INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

"SÍMBOLOS DE BOARDMAN PARA q -UPLAS DE
APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS"

Angela Maria Sitta

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

"SÍMBOLOS DE BOARDMAN PARA q -UPLAS DE
APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS"

Angela Maria Sitta

Orientador: Prof. Dr. Auster Ruzante

Dissertação apresentada ao Instituto
de Ciências Matemáticas de São Carl
los, da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de "Mestre
em Matemática".

SÃO CARLOS

- 1982 -

À meus pais,
à Maria do Carmo e
à Maria Inês.

BOARDMAN SYMBOLS FOR q -TUPLE OF DIFFERENTIABLE APPLICATIONS

Angela Maria Sitta

Adviser: Prof. Dr. Auster Ruzante

ABSTRACT

The main purpose of this work is to investigate the Boardman Symbols and the Set of Singularities defined for q -tuple of germs of differentiable applications, analysing the extensions of the results and theorems presented by (Gibson, C. G., [1]).

Agradecemos Sinceramente

Ao Prof. Dr. Auster Ruzante que demonstrou sua confiança orientando este trabalho, pela atenção e apoio em momentos difíceis.

Ao Prof. Dr. Wilson Maurício Tadini, pela disponibilidade com que nos atendeu e pelas valiosas sugestões que permitiram a concretização do nosso trabalho.

Aos colegas do I.C.M.S.C. - USP, pela amizade e incentivo.

À FAPESP, cujo auxílio, através de bolsas, possibilitou a realização dos cursos de Pós-Graduação.

À todos que de alguma forma colaboraram na realização deste trabalho.

À Deus, por tudo.

Este trabalho foi patrocinado, parcialmente, pelas Instituições: CNPq, FAPESP, FINEP.

I N D I C E

CAPÍTULO I	01
PRELIMINARES	01
I.1 - Germes de Aplicações Diferenciáveis C^∞	01
I.2 - Lema de Hadamard	02
I.3 - Ação de Grupos em Conjuntos	02
I.4 - Grupos que atuam sobre o Conjunto $\epsilon_{n,p}^0$	03
I.5 - K-Equivalência	05
I.6 - C-Equivalência	06
I.7 - BI-K-Equivalência	08
I.8 - BI-C-Equivalência	10
I.9 - Deformação e Desdobramento de um Germe	11
I.10- Deformação e Desdobramento de um Par de Germes ...	12
I.11- Deformação e Desdobramento de uma q-upla de Germes	12
I.12- q-K-Equivalência	13
I.13- q-C-Equivalência	16
I.14- Conjuntos de Singularidades de Ordem Superior e	
Símbolos de Boardman	20
I.15- Posição Geral	29
I.16- Aplicações Estáveis	30
I.17- Equivalência de Ideais	33
CAPÍTULO II	34
II.1 - Construção do Símbolo de Boardman para uma q-upla	
de aplicações diferenciáveis	34
II.2 - Símbolos de Boardman para uma q-upla de ideais ..	38
II.3 - Símbolos de Boardman para uma q-upla de germes ..	40
II.4 - Singularidades do tipo $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q}$	60
II.5 - q-uplas de Aplicações Genéricas no Sentido de	
Boardman	65

II.6 - Posição Geral e Exemplos de Intersecções Transver	
sais dos Conjuntos de Singularidades	66
II.7 - Comparação entre os Símbolos de Boardman de Pares	
de Germes com os Símbolos de Boardman dos Pares	
como Germes	73
II.8 - Comportamento dos Símbolos de Boardman de um Par	
de Desdobramento a r -parâmetros do Tipo $(t, r-t)$	
do Par de Germes (f_1, f_2) e dos Símbolos de	
Boardman do Par de Germes (f_1, f_2)	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89

INTRODUÇÃO

Através do estudo dos Símbolos de Boardman para um germe de aplicação C^∞ , $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ e dos conjuntos de singularidades de ordem superior para essas aplicações, definimos os símbolos de Boardman e conjunto de singularidades $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q}$ para uma q -upla de germes de aplicações diferenciáveis e analisamos as extensões dos resultados e teoremas apresentados por [1] e verificamos se os mesmos são verdadeiros para uma q -upla de germes.

No capítulo I, damos as definições e teoremas básicos que serão utilizados nas aplicações.

Fazemos as generalizações, para uma q -upla de germes, dos conceitos e teoremas sobre BI-K-equivalência, BI-C-equivalência, deformação e desdobramento de um par de germes apresentados por [2].

No capítulo II, em II.1, fazemos a construção do símbolo de Boardman para uma q -upla de germes de aplicações diferenciáveis.

Em II.2 e II.3 definimos os símbolos de Boardman para uma q -upla de ideais e para uma q -upla de germes, respectivamente, calculamos alguns símbolos de Boardman para pares de germes e estabelecemos resultados a respeito dos símbolos, todos provados. Em II.4, definimos os conjuntos de singularidades do tipo $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q}$ para uma q -upla de germes de aplicações. Em II.5, definimos q -uplas de aplicações genéricas no sentido de Boardman. Em II.6, damos exemplos de intersecções transversais de conjuntos de singularidades. Em II.7, comparamos os símbolos de Boardman de pares de germes com os

símbolos de Boardman desses pares como germes e, em II.8, a nalisamos o comportamento dos símbolos de Boardman de um desdobramento a r -parâmetros do tipo $(t, r-t)$ de um par de germes e dos símbolos de Boardman desse par de germes.

No final do nosso trabalho, encontramos questões abertas a respeito da correlação entre os símbolos de Boardman e o grau de determinação que pretendemos desenvolver futuramente.

CAPÍTULO I

PRELIMINARES

I.1 - GERMES DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS C^∞

Definição:

Sejam S e T subconjuntos não vazios do $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^p$, respectivamente, com S finito.

Consideremos $F_0 = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, f \in C^\infty: f(S) \subset T\}$.

Em F_0 , definimos a relação: $f, g \in F_0$; $f \sim g$ se e somente se existir um aberto U do $\mathbb{R}^n$ contendo S , tal que: $f|_U = g|_U$. Segue que " $\sim$ " é uma relação de equivalência em F_0 . Cada classe de equivalência será denominada "germe de aplicação em S ". Denotaremos por $f: (\mathbb{R}^n, S) \rightarrow (\mathbb{R}^p, T)$.

Observações:

0₁. Se $S = \{0\}$ e $T = \{0\}$, denotaremos $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ e $F_0/\sim = \epsilon_{n,p}^0$. Portanto, $\epsilon_{n,p}^0 = \{f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0); f \in C^\infty\}$. Se $S = \{0\}$, $p = 1$ e $T = \mathbb{R}$, denotaremos $F_0/\sim = \epsilon_n$. Seja $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^n$ e $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ um sistema de coordenadas nas vizinhanças de $0 \in \mathbb{R}^p$.

Em nosso trabalho, trataremos do caso em que $S = \{0\}$. Denotaremos por ϵ_n^0 ou M_n , o ideal de ϵ_n , formado por todos os germes de aplicações $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$.

Mostra-se que ϵ_n é um anel local e que M_n é o seu único ideal maximal. Podemos mostrar, também, que $\epsilon_{n,p}^0$ é um ϵ_n -módulo e que, em relação aos sistemas fixados, a aplicação f pode ser dada por $(f_1, f_2, \dots, f_p)$, com $f_i: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $1 \leq i \leq p$, isto é: $f_i \in \epsilon_n^0$.

Logo, podemos identificar $\varepsilon_{n,p}^0$ com $\varepsilon_n^0 \times \dots \times \varepsilon_n^0$ (p-fatores) e ver que este é um exemplo natural de um ε_n - módulo com base finita. Notemos, em particular, que $\varepsilon_{n,p}^0$ tem estrutura de espaço vetorial real.

0.2. O ideal de ε_n , gerado pelas componentes $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ de $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ será denotado por $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_p \rangle$ ou $I_f = \langle f_1, f_2, \dots, f_p \rangle$.

I.2 - LEMA DE HADAMARD

"Seja U uma vizinhança convexa de $0 \in \mathbb{R}^n$ e seja f uma função C^∞ definida em $U \times \mathbb{R}^q$ que se anula em $0 \in \mathbb{R}^q$. Existem funções C^∞ , $f_1, \dots, f_n$ em $U \times \mathbb{R}^q$, tais que:

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n."$$

Prova: ver [1] - pág. 100

I.3 - AÇÃO DE GRUPOS EM CONJUNTOS

I.3.1. Por uma ação de um grupo G num conjunto M , entendemos uma aplicação $\phi: G \times M \rightarrow M$, definida por:

$$(g, x) \mapsto g.x,$$

tal que para todo $x \in M$; $g, h \in G$ satisfaz:

- (i) $1.x = x$, onde 1 denota a identidade de G .
- (ii) $(gh).x = g.(hx)$.

Dada esta ação, podemos definir uma relação de equivalência " $\sim$ " em M : dizemos que $x \sim y$ quando existir um elemento $g \in G$ para o qual $y = g.x$.

As classes de equivalências são chamadas órbitas pela ação de G em M .

Dado $x \in M$, a órbita por x é, por definição, a classe de equivalência que contem x , ou seja, é

o conjunto:

$$Gx = \{g.x, g \in G\}.$$

I.3.2. Ação C^∞ de Grupos de Lie em Variedades C^∞ .

Definição:

Um grupo de Lie é um grupo G que é uma variedade C^∞ , onde a multiplicação $G \times G \rightarrow G$ e a inversão $G \rightarrow G$ são aplicações C^∞ .

Por uma ação C^∞ de um grupo de Lie G numa variedade C^∞ , M , entendemos uma ação $\phi: G \times M \rightarrow M$, com $\phi \in C^\infty$.

Proposição:

"Seja $\phi: G \times M \rightarrow M$ uma ação C^∞ de um grupo de Lie G numa variedade M , C^∞ . Então, todas as órbitas são subvariedades imersas C^∞ de M . Para qualquer $x \in M$, a aplicação natural

$$\phi_x : G \rightarrow G.x,$$

do grupo na órbita, definida por: $g \mapsto g.x$ é uma submersão".

Prova: ver [1] - pág. 74

I.4 - GRUPOS QUE ATUAM SOBRE O CONJUNTO $\epsilon_{n,p}^0$.

