Resultados recentes relativos à
Conjectura Fraca de Markus -Yamabe

Daniela Paula Demuner

Orientador: *Prof. Dr. Carlos Teobaldo Gutierrez Vidalon*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Matemática.

“VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA”

Data da Defesa: 19/08/2005

Visto do Orientador:

USP – São Carlos
agosto/2005

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus, pelo dom da vida e por estar constantemente me provando que é possível crescer diante das dificuldades e também pela felicidade de poder compartilhar com todos a conquista de mais essa etapa importante em minha vida.

Ao professor Gutierrez, pela sugestão do tema da dissertação, orientando-me de modo objetivo e correto, permitindo-me trabalhar com liberdade e tranquilidade.

Aos meus pais Benito e Laudir, por me darem a vida, por serem pessoas maravilhosas nas quais me espelhei para criar meus valores e me tornar a pessoa que hoje sou, por me darem todo o apoio moral e financeiro e por me orientarem e me encorajarem em todos os momentos da minha vida. Minha eterna gratidão!

Ao meu namorado e amigo Alancardck, por sempre me incentivar a seguir em frente e sempre estar ao meu lado como toda sua paciência, compreensão e amor.

Aos meus amigos, aqueles que me acompanharam e me ajudaram de perto e aqueles que torceram por mim de longe, meus mais profundos agradecimentos.

À todos os professores e funcionários do ICMC, que de muitas formas contribuíram para a realização deste trabalho, em especial aos professores Ali Tahzibi, Carlos Biasi, Daniel Levcovitz, Marcelo Saia e Valdir Menegatto.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFES, especialmente o professor Milton Cobo, pelas valiosas sugestões dadas neste trabalho.

Ao professor Carlos Gustavo Moreira (Gugu), pela atenção dispensada em alguns resultados.

À Fapesp, pelo suporte financeiro.

Enfim, a todos aqueles que colaboraram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

Resumo

C. Olech [28] provou que os problemas de estabilidade assintótica global de campos de vetores no $\mathbb{R}^n$ e injetividade global de aplicações do $\mathbb{R}^n$ nele próprio estão inter-relacionados. Neste contexto, deparamo-nos com a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe, cujo enunciado é o seguinte: Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 tal que para todo ponto $p \in \mathbb{R}^n$, todos os autovalores da derivada $DF(p)$ têm parte real negativa, então F é uma aplicação injetiva. O objetivo deste trabalho é apresentar alguns resultados referentes a esta conjectura.

Abstract

It has been shown by C. Olech [28] that global asymptotic stability of vector fields of $\mathbb{R}^n$ and global injectivity of maps from $\mathbb{R}^n$ into itself are interrelated problems. In this context we have the Weak Markus-Yamabe Conjecture whose statement is as follows: If $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a C^1 map such that for all $p \in \mathbb{R}^n$, all the eigenvalues of the derivative $DF(p)$ have negative real part, then F is an injective map. In this work we present some results related to this conjecture.

Sumário

Introdução	vii
1 Preliminares	1
1.1 Folheações	1
1.2 Medida e integração	3
1.3 Topologia algébrica	8
1.4 Resultados clássicos da teoria qualitativa das equações diferenciais	10
1.4.1 Campos vetoriais	10
1.4.2 O Teorema de Poincaré-Bendixson	12
1.4.3 Estabilidade assintótica	13
2 Injetividade de aplicações diferenciáveis do plano	15
2.1 Semi-componentes de Reeb	15
2.2 Relação entre semi-componentes de Reeb e injetividade	18
2.3 Sobre a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe bidimensional	25
3 Injetividade de aplicações polinomiais do plano	31
3.1 Semi-componentes de Reeb alinhadas e adjacentes	31
3.2 Sobre a Conjectura Jacobiana forte	35
4 Difeomorfismos locais de $\mathbb{R}^n$ que são injetivos	46
4.1 Sobre a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe e a Conjectura de Chamberland	46
4.2 Afirmações equivalentes	50
5 Estabilidade assintótica global	54
5.1 Uma solução para a Conjectura de Markus-Yamabe bidimensional	54
5.2 Um contra-exemplo polinomial para a Conjectura de Markus-Yamabe para $n \geq 3$	59

O estudo da injetividade de aplicações de classe C^1 motivou C. Chamberland a enunciar em [10] a seguinte conjectura: "Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de classe C^1 tal que o conjunto dos autovalores (complexos) da derivada $DF(p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, não intercepta uma pequena vizinhança da origem, então F é injetiva". Esta conjectura implica a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe (vide [15]). Veremos neste trabalho que as técnicas utilizadas por C. Gutierrez em [18] levam naturalmente à resolução da Conjectura de Chamberland bidimensional.

Os resultados de injetividade para aplicações polinomiais em $\mathbb{R}^n$ se relacionam com a *Conjectura Jacobiana de Keller*, que em uma de suas formulações estabelece: "Se $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação polinomial tal que $\det(DP(p)) = 1$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$, então P é injetiva". Esta formulação surgiu depois que S. Pinchuck [30] em 1994 exibiu uma aplicação polinomial $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ não injetiva com $\det(DP(p)) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Como consequência dos trabalhos de H. Bass, E. Conell e D. Wright [2] e A. Yagzhev [40], sabe-se que se as aplicações polinomiais $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de grau menor ou igual a 3, tal que o conjunto dos autovalores da derivada $DF(p)$, $p \in \mathbb{R}^n$, é igual a $\{-1\}$, são injetivas, então a Conjectura Jacobiana de Keller é verdadeira (vide [38], prova da Proposição 8.1.8). Decorre disto que se a Conjectura de Chamberland ou a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe for verdadeira para todas as aplicações polinomiais $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de grau menor ou igual a 3, então a Conjectura Jacobiana de Keller será verdadeira.

Apresentamos neste trabalho resultados recentes relativos as conjecturas citadas acima.

No Capítulo 1 apresentamos definições e resultados básicos concernentes a folheações, medida e integração, topologia algébrica e teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Deixamos de provar vários dos resultados apresentados a fim de tornar a leitura mais dinâmica.

No Capítulo 2 apresentamos alguns resultados referentes à Conjectura Fraca de Markus-Yamabe bidimensional. O principal resultado demonstrado afirma que se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável (não necessariamente de classe C^1) e se para algum $\epsilon > 0$, o conjunto dos autovalores da derivada $DF(p)$, $p \in \mathbb{R}^2$, não intercepta $[0, \epsilon)$, então F é injetiva. A ferramenta utilizada na prova deste resultado é o conceito de semi-componente de Reeb introduzido em [14].

No capítulo 3 utilizando os conceitos de semi-componentes de Reeb alinhadas e de semi-componentes de Reeb adjacentes introduzidos em [12], obtemos resultados mais finos e elegantes para o caso polinomial da Conjectura Fraca de Markus-Yamabe bidimensional.

No Capítulo 4 resolvemos alguns casos particulares da Conjectura Fraca de Markus-Yamabe e da Conjectura de Chamberland em $\mathbb{R}^n$. Provamos, por exemplo, a validade destas conjecturas para aplicações Lipschitzianas. Além disso, mostramos que a Conjectura de Chamberland implica a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe. Finalmente, para

uma certa família de aplicações, provamos uma equivalência para cada conjectura.

No Capítulo 5 demonstramos o seguinte resultado: Se $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial diferenciável com uma singularidade na origem tal que, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, todos os autovalores da derivada $DX(p)$ têm parte real negativa, então existe uma única semi-trajetória positiva começando em cada ponto do plano e além disso, o seu conjunto ω -limite é igual a $\{0\}$. Neste capítulo também apresentamos um contra-exemplo polinomial para a Conjectura de Markus-Yamabe em $\mathbb{R}^n$, para todo $n \geq 3$.

Preliminares

Neste capítulo apresentamos definições e resultados básicos concernentes a folheações, medida e integração, topologia algébrica e teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, que serão utilizados no decorrer deste trabalho. A maioria das demonstrações são omitidas, mas fornecemos referências de textos onde estas podem ser encontradas, bem como resultados adicionais sobre o assunto. As referências para este capítulo são [5], [6], [21], [22], [25], [35] e [39].

1.1 Folheações

Neste trabalho tomamos como definição de folheação aquela apresentada em [6] por C. Camacho e A. Lins Neto.

A idéia intuitiva de folheação corresponde à decomposição de uma variedade numa união de subvariedades conexas, disjuntas, de mesma dimensão chamadas folhas, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro. Mais precisamente, temos a seguinte definição:

Definição 1.1.1 *Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma folheação de classe C^r e dimensão n de M é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r em M com as seguintes propriedades:*

- (a) *se $(U, \phi) \in \mathcal{F}$, então $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e de $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente;*
- (b) *se $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\Phi = \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da forma $\Phi(x, y) = (\Phi_1(x, y), \Phi_2(y))$, onde $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.*

Dizemos, também, que M é folheada por $\mathcal{F}$, ou ainda que $\mathcal{F}$ é uma estrutura folheada de dimensão n e classe C^r sobre M .

Na Figura 1.1 ilustramos o aspecto de uma variedade de dimensão 2 folheada por uma folheação de dimensão 1.

Figura 1.1:

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de classe C^r e dimensão $n > 0$ de uma variedade M . Consideremos uma carta local (U, ϕ) de $\mathcal{F}$ tal que $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos $\phi^{-1}(U_1 \times c)$, $c \in U_2$, são chamados *placas* de $\mathcal{F}$. Um *caminho de placas* de $\mathcal{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$. As *folhas* de $\mathcal{F}$ são as classes de equivalência da relação de equivalência em M dada por:

" $p \sim q$, se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$ ".

Observemos que se $\mathcal{F}$ é uma folheação de classe C^r , $r \geq 1$, então as placas são subvariedades conexas de dimensão n e classe C^r de M . Deste modo, uma folha de $\mathcal{F}$ é um subconjunto de M conexo por caminhos.

Definição 1.1.2 Dizemos que duas folheações $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$ de uma variedade M são topologicamente equivalentes quando existe um homeomorfismo $H : M \rightarrow M$ que leva folhas de $\mathcal{F}$ em folhas de $\mathcal{F}'$. O homeomorfismo H é chamado de equivalência topológica entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{F}'$.

1.2 Medida e integração

Nesta seção apresentamos alguns resultados da teoria de medida e integração que serão utilizados no Capítulo 2. Esta seção é também dedicada a demonstrar a Proposição 1.2.8, que será usada para provar o Teorema 2.3.1. Ressaltamos que a demonstração da Proposição 1.2.8 é devida ao professor Gugu.

Neste trabalho consideraremos mensurabilidade com relação a σ -álgebra de Lebesgue e $m(E)$ denotará a medida de Lebesgue do conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$.

Sejam $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de E . Recordemos que o *limite superior* e o *limite inferior* de f em x_0 são definidos, respectivamente, por

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf\{M(\delta) : \delta > 0\} \quad \text{e} \quad \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup\{m(\delta) : \delta > 0\},$$

onde

$$M(\delta) = \sup\{f(x) : 0 < |x - x_0| < \delta, x \in E\}$$

e

$$m(\delta) = \inf\{f(x) : 0 < |x - x_0| < \delta, x \in E\}.$$

Seja $x_0 \in E$ um ponto de acumulação de E , dizemos que f é *semi-contínua superiormente* em x_0 , se

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Notemos que se $f(x_0) = +\infty$, então f é automaticamente semi-contínua superiormente em x_0 ; caso contrário, dado $M > f(x_0)$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < M$, para todo $x \in E$ com $|x - x_0| < \delta$. Analogamente, dizemos que f é *semi-contínua inferiormente* em x_0 , se

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

A função f é dita semi-contínua superiormente (resp. inferiormente) em E se é semi-contínua superiormente (resp. inferiormente) em todo ponto de acumulação de E pertencente a E .

O resultado seguinte é o Corolário 4.16 de [39].

Proposição 1.2.1 *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável. Se $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ é semi-contínua superiormente (resp. inferiormente) em E , então f é mensurável.*

Nosso próximo resultado, Teorema de Lusin, nos dá uma propriedade de continuidade que caracteriza funções mensuráveis. Sua demonstração pode ser encontrada em [22].

Teorema 1.2.2 (Teorema de Lusin) *Seja $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável, onde $m(E) < \infty$. Então, para cada $\epsilon > 0$, existe um conjunto fechado $F \subset E$ com $m(E \setminus F) < \epsilon$ e tal que $f|_F$ é contínua.*

Seja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num conjunto $E \subset \mathbb{R}$. Usaremos as notações

$$f(x_0^+) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) \quad \text{e} \quad f(x_0^-) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$

para os limites à direita e à esquerda de f em x_0 , respectivamente, caso eles existam.

O próximo resultado refere-se à diferenciabilidade de funções monótonas sobre $\mathbb{R}$. Sua demonstração pode ser encontrada em [39].

Teorema 1.2.3 *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona crescente. Então f tem derivada mensurável f' não-negativa em quase todo ponto de (a, b) . Além disso,*

$$0 \leq \int_a^b f' \leq f(b^-) - f(a^+),$$

onde $\int_a^b f'$ denota a integral de Lebesgue de f' .

Para funções diferenciáveis $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, denotaremos a derivada de f no ponto $x \in U$ por $Df(x)$, assim como sua matriz jacobiana. Quando $x \in U$ for tal que $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não é uma transformação linear sobrejetiva, diremos que x é um *ponto crítico* de f .

O resultado seguinte é uma versão mais forte do Teorema de Sard, pois não supõe diferenciabilidade em todo ponto, mas somente no conjunto de pontos críticos sob consideração. Este resultado é o Teorema 3.3 de [25].

Teorema 1.2.4 *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função e S o conjunto dos pontos $x \in U$ para os quais $Df(x)$ existe e é não sobrejetora. Então $f(S)$ é um conjunto de medida nula em $\mathbb{R}^n$.*

Apresentamos a seguir alguns lemas que auxiliarão na prova da Proposição 1.2.8.

Lema 1.2.5 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Seja A o conjunto dos pontos $x \in I$ tais que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|H(x+h) - H(x)|}{|h|} = \infty.$$

Então A é um conjunto mensurável.

Demonstração: Dados $n, k \in \mathbb{N}$. Consideremos o conjunto

$$X_{n,k} = \left\{ x \in I : \exists y \in I, 0 < |y - x| < \frac{1}{n}, \left| \frac{H(y) - H(x)}{y - x} \right| < k \right\}.$$

Afirmamos que $X_{n,k}$ é um conjunto mensurável. De fato, seja

$$U_{n,k} = \left\{ (t, s) \in \mathbb{R}^2 : \exists y \in I, 0 < |y - t| < \frac{1}{n}, \left| \frac{H(y) - s}{y - t} \right| < k \right\}.$$

Sendo $U_{n,k}$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$, podemos escrevê-lo como uma união enumerável de retângulos abertos, $U_{n,k} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \times (c_j, d_j)$. Claramente

$$X_{n,k} = \{x \in I : (x, H(x)) \in U_{n,k}\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} [(a_j, b_j) \cap H^{-1}((c_j, d_j))].$$

Logo, $U_{n,k}$ é mensurável. E nossa afirmação está demonstrada.

Notemos que $A = I \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} X_{n,k}$. Daí, usando o fato de que I é mensurável e a afirmação anterior, concluímos que A é mensurável. ■

Sejam K um subconjunto de $\mathbb{R}$ e $H : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Para cada $n, r \in \mathbb{N}$, denotemos por $C(n, r, K, H)$ o conjunto dos pontos $x \in K$ para os quais existe uma seqüência $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ em $H^{-1}(H(x))$ satisfazendo $x_{j+1} - x_j \geq \frac{1}{r}$. Vale o seguinte resultado:

Lema 1.2.6 *Sejam $K \subset \mathbb{R}$ compacto e $H : K \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $C(n, r, K, H)$ é um subconjunto fechado de K .*

Demonstração: Seja $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $C(n, r, K, H)$ e suponhamos que $x_m \rightarrow x$ quando $m \rightarrow \infty$. Vamos mostrar que $x \in C(n, r, K, H)$. Pela definição de $C(n, r, K, H)$, associamos a cada x_m uma seqüência $(x_m^j)_{1 \leq j \leq n}$ em $H^{-1}(H(x_m))$ satisfazendo $x_m^{j+1} - x_m^j \geq \frac{1}{r}$.

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto x_1^1 < x_1^2 < \cdots < x_1^n \\ x_2 &\mapsto x_2^1 < x_2^2 < \cdots < x_2^n \\ &\vdots \\ x_m &\mapsto x_m^1 < x_m^2 < \cdots < x_m^n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Observemos que a seqüência $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ nos fornece n seqüências $(x_m^j)_{m \in \mathbb{N}}$, $1 \leq j \leq n$.

Afirmamos que existem infinitos índices $l_1 < l_2 < \cdots < l_k < \cdots$ tais que, para todo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, a seqüência $(x_{l_k}^j)_{k \in \mathbb{N}}$ é convergente, isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{l_k}^j = \bar{x}_j$. De fato, como

$(x_{m_k}^1)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência em K e sendo K compacto, então existem infinitos índices $m_1 < m_2 < \dots < m_k < \dots$ tais que a seqüência $(x_{m_k}^1)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para $\bar{x}_1 \in K$. Consideremos agora a seqüência $(x_{m_k}^2)_{k \in \mathbb{N}}$. Da mesma forma, mostramos que existem infinitos índices $m_{k_1} < m_{k_2} < \dots < m_{k_i} < \dots$ tais que a seqüência $(x_{m_{k_i}}^2)_{i \in \mathbb{N}}$ converge para $\bar{x}_2 \in K$. Pela construção da seqüência $(x_{m_{k_i}}^2)_{i \in \mathbb{N}}$ temos ainda que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{m_{k_i}}^1 = x_1$.

Prosseguindo, indutivamente, obteremos infinitos índices $l_1 < l_2 < \dots < l_k < \dots$ tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{l_k}^j = \bar{x}_j$, $1 \leq j \leq n$. Isso demonstra nossa afirmação.

Mostremos agora que $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\} \subset H^{-1}(H(x))$ e $\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j \geq \frac{1}{r}$, $1 \leq j < n$. Como $H(x_{l_k}^j) = H(x_{l_k})$, $1 \leq j \leq n$, $k \in \mathbb{N}$, segue, da continuidade de H , que $H(\bar{x}_j) = H(x)$. Logo, $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\} \subset H^{-1}(H(x))$. Fixemos $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Notemos que $x_{m_k}^{j+1} - x_{m_k}^j \geq \frac{1}{r} > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Daí, fazendo $k \rightarrow \infty$, obtemos que $\bar{x}_{j+1} - \bar{x}_j \geq \frac{1}{r}$. Logo $x \in C(n, r, K, H)$ e, portanto, $C(n, r, K, H)$ é um subconjunto fechado de K . ■

Lema 1.2.7 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e A como no Lema 1.2.5. Suponhamos que exista um conjunto $L \subset A$ tal que $H|_L : L \rightarrow H(L)$ seja um homeomorfismo. Então $(H|_L)^{-1} : H(L) \rightarrow L$ tem derivada nula em todos os pontos de $H(L)$.*

Demonstração: Escrevamos $g = (H|_L)^{-1}$. Sejam $y_0 \in H(L)$ e $x_0 \in L$ tais que $H(x_0) = y_0$. Como $x_0 \in A$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{H(x) - y_0}{x - x_0} \right| > \frac{1}{\epsilon}, \quad x \in L, \quad 0 < |x - x_0| < \delta$$

e conseqüentemente,

$$\left| \frac{g(y) - x_0}{y - y_0} \right| < \epsilon, \quad y \in H(L), \quad 0 < |g(y) - x_0| < \delta.$$

Sendo g uma função contínua em y_0 , existe $\rho > 0$ tal que se $y \in H(L)$ e $0 < |y - y_0| < \rho$, então $0 < |g(y) - x_0| < \delta$. Daí,

$$\left| \frac{g(y) - x_0}{y - y_0} \right| < \epsilon, \quad y \in H(L), \quad 0 < |y - y_0| < \rho.$$

Logo, $g'(y_0) = 0$. Como $y_0 \in H(L)$ é qualquer, isso conclui a demonstração do lema. ■

Proposição 1.2.8 *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado e $H : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Seja A o conjunto dos pontos $x \in I$ tais que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|H(x+h) - H(x)|}{|h|} = \infty.$$

Então A é um conjunto de medida nula.

