Sobre um Método para Encontrar
Soluções Periódicas de
Equações Diferenciais Funcionais

KATIA ANDREIA GONÇALVES DE AZEVEDO

Orientador: PROF. DR. LUIZ A. DA COSTA LADEIRA

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de
São Carlos - USP, como parte dos requisitos para obtenção do título
de "Mestre em Ciências - Área: Matemática".*

USP - São Carlos
Fevereiro de 1998

“O temor do Senhor é o princípio da Sabedoria,
e o conhecimento do Santo é prudência...”

Provérbios 9:10

A Deus

AGRADECIMENTOS

Ao orientador Luiz Augusto da Costa Ladeira, pela paciência, compreensão e consideração que teve em todos os momentos de orientação.

À minha família, em especial à minha mãe, por existirem.

Ao Mauro, por seu amor e carinho.

Aos amigos de graduação e pós-graduação, em especial ao Marcio.

A todos os professores do ICMSC-USP e do IGCE-UNESP-Rio Claro aos quais eu devo minha formação, em especial a Sueli M. Tanaka e ao Anizio Perissinoto Junior, o qual me incentivou a prosseguir os estudos.

À Capes, pelo apoio financeiro.

ABSTRACT

We are concerned in studying a method introduced by Carvalho to find periodic solutions of retarded functional differential equations and difference equations.

The method is analyzed both for real valued and complex valued functions.

Applications are given in either cases; in the complex case we analyze the existence of periodic solutions of retarded matrix differential equations.

RESUMO

Estamos interessados em estudar um método para encontrar soluções periódicas de equações diferenciais funcionais com retardamento e de equações-diferenças, apresentado por Carvalho.

O método é analisado tanto para funções a valores reais como para funções a valores complexos.

Aplicações são feitas em ambos os casos, sendo que através do caso complexo analisamos a existência de soluções periódicas de equações diferenciais matriciais com retardamento.

Sumário

Introdução.	1
1 Preliminares	2
1.1 Teoria Básica de Equações Diferenciais Funcionais Retardadas	2
1.2 Alguma Teoria sobre Sistemas Lineares não Homogêneos de Equações Diferenciais Ordinárias	4
2 Equações-Diferenças Lineares Autônomas	13
3 Um Método para Encontrar Soluções Periódicas de Equações Diferenciais Funcionais (caso real)	21
4 Aplicações do Teorema de Carvalho (caso real)	26
4.1 Soluções 3-periódicas de $\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)$	26
4.2 Soluções 4-periódicas de $\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)$	28
4.3 Soluções 2-periódicas de uma equação logística	30
4.4 Soluções 3-periódicas da equação de Wright	34
5 Um Método para Encontrar Soluções Periódicas de Equações Diferenciais Funcionais (caso complexo)	40
6 Aplicações do Teorema de Carvalho (caso complexo)	42
6.1 Equação Escalar	42
6.2 Equação Matricial	51
6.2.1 Caso Matriz Diagonal	52
6.2.2 Caso Matriz Triangular	54
6.2.3 Caso Matriz Complexa	57
Bibliografia	60

Introdução

O estudo das equações diferenciais funcionais com retardamento vem ganhando novos adeptos, visto o grande número de fenômenos biológicos, físicos, econômicos, entre outros, que necessitam do uso de tais equações, para uma modelagem mais realista.

Como alguns desses fenômenos são periódicos, procurar por soluções periódicas de equações diferenciais com retardamento torna-se, então, importante.

Neste contexto, exibiremos no capítulo 3, um método para encontrar soluções periódicas de tais equações, proposto por Carvalho em [1]. O capítulo 2 é necessário para a demonstração deste método, aqui apresentada.

Faremos algumas aplicações às equações diferenciais com retardamento e às equações diferença, no capítulo 4. Para isto, desenvolvemos alguma teoria durante o capítulo 1.

Aplicando o método de Carvalho para funções a valores complexos, pretendemos exibir uma outra demonstração para os fatos encontrados em [3]. Analisamos a existência de soluções periódicas para equações da forma:

$$\dot{z}(t) = Az(t-1),$$

onde A é uma das três matrizes 2×2 , colocadas na forma normal de Jordan:

$$(i) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (ii) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (iii) = r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

Estes resultados são discutidos nos capítulos 5 e 6.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Teoria Básica de Equações Diferenciais Funcionais Retardadas

Apresentamos alguns conceitos e resultados básicos, que admitiremos conhecidos, sem nos preocuparmos com maiores detalhes. Demonstrações para estes fatos podem ser encontradas em [11].

Sejam h, H, A , com $0 \leq h < \infty, 0 < H \leq \infty, 0 < A \leq \infty$ e $t_0 \geq 0$.

Definimos $C_H = \{\varphi \in C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n) / \|\varphi\| < H\}$, onde

$$\|\varphi\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$$

Seja ainda $x(t)$ uma transformação contínua em $[t_0 - h, t_0 + A)$ com valores em $\mathbb{R}^n$. Para cada $t \in [t_0, t_0 + A)$, definimos x_t o elemento de C , dado por $x_t(\theta) = x(t + \theta), -h \leq \theta \leq 0$.

Definição 1.1 *Seja $f(t, \varphi)$ definida em $[0, \infty) \times C_H$ com valores em $\mathbb{R}^n$. A relação*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1.1}$$

é uma equação diferencial funcional com retardamento.

Uma solução de tal equação é uma transformação $x(t)$ contínua no intervalo $[t_0 - h, t_0 + A)$ com valores em $\mathbb{R}^n$, diferenciável em $(t_0 - h, t_0 + A)$ tal que

$$(i) \quad x_t \in C_H, \quad t_0 \leq t < t_0 + A$$

$$(ii) \quad \dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t_0 < t < t_0 + A.$$

Se à equação (1.1) adicionarmos uma condição inicial $x_{t_0} = \psi$, $\psi \in C_H$, temos um problema de valor inicial (PVI), cuja solução satisfaz, além das condições (i) e (ii):

$$(iii) \quad x_{t_0} = \psi$$

Definição 1.2 Dizemos que $f(t, \varphi)$ é lipschitziana com relação a φ em $[0, \tau] \times C_{H_1}$, $0 < \tau < \infty$ e $0 < H_1 < H$ se existir $L = L(\tau, H_1)$ tal que

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq L \|\varphi_2 - \varphi_1\|,$$

onde $0 \leq t \leq \tau$ e $\varphi_1, \varphi_2 \in C_{H_1}$.

Dizemos que $f(t, \varphi)$ é localmente lipschitziana com relação a φ em $[0, \infty) \times C_H$ se $f(t, \varphi)$ for lipschitziana com relação a φ em $[0, \tau] \times C_{H_1}$, para todo τ, H_1 com $0 < \tau < \infty$ e $0 < H_1 < H$.

Teorema 1.1 (Existência e unicidade de solução) Seja $f(t, \varphi)$ contínua e localmente lipschitziana com relação a φ em $[0, \infty) \times C_H$. Então, dados $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_H$, existem $A > 0$ e $x(t)$ contínua em $[t_0 - h, t_0 + A)$ com valores em $\mathbb{R}^n$, solução da equação (1.1) com condição inicial $x_{t_0} = \psi$. Além do mais, esta solução é única.

Observação 1.1 Se no teorema acima apenas considerarmos a continuidade de $f(t, \varphi)$, garantimos somente a existência de soluções para a equação (1.1).

Uma solução de uma equação diferencial com retardamento (EDR) é periódica de período T , ou T -periódica, se $x(t+T) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Se existir $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(t, x_0) = 0$, então a solução $x(t) = x_0$ de (1.1) é chamada uma solução de equilíbrio ou uma solução trivial.

Depois das soluções de equilíbrio, as soluções periódicas são as mais procuradas. Através de teoremas de ponto fixo, podemos garantir a existência e, por vezes, a unicidade de tais soluções periódicas, mas não conseguimos explicitar tais soluções. O teorema que veremos no capítulo 3 permite-nos encontrar uma expressão para soluções periódicas de período inteiro de uma EDR, se tais soluções existirem.

1.2 Alguma Teoria sobre Sistemas Lineares não Homogêneos de Equações Diferenciais Ordinárias

Esta teoria faz-se necessária para a aplicação do método que será apresentado no capítulo 3, à equação de Wright. Para maiores detalhes, ver [7].

Consideremos o seguinte sistema homogêneo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad (1.2)$$

com $A(t)$ uma função matricial contínua $n \times n$ em $(-\infty, \infty)$.

Uma matriz $X(t)$, $t > 0$, é uma **matriz solução** $n \times n$ de (1.2) se cada coluna de $X(t)$ satisfaz (1.2).

Uma **matriz solução fundamental** de (1.2) é uma matriz solução, $X(t)$, de (1.2), tal que $\det X(t) \neq 0$. É claro que uma matriz fundamental é uma matriz solução cujas n colunas são linearmente independentes.

A **matriz solução principal** de (1.2) no instante inicial t_0 é a matriz fundamental tal que $X(t_0) = I$.

Fato 1.1 Se $X(t)$ é uma matriz solução de (1.2), então ou $\det X(t) \neq 0$ para todo t ou $\det X(t) = 0$ para todo t .

Prova: Se existir um número real t_0 tal que $X(t_0)$ é singular, então existe um vetor não nulo c tal que $X(t_0)c = 0$.

Sabemos que se $x(t)$ e $y(t)$ são soluções de (1.2), então $ax(t) + by(t)$ também é solução de (1.2), com $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos, então, $x(t) = X(t)c$ uma solução de (1.2). Temos o PVI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(t_0) = X(t_0)c = 0 \end{cases}$$

Como a função $x \equiv 0$ é, obviamente, solução de (1.2), com $x(t_0) = 0$, a unicidade de soluções implica que $X(t)c = x(t) = 0$, para todo t . Assim, $\det X(t) = 0$, para todo t .

Fato 1.2 Se X_0 é uma matriz não singular $n \times n$ e se $X(t)$ é uma matriz solução de (1.2) com $X(0) = X_0$, então $X(t)$ é uma matriz fundamental de (1.2) .

Prova: *Imediata.*

Este fato mostra-nos que a determinação de uma matriz fundamental consiste somente em selecionar n vetores iniciais linearmente independentes e encontrar as correspondentes n soluções linearmente independentes de (1.2).

Fato 1.3 Se $X(t)$ é qualquer matriz fundamental de (1.2) , então a solução geral de (1.2) é $X(t)c$, onde c é um vetor arbitrário.

Prova: A função $x(t) = X(t)c$ é uma solução de (1.2) para qualquer n -vetor c . Em particular, se t_0 e x_0 são dados, e tomarmos $c = X^{-1}(t_0)x_0$, $X(t)c$ é solução de (1.2) que passa pelo ponto (t_0, x_0) .

Fato 1.4 Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de (1.2) então a matriz $X^{-1}(t)$ é uma matriz fundamental da equação adjunta

$$\dot{y}(t) = -y(t)A(t) \quad (1.3)$$

onde y é um n -vetor linha, isto é, cada linha de $X^{-1}(t)$ satisfaz (1.3) e $\det X^{-1}(t) \neq 0$.

Prova: *Consideremos*

$$X^{-1}(t) = Y(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1(t) \\ \dot{\varphi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_n(t) \end{bmatrix} = \dot{Y}(t) = -X^{-1}(t)\dot{X}(t)X^{-1}(t) =$$

$$-X^{-1}(t)A(t)X(t)X^{-1}(t) = -X^{-1}(t)A(t) = -Y(t)A(t) = \begin{bmatrix} -\varphi_1(t)A(t) \\ -\varphi_2(t)A(t) \\ \vdots \\ -\varphi_n(t)A(t) \end{bmatrix}$$

■

Definição 1.3 Se $A(t)$ é uma função matricial contínua $n \times n$ em $(-\infty, \infty)$ e D é uma dada classe de funções que contém a função nula, o sistema homogêneo (1.2) é não crítico com respeito a D se a única solução de (1.2) que pertence a D é a solução $x \equiv 0$. Caso contrário, o sistema (1.2) é crítico com respeito a D .

Consideremos o espaço vetorial $P_T = \{f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n, f \text{ é contínua, limitada e } f \text{ é } T\text{-periódica}\}$, com a norma

$$\|f\| = \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)|$$

P_T , com a norma definida acima, é um espaço de Banach.

Uma função matricial $n \times n$ definida em $(-\infty, \infty)$ pertence a P_T se cada coluna pertence a P_T .

Fato 1.5 O sistema (1.2) com $A(t)$ em P_T é não crítico com respeito a P_T se, e somente se, $I - X(T)$ é não singular, onde $X(t)$, com $X(0) = I$, é a matriz fundamental de (1.2).

Prova: A solução geral de (1.2) é $X(t)x_0$, onde x_0 é um vetor constante arbitrário. Afirmamos que se $x = x(t)$ é uma solução de (1.2) e $A(t) \in P_T$, então $x(t+T)$ também é uma solução de (1.2).

Afirmamos, também, que $x(t)$ é solução T -periódica de (1.2) se, e somente se, $x(0) = x(T)$. De fato, se $x(t)$ é T -periódica é óbvio que $x(0) = x(T)$. Considere, então, o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) \\ x(0) = x(T) \end{cases}$$

Como $y(t) = x(t+T)$ satisfaz este sistema, pela unicidade de soluções, $x(t) = y(t) = x(t+T)$.

