Soluções Periódicas de uma Equação
Diferencial com Retardamento
de Segunda Ordem

NEUZA TERAMON

Orientador: PROF^º. DR^º. PLÁCIDO ZOEGA TÁBOAS

*Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos-
USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de "Mestre em Ciências
- Área: Matemática".*

USP - São Carlos

1996

“Para ser grande, sê inteiro: nada
Teu exagera ou exclui.
Sê todo em cada coisa. Põe quanto és
No mínimo que fazes.
Assim em cada lago a lua toda
Brilha, porque alta vive.”

Fernando Pessoa

Ao Ricardo e
aos meus pais

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Plácido Zoega Táboas pela orientação segura e objetiva. Seu empenho, dedicação e entusiasmo foram decisivos para a realização deste trabalho.

Ao Ricardo, pelo seu amor e dedicação irrestritos e pela oportunidade de podermos crescer juntos.

Aos meus pais, pelo exemplo de vida e ao meu irmão Sergio, pela compreensão durante minha ausência.

Aos professores da Universidade Estadual de Maringá, dos quais recebi as primeiras lições e aos professores do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos que tanto contribuíram para minha formação.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, pelo apoio e confiança.

A todos os amigos, que compartilharam comigo tantos momentos de alegria e alguns de incerteza, pelo apoio e companheirismo.

Aos funcionários do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos pela solicitude e presteza com que sempre me atenderam.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Abstract

We are concerned with the equation

$$\ddot{x}(t) + (a + b) \dot{x}(t) + abx(t) = -f(x(t - 1)).$$

We state sufficient conditions for Hopf bifurcations and motivated by [04], we obtain alternative arguments for a proof of an existence theorem for periodic solutions.

Resumo

Estamos interessados no estudo da equação

$$\ddot{x}(t) + (a + b) \dot{x}(t) + abx(t) = -f(x(t - 1)).$$

Nós enunciamos condições suficientes para bifurcações de Hopf e motivados por [04], obtemos argumentos alternativos para a prova de um teorema de existência de soluções periódicas.

Conteúdo

Introdução	01
1 Fatos Básicos	02
2 Bifurcações de Hopf	08
3 Condições de Estabilidade	17
Bibliografia	26

Introdução

Neste trabalho investigamos a existência de soluções periódicas da equação diferencial diferença

$$\ddot{x}(t) + (a + b)\dot{x}(t) + abx(t) = -f(x(t - 1)), \quad (0.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $f(0) = 0$, f é diferenciável em 0, a e b são constantes positivas.

Nossa motivação é o trabalho de U. an der Heiden [04], onde é estabelecido um teorema de existência de soluções periódicas.

Algumas definições e fatos básicos são necessários para o desenvolvimento deste trabalho e estes são apresentados no capítulo um.

No capítulo dois estabelecemos condições para a ocorrência de bifurcações de Hopf em termos do parâmetro $\gamma := f'(0)$. Em [04] não é feito nenhum estudo neste sentido.

No capítulo três fazemos um estudo da equação característica da parte linear de (0.1) baseado em [01]. Nossos resultados nesta direção podem ser utilizados alternativamente na prova do teorema de Heiden.

Capítulo 1

Fatos Básicos

Neste capítulo apresentamos alguns resultados básicos que serão necessários neste trabalho. A teoria é desenvolvida segundo [03], onde podem ser encontradas as demonstrações.

Consideramos $r \geq 0$ um número real dado, o espaço $\mathbb{R}^n$ munido da norma euclidiana $|\cdot|$, $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ o espaço de Banach das funções $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas, com a norma do supremo $\|\cdot\|$. Se $[a, b] = [-r, 0]$, denotamos $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1 Sejam $\sigma \in \mathbb{R}$, $A \geq 0$ e $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$. Para cada $t \in [\sigma, \sigma + A]$, definimos a função $x_t \in C$ por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta),$$

onde $-r \leq \theta \leq 0$.

Definição 1.2 Sejam D subconjunto de $\mathbb{R} \times C$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função dada e

“.” representando a derivada à direita. A equação

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (1.1)$$

é dita uma *equação diferencial funcional com retardamento* sobre D e será denotada por EDFR. Se desejamos enfatizar que a equação é definida por f , escrevemos EDFR(f).

Em particular, quando $f(t, \varphi) = f(\varphi)$ independe de t , temos a importante classe das equações diferenciais funcionais com retardamento *autônomas*:

$$\dot{x}(t) = f(x_t).$$

Exemplo: O sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) - ax(t), \\ \dot{y}(t) &= -f(x(t-1)) - by(t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

que é o objeto de estudo deste trabalho, é uma EDFR autônoma.

Neste caso $C = C([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ e se definimos $F: \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$, independente da variável t , por $F = (F_1, F_2)$ onde

$$\begin{aligned} F_1(\varphi) &= \varphi_2(0) - a\varphi_1(0), \\ F_2(\varphi) &= -f(\varphi_1(-1)) - b\varphi_2(0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

O sistema (1.2) reduz-se a

$$\dot{u}(t) = F(u_t),$$

onde $u = (x, y)$.

Definição 1.3 Se existem $\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ tal que $x \in C([\sigma - r, \sigma + A], \mathbb{R}^n)$, $(t, x_t) \in D$ e $x(t)$ satisfaz a equação (1.1) para $t \in [\sigma, \sigma + A]$, dizemos que x é *solução* de (1.1).