GRUPO C

Seja $C = \{H: (R^n \times R^p, 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0) \mid H \text{ é germe de difeomorfismo em } 0 \text{ e o diagrama } (*) \text{ comuta}\}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (R^n \times R^p, 0) & & \\
 & \nearrow i & \downarrow H & \searrow \pi_n & \\
 (*) \quad (R^n, 0) & & & & (R^n, 0) \\
 & \searrow i & \uparrow \pi_n & & \\
 & & (R^n \times R^p, 0) & &
 \end{array}$$

onde $H|_{R^n \times \{0\}} = \text{Identicidade}$, pois $H(x, 0) = H \circ i(x) = i(x) = (x, 0)$.

Em relação à composição de funções, C tem estrutura de grupo, atuando sobre $\varepsilon_{n,p}^0$, da seguinte maneira:

$$C \times \varepsilon_{n,p}^0 \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$$

$$(H, f) \mapsto H.f = g \Leftrightarrow H \circ (1, f) = (1, g).$$

Propriedades:

P.1. $H \in C$

$$H(R^n \times \{0\}) \subset R^n \times \{0\} \text{ e } H(\{x\} \times R^p) \subset \{x\} \times R^p.$$

P.2. $H \in C$; $f \in \varepsilon_{n,p}^0$; $H.f = g$, então $H(\text{graf } f) = \text{graf } g$, pois: $H(x, f(x)) = H \circ (1, f)(x) = (1, g)(x) = (x, g(x))$.

GRUPO K

Seja $K = \{H: (R^n \times R^p, 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0) \mid H \text{ é germe de difeomorfismo em } 0 \text{ e existe } h: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0) \text{ tal que o diagrama } (*) \text{ comuta}\}$.

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{i} & (R^n \times R^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (R^n, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{i} & (R^n \times R^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (R^n, 0) \end{array}$$

Sendo $H = (H_1, H_2)$, segue que:

$$H(x, 0) = H \circ i(x) = i(h(x)) = (h(x), 0), \text{ com:}$$

$$H_1(x, 0) = h(x) \text{ e } H_2(x, 0) = 0.$$

Temos, também, que $H(x, y) = (h(x), H_2(x, y))$, com $H_1(x, y) = h(x)$, para (x, y) nas vizinhanças de $0 \in R^n \times R^p$. Portanto, h é univocamente determinado por H e é germe de difeomorfismo nas vizinhanças de $0 \in R^n$.

K tem estrutura de grupo, em relação à composição de funções, atuando em $\varepsilon_{n,p}^0$ da seguinte maneira:

$$K \times \varepsilon_{n,p}^0 \rightarrow \varepsilon_{n,p}^0$$

$$(H, f) \mapsto H.f = g \Leftrightarrow H \circ (1, f) \circ h^{-1} = (1, g).$$

I.5 - K-EQUIVALÊNCIA

Definição:

K - Equivalência (ou Equivalência de Contato) é um par (h, H) de germes invertíveis para os quais o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{i} & (R^n \times R^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (R^n, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{i} & (R^n \times R^p, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (R^n, 0) \end{array}$$

Observação:

$\underline{i}$ é o germe em $0 \in R^n$ da aplicação inclusão $i: (R^n, 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0)$ e $\underline{\pi_n}$ é o germe em $0 \in R^n \times R^p$, da aplicação projeção $\pi_n: (R^n \times R^p, 0) \rightarrow (R^n, 0)$.

Devido a comutatividade do diagrama anterior, H é dado por:

$$H(x, y) = (h(x), \theta(x, y)) \text{ com } \theta(x, 0) = 0.$$

Definição:

Dois germes $f, g: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ são K-equivalentes quando existir uma K -equivalência (h, H) para a qual o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f)} & (R^n \times R^p, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, g)} & (R^n \times R^p, 0) \end{array} \quad \text{comuta, isto é:}$$

$$H \circ (1, f) = (1, g) \circ h.$$

Assim, H leva o gráfico de f no gráfico de g , com $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$.

I.6 - C-EQUIVALÊNCIA

Definição:

C-Equivalência é uma particular K-Equivalência: trata-se de um par (h, H) com $h = 1_n$, onde 1_n é o germe em 0 da aplicação identidade do $\mathbb{R}^n$. Neste caso, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & & \\
 & \nearrow i & \downarrow H & \searrow \pi_n & \\
 (\mathbb{R}^n, 0) & & & & (\mathbb{R}^n, 0) \\
 & \searrow i & & \nearrow \pi_n & \\
 & & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0) & &
 \end{array}$$

com $H(x, y) = (x, \theta(x, y))$ e $\theta(x, 0) = 0$.

Definição:

Dois germes $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$

são C-equivalentes quando existir uma C-equivalência (l, H) para a qual o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & & (R^n \times R^p, 0) \\
 & \nearrow (l, f) & \downarrow H \\
 (R^n, 0) & & (R^n \times R^p, 0) \\
 & \searrow (l, g) & \\
 & &
 \end{array}
 \quad \text{comuta, isto é:}$$

$$H \circ (l, f) = (l, g).$$

Portanto, H leva o gráfico de f no gráfico de g .

Consequência da definição de germes C-equivalentes

Dois germes f, g são K-equivalentes se e somente se existir um germe invertível $h: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$ para o qual $f \circ h$ e g são C-equivalentes.

Proposição:

"As seguintes condições para germes f e g em $\epsilon_{n,p}^0$ são equivalentes:

- (i) f e g são C-equivalentes.
- (ii) Os ideais I_f e I_g são iguais.
- (iii) Existe uma matriz invertível (U_{ij}) , $1 \leq i, j \leq p$, com $U_{ij} \in \epsilon_n$ tal que: $f_i = \sum_{j=1}^p U_{ij} g_j$, $1 \leq i \leq p$."

Prova: ver [1], pág. 145

I.7 - BI - K-EQUIVALÊNCIA

Definimos $\varepsilon_{n,p+q}^0$ como sendo o conjunto de todos os pares de germes;

$$(R^n, 0) \begin{array}{l} \xrightarrow{f_1} (R^p, 0) \\ \xrightarrow{f_2} (R^q, 0) \end{array},$$

isto é:

$$\varepsilon_{n,p+q}^0 = \{(f_1, f_2) : (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)\}$$

Definição:

A Bi - K-equivalência é um par de germes invertíveis (h, H) que torna o diagrama abaixo, comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{i} & (R^n \times R^p \times R^q, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (R^n, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{i} & (R^n \times R^p \times R^q, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (R^n, 0) \end{array} \quad \text{com:}$$

$H = (h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np}, \theta_2 \circ \pi_{nq})$, sendo:

1. π_n o germe em 0 e $R^n \times R^p \times R^q$ da aplicação projeção :
 $\pi_n : (R^n \times R^p \times R^q, 0) \rightarrow (R^n, 0)$.

2. i o germe em 0 e R^n da aplicação inclusão $i : (R^n, 0) \rightarrow (R^n \times R^p \times R^q, 0)$.

3. $\theta_1 : (R^n \times R^p, 0) \rightarrow (R^p, 0)$.

4. $\theta_2 : (R^n \times R^q, 0) \rightarrow (R^q, 0)$.

5. $\pi_{np} : (R^n \times R^p \times R^q, 0) \rightarrow (R^n \times R^p, 0)$; $(\pi_{np} (x, y, z) = (x, y))$.

6. $\pi_{nq} : (R^n \times R^p \times R^q, 0) \rightarrow (R^n \times R^q, 0)$; $(\pi_{nq} (x, y, z) = (x, z))$.

Decorre, portanto, da comutatividade

de do diagrama que:

$$H(x, y, z) = (h(x), \theta_1(x, y), \theta_2(x, z)) \text{ e}$$

$$\theta_1(x, 0) = \theta_2(x, 0) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Definição:

Os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0)$ são Bi - K-equivalentes quando existir uma Bi - K-equivalência (h, H) para a qual o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(1, f_1, f_2)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H = (h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np}, \theta_2 \circ \pi_{nq}) \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{(1, g_1, g_2)} & (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, 0) \end{array}$$

comuta, isto é:

$$H \circ (1, f_1, f_2) = (1, g_1, g_2) \circ h$$

$$\Downarrow$$

$$(h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np}, \theta_2 \circ \pi_{nq}) (1, f_1, f_2)(x) = (1, g_1, g_2) \circ h(x)$$

$$\Downarrow$$

$$(h(x), \theta_1(x, f_1(x)), \theta_2(x, f_2(x))) = (h(x), g_1 \circ h(x), g_2 \circ h(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_1(1, f_1) = g_1 \circ h$$

e

$$\theta_2(1, f_2) = g_2 \circ h$$

Geometricamente:

I.8 - BI - C-EQUIVALÊNCIA

Definimos uma particular Bi - K-e
quivalência: trata-se de um par (h, H) com $h = l_n$, sendo
 l_n o germe em 0 da aplicação identidade do R^n .

Neste caso, o diagrama anterior sim
plifica-se e temos a Bi - C-equivalência.

$$H = (\pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np}, \theta_2 \circ \pi_{nq})$$

Definição:

Dizemos que os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ são Bi - C-equivalen-

tes quando existir uma Bi - C-equivalência $(1, H)$ para a qual o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f_1, f_2)} & (R^n \times R^p \times R^q, 0) \\
 & \searrow (1, g_1, g_2) & \downarrow H \\
 & & (R^n \times R^p \times R^q, 0)
 \end{array}$$

comuta, isto é:

$$H \circ (1, f_1, f_2) = (1, g_1, g_2)$$

Proposição:

"Os pares de germes $(f_1, f_2), (g_1, g_2): (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ são Bi - C-equivalentes se e somente se $I_{f_1} = I_{g_1}$ e $I_{f_2} = I_{g_2}$ ".

Prova: ver [2], pág. 19

Proposição:

"Os pares de germes $f = (f_1, f_2)$ e $g = (g_1, g_2): (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ são Bi - K-equivalentes se e somente se existir um germe de difeomorfismo $h: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$ para o qual f e $g \circ h$ são Bi - C-equivalentes".

Prova: ver [2], pág. 20

I.9 - DEFORMAÇÃO E DESDOBRAMENTO DE UM GERME

Definição:

Uma deformação a r - parâmetros de $f_0: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ é um germe $f: (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ com $f(0, x) = f_0(x)$ e o correspondente desdobramento a

r - parâmetros é o germe $F: (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^r \times R^p, 0)$ da do por $F(u, x) = (u, f(u, x))$.

I.10 - DEFORMAÇÃO E DESDOBRAMENTO DE UM PAR DE GERMES

Definição:

Uma deformação a r -parâmetros de um par de germes $(f_{01}, f_{02}): (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ é um par de germes $(f_1, f_2): (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ com $(f_1, f_2)(0, x) = (f_{01}, f_{02})(x)$, sendo $u = (u_1, \dots, u_r)$ e $x = (x_1, \dots, x_n)$ os sistemas de coordenadas em torno da origem de R^r e R^n , respectivamente.