Assim, se tomarmos, $x \neq 0$, x será T -periódica $\Leftrightarrow x(0) = x(T) \Leftrightarrow X(0)x_0 = X(T)x_0 \Leftrightarrow Ix_0 = X(T)x_0 \Leftrightarrow (I - X(T))x_0 = 0 \Leftrightarrow I - X(T)$ é singular.

■

Observação 1.2 Se $X(0) = X_0 \neq I$, consideramos $Y(t) = X(t)X^{-1}(0)$.

Fato 1.6 O sistema (1.3) com $A(t)$ em P_T é não crítico com respeito a P_T se, e somente se, $X^{-1}(T) - I$ é não singular, com $X^{-1}(0) = I$

Prova: Mesmo raciocínio do fato anterior.

Temos que:

o sistema (1.2) tem uma solução x em $P_T \Leftrightarrow$

$$(X(T) - I)x_0 = 0 \text{ ou } (I - X(T))x_0 = 0$$

o sistema (1.3) tem uma solução y em $P_T \Leftrightarrow$

$$y_0(I - X^{-1}(T)) = 0 \text{ ou } y_0(X^{-1}(T) - I) = 0.$$

Como $X^{-1}(T) - I = X^{-1}(T)(I - X(T))$, $X^{-1}(T) - I$ e $I - X(T)$ são as mesmas exceto pela multiplicação de uma matriz não singular. Segue que as dimensões do conjunto de y_0 tal que $y_0[X^{-1}(T) - I] = 0$ e o conjunto de x_0 tal que $[X(T) - I]x_0 = 0$ são as mesmas. Portanto, o sistema (1.2) e o sistema (1.3) têm o mesmo número de soluções T-periódicas linearmente independentes.

Consideremos agora o sistema linear não homogêneo

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \quad (1.4)$$

Fato 1.7 Se $X(t)$ é uma matriz fundamental de (1.2) e para qualquer número real $\tau \in (-\infty, \infty)$, designarmos $X(t, \tau)$, com $X(\tau, \tau) = I$, a matriz principal de (1.2) em τ , então toda solução de (1.4) é dada por

$$x(t) = X(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t X(t, s)f(s) ds \quad (1.5)$$

Prova: Para isso, vamos utilizar o método da variação das constantes. Como uma solução de (1.2) é $x(t) = X(t)c$, com c um n -vetor constante, procuremos por uma solução de (1.4) variando c , isto é, procuremos por $x(t) = X(t)w(t)$:

$$A(t)x(t) + f(t) = \dot{x}(t) = \dot{X}(t)w(t) + X(t)\dot{w}(t) = AX(t)w(t) + X(t)\dot{w}(t)$$

$$A(t)x(t) + f(t) = A(t)x(t) + X(t)\dot{w}(t)$$

$$\dot{w}(t) = X^{-1}(t)f(t)$$

Integrando de τ a t , temos:

$$\begin{aligned} X^{-1}(t)x(t) &= X^{-1}(\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t X^{-1}(s)f(s) ds \\ x(t) &= X(t)[X^{-1}(\tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t X^{-1}(s)f(s) ds] \end{aligned}$$

Com a definição de $X(t, \tau)$ dada, afirmamos que $X(t, \tau) = X(t, s)X(s, \tau)$, para todo $t, s, \tau \in \mathbb{R}$. De fato, se considerarmos os dois membros como função de t , tanto o primeiro membro como o segundo satisfazem (1.2) e em $t = s$ coincidem e, então, pela unicidade de soluções segue a igualdade.

Portanto,

$$\begin{aligned} X(t, \tau) &= X(t, s)X(s, \tau) = X(t, s)X^{-1}(\tau, s) = X(t)X^{-1}(\tau) \\ X(t, s) &= X(t, \tau)X(\tau, s) = X(t, \tau)X^{-1}(s, \tau) = X(t)X^{-1}(s) \end{aligned}$$

e,

$$x(t) = X(t, \tau)x(\tau) + \int_{\tau}^t X(t, s)f(s) ds$$

■

Teorema 1.2 (Alternativa de Fredholm) Se A está em P_T e f é um dado elemento de P_T , então a equação (1.4) tem uma solução em P_T se, e somente se,

$$\int_0^T y(t)f(t)dt = 0 \quad (1.6)$$

para todas as soluções y da equação adjunta (1.3), tal que y^t , isto é, y transposto, está em P_T . Se (1.6) está satisfeita, então o sistema (1.4) tem uma família de soluções a r -parâmetros em P_T , onde r é o número de soluções linearmente independentes de (1.2) em P_T .

Prova: Como A e f pertencem a P_T , $x(t)$ é uma solução de (1.4) que pertence a P_T se, e somente se, $x(0) = x(T)$. Pelo fato 1.7,

$$x(t) = X(t, 0)x(0) + \int_0^t X(t, s)f(s) ds$$

e, em $t = T$,

$$x(T) = X(T, 0)x(0) + \int_0^T X(T, s)f(s) ds$$

$$x(0) - X(T, 0)x(0) = \int_0^T X(T, s)f(s) ds$$

$$(I - X(T, 0))x(0) = \int_0^T X(T, s)f(s) ds$$

$$X(T, 0)[X^{-1}(T, 0) - I]x(0) = \int_0^T X(T, s)f(s) ds$$

Mas, $X(T, s) = X(T, 0)X(0, s) = X(T, 0)X^{-1}(s, 0)$. Então:

$$X(T, 0)[X^{-1}(T, 0) - I]x(0) = X(T, 0) \int_0^T X^{-1}(s, 0)f(s) ds$$

Como $\det X(T, 0) \neq 0$

$$[X^{-1}(T, 0) - I]x(0) = \int_0^T X^{-1}(s, 0)f(s) ds$$

Se $B = X^{-1}(T, 0) - I$, $b = \int_0^T X^{-1}(s, 0)f(s) ds$ e $x(0) = x_0$, temos $Bx_0 = b$.

Da álgebra elementar, segue que esta equação matricial tem solução se, e somente se $ab = 0$, para todo vetor linha a tal que $aB = 0$, que é equivalente a $a[X^{-1}(T, 0) - I] = 0$. Mas, temos também a seguinte relação:

$y_0[X^{-1}(T, 0) - I] = 0$ se, e somente se, $y(t)$ é solução T -periódica de (1.3).

Assim, o conjunto dos vetores a tais que $aB = 0$, coincide com o conjunto de valores iniciais daquelas soluções y de (1.3) que são T -periódicas, ou seja, a solução $y(t) = aX^{-1}(t, 0)$ é uma solução T -periódica de (1.3) se, e somente se, $aB = 0$.

Concluindo, existe x_0 e, portanto, solução T -periódica de (1.4) tal que $Bx_0 = b$ se, e somente se $ab = 0$, isto é,

$$a \int_0^T X^{-1}(s, 0)f(s) ds = 0$$

$$\int_0^T y(t)f(t)dt = 0$$

Se $\int_0^T y(t)f(t)dt = 0$, então a equação (1.4) tem uma solução T -periódica $\phi(t)$. Se $x(t)$ é qualquer outra solução T -periódica de (1.4), então $\phi(t) - x(t)$ é solução T -periódica de (1.2), digamos $y(t)$. Assim, $x(t) = \phi(t) - y(t)$.

■

Teorema 1.3 *Suponha que $A \in P_T$. Então o sistema (1.4) tem uma solução Kf em P_T , para toda f em P_T se, e somente se, o sistema (1.2) é não crítico com respeito a P_T .*

Além disso, se o sistema (1.2) é não crítico com respeito a P_T , então Kf é a única solução de (1.4) em P_T e é linear e contínua em f , isto é, $K(af + bg) = aKf + bKg$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in P_T$ e existe uma constante k tal que $|Kf| \leq k|f|$, para toda $f \in P_T$.

Prova: Se $f \in P_T$, então a Alternativa de Fredholm implica que (1.4) tem uma solução periódica em P_T se, e somente se, $\int_0^T y(t)f(t)dt = 0$, isto é, f é ortogonal a todas as soluções T -periódicas de (1.3).

Mas, as equações (1.2) e (1.3) têm o mesmo número de soluções linearmente independentes T -periódicas. Existe $x \in P_T$, não trivial, se e somente se, existe $y \in P_T$, não trivial e, então, tomando $f = y^t$, por exemplo, teremos

$$\int_0^T y(s)y^t(s)ds > 0$$

portanto, (1.4) não têm solução em P_T .

Reciprocamente, se (1.2) é não crítico com respeito a P_T , então a única $y \in P_T$ é a trivial e, então, $\int_0^T y(t)f(t)dt = 0$.

A unicidade segue do fato que se (1.2) é não crítico com respeito a P_T , a única solução de (1.2) em P_T é $x \equiv 0$. Daí, se existir outra solução $z(t) \in P_T$ de (1.4), $(Kf)(t) - z(t)$ é solução de (1.2) e, portanto, $(Kf)(t) = z(t)$, para todo t .

A linearidade é assim provada:

Kf é solução de $\dot{x}(t) = Ax + f$ e Kg é solução de $\dot{x}(t) = Ax + g$. Prova-se então, que $aKf + bKg$ é solução de $\dot{x}(t) = Ax + af + bg$, com $af + bg \in P_T$. Mas, por outro lado, $K(af + bg)$ é a solução desta última equação. Portanto, $aKf + bKg = K(af + bg)$.

Se $X(t, \tau)$, com $X(\tau, \tau) = I$, é a matriz principal de (1.2), então a função Kf pode ser escrita como

$$(Kf)(t) = \int_0^T [X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} X(t, t+s) f(t+s) ds$$

De fato, se colocarmos $(Kf)(0) = x_0$, então

$$(Kf)(t) = X(t, 0)x_0 + \int_0^t X(t, s)f(s) ds$$

$$\text{Como } (Kf)(t) = (Kf)(t+T),$$

$$X(t, 0)x_0 + \int_0^t X(t, s)f(s) ds = X(t+T, 0)x_0 + \int_0^{t+T} X(t+T, s)f(s) ds$$

$$\begin{aligned} X(t, 0)x_0 + \int_0^t X(t, s)f(s) ds &= X(t+T, t)X(t, 0)x_0 \\ &+ \int_0^t X(t+T, s)f(s) ds + \int_t^{t+T} X(t+T, s)f(s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [I - X(t+T, t)]X(t, 0)x_0 &= \int_0^t [X(t+T, t)X(t, s) - X(t, s)]f(s) ds \\ &+ \int_t^{t+T} X(t+T, t)X(t, s)f(s) ds \end{aligned}$$

$$[I - X(t+T, t)]X(t, 0)x_0 = -[I - X(t+T, t)] \int_0^t X(t, s)f(s) ds + X(t+T, t) \int_t^{t+T} X(t, s)f(s) ds$$

$$X(t, 0)x_0 = - \int_0^t X(t, s)f(s) ds + [I - X(t+T, t)]^{-1} X(t+T, t) \int_t^{t+T} X(t, s)f(s) ds$$

Então

$$\begin{aligned} (Kf)(t) &= - \int_0^t X(t, s)f(s) ds + [I - X(t+T, t)]^{-1} X(t+T, t) \int_t^{t+T} X(t, s)f(s) ds \\ &+ \int_0^t X(t, s)f(s) ds \end{aligned}$$

$$(Kf)(t) = [I - X(t+T, t)]^{-1} X(t+T, t) \int_t^{t+T} X(t, s)f(s) ds$$

Fazendo a mudança de variável $s = t + \tau$

$$(Kf)(t) = [I - X(t+T, t)]^{-1} X(t+T, t) \int_0^T X(t, t+\tau) f(t+\tau) d\tau$$

Assim,

$$(Kf)(t) = [X^{-1}(t+T, t)(I - X(t+T, t))]^{-1} \int_0^T X(t, t+\tau) f(t+\tau) d\tau$$

$$(Kf)(t) = [X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} \int_0^T X(t, t+\tau) f(t+\tau) d\tau$$

$$(Kf)(t) = \int_0^T [X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} X(t, t+\tau) f(t+\tau) d\tau$$

Agora, usando a norma em P_T já definida,

$$\|Kf\| = \sup_{-\infty < t < \infty} |Kf(t)| = \sup_{0 \leq t \leq T} |Kf(t)|$$

$$\begin{aligned} \|Kf\| &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^T [X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} X(t, t+\tau) f(t+\tau) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^T |[X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} X(t, t+\tau) f(t+\tau)| d\tau \\ &\leq \sup_{0 \leq t, \tau \leq T} |[X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} X(t, t+\tau) f(t+\tau)| T \\ &= \sup_{0 \leq t, \tau \leq T} |f(t+\tau)| \sup_{0 \leq t, \tau \leq T} |[X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} X(t, t+\tau)| T \\ &= \|f\|_k \end{aligned}$$

onde

$$k = \sup_{0 \leq t, \tau \leq T} |[X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} X(t, t+\tau)| T$$

Portanto, $K : P_T \rightarrow P_T$ é uma aplicação linear e contínua, e é dada por

$$(Kf)(t) = \int_0^T [X^{-1}(t+T, t) - I]^{-1} X(t, t+s) f(t+s) ds$$

■

Capítulo 2

Equações-Diferenças Lineares Autônomas

Uma equação-diferença linear autônoma é uma equação da forma:

$$X(t) = AX(t - a) \quad (2.1)$$

com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $X(t) \in \mathbb{R}^k$ (ou $\mathbb{C}^k$), k um inteiro positivo, A uma matriz real (ou complexa) $k \times k$. Sem perda de generalidade, para os nossos propósitos, tomaremos $a = 1$ ou seja,

$$X(t) = AX(t - 1) \quad (2.2)$$

A equação 2.2 é chamada linear porque suas soluções obedecem a regra da superposição.