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que A tenha medida positiva. Pelo Teorema de Lusin, existe um conjunto compacto $K \subset A$ de medida positiva tal que $H|_K : K \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Afirmamos que, para todo $y \in H(K)$, $(H|_K)^{-1}(y)$ é um conjunto discreto e, portanto, um conjunto finito. De fato, suponhamos que para algum $y \in H(K)$, exista um ponto de acumulação x_0 em $(H|_K)^{-1}(y)$. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em $(H|_K)^{-1}(y)$ convergindo para x_0 . A compacidade de K e a continuidade de H em K implicam que $x_0 \in (H|_K)^{-1}(y)$, isto é, $x_0 \in K$ e $H(x_0) = y$.

Seja $\alpha_n = x_n - x_0$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ e $x_0 + \alpha_n \in (H|_K)^{-1}(y)$, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|H(x_0 + \alpha_n) - H(x_0)|}{|\alpha_n|} = 0,$$

mas isto contradiz o fato de x_0 pertencer a $K \subset A$. E, portanto, nossa afirmação está demonstrada.

O Lema 1.2.6 implica que o conjunto

$$A(n) = \{x \in K : \#(H|_K)^{-1}(H(x)) \geq n\} = \bigcup_{r=1}^{\infty} C(n, r, K, H|_K)$$

é mensurável. Assim,

$$B(n) = A(n) \setminus A(n+1) = \{x \in K : \#(H|_K)^{-1}(H(x)) = n\}$$

também é mensurável. Como $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(n)$ é um conjunto de medida positiva e

$B(n) = \bigcup_{r=1}^{\infty} [B(n) \cap C(n, r, K, H|_K)]$, segue que existem $m, \bar{r} \in \mathbb{N}$ tais que o conjunto $B(m) \cap C(m, \bar{r}, K, H|_K)$ tem medida positiva. Sendo $B(m) \cap C(m, \bar{r}, K, H|_K)$ um conjunto mensurável e limitado, podemos escrevê-lo como uma união finita de conjuntos mensuráveis tendo diâmetro menor que $\frac{1}{\bar{r}}$. Daí, um desses conjuntos tem medida positiva e a restrição da função H a este conjunto é injetora (por definição de $B(m)$ e $C(m, \bar{r}, K, H|_K)$). Segue, do Teorema de Lusin, que este conjunto contém um conjunto compacto L de medida positiva tal que $H|_L : L \rightarrow H(L)$ é uma bijeção contínua e, portanto, um homeomorfismo. Logo, pelo Lema 1.2.7, $(H|_L)^{-1} : H(L) \rightarrow L$ tem derivada nula em todos os pontos de $H(L)$. Assim, usando o Teorema 1.2.4 concluímos que L tem medida nula. Esta contradição mostra que A é um conjunto de medida nula. ■

1.3 Topologia algébrica

Nesta seção apresentamos a definição de grau local de uma aplicação contínua entre variedades topológicas conexas e orientadas de mesma dimensão e alguns resultados relacionados a este conceito, a fim de demonstrarmos a Proposição 1.3.7, que será utilizada no Capítulo 2. A referência para esta seção é [5].

Definição 1.3.1 *Sejam M e N variedades topológicas conexas e orientadas de dimensão $n \geq 1$ e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua. Seja $y \in N$ tal que $L_y = f^{-1}(y)$ é um subconjunto compacto de M . Suponhamos que $\alpha_{L_y} \in H_n(M, M \setminus L_y)$ e $\beta_y \in H_n(N, N \setminus \{y\})$ sejam as classes de orientação ao longo de L_y e em y , respectivamente, e que $f_* : H_n(M, M \setminus L_y) \rightarrow H_n(N, N \setminus \{y\})$ seja o homomorfismo induzido por f . Dizemos que o número inteiro $\deg(f, y)$ satisfazendo $f_*(\alpha_{L_y}) = \deg(f, y) \cdot \beta_y$ é o grau local de f em y .*

Observação 1.3.2 *Se $\deg(f, y) \neq 0$, então $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.*

Proposição 1.3.3 *Sejam M e N variedades topológicas conexas e orientadas de dimensão $n \geq 1$, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua e W um subconjunto compacto e conexo de N tal que $f^{-1}(W)$ é compacto. Então $\deg(f, y)$ independe de $y \in W$.*

Sejam M e N espaços topológicos e $f, g : M \rightarrow N$ aplicações contínuas. Dizemos que f e g são *homotópicas*, se existe uma aplicação contínua

$$H : M \times [0, 1] \rightarrow N,$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in M$. A aplicação H é chamada uma *homotopia* entre f e g .

Proposição 1.3.4 *Sejam M e N variedades topológicas conexas e orientadas de dimensão $n \geq 1$, $f, g : M \rightarrow N$ aplicações contínuas e W um subconjunto compacto e conexo de N . Se $H^{-1}(W)$ é compacto, onde H é uma homotopia entre f e g , então $\deg(f, y) = \deg(g, y)$ para todo $y \in W$.*

Uma *vizinhança* de um subconjunto L de um espaço métrico M é um conjunto $V \subset M$ tal que $L \subset \overset{\circ}{V}$, onde $\overset{\circ}{V}$ é o interior de V em M . Em outras palavras, existe um aberto A de M tal que $L \subset A \subset V$.

Afim de demonstrarmos a Proposição 1.3.7, provaremos dois lemas relacionados à teoria de espaços métricos.

Lema 1.3.5 *Sejam M e N espaços métricos com M compacto, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua e $y_0 \in N$. Então dada uma vizinhança aberta V de $f^{-1}(y_0)$ em M , existe uma vizinhança aberta W de y_0 em N tal que $f^{-1}(W) \subset V$.*

Demonstração: Suponhamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, exista um ponto x_n tal que $x_n \notin V$ e $f(x_n) \in B(y_0, 1/n) = \{x \in M : d(x, y_0) < 1/n\}$. Como $M \setminus V$ é compacto, passando a uma subsequência se necessário, podemos supor que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in M \setminus V$. A continuidade de f implica que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Por outro lado, sendo $d(f(x_n), y_0) < 1/n$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0$. Logo, $y_0 = f(x_0)$ e, portanto, $x_0 \in f^{-1}(y_0) \subset V$. Esta contradição prova o lema. ■

Lema 1.3.6 *Sejam M e N espaços métricos com M compacto, $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua e W um subconjunto fechado de N . Dada uma vizinhança aberta V de $f^{-1}(W)$ em M , existe $\epsilon > 0$ tal que se $g : M \rightarrow N$ é uma aplicação contínua com $d(f(x), g(x)) < \epsilon$, para todo $x \in M$, então $g^{-1}(W) \subset V$.*

Demonstração: Negar a validade do lema significa admitir, para cada $n \in \mathbb{N}$, a existência de uma aplicação contínua $g_n : M \rightarrow N$, com $d(f(x), g_n(x)) < 1/n$ para todo $x \in M$, e um ponto $x_n \notin V$ tais que $g_n(x_n) \in W$. Passando a uma subsequência se necessário, podemos supor, em virtude da compacidade de $M \setminus V$, que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \in M \setminus V$. Como $d(f(x_n), g_n(x_n)) < 1/n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(x_0)) = 0$, segue da desigualdade triangular que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(g(x_n), f(x_0)) = 0,$$

ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(x_0)$. Daí, sendo W um conjunto fechado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x_n) \in W$, concluímos que $x_0 \in f^{-1}(W) \subset V$. Mas isto contradiz o fato de x_0 pertencer a $M \setminus V$. O lema está demonstrado. ■

Proposição 1.3.7 *Sejam U um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(y_0)$ é compacto. Suponhamos, também, que $\deg(f, y_0) \neq 0$. Dada uma vizinhança compacta K de $f^{-1}(y_0)$ em U , existem $\epsilon > 0$ e uma vizinhança compacta e conexa W de y_0 tais que se $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua com $d(f(x), g(x)) < \epsilon$, para todo $x \in K$, então $(g|_K)^{-1}(W) \subset \overset{\circ}{K}$. Além disso, $\deg(g|_{\overset{\circ}{K}}, y) = \deg(f, y_0)$ para todo $y \in W$. Em particular, $W \subset g(\overset{\circ}{K})$.*

Demonstração: Segue do Lema 1.3.5, que existe uma vizinhança compacta e conexa W de y_0 tal que $(f|_K)^{-1}(W) \subset \overset{\circ}{K}$. Deste modo, aplicando o Lema 1.3.6, obtemos $\epsilon > 0$ tal que se $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua com $d(f(x), g(x)) < \epsilon$, para todo $x \in K$, então $(g|_K)^{-1}(W) \subset \overset{\circ}{K}$.

Mostremos agora que $\deg(g|_K^\circ, y) = \deg(f, y_0)$ para todo $y \in W$. Pela Proposição 1.3.3, temos que $\deg(f|_K^\circ, y) = \deg(f, y_0)$ para todo $y \in W$. Notemos que $f|_K^\circ$ e $g|_K^\circ$ são aplicações homotópicas e $H^{-1}(W)$ é um subconjunto compacto de $\overset{\circ}{K} \times [0, 1]$, onde H é uma homotopia entre $f|_K^\circ$ e $g|_K^\circ$. Logo, pela Proposição 1.3.6, $\deg(g|_K^\circ, y) = \deg(f, y_0)$, para todo $y \in W$, completando a demonstração da proposição. ■

1.4 Resultados clássicos da teoria qualitativa das equações diferenciais

Nesta seção apresentamos alguns resultados da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias.

1.4.1 Campos vetoriais

Nesta subseção, U denotará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Um *campo vetorial* de classe C^r , $r \geq 0$, em U é uma aplicação $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r . Ao campo vetorial X associamos a equação diferencial

$$x' = X(x). \quad (1.1)$$

As soluções desta equação, isto é, as aplicações diferenciáveis $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ tais que

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = X(\varphi(t)), \quad (1.2)$$

para todo $t \in I$, são chamadas *curvas integrais* de X ou *curvas integrais* da equação diferencial (1.1).

Observemos que se $\varphi : I \rightarrow U$ é uma curva integral de X e $q = \varphi(t_0)$, $t_0 \in I$, então $\psi : J \rightarrow U$ definida por $\psi(t) = \varphi(t + t_0)$ é também uma curva integral de X , onde $J = \{r - t_0 : r \in I\}$.

Um ponto $p \in U$ é dito *ponto singular* (ou *ponto de equilíbrio*) de X se $X(p) = 0$; caso contrário, p é dito *ponto regular* de X .

Dizemos que uma curva integral $\varphi : I \rightarrow U$ de X é *máxima*, se para toda curva integral $\psi : J \rightarrow U$ com $I \subset J$ e $\varphi = \psi|_I$ implica que $I = J$. Em outras palavras, φ é máxima se não admite nenhuma extensão que também é solução de (1.1). O intervalo I é chamado *intervalo maximal* de existência de φ .

O próximo teorema nos garante a existência de curvas integrais de um campo vetorial contínuo. Este resultado segue do Teorema 2.1 de [21], página 10.

Teorema 1.4.1 *Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e $p \in U$. Então (1.1) tem pelo menos uma solução $\varphi : I \rightarrow U$ tal que $0 \in I \subset \mathbb{R}$ e $\varphi(0) = p$.*

O próximo resultado é o Teorema 3.1 de [21], página 12.

Teorema 1.4.2 *Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e φ uma solução de (1.1) sobre algum intervalo. Então φ pode ser estendida sobre um intervalo maximal de existência (ω_-, ω_+) . Se (ω_-, ω_+) é um intervalo maximal de existência, então $\varphi(t)$ tende à fronteira de U quando $t \rightarrow \omega_+$ (resp. $t \rightarrow \omega_-$), isto é, $\omega_+ = \infty$ (resp. $\omega_- = \infty$) ou $\omega_+ < \infty$ (resp. $\omega_- > -\infty$) e, para todo compacto $K \subset U$ existe $\epsilon = \epsilon(K) > 0$ tal que se $t \in [\omega_+ - \epsilon, \omega_+)$ (resp. $t \in (\omega_-, \omega_- + \epsilon]$), então $\varphi(t) \notin K$.*

Observação 1.4.3 A extensão de φ não necessita ser única e, correspondentemente, ω_- e ω_+ dependem da extensão.

Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e $\varphi : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow U$ uma curva integral máxima de X pelo ponto $p \in U$ ($\varphi(0) = p$). Dizemos que $\varphi_p = \{\varphi(t) : t \in (\omega_-, \omega_+)\}$ é uma *órbita* ou *trajetória* do campo X pelo ponto p e $\varphi_p^+ = \{\varphi(t) : t \in [0, \omega_+)\}$ (resp. $\varphi_p^- = \{\varphi(t) : t \in (\omega_-, 0]\}$) é uma *semi-órbita positiva* ou *semi-trajetória positiva* (resp. negativa) do campo X pelo ponto p .

Se $\omega_+ = \infty$, definimos o conjunto

$$\omega(\varphi_p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Analogamente, se $\omega_- = -\infty$, definimos

$$\alpha(\varphi_p) = \{q \in \mathbb{R}^n : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Os conjuntos acima, $\omega(\varphi_p)$ e $\alpha(\varphi_p)$, são chamados de *conjunto ω -limite* e *conjunto α -limite* da órbita φ_p respectivamente.

Observação 1.4.4 Se condições iniciais determinarem soluções únicas de $x' = X(x)$, então denotaremos por $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ o conjunto ω -limite e o conjunto α -limite da órbita de X que contém p . Neste caso, $\omega(p)$ e $\alpha(p)$ serão chamados de conjunto ω -limite e conjunto α -limite de p respectivamente.

O resultado seguinte é o Teorema 1.1 de [21], página 145.

Teorema 1.4.5 *Sejam $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo e $\varphi : [0, \infty) \rightarrow U$ uma curva integral de X pelo ponto p . Então $\omega(\varphi_p)$ é fechado. Se φ_p^+ está contida num subconjunto compacto de U , então $\omega(\varphi_p)$ é não vazio e conexo.*

1.4.2 O Teorema de Poincaré-Bendixson

Nesta subseção, U denotará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e X um campo vetorial contínuo em U .

O resultado seguinte é o Teorema 3.1 de [21], página 150.

Teorema 1.4.6 *Seja $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow U$ uma curva integral de X de período $\tau > 0$ tal que $X(\varphi(t)) \neq 0$, $0 \leq t \leq \tau$. Se o interior da órbita periódica $\{\varphi(t) : 0 \leq t \leq \tau\}$ está contido em U , então existe um ponto singular de X no interior da órbita periódica.*

O próximo resultado é o Teorema 4.2 de [21], página 154.

Teorema 1.4.7 (Teorema de Poincaré-Bendixson) *Seja $\varphi : [0, \infty) \rightarrow U$ uma curva integral do campo X pelo ponto $p \in U$ tal que φ_p^+ esteja contida num compacto $K \subset U$. Suponhamos que $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$, para $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$, e que o campo X possua um número finito de singularidades em $\omega(\varphi_p)$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *se $\omega(\varphi_p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(\varphi_p)$ é uma órbita periódica;*
- (ii) *se $\omega(\varphi_p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(\varphi_p)$ é um ponto singular;*
- (iii) *se $\omega(\varphi_p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(\varphi_p)$ consiste de pontos singulares $p_1, p_2, \dots, p_n$ e uma sequência finita ou infinita de semi-órbitas $\{\psi(t) : -\infty \leq \alpha_- < t < \alpha_+ \leq \infty\}$ de X , onde $\psi : \mathbb{R} \rightarrow U$ e estas semi-órbitas não contém pontos singulares, mas $\psi(\alpha_+) = \lim_{t \rightarrow \alpha_+} \psi(t)$ (resp. $\psi(\alpha_-) = \lim_{t \rightarrow \alpha_-} \psi(t)$) existe e pertence ao conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.*

Observação 1.4.8 Quando condições iniciais determinam soluções únicas de $x' = X(x)$, temos que $\alpha_- = -\infty$ e $\alpha_+ = \infty$, pois $\varphi(t) \equiv p_k$ é a única solução de $x' = X(x)$ passando pelo ponto singular p_k .

No próximo teorema, a hipótese " $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ para $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ " é omitida. Este resultado é o Teorema 4.3 de [21], página 155.

Teorema 1.4.9 *Seja $\varphi : [0, \infty) \rightarrow U$ uma curva integral do campo X pelo ponto $p \in U$ e suponhamos que φ_p^+ esteja contida num compacto $K \subset U$. Então $\omega(\varphi_p)$ contém uma órbita periódica, podendo ser um ponto singular.*

O resultado seguinte é o Teorema 4.4 de [21], página 156.

Teorema 1.4.10 *Seja $\varphi : (\omega_-, \omega_+) \rightarrow U$ uma curva integral máxima do campo X . Se U é simplesmente conexo e $X(p) \neq 0$, para todo $p \in U$, então $\varphi(t)$ escapa de qualquer subconjunto compacto de U quando $t \rightarrow \omega_-$ (ou $t \rightarrow \omega_+$).*

1.4.3 Estabilidade assintótica

Seja $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo com $X(0) = 0$. Consideremos a equação diferencial

$$x' = X(x). \quad (1.3)$$

Dizemos que a origem é *localmente assintoticamente estável* ou que 0 é um *atrator local* de (1.3), se toda solução de (1.3) começando suficientemente próxima de 0 está definida para todo $t \geq 0$ e tende a 0 quando t tende para infinito. Mais precisamente, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\varphi(t)$ é solução de (1.3) e $|\varphi(0)| < \delta$, então $|\varphi(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$. O conjunto

$$\{p \in \mathbb{R}^n : \text{para cada solução } \varphi(t) \text{ de (1.3) com } \varphi(0) = p \text{ tenha-se } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0\},$$

é chamado de *bacia de atração*. Se este conjunto é todo o $\mathbb{R}^n$, dizemos que a origem é *globalmente assintoticamente estável* ou que 0 é um *atrator global* de (1.3).

O teorema seguinte estabelece uma condição suficiente para que a origem seja localmente assintoticamente estável.

Teorema 1.4.11 *Seja $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial diferenciável com $X(0) = 0$. Se todos os autovalores da derivada $DX(0)$ têm parte real negativa, então 0 é um atrator local da equação*

$$x' = X(x). \quad (1.4)$$

Demonstração: A diferenciabilidade de X no ponto 0 nos permite escrever, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$X(x) = DX(0)x + r(x),$$

onde $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua com $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0$.

Denotemos por A a matriz jacobiana de $DX(0)$. Como todos os autovalores de A têm parte real negativa, existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que $|e^{tA}x| \leq ke^{-\mu t}|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \geq 0$ (veja [35]). Ainda, como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{|x|} = 0$, existe $\delta > 0$ para o qual $|x| < \delta$ implica $|r(x)| < \frac{\mu}{2k}|x|$.