Definição 1.4 Dados $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$, dizemos que $x(\sigma, \varphi, f)$ é uma *solução da equação (1.1) com valor inicial φ em σ* se:

- i) Existe $A > 0$ tal que $x(\sigma, \varphi, f)$ é uma solução da equação (1.1) sobre o intervalo $[\sigma - r, \sigma + A]$,
- ii) $x(\sigma, \varphi, f) = \varphi$.

Definição 1.5 Dizemos que a equação (1.1) é *linear* se $f(t, \varphi) = L(t, \varphi) + h(t)$, onde $L(t, \varphi)$ é linear em φ ; *linear homogênea* se $h(t) = 0$ e *linear não homogênea* se $h(t) \neq 0$.

Lema 1.1 Se $\sigma \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ são dados e $f(t, \varphi)$ é contínua, então encontrar uma solução da equação (1.1) por (σ, φ) é equivalente a resolver a equação integral

$$\begin{aligned} x_\sigma &= \varphi, \\ x(t) &= \varphi(0) + \int_\sigma^t f(s, x_s) ds, \quad t \geq \sigma. \end{aligned} \tag{1.4}$$

A seguir, apresentamos alguns resultados sobre existência, unicidade e dependência contínua em relação às condições iniciais, das soluções da equação (1.1).

Se V é um subconjunto de $\mathbb{R} \times C$, então $C(V, \mathbb{R}^n) = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ é contínua}\}$ e $C^0(V, \mathbb{R}^n) \subset C(V, \mathbb{R}^n)$ é definido por $C^0(V, \mathbb{R}^n) = \{f : V \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ é contínua e limitada}\}$. O espaço $C^0(V, \mathbb{R}^n)$ munido da norma

$$|f|_V = \sup_{(t, \varphi) \in V} |f(t, \varphi)|$$

é um espaço de Banach.

Teorema 1.1 (Existência) Suponha que Ω é um subconjunto aberto em $\mathbb{R} \times C$ e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Se $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, então existe uma solução da EDPR(f^0) passando por (σ, φ) .

Mais geralmente, se $W \subset \Omega$ é compacto e $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é dada, então existe uma vizinhança $V \subset \Omega$ de W tal que $f^0 \in C^0(V, \mathbb{R}^n)$, existe uma vizinhança

$U \subset C^0(V, \mathbb{R}^n)$ de f^0 e um $\alpha > 0$ tal que, para qualquer $(\sigma, \varphi) \in W$, $f \in U$, existe uma solução $x(\sigma, \varphi, f)$ da EDFR(f) por (σ, φ) definida em $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$.

Teorema 1.2 (Dependência contínua) *Suponhamos que $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C$ é aberto, $(\sigma^0, \varphi^0) \in \Omega$, $f^0 \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e x^0 é uma solução da EDFR(f^0) por (σ^0, φ^0) que existe e é única em $[\sigma^0 - r, b]$. Sejam $W^0 \subseteq \Omega$ um conjunto compacto definido por*

$$W^0 = \{(t, x_t^0); t \in [\sigma^0, b]\}$$

e V^0 uma vizinhança de W^0 na qual f^0 é limitada. Se $(\sigma^k, \varphi^k, f^k)$, $k = 1, 2, \dots$, satisfaz $\sigma^k \rightarrow \sigma^0$, $\varphi^k \rightarrow \varphi^0$ e $|f^k - f^0|_{V^0} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, então existe um k^0 tal que para $k \geq k^0$, a EDFR(f^k) é tal que cada solução $x^k = x^k(\sigma^k, \varphi^k, f^k)$ por (σ^k, φ^k) existe sobre $[\sigma^k - r, b]$ e $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente em $[\sigma^0 - r, b]$. Desde que nem todo x^k está definido sobre $[\sigma^0 - r, b]$, entendemos que para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $k_1(\varepsilon)$ tal que $x^k(t)$, $k > k_1(\varepsilon)$, é definido sobre $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$ e $x^k \rightarrow x^0$ uniformemente sobre $[\sigma^0 - r + \varepsilon, b]$.

Teorema 1.3 (Unicidade) *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$ é aberto, $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $f(t, \varphi)$ é lipschitziana em φ para cada conjunto compacto de Ω . Se $(\sigma, \varphi) \in \Omega$, então existe uma única solução de (1.1) por (σ, φ) .*

As considerações abaixo referem-se ao Teorema de Bifurcação de Hopf.

Consideremos uma família a um parâmetro de EDFRs da forma

$$\dot{x}(t) = F(\alpha, x_t), \quad (1.5)$$

onde $F(\alpha, \varphi)$ tem primeira e segunda derivadas contínuas em α, φ , para $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$, $F(\alpha, 0) = 0$, para todo α real.

Definimos $L : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$L(\alpha) \Psi = D_\varphi F(\alpha, 0) \Psi, \quad (1.6)$$

onde $D_\varphi F(\alpha, 0)$ é a derivada de $F(\alpha, \varphi)$ com relação a φ em $\varphi = 0$ e definimos

$$f(\alpha, \varphi) = F(\alpha, \varphi) - L(\alpha)\varphi. \quad (1.7)$$

Se $L : C \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador linear contínuo, então existe uma matriz $n \times n$, $\eta(\theta)$, $-r \leq \theta \leq 0$, cujos elementos são de variação limitada, normalizados de modo que η é contínua à esquerda em $(-r, 0)$, com $\eta(0) = 0$, tal que

$$L\varphi = \int_{-r}^0 d[\eta(\theta)] \varphi(\theta), \quad \varphi \in C. \quad (1.8)$$

Uma *raiz característica* de $\text{EDFR}(L)$ é uma raiz da equação característica de $\text{EDFR}(L)$ que é dada por

$$\det \Delta(\lambda) = 0,$$

onde $\Delta(\lambda) := \lambda I - \int_{-r}^0 e^{\lambda\theta} d\eta(\theta)$. Como veremos a seguir, no caso de uma equação diferencial-diferença as equações características são obtidas mais simplesmente, procurando-se soluções não triviais da forma $e^{\lambda t}c$.