Proposição 2.1 (Regra da Superposição) *Se $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções de (2.2), então*

$$X(t) = \alpha_1(t)X_1(t) + \alpha_2(t)X_2(t)$$

é solução de (2.2), com $\alpha_1(t), \alpha_2(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) transformações 1-periódicas.

Prova: *Imediata.*

■

Observamos que nas equações-diferenças lineares as transformações escalares 1-periódicas ocupam o papel desempenhado pelas constantes em equações diferenciais lineares. Baseados neste fato, introduzimos a seguinte definição.

Definição 2.1 *Sejam $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, transformações. Dizemos que $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ são linearmente dependentes sobre funções 1-periódicas num intervalo I , ou simplesmente l.d., se existirem um conjunto $J \subset I$ de medida não nula e transformações escalares $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$, 1-periódicas tais que*

$$\sum_{j=1}^n |\alpha_j(t)|^2 > 0 \text{ em } J \quad e \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) X_j(t) = 0 \text{ q.t.p. em } I$$

Se as únicas transformações $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ que satisfazem $\sum_{j=1}^n \alpha_j(t) X_j(t) = 0$ forem as nulas q.t.p. em I , então dizemos que $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ são linearmente independentes em I sobre funções 1-periódicas, ou simplesmente l.i.

Lema 2.1 *Sejam $X_1(t), X_2(t), \dots, X_{k+1}(t)$ soluções de (2.2), definidas para $t \geq t_0$. Então $X_1(t), X_2(t), \dots, X_{k+1}(t)$ são linearmente dependentes em $[t_0, \infty)$.*

Prova: *Para cada $t \in [t_0, t_0 + 1)$, existem $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_{k+1}(t)$, escalares tais que*

$$\sum_{j=1}^{k+1} |\alpha_j(t)|^2 > 0 \quad e \quad \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j(t) X_j(t) = 0.$$

Definimos

$$\alpha_j(t+1) := \alpha_j(t), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + 1) \text{ e}$$

$$\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j(t+1) X_j(t+1) = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j(t) A X_j(t) = A \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j(t) X_j(t) = 0$$

$$\text{Portanto, } \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j(t) X_j(t) = 0 \text{ para } t \in [t_0, t_0 + 2).$$

Repetindo o processo, temos que $X_1(t), X_2(t), \dots, X_{k+1}(t)$ são linearmente dependentes em $[t_0, \infty)$.

■

Lema 2.2 *Sejam $X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)$ soluções linearmente independentes de (2.2), definidas para $t \geq t_0$. Então, qualquer outra solução se escreve unicamente*

da forma

$$X(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(t) X_j(t)$$

para $t \geq t_0$, onde $\alpha_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) são transformações 1-periódicas.

Prova: Temos que q.t.p. em $[t_0, t_0+1)$, existem escalares únicos $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_k(t)$ tais que

$$X(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(t) X_j(t)$$

Definimos

$$\alpha_j(t+1) := \alpha_j(t), \text{ para } t \in [t_0, t_0+1).$$

Dessa forma, $\alpha_j(t)$ está definida para $t \in [t_0, t_0+2)$ e, pela proposição (2.1),

$$Y(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(t) X_j(t)$$

para $t \in [t_0, t_0+2)$ é solução de (2.2).

Como $Y(t)$ e $X(t)$ coincidem em $[t_0, t_0+1)$, pela unicidade de solução de uma equação diferença, tomando como função inicial $X(t)$, em $[t_0, t_0+1)$, temos que $Y(t) = X(t)$ em $[t_0, t_0+2)$. Assim,

$$X(t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j(t) X_j(t)$$

para $t \in [t_0, t_0+2)$. Repetindo o processo e observando que a solução $X(t)$, para nossos objetivos, é considerada contínua, concluímos a demonstração do lema. ■

Lema 2.3 Seja b um número real e $v = \operatorname{Re} v + i \operatorname{Im} v$ autovetor associado ao autovalor e^{bi} de A . Então

$$X_1(t) = \operatorname{Re} v \cos b(t+1) - \operatorname{Im} v \sin b(t+1)$$

$$X_2(t) = \operatorname{Re} v \sin b(t+1) + \operatorname{Im} v \cos b(t+1)$$

são soluções reais de (2.2) .

Além disso, $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são l.i., quando $b \neq k\pi$.

No caso em que $b = k\pi$, $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são l.d. (l.i.), se $\operatorname{Re} v$ e $\operatorname{Im} v$ forem l.d. (l.i.).

Prova: Provemos, primeiramente, que $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são soluções de (2.2) .

$$AX_1(t-1) = A(\operatorname{Re} v \cos bt - \operatorname{Im} v \operatorname{sen} bt) = A\operatorname{Re} v \cos bt - A\operatorname{Im} v \operatorname{sen} bt$$

Agora, $Av = e^{bi}v$ que, desenvolvendo, nos dá as igualdades:

$$A\operatorname{Re} v = \cos b \operatorname{Re} v - \operatorname{sen} b \operatorname{Im} v$$

$$A\operatorname{Im} v = \cos b \operatorname{Im} v + \operatorname{sen} b \operatorname{Re} v$$

Daí,

$$\begin{aligned} AX_1(t-1) &= (\cos b \operatorname{Re} v - \operatorname{sen} b \operatorname{Im} v) \cos bt - (\cos b \operatorname{Im} v + \operatorname{sen} b \operatorname{Re} v) \operatorname{sen} bt \\ &= (\cos b \cos bt - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} bt) \operatorname{Re} v - (\operatorname{sen} b \cos bt + \cos b \operatorname{sen} bt) \operatorname{Im} v \\ &= \cos b(t+1) \operatorname{Re} v - \operatorname{sen} b(t+1) \operatorname{Im} v = X_1(t) \end{aligned}$$

Análogo para $X_2(t)$.

Consideremos, então, o caso em que $b = k\pi$. Temos que $\cos bt$ e $\operatorname{sen} bt$ são l.d., pois

$$\operatorname{sen} k\pi t = \tan k\pi t \cos k\pi t = \alpha(t) \cos k\pi(t),$$

com $\alpha(t) = \tan k\pi t$ 1-periódica.

Podemos escrever $X_1(t)$ e $X_2(t)$ como:

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \operatorname{Re} v \cos k\pi(t+1) - \operatorname{Im} v \operatorname{sen} k\pi(t+1) \\ &= \operatorname{Re} v \cos k\pi t \cos k\pi - \operatorname{Im} v \operatorname{sen} k\pi t \cos k\pi \\ &= \operatorname{Re} v \cos k\pi t \cos k\pi - \operatorname{Im} v \alpha(t) \cos k\pi t \cos k\pi \\ &= \cos k\pi t \cos k\pi (\operatorname{Re} v - \operatorname{Im} v \alpha(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_2(t) &= \operatorname{Re} v \sin k\pi(t+1) + \operatorname{Im} v \cos k\pi(t+1) \\
&= \operatorname{Re} v \sin k\pi t \cos k\pi + \operatorname{Im} v \cos k\pi t \cos k\pi \\
&= \operatorname{Re} v \alpha(t) \cos k\pi t \cos k\pi + \operatorname{Im} v \cos k\pi t \cos k\pi \\
&= \cos k\pi t \cos k\pi (\operatorname{Re} v \alpha(t) + \operatorname{Im} v)
\end{aligned}$$

Se $\operatorname{Re} v$ e $\operatorname{Im} v$ são l.d., então: ou $\operatorname{Re} v = c \operatorname{Im} v$, $c \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} v \neq 0$, ou $\operatorname{Im} v = d \operatorname{Re} v$, $d \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{Re} v \neq 0$.

No primeiro caso, temos

$$\begin{aligned}
X_1(t) &= \cos k\pi t \cos k\pi (c - \alpha(t)) \operatorname{Im} v \\
X_2(t) &= \cos k\pi t \cos k\pi (c \alpha(t) + 1) \operatorname{Im} v
\end{aligned}$$

Portanto,

$$X_2(t) = \frac{(c \alpha(t) + 1)}{c - \alpha(t)} X_1(t)$$

e, assim, $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são l.d..

Análogo para o segundo caso.

Agora, se $\operatorname{Re} v$ e $\operatorname{Im} v$ são l.i., então provemos que $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são l.i..

Suponhamos que $\delta_1(t)X_1(t) + \delta_2(t)X_2(t) = 0$

$$\delta_1(t)[\cos k\pi t \cos k\pi (\operatorname{Re} v - \alpha(t) \operatorname{Im} v)] + \delta_2(t)[\cos k\pi t \cos k\pi (\operatorname{Re} v \alpha(t) + \operatorname{Im} v)] = 0$$

$$\cos k\pi t \cos k\pi [(\delta_1(t) + \delta_2(t)\alpha(t)) \operatorname{Re} v + (\delta_2(t) - \delta_1(t)\alpha(t)) \operatorname{Im} v] = 0, \text{ daí,}$$

$$[\delta_1(t) + \delta_2(t)\alpha(t)] \operatorname{Re} v + [\delta_2(t) - \delta_1(t)\alpha(t)] \operatorname{Im} v = 0$$

Como estamos supondo $\operatorname{Re} v$ e $\operatorname{Im} v$ l.i.,

$$\delta_1(t) + \delta_2(t)\alpha(t) = 0$$

$$\delta_2(t) - \delta_1(t)\alpha(t) = 0$$

e, portanto,

$$\delta_1(t) = \delta_2(t) = 0, \text{ q.t.p.}$$

Suponhamos que $b \neq k\pi$. Afirmamos que $\cos bt$ e $\sin bt$ são l.i. De fato, se

$$\delta_1(t) \cos bt + \delta_2(t) \sin bt = 0, \text{ então :}$$

$$\delta_1(t+1) \cos b(t+1) + \delta_2(t+1) \sin b(t+1) = 0$$

$$\delta_2(t)(\sin bt \cos b + \cos bt \sin b) + \delta_1(t)(\cos bt \cos b - \sin bt \sin b) = 0$$

$$[\delta_1(t) \cos b + \delta_2(t) \sin b] \cos bt + [\delta_2(t) \cos b - \delta_1(t) \sin b] \sin bt = 0$$

Temos, então, o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \delta_1(t) & \delta_2(t) \\ \delta_1(t) \cos b + \delta_2(t) \sin b & \delta_2(t) \cos b - \delta_1(t) \sin b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos bt \\ \sin bt \end{bmatrix} = 0$$

Portanto, $\delta_1 \delta_2 \cos b - \delta_1^2 \sin b - \delta_1 \delta_2 \cos b - \delta_2^2 \sin b = 0$, o que implica, $\delta_1(t) = \delta_2(t) = 0$.

Mostremos que $X_1(t)$ e $X_2(t)$ são l.i.. Se

$$\delta_1(t)X_1(t) + \delta_2(t)X_2(t) = 0$$

$$\delta_1(t)[\operatorname{Re} v \cos b(t+1) - \operatorname{Im} v \sin b(t+1)] + \delta_2(t)[\operatorname{Re} v \sin b(t+1) + \operatorname{Im} v \cos b(t+1)] = 0$$

$$[\delta_1(t) \operatorname{Re} v + \delta_2(t) \operatorname{Im} v] \cos b(t+1) + [\delta_2(t) \operatorname{Re} v - \delta_1(t) \operatorname{Im} v] \sin b(t+1) = 0$$

Como $\cos bt$ e $\sin bt$ são l.i.,

$$\delta_1(t) \operatorname{Re} v + \delta_2(t) \operatorname{Im} v = 0$$

$$\delta_2(t) \operatorname{Re} v - \delta_1(t) \operatorname{Im} v = 0$$

Das igualdades acima, se $\operatorname{Re} v$ e $\operatorname{Im} v$ forem l.i., é imediato. Se $\operatorname{Re} v$ e $\operatorname{Im} v$ forem l.d., consideramos ou $\operatorname{Re} v = c \operatorname{Im} v$, $c \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} v \neq 0$, ou $\operatorname{Im} v = d \operatorname{Re} v$, $d \in \mathbb{R}$ e $\operatorname{Re} v \neq 0$, e segue o resultado.

■

Lema 2.4 Se $b = \frac{2\pi}{k}$, então as funções $1, e^{bit}, e^{2bit}, \dots, e^{(k-1)bit}$ são k funções linearmente independentes.

Prova: Mostremos que tais funções são li.

Suponhamos que $\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(t) e^{jbit} = 0$, qtp em t .

Então, $\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(t) e^{jbi(t+s)} = 0$, para $s = 1, \dots, k-1$. Podemos escrever

$$B = \begin{bmatrix} 1 & e^{bit} & e^{2bit} & \dots & e^{(k-1)bit} \\ 1 & e^{bi(t+1)} & e^{2bi(t+1)} & \dots & e^{(k-1)bi(t+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{bi(t+(k-1))} & e^{2bi(t+(k-1))} & \dots & e^{(k-1)bi(t+(k-1))} \end{bmatrix}$$

e

$$C = [\alpha_0(t) \quad \alpha_1(t) \quad \dots \quad \alpha_{k-1}(t)]$$

e, então, $BC = 0$.

Mostremos que $\det B \neq 0$. De fato, temos que $\det B = e^{bit} \cdot e^{2bit} \dots e^{(k-1)bit} \cdot \det M$, onde

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{bi} & e^{2bi} & \dots & e^{(k-1)bi} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{(k-1)bi} & e^{2(k-1)bi} & \dots & e^{(k-1)(k-1)bi} \end{bmatrix}$$

é conhecida como Matriz de Vandermonde e tem determinante não nulo. Assim, $\det B \neq 0$ e $\alpha_0(t) = 0, \alpha_1(t) = 0, \dots, \alpha_{k-1}(t) = 0$, q.t.p. em t .