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (1.4) com $|\varphi(0)| < \frac{\delta}{k}$ e intervalo maximal (ω_-, ω_+) . Sabemos que

$$\varphi(t) = e^{tA}\varphi(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}r(\varphi(s))ds$$

para todo $t \in (\omega_-, \omega_+)$. Seja $\sigma = \sup\{t \in [0, \omega_+) : |\varphi(t)| < \delta\}$, então para todo $t \in [0, \sigma)$,

temos

$$|\varphi(t)| \leq \delta e^{-\mu t} + \frac{\mu}{2} \int_0^t e^{-\mu(t-s)} |\varphi(s)| ds,$$

ou seja,

$$e^{\mu t} |\varphi(t)| \leq \delta + \frac{\mu}{2} \int_0^t e^{\mu s} |\varphi(s)| ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (veja [35]), obtemos

$$e^{\mu t} |\varphi(t)| \leq \delta e^{\int_0^t \frac{\mu}{2} ds}, \quad t \in [0, \sigma].$$

Portanto, $|\varphi(t)| \leq \delta e^{-\frac{\mu}{2}t}$ para todo $t \in [0, \sigma]$. Isto mostra que $\sigma = \omega_+$, também $|\varphi(t)| \leq \delta$ para todo $t \in [0, \omega_+)$. Logo, pelo Teorema 1.4.2, $\omega_+ = \infty$, e é imediato concluir que 0 é um atrator local, a partir da desigualdade

$$|\varphi(t)| \leq \delta e^{-\frac{\mu}{2}t}, \quad t \geq 0, \quad \text{se } |\varphi(0)| < \frac{\delta}{k}.$$

■

Injetividade de aplicações diferenciáveis do plano

Neste capítulo apresentamos alguns resultados referentes à Conjectura Fraca de Markus-Yamabe bidimensional. A ferramenta utilizada na prova desses resultados é o conceito de semi-componente de Reeb introduzido por A. Fernandes, C. Gutierrez e R. Rabanal em [14].

2.1 Semi-componentes de Reeb

Nesta seção introduzimos o conceito de semi-componente de Reeb. Para tanto, necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Definição 2.1.1 *Sejam $a > 0$ e $\gamma, \sigma : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas contínuas e injetivas tais que $\gamma(0) = \sigma(0)$. Dizemos que $\gamma([-a, a])$ é transversal (resp. tangente) a $\sigma([-a, a])$ no ponto $\gamma(0) = \sigma(0)$ se existem $\epsilon > 0$, vizinhanças V de $\gamma(0)$ e U de $(0, 0)$, em $\mathbb{R}^2$, e um homeomorfismo $H : V \rightarrow U$ tais que, para $|t| < \epsilon$, $H(\sigma(t)) = (t, 0)$ e $H(\gamma(t)) = (t, t)$ (resp. $H(\gamma(t)) = (t, \phi(t))$, onde $\phi(t) \geq 0$ e $\phi(0) = 0$). Se $\gamma([-a, a])$ é tangente a $\sigma([-a, a])$ no ponto $\gamma(0) = \sigma(0)$ e H e ϕ (como acima) podem ser tomados de modo que $\phi(t) = |t|$, dizemos que $\gamma([-a, a])$ tem uma tangência genérica com $\sigma([-a, a])$ no ponto $\gamma(0) = \sigma(0)$.*

Esta definição é ilustrada na Figura 2.1.

Figura 2.1:

Observemos que se as curvas γ e σ são também diferenciáveis e os vetores $\gamma'(0)$ e $\sigma'(0)$ são linearmente independentes, então $\gamma([-a, a])$ é transversal a $\sigma([-a, a])$ no ponto $\gamma(0) = \sigma(0)$.

Exemplo 2.1.2 Sejam $\gamma, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $\gamma(t) = (t, t^3)$ e $\sigma(t) = (t, 0)$. Um cálculo direto, a partir da definição, mostra que $\gamma(\mathbb{R})$ é transversal a $\sigma(\mathbb{R})$ no ponto $(0, 0)$, embora os vetores $\gamma'(0)$ e $\sigma'(0)$ não sejam linearmente independentes.

Definição 2.1.3 Para cada aplicação diferenciável $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos o seu espectro como o conjunto de todos os autovalores da derivada $DF(p)$ quando $p \in U$. Este conjunto será denotado por $\text{Spec}(F)$.

O teorema seguinte, devido a A. V. Černavskii [8], [9] (veja também [5], [32] e [37]), é uma versão do Teorema da Aplicação Inversa, na qual a aplicação é suposta apenas diferenciável e sem pontos críticos.

Teorema 2.1.4 Sejam U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Então F é um homeomorfismo local diferenciável com inversa diferenciável, isto é, F é um difeomorfismo local.

Corolário 2.1.5 Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Então as componentes conexas das curvas de nível de f (resp. g), $f^{-1}(c)$ (resp. $g^{-1}(c)$), $c \in \mathbb{R}$, definem as folhas de uma folheação $\mathcal{F}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(g)$) de classe C^0 e dimensão um em $\mathbb{R}^2$.

Observemos que as folhas de $\mathcal{F}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(g)$) são subvariedades diferenciáveis de $\mathbb{R}^2$.

Sejam L uma folha de $\mathcal{F}(f)$ e $p, q \in L$. Denotemos por $[p, q]_f$ (resp. $(p, q)_f$) o arco fechado (resp. aberto) de L conectando os pontos p e q .

Corolário 2.1.6 *Sejam F como no Corolário 2.1.5, $L \subset f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, uma folha de $\mathcal{F}(f)$ e $p, q \in L$ com $p \neq q$. Então existem $\epsilon > 0$ e um conjunto fechado $B \subset \mathbb{R}^2$ contendo $[p, q]_f$ tais que $F|_B : B \rightarrow [c - \epsilon, c + \epsilon] \times [g(p), g(q)]$ é um difeomorfismo. Dizemos neste caso que B é uma caixa de fluxo de $\mathcal{F}(f)$ contendo $[p, q]_f$.*

Demonstração: Segue do Teorema 2.1.4 que, para cada $x \in [p, q]_f$, existem $\epsilon_x > 0$ e uma vizinhança aberta V_x de x em $\mathbb{R}^2$ tais que $F|_{V_x} : V_x \rightarrow (c - \epsilon_x, c + \epsilon_x) \times (g(x) - \epsilon_x, g(x) + \epsilon_x)$ é um difeomorfismo. Como $(V_x)_{x \in [p, q]_f}$ é uma cobertura aberta de $[p, q]_f$ e sendo $[p, q]_f$ um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, temos que esta cobertura admite uma subcobertura finita, $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}\}$. Reordenando os x_{i_j} e diminuindo os $V_{x_{i_j}}$, se necessário, podemos supor que V_{x_i} intercepta apenas $V_{x_{i-1}}$ e $V_{x_{i+1}}$.

Sejam $\epsilon < \min\{\epsilon_{x_i}, i = 1, 2, \dots, n\}$ e $D = [c - \epsilon, c + \epsilon] \times [g(p), g(q)]$. Tomemos $B = F^{-1}(D) \cap (\bigcup_{i=1}^n V_{x_i})$. Observemos que $[p, q]_f \subset B$. Definimos $h : D \rightarrow B$ por $h(x) = (F|_{V_{x_i}})^{-1}(x)$ se $x \in D \cap F(V_{x_i})$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Notemos que h está bem definida e é a inversa de $F|_B : B \rightarrow D$. Isso conclui a demonstração do corolário. ■

Observações 2.1.7

1. Se L é uma folha de $\mathcal{F}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(g)$), então $g|_L$ (resp. $f|_L$) é estritamente monótona. Em particular, $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais, no seguinte sentido, cada folha de $\mathcal{F}(f)$ é transversal a todas as folhas de $\mathcal{F}(g)$ que a intercepta.
2. A aplicação f (resp. g) é estritamente monótona em segmentos compactos e conexos transversais a folheação $\mathcal{F}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(g)$).
3. As folhas de $\mathcal{F}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(g)$) são difeomorfas a $\mathbb{R}$ e se acumulam no infinito.

Definição 2.1.8 *A orientação de $\mathcal{F}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(g)$) é definida de modo que se L é uma folha orientada de $\mathcal{F}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(g)$), então $g|_L$ (resp. $f|_L$) é crescente em conformidade com a orientação de L .*

O termo trajetória da teoria clássica dos campos de vetores será usada sem maiores comentários para as folhas de $\mathcal{F}(f)$ e de $\mathcal{F}(g)$.

A definição a seguir é fundamental ao nosso estudo. Seja $h_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_0(x, y) = xy$ e consideremos o conjunto

$$\mathfrak{B} = \{(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2] : 0 < x + y \leq 2\}.$$

Definição 2.1.9 *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Dado $h \in \{f, g\}$, dizemos que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ é uma semi-componente de Reeb para $\mathcal{F}(h)$ (ou simplesmente uma scR para $\mathcal{F}(h)$) se existe um homeomorfismo $H : \mathfrak{B} \rightarrow \mathcal{A}$ o qual é uma equivalência topológica entre $\mathcal{F}(h_0)|_{\mathfrak{B}}$ e $\mathcal{F}(h)|_{\mathcal{A}}$ e tal que*

- (1) o segmento $H(\{(x, y) \in \mathfrak{B} : x + y = 2\})$ é transversal a folheação $\mathcal{F}(h)$ exceto no ponto $H(1, 1)$. Este segmento é chamado de eixo compacto de $\mathcal{A}$;
- (2) os segmentos $H(\{(x, y) \in \mathfrak{B} : x = 0\})$ e $H(\{(x, y) \in \mathfrak{B} : y = 0\})$ são semi-trajetórias completas de $\mathcal{F}(h)$. Estas duas semi-trajetórias são chamadas de eixos não-compactos de $\mathcal{A}$.

Figura 2.2: Uma semi-componente de Reeb.

Seja $\mathcal{A}$ uma semi-componente de Reeb de $\mathcal{F}(f)$. Segue da definição de $\mathcal{A}$ que $f|_{\mathcal{A}}$ é limitada. Como $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais, temos que todas as folhas de $\mathcal{F}(g)|_{\mathcal{A}}$ interceptam o eixo compacto de $\mathcal{A}$. Isto mostra que $g|_{\mathcal{A}}$ também é limitada.

2.2 Relação entre semi-componentes de Reeb e injetividade

Nesta seção, $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ será uma aplicação diferenciável sem pontos críticos.

Sejam $p, q \in \mathbb{R}^2$. No que segue, denotaremos por $[p, q]$ um segmento não necessariamente orientado conectando p e q . Se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva e $p, q \in \gamma([a, b])$, $[p, q]_{\gamma}$ (resp. $(p, q)_{\gamma}$) denotará o subintervalo fechado (resp. aberto) de $\gamma([a, b])$ com extremos p e q . As notações $[p, q]_f$ (resp. $[p, q]_g$) e $(p, q)_f$ (resp. $(p, q)_g$) referirão a arcos de trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ (resp. $\mathcal{F}(g)$).

Definição 2.2.1 *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um mergulho suave e denotamos $C = \gamma([0, 1])$. Dizemos que $\mathcal{F}(f)$ está em posição geral com C se existe um subconjunto G de C finito tal que*

- (1) $\mathcal{F}(f)$ é transversal a $C \setminus G$;
- (2) $\mathcal{F}(f)$ tem uma tangência genérica com C em cada ponto de G ;
- (3) uma trajetória de $\mathcal{F}(f)$ pode interceptar tangencialmente C no máximo em um ponto.

Lema 2.2.2 *Suponhamos que $\mathcal{F}(f)$ esteja em posição geral com $C = \gamma([0, 1])$, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um mergulho suave. Suponhamos também que uma trajetória α de $\mathcal{F}(f)$ intercepta C tangencialmente num ponto p e transversalmente em algum outro ponto de C . Então a trajetória α contém um arco $[r, p]_f$ que intercepta C exatamente em $\{r, p\}$ (fazendo isto transversalmente em r) e as seguintes afirmações são satisfeitas:*

- (i) se $D(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2$ denota o disco compacto limitado por $\Gamma = [r, p]_\gamma \cup [r, p]_f$, então os pontos de $\alpha \setminus [r, p]_f$ próximos de p não pertencem a $D(\Gamma)$;
- (ii) sejam $\tilde{r}$ e $\tilde{p}$ pertencentes a C satisfazendo $[r, p]_\gamma \subset (r, p)_\gamma$. Se r e $\tilde{p}$ estão suficientemente próximos de r e p , respectivamente, então podemos deformar C em $C_1 = \beta([0, 1])$, $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mergulho suave, de tal forma que esta deformação fixa $C \setminus (\tilde{r}, \tilde{p})_\gamma$ e leva $[\tilde{r}, \tilde{p}]_\gamma$ em um subintervalo $[\tilde{r}, \tilde{p}]_\beta$ de C_1 que está próximo de $[r, p]_f \subset \alpha$. Além disso, $\mathcal{F}(f)$ está em posição geral com C_1 e o número de pontos de tangências de $\mathcal{F}(f)$ com C_1 é menor que o de $\mathcal{F}(f)$ com C .

Demonstração: Claramente, α contém um arco de trajetória $[r, p]_f$ que intercepta C exatamente em $\{r, p\}$. Como $\mathcal{F}(f)$ está em posição geral com C , α intercepta C transversalmente em r . Seja $D(\Gamma) \subset \mathbb{R}^2$ o disco compacto limitado por $\Gamma = [r, p]_\gamma \cup [r, p]_f$. Se $[r, p]_f$ não satisfaz (i), então os pontos de $\alpha \setminus [r, p]_f$ próximos de p pertencem a $D(\Gamma)$. Daí, como $\mathcal{F}(f)$ é uma folheação de $\mathbb{R}^2$, existe um intervalo fechado $[p, q]_f \subset \alpha \cap D(\Gamma)$ (veja Figura 2.3) tal que

- (a₁) a união Γ_1 dos intervalos fechados $[q, p]_\gamma \subset [r, p]_\gamma$ e $[p, q]_f$ limita um disco compacto $D(\Gamma_1)$ contido em $\mathbb{R}^2 \cap D(\Gamma)$;
- (a₂) $[p, q]_f$ intercepta C exatamente em $\{p, q\}$, fazendo isto transversalmente em q (com uma tangência em p); também, os pontos de $\alpha \setminus [p, q]_f$ próximos de p não pertencem a $D(\Gamma_1)$.

Logo, $[r, p]_f$ ou $[p, q]_f$ satisfaz (i). Denotemos, então, o arco de trajetória de α satisfazendo (i) por $[r, p]_f$. Afirmamos que (i) implica (ii). Com efeito, escolhemos uma pequena caixa de fluxo B de $\mathcal{F}(f)$ cujo interior contém $[r, p]_f$. Por hipóteses, podemos supor que $\bar{r}, \bar{p} \in B \cap C$. Observemos que existem um intervalo fechado $[\bar{r}, \bar{p}] \subset B$ transversal a $\mathcal{F}(f)$ (representado por uma linha pontilhada com extremos $\bar{r}$ e $\bar{p}$ na Figura 2.4) e um mergulho suave $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tais que $C_1 = (C \setminus [\bar{r}, \bar{p}]_\gamma) \cup [\bar{r}, \bar{p}] = \beta([0, 1])$. Além disso, o número de pontos de tangências de $\mathcal{F}(f)$ com C_1 é menor que o de $\mathcal{F}(f)$ com C . O restante das conclusões de (ii) seguem imediatamente da construção de C_1 . Portanto, (i) implica (ii) e o lema está demonstrado. ■

Figura 2.3:

Figura 2.4:

A relação entre semi-componentes de Reeb e injetividade é dada pelo seguinte resultado:

Proposição 2.2.3 *Seja $F := (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Se F é não injetiva, então $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ possuem semi-componentes de Reeb.*

Demonstração: Sendo F não injetiva, existem $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ com $p_1 \neq p_2$ tais que $F(p_1) = F(p_2)$. Para $i = 1, 2$, seja α_i a trajetória de $\mathcal{F}(f)$ passando por p_i . Como $g|_{\alpha_i}$ é estritamente monótona e $g(p_1) = g(p_2)$, segue que $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset$.

Seja $\Omega(p_1, p_2)$ o conjunto dos arcos compactos $C = \gamma([0, 1])$ que interceptam transversalmente $\mathcal{F}(f)$ em $\{p_1, p_2\}$, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um mergulho suave com $\gamma(0) = p_1$ e $\gamma(1) = p_2$. Utilizando o Teorema 2.1.4 e o Lema 2.2.2 é fácil ver que existe $\Sigma \in \Omega(p_1, p_2)$ satisfazendo:

- (a₁) $\mathcal{F}(f)$ está em posição geral com Σ ;
- (a₂) $\Sigma \cap \alpha_i = p_i$, $i = 1, 2$;
- (a₃) Σ minimiza o número de pontos de tangências com $\mathcal{F}(f)$.

Desde que $f(p_1) = f(p_2)$, o item 2 da Observação 2.1.7 garante a existência de $q \in \Sigma \setminus \{p_1, p_2\}$, uma tangência genérica de $\mathcal{F}(f)$ com o arco compacto Σ . Portanto, observando as trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ ao redor de q , podemos ver que existem subintervalos fechados $[p, q]$, $[q, r]$ de Σ com $[p, q] \cap [q, r] = \{q\}$, e um homeomorfismo $T : [p, q] \rightarrow [q, r]$ tal que

(b₁) $T(p) = r$, $T(q) = q$ e, para todo $x \in (p, q]$, existe um arco de trajetória $[x, T(x)]_f$ de $\mathcal{F}(f)$, começando em x , terminando em $T(x)$ e interceptando Σ exatamente e transversalmente em $\{x, T(x)\}$;

(b₂) a família $\{[x, T(x)]_f : x \in (p, q]\}$ depende continuamente de x e tende a $\{q\}$ quando x tende a q .

Suponhamos agora que

(c) $[p, q]$ seja o subintervalo maximal de Σ satisfazendo as propriedades (b₁) e (b₂).

Como $g(p_1) = g(p_2)$, $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais e g restrita às folhas de $\mathcal{F}(f)$ é estritamente monótona, segue que $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \emptyset$. Afirmamos que

(d) não existe arco de trajetória $[p, T(p)]_f$ de $\mathcal{F}(f)$ conectando p e $T(p)$ tal que a família $\{[x, T(x)]_f : x \in (p, q]\}$ aproxima continuamente de $[p, T(p)]_f$ quando x tende a p .

De fato, suponhamos que (d) é falsa. Por (c) e pelo fato de que trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ podem interceptar tangencialmente Σ no máximo em um ponto, então ou $[p, T(p)]_f$ é tangente a Σ em p ou $[p, T(p)]_f$ é tangente a Σ em $T(p)$ ou existe $s \in \Sigma \setminus \{p, T(p)\}$ tal que $[p, T(p)]_f$ é tangente a Σ em s . Em todos os casos, usando o Lema 2.2.2, obtemos um novo arco compacto $\Sigma_1 \in \Omega(p_1, p_2)$ tal que o número de pontos de tangências de $\mathcal{F}(f)$ com Σ_1 é menor que o de $\mathcal{F}(f)$ com Σ . Esta contradição com (a₃) prova (d). Portanto, o subintervalo fechado $[p, T(p)]$ de Σ é o eixo compacto de uma semi-componente de Reeb de $\mathcal{F}(f)$ constituída de duas semi-trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ começando em p e $T(p)$, respectivamente, junto com a união dos arcos $[x, T(x)]_f$, $x \in (p, q]$. Logo, $\mathcal{F}(f)$ tem pelo menos uma semi-componente de Reeb. Analogamente mostramos que $\mathcal{F}(g)$ tem pelo menos uma semi-componente de Reeb. Isso conclui a demonstração da proposição. ■

O exemplo a seguir mostra que a recíproca da proposição anterior é verdadeira para aplicações polinomiais.

Exemplo 2.2.4 Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial preservando orientação. Se F é injetiva, segue, do principal resultado de [4], que F é um difeomorfismo.

Portanto, $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ não têm semi-componentes de Reeb. De fato, se $\mathcal{F}(f)$ tiver uma semi-componente de Reeb, digamos $\mathcal{A}$, então $F(\mathcal{A})$ será um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. Isto não é possível, pois $\mathcal{A}$ é ilimitado e F é um difeomorfismo. Analogamente mostramos que $\mathcal{F}(g)$ não tem semi-componentes de Reeb.

