathbb{C}^n$ . Então,*

$$\mu(V_1) + \mu(V) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{(f_1, \dots, f_{k-1}, J(f_1, \dots, f_k))}.$$



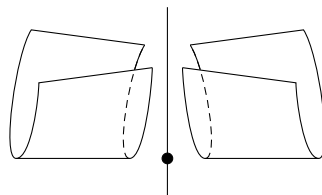
# Obstrução de Euler de $f$

O objetivo deste capítulo é expor conceitos necessários para a definição e estudo da obstrução de Euler e da obstrução de Euler de uma função. Como referência básica para esse assunto sugerimos [3].

## 2.1 Estratificação de Whitney

Mostraremos nesta seção a noção de estratificação de Whitney, introduzida por H. Whitney em [28] e amplamente utilizada desde então. Uma referência para esse assunto é [9].

**Definição 2.1.1.** *Sejam  $M$  uma variedade suave e  $V \subset M$ . Uma estratificação localmente finita de  $V$  é uma partição de  $V$  em subvariedades de  $M$  (chamadas de estratos) tais que, para todo ponto de  $V$  existe uma vizinhança em  $M$  que encontra apenas um número finito de estratos.*



**Definição 2.1.2.** Dizemos que a estratificação  $\{V_\alpha\}$  de  $V$  satisfaz a condição de fronteira, se para dois estratos  $V_\alpha$  e  $V_\beta$ , tais que  $V_\alpha \cap \overline{V_\beta} \neq \emptyset$  então  $V_\alpha \subset \overline{V_\beta}$ .

## Condições de Whitney

**Definição 2.1.3.** A estratificação  $\{V_\alpha\}$  satisfaz as condições de Whitney se para todo par  $(V_\alpha, V_\beta)$  de estratos, tais que  $V_\beta$  esteja no fecho de  $V_\alpha$  e para todo ponto  $y$  de  $V_\beta$  temos:

a) Para toda sequência de pontos  $\{x_i\}$  de  $V_\alpha$  convergindo para  $y$ , tal que o limite

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(V_\alpha) = T$$

existe na Grassmanniana correspondente, então  $T$  contém  $T_y(V_\beta)$ .

b) Se além disso temos uma sequência  $\{y_i\}$  de pontos de  $V_\beta$  com limite  $y$  e tal que o limite de direções

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = \lambda$$

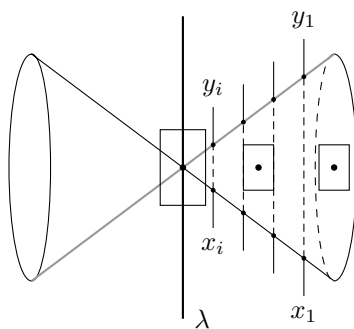
existe no espaço projetivo, então  $T$  contém  $\lambda$ .

Estas são as chamadas condição (a) e condição (b) de Whitney.

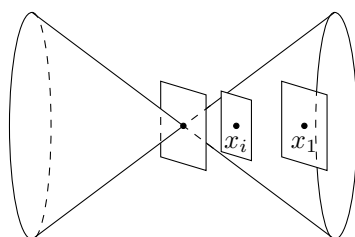
H. Whitney mostrou em seu trabalho [28] que toda variedade analítica complexa admite uma estratificação satisfazendo essas duas condições.

Uma estratificação que satisfaz as condições de Whitney e a condição de fronteira é chamada de estratificação de Whitney, ou estratificação Whitney regular.

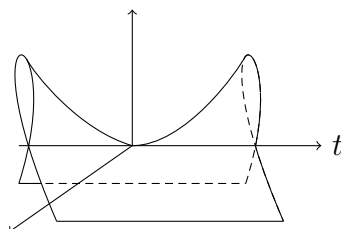
**Exemplo 2.1.4.** Consideremos como primeiro exemplo o cone  $C$  com vértice na origem, e a estratificação  $\{V_1, V_2\}$ , onde  $V_1$  é uma geratriz do cone e  $V_2 = C \setminus V_1$ . Neste caso, as condições (a) e (b) de Whitney não são satisfeitas. Para ver isto, basta considerar uma sequência  $\{x_i\}$  de pontos de  $C$ , situados todos sobre uma geratriz  $L$  do cone que não seja  $V_1$ , cujo limite seja a origem, de tal modo que o segmento  $\overline{x_i y_i}$  tenha sempre a mesma direção  $\lambda$ .



A condição (a) não é satisfeita, já que o limite dos espaços tangentes  $T_{x_i}L$  não contém o espaço  $T_0(V_1)$ , a verificação de que a condição (b) também não é satisfeita vem do fato que  $\lambda$  não está contida no limite dos espaços tangentes  $T_{x_i}L$ .



**Exemplo 2.1.5.** Consideremos agora a variedade  $V$  em  $\mathbb{C}^3$  dada pelo conjunto de zeros de  $y^2 + x^3 - t^2x^2 = 0$ . Se tomarmos o eixo da coordenada  $t$  como um estrato  $V_1$  e a parte regular da variedade  $V_{reg}$  como sendo outro estrato, temos que a estratificação  $\{V_1, V_2\}$  satisfaz a condição (a), mas não a condição (b). Porém se acrescentarmos um estrato de dimensão zero, a origem de  $\mathbb{C}^3$ , teremos as duas condições de Whitney satisfeitas.



**Figura 2.1:** Variedade Singular.

## 2.2 Modificação de Nash

Abordaremos nesta seção, os conceitos de modificação de Nash e de fibrado de Nash. Para resultados sobre modificação de Nash e resolução de singularidades sugerimos [23].

Denotaremos por  $G(d, n)$  a Grassmanniana de  $d$ -planos de  $\mathbb{C}^n$  (para maiores detalhes sobre a variedade Grassmanniana sugerimos [15]). Seja  $X$  um representante de  $(X, 0)$  um germe de espaço analítico complexo, equidimensional de dimensão complexa  $d$  com  $X \subset U$ , onde  $U$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{C}^n$ .

Sobre a parte regular  $X_{reg}$  de  $X$ , podemos definir  $\phi : X_{reg} \rightarrow U \times G(d, n)$  a aplicação de Gauss da seguinte forma:

$$\phi(x) = (x, T_x X_{reg}).$$

$$\begin{array}{ccc} & & U \times G(d, n) \\ & \nearrow \phi & \downarrow \\ X_{reg} & \longrightarrow & U \end{array}$$

**Definição 2.2.1.** A modificação ou transformação de Nash  $\tilde{X}$  é definida como o fecho da imagem de  $\phi$  em  $U \times G(d, n)$ .

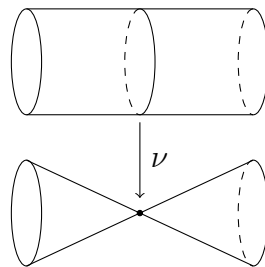
**Observação 2.2.2.** Como observado em [3] na página 130,  $\tilde{X}$  é um espaço analítico complexo munido de uma projeção analítica natural  $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ . Cujas restrição  $\nu|_{\nu^{-1}(X_{reg})}$  é holomorfa, bijetora e sua inversa também é holomorfa.

Denotemos por  $U(d, n)$  o fibrado tautológico sobre  $G(d, n)$  o qual contém os elementos da forma,  $(P, v)$ , onde  $P \in G(d, n)$  e  $v \in P$ . E denotemos por  $T$  o fibrado correspondente a extensão trivial de  $U(d, n)$  sobre  $U \times G(d, n)$ , ou seja,  $T$  contém os elementos da forma,  $(x, P, v)$ , onde  $(x, P) \in U \times G(d, n)$  e  $v \in P$ .

**Definição 2.2.3.** O fibrado de Nash  $\tilde{T}$  de base  $\tilde{X}$  é a restrição de  $T$  sobre  $\tilde{X}$ , temos então o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \hookrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{X} & \hookrightarrow & U \times G(d, n) \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ X & \hookrightarrow & U \end{array}$$

**Exemplo 2.2.4.** A modificação de Nash do cone  $C$  é um cilindro  $\tilde{C}$ .



**Observação 2.2.5.** Uma observação importante é o fato que a modificação de Nash de um conjunto singular nem sempre é regular, ou seja, nem sempre a modificação de Nash resolve a singularidade de uma variedade algébrica ou analítica.