Definição:

Um desdobramento a r -parâmetros do tipo $(s, r-s)$ de um par de germes $(f_{01}, f_{02}): (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ é um par de germes $(F_1, F_2): (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^s \times R^p \times R^{r-s} \times R^q, 0)$ com:

$$(F_1, F_2)(u, x) = (u_1, \dots, u_s, f_1(u, x), u_{s+1}, \dots, u_r, f_2(u, x))$$

e $f_1(0, x) = f_{01}(x); f_2(0, x) = f_{02}(x)$.

I.11 - DEFORMAÇÃO E DESDOBRAMENTO DE UMA q -UPLA DE GERMES

Definição:

Uma deformação a r -parâmetros de uma q -upla de germes $(f_{01}, f_{02}, \dots, f_{0q}): (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ é uma q -upla de germes:

$$(f_1, f_2, \dots, f_q): (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$$

com $(f_1, f_2, \dots, f_q)(0, x) = (f_{01}, f_{02}, \dots, f_{0q})(x)$.

Definição:

Um	desdobramento a r -parâmetros do
	$q-1$
tipo $(s_1, s_2, \dots, s_{q-1}, r$	$= \sum_{i=1}^{q-1} s_i)$ de uma q -upla de
	$i=1$

germes $(f_{01}, f_{02}, \dots, f_{0q}) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{P_1} \times R^{P_2} \times \dots \times R^{P_q}, 0)$ é uma q -upla de germes:

$(F_1, F_2, \dots, F_q) : (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^{S_1} \times R^{P_1} \times R^{S_2} \times R^{P_2} \times \dots \times R^{S_{q-1}} \times R^{P_{q-1}} \times R^{r - \sum_{i=1}^{q-1} S_i} \times R^{P_q}, 0)$, com:

$(F_1, F_2, \dots, F_q)(u, x) = (u_1, \dots, u_{s_1}, f_1(u, x), u_{s_1+1}, \dots, u_{s_1+s_2}, f_2(u, x), \dots, u_{s_1+s_2+\dots+s_{q-1}+1}, \dots, u_r, f_q(u, x))$ e $f_j(0, x) = f_{0j}(x)$, $1 \leq j \leq q$.

I.12 - q - K -EQUIVALÊNCIA

A q - K -equivalência é um par (h, H) de germes invertíveis que torna o diagrama, abaixo, comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{i} & (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (R^n, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H & & \downarrow h \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{i} & (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) & \xrightarrow{\pi_n} & (R^n, 0) \end{array}$$

com:

$H = (h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q})$, sendo:

π_n o germe em $0 \in R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}$ da aplicação projeção $\pi_n : (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \rightarrow (R^n, 0)$.

i o germe em $0 \in R^n$ da aplicação inclusão $i : (R^n, 0) \rightarrow (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0)$.

$\theta_1 : (R^n \times R^{P_1}, 0) \rightarrow (R^{P_1}, 0)$

$\theta_2 : (R^n \times R^{P_2}, 0) \rightarrow (R^{P_2}, 0)$

$\vdots$

$\theta_q : (R^n \times R^{P_q}, 0) \rightarrow (R^{P_q}, 0)$

$\pi_{np_1} : (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \rightarrow (R^n \times R^{P_1}, 0)$

$\pi_{np_2} : (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \rightarrow (R^n \times R^{P_2}, 0)$

$$\pi_{n_{p_q}} : (R^n \times R^{p_1} \times \dots \times R^{p_q}, 0) \rightarrow (R^n \times R^{p_q}, 0)$$

Decorre da comutatividade do dia

grama que:

$$H(x, y_1, y_2, \dots, y_q) = (h(x), \theta_1(x, y_1), \theta_2(x, y_2), \dots, \theta_q(x, y_q)) \text{ e}$$

$$\theta_1(x, 0) = \theta_2(x, 0) = \dots = \theta_q(x, 0) = 0, \text{ para todo } x \in R^n.$$

Definição:

Dizemos que as q -uplas de germes:

$(f_1, f_2, \dots, f_q), (g_1, g_2, \dots, g_q) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ são q -K-equivalentes se existir uma q -K-equivalência (h, H) para a qual o diagrama:

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f_1, \dots, f_q)} & (R^n \times R^{p_1} \times \dots \times R^{p_q}, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow H = (h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q}) \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, g_1, \dots, g_q)} & (R^n \times R^{p_1} \times \dots \times R^{p_q}, 0) \end{array}$$

comuta, isto é:

$$H \circ (1, f_1, f_2, \dots, f_q) = (1, g_1, g_2, \dots, g_q) \circ h$$

$$\Downarrow$$

$$(h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \theta_2 \circ \pi_{np_2}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q}) (1, f_1, f_2, \dots, f_q)(x) = (1, g_1, g_2, \dots, g_q) \circ h(x)$$

$$\Downarrow$$

$$(h(x), \theta_1(x, f_1(x)), \theta_2(x, f_2(x)), \dots, \theta_q(x, f_q(x))) = (h(x), g_1 \circ h(x), \dots, g_q \circ h(x))$$

$$\Downarrow$$

$$\theta_1(1, f_1) = g_1 \circ h$$

$$\theta_2 (1, f_2) = g_2 \circ h$$

$$\vdots$$

$$\theta_q (1, f_q) = g_q \circ h$$

Consequências:

C.1. Se as q -uplas de germes $(f_1, f_2, \dots, f_q)$ e $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ forem q - k -equivalentes então f_i e g_i são k -equivalentes via $(h, (h \circ \pi_n, \theta_i))$, $1 \leq i \leq q$.

Prova:

Pela definição anterior $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ são q - K -equivalentes via $(h, (h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q}))$ e temos:

$$\theta_1 (1, f_1) = g_1 \circ h, \dots, \theta_q (1, f_q) = g_q \circ h$$

Assim, os diagramas sucessivos a baixo comutam, isto é:

$$\begin{array}{ccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f_1)} & (R^n \times R^{p_1}, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow (h \circ \pi_n, \theta_1) \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, g_1)} & (R^n \times R^{p_1}, 0) \end{array}$$

Segue da comutatividade do diagrama

ma (*) que:

$$\begin{aligned} (h \circ \pi_n, \theta_1) \circ (1, f_1) (x) &= (h(x), \theta_1(x, f_1(x))) = \\ &= (h(x), g_1 \circ h(x)) = (1, g_1) \circ h(x). \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{array}{ccc} (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f_q)} & (R^n \times R^{p_q}, 0) \\ \downarrow h & & \downarrow (h \circ \pi_n, \theta_q) \\ (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, g_q)} & (R^n \times R^{p_q}, 0) \end{array}$$

e temos:

$$\begin{aligned} (h \circ \pi_n, \theta_q) (1, f_q) (x) &= (h(x), \theta_q(x, f_q(x))) \\ &= (h(x), g_q \circ h(x)) = (1, g_q) \circ h(x). \end{aligned}$$

Da comutatividade dos q -diagramas acima, concluímos que f_i e g_i são K -equivalentes, $1 \leq i \leq q$.

C.2. Se as q -uplas de germes $(f_1, f_2, \dots, f_q)$ e $(g_1, g_2, \dots, g_q)$ forem q - K -equivalentes, então os germes $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ são K -equivalentes.

Prova

Como as q -uplas de germes $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ são q - K -equivalentes, existe uma q - K -equivalência (h, H) , com $H = (h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q})$, ou seja: $H(x, y_1, \dots, y_q) = (h(x), \theta_1(x, y_1), \dots, \theta_q(x, y_q))$.

Logo os germes $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ são K -equivalentes via a K -equivalência $(h, \bar{H})$ com:

$$\begin{aligned} \bar{H}(x, y_1, \dots, y_q) &= (h(x), \bar{\theta}(x, y_1, \dots, y_q)) \text{ e} \\ \bar{\theta}(x, y_1, \dots, y_q) &= (\theta_1(x, y_1), \dots, \theta_q(x, y_q)). \end{aligned}$$

I.13 - q - C-EQUIVALÊNCIA

Definimos, agora, uma particular q - K -equivalência: trata-se do par (h, H) com $h = 1_{R^n}$, sendo 1_{R^n} o germe em 0 da aplicação identidade de R^n . Neste caso, o diagrama inicial simplifica-se e temos a q - C -equivalência.

com $H = (\pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q})$.

Definição:

Dizemos que as q -uplas de germes:

$(f_1, f_2, \dots, f_q), (g_1, g_2, \dots, g_q): (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ são q -C-equivalentes se existir uma q -C-equivalência (l, H) para a qual o diagrama:

Observação:

Como em C.2., se as q -uplas de germes $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ forem q -C-equivalentes então os germes $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ são C-equivalentes.

Proposição:

"As q -uplas de germes $(f_1, \dots, f_q), (g_1, \dots, g_q): (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ são q -C-equivalentes se e somente se $I_{f_i} = I_{g_i}, 1 \leq i \leq q$ ".

Prova $(\Rightarrow)$

Por hipótese, as q -uplas de germes $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ são q - C-equivalentes e , portanto, são válidas as igualdades:

$\theta_1 (1, f_1) = g_1, \dots, \theta_q (1, f_q) = g_q$ e, ainda, $(1, (\pi_n, \theta_1), \dots, \theta_q))$, $1 \leq i \leq q$ são C-equivalências. Segue que, f_i e g_i são C-equivalentes, $1 \leq i \leq q$.

Portanto, $I_{f_i} = I_{g_i}$, $1 \leq i \leq q$.

 $(\Leftarrow)$

Por hipótese, $I_{f_i} = I_{g_i}$, $1 \leq i \leq q$. Logo, existem C-equivalências $(1, H_i)$, $1 \leq i \leq q$, para as quais os q -diagramas, abaixo, comutam:

$$\begin{array}{ccc}
 (R^n, 0) & \begin{array}{l} \xrightarrow{(1, f_i)} \\ \xrightarrow{(1, g_i)} \end{array} & \begin{array}{c} (R^n \times R^{p_i}, 0) \\ \downarrow H_i \\ (R^n \times R^{p_i}, 0) \end{array} \\
 & & i = 1, \dots, q
 \end{array}$$

$$\theta_i \circ (1, f_i) = g_i, \quad 1 \leq i \leq q.$$

Mostremos que as q -uplas de germes $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ são q - C-equivalentes via a q - C-equivalência $(1, (\pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q}))$.