Dado $\theta \in \mathbb{R}$, denotemos por R_θ a rotação linear

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

No que segue, $F_\theta = R_\theta \circ F \circ R_{-\theta} = (f_\theta, g_\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Observação 2.2.5 Observemos que F_θ é injetiva se, e somente se, F é injetiva. Além disso, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, $\text{Spec}(F_\theta) = \text{Spec}(F)$, isto segue imediatamente da igualdade

$$DF_\theta(x, y) = R_\theta \circ DF(R_{-\theta}(x, y)) \circ R_{-\theta}.$$

Proposição 2.2.6 *Sejam $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável não injetiva tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$ e $\mathcal{A}$ uma scR de $\mathcal{F}(f)$. Se $\Pi(\mathcal{A})$ é limitado, onde $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção ortogonal sobre a primeira coordenada, então existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\theta \in (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)$, $\mathcal{F}(f_\theta)$ tem uma scR $\mathcal{A}_\theta$ com o intervalo $\Pi(\mathcal{A}_\theta)$ ilimitado.*

A prova desta proposição, precisa do seguinte lema.

Lema 2.2.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma semi-componente de Reeb de $\mathcal{F}(f)$. Então existe uma semi-componente de Reeb $\mathcal{D}$ de $\mathcal{F}(f)$ a qual coincide com $\mathcal{A}$ fora de um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ e o seu eixo compacto, próximo dos extremos, é constituído de arcos de trajetórias de $\mathcal{F}(g)$.*

Demonstração: Se próximo de seus extremos o eixo compacto de $\mathcal{A}$ é constituído de arcos de trajetórias de $\mathcal{F}(g)$, não há o que demonstrar. Podemos então supor que isto não ocorra.

Sejam $p_1, p_2 \in \mathcal{A}$ os pontos extremos do eixo compacto de $\mathcal{A}$. Para $i = 1, 2$, denotemos por β_i a trajetória de $\mathcal{F}(g)$ passando por p_i . Usando a definição de $\mathcal{A}$ e o fato de que $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais, garantimos a existência de um arco de trajetória $[q_1, q_2]_f$ de $\mathcal{F}(f)$ com extremos $q_1 \in \beta_1$ e $q_2 \in \beta_2$ e tal que $[q_1, q_2]_f \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Notemos que $g(q_1) \neq g(q_2)$.

Uma vez que $f([q_1, q_2]_f) = c \in \mathbb{R}$, pelo Corolário 2.1.6, existem $\epsilon > 0$ e um conjunto fechado $B \subset \mathbb{R}^2$ contendo $[q_1, q_2]_f$ tais que $F|_B : B \rightarrow [c - \epsilon, c + \epsilon] \times [g(q_1), g(q_2)]$ é um difeomorfismo.

Seja $d = \frac{|g(q_1) - g(q_2)|}{2} > 0$. Consideremos os conjuntos

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - g(q_1) = \frac{(d - g(q_1))}{\epsilon}(x - c)\}$$

e

$$\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - g(q_2) = \frac{(d - g(q_2))}{\epsilon}(x - c)\}.$$

Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Observemos que $(F|_B)^{-1}(\Omega)$ é transversal a folheação $\mathcal{F}(f)$ exceto no ponto $(F|_B)^{-1}(c + \epsilon, d)$. Com isso, é fácil ver que existe uma semi-componente de Reeb $\mathcal{D}$ de $\mathcal{F}(f)$ cujo eixo compacto é o segmento $[p_1, q_1]_g \cup (F|_B)^{-1}(\Omega) \cup [q_2, p_2]_g$ e coincide com $\mathcal{A}$ fora de um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$. O lema está demonstrado. ■

Demonstração da Proposição 2.2.6: Mostremos inicialmente que

- (a) se $\theta \neq \frac{m\pi}{2}$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, então $\mathcal{F}(f_\theta)$ e $\mathcal{F}(g_\theta)$ são ambos transversais a $R_\theta(\mathcal{F}(f))$ e $R_\theta(\mathcal{F}(g))$.

Com efeito, provaremos somente o caso em que $\mathcal{F}(f_\theta)$ é transversal a $R_\theta(\mathcal{F}(f))$, já que os outros casos seguem de forma análoga a este. Seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva contínua e injetiva tal que $\alpha([0, 1])$ é um arco de trajetória de $\mathcal{F}(f)$. É fácil ver que, para todo $t \in [0, 1]$,

$$f_\theta(R_\theta(\alpha(t))) = (\cos\theta)f(\alpha(t)) - (\sin\theta)g(\alpha(t)). \quad (2.1)$$

Como $\sin\theta \neq 0$, $g \circ \alpha$ é estritamente monótona e, para todo $t \in [0, 1]$, $f(\alpha(t)) = c \in \mathbb{R}$, segue de (2.1) que $f_\theta \circ R_\theta \circ \alpha$ é estritamente monótona. Isto mostra que $\mathcal{F}(f_\theta)$ é transversal a $R_\theta(\mathcal{F}(f))$.

Pelo Lema 2.2.7 podemos assumir que, próximo de seus extremos, o eixo compacto de $\mathcal{A}$ é constituído de arcos de trajetórias de $\mathcal{F}(g)$. Deste modo, existem $0 < a < \frac{1}{2}$ e uma curva contínua e injetiva $\gamma : (-a, 1 + a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo:

- (b₁) $\gamma([0, 1])$ é o eixo compacto de $\mathcal{A}$;
 (b₂) $\gamma((-a, a))$ e $\gamma((1 - a, 1 + a))$ são arcos de trajetórias limitados de $\mathcal{F}(g)$.

Afirmamos que,

- (b₃) para algum $0 < \delta < a$, existe uma função contínua e estritamente decrescente $\varphi_0 : [-\delta, \delta] \rightarrow (1 - a, 1 + a)$ com $\varphi_0(0) = 1$ e $f(\gamma(s)) = f(\gamma(\varphi_0(s)))$; também, se $s \in (0, \delta)$, então existe um arco de trajetória $T_0(s) \subset \mathcal{A}$ de $\mathcal{F}(f)$ conectando $\gamma(s)$ com $\gamma(\varphi_0(s))$ (veja Figura 2.5).

De fato, sejam $\eta_1 : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\eta_2 : (1-a, 1+a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $\eta_1(s) = F(\gamma(s))$, $s \in (-a, a)$, e $\eta_2(s) = F(\gamma(s))$, $s \in (1-a, 1+a)$. Uma vez que $g(\gamma(s)) = c_1 \in \mathbb{R}$, para todo $s \in (-a, a)$, e $g(\gamma(s)) = c_2 \in \mathbb{R}$, para todo $s \in (1-a, 1+a)$, temos que η_1 e η_2 são homeomorfismos sobre $\eta_1((-a, a))$ e $\eta_2((1-a, 1+a))$ respectivamente.

Consideremos a aplicação contínua $\bar{\Pi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\bar{\Pi}(x, y) = (x, c_2)$, onde c_2 é definido acima. Desde que $f(\gamma(0)) = f(\gamma(1))$, existe $0 < \delta < a$ tal que se $s \in [-\delta, \delta]$, então $\bar{\Pi}(\eta_1(s)) \subset \eta_2((1-a, 1+a))$. Com isso, definimos $\varphi_0 : [-\delta, \delta] \rightarrow (1-a, 1+a)$ por $\varphi_0(s) = \eta_2^{-1}(\bar{\Pi}(\eta_1(s)))$. Notemos que φ_0 é uma função contínua, injetiva e, para todo $s \in [-\delta, \delta]$, $\eta_2(\varphi_0(s)) = \bar{\Pi}(\eta_1(s))$, isto é, $f(\gamma(\varphi_0(s))) = f(\gamma(s))$. Logo, pela definição de $\mathcal{A}$, φ_0 é estritamente decrescente, $\varphi_0(0) = 1$ e, para todo $s \in (0, \delta)$, existe um arco de trajetória $T_0(s) \subset \mathcal{A}$ de $\mathcal{F}(f)$ conectando $\gamma(s)$ com $\gamma(\varphi_0(s))$. E nossa afirmação está demonstrada.

Figura 2.5:

Seja $\theta \in \mathbb{R}$ como no item (a). É fácil ver que existe uma família de arcos de trajetórias de $\mathcal{F}(f_\theta)$ começando e terminando em pontos de $R_\theta(\gamma((-a, 1+a)))$ e próxima de $R_\theta(\mathcal{A})$. Assim, de maneira semelhante a (b₁) – (b₃), temos que se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno então, para cada $|\theta| < \epsilon$, existem $\sigma_\theta \in [-\delta, \frac{\delta}{2}]$ e uma função contínua e estritamente decrescente $\varphi_\theta : [-\delta, \delta] \rightarrow (1-a, 1+a)$ satisfazendo:

$$(c_1) \quad f_\theta(R_\theta(\gamma(s))) = f_\theta(R_\theta(\gamma(\varphi_\theta(s)))), \quad s \in [-\delta, \delta];$$

$$(c_2) \quad \text{para todo } s \in (\sigma_\theta, \frac{\delta}{2}], \text{ existe um arco de trajetória } T_\theta(s) \text{ de } \mathcal{F}(f_\theta) \text{ que intercepta } R_\theta(\gamma([- \delta, 1+a])) \text{ exatamente e transversalmente em seus extremos: } R_\theta(\gamma(s)) \text{ e } R_\theta(\gamma(\varphi_\theta(s)));$$

$$(c_3) \quad \sigma_\theta \text{ é o ínfimo do conjunto dos } \sigma \in [-\delta, \frac{\delta}{2}] \text{ tais que os arcos da família } \{T_\theta(s) : \sigma < s \leq \frac{\delta}{2}\} \text{ estão bem definidos e dependem continuamente de } s;$$

$$(c_4) \quad T_0(\frac{\delta}{2}) \subset R_0(\mathcal{A}) \text{ e } \varphi_0(-\delta) > 1.$$

A família $\{T_\theta(s) : \sigma_\theta < s \leq \frac{\delta}{2}\}$ não pode ser continuamente estendida a $s = -\delta$. Suponhamos que isto não ocorra. Como $\varphi_\theta(-\delta) > 1$ e pela definição de $R_\theta(\mathcal{A})$, segue que existem uma trajetória $\alpha \subset \mathcal{A}$ de $\mathcal{F}(f)|_{\mathcal{A}}$ e $p_1, p_2 \in R_\theta(\alpha) \cap T_\theta(-\delta)$. Sendo $f_\theta(p_1) = f_\theta(p_2)$ e $R_\theta(\alpha)$ um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, concluímos que $\mathcal{F}(f_\theta)$ é tangente a $R_\theta(\alpha)$ em um ponto $p \in R_\theta(\alpha)$, mas isto contradiz (a).

Portanto, o conjunto $\overline{\bigcup_{\sigma_\theta < s < \frac{\delta}{2}} T_\theta(s)}$ contém uma semi-componente de Reeb $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}(f_\theta)$. Também não é difícil ver que um dos eixos não compactos de $\mathcal{B}$ está contido em $R_\theta(\mathcal{A})$. Isto implica que $\Pi(\mathcal{B})$ é um intervalo de comprimento infinito. A demonstração da proposição está concluída. ■

2.3 Sobre a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe bidimensional

Nesta seção demonstramos um resultado mais forte que uma resposta positiva à Conjectura Fraca de Markus-Yamabe bidimensional, o qual afirma que se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável tal que, para algum $\epsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap [0, \epsilon) = \emptyset$, então F é injetiva. Para tanto, necessitamos de alguns resultados auxiliares.

Sob a hipótese de F ser de classe C^1 , o teorema a seguir foi demonstrado por M. Cobo, C. Gutierrez e J. Llibre em [12].

Teorema 2.3.1 *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Se para algum $\epsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap (-\epsilon, \epsilon) = \emptyset$, então F é injetiva.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que F não seja injetiva. Pela Proposição 2.2.3, $\mathcal{F}(f)$ tem uma semi-componente de Reeb $\mathcal{A}$. Seja $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção ortogonal sobre a primeira coordenada. Fazendo uso da Observação 2.2.5 e da Proposição 2.2.6, se necessário, podemos assumir que $\Pi(\mathcal{A})$ é um intervalo ilimitado. Para fixar as idéias, suponhamos que $[b, \infty) \subset \Pi(\mathcal{A})$. Então, se $a > b$ é suficientemente grande,

- (a) para qualquer $x \geq a$, a reta vertical $\Pi^{-1}(x)$ intercepta exatamente uma trajetória $\alpha_x \subset \mathcal{A}$ de $\mathcal{F}(f)|_{\mathcal{A}}$ tal que $\Pi(\alpha_x) \cap (x, \infty) = \emptyset$. Em outras palavras, x é o máximo da restrição $\Pi|_{\alpha_x}$.

Desde que α_x é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, então

- (b) se $x \geq a$, $\alpha_x \cap \Pi^{-1}(x)$ é um subconjunto compacto de $\mathcal{A}$.

Seja $H : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \sup\{y : (x, y) \in \alpha_x \cap \Pi^{-1}(x)\}.$$

Notemos que H restrita a qualquer subintervalo limitado de (a, ∞) é limitada. Utilizando o Teorema 2.1.6 e a definição de $\mathcal{A}$, obtemos que a função

(c) $\varphi : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x, H(x))$ é contínua e estritamente monótona.

Assim, pelo Teorema 1.2.3, φ é diferenciável em quase todo ponto de (a, ∞) .

Afirmamos que

(d) H é uma função mensurável.

De fato, pela Proposição 1.2.1, basta mostrar que H é semi-contínua superiormente em (a, ∞) . Suponhamos, por contradição, que H não seja semi-contínua superiormente em $x_0 > a$. Então existem $r \in \mathbb{R}$ e uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $(a, x_0 + 1)$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $H(x_n) > r$ e $H(x_0) < r$. Como H restrita a $(a, x_0 + 1)$ é limitada, existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} H(x_{n_k}) = s \in \mathbb{R}$. Observemos que $s \geq r$. Da continuidade de f e φ temos que

$$f(x_0, s) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}, H(x_{n_k})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x_{n_k}) = \varphi(x_0) = f(x_0, H(x_0)).$$

Daí, $(x_0, s) \in \alpha_{x_0} \cap \Pi^{-1}(x_0)$ com $H(x_0) < s$. Esta contradição com a definição de $H(x_0)$ prova (d).

Para prosseguir com a demonstração do teorema, vamos considerar o caso em que φ é estritamente crescente, pois o caso em que φ é estritamente decrescente é análogo. Como $(x, H(x)) \in \mathcal{A}$ para todo $x \in (a, \infty)$ e $f|_{\mathcal{A}}$ é limitada, segue que φ é uma função limitada. Seja $K > 0$ tal que, para todo $x > a$, $\varphi(a^+) < \varphi(x) < K$. Tomemos $\epsilon > a$ satisfazendo $(\epsilon - a)\epsilon > K - \varphi(a^+)$. Pela Proposição 1.2.8 e por (c), existe um conjunto $M \subset (a, \epsilon]$ com $m((a, \epsilon] \setminus M) = 0$ e tal que

(e) se $x \in M$, então φ é diferenciável em x e

$$\liminf_{h \rightarrow 0} \frac{|H(x+h) - H(x)|}{|h|} < \infty.$$

Afirmamos que

(f) se $x \in M$, então $\varphi'(x) = f_x(x, H(x)) \geq \epsilon$.

De fato, se $x \in M$, então existe uma seqüência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais com $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{h_n} = \sigma \in \mathbb{R}$, onde $k_n = H(x + h_n) - H(x)$. Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0$.

Pela estrutura das curvas de nível de $f|_{\mathcal{A}}$ e a suposição de que φ é estritamente crescente, temos que

$$f(x, H(x)) = \inf \{f(x, y) : (x, y) \in \Pi^{-1}(x) \cap \mathcal{A}\}.$$

Isto implica que $f_y(x, H(x)) = 0$. Desde que f é diferenciável em $(x, H(x))$, existem funções a valores reais ϵ_1, ϵ_2 definidas em uma vizinhança do ponto $(0, 0)$ tal que

$$f(x + h_n, H(x) + k_n) = f(x, H(x)) + f_x(x, H(x))h_n + \epsilon_1(h_n, k_n)h_n + \epsilon_2(h_n, k_n)k_n$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_1(h_n, k_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_2(h_n, k_n) = 0$. Daí,

$$\frac{\varphi(x + h_n) - \varphi(x)}{h_n} = f_x(x, H(x)) + \epsilon_1(h_n, k_n) + \epsilon_2(h_n, k_n)\frac{k_n}{h_n}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que

$$\varphi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x + h_n) - \varphi(x)}{h_n} = f_x(x, H(x)).$$

Como

$$DF(x, H(x)) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ g_x(x, H(x)) & g_y(x, H(x)) \end{pmatrix},$$

segue que $\varphi'(x)$ é um autovalor de $DF(x, H(x))$. Isto e a hipótese feita sobre o $\text{Spec}(F)$ implicam que $\varphi'(x) \geq \epsilon$, demonstrando (f).

Segue do Teorema 1.2.3 e de (f) que

$$K - \varphi(a^+) < (c - a)\epsilon = \int_a^c \epsilon dx \leq \int_a^c \varphi'(x) dx \leq \varphi(c) - \varphi(a^+) < K - \varphi(a^+).$$

Esta contradição prova o teorema. ■

Observemos que o Teorema 2.3.1 prova a Conjectura de Chamberland bidimensional no caso em que F é apenas diferenciável.

Os exemplos seguintes mostram que se a hipótese do Teorema 2.3.1 for enfraquecida para $0 \notin \text{Spec}(F)$ a sua conclusão, ainda que para uma aplicação polinomial, não é verdadeira.

Exemplo 2.3.2 Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = (\sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} \cos(ye^{-x}), \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}} \sin(ye^{-x})).$$

Para todo $k \in \mathbb{Z}$ temos que $F(0, y + 2k\pi) = F(0, y)$, o que implica que F não é injetiva. Além disso, $\det(DF(x, y)) = 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, logo $0 \notin \text{Spec}(F)$.

O próximo exemplo foi construído por S. Pinchuck em [30].

Exemplo 2.3.3 (A aplicação polinomial de Pinchuk) A aplicação polinomial de Pinchuk $P = (p, q) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é definida, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pelas equações:

$$\begin{aligned} t &:= xy - 1, \\ h &:= t(xt + 1) \\ f &:= [(h + 1)(xt + 1)^2]/x \\ Q &:= -t^2 - 6th(h + 1) \\ u &:= 170fh + 91h^2 + 195fh^2 + 69h^3 + 75h^3f + (75/4)h^4 \\ p(x, y) &:= f + h \\ q(x, y) &:= Q - u. \end{aligned}$$

A aplicação de Pinchuk satisfaz $\det(DP(x, y)) = [t^2 + (t + (13 + 15h)f)^2 + f^2] > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, mas não é nem injetiva e nem sobrejetiva. De fato, $P(1, 0) = (0, -1) = P(-1, -2)$ e $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{dois pontos}\}$.

Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, definimos $F_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$F_t(x) = F(x) - tx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Observação 2.3.4 Sejam $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Uma vez que $D(F_t)(x) = DF(x) - tI$, temos que λ é um autovalor de $DF(x)$ se e, somente se, $\lambda - t$ é um autovalor de $D(F_t)(x)$.

Lema 2.3.5 *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Suponhamos que exista uma sequência $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de números reais convergindo para 0 tal que, para cada $m \in \mathbb{N}$, F_{t_m} seja injetiva. Então F é injetiva.*

Demonstração: Suponhamos que a conclusão do lema não seja verdadeira. Então existem $x_1 \neq x_2$ tais que $F(x_1) = y = F(x_2)$. Pelo Teorema 2.1.4, encontramos vizinhanças abertas e conexas U_1 , U_2 e V de x_1 , x_2 e y , respectivamente, tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ e, para $i = 1, 2$, $F|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

Afirmamos que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_{t_{m_0}}(U_1) \cap F_{t_{m_0}}(U_2)$ contém uma vizinhança compacta e conexa W de y . Supondo que nossa afirmação seja válida, concluímos que $F_{t_{m_0}}$ não é injetiva. Esta contradição prova o lema. Portanto, basta mostrar que nossa afirmação é verdadeira.