Consideremos as seguintes hipóteses:

(H1) A $\text{EDFR}(L(0))$ linear tem uma raiz característica simples imaginária pura $\lambda_0 = iv_0 \neq 0$ e toda raiz característica $\lambda_j \neq \lambda_0, \overline{\lambda_0}$ satisfaz $\lambda_j \neq m\lambda_0$ para todo inteiro m .

Desde que $L(\alpha)$ é continuamente diferenciável em α , de acordo com [Hale, lema 2.2, seç. 7.2], existe $\alpha_0 > 0$ e uma raiz característica simples $\lambda(\alpha)$ da equação linear $\text{EDFR}(L(\alpha))$ que possui derivada contínua $\lambda'(\alpha)$ em α , para $|\alpha| < \alpha_0$.

(H2) $\Re(\lambda'(0)) \neq 0$.

Considere $\alpha_0 > 0$ suficientemente pequeno e se $\Im(\lambda(\alpha)) \neq 0$ para $|\alpha| < \alpha_0$, obtemos a função $\varphi_\alpha \in C$, continuamente diferenciável em α . φ_α forma uma base para as soluções de $\text{EDFR}(L(\alpha))$ correspondente a $\lambda(\alpha)$. As funções

$$(\Re(\varphi_\alpha), \Im(\varphi_\alpha)) := \Phi_\alpha$$

formam uma base correspondente às raízes $(\lambda(\alpha), \overline{\lambda(\alpha)})$. Se C é decomposto como $C = P^\alpha \oplus Q^\alpha$, então Φ_α é uma base para P^α .

Teorema 1.4 (Bifurcação de Hopf) *Se $F(\alpha, \varphi)$ tem primeiras e segundas derivadas contínuas com relação a α e φ , $F(\alpha, 0) = 0$ para todo α e as hipóteses (H1) e (H2) são satisfeitas, então existem constantes $a_0 > 0, \alpha_0 > 0, \delta_0 > 0$, funções continuamente diferenciáveis $\alpha(a) \in \mathbb{R}$, $\omega(a) \in \mathbb{R}$ e $x^*(a), \omega(a)$ -periódica, para $|a| < a_0$, tal que $x^*(a)$ é uma solução da equação (1.5) com*

$$x_0^*(a)^{P^\alpha} = \Phi_{\alpha(a)} y^*(a), x_0^*(a)^{Q^\alpha} = z_0^*(a)$$

onde $y^*(a) = (a, 0)^T + o(|a|)$, $z_0^*(a) = o(|a|)$ quando $|a| \rightarrow 0$. Além disso, para $|\alpha| < \alpha_0, \left| \omega - \left(\frac{2\pi}{v_0} \right) \right| < \delta_0$, as soluções x^* são as únicas soluções ω -periódicas da equação (1.5) com $|x_t| < \delta_0$, exceto por uma translação de fase.

Capítulo 2

Bifurcações de Hopf

Consideremos a equação diferencial diferença autônoma

$$\ddot{x}(t) + (a + b)\dot{x}(t) + abx(t) = -f(x(t - 1)), \quad (2.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $f(0) = 0$, f é diferenciável em 0, a e b são constantes positivas.

A equação (2.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= y(t) - ax(t), \\ \dot{y}(t) &= -f(x(t - 1)) - by(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

O sistema acima consiste de uma equação diferencial funcional com retardamento, autônoma, bidimensional.

O sistema (2.2) tem linearização próxima à origem dada por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t) - ax(t), \\ \dot{y}(t) &= -f'(0)x(t-1) - by(t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

O sistema (2.3) admite solução não nula da forma $X(t) = e^{\lambda t} \cdot c$, $c = \text{col}(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, c não nulo se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} \lambda + a & -1 \\ \gamma e^{-\lambda} & \lambda + b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{2.4}$$

tem solução não trivial $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, logo $\begin{vmatrix} \lambda + a & -1 \\ \gamma e^{-\lambda} & \lambda + b \end{vmatrix} = 0$, ou seja,

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta + \gamma e^{-\lambda} = 0,\tag{2.5}$$

onde $\alpha = a + b$, $\beta = a \cdot b$ e $\gamma = f'(0)$. Esta é a equação característica associada a (2.3).

Definimos a função $g(x) = \frac{f(x)}{\gamma}$. Temos que $g'(x)|_{x=0} = \frac{f'(x)}{\gamma}|_{x=0} = 1$.

Consideremos $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ e $\mathfrak{F} : \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde

$$\mathfrak{F}(\gamma, \varphi) := \begin{bmatrix} \varphi_2(0) - a\varphi_1(0) \\ -\gamma g(\varphi_1(-1)) - b\varphi_2(0) \end{bmatrix}.\tag{2.6}$$

Segue que

$$\dot{X}(t) = \mathfrak{F}(\gamma, X_t) = \begin{bmatrix} y(t) - ax(t) \\ -\gamma g(x(t-1)) - by(t) \end{bmatrix},\tag{2.7}$$

ou seja, introduzimos assim um novo parâmetro γ .