De fato:

$$(\pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q}) (1, f_1, \dots, f_q) = (1, \theta_1(1, f_1), \dots, \theta_q(1, f_q)) = (1, g_1, \dots, g_q) \text{ e, como conse}$$

quência, temos a comutatividade do diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (R^n, 0) & \begin{array}{l} \xrightarrow{(1, f_1, \dots, f_q)} \\ \xrightarrow{(1, g_1, \dots, g_q)} \end{array} & \begin{array}{l} (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \\ \downarrow (\pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q}) \\ (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \end{array}
 \end{array}$$

Portanto, as q -uplas de germes $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1, \dots, g_q)$ são q - C-equivalentes.

Proposição:

"As q -uplas de germes $f = (f_1, \dots, f_q)$ e $g = (g_1, \dots, g_q)$, $(f, g): (R^n, 0) \rightarrow (R^{P_1} \times R^{P_2} \times \dots \times R^{P_q}, 0)$ são q - K-equivalentes se e somente se e existir um germe de difeomorfismo $h: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$, tal que f e $g \circ h$ são q - C-equivalentes".

Prova:

($\Rightarrow$)

Como f e g são q - K-equivalentes, existe uma q - k-equivalência (h, H) para a qual $H \circ (1, f_1, \dots, f_q) = (1, g_1, \dots, g_q) \circ h$. Mostremos que $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1 \circ h, \dots, g_q \circ h)$ são q - C-equivalentes via $(1, \bar{H})$, com $\bar{H} = (h^{-1} \times 1_{R^{P_1}} \times \dots \times 1_{R^{P_q}}) \circ H$.

Temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{H} (1, f_1, \dots, f_q) &= (\pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q}) (1, f_1, \dots, f_q) \\
 &= (1, \theta_1 (1, f_1), \dots, \theta_q (1, f_q)) = (1, g_1 \circ h, \dots, g_q \circ h) \text{ e o diagrama:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f_1, \dots, f_q)} & (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \\
 & \searrow (1, g_1 \circ h, \dots, g_q \circ h) & \downarrow \bar{H} \\
 & & (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \text{ comuta.}
 \end{array}$$

($\Leftarrow$)

Por hipótese, $(f_1, \dots, f_q)$ e $(g_1 \circ h, \dots, g_q \circ h)$ são q - C-equivalentes. Seja (l, H) com $H = (\pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q})$ a q - C-equivalência entre essas q -uplas de germes. Portanto, $\theta_i(l, f_i) = g_i \circ h$, $1 \leq i \leq q$.

Mostremos que f e g são q - K-equivalentes via $(h, \bar{H})$ com $\bar{H} = (h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q})$.

Temos:

$$\begin{aligned}
 \bar{H}(1, f_1, \dots, f_q) &= (h \circ \pi_n, \theta_1 \circ \pi_{np_1}, \dots, \theta_q \circ \pi_{np_q})(1, \\
 &, f_1, \dots, f_q) = (h, \theta_1(1, f_1), \dots, \theta_q(1, f_q)) = (h, \\
 &, g_1 \circ h, \dots, g_q \circ h) = (1, g_1, \dots, g_q) \circ h \text{ e o diagrama:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, f_1, \dots, f_q)} & (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \\
 \downarrow h & & \downarrow \bar{H} \\
 (R^n, 0) & \xrightarrow{(1, g_1, \dots, g_q)} & (R^n \times R^{P_1} \times \dots \times R^{P_q}, 0) \text{ comuta.}
 \end{array}$$

Definição:

Dada $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$, C^∞ , seja $I = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$ um ideal próprio em ϵ_n^0 . Considere mos $(x_1, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas em $0 \in R^n$ e seja $s \geq 1$, um número inteiro. Definimos $\Delta_s I$ como sendo o ideal $I + I'$, sendo I' o ideal gerado por todos os menores $s \times s$ da matriz jacobiana: $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right)$ onde $f_\alpha \in I$.

Para: $s = 0$, define-se $\Delta_0 I = I$.

Teorema:

"O ideal $\Delta_s I$, assim definido, não depende da escolha do sistema de geradores do ideal I , nem do sistema de coordenadas considerado".

Prova: ver [1] - pág. 178.

Temos que $\Delta_s I = I$, quando $s > n$.

São válidas as inclusões de ideais:

$$I \subseteq \Delta_n I \subseteq \Delta_{n-1} I \subseteq \dots \subseteq \Delta_1 I \quad (*)$$

Adotaremos a notação:

$$\Delta^s I = \Delta_{n-s+1} I \text{ e}$$

nos referimos a $\Delta^1 I$, $\Delta^2 I$, ..., $\Delta^n I$ como sendo as Extensões Jacobianas Sucessivas do ideal I . Devido à sequência de inclusões (*), temos:

$$I = \Delta^0 I \subseteq \Delta^1 I \subseteq \Delta^2 I \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I. \quad (**).$$

Dizemos que o ideal I será próprio quando $I \neq \epsilon_n$.

Suponhamos que I seja próprio. A extensão jacobiana crítica de I será o último ideal $\Delta^{i_1} I \subseteq M_n$ próprio da sequência (**). Este ideal terá uma nova

extensão jacobiana crítica $\Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I$ e assim, sucessivamente. Desta forma, obteremos uma sequência crescente $\Delta^{i_1} I$, $\Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I$, ... de extensões jacobianas críticas sucessivas de I e diremos que I tem símbolo de Boardman $(i_1, i_2, \dots)$.

Definição:

EXTENSÕES JACOBIANAS DE IDEAIS

Sejam K um corpo, e $A_n = K \left[x_1, \dots, x_n \right]$ o conjunto das séries formais com indeterminadas $x_1, \dots, x_n$ e coeficientes no corpo K .

Portanto, se a é um elemento de A_n , então ele se expressa por:

$$a = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_r + \dots, \text{ onde}$$

$\bar{a}_0$ é um elemento de K .

$$\bar{a}_1 = \sum_{i=1}^n s_i x_i; \bar{a}_2 = \sum_{i \leq j} s_{ij} x_i x_j; \text{ etc.}$$

POSTO (rank) DE UM IDEAL $I \subseteq A_n$

Definição:

Seja $I \subsetneq A_n$

$\text{rank } I = \dim ((I + M_n^2) / M_n^2) = \text{número de elementos de } I \text{ com partes lineares linearmente independentes.}$

(Os elementos com partes lineares linearmente independentes de I , não necessariamente geram I).

Teorema:

"Seja $I \subsetneq M_n$, um ideal.

$r = \text{rank } I$ se e somente se a extensão crítica de I é o ideal $\Delta_{r+1} I$.

Notação: $\delta I = \Delta_{r+1} I$.

Prova:

Temos:

$$\Delta^1 I = \Delta_{n-i+1} I$$

$$\Delta^0 I = I = \Delta_{n+1} I$$

$$\Delta^1 I = \Delta_n I$$

$$\Delta^2 I = \Delta_{n-1} I$$

⋮

São válidas as inclusões:

$$\Delta_{n+1} I \subset \Delta_n I \subset \dots \subset \Delta_{r+1} I \subset \Delta_r I \subset \dots \subset M_n \subset \varepsilon_n$$

($\Rightarrow$)

Por hipótese, $r = \text{rank } I$.

Suponhamos que $f_1, \dots, f_r \in I$ tal que $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_r$ sejam L.I., sendo $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$ as partes lineares de $f_1, \dots, f_r$, respectivamente.

$$f_1 = a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \dots + \dots = \bar{f}_1 + 0(2)$$

$$f_2 = a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + \dots = \bar{f}_2 + 0(2)$$

$$f_r = a_{1r} x_1 + a_{2r} x_2 + \dots + \dots = \bar{f}_r + 0(2)$$

Seja $B = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i \right), f_i \in I$.

Sendo $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_r$ L.I., segue que em B, existe um menor $r \times r$, cujo elemento é unitário. Então $\Delta_r I = \varepsilon_n$. Portanto, $\Delta_{r+1} I$ será a extensão crítica de I, pois $\Delta_{r+1} I \subset M_n$.

($\Leftarrow$)

Por hipótese: $\delta I = \Delta_{r+1} I$

$\Delta_{r+1} I = \delta I \subset M_n \Rightarrow \text{rank } I \leq r$.

Suponhamos que $\text{rank } I \leq r-1$.

Temos:

$\Delta_{r+1} I \subset \Delta_r I \subset M_n$

Como $\text{rank } I \leq r-1 \Rightarrow \Delta_r I \neq \varepsilon_n$.

A extensão crítica de I é o ideal $\Delta_\sigma I$, para algum $\sigma \leq r$, o que é absurdo.

Portanto, $\text{rank } I = r$.

CORANK DE UM IDEAL $I \subset M_n$

Definição:

Seja $I \subset M_n$. Definimos corank de I, como sendo o número $n - \text{rank } I$.

Notação: $\text{corank } I = n - \text{rank } I$.

SÍMBOLO DE BOARDMAN DE UM IDEAL $I \subset M_n$

Definição:

Seja $I \subset M_n$. Definimos como Símbolo de Boardman de I, como sendo a sequência $J = (i_1, i_2, \dots, i_r)$,

, ...), onde $i_1 = \text{corank } I$, $i_2 = \text{corank } \delta I$, $i_3 = \text{corank } \delta^2 I$, ..., $i_k = \text{corank } \delta^{k-1} I$.

Observação:

As duas definições apresentadas sobre símbolos de Boardman de um ideal são equivalentes: seja $I \subset M_n$. Suponhamos que I seja próprio e que a extensão jacobiana crítica de I seja o ideal $\Delta^1 I$. Então, o primeiro índice do símbolo de Boardman de I é i_1 . Observe que:

$$\delta I = \Delta^1 I = \Delta_{n-i_1+1} I \Rightarrow \text{rank } I = n - i_1.$$

Portanto, $i_1 = n - \text{rank } I \Rightarrow i_1 = \text{corank } I$.

Observação análoga é válida para os demais índices dos símbolos de Boardman do ideal I .

Definição:

O Símbolo de Boardman de um germe $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^P, 0)$ é definido como sendo o Símbolo de Boardman do ideal I_f gerado pelas componentes $(f_1, \dots, f_p)$ de f .

Teorema:

"O Símbolo de Boardman de um germe: $(R^n, 0) \rightarrow (R^P, 0)$ é invariante por K-equivalência, isto é, se dois germes forem K-equivalentes então terão o mesmo símbolo de Boardman".