Portanto, $1, e^{bit}, e^{2bit}, \dots, e^{(k-1)bit}$ são funções linearmente independentes. ■

Lema 2.5 Se $b = \frac{2\pi}{k}$, então as funções $1v_0, e^{bi(t+1)}v_1, e^{2bi(t+1)}v_2, \dots, e^{(k-1)bi(t+1)}v_{k-1}$ são k soluções linearmente independentes de (2.2), onde cada v_j é um autovetor de A associado ao autovalor $e^{j\frac{2\pi}{k}i}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Prova: $Ae^{jbi(t+1-1)}v_j = Av_je^{jbit} = e^{jbi}v_je^{jbit} = v_je^{jbi(t+1)}$

Mostremos, então, que tais soluções são li.

Suponhamos que $\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(t) e^{jbi(t+1)} v_j = 0$, q.t.p. em t .

Isto é,

$$\alpha_0(t)v_0 + \alpha_1(t)e^{bi(t+1)}v_1 + \dots + \alpha_{k-1}(t)e^{(k-1)bi(t+1)}v_{k-1} = 0$$

Como os autovetores $v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ são associados a autovalores diferentes, esses são linearmente independentes. Assim, $\alpha_0(t) = 0$, $\alpha_1(t) = 0$, $\dots$, $\alpha_{k-1}(t) = 0$, q.t.p. em t .

Portanto, são soluções linearmente independentes.

■

Capítulo 3

Um Método para Encontrar Soluções Periódicas de Equações Diferenciais Funcionais (caso real)

O teorema que apresentaremos foi proposto por Carvalho em [1]. Uma das finalidades deste teorema é o estudo de soluções periódicas de equações diferenciais retardadas.

Teorema 3.1 (Teorema de Carvalho) *Seja k um inteiro positivo e $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma transformação k -periódica. Então:*

se k é par, $k = 2n$, $n \geq 1$,

$$x(t) = a_0(t) + a_n(t) \cos \pi t + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(t) \cos \frac{2\pi j}{k} t + b_j(t) \sin \frac{2\pi j}{k} t$$

se k é ímpar, $k = 2m + 1$, $k > 1$,

$$x(t) = a_0(t) + \sum_{j=1}^m a_j(t) \cos \frac{2\pi j}{k} t + b_j(t) \sin \frac{2\pi j}{k} t$$

onde $a_j(t), b_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são transformações 1-periódicas.

Prova: *A equação que define k -periodicidade é*

$$x(t - k) = x(t)$$

Definimos

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{bmatrix}$$

com $x(t) = x_1(t), x_2(t) = x_1(t-1), x_3(t) = x_2(t-1), \dots, x_k(t) = x_{k-1}(t-1)$ e

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Então $x(t-k) = x(t) \Leftrightarrow X(t) = AX(t-1)$. De fato,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ \vdots \\ x_k(t-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k(t-1) \\ x_1(t-1) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t-1) \end{bmatrix}$$

donde $x_1(t) = x_k(t-1), x_2(t) = x_1(t-1), x_3(t) = x_2(t-1), \dots, x_k(t) = x_{k-1}(t-1)$ e, portanto, $x(t) = x_1(t) = x_k(t-1) = x_{k-1}(t-2) = \dots = x_1(t-k) = x(t-k)$.

Assim, é suficiente estudarmos a equação (2.2), com $X(t)$ e A dadas na forma acima. Para isso, precisamos conhecer os autovalores de A , e aplicarmos os lemas do capítulo anterior.

Lema 3.1 Todos os autovalores de A são simples: eles são as raízes k -ésimas da unidade.

Prova: Temos $\det(A - I\lambda) = 0 \Leftrightarrow (-1)^k(-1 + \lambda^k) = 0$, ou seja, $\lambda^k = 1$.

Se k é par, $k = 2n$, podemos escrever os autovalores de A da seguinte forma:

$$\lambda_0 = 1, \lambda_n = -1, \lambda_j = \cos \frac{2\pi j}{k} + i \sin \frac{2\pi j}{k}, \text{ e } \bar{\lambda}_j, j = 1, \dots, n-1.$$

Se k é ímpar, com $m = \frac{k-1}{2}$, podemos escrever os autovalores de A da seguinte maneira:

$$\lambda_0 = 1, \lambda_j = \cos \frac{2\pi j}{k} + i \sin \frac{2\pi j}{k}, \text{ e } \bar{\lambda}_j, j = 1, \dots, m.$$

Suponhamos que k seja par. Sejam $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}$, os autovetores associados aos autovalores $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_{n-1}$.

Vamos considerar somente os autovetores $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$. Pelo lema 2.3, existem soluções

$$X_1^j(t) = \operatorname{Re} v_j \cos \frac{2\pi j}{k}(t+1) - \operatorname{Im} v_j \sin \frac{2\pi j}{k}(t+1),$$

$$X_2^j(t) = \operatorname{Re} v_j \sin \frac{2\pi j}{k}(t+1) + \operatorname{Im} v_j \cos \frac{2\pi j}{k}(t+1),$$

$$j = 0, 1, \dots, n.$$

Para $j = 0$ e $j = n$, temos $b = k\pi$, com $k = 0$ e $k = 1$; como $\operatorname{Re} v_0$ e $\operatorname{Im} v_0$ são l.d., X_1^0 e X_2^0 são l.d.; análogo para X_1^n e X_2^n . Mas, para $j = 1, \dots, n-1$, X_1^j e X_2^j são l.i..

Mostremos que X_1^0, X_1^n, X_1^j e X_2^j são l.i., para $j = 1, \dots, n-1$.

Para isso, basta mostrarmos que $\{1, \cos \pi t, \cos \frac{2\pi j}{k}t, \sin \frac{2\pi j}{k}t\}$, $j = 1, \dots, n-1$ é l.i., pois $\sin \pi t = \tan \pi t \cos \pi t$. Agrupamos em termos de senos e cossenos o somatório das funções X_1^0, X_1^n, X_1^j e X_2^j multiplicadas por funções 1-periódicas e concluímos que tais funções são nulas quase sempre.

Façamos

$$\sum_{j=1}^{n-1} [\alpha_j(t) \cos \frac{2\pi j}{k}t + \beta_j(t) \sin \frac{2\pi j}{k}t] + \alpha_0(t) + \alpha_n(t) \cos \pi t = 0$$

com $\alpha_0(t), \alpha_n(t), \alpha_j(t), \beta_j(t)$ transformações 1-periódicas. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n-1} [\alpha_j(t) \cos bjt + \beta_j(t) \operatorname{sen} bjt] + \alpha_0(t) + \alpha_n(t) \cos \pi t = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} [\alpha_j(t) \frac{e^{ibjt} + e^{-ibjt}}{2} + \beta_j(t) \frac{e^{ibjt} - e^{-ibjt}}{2i}] + \alpha_0(t) + \alpha_n(t) \cos \pi t = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} [\frac{\alpha_j(t) - i\beta_j(t)}{2} e^{ibjt} + \frac{\alpha_j(t) + i\beta_j(t)}{2} e^{-ibjt}] + \alpha_0(t) + \alpha_n(t) \cos \pi t = 0$$

que é equivalente a:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} c_j^-(t) e^{ib_j^- t} = 0,$$

onde

$$c_j^-(t) = \begin{cases} \alpha_0(t) & \text{se } \tilde{j} = 0, \\ \frac{\alpha_{\tilde{j}}(t) - i\beta_{\tilde{j}}(t)}{2} & \text{se } 1 \leq \tilde{j} \leq n-1, \\ \frac{\alpha_n(t)}{1+i \tan \pi t} & \text{se } \tilde{j} = n, \\ \frac{\alpha_{k-\tilde{j}}(t) + i\beta_{k-\tilde{j}}(t)}{2} & \text{se } n+1 \leq \tilde{j} \leq 2n-1 \end{cases}$$

pois, $e^{-ib_j t}$, $1 \leq j \leq n-1$ é equivalente a $e^{ib(k-j)t}$, com $n+1 \leq k-j \leq 2n-1$

Pelo lema 2.4, $c_j(t) = 0$, q.t.p. em t , para todo j . Então, concluímos que $\alpha_0(t)$, $\alpha_n(t)$, $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t)$ são nulas q.t.p. em t .

Então, pelo lema 2.2, qualquer outra solução de (2.2) é escrita unicamente como combinação dessas soluções l.i., isto é, existem $c_0(t)$, $c_n(t)$, $c_1^1(t)$, $c_1^2(t)$, $\dots$, $c_{n-1}^1(t)$, $c_{n-1}^2(t)$, 1-periódicas tais que

$$\begin{aligned} X(t) &= c_0(t) \operatorname{Rev}_0 + c_n(t) [\operatorname{Rev}_n \cos \pi(t+1) - \operatorname{Im} v_n \operatorname{sen} \pi(t+1)] \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} c_j^1(t) [\operatorname{Rev}_j \cos \frac{2\pi j}{k}(t+1) - \operatorname{Im} v_j \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{k}(t+1)] \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} c_j^2(t) [\operatorname{Rev}_j \operatorname{sen} \frac{2\pi j}{k}(t+1) + \operatorname{Im} v_j \cos \frac{2\pi j}{k}(t+1)] \end{aligned}$$

Reagrupando os termos em seno e cosseno e, novamente, observando que $\sen \pi t = \tan \pi t \cos \pi t$, temos

$$X(t) = A_0(t) + A_n(t) \cos \pi(t+1) + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(t) \cos \frac{2\pi j}{k}(t+1) + B_j(t) \sen \frac{2\pi j}{k}(t+1)$$

onde A'_j s e B'_j s são transformações vetoriais 1-periódicas.

Por outro lado, como $X(t)$ satisfaz a equação (2.2),

$$X(t) = AA_0(t) + AA_n(t) \cos \pi t + \sum_{j=1}^{n-1} AA_j(t) \cos \frac{2\pi j}{k}t + AB_j(t) \sen \frac{2\pi j}{k}t$$

E pela disposição dos elementos de A e $X(t)$, temos que

$$x(t) = a_0(t) + a_n(t) \cos \pi t + \sum_{j=1}^{n-1} a_j(t) \cos \frac{2\pi j}{k}t + b_j(t) \sen \frac{2\pi j}{k}t$$

onde a'_j s e b'_j s são as últimas coordenadas dos vetores AA'_j s e AB'_j s, respectivamente.

Para k ímpar, o raciocínio é análogo.

■

Capítulo 4

Aplicações do Teorema de Carvalho (caso real)

4.1 Soluções 3-periódicas de $\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)$

Consideremos a seguinte equação:

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1), \alpha \neq 0 \quad (4.1)$$

Vamos procurar por soluções 3-periódicas dessa equação.

Pelo teorema 3.1, se tal solução existir, ela é escrita da seguinte forma:

$$x(t) = a_0(t) + a_1(t) \cos \frac{2\pi}{3}t + b_1(t) \sin \frac{2\pi}{3}t$$

onde a_0, a_1, b_1 são funções 1-periódicas.

Derivando esta expressão temos:

$$\dot{x}(t) = \dot{a}_0(t) + [\dot{a}_1(t) + \frac{2\pi}{3}b_1(t)] \cos \frac{2\pi}{3}t + [\dot{b}_1(t) - \frac{2\pi}{3}a_1(t)] \sin \frac{2\pi}{3}t$$

Por outro lado, substituindo a expressão para $x(t)$ em (4.1) obtemos:

$$\dot{x}(t) = -\alpha a_0(t) + \alpha \left[\frac{1}{2}a_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}b_1(t) \right] \cos \frac{2\pi}{3}t - \alpha \left[\frac{-1}{2}b_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}a_1(t) \right] \sin \frac{2\pi}{3}t$$

Igualando as duas expressões obtidas para $\dot{x}(t)$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(t) + \alpha a_0(t) + [\dot{a}_1(t) + \frac{2\pi}{3}b_1(t) - \alpha\frac{1}{2}a_1(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha b_1] \cos \frac{2\pi}{3}t \\ + [\dot{b}_1(t) - \frac{2\pi}{3}a_1(t) - \alpha\frac{1}{2}b_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha a_1] \sin \frac{2\pi}{3}t = 0 \end{aligned}$$

Observando que $\{1, \cos \frac{2\pi}{3}t, \sin \frac{2\pi}{3}t\}$ são transformações l.i., temos

$$\begin{cases} \dot{a}_0(t) = -\alpha a_0(t) \\ \dot{a}_1(t) = \frac{1}{2}\alpha a_1(t) + (\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3})b_1(t) \\ \dot{b}_1(t) = -(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3})a_1(t) + \frac{1}{2}\alpha b_1(t) \end{cases}$$

Da primeira equação, temos que $a_0 = 0$, pois deve ser 1-periódica e $\alpha \neq 0$. Resta-nos o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2} & (\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ -(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3}) & \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

Os autovalores da matriz de coeficientes são $\lambda = \frac{\alpha}{2} + i(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3})$ e $\bar{\lambda}$.

Qualquer solução $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ deste sistema é escrita como combinação linear de (ver, por exemplo, em [5])

$$x(t) = e^{\frac{\alpha}{2}t} [v_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3})t - v_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3})t]$$

e

$$y(t) = e^{\frac{\alpha}{2}t} [v_2 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3})t + v_1 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3})t]$$

onde v_1 e v_2 são parte real e imaginária do autovetor associado ao autovalor λ .