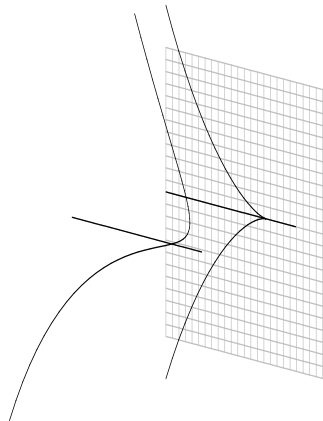
**Exemplo 2.2.6.** Consideremos, por exemplo, a curva plana formada pela cúspide e uma reta  $l$ , tal que  $l$  seja o limite

$$\lim_{p \rightarrow 0} l_p,$$

onde  $l_p$  é a reta tangente à cúspide no ponto  $p$ , esta curva está representada na figura 2.2 no plano cinza.

A modificação de Nash da curva plana é a curva espacial ilustrada na figura 2.2. Note que  $(0, l)$  continua sendo um ponto singular na modificação de Nash, já que este continua sendo um ponto de cruzamento entre duas curvas.





**Figura 2.2**

## 2.3 Obstrução de Euler

A obstrução de Euler foi definida por R. D. MacPherson em [16]. Apresentaremos nesta seção, uma outra definição dada por J.-P. Brasselet e M.-H. Schwartz em [2], que obtiveram, nesse mesmo artigo, a equivalência entre as duas definições.

Sejam  $(X, 0)$  germe de espaço analítico complexo, equidimensional e  $X \subset U$  um representante do germe, onde  $U$  é um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}^n$ . Consideremos  $\{V_i\}$  uma estratificação de Whitney de  $U$  adaptada à  $X$ , ou seja,  $X$  é união de estratos de  $U$ . Suponhamos que a origem seja um estrato e que o representante  $X$  é suficientemente pequeno para que  $\{0\}$  esteja no fecho de todos os estratos. Seja  $TU$  o fibrado tangente de  $U$ .

**Definição 2.3.1.** *Um campo de vetores estratificado  $v$  em  $X$  é uma seção contínua da restrição  $TU|_X$  tal que se  $x \in X \cap V_i$  então  $v(x) \in T_x V_i$ .*

Seja  $\mathbb{B}_\varepsilon(a)$  a bola em  $\mathbb{C}^n$  centrada em  $a$  e de raio  $\varepsilon$ .

**Definição 2.3.2.** *Um campo de vetores estratificado é radial em  $a \in X$  se, para cada bola suficientemente pequena  $\mathbb{B}_\varepsilon(a) \subset U$  e para cada ponto da fronteira  $x \in \partial\mathbb{B}_\varepsilon(a)$ , o vetor  $v(x)$  está saindo da bola  $\mathbb{B}_\varepsilon(a)$ . Tal campo de vetores tem necessariamente uma singularidade isolada em  $a$ .*

**Lema 2.3.3** ([2], Prop. 9.1). *Um campo de vetores estratificado  $v$  não nulo definido sobre um subconjunto  $A \subset X$  admite um levantamento canônico  $\tilde{v}$  como seção não nula de  $\tilde{T}$  sobre  $\nu^{-1}(A)$ .*

*Demonstração.* Temos o seguinte diagrama :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T} & \xrightarrow{\nu_*} & TU|_A \\ \tilde{v} \updownarrow & & \updownarrow v \\ \nu^{-1}(A) & \xrightarrow{\nu} & A \end{array}$$

onde  $\nu_* : \tilde{T} \rightarrow TU|_A$  é definida por  $\nu_*(x, P, v(x)) = v(x)$ .

Seja  $x \in A \subset X$ .

Para  $x \in X_{reg}$ , temos  $\nu^{-1}(x) = (x, T_x X_{reg}) = \tilde{x}$ . Como  $v(x) \in T_x X_{reg}$ , então  $(x, T_x X_{reg}, v) \in \tilde{T}$ . Portanto, existe um único vetor  $\tilde{v}(\tilde{x}) = (x, T_x X_{reg}, v)$  em  $\tilde{T}$  e tal que  $\nu_*(\tilde{v}(\tilde{x})) = v(x)$ .

Agora, consideraremos o caso em que  $x$  é um ponto singular de  $X$ . Temos que  $x \in V_i$ , para algum estrato  $V_i$  e como o campo de vetores é estratificado, segue que  $v(x) \in T_x V_i$ .

Para cada  $\tilde{x}$  de  $\nu^{-1}(x)$ , existe uma sequência  $\{\tilde{x}_m\}$  em  $\tilde{X}$  tal que  $\nu(\tilde{x}_m) = x_m \in X_{reg}$  com  $\lim \tilde{x}_m = \tilde{x}$ .

Logo,  $\tilde{x}_m = (x_m, T_{x_m} X_{reg})$ , então o limite

$$\lim T_{x_m} X_{reg} = P$$

existe. Assim, pela condição (a) de Whitney, temos  $T_x V_i \subset P$ , logo  $v(x) \in P$ . Portanto, temos um elemento bem determinado  $\tilde{v}(\tilde{x}) = (x, P, v(x)) \in \tilde{T}$ , tal que  $\nu_*(\tilde{v}(\tilde{x})) = v(x)$ .

□

**Teorema 2.3.4** (Bertini-Sard, ver [27]). *Se  $\{V_i\}$  é uma estratificação de Whitney de  $X$ , então para  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno, a esfera  $\partial\mathbb{B}_\varepsilon(0)$  é transversal aos estratos  $V_i$ .*

A definição a seguir é atribuída à J.-P. Brasselet e M.-H. Schwartz ([2], Prop. 10.1).

**Definição 2.3.5.** *Seja  $v$  um campo de vetores radial em  $a \in X$  sobre  $X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon(a)$  e  $\tilde{v}$  o levantamento de  $v$  sobre o conjunto  $\nu^{-1}(X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon(a))$  como uma seção de  $\tilde{T}$ . A obstrução de Euler  $Eu_X(a)$  é a obstrução para se estender  $\tilde{v}$  como uma seção não-nula de  $\tilde{T}$  sobre  $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a))$ .*

Mais precisamente, o campo  $\tilde{v}$  define um cociclo de obstrução  $\mathcal{O}(\tilde{v})$ , que mede a obstrução para estender  $\tilde{v}$  como seção não-nula de  $\tilde{T}$  sobre  $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a))$  :

$$\mathcal{O}(\tilde{v}) \in Z^{2d}(\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a)), \nu^{-1}(X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon(a))).$$

A obstrução de Euler  $Eu_X(a)$  é o inteiro dado pela avaliação do cociclo  $\mathcal{O}(\tilde{v})$  sobre a classe fundamental  $(\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a)), \nu^{-1}(X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon(a)))$ , ou seja,

$$Eu_X(a) := \mathcal{O}(\tilde{v}) \cap (\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a)), \nu^{-1}(X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon(a)))$$

**Observação 2.3.6.** Algumas propriedades importantes da obstrução de Euler:

- A obstrução de Euler em um ponto regular é igual à 1. Isto é fácil ver usando simplesmente a definição de obstrução de Euler.
- A obstrução de Euler em um ponto de uma curva é exatamente a multiplicidade do ponto sobre a curva [10]. Esta propriedade sairá também diretamente como corolário do Teorema 2.4.2.
- Um outro resultado importante sobre a obstrução de Euler, mostrado inicialmente por J.-P. Brasselet e M.-H. Schwartz [2] e depois por vários autores, é que a obstrução de Euler é constante ao longo de cada estrato de uma estratificação Whitney.
- $Eu_{X \times Y}(a, b) = Eu_X(a) \cdot Eu_Y(b), \forall a \in X, \forall b \in Y$ .

## 2.4 Uma Fórmula Topológica

A obstrução de Euler não é facilmente calculada a partir de sua definição, o que motivou a obtenção de fórmulas que facilitassem seu cálculo. Apresentaremos nesta seção, uma fórmula de natureza topológica para a obstrução de Euler.

**Definição 2.4.1.** *Uma forma linear complexa genérica (com respeito a  $X$ ) é uma forma linear complexa  $\ell : U \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $0 \in \ell^{-1}(0)$  e  $\text{Ker}(\ell)$  é transversal a todos os limites de espaços tangentes  $\{T_{x_n}V_i\}$ , para todo estrato  $V_i$  e toda sequência  $\{x_n\} \subset V_i$  convergindo a 0.*

A demonstração do teorema a seguir, o qual apresenta uma fórmula para a obstrução de Euler, encontra-se em [4].