Sejam $K \subset U_1$ uma vizinhança compacta de x_1 , $\epsilon > 0$ como na Proposição 1.3.7 e $M > 0$ tal que, para todo $x \in K$, $|x| < M$. Como $|F(x) - F_m(x)| < M|t_m|$, $x \in K$, e $t_m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$, temos que existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|F(x) - F_m(x)| < \epsilon$, para todo

$x \in K$ e $m \geq m_1$. Assim, aplicando o Teorema 1.3.7 à $F_{t_{m_1}}$, obtemos uma vizinhança compacta e conexa W_1 de y satisfazendo $W_1 \subset F_{t_{m_1}}(U_1)$.

Analogamente mostramos que existem $m_2 > 0$ e uma vizinhança compacta e conexa W_2 de y tal que $W_2 \subset F_{t_{m_2}}(U_2)$.

Tomando $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$ e $W = W_1 \cap W_2$, concluímos a demonstração da afirmação. ■

Mesmo que $n = 1$ e as aplicações F_{t_m} do Lema 2.3.5 sejam difeomorfismos suaves, não podemos concluir que F é um difeomorfismo. Isto será ilustrado no exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.6 Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ um difeomorfismo suave tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) < 0$ (por exemplo, $F(x) = \left(\frac{-1}{\pi}\right) \arctan x + \frac{1}{2}$). Para todo $t > 0$, temos que $F'_t(x) = F'(x) - t < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_t(x) = -\infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} F_t(x) = \infty$. Portanto, $F_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um difeomorfismo.

De posse desses resultados, podemos provar o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.3.7 *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Se para algum $\epsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap [0, \epsilon) = \emptyset$, então F é injetiva.*

Demonstração: Fixemos $0 < t < \epsilon$. Afirmamos que $F_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetiva. De fato, segue da Observação 2.3.4 e da hipótese feita sobre o $\text{Spec}(F)$ que

$$\text{Spec}(F_t) \cap [-t, \epsilon - t) = \emptyset.$$

Dai, se $0 < a < \min\{t, \epsilon - t\}$, então $\text{Spec}(F_t) \cap (-a, a) = \emptyset$. Portanto, pelo Teorema 2.3.1, F_t é injetiva. Seja $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $(0, \epsilon)$ convergindo para 0. A afirmação demonstrada implica que cada F_{t_m} é uma aplicação injetiva. Logo, pelo Lema 2.3.5, F é injetiva e o teorema está provado. ■

Observação 2.3.8 B. Smyth e F. Xavier em [34] provaram que existem inteiros $n > 2$ e aplicações polinomiais $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ não injetivas com $\text{Spec}(P) \cap [0, \infty) = \emptyset$.

Corolário 2.3.9 *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Se para algum $\epsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap [1, 1 + \epsilon) = \emptyset$, então F tem no máximo um ponto fixo.*

Demonstração: Basta notar que a aplicação $F_1(x) = F(x) - x$, $x \in \mathbb{R}^2$, é injetiva. ■

O próximo resultado apresenta uma condição suficiente para que uma certa aplicação diferenciável $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sem pontos críticos seja injetiva. Este resultado foi demonstrado por M. Cobo, C. Gutierrez e J. Llibre em [12] no caso em que F é de classe C^1 .

Teorema 2.3.10 *Sejam $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações polinomiais e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. Suponhamos que $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja definida por*

$$F(x, y) = (p(x)q(y), g(x, y)).$$

Então se $0 \notin \text{Spec}(F)$, F é injetiva.

Demonstração: Denotemos $f(x, y) = p(x)q(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e suponhamos, por contradição, que F não seja injetiva. Então, pela Proposição 2.2.3, $\mathcal{F}(f)$ tem uma semi-componente de Reeb $\mathcal{A}$. Como os eixos não-compactos de $\mathcal{A}$ se acumulam no infinito, temos que a projeção ortogonal de $\mathcal{A}$ em pelo menos em um dos eixos coordenados tem comprimento infinito. Vamos considerar somente o caso em que isto acontece no eixo x , pois quando acontece no eixo y , prova-se analogamente.

Como $0 \notin \text{Spec}(F)$ e

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} p'(x)q(y) & p(x)q'(y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{pmatrix},$$

segue-se que

(a) para todo $y \in \mathbb{R}$, $q(y) \neq 0$ ou $q'(y) \neq 0$.

Seja $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_y(x, y) = 0\}$. Pela prova do Teorema 2.3.1 vemos que a projeção de $T \cap \mathcal{A}$ sobre o eixo x contém um intervalo de comprimento infinito, digamos (a, ∞) .

Sejam $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ e $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ todas as raízes reais dos polinômios $q'(y)$ e $p(x)$ respectivamente. Por (a) e pelo fato de que $f_y(x, y) = p(x)q'(y)$, obtemos que

(b) se $(x, y) \in T \cap \mathcal{A}$ e $x \notin \mathbb{X}$, então $y \in \mathbb{Y}$ e $q(y) \neq 0$.

Como f restrita a $\mathcal{A}$ é limitada, existe uma constante $M > 0$ tal que, para todo $(x, y) \in \mathcal{A}$, $|f(x, y) = p(x)q(y)| \leq M$. Assim, por (b), se $(x, y) \in T \cap \mathcal{A}$ e $x \notin \mathbb{X}$, então

$$|p(x)| \leq \frac{M}{\min_{y_i \in \mathbb{Y}} |q(y_i)|}.$$

Isto implica que $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial identicamente constante. Logo, para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Y}$, $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$, e assim $0 \in \text{Spec}(F)$. Esta contradição prova que F é injetiva. ■

Injetividade de aplicações polinomiais do plano

Nosso objetivo neste capítulo é provar alguns resultados referentes à *Conjectura Jacobiana forte bidimensional* a qual afirma que se $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação polinomial tal que $0 \notin \text{Spec}(P)$, então P é injetiva. Para isto, apresentamos os conceitos de semi-componentes de Reeb alinhadas e de semi-componentes de Reeb adjacentes introduzidos por M. Cobo, C. Gutierrez e J. Llibre em [12].

3.1 Semi-componentes de Reeb alinhadas e adjacentes

Nesta seção apresentamos os conceitos de semi-componentes de Reeb alinhadas e de semi-componentes de Reeb adjacentes. Antes porém, introduzimos algumas notações.

No decorrer desta seção, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ será uma submersão de classe C^1 .

Pela forma local das submersões (ver [6], página 13), as componentes conexas das curvas de nível de f , $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$, definem as folhas de uma folheação $\mathcal{F}(f)$ de classe C^1 e dimensão um em $\mathbb{R}^2$.

Denotemos por $X_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo vetorial Hamiltoniano planar de f , isto é, $X_f(p) = (-f_y(p), f_x(p))$, $p \in \mathbb{R}^2$. Seja $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva integral máxima do campo X_f pelo ponto $p \in \mathbb{R}^2$. Para todo $t \in I$, temos

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi(t))) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot X_f(\varphi(t)) = 0.$$

Daí, a trajetória $\{\varphi(t) : t \in I\}$ está contida na folha de $\mathcal{F}(f)$ que passa por p . Logo, φ é a única curva integral do campo X_f pelo ponto p . Portanto, dado $p \in \mathbb{R}^2$, existe uma

única curva integral do campo X_f passando por p .

Como X_f é um campo vetorial sem singularidades temos, pelo Teorema 1.4.10, que as trajetórias de X_f coincidem com as folhas de $\mathcal{F}(f)$. Desta forma, consideraremos indistintamente as folhas de $\mathcal{F}(f)$ ou as trajetórias do campo X_f . Assim, todas as definições e resultados apresentados no Capítulo 2, são válidos para o campo X_f .

Definição 3.1.1 *Seja $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um mergulho suave. Suponhamos que $\gamma([a, b])$ seja o eixo compacto de uma semi-componente de Reeb $\mathcal{A}$ de X_f e $\gamma(t_0)$ seja o único ponto de $\gamma([a, b])$ tangente a X_f . Consideremos o vetor $\gamma'(t_0)^\perp = (-\gamma'_2(t_0), \gamma'_1(t_0))$ e a reta $r(s) = s\gamma'(t_0)^\perp + \gamma(t_0)$, $s \in \mathbb{R}$, passando por $\gamma(t_0)$ com direção $\gamma'(t_0)^\perp$. Dizemos que $\mathcal{A}$ está à esquerda (resp. à direita) de γ , se existe $\delta > 0$ tal que $r([0, \delta)) \subset \mathcal{A}$ (resp. $r((-\delta, 0]) \subset \mathcal{A}$).*

No que segue, denotaremos por α_p a trajetória do campo X_f passando por $p \in \mathbb{R}^2$. Também, α_p^+ e α_p^- denotarão as semi-trajetórias positiva e negativa de X_f , respectivamente, começando em p .

Definição 3.1.2 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ semi-componentes de Reeb de X_f . Dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão alinhadas e denotamos por $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$, se existe um mergulho suave $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (1) *para algum $1 < r_0 \leq s_0 < 2$, $\gamma([r_0, s_0])$ é transversal a X_f ;*
- (2) *$\gamma([1, r_0])$ e $\gamma([s_0, 2])$ são os eixos compactos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ respectivamente;*
- (3) *$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão ambas à direita ou ambas à esquerda de γ .*

Neste caso, dizemos que γ é um caminho alinhador para o par $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ com intervalo de conexão $[r_0, s_0]$. Veja Figura 3.1.

Figura 3.1: Um par de semi-componentes de Reeb alinhadas

Se $\alpha_{\gamma(r_0)}^+$ e $\alpha_{\gamma(s_0)}^+$ (resp. $\alpha_{\gamma(r_0)}^-$ e $\alpha_{\gamma(s_0)}^-$) são os eixos não-compactos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, então dizemos que γ é um caminho alinhador positivo (resp. negativo) para o par $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$.

Recordemos que $F_\theta = R_\theta \circ F \circ R_{-\theta} = (f_\theta, g_\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, onde $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação diferenciável e R_θ é a rotação linear.

O resultado seguinte, provado por C. Gutierrez em [18] (Teorema D), será utilizado na próxima seção.

Proposição 3.1.3 *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe C^1 tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Suponhamos que, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, X_{f_θ} não tenha um par de semi-componentes de Reeb alinhadas. Então F é injetiva.*

Para introduzir o conceito de semi-componentes de Reeb adjacentes consideremos a seguinte compactificação do plano.

Sejam $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$, $\mathbb{S}_-^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : 0 \leq z < 1\}$ e $\mathbb{S}^1 = \{(x, y, 1) \in \mathbb{S}^2\}$. Definimos $\phi : \mathbb{S}_-^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \quad (3.1)$$

Notemos que ϕ é um homeomorfismo. Geometricamente, $\phi(x, y, z)$ é o ponto em que a reta determinada por $(0, 0, 1)$ e (x, y, z) intercepta o plano $z = 0$, o qual identificamos com $\mathbb{R}^2$.

Denotemos por $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$ a união de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^1$ e seja $\Phi : \mathbb{S}_-^2 \cup \mathbb{S}^1 \rightarrow \text{Cl}(\mathbb{R}^2)$ a bijecção dada por

$$\Phi(x, y, z) = \begin{cases} \phi(x, y, z), & \text{se } (x, y, z) \in \mathbb{S}_-^2 \\ (x, y, z), & \text{se } (x, y, z) \in \mathbb{S}^1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Consideremos a topologia em $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$ definida por: U é aberto em $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$ se, e somente se, $\Phi^{-1}(U)$ é aberto em $\mathbb{S}_-^2 \cup \mathbb{S}^1$. Então a aplicação Φ é automaticamente um homeomorfismo e $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$.

Assim sendo, o espaço compacto $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$ é a compactificação de $\mathbb{R}^2$ induzida por ϕ .

Dado $\theta \in \mathbb{R}$, usaremos a notação $e^{i\theta}$ para representar o ponto $(\cos \theta, \sin \theta, 1) \in \mathbb{S}^1$.

Seja α uma semi-trajetória do campo X_f . Segue do Teorema de Poincaré-Bendixson e do fato de que X_f não tem singularidades que o conjunto limite

$$\mathcal{L}(\alpha) := \overline{\alpha} \setminus \alpha$$

de α , como subconjunto de $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$, é $\mathbb{S}^1$ ou um subintervalo fechado não vazio de $\mathbb{S}^1$.

Também, se $\mathcal{A}$ é uma semi-componente de Reeb de X_f , o *conjunto limite*

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) := \overline{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$$

de $\mathcal{A}$, em $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$, é um subconjunto compacto e conexo de $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$ que não necessariamente está propriamente contido em $\mathbb{S}^1$. Identificando $\mathbb{R}^2$ com o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, a definição de $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ toma a seguinte forma:

Lema 3.1.4 *Sejam $\mathcal{A}$ uma semi-componente de Reeb de X_f e $\theta \in \mathbb{R}$. Então $e^{i\theta} \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ e $R > 0$ dados, $\mathcal{A}$ intercepta o conjunto*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R \text{ e } \theta - \epsilon \leq \arg z \leq \theta + \epsilon\}.$$

Observemos que se α e β são semi-trajetórias do campo X_f e se existe $M > 0$ tal que, para todo $p \in \alpha$,

$$d(p, \beta) := \inf\{|p - q| : q \in \beta\} \leq M,$$

então $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$.

Seja $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um mergulho suave e suponhamos que X_f seja transversal a $\gamma([1, 2])$. Para $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq 2$, denotemos

$$\mathcal{R}^+(\gamma([t_1, t_2])) = \bigcup_{t_1 \leq s \leq t_2} \alpha_{\gamma(s)}^+$$

e

$$\mathcal{R}^-(\gamma([t_1, t_2])) = \bigcup_{t_1 \leq s \leq t_2} \alpha_{\gamma(s)}^-.$$

Definição 3.1.5 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ semi-componentes de Reeb de X_f . Suponhamos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estejam alinhadas e $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja um caminho alinhador positivo (resp. negativo) para o par $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ com intervalo de conexão $[r_0, s_0]$. Dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são semi-componentes de Reeb adjacentes para X_f , se o conjunto limite*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{R}^+(\gamma([r_0, s_0]))) &:= \overline{\bigcup_{r_0 \leq s \leq s_0} \alpha_{\gamma(s)}^+} \setminus \bigcup_{r_0 \leq s \leq s_0} \alpha_{\gamma(s)}^+ \\ \left(\text{resp. } \mathcal{L}(\mathcal{R}^-(\gamma([r_0, s_0]))) \right) &:= \overline{\bigcup_{r_0 \leq s \leq s_0} \alpha_{\gamma(s)}^-} \setminus \bigcup_{r_0 \leq s \leq s_0} \alpha_{\gamma(s)}^-, \end{aligned}$$

em $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$, está contido em $\mathbb{S}^1$.

Com as notações da definição acima, seja $\Omega = \mathcal{A} \cup \mathcal{R}^+(\gamma[r_0, s_0]) \cup \mathcal{B}$ (resp. $\Omega = \mathcal{A} \cup \mathcal{R}^-(\gamma[r_0, s_0]) \cup \mathcal{B}$). Notemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são adjacentes se, e somente se, o subconjunto $\Omega \cup \mathcal{L}(\Omega)$ de $\text{Cl}(\mathbb{R}^2)$ é homeomorfo a um disco compacto bidimensional.

Exemplo 3.1.6 Sejam

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{2} e^{\frac{x}{2}} \cos(ye^{-x}) \\ g(x, y) &= \sqrt{2} e^{\frac{x}{2}} \sin(ye^{-x}), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Pelo Exemplo 2.3.2, sabemos que $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação não injetiva tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Temos que X_f e X_g têm infinitas semi-componentes de Reeb adjacentes. De fato, notemos que f se anula ao longo de todas as curvas da forma

$$C_k(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = (\pi/2 + \pi k) \cdot e^t\}, \quad t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

e $f_y(0, y) = -\sqrt{2} \sin(y)$ se anula uma única vez no segmento

$$S_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, \pi/2 + \pi k \leq y \leq \pi/2 + \pi(k+1)\}$$

que conecta $C_k(0)$ e $C_{k+1}(0)$. Notemos também que f é limitada no semi-plano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ e ilimitada em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Desta forma, para todo $k \in \mathbb{Z}$, X_f tem uma semi-componente de Reeb $\mathcal{A}_k$ cujo eixo compacto é S_k e os eixos não-compactos são $\{C_k(t) : t \leq 0\}$ e $\{C_{k+1}(t) : t \leq 0\}$. Como $C_k(t)$ se aproxima do eixo x quando $t \rightarrow -\infty$, segue que os pares consecutivos $\{\mathcal{A}_k, \mathcal{A}_{k+1}\}$ são adjacentes. Analogamente, X_g tem uma semi-componente de Reeb $\mathcal{B}_k$ entre as curvas consecutivas da forma

$$D_k(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = t, y = (\pi + \pi k) \cdot e^t\}, \quad t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z},$$

e o segmento

$$T_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, \pi(k+1) \leq y \leq \pi(k+2)\},$$

e todos os pares consecutivos $\{\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_{k+1}\}$ são adjacentes. Observemos que a curva $D_k(t)$, $t \leq 0$, é a única semi-trajetória de X_g que está inteiramente contida na semi-componente de Reeb $\mathcal{A}_k$ de X_f .

3.2 Sobre a Conjectura Jacobiana forte

Dizemos que uma submersão $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão polinomial, se f é uma aplicação polinomial.

Proposição 3.2.1 *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma submersão polinomial e $\mathcal{A}$ uma semi-componente de Reeb de X_f . Então existe um conjunto finito $S_f = \{z_1, \dots, z_k\}$ de pontos de $\mathbb{S}^1$ tal que $\mathbb{S}^1 \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset S_f$. Também, se α é uma semi-trajetória do campo X_f , então $\mathcal{L}(\alpha) = z_i$ para algum $i \in \{1, \dots, k\}$. Cada ponto $z_i \in S_f$ é chamado de ponto limite do campo X_f .*

Demonstração: Para fixar as idéias, suponhamos que $f(x, y) = \sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Fazendo $y = tx, t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$f(x, tx) = (f_n(t))x^n + (f_{n-1}(t))x^{n-1} + \dots + f_0(t),$$

onde f_k são polinômios na variável t , $0 \leq k \leq n$, e f_n é um polinômio não nulo.

Seja $z_0 = e^{i\theta_0} \in \mathbb{S}^1$ tal que $t_0 = \tan \theta_0$ não é uma raiz do polinômio f_n , isto é, $f_n(t_0) \neq 0$. Mostraremos que $z_0 \notin \mathbb{S}^1 \cap \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Desta forma, $\mathbb{S}^1 \cap \mathcal{L}(\mathcal{A})$ só pode conter números da forma $e^{i\theta}$, onde θ é tal que $t_0 = \tan \theta$ é raiz do polinômio f_n .

A continuidade das funções $\tan \theta$ e f_n implicam que existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $\theta \in [\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$, então $t_\theta \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ não é uma raiz do polinômio f_n .