Prova:

Sejam $f, g: (R^n, 0) \rightarrow (R^P, 0)$ com:

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$$

e

$$g = (g_1, g_2, \dots, g_p)$$

Etapa 1

Suponhamos que os germes f e g sejam C -equivalentes. Então, $I_f = I_g$ (ver Proposição - pag. 7). Pelo Teorema (pág. 21), os símbolos de Boardman dos germes f e g coincidem.

Etapa 2

Por hipótese, os germes f e g são K -equivalentes. Então, existe germe invertível $h: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$ tal que $f \circ h$ e g são C -equivalentes (ver pág.). Pela etapa 1, temos:

$$I_{f \circ h} = I_g$$

As componentes $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ de h constituem um sistema de coordenadas em $0 \in R^n$.

Logo, o ideal gerado pelos menores $s \times s$ da matriz jacobiana de g relativamente ao sistema de coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $0 \in R^n$ é equivalente ao ideal gerado pelos menores $s \times s$ da matriz jacobiana de f em relação ao sistema de coordenadas $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ em $0 \in R^n$. Segue que f e g têm o mesmo símbolo de Boardman.

Teorema:

"Os primeiros k -inteiros do símbolo de Boardman de um germe $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ dependem so

mente do k -jato de f ".

Prova: ver [1] - pág. 181.

O objetivo é obter partições, formadas pelos conjuntos de singularidades de ordem k , no espaço dos jatos $J^k(n, p)$. Dados k -inteiros $i_1, i_2, \dots, i_k$, dizemos que um germe $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$ apresenta singularidade do tipo $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ quando seu símbolo de Boardman for igual a $(i_1, i_2, \dots, i_k)$.

Definimos $\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_k}$ como sendo o subconjunto do espaço de jatos $J^k(n, p)$, formado pelos jatos que têm como representantes germes do tipo $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$. Pelo Teorema anterior, este conjunto está bem definido.

Teorema:

"Para que o conjunto $\Sigma^{i_1, \dots, i_k} \subseteq J^k(n, p)$ seja não vazio é necessário e suficiente que as seguintes condições estejam satisfeitas:

$$(i) \quad n \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k \geq 0.$$

$$(ii) \quad i_1 \geq n-p.$$

$$(iii) \quad \text{Se } i_1 = n-p \text{ então } i_1 = i_2 = \dots = i_k."$$

Prova: ver [1] - pág. 183.

Segue, como consequência desse Teorema, que a partição de $J^k(n, p)$ em subconjuntos, não vazios, $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ é finita.

Teorema

"Se $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ for não vazio, en

tão este subconjunto será uma subvariedade C^∞ de $J^k(n, p)$ de codimensão: $(p - n + i_1) \cup (i_1, \dots, i_k) - (i_1 - i_2) \cup (i_2, \dots, i_k) - \dots - (i_{k-1} - i_k) \cup (i_k)$ onde $\mu(i_1, \dots, i_k)$ denota o número de sequências $(j_1, \dots, j_k)$ de inteiros que satisfazem as seguintes condições:

$$(i) \quad j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_k \geq 0.$$

$$(ii) \quad i_s \geq j_s \text{ para todo } 1 \leq s \leq k \text{ e } j_1 > 0''.$$

Prova: ver [1] - pág. 185.

Os conjuntos $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ são chamados subvariedades de Boardman de $J^k(n, p)$.

Segue do Lema de Transversalidade de Thom (ver [1], Cáp. II, § 4) que o conjunto de todas as aplicações $C^\infty f: R^n \rightarrow R^p$, para as quais $j^k f$ é transversal a todas as subvariedades de Boardman $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ é denso em $C^\infty(R^n, R^p)$.

Definição:

Dizemos que uma aplicação $C^\infty, f: R^n \rightarrow R^p$ é genérica no sentido de Boardman se $j^k f$ for transversal a todas as subvariedades de Boardman $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ para todo inteiro $k \geq 1$. Para tais aplicações, o conjunto $\Sigma^{i_1, \dots, i_k} f = (j^k f)^{-1}(\Sigma^{i_1, \dots, i_k})$ será uma subvariedade do R^n de mesma codimensão que $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$.

Boardman mostrou que:

"Se $f: R^n \rightarrow R^p$ for genérica no sentido de Boardman então:

$$\Sigma^{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}} f = \Sigma^{i_{k+1}} (f | \Sigma^{i_1, \dots, i_k} f).$$

Também, são válidas as inclusões:

$$\Sigma^{i_1} f \supseteq \Sigma^{i_1, i_2} f \supseteq \Sigma^{i_1, i_2, i_3} f \supseteq \dots$$

Teorema:

Seja $F: (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^r \times R^p, 0)$
um desdobramento a r -parâmetros do germe $f: (R^n, 0) \rightarrow (R^p, 0)$. Então, f e F têm o mesmo símbolo de Boardman.

Portanto, os símbolos de Boardman são invariantes por desdobramentos.

Prova: ver [1] - pág. 188.

*I.15 - POSIÇÃO GERAL*Definição:

Sejam $H_1, \dots, H_r$ subespaços de um espaço vetorial V . Dizemos que $H_1, \dots, H_r$ estão em posição geral se para toda sequência de inteiros $i_1, \dots, i_s$ com $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_s \leq r$; $\text{codim}(H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_s}) = \text{codim}(H_{i_1}) + \dots + \text{codim}(H_{i_s})$.

Observação:

No caso $r = 2$, temos que, H_1 e H_2 estão em posição geral se e somente se $H_1 + H_2 = V$.

Suponhamos $\dim V = n$.

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2) = n - (\text{codim } H_1 + \text{codim } H_2 - \text{codim}(H_1 \cap H_2)).$$

Portanto,

$$\dim(H_1 + H_2) = n \text{ se e somente se } \text{codim}(H_1 \cap H_2) = \text{codim } H_1 + \text{codim } H_2.$$

Definição:

Sejam $Y_1, \dots, Y_r$ subvariedades de uma variedade Y .

Diremos que $Y_1, \dots, Y_r$ estão em posição geral se $Y_1 \cap \dots \cap Y_r = \emptyset$ ou se para todo $q \in Y_1 \cap \dots \cap Y_r$, $T_q Y_1, \dots, T_q Y_r$ estiverem em posição geral sendo que $T_q Y_i$ são os espaços tangentes a Y_i no ponto q , $1 \leq i \leq r$ e $T_q Y$ é o espaço tangente a Y em q .

Observação :

Se tivermos duas subvariedades Y_1 e Y_2 de Y , então Y_1 e Y_2 estarão em posição geral se:

$$T_q Y_1 + T_q Y_2 = T_q Y, \quad q \in Y_1 \cap Y_2.$$

Portanto, dizer que duas subvariedades estão em posição geral é equivalente a dizer que elas se interceptam transversalmente.

Teorema:

Se $Y_1, \dots, Y_r$ forem subvariedades de uma variedade Y e estiverem em posição geral em um ponto q , então em uma vizinhança desse ponto, essas subvariedades poderão ser, simultaneamente, linearizadas.

Prova: ver [3], Lema 3.10, pág. 85.

I.16 - APLICAÇÕES ESTÁVEISDefinição:

Sejam $f_1, f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações C^∞ . Dizemos que f_1 e f_2 são equivalentes se existirem di

feomorfismos $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $h: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ para os quais o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R}^p \\ \uparrow g & & \uparrow h \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R}^p \end{array}$$

"Uma aplicação $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, C^\infty$, é estável se existir um número real $\varepsilon > 0$ tal que para toda aplicação $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, C^\infty$, numa ε -vizinhança de f , na topologia de Whitney, for equivalente a f ".

Teorema:

"Toda aplicação estável $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é genérica no sentido de Boardman, isto é, $j^k f$ é transversal a todas as subvariedades de Boardman $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$, para todo inteiro $k \geq 1$ ".

Prova: ver [1], pág. 206.

Observação:

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação estável. Então, o germe de f , considerado em qualquer ponto é estável.

Singularidades de Aplicações Estáveis (ver [1] - págs. 207-214).

(i) Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicação estável. O germe dessa aplicação, em qualquer ponto, é equivalente a um dos modelos:

$$\Sigma^0 \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{array} \right. \quad (\text{regular})$$

$$\Sigma^{1,0} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^2 \end{array} \right. \quad (\text{dobra})$$

$$\Sigma^{1,1,0} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2^3 + x_1 x_2 \end{array} \right. \quad (\text{cúspide})$$

Esses resultados foram obtidos por

H. Whitney.

(ii) Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ aplicação estável. O germe dessa aplicação, em qualquer ponto, é equivalente a um dos modelos:

$$\Sigma^0 \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{array} \right. \quad (\text{regular})$$

$$\Sigma^{1,0} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3^2 \end{array} \right. \quad (\text{dobra})$$

$$\Sigma^{1,1,0} \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3^3 + x_1 x_3 \end{array} \right. \quad (\text{cúspide})$$

$$\Sigma^{1,1,1,0} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3^4 + x_1 x_3 + x_2 x_3^2 \end{cases} \quad (\text{"dovetail"})$$

(iii) Seja $f: R^3 \rightarrow R^2$ aplicação estável. O germe dessa aplicação, em qualquer ponto, é equivalente a um dos modelos:

$$\Sigma^1 \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

$$\Sigma^{2,0} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \pm x_2^2 \pm x_3^2 \end{cases}$$

$$\Sigma^{2,1,0} \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \pm x_2^2 \pm x_3^3 + x_1 x_3 \end{cases}$$

I.17 - EQUIVALÊNCIA DE IDEAIS

Definição:

Sejam I e J ideais em ε_n . I é equivalente a J se existir $\phi: \varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_n$, um isomorfismo de R - álgebra tal que $\phi(I) = J$.

CAPÍTULO 11

SÍMBOLOS DE BOARDMAN PARA q -UPLAS DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

II.1 - CONSTRUÇÃO DO SÍMBOLO DE BOARDMAN PARA UMA q -UPLA DE APLICAÇÕES DIFERENCIÁVEIS

Dada $(f_1, f_2, \dots, f_q): (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$, seja $I = (I_1, I_2, \dots, I_q)$ uma q -upla de ideais em $M_n \times M_n \times \dots \times M_n$ (q -fatores), com $I_1 = \langle f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1p_1} \rangle$, $I_2 = \langle f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2p_2} \rangle$, $\dots$, $I_q = \langle f_{q1}, f_{q2}, \dots, f_{qp_q} \rangle$.

Consideremos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas em $0 \in R^n$ e seja $s \geq 1$, um número inteiro.