**Teorema 2.4.2** ([4], Teo. 3.1). *Sejam  $(X, 0)$  um germe de variedade analítica complexa e  $\{V_i\}$  uma estratificação de Whitney de  $X$ . Seja  $\ell : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma forma linear genérica, onde  $U$  é uma vizinhança aberta de 0 em  $\mathbb{C}^n$ . Temos então:*

$$Eu_X(0) = \sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_i),$$

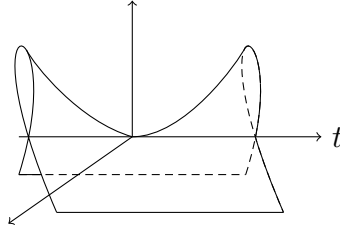
onde  $\mathbb{B}_\varepsilon$  é uma pequena bola fechada em torno da origem em  $\mathbb{C}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\|t_0\| \ll 1$  e  $Eu_X(V_i)$  é a obstrução de Euler de  $X$  em qualquer ponto do estrato  $V_i$ .

**Exemplo 2.4.3.** Consideremos a função  $f(x, y, t) = y^2 - x^3 - t^2x^2$  e denotemos  $X = f^{-1}(0)$ . Consideremos uma estratificação de Whitney de  $X$  definida por

$$\{V_0 = \{0\}, V_1 = \{\text{eixo } -t\} \setminus \{0\}, V_2 = V_{reg}\}.$$

Consideremos a forma  $\ell(x, y, t) = t$ . Do Teorema 2.4.2, temos

$$\begin{aligned} Eu_X(0) &= \chi(V_0 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_0) \\ &+ \chi(V_1 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_1) \\ &+ \chi(V_2 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_2). \end{aligned}$$



Mas, como  $V_0 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0) = \emptyset$  temos então  $\chi(V_0 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) = 0$ .

Por outro lado  $V_1 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0) = \{(0, 0, t_0)\}$ , portanto,  $\chi(V_1 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) = 1$ .

Temos  $V_2 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0) = \{(x, y, t)/y^2 - x^3 - t_0^2 x^2 = 0\} \setminus \{(0, 0, t_0)\}$ .

Com a ajuda do Teorema 2 de [11], o qual apresenta uma fórmula para a característica de Euler de uma curva plana, podemos calcular  $\chi(V_2 \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) = -1$

Pelo primeiro item da Observação 2.3.6 temos  $Eu_X(V_2) = Eu_X(V_{reg}) = 1$ . Para calcular  $Eu_X(V_1)$  tomemos  $t_0 \in V_1$ , note que em uma pequena vizinhança de  $t_0$  temos que  $V_1$  é difeomorfa ao produto de um pequeno disco contendo  $t_0$  e contido no eixo  $-t$  com a curva  $X \cap \ell^{-1}(t_0)$ , usando o segundo e o último item da Observação 2.3.6, obtemos  $Eu_X(V_1) = 2$ . Então:

$$Eu_X(0) = 0.Eu_X(0) + 1.2 + (-1).1 = 1.$$

Portanto, qualquer seção não nula  $\tilde{v}$  de  $\tilde{T}$  sobre  $\nu^{-1}(X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon)$ , levantamento de um campo de vetores radial  $v$  em  $0 \in X$  sobre o conjunto  $X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon$ , não pode ser estendido sobre  $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$  sem singularidade.

## 2.5 Obstrução de Euler de $f$

A obstrução de Euler de uma função  $f$  foi introduzida por J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran e J. Seade em [1]. O objetivo dos autores em [1] é entender o que impede a obstrução de Euler de satisfazer a condição local de Euler para funções analíticas com singularidade isolada na origem. O "defeito" para que a condição seja satisfeita nesse caso, é chamado obstrução de Euler de  $f$ .

Um invariante importante de um germe de função analítica  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com ponto crítico isolado na origem é o seu número de Milnor  $\mu(f)$ , definido na seção 1.5.

Este invariante fornece várias informações sobre a geometria de  $f$ , por exemplo, no caso em que  $f$  tem ponto crítico isolado na origem os seguintes invariantes coincidem a menos de sinal.

- (a) O número de Milnor de  $f$  em 0, denotado por  $\mu(f)$ ;
- (b) O número de pontos de Morse de uma Morsificação de  $f$ ;
- (c) O índice de Poincaré-Hopf do campo gradiente de  $f$  conjugado  $\overline{\nabla}f$ .

Suponhamos agora que  $(X, 0)$  seja um germe de um espaço analítico complexo mergulhado em  $\mathbb{C}^n$ . Uma das possíveis generalizações de (c) é a obstrução de Euler de  $f$  na origem, denotada por  $Eu_{f,X}(0)$ .

Para o desenvolvimento deste capítulo introduziremos noções básicas sobre funções complexas definidas em espaços singulares, mas especificamente variedades analíticas. Em [24], Lê D. T. introduziu a noção de funções analíticas com singularidade isolada sobre um espaço analítico complexo  $X$  com uma estratificação de Whitney  $\{V_i\}$ .

Sejam  $(X, 0)$  germe de espaço analítico complexo, equidimensional e  $X \subset U$  um representante do germe, com  $U$  aberto de  $\mathbb{C}^n$ . Consideremos  $\{V_i\}$  uma estratificação de Whitney de  $U$ , adaptada à  $X$ . Suponhamos que a origem seja um estrato e que o representante  $X$  é suficientemente pequeno para que  $\{0\}$  esteja no fecho de todos os estratos. Denotaremos por  $V_i(x)$  o estrato que contém  $x \in X$ .

Seja agora  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ , função analítica a qual é a restrição de uma função analítica  $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Definição 2.5.1.** *Um ponto  $x \in X$  é um ponto singular de  $f$  se  $d\tilde{f}(x)(T_x(V_i(x))) = 0$ , ou seja,  $T_x(V_i(x)) \subset \ker(d\tilde{f})$ .*

*Dizemos que  $f$  tem uma singularidade isolada em  $0 \in X$  relativa à estratificação de Whitney de  $X$  se em uma vizinhança de 0 em  $X$ , a origem é o único ponto singular.*

Com a construção a seguir, associaremos a  $f$  um campo estratificado denotado por  $\overline{\nabla}_X f$ . Denotemos por  $\overline{\nabla}\tilde{f}(x)$  o campo vetorial gradiente conjugado de  $\tilde{f}$  sobre um ponto

$x \in U$ , definido por

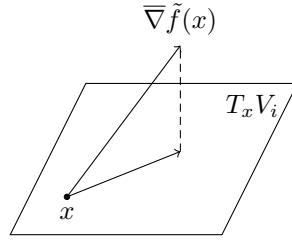
$$\bar{\nabla} \tilde{f}(x) = \left( \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}} \right),$$

onde a barra significa a conjugação complexa.

Consideremos  $f$  com uma singularidade isolada em  $0 \in X$ , isto implica que o núcleo  $\ker(d\tilde{f})$  é transversal à  $T_x(V_i(x))$  para todo  $x \in X \setminus \{0\}$ , assim

$$\text{Ang}\langle \bar{\nabla} \tilde{f}(x), T_x(V_i(x)) \rangle < \pi/2,$$

onde  $\text{Ang}\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o ângulo entre um vetor e um espaço vetorial. Então a projeção de  $\bar{\nabla} \tilde{f}(x)$  sobre  $T_x(V_i(x))$ , que denotaremos por  $\hat{\zeta}_i(x)$ , não é nula.



Seja  $V_j$  um estrato tal que  $V_i \subset \bar{V}_j$ , e seja  $\pi : U_i \rightarrow V_i$  uma vizinhança tubular de  $V_i$  em  $U$ . Seguindo a construção de M.-H. Schwartz [22], temos que a condição (a) de Whitney implica que para todo ponto  $y \in V_j \cap U_i$ , o ângulo entre  $\hat{\zeta}_j(y)$  e a extensão paralela de  $\hat{\zeta}_i(\pi(y))$  é pequeno. Esta propriedade implica que estes dois campos de vetores são homotópicos sobre o bordo de  $U_i$ , para  $U_i$  suficientemente pequeno. Podemos então colar os campos de vetores  $\hat{\zeta}_i(x)$  para obter um campo de vetores contínuo estratificado sobre  $X$ , que denotaremos por  $\bar{\nabla}_X f$ . Este campo de vetores é homotópico à  $\bar{\nabla} \tilde{f}|_X$  e temos  $\bar{\nabla}_X f \neq 0$  para todo  $x \in X \setminus \{0\}$ .