Linearizando-se (2.7) próximo à origem obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= y(t) - ax(t) \\ \dot{y}(t) &= -\gamma g'(0) x(t-1) - by(t),\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde $g'(0) = 1$.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução não trivial de (2.8) da forma $X(t) = e^{\lambda t} \cdot c$, $c = \text{col}(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, $c \neq (0, 0)$, é que $\lambda \in \mathbb{C}$ seja raiz da equação característica associada a (2.8), que é dada por

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta + \gamma e^{-\lambda} = 0,\tag{2.9}$$

onde $\alpha = a + b$, $\beta = a \cdot b$ e $\gamma = f'(0)$.

A equação (2.9) é equivalente a

$$H(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)e^\lambda + \gamma = 0.\tag{2.10}$$

Após alguns cálculos convenientes, $H(\lambda)$ é equivalente a

$$[(\lambda + \alpha)^2 - \alpha(\lambda + \alpha)]e^{-\alpha} = -\beta e^{-\alpha} - \gamma e^{-(\lambda + \alpha)}.\tag{2.11}$$

Fazendo $z = \lambda + \alpha$ e multiplicando-se (2.11) por e^α e e^z obtemos

$$(z^2 - \alpha z + \beta)e^z + \gamma e^\alpha = 0.\tag{2.12}$$

Vamos agora determinar os valores de γ para os quais $H(\lambda)$ possui uma raiz imaginária pura. Observamos que basta discutir raízes da forma $\lambda = iy$, $y > 0$, pois $H(\bar{\lambda}) = \overline{H(\lambda)}$.

Como $z = \lambda + \alpha$ e estamos interessados em $\lambda = iy$, segue que $\Re(z) = \alpha$. Logo em (2.12) considerando $z = \alpha + iy$ e separando as partes real e imaginária, obtemos

$$\begin{cases} (\beta - y^2) \cos y - \alpha y \sin y = -\gamma \\ (\beta - y^2) \sin y + \alpha y \cos y = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

donde

$$v(y) = \gamma w^\perp(y), \quad (2.14)$$

com $v(y) := (\alpha y, \beta - y^2)$ e $w^\perp(y) = (\sin y, -\cos y)$.

Pela figura 2.1, observamos que existe uma solução para (2.14) quando $2k\pi < y < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}_+$, desde que o parâmetro γ seja convenientemente escolhido. Ou seja, temos o seguinte lema:

Lema 2.1 *Para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, existe um único $y_k \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ tal que $v(y_k)$ é múltiplo positivo de $w^\perp(y_k)$.*

Prova: Quando y_k varia no intervalo $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$ o vetor $v(y_k)$ descreve um arco de parábola, no sentido horário, no semi-plano $\xi > 0$, enquanto $w^\perp(y)$ percorre, no sentido anti-horário, a semi-circunferência unitária com centro na origem, contida no mesmo plano.

Logo existe um único y_k nas condições requeridas. Além disso $y = y_k$ satisfaz a relação

$$-\cot y = \frac{\beta - y^2}{\alpha y}.$$

A unicidade de y_k pode ser verificada calculando as derivadas dos dois membros da equação acima e concluindo-se que o primeiro membro é estritamente

Figure 2.1

crescente, enquanto o segundo membro é estritamente decrescente. ■

Lema 2.2 Para cada inteiro k não negativo, os números $\lambda_k = iy_k \in \mathbb{C}$ são as possíveis raízes imaginárias puras de $H(\lambda)$ para valores apropriados $\gamma = \gamma_k := \sqrt{(\alpha y_k)^2 + (\beta - y_k^2)^2}$.

Prova: Basta tomar $\gamma_k = |v(y_k)|$ para que (2.14) seja satisfeita. ■

Lema 2.3 A raiz imaginária pura de $H(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)e^\lambda + \gamma = 0$ é simples.

Prova: Seja $\lambda_0 = iy_0$ raiz imaginária pura de $H(\lambda)$. Considere a derivada de $H(\lambda)$ em relação a λ , ou seja,

$$H'(\lambda) = (2\lambda + \alpha)e^\lambda + (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)e^\lambda. \quad (2.15)$$

Substituindo λ por $\lambda_0 = iy_0$ na equação (2.15) obtemos

$$H'(\lambda_0) = H'(iy_0) = (i2y_0 + \alpha)e^{iy_0} + ((iy_0)^2 + i\alpha y_0 + \beta)e^{iy_0}. \quad (2.16)$$

Após alguns cálculos vê-se que (2.16) é equivalente a

$$H'(iy_0) = (A, B) \cdot v(y_0) + i[(A, B) \cdot v^\perp(y_0)], \quad (2.17)$$

onde $A := (-y_0^2 + \alpha + \beta)$, $B := (2 + \alpha)y_0$, $v(y_0) := (\cos y_0, -\sin y_0)$, $v^\perp(y_0) := (\sin y_0, \cos y_0)$.

Como $(A, B) \neq (0, 0)$ e $v(y_0) \neq (0, 0)$, a equação (2.17) é não nula, pois se $(A, B) \cdot v^\perp(y_0) = 0$ então $(A, B) \cdot v(y_0) \neq 0$.