Para que a_1 e b_1 sejam periódicas, devemos ter $\frac{\alpha}{2} = 0$, o que nos dá $\alpha = 0$, contrariando a hipótese sobre α .

Portanto, não existem soluções 3-periódicas de (4.1), não triviais.

4.2 Soluções 4-periódicas de $\dot{x}(t) = -\alpha x(t - 1)$

Considerando a mesma equação do exemplo anterior, equação (4.1), vamos procurar por soluções 4-periódicas. Pelo teorema 3.1, se existir tal solução, ela terá a forma:

$$x(t) = a_0(t) + a_2(t) \cos \pi t + a_1(t) \cos \frac{\pi}{2}t + b_1(t) \sin \frac{\pi}{2}t \quad (4.2)$$

Derivando esta expressão, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \dot{a}_0(t) + [\dot{a}_2(t) - a_2(t)\pi \tan \pi t] \cos \pi t + \\ + [\dot{a}_1(t) + b_1(t)\frac{\pi}{2}] \cos \frac{\pi}{2}t + [\dot{b}_1(t) - a_1(t)\frac{\pi}{2}] \sin \frac{\pi}{2}t \end{aligned}$$

Por outro lado, $x(t)$ satisfaz a equação (4.1), isto é,

$$\dot{x}(t) = -\alpha[a_0(t) - a_2(t) \cos \pi t + a_1(t) \sin \frac{\pi}{2}t - b_1(t) \cos \frac{\pi}{2}t]$$

Igualando as expressões para $\dot{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(t) + \alpha a_0(t) + [\dot{a}_2(t) - a_2(t)\pi \tan \pi t - \alpha a_2(t)] \cos \pi t + \\ + [\dot{a}_1(t) + b_1(t)\frac{\pi}{2} - \alpha b_1(t)] \cos \frac{\pi}{2}t + [\dot{b}_1(t) - a_1(t)\frac{\pi}{2} + \alpha a_1(t)] \sin \frac{\pi}{2}t = 0 \end{aligned}$$

Observando que $\{1, \cos \pi t, \cos \frac{\pi}{2}t, \sin \frac{\pi}{2}t\}$ é l.i., temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{a}_0(t) = -\alpha a_0(t) \\ \dot{a}_1(t) = (\alpha - \frac{\pi}{2})b_1(t) \\ \dot{a}_2(t) = (\alpha + \pi \tan \pi t)a_2(t) \\ \dot{b}_1(t) = -(\alpha - \frac{\pi}{2})a_1(t) \end{cases}$$

Analisando o sistema, da primeira equação concluímos que $a_0 \equiv 0$, pelo mesmo raciocínio do exemplo anterior.

Da terceira equação concluímos que $a_2(t) = 0$, q.t.p. em t . De fato,

$$a_2(t) = ce^{\alpha t + \pi \int_{t_0}^t \tan \pi t dt}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Como queremos $a_2(t)$ 1-periódica, devemos ter $c = 0$ ou $\alpha = 0$.
 Resta-nos:

$$\begin{cases} \dot{a}_1(t) = (\alpha - \frac{\pi}{2})b_1(t) \\ \dot{b}_1(t) = -(\alpha - \frac{\pi}{2})a_1(t) \end{cases}$$

O sistema torna-se linear, cuja matriz de coeficientes é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & (\alpha - \frac{\pi}{2}) \\ -(\alpha - \frac{\pi}{2}) & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então $a_1(t)$ e $b_1(t)$ são constantes, digamos a e b . Logo, as soluções da equação (4.1) para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ são dadas por:

$$x(t) = a \cos \frac{\pi}{2}t + b \sin \frac{\pi}{2}t$$

Supondo que $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, temos que os autovalores da matriz A dada acima são $\lambda = \pm i(\alpha - \frac{\pi}{2})$. Associado ao autovalor $\lambda = i(\alpha - \frac{\pi}{2})$ temos o autovetor

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que nos fornece as soluções:

$$\begin{aligned} a_1(t) &= a \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})t + b \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})t \\ b_1(t) &= b \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})t - a \sin(\alpha - \frac{\pi}{2})t \end{aligned}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

Novamente, como queremos $a_1(t)$ e $b_1(t)$ 1-periódicas, devemos ter $\alpha - \frac{\pi}{2} = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, isto é, $\alpha = \frac{(4n+1)\pi}{2}$.

Substituindo as expressões obtidas em (4.2) temos:

$$x(t) = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t$$

para $\alpha = \frac{(4n+1)\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4.3 Soluções 2-periódicas de uma equação logística

Como a transformação $x(t)$ do teorema 3.1 não é, necessariamente, uma solução de uma EDR, e apenas uma transformação periódica, podemos aplicá-lo a outras situações, como veremos neste exemplo.

Consideremos a seguinte equação, originada de uma equação logística,

$$x(t) = x(t-1)e^{\mu[1-x(t-1)]}, \mu \neq 0 \quad (4.3)$$

É fácil ver que as únicas funções constantes que são soluções dessa equação são $x_0(t) \equiv 0$ e $x_1(t) \equiv 1$.

Procuremos por soluções 2-periódicas desta equação. Pelo teorema 3.1:

$$x(t) = a(t) + b(t) \cos \pi t \quad (4.4)$$

com $a(t)$ e $b(t)$ transformações 1-periódicas.

Substituindo (4.4) em (4.3), obtemos:

$$a(t) + b(t) \cos \pi t = [a(t) - b(t) \cos \pi t]e^{\mu[1-a(t)+b(t) \cos \pi t]}$$

Trocando t por $t+1$, vem:

$$a(t) - b(t) \cos \pi t = [a(t) + b(t) \cos \pi t]e^{\mu[1-a(t)-b(t) \cos \pi t]}$$

Multiplicando estas duas igualdades membro a membro, temos:

$$[a^2(t) - b^2(t) \cos^2 \pi t][1 - e^{2\mu(1-a(t))}] = 0$$

que nos fornece ou $a(t) = b(t) = 0$, q.t.p. em t (e portanto $x = 0$), pois $\{1, \cos \pi t\}$ são l.i., ou $a(t) \equiv 1$.

Assim, qualquer solução não trivial terá a forma

$$x(t) = 1 + b(t) \cos \pi t$$

Voltando à equação (4.3):

$$[1 + b(t) \cos \pi t] = [1 - b(t) \cos \pi t]e^{\mu b(t) \cos \pi t}$$

Se fizermos $b(t) \cos \pi t = y$ essa equação pode ser escrita como:

$$1 + y = (1 - y)e^{\mu y}$$

ou seja:

$$e^{\mu y} = \frac{(1 + y)}{(1 - y)}$$

$$\mu = \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

Pensando em y e μ como variáveis relacionadas, $g(y) = \mu$, definamos $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) & \text{se } y \neq 0, \\ 2 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

Usando as séries de Maclaurin de $\ln(1 + y)$ e $\ln(1 - y)$, podemos representar g pela série de potências

$$g(y) = 2\left(1 + \frac{y^2}{3} + \frac{y^4}{5} + \frac{y^6}{7} + \cdots\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{2n+1}, \quad -1 < y < 1.$$

Esta relação mostra que g é uma função analítica, par, é estritamente decrescente em $(-1, 0)$ e estritamente crescente em $(0, 1)$; portanto, g tem um mínimo em $y = 0$. Assim, se $\mu < 2 (= g(0))$ não existe y tal que $g(y) = \mu$, o que significa que (4.3) não tem soluções 2-periódicas não triviais.

Para cada $\mu > 2$ existem dois valores $\pm y_\mu$ tais que $g(\pm y_\mu) = \mu$. Portanto, cada $\mu > 2$ dá origem a infinitas soluções periódicas de (4.3).

Gráfico de y por μ

Uma classe de tais soluções é obtida do seguinte modo: sejam $A, B \subset [0, 1)$ disjuntos com $A \cup B = [0, 1)$; a função

$$x(t) = \begin{cases} 1 + y_\mu & \text{se } t \in A + 2n \\ 1 - y_\mu & \text{se } t \in B + 2n \\ 1 - y_\mu & \text{se } t \in A + 2n + 1 \\ 1 + y_\mu & \text{se } t \in B + 2n + 1 \end{cases}$$

é uma solução 2-periódica de (4.3).

Gráfico de uma solução 2-periódica da equação (4.3)

Outras soluções podem ser obtidas alterando-se $x(t)$ em alguns pontos. Por exemplo, a função

$$z(t) = \begin{cases} x(t) & \text{se } t \neq \frac{1}{2} + n \\ 0 & \text{se } t = \frac{1}{2} + n \end{cases}$$

é uma outra solução de (4.3).

Estas observações mostram que $\mu = 2$ é um ponto de bifurcação de soluções 2-periódicas de (4.3)

4.4 Soluções 3-periódicas da equação de Wright

Vamos apresentar uma aplicação do teorema 3.1 à equação de Wright

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t-1)[1+x(t)], \alpha \neq 0 \quad (4.5)$$

Procuremos por soluções 3-periódicas, não triviais, desta equação. Se existir, pelo teorema 3.1, se escreve na forma:

$$x(t) = a_0(t) + a_1(t) \cos \frac{2\pi}{3}t + b_1(t) \sin \frac{2\pi}{3}t \quad (4.6)$$

Por um lado, derivando esta expressão temos

$$\dot{x}(t) = \dot{a}_0(t) + [\dot{a}_1(t) + \frac{2\pi}{3}b_1(t)] \cos \frac{2\pi}{3}t + [\dot{b}_1(t) - \frac{2\pi}{3}a_1(t)] \sin \frac{2\pi}{3}t \quad (4.7)$$

Por outro lado, substituindo (4.6) em (4.5) e fazendo algumas manipulações algébricas e trigonométricas, temos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & \alpha[-a_0 - a_0^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 + b_1^2)] + \\ & + \frac{\alpha}{2}\{a_1(1 - a_0) + \sqrt{3}b_1(1 + a_0) + \frac{1}{2}[(a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2] \cos 2\pi t + \\ & + \frac{\sqrt{3}}{2}[(b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2] \sin 2\pi t\} \cos \frac{2\pi}{3}t + \\ & + \frac{\alpha}{2}\{b_1(1 - a_0) - \sqrt{3}a_1(1 + a_0) - \frac{\sqrt{3}}{2}[(b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2] \cos 2\pi t + \\ & + \frac{1}{2}[(a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2] \sin 2\pi t\} \sin \frac{2\pi}{3}t \end{aligned}$$

Igualando as duas últimas expressões e observando que $\{1, \cos \frac{2\pi}{3}t, \sin \frac{2\pi}{3}t\}$ são l.i., temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{a}_0(t) = \alpha \{-a_0 - a_0^2 + \frac{1}{4}(a_1^2 + b_1^2)\} \\ \dot{a}_1(t) = -\frac{2\pi}{3}b_1 + \frac{\alpha}{2}\{a_1(1 - a_0) + \sqrt{3}b_1(1 + a_0) + \\ + \frac{1}{2}[(a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2] \cos 2\pi t + \frac{\sqrt{3}}{2}[(b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2] \sin 2\pi t\} \\ \dot{b}_1(t) = \frac{2\pi}{3}a_1 + \frac{\alpha}{2}\{b_1(1 - a_0) - \sqrt{3}a_1(1 + a_0) + \\ - \frac{\sqrt{3}}{2}[(b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2] \cos 2\pi t + \frac{1}{2}[(a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2] \sin 2\pi t\} \end{cases}$$

Este sistema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_0 \\ \dot{a}_1 \\ \dot{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & -(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3}) & \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + F(t, a_0, a_1, b_1)$$

onde

$$F(t, a_0, a_1, b_1) = \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} -2a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2) & 0 & 0 \\ -a_1a_0 + \sqrt{3}b_1a_0 & \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \\ -b_1a_0 - \sqrt{3}a_1a_0 & -\cos 2\pi t & \sin 2\pi t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}[(b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2] \\ \frac{1}{2}[(a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2] \end{bmatrix}$$

ou ainda,

$$F(t, a_0, a_1, b_1) = \alpha \begin{bmatrix} -2a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2) & 0 & 0 \\ -a_1a_0 + \sqrt{3}b_1a_0 & \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \\ -b_1a_0 - \sqrt{3}a_1a_0 & -\cos 2\pi t & \sin 2\pi t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}[(\frac{\sqrt{3}b_1 + a_1}{2})^2 - a_1^2] \\ (\frac{\sqrt{3}b_1 + a_1}{2})^2 - b_1^2 \end{bmatrix}$$

Se supormos a_0 constante, o sistema se reduz a:

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2}(1 - a_0) & (\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha(1 + a_0) - \frac{2\pi}{3}) \\ -(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha(1 + a_0) - \frac{2\pi}{3}) & \frac{\alpha}{2}(1 - a_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} + \\ + \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} \sin 2\pi t & \cos 2\pi t \\ -\cos 2\pi t & \sin 2\pi t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}[(b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2] \\ \frac{1}{2}[(a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2] \end{bmatrix}$$

satisfazendo a condição:

$$a_0 + a_0^2 = \frac{1}{4}(a_1^2 + b_1^2). \quad (4.8)$$

Suponhamos, então, que a_1 e b_1 são constantes. Então:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}(1 - a_0)a_1 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha(1 + a_0) - \frac{2\pi}{3}\right]b_1 + \frac{\alpha}{2}\sin 2\pi t \frac{\sqrt{3}}{2}[(b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2] + \\ + \frac{\alpha}{2}\cos 2\pi t \frac{1}{2}[(a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2] = 0 \\ - \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha(1 + a_0) - \frac{2\pi}{3}\right]a_1 + \frac{\alpha}{2}(1 - a_0)b_1 - \frac{\alpha}{2}\cos 2\pi t \frac{\sqrt{3}}{2}[(b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2] + \\ + \frac{\alpha}{2}\sin 2\pi t \frac{1}{2}[(a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2] = 0 \end{aligned}$$

Como estas igualdades valem para todo t e $\{1, \sin 2\pi t, \cos 2\pi t\}$ são funções linearmente independentes (no sentido da Álgebra Linear), segue que:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{2}(1 - a_0)a_1 + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha(1 + a_0) - \frac{2\pi}{3}\right]b_1 &= 0 \\ -\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha(1 + a_0) - \frac{2\pi}{3}\right]a_1 + \frac{\alpha}{2}(1 - a_0)b_1 &= 0 \\ (b_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}a_1)^2 - \frac{4}{3}a_1^2 &= 0 \\ (a_1 + \sqrt{3}b_1)^2 - 4b_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

Estas equações fornecem $a_1 = b_1 = 0$. Voltando em (4.8), concluímos que $a_0 = -1$ ou $a_0 = 0$.