Analogamente ao caso de um campo radial, utilizando a transformada de Nash definida na seção 2.2, podemos também levantar o campo  $\bar{\nabla}_X f$  sobre  $\nu^{-1}(X \cap \partial \mathbb{B}_\varepsilon)$  sem singularidades. Denotemos este campo por  $\tilde{\nabla}_X f$ . O campo  $\tilde{\nabla}_X f$  define um cociclo de obstrução  $\mathcal{O}(\tilde{\nabla}_X f)$ , que mede a obstrução para estender  $\tilde{\nabla}_X f$  como seção não-nula de  $\tilde{T}$  sobre  $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ :

$$\mathcal{O}(\tilde{\nabla}_X f) \in Z^{2d}(\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon), \nu^{-1}(X \cap \partial \mathbb{B}_\varepsilon)).$$

Desta forma temos a seguinte definição.

**Definição 2.5.2.** *A obstrução de Euler de  $f$  na origem, denotada por  $Eu_{f,X}(0)$ , é o inteiro obtido pela avaliação do cociclo de obstrução  $\mathcal{O}(\tilde{\nabla}_X f)$  sobre a classe fundamental  $(\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon), \nu^{-1}(X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon))$ , ou seja,*

$$Eu_{f,X}(0) := \mathcal{O}(\tilde{\nabla}_X f) \cap (\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon), \nu^{-1}(X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon))$$

Note que todas essas definições e construções também valem quando consideramos  $f$  como a restrição de uma função analítica real. Podemos tomar  $f$  como a função distância a 0 em  $X$ , então  $\bar{\nabla}_X f$  é um campo de vetores radial e o invariante  $Eu_{f,X}(0)$  é a obstrução de Euler de  $X$  na origem.

Observamos que a métrica Hermitiana usual em  $\mathbb{C}^n$  define uma métrica Riemanniana, a qual permite identificar o fibrado vetorial  $T\mathbb{C}^n$  com o fibrado cotangente holomorfo  $T^*\mathbb{C}^n$ . Com essa identificação,  $d\tilde{f}$  corresponde ao campo de vetores gradiente conjugado.

A razão para se considerar o campo de vetores gradiente conjugado  $\bar{\nabla}_X f$  e não o campo gradiente usual  $\nabla_X f$  é dada pelo seguinte lema.

**Lema 2.5.3.** *O campo vetorial  $\bar{\nabla}_X f$  é o levantamento, a menos de homotopia, de um campo de vetores constante em  $\mathbb{C}$ , via  $d\tilde{f}$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, observamos que  $\bar{\nabla}_X f$  é homotópico à  $\bar{\nabla} \tilde{f}|_X$  e o vetor gradiente satisfaz,

$$d\tilde{f}(\bar{\nabla} \tilde{f}(x)) = \|\bar{\nabla} \tilde{f}(x)\|^2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in X \setminus \{0\}.$$

Isto significa que ele é um levantamento, a menos de uma homotopia, de um campo vetorial constante em um pequeno disco  $\mathbb{D}_\eta \subset \mathbb{C}$ .  $\square$

Neste trabalho, consideraremos somente funções analíticas complexas.

**Observação 2.5.4.** Se 0 é um ponto suave de  $X$  e também um ponto regular de  $f$ , então  $Eu_{f,X}(0) = 0$ . Na Proposição 2.5.6, provaremos esse resultado em uma situação mais geral.



**Definição 2.5.5.** *Seja  $(X, 0) \subset (U, 0)$  um germe de variedade analítica em  $\mathbb{C}^n$ , com uma estratificação de Whitney  $\{V_i\}$  e seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  um germe de aplicação analítica que vem de uma restrição de um germe de aplicação analítica regular  $\tilde{f} : (U, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . Dizemos que  $0$  é um ponto geral de  $f$  (ou que  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é geral em  $0$ ) se o hiperplano  $\ker(d\tilde{f}(0))$  é transversal em  $\mathbb{C}^n$  a todo limite de espaços tangentes  $T_{x_n}(V_i)$ , para todo  $V_i$  e toda sequência  $\{x_n\} \in V_i$  convergindo para  $0$ .*

Observemos que para toda  $f$  como acima, o conjunto de pontos gerais é não vazio e aberto em cada estrato (aberto) de  $X$ , essencialmente pelo Teorema de Sard (1.1.15).

A definição anterior é equivalente a dizer que, com uma mudança de coordenadas apropriada,  $\tilde{f}$  é uma forma linear em  $U$  e é genérica com respeito à  $X$ .

**Proposição 2.5.6.** *Seja  $0$  um ponto geral de  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ . Então,*

$$Eu_{f,X}(0) = 0$$

*Demonstração.* Como primeiro passo definimos a aplicação

$$\tilde{T} \subset (U \times G(d, n)) \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\tilde{F}} \mathbb{D}_\eta \subset \mathbb{C}$$

por  $\tilde{F}(x, P, y) = d\tilde{f}_x(y)$ . Como  $0$  é um ponto geral de  $f$ , então  $\tilde{K} = \tilde{T} \cap \tilde{F}^{-1}(0)$  é um subfibrado de  $\tilde{T}$  de codimensão (complexa) 1 e  $d\tilde{F}$  leva o complemento ortogonal de  $\tilde{K}$  isomorficamente sobre  $T\mathbb{D}_\eta$ .

Agora, toda  $\tilde{f}$  que define uma singularidade isolada em  $0$  em  $X$ , determina um subfibrado  $Q$  de  $T\mathbb{C}^n|_{X \setminus \{0\}}$  sempre transversal à  $\ker(d\tilde{f})$ , e a restrição de  $d\tilde{f}$  à  $Q$  é um isomorfismo entre  $Q$  e  $T\mathbb{D}_\eta$ .

Isto implica que cada vetor não-nulo em  $\mathbb{D}_\eta$  se levanta de forma compatível, a um campo de vetores em  $X \setminus \{0\}$  e também como uma seção de  $\tilde{T}|_X$ . O passo final é apenas notar que como no Lema 2.5.3, o vetor gradiente  $\bar{\nabla}_X f$  pode ser obtido por um levantamento de tais campos vetoriais.  $\square$

A proposição que apresentaremos a seguir, cuja demonstração encontra-se em [17], será utilizada em resultados do capítulo seguinte.

---

**Proposição 2.5.7.** *Seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  analítica em 0. Então existe um aberto de Zariski  $\Omega_f$  dentro do espaço das formas lineares em  $\mathbb{C}^n$ , tal que para todo  $\ell \in \Omega_f$ , 0 é um ponto geral para a aplicação  $f + \lambda \ell : X \rightarrow \mathbb{C}$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  suficientemente pequeno.*



## Teorema Principal

Neste capítulo, apresentaremos o resultado mais importante deste trabalho. O qual apresenta uma comparação entre a obstrução de Euler e a obstrução de Euler de uma função.

### 3.1 Teorema Principal

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  com singularidade isolada na origem e  $\{V_i\}$  uma estratificação de Whitney de  $X$ . Então,*

$$Eu_X(0) = \left( \sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_i) \right) + Eu_{f,X}(0)$$

onde  $\varepsilon$  é suficientemente pequeno,  $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  é tal que  $\|t_0\| \ll 1$  e  $Eu_X(V_i)$  é a obstrução de Euler de  $X$  em qualquer ponto do estrato  $V_i$ .

Note que este resultado generaliza o Teorema 2.4.2, basta considerar  $f$  uma forma linear genérica e utilizar a Proposição 2.5.6.

A demonstração deste resultado segue do Lema 3.1.2. Primeiramente, fixaremos algumas notações. Seja  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno tal que toda esfera  $\mathbb{S}_\gamma$  em  $U$  centrada em 0 e com raio  $\gamma \leq \varepsilon$  intersecta transversalmente todo estrato em  $X \setminus \{0\}$ , o qual existe pelo Teorema de Bertini-Sard 2.3.4. Para cada  $t \in \mathbb{C}$  denotaremos por  $Y_t := f^{-1}(t)$ . Seja

$\eta > 0$  pequeno o suficiente tal que para cada  $t$  em  $\mathbb{D}_\eta$  de raio  $\eta$  e centro em  $0 \in \mathbb{C}$ , a hipersuperfície  $Y_t$  intersecta transversalmente a esfera  $\mathbb{S}_\varepsilon$ . Agora, tome  $\varepsilon'$  com  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ , e um ponto  $t_0 \in \mathbb{D}_\eta$  tal que  $Y_{t_0}$  não encontra a esfera  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ . Note que o estrato  $V_i$  intersecta  $Y_{t_0} := f^{-1}(t_0)$  transversalmente e induz uma estratificação de Whitney para este espaço.