Segue que $\lambda_0 = iy_0$ não é uma raiz de $H'(\lambda) = 0$ e portanto λ_0 é simples. ■

Lema 2.4 *Seja $\lambda_0 = iy_0$ raiz imaginária pura de $H(\lambda)$. Se $\alpha \geq \sqrt{2\beta}$ então não existem raízes λ de $H(\lambda)$, com $\lambda = m\lambda_0$, $m \in \mathbb{Z}$.*

Prova: Suponha que exista $m \in \mathbb{Z}$ tal que imy_0 também seja raiz de $H(\lambda)$. Então de acordo com o Lema 2.2,

$$|(\alpha y_0, \beta - y_0^2)|^2 = \gamma^2 = |(\alpha m y_0, \beta - m^2 y_0^2)|^2. \quad (2.18)$$

A última igualdade é equivalente a

$$(m^2 + 1)y_0^2 + (\alpha^2 - 2\beta) = 0. \quad (2.19)$$

Como $\alpha \geq \sqrt{2\beta}$, a igualdade acima não é satisfeita para todo $m \in \mathbb{Z}$. ■

Lema 2.5 *A equação característica (2.9) define λ como função diferenciável de*

γ numa vizinhança de $(\lambda, \gamma) = (iy_k, \gamma_k)$, isto é, $\lambda = \lambda^*(\gamma)$ e

$$[\lambda^*(\gamma)]^2 + \alpha\lambda^*(\gamma) + \beta e^{\lambda^*(\gamma)} + \gamma = 0,$$

com $\lambda^*(\gamma_k) = \lambda_k$.

Prova: A prova é uma aplicação direta do Teorema da Função Implícita.

Defina $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(\lambda, \gamma) = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)e^\lambda + \gamma$. Logo a equação (2.10) torna-se

$$F(\lambda, \gamma) = 0. \quad (2.20)$$

Se $\lambda = x + iy$, (2.20) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} F^1(x, y) = e^x [(x^2 - y^2 + \alpha x + \beta) \cos y - (2xy + \alpha y) \sin y] + \gamma = 0 \\ F^2(x, y) = e^x [(x^2 - y^2 + \alpha x + \beta) \sin y + (2xy + \alpha y) \cos y] = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Considere $\lambda_0 = iy_0$, $y_0 \in (0, \pi)$. Para $\lambda_k = iy_k$, $y_k \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, a demonstração é análoga.

Para $\lambda_0 = iy_0$ obtemos

$$F_x^1(0, y_0) = (-y_0^2 + \alpha + \beta) \cos y_0 - (2 + \alpha) y_0 \sin y_0,$$

$$F_y^1(0, y_0) = -(2 + \alpha) y_0 \cos y_0 - (-y_0^2 + \alpha + \beta) \sin y_0,$$

$$F_x^2(0, y_0) = (2 + \alpha) y_0 \cos y_0 + (-y_0^2 + \alpha + \beta) \sin y_0,$$

$$F_y^2(0, y_0) = (-y_0^2 + \alpha + \beta) \cos y_0 - (2 + \alpha) y_0 \sin y_0.$$

De onde obtemos a matriz

$$Jac(F) = \begin{bmatrix} -(A, B) \cdot w(y_0) & (A, B) \cdot w^\perp(y_0) \\ -(A, B) \cdot w^\perp(y_0) & -(A, B) \cdot w(y_0) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde $(A, B) := (y_0^2 - \alpha - \beta, (2 + \alpha) y_0)$, $w(y_0) := (\cos y_0, \sin y_0)$, $w^\perp(y_0) := (\sin y_0, -\cos y_0)$.

Temos que $\det Jac(F) = [(A, B) \cdot w(y)]^2 + [(A, B) \cdot w^\perp(y)]^2 = (A^2 + B^2) = |(A, B)|^2 \neq 0$, pois $B = (2 + \alpha) y_0 \neq 0$ sempre, desde que $y_0 \neq 0$ e $\alpha > 0$.

Como F é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, $F(\lambda_0) = 0$ e $\det Jac(F) \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^2$ contendo λ_0 e um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ contendo γ_0 , tal que para cada $\lambda_0 \in V$ existe uma função $\lambda^*(i)$ definida no intervalo I com valores em V tal que $F(\lambda^*(\gamma), \gamma) = 0$.

Portanto, numa vizinhança de λ_0 , temos λ em função de γ . ■

Sabemos que $F^1(x, y, \gamma) = 0$ e $F^2(x, y, \gamma) = 0$. Aplicando-se a regra da cadeia obtemos

$$\begin{aligned} F_x^1 \cdot x' + F_y^1 \cdot y' &= -F_\gamma^1, \\ F_x^2 \cdot x' + F_y^2 \cdot y' &= -F_\gamma^2, \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde x' e y' representam as derivadas de x e y em relação a γ respectivamente.

Estamos interessados no valor da solução $x' = \Re(\lambda'(\gamma))$ que é dada por

$$x' = \Re(\lambda'(\gamma)) = -\frac{\begin{vmatrix} F_\gamma^1 & F_y^1 \\ F_\gamma^2 & F_y^2 \end{vmatrix}}{\det Jac(F)} \tag{2.24}$$

Queremos que $\Re(\lambda'(\gamma)) \neq 0$, como $F_\gamma^1 = 1$ e $F_\gamma^2 = 0$, basta estabelecermos condições para que $F_y^2 \neq 0$ no ponto $\lambda_0 = (0, y_0)$.