Portanto, se a_0 , a_1 e b_1 forem constantes, as soluções periódicas são as triviais, ou seja, $x \equiv -1$ ou $x \equiv 0$.

Denominaremos $C^* = \{f : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, f \text{ é constante} \}$. A dimensão de C^* é finita e, como P_1 é um espaço vetorial normado, portanto localmente convexo, C^* é complementável em P_1 , isto é, existe P_1^* fechado tal que

$$P_1 = P_1^* \oplus C^*$$

(veja, por exemplo, [12]).

Como P_1^* é fechado, é um espaço de Banach com a norma induzida por P_1 .

Voltando ao sistema inicial, se chamarmos

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

podemos escrever o sistema da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t, x(t)) \quad (4.9)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} & (\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ 0 & -(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{2\pi}{3}) & \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

e F é dada como anteriormente.

Observemos que F é trigonométrica em t e polinomial em x . Portanto, F é C^∞ .

Logo, F é localmente lipschitziana em (t, x) , em particular em x .

E mais, como queremos a_0, a_1, b_1 1-periódicas, segue que $F(t, x(t))$ é também 1-periódica, isto é, $F(t+1, x(t+1)) = F(t, x(t))$.

Pelo exemplo 4.1, a única solução 1-periódica de $\dot{x} = Ax$ é a trivial, logo, o sistema é crítico com respeito a P_1 , em particular, com respeito a P_1^* .

Nós procuramos por uma solução $x = (a_0, a_1, b_1)$ que satisfaça (4.9), com a_0, a_1, b_1 1-periódicas.

Para isso, vamos olhar para o problema da seguinte forma, mais geral:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t, \phi(t)) \quad (4.10)$$

onde $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é tomada no conjunto P_1^* .

Fazendo adaptações ao teorema 1.3, temos que o sistema (4.10), ou ainda,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h(t) \quad (4.11)$$

onde $h(t) = F(t, \phi(t))$ tem uma única solução 1-periódica

$$(Kh)(t) = \int_0^1 (e^{-A} - I)^{-1} e^{-As} h(t+s) ds \quad (4.12)$$

Assim, para cada $\phi \in P_1^*$, existe uma única solução de (4.10), 1-periódica, dada por

$$(T\phi)(t) = K(F(t, \phi(t))) = \int_0^1 (e^{-A} - I)^{-1} e^{-As} F(t+s, \phi(t+s)) ds$$

Vamos mostrar que $T : P_1^* \rightarrow P_1$ tem no máximo um ponto fixo em uma bola B de raio finito centrada na origem.

Para qualquer $\alpha > 0$, existe $H = H(\alpha)$ tal que

$$|(e^{-A} - I)^{-1} e^{-As}| \leq H,$$

para $s \in [0, 1]$, pois

$$|(e^{-A} - I)^{-1} e^{-As}| \leq |(e^{-A} - I)^{-1}| |e^{-As}| \leq H_1(\alpha) |e^{-As}| \leq H_1(\alpha) e^{H_2(\alpha)} = H(\alpha)$$

Seja L a constante de Lipschitz nesta bola B. Escolha $M > 0$ e introduza uma nova e equivalente norma em P_1^* , dada por

$$\|\phi\| = \sup\{e^{M(s-1)} |\phi(s)|, s \in [0, 1]\}$$

chamada norma de Bielecki. Então

$$\begin{aligned} |(T\phi)(t) - (T\psi)(t)| &\leq HL \int_0^1 |\phi(t+s) - \psi(t+s)| ds \leq \\ &\leq HL \|\phi - \psi\| \int_0^1 e^{-M(t+s-1)} ds \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros por $e^{M(t-1)}$, temos:

$$\begin{aligned}
e^{M(t-1)}|(T\phi)(t) - (T\psi)(t)| &\leq HL\|\phi - \psi\| \int_0^1 e^{-Ms} ds \\
&= HL\|\phi - \psi\| \left[-\frac{(e^{-Ms} - 1)}{M} \right] \\
&= HL\|\phi - \psi\| \left[\frac{(1 - e^{-M})}{M} \right] \\
&\leq HL\|\phi - \psi\| \frac{1}{M}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|T\phi - T\psi\| \leq \frac{HL}{M} \|\phi - \psi\|$$

Tomando M grande, T é uma contração em B . Pelo teorema do ponto fixo de Banach (versão fraca), T tem no máximo um ponto fixo nesta bola de centro na origem, isto é, $T\phi = \phi$, para $\phi \in B$.

Assim, para cada $\phi(t) \in P_1^*$, a única solução de (4.10) é $(T\phi)(t)$, isto é,

$$(\dot{T}\phi)(t) = A(T\phi)(t) + F(t, \phi(t))$$

e, seu ponto fixo satisfaz,

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t) + F(t, \phi(t))$$

se este existir.

Como $T(0, 0, 0)(t) = (0, 0, 0)$, a única solução de (4.9) é $x(t) = (0, 0, 0)$, que é solução trivial de (4.5).

Portanto, a equação de Wright não tem solução 3-periódica não trivial.

Capítulo 5

Um Método para Encontrar Soluções Periódicas de Equações Diferenciais Funcionais (caso complexo)

Adaptaremos o teorema 3.1 para funções complexas.

Teorema 5.1 *Seja k um inteiro positivo e $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma transformação k -periódica. Então:*

$$x(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) e^{i \frac{2\pi}{k} j t}$$

onde $a_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, é uma transformação 1-periódica.

Prova: Novamente, a equação que define k -periodicidade é

$$x(t-k) = x(t)$$

e usando o mesmo argumento da demonstração do teorema 3.1, vemos que é suficiente estudarmos a equação (2.2). Para isso, precisamos conhecer os autovalores de A que, novamente são as raízes da unidade.

Portanto, os autovalores de A podem ser escritos como $1, e^{\frac{2\pi}{k}i}, e^{2\frac{2\pi}{k}i}, e^{3\frac{2\pi}{k}i}, \dots, e^{(k-1)\frac{2\pi}{k}i}$. E pelo lema 2.5, as funções $1v_0, e^{bi(t+1)}v_1, e^{2bi(t+1)}v_2, \dots, e^{(k-1)bi(t+1)}v_{k-1}$ são k soluções linearmente independentes de (2.2), onde cada v_j é um autovetor

de A associado ao autovalor e^{ibj} , com $b = \frac{2\pi}{k}$ e $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Pelo lema 2.2, qualquer solução de (2.2) é escrita de forma única como combinação destas soluções. Assim, existem $c_0(t), c_1(t), \dots, c_{k-1}(t)$, 1-periódicas tais que

$$X(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) e^{jbi(t+1)} v_j$$

Usando esta expressão em (2.2), temos

$$X(t) = \sum_{j=0}^{k-1} A c_j(t) e^{jbit} v_j = \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) A v_j e^{jbit}$$

Pela disposição de A e observando que $x(t)$ é a primeira coordenada de $X(t)$, vemos que

$$x(t) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j(t) v_j^k e^{jbit}$$

onde v_j^k é a última coordenada do vetor v_j , isto é,

$$x(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) e^{i\frac{2\pi}{k}jt}$$

com $a_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma transformação 1-periódica.

■

Capítulo 6

Aplicações do Teorema de Carvalho (caso complexo)

6.1 Equação Escalar

Consideremos a equação

$$\dot{z}(t) = \alpha z(t-1) \quad (6.1)$$

com $\alpha \in \mathbb{C}$.

Procuremos por soluções k -periódicas da equação (6.1).

Pelo teorema 5.1, se tal solução existir, ela terá a forma:

$$z(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) e^{ib_j t} \quad (6.2)$$

onde $b = \frac{2\pi}{k}$ e $a_j(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ é 1-periódica.

Substituindo em (6.1), e observando que as funções $1, e^{bit}, e^{2bit}, \dots, e^{(k-1)bit}$ são transformações linearmente independentes, temos que

$$a_j(t) = a_j(0) e^{(\alpha e^{-ibj} - ibj)t}$$

Façamos $\alpha = r e^{i\theta}$, com $r \geq 0$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

$$a_j(t) = a_j(0) e^{r t \cos(\theta - bj)} [\cos[r \sin(\theta - bj) - bj]t + i \sin[r \sin(\theta - bj) - bj]t] \quad (6.3)$$

Como queremos $a_j(t)$ 1-periódica, devemos ter:

$$r \cos(\theta - bj) = 0 \Rightarrow r = 0 \text{ ou } \cos(\theta - bj) = 0$$

e

$$r \sin(\theta - bj) - bj = 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

ou seja,

$$\theta - bj = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Estamos supondo $0 \leq \theta < 2\pi$, isto é,

$$-bj \leq \theta - bj < 2\pi - bj$$

$$-\frac{2\pi j}{k} \leq \frac{\pi}{2} + n\pi < 2\pi - \frac{2\pi j}{k}$$

Como $0 \leq j \leq k-1$,

$$\frac{-2\pi(k-1)}{k} \leq \frac{\pi}{2} + n\pi < 2\pi$$

$$-2 + \frac{2}{k} \leq \frac{1}{2} + n < 2$$

$$\frac{-5}{2} + \frac{2}{k} \leq n < \frac{3}{2}$$

Portanto, n pode assumir os valores -2, -1, 0 ou 1, dependendo do valor de k . Analisemos esta situação para os possíveis valores de n .

$$\text{Se } n = -2, \text{ então } \begin{cases} \theta - bj = \frac{\pi}{2} - 2\pi \rightarrow \theta = bj - \frac{3\pi}{2} \rightarrow j = \frac{k\theta}{2\pi} + \frac{3k}{4} \\ r = bj + 2m\pi, \text{ com } m \geq 0 \\ \alpha = (bj + 2m\pi)e^{i(bj - \frac{3\pi}{2})}, m \geq 0 \\ a_j(t) = a_j(0)[\cos(r - bj)t + i \sin(r - bj)t] \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) + i \sin(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\text{Se } n = -1, \text{ então } \begin{cases} \theta - bj = \frac{\pi}{2} - \pi \rightarrow \theta = bj - \frac{\pi}{2} \rightarrow j = \frac{k\theta}{2\pi} + \frac{k}{4} \\ r = -(bj + 2m\pi), \text{ com } m < 0 \\ \alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i(bj - \frac{\pi}{2})}, m < 0 \\ a_j(t) = a_j(0)[\cos(-r - bj)t + i \sin(-r - bj)t] \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) - i \sin(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\text{Se } n = 0, \text{ então } \begin{cases} \theta - bj = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = bj + \frac{\pi}{2} \rightarrow j = \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{k}{4} \\ r = (bj + 2m\pi), \text{ com } m \geq 0 \\ \alpha = (bj + 2m\pi)e^{i(bj + \frac{\pi}{2})}, m \geq 0 \\ a_j(t) = a_j(0)[\cos(r - bj)t + i \operatorname{sen}(r - bj)t] \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\text{Se } n = 1, \text{ então } \begin{cases} \theta - bj = \frac{\pi}{2} + \pi \rightarrow \theta = bj + \frac{3\pi}{2} \rightarrow j = \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{3k}{4} \\ r = -(bj + 2m\pi), \text{ com } m < 0 \\ \alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i(bj + \frac{3\pi}{2})}, m < 0 \\ a_j(t) = a_j(0)[\cos(-r - bj)t + i \operatorname{sen}(-r - bj)t] \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

A seguir, procuramos caracterizar os conjuntos aos quais o α pode pertencer. Lembramos que $0 \leq j \leq k - 1$.