**Lema 3.1.2.** *Seja  $(X, 0)$  um germe de variedade analítica complexa, equidimensional de dimensão complexa  $d$ . Seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  analítica. Existe um campo vetorial estratificado  $w$  sobre  $X_{\varepsilon', \varepsilon} = X \cap (\mathbb{B}_\varepsilon \setminus \text{Int}(\mathbb{B}_{\varepsilon'}))$  onde  $0 < \varepsilon' < \varepsilon$  tal que:*

1.  *$w$  coincide com  $\overline{\nabla}_X f$  sobre  $X \cap \partial\mathbb{B}_{\varepsilon'}$  e  $w$  é radial sobre  $X \cap \partial\mathbb{B}_\varepsilon$ ;*
2.  *$w$  é tangente à  $Y_{t_0}$ ;*
3.  *$w$  tem apenas um número finito de zeros, e todos estão contidos em  $Y_{t_0}$ ;*
4. *em cada zero  $a$  de  $w$  o campo  $w$  é transversalmente radial ao estrato que contém  $a$  (ou seja, o campo  $w$  é transversal à fronteira de uma vizinhança tubular do estrato).*

Para a demonstração do Teorema 3.1.1, também usaremos o seguinte resultado.

**Teorema 3.1.3** (Théorème de proporcionalité, [2]). *Seja  $v$  um campo de vetores estratificado em um espaço analítico complexo equidimensional  $X$  mergulhado em  $\mathbb{C}^n$  com um zero isolado em  $a$  e seja  $I(v, a)$  o índice de Schwartz de  $v$  em  $a$ . Seja  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeno (dado pelo Teorema de Bertini-Sard 2.3.4). A restrição de  $v$  à interseção  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon(a)$  pode ser levantada como uma seção não-nula  $\tilde{v}$  do fibrado de Nash  $\tilde{T}$  de  $X$ . Seja  $\mathcal{O}(v, a)$  a obstrução para estender  $\tilde{v}$  como uma seção não-nula de  $\tilde{T}$  sobre  $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon(a))$ . Então,*

$$\mathcal{O}(v, a) = I(v, a) \cdot \text{Eu}_X(a).$$

**Observação 3.1.4.** O índice de Schwartz é definido para campos de vetores definidos em variedades singulares, para mais detalhes sugerimos [2] e [3]. Para a prova do teorema principal deste trabalho, construiremos um campo estratificado  $w$  sobre  $X$  com singularidades isoladas, de tal forma que em cada singularidade  $a$ , o campo é transversalmente radial ao estrato contendo  $a$ . Neste caso, o índice de Schwartz  $I(w; a)$  de  $w$  em  $a$  coincide o índice de Poincaré-Hopf  $\text{Ind}_{PH}(w, a)$  (definido na seção 1.1) de  $w$  em  $a$  no estrato que

contém  $a$ . Temos também que, se  $a$  é um ponto regular de  $X$ , então o índice de Schwartz é o índice de Poincaré-Hopf.

Primeiramente, vamos demonstrar o Teorema 3.1.1 assumindo o Lema 3.1.2 e faremos a demonstração do Lema 3.1.2 na seção 3.3.

*Demonstração do Teorema 3.1.1:* Se  $\xi$  é um campo de vetores estratificado em uma vizinhança da origem em  $X$  transversal à uma pequena esfera  $\mathbb{S}_\varepsilon$ , apontando para fora, então  $\xi$  é homotópico à um campo de vetores radial. Portanto, pela teoria de obstrução, para calcular a obstrução de Euler é suficiente considerar campos de vetores transversais à  $\mathbb{S}_\varepsilon$ .

A restrição do campo de vetores  $w$ , do Lema 3.1.2 sobre  $\partial(X_{\varepsilon',\varepsilon})$  é um campo de vetores estratificado, então pode ser levantado como uma seção  $\tilde{w}$  do fibrado de Nash  $\tilde{T}$  sobre  $\nu^{-1}(\partial(X_{\varepsilon',\varepsilon}))$  pelo Lema 2.3.3. Denotaremos por  $\mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_\varepsilon))$  a obstrução em se estender  $\tilde{w}$  sobre  $\nu^{-1}(X_\varepsilon)$ . Temos,

$$\mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_\varepsilon)) = \mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\varepsilon'})) + \mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\varepsilon',\varepsilon})).$$

Segue do Lema 3.1.2 (1),

$$Eu_X(0) = Eu_{f,X}(0) + \mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\varepsilon',\varepsilon})).$$

Pelo item (3) do Lema 3.1.2, a contribuição de  $\mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\varepsilon',\varepsilon}))$  está concentrada em  $\nu^{-1}(Y_{t_0} \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ . Os itens (3) e (4) do Lema 3.1.2, juntamente com o Teorema 3.1.3 e a observação 3.1.4 implicam que a contribuição de cada singularidade  $a$  de  $w$  para  $\mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\varepsilon',\varepsilon}))$  é  $Eu_X(a)$ -vezes o índice local de Poincaré-Hopf de  $w$  em  $a$ , visto como um campo de vetores no estrato  $V_i(a)$ . Logo,

$$\mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\varepsilon',\varepsilon})) = \sum_a Eu_X(a) \cdot Ind_{PH}(w, a).$$

Pelos itens (2) e (4) do Lema 3.1.2 e pelo Teorema de Poincaré-Hopf (1.1.41) a soma dos índices de Poincaré-Hopf da restrição de  $w$  à  $V_i \cap Y_{t_0}$  é  $\chi(V_i \cap Y_{t_0} \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\varepsilon', \varepsilon})) &= \sum_i \left( \sum_{a \in V_i} \text{Ind}_{PH}(w, a) \right) Eu_X(V_i) \\ &= \sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_i). \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.1.5.** *Seja  $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  germe com singularidade isolada na origem. Seja  $\ell$  uma forma linear em  $\Omega_f$  como na Proposição 2.5.7, e seja  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $f_\lambda := f + \lambda\ell$  seja geral na origem. Sejam  $F_f$  e  $F_{f_\lambda}$  as fibras de Milnor de  $f$  e  $f_\lambda$ , respectivamente, em  $X$ . Então,*

$$Eu_{f,X}(0) = \sum_i (\chi(V_i \cap F_{f_\lambda}) - \chi(V_i \cap F_f)) \cdot Eu_X(V_i).$$

*Demonstração.* Do Teorema 3.1.1, temos

$$Eu_{f,X}(0) = Eu_X(0) - \left( \sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_i) \right).$$

Segue dos Teoremas 3.1.1 e 1.5.5,

$$Eu_{f,X}(0) = \left( \sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f_\lambda^{-1}(t_0)) \cdot Eu_X(V_i) \right) + Eu_{f_\lambda,X}(0) - \left( \sum_i \chi(V_i \cap F_f) \cdot Eu_X(V_i) \right).$$

Da Proposição 2.5.6 segue  $Eu_{f_\lambda,X}(0) = 0$ , portanto,

$$Eu_{f,X}(0) = \sum_i \left( \chi(V_i \cap F_{f_\lambda}) - \sum_i \chi(V_i \cap F_f) \right) \cdot Eu_X(V_i).$$

□

**Observação 3.1.6.** Se  $X = \mathbb{C}^d$  e  $f : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma função analítica com singularidade isolada na origem e número de Milnor  $\mu(f)$ , então

$$Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0) = (-1)^d \mu(f).$$

Pois, pelo Teorema 3.1.1,

$$Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0) = Eu_{\mathbb{C}^d}(0) - \chi(\mathbb{C}^d \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(t_0)).Eu_X(\mathbb{C}^d).$$

Logo,

$$Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0) = Eu_{\mathbb{C}^d}(0) - \chi(F_f).Eu_{\mathbb{C}^d}(0).$$

Do primeiro item da Observação 2.3.6, temos  $Eu_{\mathbb{C}^d}(0) = 1$  e a característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor de  $f$  é igual à  $1 + (-1)^{d-1}\mu(f)$  (ver [18]). Assim,

$$Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0) = 1 - 1 - (-1)^{d-1}\mu(f)$$

Portanto,

$$Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0) = (-1)^d\mu(f).$$

**Observação 3.1.7.** Sejam  $f : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}; 0)$  uma função analítica com singularidade isolada na origem,  $\ell : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$  uma forma linear genérica e  $X = f^{-1}(0)$ , pelo Teorema 2.4.2 temos,

$$Eu_X(0) = \chi(\{0\} \cap B_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)).Eu_X(0) + \chi(X \setminus \{0\} \cap B_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)).Eu_X(X \setminus \{0\}).$$