Definimos $\Delta_s I = (\Delta_s I_1, \Delta_s I_2, \dots, \Delta_s I_q)$, tal que $\Delta_s I_i$, $1 \leq i \leq q$, é definido como sendo o ideal $I_i + I'_i$ e I'_i é o ideal gerado por todos os menores $s \times s$ das matrizes jacobianas:

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right) \quad \text{onde} \quad f_\alpha \in I_i.$$

Teorema:

"A q -upla de ideais $\Delta_s I$, definida acima, não depende da escolha do sistema de geradores dos ideais I_i , $1 \leq i \leq q$ ".

Prova:

Faremos para o caso $1 \leq i \leq 2$.

Caso 1:

Para pares de ideais finitamente ge-

rados:

Dados os pares $(f_1, f_2); (\bar{f}_1, \bar{f}_2) :$
 $(R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0)$ consideremos o par de ideais finitamente gerados $I = (I_1, I_2)$ com:

$$I_1 = \langle f_{11}, \dots, f_{1p_1} \rangle = \langle \bar{f}_{11}, \dots, \bar{f}_{1p_1} \rangle$$

e

$$I_2 = \langle f_{21}, \dots, f_{2p_2} \rangle = \langle \bar{f}_{21}, \dots, \bar{f}_{2p_2} \rangle$$

Sejam $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um sistema de coordenadas em $O \in R^n$ e $s \geq 1$, um número inteiro.

Mostremos que o par de ideais $\Delta_s I = (\Delta_s I_1, \Delta_s I_2)$, sendo $\Delta_s I_i$ o ideal $I_i + I'_i$, $i = 1, 2$ e I'_i o ideal gerado por todos os menores $s \times s$, respectivamente, das matrizes jacobianas:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{11}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{11}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{1p_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{1p_1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{21}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{21}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{2p_2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{2p_2}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

coincide com o par de ideais gerados pelos novos representantes e pelos menores $s \times s$ das matrizes jacobianas:

$$(**) \quad \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \bar{f}_{11}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \bar{f}_{11}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{f}_{1p_1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \bar{f}_{1p_1}}{\partial x_n} \end{array} \right] \quad e \quad \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \bar{f}_{21}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \bar{f}_{21}}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \bar{f}_{2p_2}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \bar{f}_{2p_2}}{\partial x_n} \end{array} \right]$$

É suficiente provar que qualquer par gerado pelos menores $s \times s$ das matrizes $(**)$ pertence a $\Delta_s I$.

Cada componente $\bar{f}_{1j}$ e $\bar{f}_{2k}$ do par $(\bar{f}_{1j}, \bar{f}_{2k})$ pode ser escrita, respectivamente, como combinação linear das componentes $f_{1\ell}$ e f_{2s} do par $(f_{1\ell}, f_{2s})$, com coeficientes em ε_n .

Assim, cada derivada parcial $\frac{\partial \bar{f}_{1j}}{\partial x_r}$ e

$\frac{\partial \bar{f}_{2k}}{\partial x_r}$ pode ser escrita, respectivamente, com a mesma combinação linear de $\frac{\partial f_{1\ell}}{\partial x_r}$ e $\frac{\partial f_{2s}}{\partial x_r}$. Usando a multilinearidade

do determinante, qualquer par gerado pelos menores $s \times s$ de $(**)$ pertence a $\Delta_s I$, definido no início da demonstração.

Portanto, o par de ideais $\Delta_s I$ não depende da escolha do sistema de geradores que formam o par $I = (I_1, I_2)$.

Caso 2:

Os ideais I_1 e I_2 não necessariamente finitamente gerados.

$$I_1 = \langle f_\alpha \rangle, \alpha \in A.$$

$$I_2 = \langle g_\beta \rangle, \beta \in B.$$

$$\langle f_\alpha \rangle = \langle \bar{f}_\alpha \rangle \text{ e } \langle g_\beta \rangle = \langle \bar{g}_\beta \rangle$$

Neste caso, a técnica se aplica analogamente.

A prova é análoga para uma q -upla de ideais $I = (I_1, I_2, \dots, I_q)$.

Observação:

O.1: Para $I = (I_1, I_2, \dots, I_q)$ e $\Delta_s I = (\Delta_s I_1, \dots, \Delta_s I_q)$, temos que:

$\Delta_s I = I$ quando $s > n$ e são válidas as inclusões de q -uplas de ideais:

$$I \subseteq \Delta_n I \subseteq \Delta_{n-1} I \subseteq \dots \subseteq \Delta_1 I.$$

Exemplo:

Seja $(f_1, f_2) : (R^2, 0) \rightarrow (R \times R, 0)$ definido por: $(x, y) \mapsto (xy, x^2 + y^2)$.

$$I = (I_1, I_2), I_1 = \langle f_1 \rangle = \langle xy \rangle$$

$$I_2 = \langle f_2 \rangle = \langle x^2 + y^2 \rangle$$

$$\text{Jac } (f_1) = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}; \text{Jac } (f_2) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$

$$1. \quad \Delta_1 I = (\Delta_1 I_1, \Delta_1 I_2)$$

$$\Delta_1 I_1 = \langle xy, x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle x^2 + y^2, x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\therefore \Delta_1 I = (\langle x, y \rangle, \langle x, y \rangle)$$

$$2. \Delta_2 I = (\Delta_2 I_1, \Delta_2 I_2)$$

$$\Delta_2 I_1 = I_1 \text{ e } \Delta_2 I_2 = I_2$$

$$\Delta_2 I = (I_1, I_2) = I$$

$$\text{Portanto, } \Delta_s I = I, s \geq 2.$$

II.2 - DEFINIÇÃO

Dada uma q-upla de ideais:

$I = (I_1, I_2, \dots, I_q) \subset M_n \times M_n \times \dots \times M_n$ (q-fatores), adotaremos a notação:

$\Delta^s I = \Delta_{n-s+1} I = (\Delta_{n-s+1} I_1, \Delta_{n-s+1} I_2, \dots, \Delta_{n-s+1} I_q)$ e denominamos $\Delta^1 I, \Delta^2 I, \dots, \Delta^n I$ extensões jacobianas sucessivas da q-upla de ideais I .

Pelas inclusões anteriores (ver 0.1, pag.37), são válidas:

$$I = \Delta^0 I \subseteq \Delta^1 I \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I.$$

A q-upla de ideais I é chamada própria quando $I_i \neq \varepsilon_n, 1 \leq i \leq q$.

Suponhamos que $I = (I_1, I_2, \dots, I_q)$ seja própria.

A extensão jacobiana crítica da primeira componente I_1 é o último ideal $\Delta^{i_1} I_1$ pertencente à sequência $I_1 = \Delta^0 I_1 \subseteq \Delta^1 I_1 \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I_1$ que é próprio. Re

petimos o processo para o ideal $\Delta^{i_1} I_1$.

$\Delta_s \Delta^{i_1} I_1$ é o ideal gerado por $\Delta^{i_1} I_1$ e pelos menores $s \times s$ da matriz formada pelas derivadas parciais desses geradores, relativamente ao sistema de coordenadas considerado.

Chamaremos essa matriz de "jacobiana" de $\Delta^{i_1} I_1$ e denotaremos por "Jac" ($\Delta^{i_1} I_1$). Pelo Teorema anterior, o ideal $\Delta_s \Delta^{i_1} I_1$ independe da escolha dos geradores de $\Delta^{i_1} I_1$.

Este ideal possui uma outra extensão jacobiana crítica $\Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I_1$ e assim, sucessivamente.

Desta forma, obtemos uma sequência crescente: $\Delta^{i_1} I_1, \Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I_1, \dots$ de extensões jacobianas críticas sucessivas do ideal I_1 e dizemos que I_1 tem símbolo de Boardman $J_1 = (i_1, i_2, \dots)$.

Analogamente, para a segunda componente de I , obtemos uma sequência crescente $\Delta^{j_1} I_2, \Delta^{j_2} \Delta^{j_1} I_2, \dots$ de extensões jacobianas críticas sucessivas do ideal I_2 e dizemos que I_2 tem símbolo de Boardman $J_2 = (j_1, j_2, \dots)$ e assim, sucessivamente, para as demais componentes de I .

Definimos o símbolo de Boardman para a q -upla de ideais $I = (I_1, I_2, \dots, I_q)$ como sendo

$$(J_1; J_2; \dots; J_q).$$

II.3 - DEFINIÇÃO

O símbolo de Boardman para uma q -upla de germes $(f_1, f_2, \dots, f_q) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ é definido por $(J_1; J_2; \dots; J_q)$, sendo J_i o símbolo de Boardman do ideal:

$$I_{f_i} = \langle f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{ip_i} \rangle, \quad 1 \leq i \leq q.$$

Exemplos: Cálculo do símbolo de Boardman para pares de germes.

Exemplo 1

Seja $(f_1, f_2) : (R^2, 0) \rightarrow (R \times R, 0)$

definido por:

$$(x, y) \mapsto (xy, x^2 + y^2)$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle xy \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle x^2 + y^2 \rangle$$

1. Símbolo de Boardman de f_1 :

$$\text{Jac } (f_1) = \begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_1 = I_1$$

$$\Delta_1 I_1 = \langle xy, x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\Delta_s I_1 = I_1, \quad s \geq 2$$

$$\Delta^0 I_1 = \Delta_3 I_1 = I_1$$

$$\Delta^1 I_1 = \Delta_2 I_1 = I_1$$

$$\Delta^2 I_1 = \Delta_1 I_1 = \langle x, y \rangle \Rightarrow i_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_1 = \Delta_0 I_1 = I_1$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_1 =$

$$= \langle x, y \rangle$$

$$\text{"Jac"} (\Delta^2 I_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^2 I_1 = \Delta^2 I_1$$

$$\Delta_1 \Delta^2 I_1 = \langle x, y, 1, 0 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 \Delta^2 I_1 = \langle x, y, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^2 I_1 = \Delta^2 I_1, s \geq 3$$

$$\Delta^0 \Delta^2 I_1 = \Delta_3 \Delta^2 I_1 = \Delta^2 I_1$$

$$\Rightarrow i_2 = 0$$

$$\Delta^1 \Delta^2 I_1 = \Delta_2 \Delta^2 I_1 = \langle 1 \rangle$$

O símbolo de Boardman de f_1 é $(2, 0)$.

2. Símbolo de Boardman de f_2 :

$$\text{Jac} (f_2) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle x^2 + y^2, 2x, 2y \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, \quad s \geq 2$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_2 I_2 = I_2$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle x, y \rangle \Rightarrow j_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_2 = \Delta_0 I_2 = I_2$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_2 = \langle x, y \rangle$, pelo item 1, obtemos: $j_2 = 0$.