Sejam

$$a = \min\{|f_n(t)| : t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]\} > 0$$

e

$$c = \max\{|f_j(t)| : t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \text{ e } 0 \leq j \leq n-1\}.$$

Desde que $|x| > 1$, temos que

$$\left| \frac{f_{n-1}(t)}{x} + \frac{f_{n-2}(t)}{x^2} + \dots + \frac{f_0(t)}{x^n} \right| \leq \frac{nc}{|x|},$$

para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. Então existe $A > 0$ tal que se $|x| > A$ e $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$,

$$\left| \frac{f_{n-1}(t)}{x} + \frac{f_{n-2}(t)}{x^2} + \dots + \frac{f_0(t)}{x^n} \right| < \frac{a}{2}.$$

Com isto, para $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ e $|x| > A$,

$$\begin{aligned} |f(x, tx)| &= |x^n| \left| f_n(t) + \frac{f_{n-1}(t)}{x} + \frac{f_{n-2}(t)}{x^2} + \dots + \frac{f_0(t)}{x^n} \right| \\ &\geq |x^n| |f_n(t)| - \left| \frac{f_{n-1}(t)}{x} + \frac{f_{n-2}(t)}{x^2} + \dots + \frac{f_0(t)}{x^n} \right| \\ &> |x^n| \left(a - \frac{a}{2} \right) \\ &\geq |x^n| \frac{a}{2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Seja $M > 0$ tal que $|f(x, y)| < M$, $(x, y) \in \mathcal{A}$. A desigualdade (3.3) implica que existe $D > A$ tal que $f(x, tx) > M$ para todo $|x| > D$ e $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. Conseqüentemente, $\mathcal{A}$ não intercepta o conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq D \text{ e } \theta_0 - \delta \leq \arg z \leq \theta_0 + \delta\}$. Portanto, pelo Lema 3.1.4, $z_0 \notin \mathbb{S}^1 \cap \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Isso demonstra a primeira parte da proposição. A segunda parte segue analogamente, observando que $\mathcal{L}(\alpha)$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{S}^1$. ■

Corolário 3.2.2 *Sejam $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação polinomial com $0 \notin \text{Spec}(F)$ e $\mathcal{A}$ uma semi-componente de Reeb de X_f . Se $e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 \cap \mathcal{L}(\mathcal{A})$, $\theta \in \mathbb{R}$, então $f_n(L_\theta) \equiv 0$ (resp. $g_k(L_\theta) \equiv 0$), onde f_n (resp. g_k) é o polinômio homogêneo de maior grau de f (resp. g) e L_θ denota a reta passando pela origem com inclinação $\tan \theta$.*

Proposição 3.2.3 *Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma submersão polinomial e $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ um par de semi-componentes de Reeb adjacentes de X_f . Suponhamos que $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja um caminho alinhador positivo para o par $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ com intervalo de conexão $[r_0, s_0]$. Então $\mathcal{L}(\mathcal{R}^+(\gamma([r_0, s_0])))$ é um ponto de $\mathbb{S}^1$ (veja Figura 3.2).*

Demonstração: Segue da Proposição 3.2.1 e do fato de que $\mathcal{L}(\mathcal{R}^+(\gamma([r_0, s_0])))$ é um subconjunto conexo de $\text{CI}(\mathbb{R}^2)$. ■

Figura 3.2: Um par de semi-componentes de Reeb adjacentes

Dada uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e sejam $p, q \in \gamma([a, b])$. Como no Capítulo 2, $[p, q]_\gamma$ denota o arco fechado de $\gamma([a, b])$ com extremos p e q .

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma submersão polinomial. Analisando a compactificação do campo vetorial X_f (através de ϕ definida em (3.1)), podemos concluir, usando o trabalho de Dumortier [13], que X_f tem finitas semi-componentes de Reeb. Este fato é utilizado para demonstrar o seguinte resultado:

Proposição 3.2.4 *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial não injetiva tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Então existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que X_{f_θ} tem um par $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ de semi-componentes de Reeb adjacentes com $e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B})$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1.3, existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que X_{f_μ} tem um par de semi-componentes de Reeb alinhadas. Como F e F_μ tem o mesmo espectro e $(F_\mu)_\theta = F_{(\mu+\theta)}$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, podemos então assumir que $f = f_\mu$ e $g = g_\mu$.

Pelo lema 2.5 em [18], podemos achar $\delta > 0$ tal que se $\theta \in (-\delta, \delta)$, então X_{f_θ} tem um par $\{\mathcal{A}_\theta, \mathcal{B}_\theta\}$ de semi-componentes de Reeb alinhadas. Mostremos inicialmente que é sempre possível escolher $\theta \in (-\delta, \delta)$ de tal forma que $e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}_\theta) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$. Para isto nos propomos a mostrar a seguinte afirmação.

- (a) Se o conjunto limite de uma das semi-componentes de Reeb alinhadas de X_{f_0} contém o ponto $e^{\pm \frac{\pi}{2}i}$, então existe $0 < \epsilon < \delta$ tal que, para todo $\theta \in (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)$, $e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}_\theta) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$.

De fato, sejam f_n e g_k os polinômios homogêneos de maior grau de f e g respectivamente. Denotemos por L_θ a reta passando pela origem com inclinação $\tan(\pi/2 + \theta)$. Pelo Corolário 3.2.2, $f_n(L_0) \equiv g_k(L_0) \equiv 0$. Como zeros de polinômios são isolados, podemos tomar $0 < \epsilon < \delta$ suficientemente pequeno tal que

- (b) se $\theta \in (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)$, $f_n(L_\theta \setminus \{(0, 0)\})$ e $g_k(L_\theta \setminus \{(0, 0)\})$ não interceptam $\{0\}$.

Para fixar as idéias, suponhamos que $n \geq k$. Desta forma, se $(f_\theta)_n$ e $(g_\theta)_n$ são os polinômios homogêneos de maior grau de f_θ e g_θ , respectivamente, então

$$\begin{aligned} (f_\theta)_n &= (\cos \theta) f_n \circ R_{-\theta} - [k/n] (\sin \theta) g_k \circ R_{-\theta} \\ (g_\theta)_n &= (\sin \theta) f_n \circ R_{-\theta} + [k/n] (\cos \theta) g_k \circ R_{-\theta}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $[k/n]$ denota a parte inteira de k/n .

Suponhamos, por contradição, que para algum $\theta \in (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)$, $e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_\theta) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B}_\theta)$. Novamente, segue do Corolário 3.2.2 que $(f_\theta)_n(L_0) \equiv (g_\theta)_n(L_0) \equiv 0$. Como o determinante do sistema (3.4) é não nulo, obtemos

$$f_n(L_{-\theta}) \equiv f_n \circ R_{-\theta}(L_0) \equiv 0.$$

Esta contradição com (b) prova (a).

Seja $\theta \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que X_{f_θ} tem um par $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ de semi-componentes de Reeb alinhadas com $e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um caminho alinhador positivo para o par $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ com intervalo de conexão $[r_0, s_0]$. Afirmamos que se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são não adjacentes, então podemos construir um novo par $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2\}$ de semi-componentes de Reeb alinhadas para X_{f_θ} tal que $\mathcal{B}_1$ é igual a $\mathcal{A}_1$ ou igual a $\mathcal{A}_2$ e o interior de $\mathcal{B}_2$ está contido em $\mathcal{R}^+(\gamma[r_0, s_0])$. Supondo que nossa afirmação seja válida e usando o fato de que X_{f_θ} tem finitas semi-componentes de Reeb, obtemos um par $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ de semi-componentes de Reeb adjacentes para X_{f_θ} com $e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}) \cup \mathcal{L}(\mathcal{B})$. Assim, para completar a prova da proposição, basta mostrar que nossa afirmação é verdadeira.

Sejam $p \in \mathbb{R}^2 \cap \mathcal{L}(\mathcal{R}^-(\gamma([r_0, s_0])))$ e $\eta : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um mergulho suave satisfazendo

$$\eta(0) = p \quad \text{e} \quad \eta'(0) = \nabla f_\theta(p).$$

Podemos assumir que $f_\theta \circ \eta$ é estritamente monótona e que $\mathcal{R}^+(\gamma[r_0, s_0])$ intercepta $\eta([-1, 1])$, mas $\alpha_{\gamma(r_0)}^+$ e $\alpha_{\gamma(s_0)}^-$ não interceptam $\eta([-1, 1])$. Sejam $r_0 < t_1 < t_2 < s_0$ números reais tais que as semi-trajetórias $\alpha_{\gamma(t_1)}^+$ e $\alpha_{\gamma(t_2)}^+$ interceptam o arco $\eta([-1, 1])$ em pontos p_1 e p_2 respectivamente. Da continuidade do fluxo de X_{f_θ} e do fato de que f_θ restrita aos arcos $[p_1, p_2]_\eta$ e $[\gamma(t_1), \gamma(t_2)]_\gamma$ é estritamente monótona, temos que $[p_1, p_2]_\eta \subset \mathcal{R}^+(\gamma[r_0, s_0])$ e todas as semi-trajetórias $\alpha_{\gamma(s)}^+$ com $s \in [t_1, t_2]$ interceptam uma única vez o arco $[p_1, p_2]_\eta$. Portanto, $p \notin [p_1, p_2]_\eta$. Consideraremos somente o caso em que $p_1 \in [p, p_2]_\eta$, pois o caso em que $p_2 \in [p, p_1]_\eta$ é análogo.

Notemos que existe um mergulho suave $\eta_0 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\eta_0(1) = \gamma(t_1)$, $\eta_0(2) = p_1$ e tendo somente uma tangência (genérica) com o fluxo de X_{f_θ} . Além disso, η_0 pode ser escolhida de tal forma que $\zeta = [\gamma(1), \gamma(t_1)]_\gamma \cup [\gamma(t_1), p_1]_{\eta_0} \cup [p, p_1]_\eta$ seja um mergulho suave e as trajetórias $\alpha_{\gamma(r_0)}$ e α_p não interceptam o arco $[\gamma(t_1), p_1]_{\eta_0}$ (veja Figura 3.3). Observemos que ζ tem exatamente dois pontos de tangência (genérica) com o fluxo de X_{f_θ} , um no interior do arco $[\gamma(1), \gamma(r_0)]_\gamma$, correspondendo a $\mathcal{A}_1$, e outro no interior do arco $[\gamma(t_1), p_1]_{\eta_0}$. O mesmo raciocínio que utilizamos para demonstrar a Proposição 2.2.3 nos permite concluir que existe uma semi-componente de Reeb $\mathcal{B}_2$ para X_{f_θ} cujo interior está contido em $\mathcal{R}^+(\gamma[r_0, s_0])$. Claramente $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{B}_2$ estão alinhadas e a demonstração está completa. ■

Figura 3.3: A curva η_0

A Proposição 3.2.4 será usada para demonstrar os principais resultados deste capítulo, a saber, o Teorema 3.2.10 e o Teorema 3.2.15. Também vamos precisar de algumas propriedades de curvas algébricas planas que enunciaremos a seguir.

Seja $f(x, y)$ um polinômio não constante com coeficientes em $\mathbb{R}$. Sabemos que $f(x, y)$ pode ser escrito de modo único, a menos da ordem dos fatores, sob a forma

$$f(x, y) = (f_1(x, y))^{k_1} \dots (f_r(x, y))^{k_r},$$

onde $f_1(x, y), \dots, f_r(x, y)$ são polinômios irredutíveis distintos com coeficientes em $\mathbb{R}$ e $k_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$; quando $k_i \geq 2$, dizemos que f_i é um fator irredutível múltiplo de f .

Denotemos por $V(f)$ o conjunto dos pontos em $\mathbb{R}^2$ da curva algébrica plana determinada por $f(x, y)$, isto é,

$$V(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}.$$

Observemos que $V(f) = \bigcup_{i=1}^r V(f_i)$.

O resultado seguinte, cuja demonstração pode ser encontrada em [17], nos dá informações sobre a cardinalidade da interseção de duas curvas algébricas planas. Mais precisamente:

Teorema 3.2.5 (Teorema de Bezout) *Sejam $f(x, y)$ e $g(x, y)$ polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$ de graus $n, m \geq 1$ respectivamente. Se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ não têm fator irredutível comum, então*

$$\#V(f) \cap V(g) \leq nm.$$

Definição 3.2.6 *Seja $f(x, y)$ um polinômio não constante com coeficientes em $\mathbb{R}$. Dizemos que $p \in \mathbb{R}^2$ é um ponto singular de $V(f)$ se $f(p) = f_x(p) = f_y(p) = 0$.*

O Resultado seguinte é a Proposição 6 de [36], página 39.

Proposição 3.2.7 *Se $f(x, y)$ é um polinômio não constante com coeficientes em $\mathbb{R}$ e sem fatores irredutíveis múltiplos, então o conjunto dos pontos singulares de $V(f)$ é finito.*

Definição 3.2.8 *Dizemos que um conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva regular quando C é localmente gráfico de uma função regular.*

Teorema 3.2.9 *Seja $f(x, y)$ um polinômio não constante com coeficientes em $\mathbb{R}$ e sem fatores irredutíveis múltiplos. Então $V(f)$ é vazio ou é constituído de*

i) finitos pontos singulares, ou

- ii) *finitos pontos isolados, ou*
- iii) *finitas curvas regulares, ou*
- iv) *combinação finita dos itens i), ii) e iii).*

Demonstração: Segue do Teorema 3.2.9 e da Proposição 3.2.7. ■

Estamos em condições de enunciar e demonstrar um dos principais resultados deste capítulo, que é uma versão do Teorema 2.3.7 no caso de aplicações polinomiais.

Teorema 3.2.10 *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial. Se para algum $\epsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap (-\epsilon, 0] = \emptyset$ ou $\text{Spec}(F) \cap [0, \epsilon) = \emptyset$, então F é injetiva.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que F não seja injetiva. Então, pela Proposição 3.2.4, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que X_{f_θ} tem um par $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ de semi-componentes de Reeb adjacentes com $e^{\pm \frac{\pi}{2}i} \notin \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$. Sendo f_θ uma aplicação polinomial, a Proposição 3.2.3 implica que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2) = \{w\} \subset \mathbb{S}^1$, $w \neq e^{\pm \frac{\pi}{2}i}$. Portanto, $\Pi(\mathcal{A}_1) \cap \Pi(\mathcal{A}_2)$ contém um intervalo de comprimento infinito, onde $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção ortogonal sobre a primeira coordenada. Para fixar as idéias, suponhamos que $[b, \infty) \subset \Pi(\mathcal{A}_1) \cap \Pi(\mathcal{A}_2)$. Veja Figura 3.4.

Analogamente à demonstração do Teorema 2.3.1, se $a > b$ é suficientemente grande,

- (a) para qualquer $x \geq a$, a reta vertical $\Pi^{-1}(x)$ intercepta exatamente uma trajetória $\alpha_x^i \subset \mathcal{A}_i$ de $X_{f_\theta}|_{\mathcal{A}_i}$ tal que $\Pi(\alpha_x^i) \cap (x, \infty) = \emptyset$, $i = 1, 2$. Em outras palavras, x é o máximo da restrição $\Pi|_{\alpha_x^i}$, $i = 1, 2$.

Segue-se que

- (b) se $x \geq a$ e $p_i \in \alpha_x^i \cap \Pi^{-1}(x)$, $i = 1, 2$, então $(f_\theta)_y(p_i) = 0$.

Como estamos supondo F_0 não injetiva, pelo Teorema 2.3.10, temos que $(f_\theta)_y(x, y)$ é um polinômio não constante. Assim, podemos escrevê-lo de modo único, a menos da ordem dos fatores, sob a forma

$$(f_\theta)_y(x, y) = (q_1(x, y))^{k_1} \dots (q_r(x, y))^{k_r},$$

onde $q_1(x, y), \dots, q_r(x, y)$ são polinômios irreduzíveis distintos com coeficientes em $\mathbb{R}$ e $k_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq r$.

Pelo Teorema de Bezout, para cada $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, o sistema

$$\begin{cases} q_j(x, y) = 0 \\ (q_j)_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

tem finitas soluções em $\mathbb{R}^2$. Portanto, pelo Teorema da Aplicação Implícita,

- (c) as componentes conexas de $V(q_j)$, $j \in \{1, 2, \dots, r\}$, podem ser vistas localmente como gráficos de funções de classe C^∞ , com respeito ao eixo x , exceto por um número finitos pontos.

Consideremos o polinômio $Q(x, y) = q_1(x, y) \dots q_r(x, y)$. Segue do Teorema 3.2.9 e de (b) que existem curvas regulares $C_i \subset \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$, de $V(Q)$ tais que $\Pi(C_i)$ é um intervalo de comprimento infinito. Daí, usando (c) e o fato de que $V(Q) = \bigcup_{j=1}^r V(q_j)$, concluímos que existem $d > a$ e funções $\eta_i : [d, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, de classe C^∞ tais que, para todo $x \geq d$, $(x, \eta_i(x)) \in \mathcal{A}_i$ e $(f_\theta)_y(x, \eta_i(x)) = 0$. Observemos que, para todo $x \geq d$, $(f_\theta)_x(x, \eta_i(x)) \in \text{Spec}(F_\theta)$.

Como o fluxo de X_{f_θ} é contínuo (veja Figura 3.4),

- (d) os vetores colineares $\nabla f_\theta(x, \eta_1(x))$ e $\nabla f_\theta(x, \eta_2(x))$ tem orientações opostas, isto é, $(f_\theta)_x(x, \eta_1(x)) \cdot (f_\theta)_x(x, \eta_2(x)) < 0$, $x \in [d, \infty)$.

Sendo $f_\theta|_{\mathcal{A}_i}$ limitada, obtemos

$$\infty > \int_{[d, \infty)} \frac{d}{ds} f_\theta(s, \eta_i(s)) ds = \int_{[d, \infty)} (f_\theta)_x(s, \eta_i(s)) ds, \quad i = 1, 2.$$

Isto e o fato de que $(f_\theta)_x(x, \eta_i(x))$, $i = 1, 2$, tem o mesmo sinal para todo $x \in [d, \infty)$ implicam que existem seqüências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais tais que $x_n \rightarrow \infty$, $y_n \rightarrow \infty$, $(f_\theta)_x(x_n, \eta_1(x_n)) \rightarrow 0$ e $(f_\theta)_x(y_n, \eta_2(y_n)) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Assim, usando (d), concluímos que para todo $\epsilon > 0$, $(-\epsilon, 0) \cap \text{Spec}(F_\theta) \neq \emptyset$ e $\text{Spec}(F_\theta) \cap (0, \epsilon) \neq \emptyset$. Esta contradição com as hipóteses feitas sobre o $\text{Spec}(F_\theta)$ ($= \text{Spec}(F)$) mostra que F é injetiva. ■

Figura 3.4: $[b, \infty) \subset \Pi(\mathcal{A}_1) \cap \Pi(\mathcal{A}_2)$

Corolário 3.2.11 *Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial. Se para algum $\epsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap (1 - \epsilon, 1] = \emptyset$ ou $\text{Spec}(F) \cap [1, 1 + \epsilon) = \emptyset$, então F tem um único ponto fixo.*

Demonstração: Basta notar que $G(x) = F(x) - x$, $x \in \mathbb{R}^2$, é uma aplicação polinomial bijetiva (veja o principal resultado de [4]). ■

Exemplo 3.2.12 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação polinomial. Consideremos $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)).$$

Se F é uma aplicação que preserva orientação, então F é injetiva. Com efeito, notemos que a matriz $DF(x, y)$ é não-singular e simétrica para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Assim, seus autovalores são reais e não nulos. Como F preserva orientação, $\text{Spec}(F) \subset (-\infty, 0)$ ou $\text{Spec}(F) \subset (0, +\infty)$. Portanto, pelo Teorema 3.2.10, F é injetiva.

Definição 3.2.13 *Dizemos que uma aplicação contínua $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é própria quando para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(K)$ é compacto.*

A proposição seguinte é um resultado de Hadamard encontrado em [38].

Proposição 3.2.14 *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial tal que $\text{Spec}(F) \cap \{0\} = \emptyset$. Então F é um difeomorfismo se, e somente se, $f^2 + g^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação própria.*

O próximo resultado, que é um dos mais importantes deste capítulo, nos dá um critério melhor que esse da Proposição 3.2.14 para descobrir quando uma aplicação polinomial que preserva orientação é injetiva.

Teorema 3.2.15 *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial que preserva orientação e denotamos*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{Traço}(DF(x, y)) = 0\}.$$

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- i) *Se $f|_{\Gamma}$ ou $g|_{\Gamma}$ é uma aplicação própria, então F é injetiva.*
- ii) *F é injetiva se, e somente se, $(f^2 + g^2)|_{\Gamma}$ é uma aplicação própria.*

Demonstração: Suponhamos que F não seja injetiva. Até o item (d) da demonstração do Teorema 3.2.10, esta prova procede da mesma forma.