Temos,  $(\{0\} \cap B_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) = \emptyset$ , logo  $\chi(\{0\} \cap B_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)) = 0$ , temos também,  $Eu_X(X \setminus \{0\}) = 1$  e como  $\ell^{-1}(t_0)$  não contém a origem, temos  $X \setminus \{0\} \cap B_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0) = X \cap B_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)$ . Assim,

$$Eu_X(0) = \chi(f^{-1}(0) \cap B_\varepsilon \cap \ell^{-1}(t_0)).$$

Considerando  $g = (f, \ell)$  e a ICSI definida por  $g^{-1}(0, t_0)$  segue, da igualdade acima, que a obstrução de Euler em  $X = f^{-1}(0)$  é a característica de Euler da fibra de Milnor da ICSI  $g^{-1}(0, t_0)$ , ou seja,



$$Eu_{f^{-1}(0)}(0) = \chi(F_{(f,\ell)}).$$

Logo, a obstrução de Euler, neste caso, é dada em função do número de Milnor de  $g = (f, \ell)$ ,

$$Eu_{f^{-1}(0)}(0) = 1 + (-1)^{d-2}\mu((f, \ell)).$$

Com essa observação e com a observação 3.1.6, podemos perceber que  $Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0)$  é, a menos de sinal, o número de Milnor de  $f$ , porém  $Eu_{f^{-1}(0)}(0)$  se relaciona com a característica de Euler de uma seção de  $f^{-1}(0)$ , ou seja,  $Eu_{f^{-1}(0)}(0) = \chi(F_{(f,\ell)})$ .

**Observação 3.1.8.** Se  $X = \mathbb{C}^d$  e  $f : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma função analítica com singularidade isolada na origem, pela observação anterior,

$$Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0) = (-1)^d \mu(f).$$

Então,  $\mu(f) = \deg(\nabla f)$ .

De fato, como  $X = \mathbb{C}^d$ , temos  $\tilde{X} = \mathbb{C}^d$  e  $\tilde{T} = T\mathbb{C}^d$ . Assim,

$$\begin{aligned} Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0) &= \mathcal{O}(\overline{\nabla} f, \nu^{-1}(X_\varepsilon)) = Eu_{\mathbb{C}^d}(0) \cdot \text{Ind}_{PH}(\overline{\nabla} f, 0) \\ &= \text{Ind}_{PH}(\overline{\nabla} f, 0) = (-1)^d \text{Ind}_{PH}(\nabla f, 0) = (-1)^d \deg(\nabla f). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu(f) = \deg(\nabla f).$$

**Exemplo 3.1.9.** Seja  $f : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $f(x, y, z) = x^3 + y^4 + z^5$ .

Do Teorema 1.5.8,

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{J(f)}.$$

Logo,

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y, z\}}{\langle x^2, y^3, z^4 \rangle} = 24.$$

Da observação 3.1.6 segue que,

$$Eu_{f, \mathbb{C}^3}(0) = (-1)^3 \mu(f) = -24.$$

## 3.2 Lemas

O campo de vetores  $w$  do Lema 3.1.2 é definido como a soma de dois campos de vetores que construiremos nos Lemas 3.2.1 e 3.2.2.

Para os próximos resultados, fixaremos algumas notações. Seja  $\eta' > 0$  suficientemente pequeno com respeito a  $\eta$ , tal que  $\mathbb{D}_{\eta'}(t_0)$  está contido no interior de  $\mathbb{D}_\eta$  e  $f^{-1}(\mathbb{D}_{\eta'}(t_0))$  não tem interseção com a esfera  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ .

**Lema 3.2.1.** *Existe um campo de vetores estratificado  $r$  em  $\mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta)$  satisfazendo:*

1. *A restrição de  $r$  à  $\mathbb{S}_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta)$  é tangente a todas as fibras  $f^{-1}(t)$  e é transversal à  $\mathbb{S}_\varepsilon$ , apontando para fora;*
2.  *$r$  é tangente à fibra  $f^{-1}(t_0)$ , onde tem somente singularidades isoladas. Além disso, em cada zero,  $r$  é transversalmente radial (em  $f^{-1}(t_0)$ ) a cada estrato que contém o zero;*
3.  *$r$  é tangente à fibra  $f^{-1}(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{D}_{\eta'}(t_0)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente construiremos  $r$  em  $f^{-1}(t_0)$  satisfazendo (2) e apontando para fora de  $\mathbb{S}_\varepsilon$ . Denotemos  $f^{-1}(t_0) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  por  $F$ . As componentes conexas das interseções  $V_i \cap F$  definem uma estratificação de Whitney de  $F$ . Esta define uma filtração  $F_{n_1}, \dots, F_{n_r}$  de  $F$  onde  $0 \leq n_1 < \dots < n_r = d - 1$  e  $F_{n_i}$  é a união dos estratos de dimensão  $\leq n_i$ . Então,  $F_{n_1}$  é uma variedade suave e  $F_{n_r} = F$ . Construiremos  $r$  por indução em  $n_i$ .

Seja  $v_1$  um campo de vetores suave em  $F_{n_1}$ , o qual tem singularidades isoladas e é transversal à  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  apontando para fora. Pelo Teorema de Poincaré-Hopf, o índice total de  $v_1$  em  $F_{n_1}$  é  $\chi(F_{n_1})$ .

Como em [22], podemos estender esse campo de vetores de modo transversalmente radial. Temos um campo de vetores estratificado  $\bar{v}_1$  em um tubo fechado  $T_1$  em  $F$  em torno de  $F_{n_1}$ , o qual tem os mesmos pontos singulares de  $v_1$  e o mesmo índice de Schwartz. Se o tubo é suficientemente pequeno, a extensão fica transversal à  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  apontando para fora.

Agora estenderemos  $\bar{v}_1$  para  $(F_{n_2} \setminus \text{Int}(T_1)) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ . Este espaço é uma variedade suave com fronteira e bicos. A restrição de  $\bar{v}_1$  à  $F_{n_2} \cap \partial T_1 \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  é transversal à fronteira e aponta para fora. Podemos estender este campo de vetores como um campo de vetores contínuo ([7]) para a fronteira inteira com bicos, tal que ele aponta para fora. Em particular, este campo de vetores é transversal à  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  apontando para fora. Ele se estende como um campo de vetores contínuo em  $(F_{n_2} \setminus \text{Int}(T_1)) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  com singularidades isoladas. Em cada componente conexa de  $(F_{n_2} \setminus \text{Int}(T_1)) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ , a soma dos índices de Poincaré-Hopf deste campo de vetores é igual a característica de Euler da componente. Isto define um campo de vetores contínuo  $v_2$  em  $(F_{n_2} \cup T_1) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ .

Como em [22], podemos estender  $v_2$  de modo transversalmente radial. Temos um campo de vetores estratificado  $\bar{v}_2$  entrando em uma vizinhança fechada  $T_2$  de  $F_{n_2} \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ , com os mesmos pontos singulares de  $v_2$  e os mesmos índices de Schwartz. Além disso, escolhendo  $T_2$  suficientemente pequeno,  $\bar{v}_2$  é transversal à  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  apontando para fora, por continuidade.

Agora, seja  $1 \leq s < r$ . Suponha que já temos o campo de vetores  $v_s$  em  $(F_{n_s} \cup T_{s-1}) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  e a extensão  $\bar{v}_s$  um campo de vetores estratificado em uma vizinhança fechada  $T_s$  de  $F_{n_s} \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ , o qual é transversalmente radial, com os mesmos pontos singulares e os mesmos índices de  $v_s$  (por convenção,  $T_{-1} = \emptyset$ ). Podemos assumir que  $\bar{v}_s$  é transversal à  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  apontando para fora.

Prosseguimos, como acima, para obter uma extensão de  $\bar{v}_s$  para  $(F_{n_{s+1}} \cup T_s) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  com singularidades isoladas, transversal à  $X \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  apontando para fora. A soma dos índices de Poincaré-Hopf deste campo de vetores em cada componente conexa de  $(F_{n_{s+1}} \setminus \text{Int}(T_s)) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  é igual a característica de Euler desta componente.