Temos que

$$\begin{aligned}
F_y^2(0, y_0) &= (-y_0^2 + \alpha + \beta) \cos y_0 - (2 + \alpha)y_0 \sin y_0 \\
F_y^2(0, y_0) &= (-y_0^2 + \alpha + \beta, (2 + \alpha)y_0) \cdot (\cos y_0, -\sin y_0)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

As considerações acima nos conduzem ao

Lema 2.6 *Se α e β forem tais que o vetor $(-y_0^2 + \alpha + \beta, (2 + \alpha)y_0)$ não seja ortogonal a $(\cos y_0, -\sin y_0)$ então $\Re(\lambda'(\gamma)) \neq 0$.*

Os lemas e cálculos anteriores mostram que o Teorema de Bifurcação de Hopf [Teorema 1.4] pode ser aplicado fornecendo o seguinte resultado:

Teorema 2.1 *Seja γ_0 definido por $\gamma_0 = \sqrt{(\alpha y_0)^2 + (\beta - y_0^2)^2}$, com y_0 sendo a única solução de $-\cot y_0 = \frac{\beta - (y_0)^2}{\alpha y_0}$ em $(0, \pi)$. Se α e β são tais que o vetor $(-y_0^2 + \alpha + \beta, (2 + \alpha)y_0)$ não é ortogonal a $(\cos y_0, -\sin y_0)$ e $\alpha \geq \sqrt{2\beta}$ então a equação (2.10) possui uma bifurcação de Hopf em γ_0 .*

Decorre do Teorema de Bifurcação de Hopf que existem soluções periódicas não constantes da equação (2.7) para γ suficientemente pequeno, cujo período é próximo de $\frac{2\pi}{y_0}$.

Capítulo 3

Condições de Estabilidade

Neste capítulo estamos interessados em estudar condições de estabilidade para a equação

$$H(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)e^\lambda + \gamma = 0, \quad (3.1)$$

isto é, vamos estabelecer condições necessárias e suficientes para que todas as raízes λ tenham parte real negativa, onde α, β e γ são constantes reais positivas. De acordo com [02], temos o resultado abaixo. Afim de tornar este trabalho auto-suficiente apresentamos sua prova.

Teorema 3.1 *Sejam $v(y) = (\alpha y, \beta - y^2)$, $w(y) = (\cos y, \sin y)$, $y \geq 0$, vetores bidimensionais dados. Se $\gamma > 0$, uma condição necessária e suficiente para que todas as raízes da equação $H(\lambda) = 0$ tenham parte real negativa é que a condição de ortogonalidade $v(y) \cdot w(y) = 0$, com $y \in \cup_{k=0}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, implique $|v(y)| > \gamma$.*

Prova: Vamos denotar $\lambda = x + iy$. Não há perda de generalidade em restringir a prova para o caso $y \geq 0$ pois $H(\bar{\lambda}) = \overline{H(\lambda)}$, onde $\bar{\lambda}$ denota o complexo conjugado de λ .

Se $H(\lambda) = F(\lambda) + iG(\lambda)$, a equação $H(\lambda) = 0$ é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= [(x^2 + \alpha x + \beta - y^2) \cos y - (2x + \alpha) y \sin y] e^x + \gamma = 0, \\ G(\lambda) &= [(x^2 + \alpha x + \beta - y^2) \sin y + (2x + \alpha) y \cos y] e^x = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

em forma vetorial,

$$\begin{aligned} e^x [(2xy, x^2 + \alpha x) + (\alpha y, \beta - y^2)] \cdot (-\sin y, \cos y) &= -\gamma, \\ [(2xy, x^2 + \alpha x) + (\alpha y, \beta - y^2)] \cdot (\cos y, \sin y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Definindo $w^\perp(y) = (\sin y, -\cos y)$, $u(x, y) = (2xy, x^2 + \alpha x)$, o sistema (3.3) reduz-se a uma única equação vetorial:

$$\nu(x, y) := e^x [u(x, y) + v(y)] = \gamma w^\perp(y). \quad (3.4)$$

Para cada $x \geq 0$ fixo, o vetor $\nu(x, y)$ descreve, no sentido horário, um arco de parábola ilimitado no plano $\xi\eta$, enquanto $w^\perp(y)$ descreve no sentido anti-horário, o círculo unitário quando $y \geq 0$ cresce. Assim, em cada intervalo $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k = 0, 1, \dots$, existe precisamente um número $y_k(x)$, para o qual $\nu(x, y_k(x))$ é um múltiplo positivo de $w^\perp(y_k(x))$. Além disso, a condição $\nu(x, y) \cdot w(y) = 0$ ocorre somente se $y = y_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$. Para cada inteiro não negativo k , $y_k(x)$ depende continuamente de x e $(x, y_k(x))$ satisfaz a equação (3.4) se, e somente se, $|\nu(x, y_k(x))| = \gamma$.

Vamos provar a necessidade.

Suponha $\Re(\lambda) < 0$ para todas as raízes de $H(\lambda) = 0$ e assuma temporariamente que a condição enunciada no teorema é falsa. Em consequência, para algum in-

teiro $k \geq 0$ o número $y_k = y_k(0) \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, tal que $v(y_k)$ é um múltiplo positivo de $w^\perp(y_k)$, deve satisfazer $|v(y_k)| \leq \gamma$.

Se $|v(y_k)| = \gamma$, y_k deve satisfazer (3.4) com $x = 0$, isto é, $v(y_k) = \gamma w^\perp(y)$ e assim, $z = iy_k$ é uma raiz imaginária pura de $H(\lambda) = 0$, uma contradição.

Resta-nos considerar o caso $|v(y_k)| < \gamma$. Sob esta hipótese, o círculo de raio γ determina um arco limitado, ao qual $v(y_k)$ pertence, sobre o ramo de parábola $v(y)$, $y \geq 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} |\nu(x, y_k(x))| = \infty$, a continuidade de $\nu(x, y_k(x))$ implica que existe um número positivo x_0 de modo que $|\nu(x_0, y_k(x_0))| = \gamma$. Isto implica que $(x_0, y_k(x_0))$ satisfaz a equação (3.4) e, em consequência, $\lambda = x_0 + iy_0$ é uma raiz de $H(\lambda) = 0$ tal que $\Re(\lambda) > 0$, uma contradição. Logo, a condição é necessária.