Quando $j = \frac{k\theta}{2\pi} + \frac{3k}{4} = \frac{k}{4\pi}(2\theta + 3\pi)$, usando o fato que $j \leq k - 1$,

$$2\theta + 3\pi < 4\pi \rightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

E, quando $j = \frac{k\theta}{2\pi} + \frac{k}{4} = \frac{k}{4\pi}(2\theta + \pi)$, também usando o fato que $j \leq k - 1$,

$$2\theta + \pi < 4\pi \rightarrow 0 \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$$

Se $j = \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{k}{4} = \frac{k}{4\pi}(2\theta - \pi)$, usando o fato que $j \geq 0$,

$$2\theta - \pi \geq 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$$

Por fim, se $j = \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{3k}{4} = \frac{k}{4\pi}(2\theta - 3\pi)$, também usando o fato que $j \geq 0$,

$$2\theta - 3\pi \geq 0 \rightarrow \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi$$

Desta forma:

$$\begin{cases} \alpha = (bj + 2m\pi)e^{i(bj - \frac{3\pi}{2})}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \\ \theta = bj - \frac{3\pi}{2}, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \\ j = \frac{k\theta}{2\pi} + \frac{3k}{4} \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i(bj - \frac{\pi}{2})}, m \in \mathbb{Z}, m < 0 \\ \theta = bj - \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta < \frac{3\pi}{2} \\ j = \frac{k\theta}{2\pi} + \frac{k}{4} \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = (bj + 2m\pi)e^{i(bj + \frac{\pi}{2})}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \\ \theta = bj + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq \theta < 2\pi \\ j = \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{k}{4} \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i(bj + \frac{3\pi}{2})}, m \in \mathbb{Z}, m < 0 \\ \theta = bj + \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \theta < 2\pi \\ j = \frac{k\theta}{2\pi} - \frac{3k}{4} \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

Para “uniformizar” os conjuntos, façamos

$$\begin{cases} \alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i(\pi + bj - \frac{3\pi}{2})}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \\ \beta = bj - \frac{\pi}{2}, \pi \leq \beta < \frac{3\pi}{2} \\ j = \frac{k(\beta - \pi)}{2\pi} + \frac{3k}{4} = \frac{k\beta}{2\pi} + \frac{k}{4} \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i(bj - \frac{\pi}{2})}, m \in \mathbb{Z}, m < 0 \\ \beta = bj - \frac{\pi}{2}, 0 \leq \beta < \frac{3\pi}{2} \\ j = \frac{k\beta}{2\pi} + \frac{k}{4} \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i(-\pi + bj + \frac{\pi}{2})}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0 \\ \beta = bj - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \beta < \pi \\ j = \frac{k(\beta + \pi)}{2\pi} - \frac{k}{4} = \frac{k\beta}{2\pi} + \frac{k}{4} \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i(-2\pi + bj + \frac{3\pi}{2})}, m \in \mathbb{Z}, m < 0 \\ \beta = bj - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \beta < 0 \\ j = \frac{k(\beta + 2\pi)}{2\pi} - \frac{3k}{4} = \frac{k\beta}{2\pi} + \frac{k}{4} \\ z(t) = a_j(0)[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \end{cases}$$

Seja $F_1 := \{ -(bj + 2m\pi) e^{i\beta}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0, \frac{-\pi}{2} \leq \beta < \frac{3\pi}{2}, j = \frac{k\beta}{2\pi} + \frac{k}{4} \in \{0, 1, \dots, k-1\} \}$.

E seja $F_2 := \{ -(bj + 2m\pi) e^{i\beta}, m \in \mathbb{Z}, m < 0, \frac{-\pi}{2} \leq \beta < \frac{3\pi}{2}, j = \frac{k\beta}{2\pi} + \frac{k}{4} \in \{0, 1, \dots, k-1\} \}$.

Com os cálculos feitos acima, temos o seguinte:

Teorema 6.1 *A equação (6.1) tem solução k -periódica se, e somente se, $\alpha \in F = F_1 \cup F_2$. Neste caso,*

se $\alpha \in F_1$, então

$$z(t) = \xi[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)]$$

se $\alpha \in F_2$, então

$$z(t) = \delta[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)]$$

com ξ e $\delta \in \mathbb{C}$.

■

Observação 6.1 *Notemos que a representação usada para os elementos de F_1 não é a forma polar, uma vez que $-(bj + m\pi) < 0$ se $m \geq 0$ e $j \geq 1$. Portanto, dado um número complexo α , devemos (quando possível) escolher, dentre as representações na forma $re^{i\beta}$, aquela que permita identificar α como um elemento de F_1 ou F_2 . O exemplo (ii) abaixo ilustra esta necessidade de escolha.*

Como exemplos, podemos citar:

(i) Suponhamos que $k = 3$, então

$$F_1 = \{0, \frac{-2\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}, \frac{-4\pi}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}, -2\pi e^{-i\frac{\pi}{2}}, \frac{-8\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}, \frac{-10\pi}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}, -4\pi e^{i\frac{-\pi}{2}}, \frac{-14\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}, \frac{-16\pi}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}, \dots\}$$

e

$$F_2 = \{2\pi e^{-i\frac{\pi}{2}}, \frac{4\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}, \frac{2\pi}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}, 4\pi e^{i\frac{-\pi}{2}}, \frac{10\pi}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}, \frac{8\pi}{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}, \dots\}.$$

Observemos que se α é real não nulo, então $\alpha \notin F_1 \cup F_2$, portanto, não existe solução não trivial 3-periódica para a equação

$$\dot{z}(t) = -\alpha z(t-1), \alpha \in \mathbb{R}$$

como visto no exemplo 4.1.

(ii) Suponhamos que $k = 5$ e $\alpha = \frac{-6\pi}{5}e^{i\frac{7\pi}{10}}$. Escrito desta forma, $\alpha \in F_1$. De fato,

$$\frac{-\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{10} < \frac{3\pi}{2}$$

$$j = \frac{5\frac{7\pi}{10}}{2\pi} + \frac{5}{4} = 3 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$-(\frac{2\pi 3}{5} + 2m\pi) = \frac{-6\pi}{5} \rightarrow m = 0$$

Assim, a solução da equação

$$z(t) = \frac{-6\pi}{5}e^{i\frac{7\pi}{10}}z(t-1)$$

é dada por

$$z(t) = \xi(\cos \frac{6\pi}{5}t + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5}t), \xi \in \mathbb{C}$$

Suponhamos que tivéssemos usado a outra representação de α , isto é, suponhamos que tivéssemos considerado $\alpha = \frac{6\pi}{5}e^{i\frac{-3\pi}{10}}$, então, α deveria pertencer a F_2 , mas

$$\frac{-\pi}{2} \leq \frac{-3\pi}{10} < \frac{3\pi}{2}$$

$$j = \frac{5\frac{-3\pi}{10}}{2\pi} + \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \notin \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Portanto, dependendo da representação que tomarmos do número, não obteremos solução, a menos que este seja real, como veremos a seguir.

Caso α real

(i) $\alpha \geq 0$

Suponhamos que $\alpha \in F_2$, então, pela caracterização dos elementos de F_2 , α tem a forma

$$\alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i0}, m \leq -1$$

que é equivalente a

$$\alpha = (bj + 2m\pi)e^{i\pi}, \quad m \leq -1$$

Se $j = 0$, então $\alpha = -2m\pi e^{i0}$, $m \leq -1$, ou ainda, $\alpha = -2m_1\pi e^{i\pi}$, $m_1 \geq 1$.

Se $1 \leq j \leq k-1$, então,

$$\alpha = -(bj_1 + 2m_1\pi)e^{i\pi}, \quad m_1 \geq 0$$

com $m_1 = -m - 1$ e $j_1 = k - j$. Com essas novas representações, nas duas situações anteriores, vem que $\alpha \in F_1$.

Se escolhermos a primeira representação de α , teremos:

$$\begin{aligned} z(t) &= a_{\frac{k}{4}}(0)[\cos(|\alpha|)t - i \operatorname{sen}(|\alpha|)t] \\ &= a_{\frac{k}{4}}(0)[\cos \alpha t - i \operatorname{sen} \alpha t] \end{aligned}$$

Mas, se escolhermos a terceira representação de α , teremos:

$$\begin{aligned} z(t) &= a_{\frac{3k}{4}}(0)[\cos(|\alpha|)t + i \operatorname{sen}(|\alpha|)t] \\ &= a_{\frac{3k}{4}}(0)[\cos \alpha t + i \operatorname{sen} \alpha t] \end{aligned}$$

Desta forma,

se $\alpha \in \{ -(bj + 2m\pi) e^{i0}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \leq -1, \quad j = \frac{k}{4} \in \{0, 1, \dots, k-1\} \}$.

$$z(t) = a_{\frac{k}{4}}(0)[\cos \alpha t - i \operatorname{sen} \alpha t]$$

se $\alpha \in \{ -(bj + 2m\pi) e^{i\pi}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \geq 0, \quad j = \frac{3k}{4} \in \{0, 1, \dots, k-1\} \}$.

$$z(t) = a_{\frac{3k}{4}}(0)[\cos \alpha t + i \operatorname{sen} \alpha t]$$

(ii) $\alpha < 0$

Analogamente, suponhamos que $\alpha \in F_1$, então, pela caracterização dos elementos de F_1 , α tem a forma

$$\alpha = -(bj + 2m\pi)e^{i0}, \quad m \geq 0$$

que é equivalente a

$$\alpha = (bj + 2m\pi)e^{i\pi}, \quad m \geq 0$$

Se $j = 0$, então $\alpha = -2m\pi e^{i0}$, $m \geq 0$, ou ainda, $\alpha = -2m_1\pi e^{i\pi}$, $m_1 \leq 0$, e como $\alpha < 0$, $m_1 \leq -1$.

Se $1 \leq j \leq k-1$, então,

$$\alpha = -(bj_1 + 2m_1\pi)e^{i\pi}, \quad m_1 \leq -1$$

com $m_1 = -m-1$ e $j_1 = k-j$. Novamente, com novas representações, nas duas situações anteriores, $\alpha \in F_2$.

Se escolhermos a primeira representação de α , teremos:

$$\begin{aligned} z(t) &= a_{\frac{k}{4}}(0)[\cos(|\alpha|)t + i \operatorname{sen}(|\alpha|)t] \\ &= a_{\frac{k}{4}}(0)[\cos \alpha t - i \operatorname{sen} \alpha t] \end{aligned}$$

Mas, se escolhermos a terceira representação de α , teremos:

$$\begin{aligned} z(t) &= a_{\frac{3k}{4}}(0)[\cos(|\alpha|)t - i \operatorname{sen}(|\alpha|)t] \\ &= a_{\frac{3k}{4}}(0)[\cos \alpha t + i \operatorname{sen} \alpha t] \end{aligned}$$

Desta forma,

se $\alpha \in \{ -(bj + 2m\pi) e^{i0}, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0, j = \frac{k}{4} \in \{0, 1, \dots, k-1\} \}$.

$$z(t) = a_{\frac{k}{4}}(0)[\cos \alpha t - i \operatorname{sen} \alpha t]$$

se $\alpha \in \{ -(bj + 2m\pi) e^{i\pi}, m \in \mathbb{Z}, m \leq -1, j = \frac{3k}{4} \in \{0, 1, \dots, k-1\} \}$.

$$z(t) = a_{\frac{3k}{4}}(0)[\cos \alpha t + i \operatorname{sen} \alpha t]$$

Observamos que se $\beta = 0 \rightarrow bj = \frac{\pi}{2}$, e, se $\beta = \pi \rightarrow bj = \frac{3\pi}{2}$. Consideramos:

$$G_1 := \left\{ \frac{-(4m+1)\pi}{2} m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{(4m-1)\pi}{2} m \in \mathbb{Z} \right\}$$

e

$$G_2 := \left\{ \frac{-(4m+3)\pi}{2}(-1) m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \frac{(4m+3)\pi}{2} m \in \mathbb{Z} \right\}$$

Se α é real, a equação (6.1) tem solução k -periódica se, e somente se, $\alpha \in G = \{0\} \cup G_1 \cup G_2$. Como $G_1 = G_2$, então, as soluções periódicas são dadas por:

$$z_1(t) = \xi_1[\cos \alpha t - i \operatorname{sen} \alpha t]$$

e

$$z_2(t) = \xi_2[\cos \alpha t + i \operatorname{sen} \alpha t]$$

com ξ_1 e $\xi_2 \in \mathbb{C}$.

Geometricamente, podemos dizer que se $\alpha = re^{i\theta}$ satisfaz as condições de F_1 , para uma de suas representações, $\alpha = re^{i\theta}$ ou $\alpha = -re^{i(\theta+\pi)}$, então, sua outra representação, que por sua forma deveria pertencer a F_2 , é o conjugado de um elemento de F_2 e, portanto, não pertence a este conjunto. Mas, se α for real seu conjugado coincidirá com um elemento de F_2 , que será o próprio α .

Agora, se considerarmos $\xi_1 = a + bi$ e $\xi_2 = c + di$,

$$z_1(t) = (a \cos \alpha t + b \operatorname{sen} \alpha t) + i(b \cos \alpha t - a \operatorname{sen} \alpha t)$$

e

$$z_2(t) = (c \cos \alpha t - d \operatorname{sen} \alpha t) + i(d \cos \alpha t + c \operatorname{sen} \alpha t)$$

Se estas funções forem reais,

$$b \cos \alpha t - a \operatorname{sen} \alpha t = 0$$

e

$$d \cos \alpha t + c \operatorname{sen} \alpha t = 0$$

Assim,

$$z_1(t) = a \cos \alpha t + b \operatorname{sen} \alpha t, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

e

$$z_2(t) = c \cos \alpha t - d \operatorname{sen} \alpha t, \quad c, d \in \mathbb{R}$$

com $bc + da = 0$.

Observamos, ainda, que se $\xi_1 = \bar{\xi}_2$, esta última relação está satisfeita.

Desta forma, se tivermos tratando $z(t)$ como uma função a valores reais, podemos considerar que a equação (6.1), com $\alpha \in \mathbb{R}$ tem solução k -periódica se, e somente se, $\alpha \in G = G_1 \cup \{0\}$ e

$$z(t) = \delta_1 \cos \alpha t + \delta_2 \operatorname{sen} \alpha t, \quad \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$$

Mais ainda, neste caso, k deve ser múltiplo de 4.