Finalmente, obtemos um campo de vetores  $r := v_r$  em  $F_{n_r} = F$  com singularidades isoladas contidas em cada  $(F_{n_s} \setminus \text{Int}(T_{s-1})) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ , para  $s = 1, \dots, r$ . Pela construção, o

índice de Schwartz de  $r$  em um ponto singular contido em algum  $(F_{n_s} \setminus \text{Int}(T_{s-1})) \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  é igual ao índice de Poincaré-Hopf de  $v_s$ , o qual é também a restrição de  $r$ .

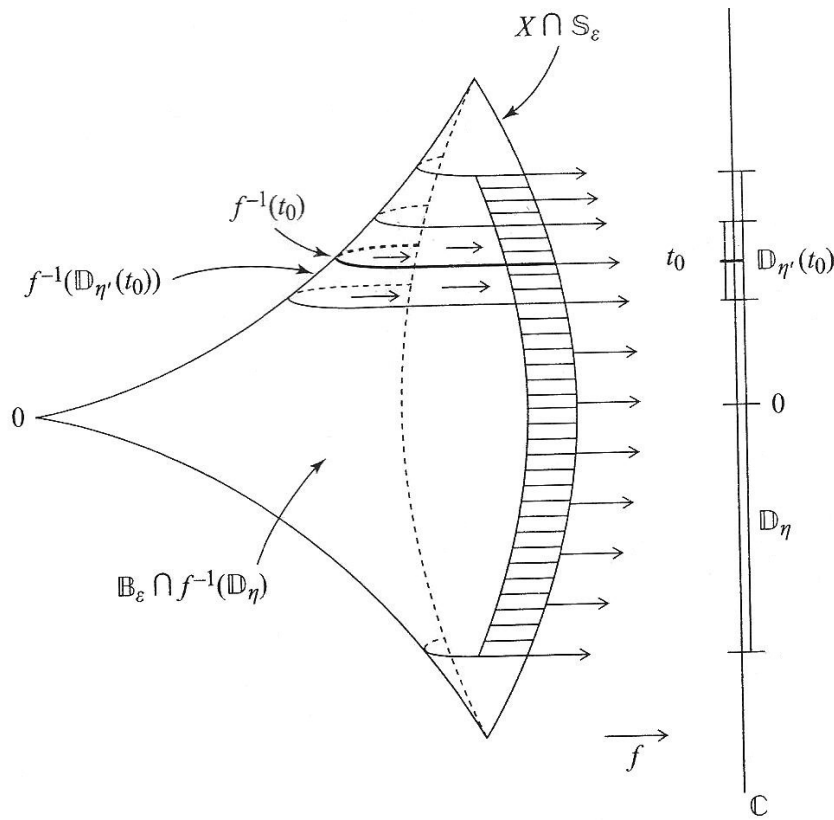
Este campo de vetores satisfaz (2) e aponta para fora de  $\mathbb{S}_\varepsilon$ .

Pelo Teorema de Fibrção de Lê [Teorema 1.3 [25]] a função  $f$  determina uma fibração estratificada localmente trivial de  $\mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \setminus f^{-1}(0)$  sobre  $\mathbb{D}_\eta \setminus \{0\}$ . Esta induz, em particular, uma fibração trivial sobre  $\mathbb{D}_{\eta'}(t_0)$ . Portanto,  $r$  pode ser estendido, como um produto, para todas as fibras sobre  $\mathbb{D}_{\eta'}(t_0)$ , satisfazendo a condição (3).

Escolhemos  $\varepsilon'', \varepsilon' \ll \varepsilon'' < \varepsilon$ , tal que a restrição de  $f$  à  $f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap (\mathbb{B}_\varepsilon \setminus \text{Int}(\mathbb{B}_{\varepsilon''}))$  é uma fibração trivial. Desde que  $\mathbb{D}_\eta$  se retrai para  $\mathbb{D}_{\eta'}(t_0)$ , o campo de vetores  $r$  pode se estender para  $S_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta)$  sendo tangentes as fibras de  $f$  e transversal à esfera  $S_\varepsilon$ , apontando para fora.

Usando uma adequada partição da unidade, podemos estender  $r$  como zero no complemento de uma vizinhança de  $(f^{-1}(\mathbb{D}_\eta) \cap (\mathbb{B}_\varepsilon \setminus \text{Int}(\mathbb{B}_{\varepsilon''}))) \cup f^{-1}(\mathbb{D}_{\eta'}(t_0))$ .

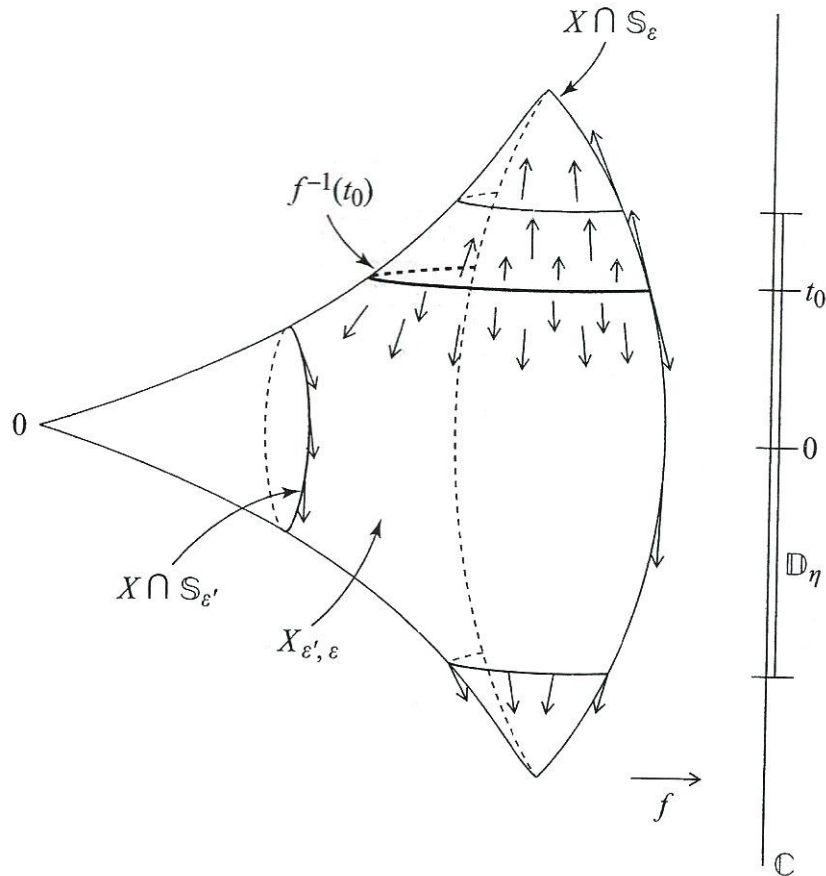
□



Note que as afirmações (1) e (2) do Lema 3.2.1 implicam que para cada estrato  $Y_{t_0} \cap V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ , a soma dos índices de Poincaré-Hopf da restrição de  $r$  é  $\chi(Y_{t_0} \cap V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ .

**Lema 3.2.2.** *Existe um campo de vetores estratificado  $u$  definido em  $(\mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta)) \setminus \{0\}$  e satisfazendo*

1.  $u$  é tangente à  $\mathbb{S}_\varepsilon$ ;
2. O conjunto de zeros de  $u$  está em  $f^{-1}(t_0)$  e  $u$  é transversalmente radial a  $f^{-1}(t_0)$ ;
3.  $u$  é transversal à  $X \cap f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\eta)$ , apontando para fora.



*Demonstração.* Por hipótese, a restrição de  $f$  a todo estrato  $V_i$  (exceto o estrato  $\{0\}$ ) é regular, portanto  $\ker(df)$  tem codimensão 1 em  $V_i$ .

A métrica Hermitiana em  $\mathbb{C}^n$  induz uma métrica em  $V_i$  e define uma divisão do fibrado tangente  $TV_i$  como uma soma dos fibrados tangentes as fibras e o fibrado normal. A derivada  $df$  restrita ao fibrado normal é um isomorfismo.

Além disso, podemos levantar todo campo de vetores em  $\mathbb{D}_\eta$  como um campo de vetores em  $V_i$  e ortogonal as fibras  $f^{-1}(t)$ . Denotamos por  $\xi$  o campo de vetores em  $\mathbb{D}_\eta$ , radial em  $t_0$  e denotamos por  $u_i$  o levantamento de  $\xi$  em  $V_i$ .