Vamos agora provar que a condição é suficiente, mostrando que se existe uma raiz λ de $H(\lambda) = 0$ tal que $\Re(\lambda) \geq 0$, então para algum $y \in \cup_{k=0}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$, com $v(y) \cdot w(y) = 0$ temos $0 < |v(y)| \leq \gamma$.

Suponha que $\tilde{\lambda} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ é uma raiz de $H(\lambda) = 0$, com $\tilde{x} \geq 0$. Note que para qualquer raiz $\lambda = x + iy$ de $H(\lambda) = 0$, com $x \geq 0$, pela equação (3.4) temos $|u(x, y) + v(y)| \leq \gamma$. Logo, se $\lambda = x + iy$ varia no conjunto das raízes de $H(\lambda) = 0$ com parte real não negativa, sua parte imaginária y é limitada. Isto implica que $\tilde{\lambda}$ pode ser escolhido de tal maneira que $\tilde{x}$ é o mínimo mantendo a propriedade de $\tilde{\lambda}$.

Seja $k \geq 0$ tal que $\tilde{y} \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$. Para cada x , $0 < x < \tilde{x}$, seja $y_k(x)$ definido como anteriormente, isto é, um número $y \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ tal que $\nu(x, y_k(x))$ é um múltiplo de $w^\perp(y_k(x))$. Para cada x , $0 < x < \tilde{x}$, considere o número $\rho = \rho(x) > 0$ definido por

$$\nu(x, y_k(x)) = \rho w^\perp(y_k(x)). \quad (3.5)$$

Figure 3.1

Da minimalidade de $\tilde{x}$, segue que $\rho \neq \gamma$.

Afirmamos que $\rho < \gamma$.

De fato, para qualquer $x > 0$, após um cálculo elementar temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} |\nu(x, y)|^2 &= 2e^{2x} \left[(2x + \alpha)^2 y^2 + (x^2 + \alpha x + \beta - y^2)^2 \right] + \\ &\quad e^{2x} [4(2x + \alpha) y^2 + 2(2x + \alpha)(x^2 + \alpha x + \beta - y^2)] \\ &= 2 \left[|\nu(x, y)|^2 + e^{2x} [(2x + \alpha)y^2 + (2x + \alpha)(x^2 + \alpha x + \beta)] \right] > 0. \end{aligned}$$

Logo, se $0 < x < \tilde{x}$, podemos assegurar que $|\nu(x, \tilde{y})| < |\nu(\tilde{x}, \tilde{y})| = \gamma$, isto é, $\nu(x, \tilde{y})$ permanece no interior da circunferência de raio γ com centro na origem, de acordo com a figura 3.1. Se um ponto $Q = (\xi, \eta) \neq (0, -\gamma)$ pertence à circunferência de raio γ com centro na origem, denotamos por ℓ_Q o comprimento de arco ao longo do círculo de $(0, -\gamma)$ a Q no sentido anti-horário.

Suponha por um momento que o alinhamento de $\nu(x, y_k(x))$ e $w^\perp(y_k(x))$ ocorra com o vetor $\nu(x, y_k(x))$ fora do círculo de raio γ com centro na origem, isto é, $\rho = |\nu(x, y_k(x))| \geq \gamma$. Logo $y_k(x) < \tilde{y}$ ou $y_k(x) > \tilde{y}$ e cada uma destas alternativas conduz respectivamente a

$$\ell_{[\gamma w^\perp(y_k(x))]} < \ell_{[\gamma w^\perp(\tilde{y})]} = \ell_{\nu(\tilde{x}, \tilde{y})} < \ell_{[\gamma \nu(x, y_k(x))]/\rho}$$

ou

$$\ell_{[\gamma \nu(x, y_k(x))]/\rho} < \ell_{\nu(\tilde{x}, \tilde{y})} = \ell_{[\gamma w^\perp(\tilde{y})]} < \ell_{[\gamma w^\perp(y_k(x))]}$$

e isto implica, em ambos os casos, que $\nu(x, y_k(x))$ e $w^\perp(y_k(x))$ não podem ser alinhados, o que é uma contradição. Em consequência, a equação (3.5) se verifica com $\rho < \gamma$, isto é, $\nu(x, y_k(x))$ permanece dentro do círculo de raio γ com centro na origem para qualquer $x, 0 < x < \tilde{x}$. Logo $|v(y_k(0))| \leq \gamma$ e assim, temos que a condição é suficiente. ■

O Teorema 3.1, em sua formulação contra-positiva, será mais adequado para nossos propósitos, isto é, utilizaremos a seguinte versão equivalente do Teorema 3.1.

Teorema 3.2 *Sejam $v(y) = (\alpha y, \beta - y^2)$, $w(y) = (\cos y, \sin y)$, $y \geq 0$, vetores bidimensionais dados. Se $\gamma > 0$, uma condição necessária e suficiente para que $H(\lambda) = 0$ tenha uma raiz λ com $\Re(\lambda) \geq 0$ é que exista $y \in \cup_{k=0}^{\infty} (2k\pi, (2k+1)\pi)$ com $|v(y)| \leq \gamma$ e $v(y) \cdot w(y) = 0$.*

Decorre da prova do Teorema 3.1 que em cada intervalo $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k = 0, 1, \dots$, existe precisamente um valor y_k tal que $v(y_k) \cdot w(y_k) = 0$. A cada inteiro não negativo k tal que $|v(y_k)| \leq \gamma$ corresponde uma única raiz λ com $\Re(\lambda) \geq 0$.