O símbolo de Boardman de f_2 é $(2, 0)$.

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(2, 0; 2, 0)$.

Exemplo 2:

Seja $(f_1, f_2) : (R^2, 0) \rightarrow (R^2 \times R, 0)$

definido por:

$$(x, y) \mapsto ((x^3 + y^2, y^3), y^2)$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle x^3 + y^2, y^3 \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle y^2 \rangle$$

1. Símbolo de Boardman de f_1 :

$$\text{Jac } (f_1) = \begin{bmatrix} 3x^2 & 2y \\ 0 & 3y^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_1 = I_1$$

$$\Delta_1 I_1 = \langle x^3 + y^2, y^3, 3x^2, 3y^2, 2y \rangle = \langle x^2, y \rangle$$

$$\Delta_2 I_1 = \langle x^3 + y^2, y^3, 9x^2 y^2 \rangle = \langle x^2, y^2 \rangle$$

$$\Delta_s I_1 = I_1, s \geq 3$$

$$\Delta^0 I_1 = \Delta_3 I_1 = I_1$$

$$\Delta^1 I_1 = \Delta_2 I_1 = \langle x^2, y^2 \rangle$$

$$\Delta^2 I_1 = \Delta_1 I_1 = \langle x^2, y \rangle \Rightarrow i_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_1 = \Delta_0 I_1 = I_1$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_1 =$

$$= \langle x^2, y \rangle$$

$$\text{"Jac"} \quad (\Delta^2 I_1) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^2 I_1 = \Delta^2 I_1$$

$$\Delta_1 \Delta^2 I_1 = \langle x^2, y, 2x, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 \Delta^2 I_1 = \langle x^2, y, 2x \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^2 I_1 = \Delta^2 I_1, s \geq 3$$

$$\Delta^0 \Delta^2 I_1 = \Delta_3 \Delta^2 I_1 = \Delta^2 I_1$$

$$\Delta^1 \Delta^2 I_1 = \Delta_2 \Delta^2 I_1 = \langle x, y \rangle \Rightarrow i_2 = 1$$

$$\Delta^2 \Delta^2 I_1 = \Delta_1 \Delta^2 I_1 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 \Delta^2 I_1 =$
 $= \langle x, y \rangle$, pelos cálculos feitos no exemplo 1, obtemos $i_3 = 0$.

O símbolo de Boardman de f_1 é
 $(2, 1, 0)$.

2. Símbolo de Boardman de f_2 :

$$\text{Jac} (f_2) = \begin{bmatrix} 0 & 2y \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle y^2, 2y \rangle = \langle y \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, \quad s \geq 2.$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_2 I_2 = I_2$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle y \rangle \Rightarrow j_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_2 = \Delta_0 I_2 = I_2$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_2 = \langle y \rangle$

$$\text{"Jac"} (\Delta^2 I_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$$

$$\Delta_1 \Delta^2 I_2 = \langle y, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2, \quad s \geq 2$$

$$\Delta^0 \Delta^2 I_2 = \Delta_3 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$$

$$\Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta_2 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2 \Rightarrow j_2 = 1$$

$$\Delta^2 \Delta^2 I_2 = \Delta_1 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para

$\Delta^1 \Delta^2 I_2 = \langle y \rangle$, obtemos $j_3 = 1$ e, assim, sucessivamente.

O símbolo de Boardman de f_2 é $(2, 1, 1, \dots)$.

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(2, 1, 0; 2, 1, 1, \dots)$.

Exemplo 3:

Seja $(f_1, f_2): (R, 0) \rightarrow (R \times R, 0)$

definido por

$$x \mapsto (x^2, x^3)$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle x^2 \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle x^3 \rangle$$

1. Símbolo de Boardman de f_1 :

$$\text{Jac}(f_1) = [2x]$$

$$\Delta_0 I_1 = I_1$$

$$\Delta_1 I_1 = \langle x^2, 2x \rangle = \langle x \rangle$$

$$\Delta_s I_1 = I_1, \quad s \geq 2$$

$$\Delta^0 I_1 = \Delta_2 I_1 = I_1$$

$$\Delta^1 I_1 = \Delta_1 I_1 = \langle x \rangle \Rightarrow i_1 = 1$$

$$\Delta^2 I_1 = \Delta_0 I_1 = I_1$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 I_1 =$

$$= \langle x \rangle$$

$$\text{"Jac"} \quad (\Delta^1 I_1) = [1]$$

$$\Delta_0 \Delta^1 I_1 = \Delta^1 I_1$$

$$\Delta_1 \Delta^1 I_1 = \langle x, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^1 I_1 = \Delta^1 I_1, \quad s \geq 2$$

$$\Delta^0 \Delta^1 I_1 = \Delta_2 \Delta^1 I_1 = \Delta^1 I_1 \Rightarrow i_2 = 0$$

$$\Delta^1 \Delta^1 I_1 = \Delta_1 \Delta^1 I_1 = \langle 1 \rangle$$

O símbolo de Boardman de f_1 é

$(1, 0)$.

2. Símbolo de Boardman de f_2 :

$$\text{Jac} (f_2) = [3x^2]$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle x^3, 3x^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, \quad s \geq 2$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_2 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle x^2 \rangle \Rightarrow j_1 = 1$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_0 I_2 = I_2$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 I_2 =$

$\langle x^2 \rangle$, pelo item 1, obtemos $j_2 = 1$ e $j_3 = 0$.

O símbolo de Boardman de f_2 é $(1, 1, 0)$.

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(1, 0; 1, 1, 0)$.

Exemplo 4:

Seja $(f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$

definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, (y, x^2 + yz + z^3))$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle x \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle y, x^2 + yz + z^3 \rangle$$

1. Símbolo de Boardman de f_1 :

$$\text{Jac}(f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_1 = I_1$$

$$\Delta_1 I_1 = \langle x, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s I_1 = I_1, \quad s \geq 2$$

$$\Delta^0 I_1 = \Delta_4 I_1 = I_1$$

$$\Delta^1 I_1 = \Delta_3 I_1 = I_1$$

$$\Delta^2 I_1 = \Delta_2 I_1 = I_1 \Rightarrow i_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_1 = \Delta_1 I_1 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_1 = I_1$, obtemos $i_2 = 2$ e assim, sucessivamente.

O símbolo de Boardman de f_1 é $(2, 2, \dots)$.

2. Símbolo de Boardman de f_2 :

$$\text{Jac } (f_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2x & z & y + 3z^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle y, x^2 + yz + z^3, 2x, z, y + 3z^2, 1 \rangle = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_2 = \langle y, x^2 + yz + z^3, -2x, y + 3z^2 \rangle = \langle x, y, z^2 \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, s \geq 3$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = \langle x, y, z^2 \rangle \Rightarrow j_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_2 =$

$$= \langle x, y, z^2 \rangle$$

$$\text{"Jac"} (\Delta^2 I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$$

$$\Delta_1 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_3 \Delta^2 I_2 = \langle x, y, z^2, 2z \rangle = \langle x, y, z \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2, \quad s \geq 4$$

$$\Delta^0 \Delta^2 I_2 = \Delta_4 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$$

$$\Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta_3 \Delta^2 I_2 = \langle x, y, z \rangle \Rightarrow j_2 = 1$$

$$\Delta^2 \Delta^2 I_2 = \Delta_2 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 \Delta^2 I_2$:

$$= \langle x, y, z \rangle$$

$$\text{"Jac"} \quad (\Delta^1 \Delta^2 I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta^1 \Delta^2 I_2$$

$$\Delta_1 \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_3 \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta^1 \Delta^2 I_2, \quad s \geq 4$$

$$\Delta^0 \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta_4 \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta^1 \Delta^2 I_2$$

$$\Rightarrow j_3 = 0$$

$$\Delta^1 \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta_3 \Delta^1 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

O símbolo de Boardman de f_2 é

$$(2, 1, 0).$$

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(2, 2, \dots; 2, 1, 0)$.

Exemplo 5:

Seja $(f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R^3 \times R, 0)$

definido por:

$$(x, y, z) \mapsto ((x, y, x^2 + yz + z^3), x)$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle x, y, x^2 + yz + z^3 \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle x \rangle$$

1. Símbolo de Boardman de f_1 :

$$\text{Jac } (f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x & y & y + 3z^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_1 = I_1$$

$$\Delta_1 I_1 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_1 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_3 I_1 = \langle x, y, x^2 + yz + z^3, y + 3z^2 \rangle = \langle x, y, z^2 \rangle$$

$$\Delta_s I_1 = I_1, s \geq 4$$

$$\Delta^0 I_1 = \Delta_4 I_1 = I_1$$

$$\Delta^1 I_1 = \Delta_3 I_1 = \langle x, y, z^2 \rangle \Rightarrow i_1 = 1$$

$$\Delta^2 I_1 = \Delta_2 I_1 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 I_1 = \langle x, y, z^2 \rangle$, obtemos $i_2 = 1$ e $i_3 = 0$ (ver exemplo 4 - item 2).

O símbolo de Boardman de f_1 é $(1, 1, 0)$.

2. O símbolo de Boardman de f_2 é $(2, 2, \dots)$ (ver exemplo 4 - item 1).

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(1, 1, 0; 2, 2, \dots)$.

Exemplo 6:

Seja $(f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, (y, z^3 + xz))$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle x \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle y, z^3 + xz \rangle$$

1. O símbolo de Boardman de f_1 é $(2, 2, \dots)$ (ver exemplo 4 - item 1).

2. Símbolo de Boardman de f_2 :

$$\text{Jac } (f_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 3z^2 + x \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_2 = \langle y, z^3 + xz, z, 3z^2 + x \rangle = \langle x, y, z \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, \quad s \geq 3$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = \langle x, y, z \rangle \Rightarrow j_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_2 = \langle x, y, z \rangle$, obtemos $j_2 = 0$ (ver exemplo 4 - item 2).

O símbolo de Boardman de f_2 é $(2, 0)$.

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(2, 2, \dots; 2, 0)$.