Estes resultados confirmam os resultados obtidos no exemplo 4.2, onde $k = 4$ e trocamos α por $-\alpha$.

6.2 Equação Matricial

Vamos, agora, estudar a equação diferencial com retardamento

$$\dot{z}(t) = Az(t - r), \quad (6.4)$$

onde A é uma matriz complexa 2×2 e $r > 0$ é um número real.

Consideremos $ru = t$, $y(u) = z(t)$ e $B = rA$. Então, podemos reescrever (6.4) como

$$\dot{y}(u) = By(u - 1) \quad (6.5)$$

Também, pela transformação $y(u) = Px(u)$ com uma matriz apropriada P , temos:

$$\dot{x}(u) = P^{-1}BPx(u - 1) \quad (6.6)$$

Assim, sem perda de generalidade, nós consideraremos a equação

$$\dot{z}(t) = Az(t - 1) \quad (6.7)$$

onde A é uma das três matrizes na forma normal de Jordan:

$$(i) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad (ii) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad (iii) = r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

6.2.1 Caso Matriz Diagonal

Consideramos

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Temos, para a equação (6.7), o seguinte sistema de equações diferenciais retardadas,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t-1) \\ \dot{y}(t) = \beta y(t-1) \end{cases} \quad (6.8)$$

considerando

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Pelo teorema 6.1, temos o seguinte resultado:

Teorema 6.2 *O sistema (6.8) tem soluções k -periódicas se e somente se $\alpha \in F$ ou $\beta \in F$.*

Se $\alpha, \beta \in F_1$, estas soluções periódicas são

$$x(t) = \xi_1 [\cos(|\alpha|t) + i \sin(|\alpha|t)]$$

$$y(t) = \xi_2 [\cos(|\beta|t) + i \sin(|\beta|t)],$$

com ξ_1 e $\xi_2 \in \mathbb{C}$,

Se $\alpha, \beta \in F_2$, estas soluções periódicas são

$$x(t) = \xi_1 [\cos(|\alpha|t) - i \sin(|\alpha|t)]$$

$$y(t) = \xi_2 [\cos(|\beta|t) - i \sin(|\beta|t)],$$

com ξ_1 e $\xi_2 \in \mathbb{C}$,

Se $\alpha \in F_1$ e $\beta \in F_2$, estas soluções periódicas são

$$x(t) = \xi_1 [\cos(|\alpha|t) + i \sin(|\alpha|t)]$$

$$y(t) = \xi_2 [\cos(|\beta|t) - i \sin(|\beta|t)],$$

com ξ_1 e $\xi_2 \in \mathbb{C}$,

Resultado análogo para $\beta \in F_1$ e $\alpha \in F_2$.

Se $\alpha \in F_1$ e $\beta \notin F$, estas soluções são

$$x(t) = \xi [\cos(|\alpha|t) + i \sin(|\alpha|t)]$$

$$y(t) = 0,$$

com $\xi \in \mathbb{C}$,

Resultado análogo para $\alpha \in F_2$ e $\beta \notin F$, bem como para $\alpha \notin F$ e $\beta \in F$.

■

Agora, se $z(t)$ é real e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o sistema (6.8) tem soluções k -periódicas se e somente se $\alpha \in G$ ou $\beta \in G$.

Se $\alpha \in G$ e $\beta \notin G$, estas soluções são

$$x(t) = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t$$

$$y(t) = 0$$

com $a, b, \mathbb{R}$.

Resultado análogo para $\alpha \notin G$ e $\beta \in G$.

Se $\alpha, \beta \in G$, estas soluções periódicas são

$$x(t) = a \cos \alpha t + b \sin \alpha t$$

$$y(t) = c \cos \beta t + d \sin \beta t$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

6.2.2 Caso Matriz Triangular

Consideramos, agora,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Para a equação (6.7), temos o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t-1) + y(t-1) \\ \dot{y}(t) = \alpha y(t-1) \end{cases} \quad (6.9)$$

Dividimos esta análise em dois casos:

(i) $\alpha = 0$

Neste caso, $y \equiv 0$ e $x(t) = c$, onde $c \in \mathbb{C}$. Portanto,

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $\alpha \neq 0$

Se $y \equiv 0$, então, $\dot{x}(t) = \alpha x(t-1)$ e, assim, temos a seguinte solução:

Se $\alpha \in F_1$,

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \in F_2$,

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \\ 0 \end{bmatrix}$$

Suponhamos, então que $y \neq 0$. Então, se $\alpha \in F_1$, $y(t) = \xi e^{i|\alpha|t}$, com $\xi \in \mathbb{C}$.

Daí,

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t-1) + \xi e^{i|\alpha|(t-1)} \quad (6.10)$$

Como queremos $x(t)$ k -periódica, pelo teorema 5.1, $x(t)$ é dada por:

$$x(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) e^{ibjt}$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} [\dot{a}_j(t) + ibj a_j(t)] e^{ibjt}$$

e,

$$x(t-1) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) e^{-ibj} e^{ibjt}$$

Voltando em (6.10),

$$\sum_{j=0}^{k-1} [\dot{a}_j(t) + ibj a_j(t)] e^{ibjt} = \alpha \left[\sum_{j=0}^{k-1} a_j(t) e^{-ibj} e^{ibjt} \right] + \xi e^{i|\alpha|(t-1)} \frac{e^{ibjt}}{e^{ibjt}}$$

Assim,

$$\dot{a}_j(t) + ibj a_j(t) = \alpha a_j(t) e^{-ibj} + \xi e^{i|\alpha|(t-1)} e^{-ibjt}$$

Portanto,

$$\dot{a}_j(t) = (\alpha e^{-ibj} - ibj) a_j(t) + \xi e^{i|\alpha|(t-1)} e^{-ibjt}$$

Agora, $b = \frac{2\pi}{k}$, $\alpha = -(2m\pi + bj) e^{i(bj - \frac{\pi}{2})}$ e $|\alpha| = 2m\pi + bj$, nos fornece:

$$\dot{a}_j(t) = i(2m\pi + bj - bj) a_j(t) + \xi e^{i(2m\pi + bj)(t-1) - ibjt}$$

$$\dot{a}_j(t) = i2m\pi a_j(t) + \xi e^{i2m\pi t} e^{-i(2m\pi + bj)}$$

A solução desta equação é dada pela solução da equação homogênea associada, mais uma solução particular.

É fácil verificarmos que a solução homogênea é dada por $ce^{i2m\pi t}$, onde $c \in \mathbb{C}$ e uma solução particular é $\xi e^{-i(2m\pi + bj)t} e^{i2m\pi t}$. Assim, a solução geral fica:

$$a_j(t) = ce^{i2m\pi t} + \xi e^{-i(2m\pi+bj)t} e^{i2m\pi t}$$

que não é 1-periódica, devido ao termo em t .

Se $\alpha \in F_2$, o raciocínio é análogo, apenas observando que, neste caso, $|\alpha| = -(2m\pi + bj)$

Assim, não existem soluções k -periódicas não nulas se $\alpha \neq 0$ e $y \neq 0$.

Desse modo, fica demonstrado o seguinte resultado:

Teorema 6.3 *O sistema (6.9) tem soluções k -periódicas se e somente se $\alpha \in F$. E ainda,*

Se $\alpha \in F_1$,

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \in F_2$,

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)] \\ 0 \end{bmatrix}$$

Concluindo, se $z(t)$ é uma função a valores reais e α é um número real, então, o sistema (6.9) tem solução k -periódica não nula se, e somente se, $\alpha \in G$. ■

Se $\alpha = 0$, então

$$\begin{aligned} x(t) &= c \\ y(t) &= 0 \end{aligned}$$

Se $\alpha \in G_1$, então

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos \alpha t + b \operatorname{sen} \alpha t \\ y(t) &= 0 \end{aligned}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$

6.2.3 Caso Matriz Complexa

Consideramos

$$A = r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

onde $r \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Para a equação (6.7) vale o sistema de equações diferenciais retardadas,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = r \cos \theta x(t-1) - r \sin \theta y(t-1) \\ \dot{y}(t) = r \sin \theta x(t-1) + r \cos \theta y(t-1) \end{cases}$$

considerando

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Por outro lado, se considerarmos $w(t) = x(t) + iy(t)$ e $\dot{w}(t) = re^{i\theta}w(t-1)$, temos que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) &= re^{i\theta}[x(t-1) + iy(t-1)] \\ \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) &= (r \cos \theta + ir \sin \theta)[x(t-1) + iy(t-1)] \\ \dot{x}(t) + i\dot{y}(t) &= r \cos \theta x(t-1) - r \sin \theta y(t-1) + i[r \sin \theta x(t-1) + r \cos \theta y(t-1)] \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= r \cos \theta x(t-1) - r \sin \theta y(t-1) \\ \dot{y}(t) &= r \sin \theta x(t-1) + r \cos \theta y(t-1) \end{aligned}$$

Portanto, acharmos soluções da equação (6.7) é equivalente a acharmos soluções da equação

$$\dot{w}(t) = re^{i\theta}w(t-1) \tag{6.11}$$

Mas, pelo teorema 5.1, a equação (6.11) tem soluções k -periódicas se, e somente se $\alpha = re^{i\theta} \in F$ e,

se $\alpha \in F_1$

$$w(t) = \xi[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)], \xi \in \mathbb{C},$$

se $\alpha \in F_2$

$$w(t) = \xi[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)], \xi \in \mathbb{C}.$$

Agora, $w(t) = x(t) + iy(t)$ e $\xi = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, então:

Se $\alpha \in F_1$,

$$x(t) + iy(t) = (a + ib)[\cos(|\alpha|t) + i \operatorname{sen}(|\alpha|t)]$$

$$x(t) + iy(t) = a \cos(|\alpha|t) - b \operatorname{sen}(|\alpha|t) + i[a \operatorname{sen}(|\alpha|t) + b \cos(|\alpha|t)]$$

portanto,

$$x(t) = a \cos(|\alpha|t) - b \operatorname{sen}(|\alpha|t)$$

$$y(t) = a \operatorname{sen}(|\alpha|t) + b \cos(|\alpha|t)$$

Se $\alpha \in F_2$

$$x(t) + iy(t) = (a + ib)[\cos(|\alpha|t) - i \operatorname{sen}(|\alpha|t)]$$

$$x(t) + iy(t) = a \cos(|\alpha|t) + b \operatorname{sen}(|\alpha|t) + i[b \cos(|\alpha|t) - a \operatorname{sen}(|\alpha|t)]$$

portanto,

$$x(t) = a \cos(|\alpha|t) + b \operatorname{sen}(|\alpha|t)$$

$$y(t) = -a \operatorname{sen}(|\alpha|t) + b \cos(|\alpha|t)$$

Observando que se $\alpha \in F_1$, $r < 0$, e, se $\alpha \in F_2$, $r \geq 0$, estas duas últimas expressões para $x(t)$ e $y(t)$ têm a mesma forma e, podemos escrever:

$$x(t) = a \cos rt + b \operatorname{sen} rt$$

$$y(t) = -a \operatorname{sen} rt + b \cos rt$$

Teorema 6.4 A equação (6.7), onde

$$A = r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

tem solução k -periódica se, e somente se, $\alpha = re^{i\theta} \in F$, isto é, $r = -(bj + 2m\pi)$ e $\beta \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ é tal que $\frac{k\beta}{2\pi} + \frac{k}{4} \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. E, neste caso,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \cos rt \\ -\sin rt \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \sin rt \\ \cos rt \end{bmatrix}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

■

Referências Bibliográficas

- [1] Carvalho, L.A.V., On a Method to Investigate Bifurcation of Periodic Solution in Retarded Differential Equations,(preprint)-ICMSC-USP (1993), to appear in Journal of Difference Equations and Applications.
- [2] Carvalho, L.A.V., Cooke, K.L. and Ladeira, L.A.C., On Periodic Solutions for a class of Linear Scaled Differential Equations - Part I, (preprint) Pomona College, Mathematics Department , Claremont, CA (1996)
- [3] Carvalho, L.A.V., Cooke, K.L. and Ladeira, L.A.C., On Periodic Solutions for a Class of Linear Scaled Differential equations - Part II, (preprint) Pomona-College, Mathematics Departament, Claremont, CA (1996).
- [4] Carvalho, L.A.V. and Ladeira, L.A.C. On Periodic Orbits of Autonomous Differential-Difference Equations,in: Differential Equations and Applications to Biology and to Industry-Proceedings of the June 1-4, 1994 Claremount International Conference dedicated to the memory of Stravos Busenberg, Edited by M. Martelli, K. Cooke, E. Cumberbatch, B. Tang and H. Thieme, World Scientific, pp. 57-64 (1996).
- [5] Cassago, H. Jr. and Ladeira, L.A.C., Equações Diferenciais Ordinárias, Notas de Aula, ICMSC-USP, 1995.
- [6] Cooke, K.L. and Ladeira, L.A.C., Applying Carvalho's Method to Find Periodic Solutions of Difference Equations, Journal of Difference equations and Applications, vol. 2, pp. 105-115 (1996).
- [7] Hale,J.K. Ordinary Differential Equations, Second Edition, Robert E. Krieger Publishing Co., Florida, 1980.
- [8] Ladeira, L.A.C. and Tanaka, S.M., On a Method to Calculate Periodic Solutions for Functional Differential Equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.209, 1-19 (1997).
- [9] Lima, E.L., Espaços Métricos,3a. Edição, IMPA, 1977.