O lema abaixo leva a uma nova demonstração do Lema 2.1 contido na referência [04].

Figure 3.2

Lema 3.1 A parábola $v(y) = (\alpha y, \beta - y^2)$ tem no máximo um ponto em comum com qualquer circunferência C_γ , de centro na origem se, e somente se, $\alpha^2 \geq 2\beta$.

Prova: Observamos que a parábola $v(y)$ tem mais do que um ponto em comum com a circunferência C_γ se, e somente se, $v(y) \cdot v'(y) < 0$ para algum $y > 0$. Veja figura 3.2.

Assim, de acordo com a figura 3.3 temos que $v(y)$ e as circunferências C_γ tem no máximo um ponto em comum se, e somente se, $v(y) \cdot v'(y) \geq 0$, para todo $y > 0$, ou seja,

$$(\alpha y, \beta - y^2) \cdot (\alpha, -2y) \geq 0, \quad \forall y > 0, \quad (3.6)$$

$$\alpha^2 y + 2y^3 - 2\beta y \geq 0, \quad \forall y > 0, \quad (3.7)$$

Como $y > 0$, temos que

Figure 3.3

$$\alpha^2 + 2y^2 - 2\beta \geq 0, \quad \forall y > 0. \quad (3.8)$$

Segue que $\alpha^2 - 2\beta \geq 0$ e portanto $\alpha^2 \geq 2\beta$. ■

Em [04], U. an der Heiden estabeleceu o seguinte resultado para a equação (3.1):

Teorema 3.3 *Sejam α, β e γ constantes positivas. Se $\alpha^2 \geq 2\beta$, então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *A equação (3.1) tem pelo menos uma solução com parte real positiva,*
- (ii) *A equação (3.1) tem precisamente uma solução λ , com $\Re(\lambda) > 0$ e $0 < \Im(\lambda) < \pi$,*

(iii) $\gamma > \alpha y / \sin y$, onde $0 < \Im(\lambda) < \pi$ e $\cot y = (y - (\beta/y))/\alpha$.

Observe que a condição (iii) do Teorema 3.3 é equivalente a

(iii)' $\alpha y < \gamma \sin y$, onde $0 < y < \pi$ e $v(y) \cdot w(y) = 0$, com $v(y) = (\alpha y, \beta - y^2)$
e $w(y) = (\cos y, \sin y)$.

Demonstraremos o resultado acima utilizando argumentos vistos na prova do Teorema 3.1, que são mais elementares que aqueles utilizados em [04].

Prova: Vamos provar que (i) e (ii) são equivalentes.

Seja $\nu(x, y)$ dado em (3.4). Suponha que a equação (3.1) tem pelo menos uma solução com parte real positiva, então há um alinhamento entre os vetores $\nu(x, y_k)$ e $w^\perp(y_k)$, com $|\nu(x, y_k)| = \gamma$, onde $y_k \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$. Em virtude do Lema 3.1, em cada intervalo $(2j\pi, (2j+1)\pi)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, há precisamente um ponto y_j tal que $\nu(x, y_j)$ e $w^\perp(y_j)$ estão alinhados e $|\nu(x, y_j)| < \gamma$. Cada um destes pontos fornece uma raiz com parte real positiva e parte imaginária em $(2j\pi, (2j+1)\pi)$. A implicação fica provada tomando $j = 0$.

A recíproca é imediata.

Vamos mostrar a equivalência entre (ii) e (iii)'.

A condição $\alpha y < \gamma \sin y$, $0 < y < \pi$, é equivalente ao vetor $v(y)$ pertencer ao interior da circunferência de raio γ , centrado na origem, ou seja, $|v(y)| < \gamma$. Logo, pelo Teorema 3.2, segue que a equação (3.1) tem precisamente uma solução λ com $\Re(\lambda) > 0$ se, e somente se, $\alpha y < \gamma \sin y$, onde $0 < y < \pi$ e $v(y) \cdot w(y) = 0$.

Pelas equivalências acima, o resultado segue. ■

Uma aplicação do Teorema 3.3 pode ser encontrada em [04]. Nesta referência U. an der Heiden combina este teorema com resultados de Análise Funcional

(basicamente um teorema de ponto fixo devido a Browder [02]) para obter o seguinte resultado:

Teorema 3.4 *O sistema (2.2) possui uma solução periódica não constante com período maior que 2 se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) *a e b são constantes positivas,*
- (ii) *$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua,*
- (iii) *$\xi f(\xi) > 0$ para todo $\xi \neq 0$,*
- (iv) *existe uma constante positiva k tal que $f(\xi) \geq -k$ para todo ξ ,*
- (v) *f é diferenciável em $\xi = 0$,*
- (vi) *$f'(0) > (a+b)y/\text{sen } y$, onde o número y satisfaz $0 < y < \pi$ e $\cot y = (y - ab/y) / (a+b)$.*

Bibliografia

- [01] Baptistini, M. T. Z. & Táboas, P. Z. On the stability of some exponential polynomials, *J. Math. Anal. Appl.*, (a aparecer).
- [02] Browder, F. E. A Further generalization of the Schauder fixed point theorem. *Duke Math. J.*, **32**, 575-578, 1965.
- [03] Hale, J. K. *Theory of functional differential equation*. 1ª edição, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [04] Heiden, U. Periodic Solutions of a Nonlinear Second Order Differential Equation with Delay. *J. Math. Anal. Appl.*, **70**, 599-609, 1979.