Sendo F uma aplicação que preserva orientação, temos que F_θ também preserva. Assim, o item (d) implica que o sinal do $\text{Traço}(DF_\theta(x, \eta_1(x)))$ e do $\text{Traço}(DF_\theta(x, \eta_2(x)))$ são opostos. Portanto, para cada $x \geq d$, existe um ponto $(x, r(x))$ no segmento de reta que une os pontos $(x, \eta_1(x))$ e $(x, \eta_2(x))$ o qual pertence ao conjunto

$$\Gamma_\theta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{Traço}(DF_\theta)(x, y) = 0\}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um caminho alinhador positivo para o par $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ com intervalo de conexão $[r_0, s_0]$. Desse modo, o conjunto

$$\Sigma_\theta = \{(x, r(x)) : x \geq d\} \subset \Gamma_\theta$$

está contido na região $\Omega = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{R}^+(\gamma[r_0, s_0]) \cup \mathcal{A}_2$. Sendo $f_\theta|_\Omega$, $g_\theta|_\Omega$ e $(f_\theta^2 + g_\theta^2)|_\Omega$ aplicações limitadas, temos que $F_\theta(\Sigma_\theta) = (f_\theta(\Sigma_\theta), g_\theta(\Sigma_\theta))$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$.

Por outro lado, a relação $DF_\theta(x, y) = R_\theta \circ DF(R_{-\theta}(x, y)) \circ R_{-\theta}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, implica que

$$\Gamma_\theta = R_\theta(\Gamma), \quad \text{onde } \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{Traço}(DF(x, y)) = 0\}.$$

Seja $\Sigma = R_{-\theta}(\Sigma_\theta) \subset \Gamma$. Notemos que Σ é um subconjunto não compacto de $\mathbb{R}^2$, já que $\Sigma_\theta \subset \mathbb{R}^2$ é não limitado. Como $F(\Sigma) = R_{-\theta}(F_\theta(\Sigma_\theta))$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ e $\Sigma \subset \Gamma$, segue que $f|_\Gamma$, $g|_\Gamma$ e $(f^2 + g^2)|_\Gamma$ não são aplicações próprias. Portanto, se $f|_\Gamma$ ou $g|_\Gamma$ é uma aplicação própria, F é injetiva. A demonstração de i) está concluída.

Mostremos ii). Suponhamos que F seja injetiva. A hipótese feita sobre o $\text{Spec}(F)$ e o principal resultado de [4] implicam que F é um difeomorfismo. Assim, pela Proposição 3.2.14 e usando o fato de que Γ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^2$, obtemos que $(f^2 + g^2)|_\Gamma$ é uma aplicação própria. A recíproca segue diretamente da demonstração do item i). ■

O resultado seguinte é uma versão do teorema anterior para aplicações polinomiais que revertem orientação.

Corolário 3.2.16 *Seja $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação polinomial que reverte orientação e denotamos*

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_x(x, y) - g_y(x, y) = 0\}.$$

Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

i) *Se $f|_\Lambda$ ou $g|_\Lambda$ é uma aplicação própria, então F é injetiva.*

ii) F é injetiva se, e somente se, $(f^2 + g^2)|_{\Lambda}$ é uma aplicação própria.

Exemplo 3.2.17 Sejam

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x - 2y + y^n \\ g(x, y) &= x - y + y^n, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

onde $n > 1$ é um número natural. Então $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação injetiva. De fato, como

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2 + ny^{n-1} \\ 1 & -1 + ny^{n-1} \end{pmatrix},$$

temos que $\det(DF(x, y)) = 1$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{Traço}(DF(x, y)) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

Notemos que $f|_{\Gamma}$ e $g|_{\Gamma}$ são aplicações próprias. Portanto, pelo Teorema 3.2.15, F é injetiva.

Difeomorfismos locais de $\mathbb{R}^n$ que são injetivos

Neste capítulo resolvemos afirmativamente a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe e a Conjectura de Chamberland em alguns casos particulares de aplicações no $\mathbb{R}^n$. Provamos, por exemplo, a validade destas conjecturas para aplicações Lipschitzianas. Além disso, mostramos que a Conjectura de Chamberland implica a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe. Mostramos também, para uma certa família de aplicações, uma equivalência para cada conjectura. A principal referência para este capítulo é [15].

4.1 Sobre a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe e a Conjectura de Chamberland

Dentre outros resultados, nesta seção vamos mostrar que a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe e a Conjectura de Chamberland são válidas para aplicações Lipschitzianas.

Recordemos, como definido no Capítulo 2, que se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferenciável e $t \in \mathbb{R}$, então $F_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação diferenciável dada por

$$F_t(x) = F(x) - tx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

No contexto de inversas globais, o Teorema de Hadamard na forma original está provado em [20]. Hoje, a referência a este teorema está geralmente associada a uma variante puramente topológica dada pelo resultado a seguir.

Teorema 4.1.1 (Teorema de Hadamard) *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um homeomorfismo local. Então F é um homeomorfismo se, e somente se, F é uma aplicação própria.*

Em uma direção alternativa ao Teorema de Hadamard, provaremos um resultado de injetividade que é válido para aplicações que não precisam ser próprias. Mais precisamente:

Teorema 4.1.2 *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um difeomorfismo local tal que $\text{Spec}(F)$ é disjunto de uma sequência $(t_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de números reais convergindo para 0. Se existem $R > 0$ e $0 < \alpha < 1$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| > R$ satisfaz $|F(x)| \leq |x|^\alpha$, então F é injetiva.*

Demonstração: Como para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $D(F_{t_m})(x) = DF(x) - t_m I$ (onde I é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$) e $t_m \notin \text{Spec}(F)$, segue que $0 \notin \text{Spec}(F_{t_m})$. Logo, pelo Teorema 2.1.4, cada F_{t_m} é um difeomorfismo local.

Para todo $|x| > R$ temos que

$$\begin{aligned} |F_{t_m}(x)| &\geq |t_m x| - |F(x)| \\ &\geq |t_m||x| - |x|^\alpha \\ &\geq (|t_m||x|^{1-\alpha} - 1)|x|^\alpha. \end{aligned}$$

Como $1 - \alpha > 0$, obtemos que $|F_{t_m}(x)| \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Isto implica que F_{t_m} é uma aplicação própria. Logo, pelo Teorema de Hadamard, cada F_{t_m} é injetiva. Portanto, usando o Lema 2.3.5, concluímos que F é injetiva. O teorema está demonstrado. ■

Seja $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ o espaço vetorial formado pelas transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Consideraremos em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ a norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|T\| = \sup\{|T(v)| : |v| = 1\},$$

onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana de $\mathbb{R}^n$.

O resultado seguinte, Teorema de Plastock, desempenha um papel importante neste capítulo. Sua demonstração pode ser encontrada em [31].

Teorema 4.1.3 (Teorema de Plastock) *Um difeomorfismo local $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é um difeomorfismo se*

$$\int_0^\infty \inf_{|x|=r} \|[DF(x)]^{-1}\|^{-1} dr = \infty.$$

O próximo resultado prova a Conjectura de Chamberland para aplicações Lipschitzianas.

Teorema 4.1.4 *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação Lipschitziana de classe C^1 . Suponhamos que para algum $\epsilon > 0$, $\text{Spec}(F) \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \epsilon\} = \emptyset$. Então F é um difeomorfismo.*

Demonstração: Seja $K > 0$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|F(x) - F(y)| \leq K|x - y|$. Dados $x, v \in \mathbb{R}^n$ com $|v| = 1$, para todo $t \neq 0$ suficientemente pequeno temos

$$\frac{|F(x + tv) - F(x)|}{|t|} \leq K.$$

Fazendo $t \rightarrow 0$, obtemos que

$$|DF(x)v| \leq K.$$

Portanto, $\|DF(x)\| \leq K$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Seja $\|\cdot\|_M$ a norma do espaço das matrizes reais $n \times n$ dada por

$$\|A\|_M = \sup\{|a_{ij}| : 1 \leq i, j \leq n\},$$

onde $A = [a_{ij}]$. Como as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_M$ são equivalentes, existe $K_1 > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|DF(x)\|_M \leq K_1$. Segue da definição da matriz adjunta clássica de $DF(x)$, $\text{adj}(DF(x))$, que existe $K_2 > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\text{adj}(DF(x))\|_M \leq K_2.$$

Pela hipótese feita sobre o $\text{Spec}(F)$, temos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $|\det(DF(x))| \geq \epsilon^n$. Daí, usando o fato de que $[DF(x)]^{-1} = \frac{1}{\det(DF(x))} \cdot \text{adj}(DF(x))$, obtemos que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|[DF(x)]^{-1}\|_M \leq K_3,$$

onde $K_3 = \frac{K_2}{\epsilon^n} > 0$. Novamente, como as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_M$ são equivalentes, existe $K_4 > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|[DF(x)]^{-1}\| < K_4.$$

Com isto,

$$\int_0^\infty \inf_{|x|=r} \|[DF(x)]^{-1}\|^{-1} dr \geq \int_0^\infty \frac{1}{K_4} dr = \infty.$$

Portanto, pelo Teorema de Plastock, F é um difeomorfismo. A demonstração do teorema está concluída. ■

Uma adaptação das técnicas usadas na demonstração do teorema anterior nos permite

provar o seguinte teorema:

Teorema 4.1.5 *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação Lipschitziana de classe C^1 tal que $0 \notin \text{Spec}(F)$. Suponhamos que para algum $\epsilon > 0$,*

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} (|x| \cdot |\det(DF(x))|) > \epsilon.$$

Então F é um difeomorfismo.

Demonstração: Procedendo como na demonstração do Teorema 4.1.4, existe $K_2 > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\text{adj}(DF(x))\|_M \leq K_2.$$

Por hipótese, existe $N > 0$ tal que, para todo $|x| \geq N$, $(|x| \cdot |\det(DF(x))|) > \epsilon$. Portanto, para todo $|x| \geq N$,

$$\|[DF(x)]^{-1}\|_M \leq K_3|x|,$$

onde $K_3 = \frac{K_2}{\epsilon} > 0$. Como as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_M$ são equivalentes, existe $K_4 > 0$ tal que, para todo $|x| \geq N$,

$$\|[DF(x)]^{-1}\| \leq K_4|x|.$$

Com isto,

$$\int_0^\infty \inf_{|x|=r} \|[DF(x)]^{-1}\|^{-1} dr \geq \int_N^\infty \inf_{|x|=r} \|[DF(x)]^{-1}\|^{-1} dr \geq \int_N^\infty \frac{1}{K_4|r|} dr = \infty.$$

Portanto, pelo Teorema de Plastock, F é um difeomorfismo. ■

O resultado seguinte implica que a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe é válida para aplicações Lipschitzianas.

Teorema 4.1.6 *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação Lipschitziana de classe C^1 . Suponhamos que exista uma seqüência $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de discos compactos de $\mathbb{C}$, (com interior não vazio), centrados em pontos t_m do eixo real satisfazendo:*

$$i) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} t_m = 0 \text{ e}$$

$$ii) \quad \text{Spec}(F) \cap \left(\bigcup_{m=1}^\infty D_m \right) = \emptyset.$$

Então F é injetiva.

Demonstração: Pelo Lema 2.3.5, basta mostrar que cada F_{t_m} é injetiva. Sendo F uma aplicação Lipschitziana de classe C^1 , existe $K > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|DF(x)\| \leq K.$$

Como $D(F_{t_m})(x) = DF(x) - t_m I$, ($I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade), obtemos que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|D(F_{t_m})(x)\| \leq K_1,$$

onde $K_1 = K + |t_m|$. A desigualdade do valor médio implica que cada F_{t_m} é uma aplicação Lipschitziana de classe C^1 .

Pelas hipóteses feitas sobre o $\text{Spec}(F)$ e a sequência $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$, temos

$$\text{Spec}(F_{t_m}) \cap (D_m - t_m) = \emptyset,$$

onde $D_m - t_m = \{z \in \mathbb{C} : z + t_m \in D_m\}$ é um disco compacto de centro na origem (com interior não vazio). Pelo Teorema 4.1.4, segue-se que cada F_{t_m} é injetiva. Isso demonstra o teorema. ■

Corolário 4.1.7 *Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação Lipschitziana de classe C^1 . Suponhamos que $\text{Spec}(F) \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\} = \emptyset$. Então F é injetiva.*

Observação 4.1.8 O mesmo raciocínio que utilizamos para demonstrar o Teorema 4.1.6 nos permite concluir que a Conjectura de Chamberland implica a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe.

4.2 Afirmações equivalentes

Na seção anterior mostramos que a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe e a Conjectura de Chamberland são verdadeiras para aplicações Lipschitzianas. Nesta seção vamos mostrar que estas conjecturas são verdadeiras para outras classes de aplicações. Também vamos provar, para uma certa família de aplicações, uma equivalência para cada conjectura.

Denotemos por $\mathcal{L}$ o subconjunto das aplicações de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que contém a aplicação identidade, $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e tal que, para todo $(F, s, t) \in \mathcal{L} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $sF + tI \in \mathcal{L}$.

Seja $A > 0$. Consideremos as seguintes conjecturas:

1. *Conjectura A-Fraca de Markus-Yamabe para $\mathcal{L}$* : Se $F \in \mathcal{L}$ satisfaz

$$\text{Spec}(F) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < -A\},$$

então F é injetiva.

2. *Conjectura Forte de Chamberland para $\mathcal{L}$* : Se $F \in \mathcal{L}$ é um homeomorfismo local tal que exista uma sequência de discos compactos $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$, (com interior não vazio), centrados em pontos t_m do eixo real satisfazendo

$$\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = 0 \quad \text{e} \quad \text{Spec}(F) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m \right) = \emptyset,$$

então F é injetiva.

Proposição 4.2.1 *A Conjectura Fraca de Markus-Yamabe para $\mathcal{L}$ é verdadeira se, e somente se, a Conjectura A-Fraca de Markus-Yamabe para $\mathcal{L}$ é verdadeira.*

Demonstração: Suponhamos que a Conjectura A-Fraca de Markus-Yamabe para $\mathcal{L}$ seja verdadeira. Seja $F \in \mathcal{L}$ satisfazendo $\text{Spec}(F) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$. Afirmamos que para todo $t > 0$, F_t é injetiva. De fato, como $F \in \mathcal{L}$, segue que $G = \begin{pmatrix} A \\ t \end{pmatrix} F_t \in \mathcal{L}$. Pela hipótese feita sobre o $\text{Spec}(F)$, obtemos que $\text{Spec}(G) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < -A\}$. Como estamos supondo que a Conjectura A-Fraca de Markus-Yamabe para $\mathcal{L}$ é verdadeira, segue que G é injetiva e, portanto, F_t é injetiva. A afirmação está demonstrada.

A nossa afirmação e o Lema 2.3.5 implicam que F é injetiva. Isto mostra que a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe para $\mathcal{L}$ é verdadeira. A recíproca é óbvia. ■

Seja $F \in \mathcal{L}$ satisfazendo $\text{Spec}(F) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < -A\}$. Uma vez que

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < -A\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| > A\},$$

obtemos que a Conjectura de Chamberland para $\mathcal{L}$ implica a Conjectura A-Fraca de Markus-Yamabe para $\mathcal{L}$. Este fato juntamente com a Proposição 4.2.1 demonstra o seguinte resultado:

Corolário 4.2.2 *A Conjectura de Chamberland para $\mathcal{L}$ implica a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe para $\mathcal{L}$.*

Proposição 4.2.3 *A Conjectura de Chamberland para $\mathcal{L}$ e a Conjectura Forte de Chamberland para $\mathcal{L}$ são equivalentes.*

Demonstração: O mesmo raciocínio que utilizamos para demonstrar o Teorema 4.1.6 nos permite concluir que a Conjectura de Chamberland para $\mathcal{L}$ implica a Conjectura Forte de Chamberland para $\mathcal{L}$. A recíproca é óbvia. ■

No que segue, vamos mostrar que existem subconjuntos de $\mathcal{L}$ para os quais a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe e a Conjectura de Chamberland são válidas.

Denotaremos por $\mathcal{L}_1$ o conjunto das aplicações $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 que satisfazem a seguinte propriedade: se $n \geq 2$, existem $K > 0$ e um subconjunto compacto B de $\mathbb{R}^n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$,

$$\|DF(x)\| \leq K|x|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Observação 4.2.4 Se $F \in \mathcal{L}_1$, então para todo $s, t \in \mathbb{R}$, $sF + tI \in \mathcal{L}_1$, isto é, $\mathcal{L}_1$ é um subconjunto de $\mathcal{L}$. Com efeito, sejam $K > 0$ e B um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, $\|DF(x)\| \leq K|x|^{\frac{1}{n-1}}$. Segue da desigualdade triangular que

$$\|D(sF + tI)(x)\| \leq K|s||x|^{\frac{1}{n-1}} + |t|,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$.

Seja $R > 1$ tal que $B \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Daí, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, obtemos

$$\|D(sF + tI)(x)\| \leq K_1|x|^{\frac{1}{n-1}},$$

onde $K_1 = K|s| + |t|$. Isto mostra que $sF + tI \in \mathcal{L}_1$. Portanto, $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_1$.

Teorema 4.2.5 Seja $F \in \mathcal{L}_1$ e suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $|\det(DF(x))| > \epsilon$. Então F é um difeomorfismo.

Demonstração: Sejam $K > 0$ e B um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$,

$$\|DF(x)\| \leq K|x|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Um raciocínio totalmente análogo ao utilizado no Teorema 4.1.4 nos permite concluir que existe $K_4 > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$,

$$\|[DF(x)]^{-1}\| \leq K_4|x|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Seja $R > 0$ tal que $B \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Então,

$$\int_0^\infty \inf_{|x|=r} \|[DF(x)]^{-1}\|^{-1} dr \geq \int_R^\infty \inf_{|x|=r} \|[DF(x)]^{-1}\|^{-1} dr \geq \int_R^\infty \frac{1}{K_4|r|^{\frac{1}{n-1}}} dr = \infty.$$

Portanto, pelo Teorema de Plastock, F é um difeomorfismo. ■

Corolário 4.2.6 *A Conjectura de Chamberland é verdadeira para aplicações de $\mathcal{L}_1$.*

Corolário 4.2.7 *A Conjectura Fraca de Markus-Yamabe é verdadeira para aplicações de $\mathcal{L}_1$.*

Demonstração: Segue dos Corolários 4.2.6 e 4.2.2. ■

Observando que uma aplicação $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é Lipschitziana se, e somente se, existe $K > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\|DF(x)\| \leq K$, concluímos que o Corolário 4.2.6 é mais forte que o Teorema 4.1.4.

Denotaremos por $\mathcal{L}_2$ o conjunto das aplicações $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que existe um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ fora do qual a matriz jacobiana $DF(x)$ comuta com sua transposta.

Observamos que $\mathcal{L}_2$ é um subconjunto de $\mathcal{L}$.

O próximo resultado resolve afirmativamente a Conjectura de Chamberland para aplicações de $\mathcal{L}_2$. Este resultado foi demonstrado por L. A. Campbell em [7].

Teorema 4.2.8 *Seja $F \in \mathcal{L}_2$ e suponhamos que exista $\epsilon > 0$ tal que*

$$\text{Spec}(F) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \epsilon\}.$$

Então F é um difeomorfismo.

Com o teorema anterior e o Corolário 4.2.2, mostramos a Conjectura Fraca de Markus-Yamabe para aplicações de $\mathcal{L}_2$. Mais precisamente:

Teorema 4.2.9 *Se $F \in \mathcal{L}_2$ e $\text{Spec}(F) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$, então F é injetiva.*

Estabilidade assintótica global

Neste capítulo mostramos que a Conjectura de Markus-Yamabe é verdadeira para campos vetoriais diferenciáveis de dimensão dois e falsa para dimensão maior ou igual a três. As principais referências para este capítulo são [11] e [14].