Assim como na definição do campo de vetores  $\overline{\nabla}_X f$ , as condições de Whitney nos permite colar os campos  $u_i$  formando um campo de vetores estratificado  $u$  definido em  $(\mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta)) \setminus \{0\}$  e satisfazendo as condições do lema.  $\square$

### 3.3 Demonstração do Lema 3.1.2

Esta última seção é dedicada a demonstração do Lema 3.1.2, com o qual foi possível demonstrarmos o principal resultado apresentado neste trabalho.

Além dos Lemas 3.2.1 e 3.2.2, para a construção do campo de vetores  $w$  do Lema 3.1.2 utilizaremos também do resultado a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [4].

**Teorema 3.3.1** (Teorema 2.3 [4]). *Seja  $f$  uma função analítica definida em uma vizinhança aberta de 0 em  $X \subset \mathbb{C}^n$ , assumamos  $f(0) = 0$ . Então existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que para todo  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ , existe  $\eta_\varepsilon > 0$  tal que se  $v$  é um campo de vetores estratificado em  $X \cap \mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\eta)$ ,  $0 < \eta < \eta_\varepsilon$ , o qual é transversal à  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  e à  $X \cap f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\eta)$  apontando para fora, então existe uma extensão estratificada de  $v$  como um campo de vetores em  $(X \cap \mathbb{B}_\varepsilon) \setminus f^{-1}(\text{Int}(\mathbb{D}_\eta))$ , o qual é transversal à  $X \cap \mathbb{S}_\varepsilon$  apontando para fora.*

*Demonstração do Lema 3.1.2.* Primeiramente definiremos o campo de vetores  $w$  em  $(\mathbb{B}_\varepsilon \cap f^{-1}(\mathbb{D}_\eta)) \setminus \text{Int}(\mathbb{B}_{\varepsilon'})$  como a soma (via partição da unidade) dos campos de vetores dados pelos Lemas 3.2.1 e 3.2.2. Obtemos um campo de vetores estratificado satisfazendo:

1.  $w$  é transversal à esfera  $\mathbb{S}_\varepsilon$  apontando para fora;
2.  $w$  é tangente à  $Y_{t_0}$ ;
3. As singularidades de  $w$  estão contidas em  $Y_{t_0}$ ;

4. Em cada estrato  $Y_{t_0} \cap V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon$ ,  $w$  somente se anula em um número finito de pontos e a soma dos índices de Poincaré-Hopf da restrição de  $w$  à  $Y_{t_0} \cap V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon$  é  $\chi(Y_{t_0} \cap V_i \cap \mathbb{B}_\varepsilon)$ ;
5. Em cada ponto singular,  $w$  é transversalmente radial ao estrato que contém o ponto singular;
6.  $w$  é transversal à fronteira  $f^{-1}(\partial\mathbb{D}_\eta)$  apontando para fora.

Então estendemos  $w$  a todo  $X_{\varepsilon', \varepsilon}$  usando o Teorema 3.3.1. Para completar a prova, note que restrito a  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$  o campo de vetores  $w$  é homotópico ao campo de vetores gradiente  $\overline{\nabla}_X f$ . Este fato segue do Lema 2.5.3 e do fato que, em  $\mathbb{S}_{\varepsilon'}$ , o campo de vetores  $w$  é o campo de vetores  $u$  do Lema 3.2.2, o qual é o levantamento de um campo de vetores homotópico à um campo de vetores constante próximo da origem.  $\square$

Com a construção desse campo de vetores  $w$ , pudemos demonstrar o Teorema 3.1.1, cujo resultado nos apresenta uma relação existente entre a obstrução de Euler e a obstrução de Euler de uma função.

---

## Conclusão

---

Neste trabalho, estudamos a obstrução de Euler definida para espaços analíticos complexos. Exibimos um importante resultado que nos permite calcular a obstrução de Euler a partir dos cálculos das obstruções de Euler dos estratos de uma estratificação de Whitney, assim como de suas características de Euler.

Apresentamos a definição de obstrução de Euler de uma função, para o caso de funções com singularidade isolada definidas em espaços analíticos complexos. Este conceito generaliza a obstrução de Euler e também generaliza um importante invariante da teoria de singularidades, o número de Milnor de uma função, tais relações foram verificadas e foram apresentados exemplos.

Uma observação importante é a comparação entre a obstrução de Euler de uma função  $Eu_{f, \mathbb{C}^d}(0)$ , onde  $f : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é uma função analítica com singularidade isolada na origem e a obstrução de Euler  $Eu_X(0)$ , onde  $X = f^{-1}(0)$ . Mais geralmente, observamos o caso em que  $X$  é uma ICSI, neste caso,  $Eu_X(0)$  está relacionada ao número de Milnor de uma seção genérica de  $X$ .

Nosso principal resultado, o qual exhibe uma relação entre a obstrução de Euler e a obstrução de Euler de uma função, foi amplamente estudado no capítulo 3, onde vários resultados técnicos foram provados, mostrando a relevância e complexidade deste resultado.





# Referências Bibliográficas

---

- [1] J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran, and J. Seade. *Euler obstruction and defects of functions on singular varieties*. *J. London Math. Soc. (2)*, 70(1):59–76, 2004.
- [2] J.-P. Brasselet and M.-H. Schwartz. *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*. In *The Euler-Poincaré characteristic (French)*, volume 82 of *Astérisque*, pages 93–147. Soc. Math. France, Paris, 1981.
- [3] J.-P. Brasselet, J. Seade, and T. Suwa. *Vector fields on singular varieties*, volume 1987 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [4] J.-P. Brasselet, Lê D. T., and J. Seade. *Euler obstruction and indices of vector fields*. *Topology*, 39(6):1193–1208, 2000.
- [5] K. Burns and M. Gidea. *Differential geometry and topology - with a view to dynamical systems*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.
- [6] R. Callejas-Bedregal, M. J. Saia, and J. N. Tomazella. Euler obstruction and polar multiplicities of images of finite morphisms on ICIS. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(3):855–863, 2012.
- [7] A. Douady. *Variétés à bord anguleux et voisinages tubulaires*. In *Séminaire Henri Cartan, 1961/62, Exp. 1*, page 11. Secrétariat mathématique, Paris, 1961/1962.
- [8] C. G. Gibson. *Singular points of smooth mappings*, volume 25 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1979.
- [9] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, A. A. du Plessis, and E. J. N. Looijenga. *Topological stability of smooth mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 552. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [10] G. González-Sprinberg. *L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson*. In *The Euler-Poincaré characteristic (French)*, volume 83 of *Astérisque*, pages 7–32. Soc. Math. France, Paris, 1981.

- 
- [11] S. M. Guseun-Zade, I. Luengo, and A. Melle-Hernández. *On the topology of germs of meromorphic functions and its applications*. *Algebra i Analiz*, 11(5):92–99, 1999.
- [12] H. Hamm. *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume*. *Math. Ann.*, 191:235–252, 1971.
- [13] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [14] E. L. Lima. Introdução à topologia diferencial. Notas de Matemática n° 23, IMPA, 1961.
- [15] E. L. Lima. *Variiedades diferenciáveis*. Publicações matemáticas. IMPA, 2007.
- [16] R. D. MacPherson. *Chern classes for singular algebraic varieties*. *Ann. of Math. (2)*, 100:423–432, 1974.
- [17] D. B. Massey. *A little microlocal Morse theory*. *Math. Ann.*, 321(2):275–294, 2001.
- [18] J. Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1968.
- [19] J. W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Based on notes by D. W. Weaver. The University Press of Virginia, Charlottesville, Va., 1965.
- [20] J. W. Milnor and J. D. Stasheff. *Characteristic classes*. Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974.
- [21] J. R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [22] M.-H. Schwartz. *Champs radiaux sur une stratification analytique*, volume 39 of *Travaux en Cours [Works in Progress]*. Hermann, Paris, 1991.
- [23] M. Spivakovsky. *Sandwiched singularities and desingularization of surfaces by normalized Nash transformations*. *Ann. of Math. (2)*, 131(3):411–491, 1990.
- [24] Lê D. T. *Le concept de singularité isolée de fonction analytique*. In *Complex analytic singularities*, volume 8 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 215–227. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [25] Lê D. T. *Complex analytic functions with isolated singularities*. *J. Algebraic Geom.*, 1(1):83–99, 1992.
- [26] F. Tari. Singularidades de aplicações diferenciáveis. São Carlos: Notas didáticas n° 34, ICMC-USP, 1999.
- [27] J. L. Verdier. *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*. *Invent. Math.*, 36:295–312, 1976.
- [28] H. Whitney. *Tangents to an analytic variety*. *Ann. of Math. (2)*, 81:496–549, 1965.