5.1 Uma solução para a Conjectura de Markus-Yamabe bidimensional

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que a Conjectura de Markus-Yamabe é verdadeira para campos vetoriais diferenciáveis de $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente:

Teorema 5.1.1 *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial diferenciável tal que $X(0) = 0$ e $\text{Spec}(X) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$. Então, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe uma única semi-trajetória positiva começando em p ; além disso, o conjunto ω -limite de p é igual a $\{0\}$.*

Sob a forte suposição de X ser injetivo e de classe C^1 , o teorema acima foi provado por C. Olech em 1963 (veja [28]). Em virtude do Teorema 2.3.7 e da teoria de campos vetoriais contínuos, as principais idéias para demonstrar o Teorema 5.1.1 são as mesmas utilizadas por C. Olech. Em toda esta seção, assumiremos que as hipóteses do Teorema 5.1.1 estejam satisfeitas.

Denotaremos por $X^* : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o campo vetorial ortogonal de X , isto é,

$$X^*(x, y) = (-g(x, y), f(x, y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

No que segue, a mesma notação que aquela usada para intervalos de $\mathbb{R}$ será também usada para arcos orientados de trajetórias $[p, q]$, $[p, q)$, $\dots$ (resp. $[p, q]^*$, $[p, q)^*$, $\dots$) de X (resp. X^*) conectando os pontos $p, q \in \mathbb{R}^2$. Para arcos de trajetórias $[p, q]^*$ de X^* , denotemos

$$L(p, q) = \int_{[p, q]^*} |X| ds,$$

onde ds é o elemento de comprimento de arco e $|\cdot|$ é a norma euclidiana de $\mathbb{R}^2$. Observemos que se $p \neq q$, $L(p, q) > 0$.

Apresentamos a seguir alguns lemas que auxiliarão na prova do Teorema 5.1.1.

Lema 5.1.2 *Seja R o retângulo compacto cuja fronteira é constituída dos seguintes arcos de trajetórias: $[p_1, q_1]$, $[p_2, q_2]$ de X e $[p_1, p_2]^*$, $[q_1, q_2]^*$ de X^* (veja Figura 5.1). Então*

$$L(q_1, q_2) - L(p_1, p_2) < 0.$$

Demonstração: Segue da fórmula de Green apresentada em [29] (Corolário 5.7), que $\text{Traço}(DX)$ é Lebesgue integrável em R e

$$L(q_1, q_2) - L(p_1, p_2) = \int_R \text{Traço}(DX) dx dy. \quad (5.1)$$

Como $\text{Spec}(X) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\}$, temos que $\text{Traço}(DX(x, y)) < 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Isto juntamente com a igualdade (5.1) mostra que

$$L(q_1, q_2) - L(p_1, p_2) < 0.$$

O lema está demonstrado. ■

Figura 5.1:

Com ajuda do Lema 5.1.2 demonstraremos o seguinte:

Lema 5.1.3 *Para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe uma única semi-trajetória positiva de X começando em p .*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que existam duas semi-trajetórias positivas α_p^+ e σ_p^+ de X começando em p . Como 0 é um atrator local de $x' = X(x)$, temos que $p \neq 0$. Logo, pelo Teorema 2.3.7, $X(p) \neq 0$. Assim, podemos construir um triângulo cuja fronteira é constituída de dois arcos de trajetórias $[p, q_1] \subset \alpha_p^+$ e $[p, q_2] \subset \sigma_p^+$ de X e um arco de trajetória $[q_1, q_2]^*$ de X^* .

Figura 5.2:

Aplicando o Lema 5.1.2, obtemos

$$L(q_1, q_2) < 0.$$

Esta contradição prova o lema. ■

Lema 5.1.4 *O campo vetorial X não tem trajetórias fechadas. Além disso, dado $p \in \mathbb{R}^2$, o conjunto ω -limite de p é $\{0\}$ ou é o conjunto vazio.*

Demonstração: Suponhamos, por contradição, que o campo X possua uma trajetória fechada, digamos σ . Se D denota a região de $\mathbb{R}^2$ limitada por σ , então pela fórmula de Green apresentada em [29] e pela hipótese feita sobre o $\text{Spec}(X)$ concluímos

$$0 = \int_{\sigma} (f dy - g dx) = \int_D \text{Traço}(DX) dx dy < 0.$$

Esta contradição mostra que o campo X não tem trajetórias fechadas. Este fato juntamente com o Teorema de Poincaré-Bendixson implicam que o conjunto ω -limite de p é $\{0\}$ ou é o conjunto vazio. O lema está demonstrado. ■

Agora vamos estabelecer mais notações.

Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Recordemos que a distância entre A e B , $d(A, B)$, é definida por

$$d(A, B) = \inf\{|p - q| : p \in A, q \in B\}.$$

Dado o arco $[p, q]^*$ (resp. $[q, p]^*$) de X^* , denotaremos por $\ell(p, q)^*$ seu comprimento de arco.

O próximo lema nos diz até que ponto o comportamento de fluxo persiste quando a unicidade deixa de existir.

Lema 5.1.5 *Sejam W uma vizinhança aberta e limitada de $0 \in \mathbb{R}^2$ e $p_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{W}$. Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que se $[p_1, q_1]$ é um arco de trajetória de X , com $[p_1, q_1] \cap W = \emptyset$, e $[p_1, p_2]^*$ (resp. $[p_2, p_1]^*$) é um arco de trajetória de X^* , com $\ell(p_1, p_2)^* < \delta$, então existem arcos de trajetórias $[p_2, q_2]$ de X e $[q_1, q_2]^*$ (resp. $[q_2, q_1]^*$) de X^* tais que $\ell(q_1, q_2)^* < \epsilon$.*

Demonstração: Nesta demonstração, usaremos a notação $R(p_1, q_1, q_2, p_2)$ para representar o retângulo cuja fronteira é constituída pelos seguintes arcos de trajetórias: $[p_1, q_1]$, $[p_2, q_2]$ de X e $[p_1, p_2]^*$, $[q_1, q_2]^*$ de X^* , onde $[p_1, q_1] \cap W = \emptyset$ e $\ell(p_1, p_2)^* < \delta$ (veja Figura 5.1).

Sejam $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus W$ a bola aberta de centro p_1 e raio r e $\Delta = \sup\{|X(p)| : p \in U\}$. Seja V uma vizinhança aberta de $0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{V} \subset W$. Afirmamos que

(a) existe $\rho > 0$ tal que, para todo $p \in \mathbb{R}^2 \setminus V$, $|X(p)| > \rho$.

De fato, pelo Teorema 2.1.4 temos que X é um homeomorfismo local e pelo Teorema 2.3.7 temos que X é injetivo. Assim, $X(V)$ é um conjunto aberto. Como $0 \in X(V)$, existe $\rho > 0$ tal que a bola de centro 0 e raio ρ está contida em $X(V)$. Logo, pela injetividade de X , $|X(p)| > \rho$ para todo $p \in \mathbb{R}^2 \setminus V$. Isto prova (a).

Notemos que $d(V, \mathbb{R}^2 \setminus W) > 0$, já que $V \subset \overline{V} \subset W$ é limitado e $\mathbb{R}^2 \setminus W$ é fechado. Sejam $0 < \epsilon < d(V, \mathbb{R}^2 \setminus W)$ e $0 < \delta < \min\{r, \epsilon, (\epsilon\rho)/\Delta\}$.

Assumindo que o retângulo $R(p_1, q_1, q_2, p_2)$ exista, provemos que $\ell(q_1, q_2)^* < \epsilon$. Mostremos inicialmente que $[q_1, q_2]^* \cap V = \emptyset$. Suponhamos que isto não ocorra. Então existe $q \in [q_1, q_2]^* \cap \overline{V} \setminus V$. Usando o Lema 5.1.3, obtemos $p \in [p_1, p_2]^*$ tal que $[p, q]$ é um arco de trajetória de X . Como $\ell(q_1, q)^* > \epsilon$ e $L(q_1, q) < L(p_1, p)$ (veja Lema 5.1.2), segue que

$$\rho\epsilon < \rho\ell(q_1, q)^* \leq L(q_1, q) < L(p_1, p) \leq \Delta\ell(p_1, p)^* < \Delta\delta < \epsilon\rho.$$

Esta contradição mostra que $[q_1, q_2]^* \cap V = \emptyset$. Desta forma, usando novamente o Lema 5.1.2, temos que

$$\rho\ell(q_1, q_2)^* \leq L(q_1, q_2) < L(p_1, p_2) \leq \Delta\ell(p_1, p_2)^*.$$

Conseqüentemente, $\ell(q_1, q_2)^* < \frac{\Delta}{\rho}\ell(p_1, p_2)^* < \epsilon$.

Mostremos agora a existência do retângulo $R(p_1, q_1, q_2, p_2)$. Seja m o supremo do conjunto

$$A = \{x \in [p_1, q_1] : \forall y \in [p_1, x], \exists R(p_1, y, q_2(y), p_2)\}.$$

Afirmamos que $m = q_1$. De fato, denotemos por $\alpha_{p_2}^+$ a semi-trajetória positiva do campo X começando em p_2 . Pelo que foi visto acima e por (a), temos que

- (b) se $\varphi(p, t)$ é uma curva integral de X^* com $\varphi(p, 0) = p \in [p_1, q_1]$ e $\varphi(p, t_0) = q \in \alpha_{p_2}^+$, então $\ell(p, q)^* < \epsilon$ e $t_0 < \frac{\epsilon}{\rho}$.

Tomemos $T > \frac{\epsilon}{\rho}$ e $p \in [p_1, q_1]$. O Teorema 5 em [33] implica que o conjunto

$$F(p, T) := \{w \in \mathbb{R}^n : w = \varphi(p, T) \text{ para alguma curva integral de } X^* \text{ com } \varphi(p, 0) = p\}.$$

é compacto e conexo em $\mathbb{R}^2$. Como uma trajetória de X^* só pode interceptar $\alpha_{p_2}^+$ uma única vez, concluímos que $F(p, T) \cap \alpha_{p_2}^+ = \emptyset$ e portanto $d(\alpha_{p_2}^+, F(p, T)) > 0$. Usando o Corolário 3.1 em [33], obtemos que A é um conjunto aberto e não vazio. Para completar a demonstração da afirmação e portanto do Lema, basta mostrar que $m \in A$. Suponhamos, por contradição, que $m \notin A$. Então $d(\alpha_{p_2}^+, F(m, T)) > \sigma > 0$. Usando novamente o Corolário 3.1 em [33], obtemos $r \in [p_1, q_1]$ tal que, para todo $x \in (r, m]$,

$$F(x, T) \subset \{w \in \mathbb{R}^2 : d(w, F(m, T)) < \sigma\}.$$

Isto implica que $(r, m] \in A$, contradizendo a definição de m . Logo $m \in A$ e o lema está demonstrado. ■

Denotemos por $\mathcal{W}^s$ o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ cujo conjunto ω -limite é a origem, isto é,

$$\mathcal{W}^s = \{p \in \mathbb{R}^2 : \omega(p) = \{0\}\}.$$

Como vimos no Teorema 1.4.11, a origem é um atrator local de $x' = X(x)$. Deste fato e usando o Lema 5.1.5 temos o seguinte resultado:

Corolário 5.1.6 $\mathcal{W}^s$ é um subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^2$.

Utilizando os resultados anteriores, podemos demonstrar o Teorema 5.1.1.

Demonstração do Teorema 5.1.1: Pelo Lema 5.1.3, temos que para todo $p \in \mathbb{R}^2$, existe uma única semi-trajetória positiva de X começando em p . Resta mostrarmos agora que $\mathcal{W}^s = \mathbb{R}^2$. O Corolário 5.1.6 garante que $\mathcal{W}^s$ é um subconjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}^2$. Deste modo, pela conexidade de $\mathbb{R}^2$, é suficiente provar que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{W}^s$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$. Se $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{W}^s = \emptyset$, não há o que demonstrar. Caso contrário, seja $p_1 \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{W}^s$. Denotemos por $\alpha_{p_1}^+$ a semi-trajetória positiva do campo X começando em p_1 . Segue do Lema 5.1.4 que $\alpha_{p_1}^+$ é ilimitada. Tomemos uma vizinhança aberta e

limitada V de $0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\overline{V} \subset \mathcal{W}^s$. Observemos que $\alpha_{p_1}^+ \cap V = \emptyset$. Pelo Lema 5.1.5 temos que, para $0 < \epsilon < d(\alpha_{p_1}^+, V)$ suficientemente pequeno, existe $\delta > 0$ tal que se $[p_1, p_2]^*$ (resp. $[p_2, p_1]^*$) é um arco de trajetória de X^* com $\ell(p_1, p_2)^* < \delta$, então para todo $q_1 \in \alpha_{p_1}^+$ existem arcos de trajetórias $[p_2, q_2]$ de X e $[q_1, q_2]^*$ (resp. $[q_2, q_1]^*$) de X^* , onde $\ell(q_1, q_2)^* < \epsilon$. Isto mostra que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{W}^s$ é aberto. O teorema está demonstrado. ■

5.2 Um contra-exemplo polinomial para a Conjectura de Markus-Yamabe para $n \geq 3$

O resultado seguinte é um contra-exemplo polinomial para a Conjectura de Markus-Yamabe em $\mathbb{R}^n$, para todo $n \geq 3$. Esse contra-exemplo foi construído por A. Cima, A. van den Essen, A. Gasull, E. Hubbers e F. Mañosas em [11].

Teorema 5.2.1 *Sejam $n \geq 3$ e $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dado por*

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1 + x_3(x_1 + x_3x_2)^2, -x_2 - (x_1 + x_3x_2)^2, -x_3, \dots, -x_n).$$

Então X é um contra-exemplo para a Conjectura de Markus-Yamabe. Mais precisamente, existe uma solução de $x' = X(x)$ que tende para infinito quando t tende para infinito.

Demonstração: Facilmente verifica-se que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, todos os autovalores de $DX(x)$ são iguais a -1 e $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, $t \in \mathbb{R}$, onde

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 18e^t \\ x_2(t) &= -12e^{2t} \\ x_3(t) &= e^{-t} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

é uma solução de $x' = X(x)$ que obviamente tende para infinito quando t tende para infinito. ■

Referências Bibliográficas

- [1] N. E. Barabanov, *On a problem of Kalman*, Siberian Mathematical Journal, 29 (1988), 333-341.
- [2] H. Bass, E. Conell and D. Wright, *The Jacobian Conjecture: Reduction of Degree and Formal Expansion of the Inverse*, Bull. of the A.M.S. 7 (1982), 287-330.
- [3] J. Bernat and L. Llibre, *Counterexamples to Kalman and Markus-Yamabe conjectures in dimension larger than 3*, Dyn. Cont. Discrete Impulsive Systems, 2 (1996), No. 3, 337-379.
- [4] A. Białynicki-Birula and M. Rosenlicht, *Injective morphisms of real algebraic varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 200-203.
- [5] C. Biasi and C. Gutierrez, *Finite branched coverings in a generalized Inversse Mapping Theorem*, To appear in Elsevier Science.
- [6] C. Camacho e A. Lins Neto, *Teoria geométrica das folheações*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [7] L. A. Campbell, *Characteristic values of the jacobian matrix and global invertibility*, Annales Polonici Mathematici, 76 (2001), No 1-2, 11-20.
- [8] A. V. Černavskii, *Finite-to-one open mappings of manifolds*, Mat. Sbornik, 65 (1964), 357-369.
- [9] A. V. Černavskii, *Addendum to the paper "Finite-to-one open mappings of manifolds"*, Mat. Sbornik, 66 (1965), 471-472.
- [10] M. Chamberland and G. Meisters, *A mountain pass to the Jacobian Conjecture*, Canadian Math. Bull, 41 (1998), 442-451.
- [11] A. Cima, A van den Essen, A. Gasull, E. Hubbers and F. Mañosas, *A Polynomial Counterexample to the Markus-Yamabe Conjecture*, Advances in Mathematics, 131 (1997), 453-457.
- [12] M. Cobo, C. Gutierrez and J. Llibre, *On the injectivity of C^1 maps of the real plane*, Canadian Journal of Mathematics, 54 (2002), No 6, 1187-1201.

- [13] F. Dumortier, *Singularities of vector fields on the plane*, J. Differential Equations, 23 (1977), 53-106.
- [14] A. Fernandes, C. Gutierrez and R. Rabanal, *Global asymptotic stability for differentiable vector fields of $\mathbb{R}^2$* , J. Differential Equations, 206 (2004), No. 2, 470-482.
- [15] A. Fernandes, C. Gutierrez and R. Rabanal, *On local diffeomorphisms of $\mathbb{R}^n$ that are injective*, Qual. Theory Dyn. Syst. 4 (2003), No. 2, 255-262.
- [16] R. Fessler, *A proof of the two dimensional Markus-Yamabe Stability Conjecture and a generalization*, Annales Polonici Math. LXII (1995), 45-74.
- [17] A. Garcia e Y. Lequain, *Elementos de álgebra*, Projeto Euclides, IMPA, 2001.
- [18] C. Gutierrez, *A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture*, Ann. Inst. H. Poincaré. Analyse non linéaire, 12 (1995), 627-671.
- [19] C. Gutierrez and A. Sarmiento, *Injectivity of C^1 maps $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ at infinity and planar vector fields*, Geometric methods in dynamics. II. Astérisque No. 287 (2003), xviii, 89-102.
- [20] J. Hadamard, , *Sur les correspondences ponctuelles*, reprinted in: Oeuvres, Éditions du Centre Nationale de la Recherche Scientifique, Paris, 1968, 383-384.
- [21] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, J. Wiley, 1964.
- [22] K. P. Jain and V. P. Gupta, *Lebesgue measure Theory and Integration*, Wiley Eastern Limited, New Delhi, India, 1986.
- [23] L. Markus and H. Yamabe, *Global stability criteria for differential systems*, Osaka Mat. J. 12 (1960), 305-317.
- [24] G. Meisters and O. Olech, *Solution of the global asymptotic stability Jacobian Conjecture for the polynomial case*, Analyse Mathématique et applications, Gauthier-Villars, Paris (1988), 373-381.
- [25] C. G. T. A. Moreira, *Hausdorff measures and the Morse-Sard theorem*, Publicacions Matematiques, Barcelona, 54 (2001), 149-162.
- [26] S. Nollét and F. Xavier, *Global Inversion via the Palais-Smale Condition*, Discrete and Cont. Dyn. Sys. 8, No. 1, (01/2002), 17-28.
- [27] D. J. Newman, *One-one polynomial maps*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 867-870.
- [28] C. Olech, *On the global stability of an autonomous system on the plane*, Con. to Diff. Eq. 1 (1963), 389-400.
- [29] W. F. Pfeffer, *The Multidimensional Fundamental Theorem of Calculus*, J. Astral. Math. Soc. (Series A) 43 (1987), 143-170.

- [30] S. Pinchuck, *A counterexample to the strong Jacobian Conjecture*, Math. Z. 217 (1994), 1-4.
- [31] R. Plastock, *Homeomorphisms between banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 200 (1974), 169-183.
- [32] S. Radulescu and M. Radulescu, *Local Inversion theorems without assuming continuous differentiability*, J. Math. Anal. Appl. 138 (1989), No. 2, 581-590.
- [33] A. G. Sell, *On the fundamental theory of ordinary differential equations*, J. Diff. Equations, 1 (1965), 370-392.
- [34] B. Smyth and F. Xavier, *Injectivity of local diffeomorphisms from nearly spectral conditions*, J. Diff. Equations, 130 (1996), 406-414.
- [35] J. Sotomayor, *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- [36] I. Vainsencher, *Introdução às Curvas Algébricas Planas*, IMPA (Coleção Matemática Universitária, 5), 1996.
- [37] J. Väisälä, *Discrete open mappings on manifolds*, Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ. Ser. A I No. 392 (1966), 10 pages.
- [38] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics 190, Birkhauser Verlag, Basel (2000).
- [39] R. L. Wheden and A. Zygmund, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.
- [40] A. V. Yagzhev, *On Keller's problem*, Siberian Math. J. 21 (1980), 747-754.