Exemplo 7:

Seja $(f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R^3 \times R, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto ((x, y, z^3 + xz), x^2)$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle x, y, z^3 + xz \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle x^2 \rangle$$

1. Símbolo de Boardman de f_1 :

$$\text{Jac } (f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 3z^2 + x \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_1 = I_1$$

$$\Delta_1 I_1 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_1 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_3 I_1 = \langle x, y, z^3 + xz, 3z^2 + x \rangle = \langle x, y, z^2 \rangle$$

$$\Delta_s I_1 = I_1, s \geq 4$$

$$\Delta^0 I_1 = \Delta_4 I_1 = I_1$$

$$\Delta^1 I_1 = \Delta_3 I_1 = \langle x, y, z^2 \rangle \Rightarrow i_1 = 1$$

$$\Delta^2 I_1 = \Delta_2 I_1 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 I_1 =$

$\langle x, y, z^2 \rangle$, obtemos $i_2 = 1$ e $i_3 = 0$ (ver exemplo 4-item 2).

O símbolo de Boardman de f_1 é

$(1, 1, 0)$.

2. Símbolo de Boardman de f_2 :

$$\text{Jac}(f_2) = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle x^2, 2x \rangle = \langle x \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, s \geq 2$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = I_2$$

$$\Delta^3 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle x \rangle \Rightarrow j_1 = 3$$

$$\Delta^4 I_2 = \Delta_0 I_2 = I_2$$

Repetindo o processo par $\Delta^3 I_2 =$

$$= \langle x \rangle$$

$$\text{"Jac"} (\Delta^3 I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^3 I_2 = \Delta^3 I_2$$

$$\Delta_1 \Delta^3 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^3 I_2 = \Delta^3 I_2, \quad s \geq 2$$

$$\Delta^0 \Delta^3 I_2 = \Delta_4 \Delta^3 I_2 = \Delta^3 I_2$$

$$\Delta^1 \Delta^3 I_2 = \Delta_3 \Delta^3 I_2 = \Delta^3 I_2$$

$$\Delta^2 \Delta^3 I_2 = \Delta_2 \Delta^3 I_2 = \Delta^3 I_2 \Rightarrow j_2 = 2$$

$$\Delta^1 \Delta^3 I_2 = \Delta_1 \Delta^3 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 \Delta^3 I_2 =$

$= \Delta^3 I_2$, obtemos $j_3 = 2$ e assim, sucessivamente.

O símbolo de Boardman de f_2 é

$$(3, 2, 2, \dots).$$

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(1, 1, 0; 3, 2, 2, \dots)$.

Exemplo 8:

Seja $(f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R \times xR^3, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, (x, y, z^4 + xz + yz^2))$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle x \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle x, y, z^4 + xz + yz^2 \rangle$$

1. O símbolo de Boardman de f_1 é $(2, 2, \dots)$ (ver exemplo 4 - item 1)

2. Símbolo de Boardman de f_2 :

$$\text{Jac } (f_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z & z^2 & 4z^3 + x + 2yz \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_3 I_2 = \langle x, y, z^4 + xz + yz^2, 4z^3 + x + 2yz \rangle = \langle x, y, z^3 \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, s \geq 4$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = \langle x, y, z^3 \rangle \Rightarrow j_1 = 1$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 I_2 =$

$$= \langle x, y, z^3 \rangle$$

$$\text{"Jac"} (\Delta^1 I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3z^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^1 I_2 = \Delta^1 I_2$$

$$\Delta_1 \Delta^1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 \Delta^1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_3 \Delta^1 I_2 = \langle x, y, z^3, 3z^2 \rangle = \langle x, y, z^2 \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^1 I_2 = \Delta^1 I_2, \quad s \geq 4$$

$$\Delta^0 \Delta^1 I_2 = \Delta_4 \Delta^1 I_2 = \Delta^1 I_2$$

$$\Delta^1 \Delta^1 I_2 = \Delta_3 \Delta^1 I_2 = \langle x, y, z^2 \rangle \Rightarrow j_2 = 1$$

$$\Delta^2 \Delta^1 I_2 = \Delta_2 \Delta^1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 \Delta^1 I_2 =$

$\langle x, y, z^2 \rangle$, obtemos $j_3 = 1$ e $j_4 = 0$ (ver exemplo 4 - ítem 2).

O símbolo de Boardman de f_2 é $(1, 1, 1, 0)$.

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(2, 2, \dots; 1, 1, 1, 0)$.

Exemplo 9:

Seja $(f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, (y, z^4 + xz + yz^2))$$

$$I = (I_1, I_2) \text{ com } I_1 = I_{f_1} = \langle x \rangle$$

$$I_2 = I_{f_2} = \langle y, z^4 + xz + yz^2 \rangle$$

1. O símbolo de Boardman de f_1 é $(2, 2, \dots)$ (ver exemplo 4 - ítem 1).

2. Símbolo de Boardman de f_2 :

$$\text{Jac } (f_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ z & z^2 & 4z^3 + 2yz + x \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta^2 I_2 = \langle y, z^4 + xz + yz^2, -z, 4z^3 + 2yz + x \rangle = \langle x, y, z \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, s \geq 3$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = \langle x, y, z \rangle \Rightarrow j_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_2 =$

$\langle x, y, z \rangle$, obtemos $j_2 = 0$ (ver exemplo 4 - item 2).

O símbolo de Boardman de f_2 é

$(2, 0)$.

Portanto, o símbolo de Boardman do par (f_1, f_2) é $(2, 2, \dots; 2, 0)$.

Teorema:

O símbolo de Boardman de uma q -upla de germes $(f_1, f_2, \dots, f_q) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ é invariante por q -K-equivalência.

"Se duas q -uplas de germes:

$(f_1, f_2, \dots, f_q) ; (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_q) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ forem q -K-equivalentes então terão o mesmo símbolo de Boardman".

Prova: Faremos para pares de germes Bi-K-equivalentes.

Sejam $(f_1, f_2), (\bar{f}_1, \bar{f}_2) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0)$ com $f_1 = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1p_1})$; $f_2 = (f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2p_2})$ e $\bar{f}_1 = (\bar{f}_{11}, \bar{f}_{12}, \dots, \bar{f}_{1p_1})$; $\bar{f}_2 = (\bar{f}_{21}, \bar{f}_{22}, \dots, \bar{f}_{2p_2})$

Etapa 1:

Suponhamos que os pares de germes (f_1, f_2) e $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ sejam Bi-C-equivalentes. Então:

$I_{f_1} = I_{\bar{f}_1}$ e $I_{f_2} = I_{\bar{f}_2}$ (ver I.8). Pelo Teorema (pag 34),

os símbolos de Boardman desses pares coincidem.

Etapa 2:

Pela hipótese, os pares de germes (f_1, f_2) e $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ são Bi-K-equivalentes. Então, existe germe invertível $h: (R^n, 0) \rightarrow (R^n, 0)$ tal que $(f_1, f_2) \circ h$ e $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ são Bi-C-equivalentes (ver I.8). Pela etapa 1, temos: $I_{f_1} \circ h = I_{\bar{f}_1}$ e $I_{f_2} \circ h = I_{\bar{f}_2}$

As componentes $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ de h constituem um sistema de coordenadas em $O \in R^n$.

Logo, o ideal gerado pelos menores $s \times s$ da matriz jacobiana de $\bar{f}_1$ relativamente ao sistema de coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em $O \in R^n$ é equivalente ao ideal gerado pelos menores $s \times s$ da matriz jacobiana de

f_1 em relação ao sistema de coordenadas $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ em $O \in \mathbb{R}^n$. Segue que f_1 e $\bar{f}_1$ têm o mesmo símbolo de Boardman.

Analogamente, concluímos que f_2 e $\bar{f}_2$ têm o mesmo símbolo de Boardman.

Portanto, os símbolos de Boardman dos pares (f_1, f_2) e $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ são iguais.

A prova é análoga para q -uplas de germes q -K-equivalentes.

Teorema:

"Seja $(f_1, f_2, \dots, f_q) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_q}, 0)$ uma q -upla de germes com símbolo de Boardman $(J_1; J_2; \dots; J_q)$.

Os k_i - primeiros números inteiros do símbolo de Boardman J_i dependem somente do k_i -jato de f_i , $1 \leq i \leq q$ ".

Prova:

Seja $f_1 = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1p_1}) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p_1}, 0)$ com $I_1 = \langle f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1p_1} \rangle$ e $J_1 = (i_1, i_2, \dots)$ o símbolo de Boardman de f_1 .

É evidente, por indução sobre k_1 , que o ideal $\Delta^{s_{\Delta} i_{k_1-1}} \dots \Delta^{i_1} I_1$ é gerado pelas derivadas parciais de ordem menor ou igual a k_1 de $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1p_1}$ e se esse ideal será próprio ou não dependerá somen-

te dos valores de todas essas derivadas em zero.

Portanto, i_{k_1} depende somente do k_1 -jato de f_1 .

De maneira análoga, demonstra-se que os k_i - primeiros números inteiros do símbolo de Boardman J_i dependem somente do k_i -jato de f_i , $2 \leq i \leq q$.

II.4 - DEFINIÇÃO

Dado $(J_1; J_2; \dots; J_q)$ com $J_1 = (i_1, i_2, \dots, i_{k_1})$; $J_2 = (j_1, j_2, \dots, j_{k_2})$ e assim, sucessivamente, dizemos que uma q -upla de germes $(f_1, f_2, \dots, f_q)$: $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_q}, 0)$ é do tipo $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q} = (\Sigma^{J_1}, \Sigma^{J_2}, \dots, \Sigma^{J_q})$ quando seu símbolo de Boardman for da forma: $(J_1; J_2; \dots; J_q)$.

Definimos $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q}$ como sendo o subconjunto do espaço - produto de jatos $J^{k_1}_{(n, p_1)} \times J^{k_2}_{(n, p_2)} \times \dots \times J^{k_q}_{(n, p_q)}$ que tem como representantes q -uplas de germes do tipo $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q}$.

Pelo Teorema anterior, este subconjunto $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q}$ está bem definido.

Teorema:

$$\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q} \subseteq J^{k_1}_{(n, p_1)} \times$$

$\times J^{k_2} (n, p_2) \times \dots \times J^{k_q} (n, p_q)$ com $J_1 = (i_1, i_2, \dots, i_{k_1})$, $J_2 = (j_1, j_2, \dots, j_{k_2})$, ..., $J_q = (t_1, t_2, \dots, t_{k_q})$ será não vazio se e somente se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

(i) $n \geq i_1 \geq \dots \geq i_{k_1} \geq 0$; $n \geq j_1 \geq \dots \geq j_{k_2} \geq 0$; ... ;
 $; n \geq t_1 \geq \dots \geq t_{k_q} \geq 0$.

(ii) $i_1 \geq n - p_1$; $j_1 \geq n - p_2$; ...; $t_1 \geq n - p_q$.

(iii) Se $i_1 = n - p_1$ então $i_1 = i_2 = \dots = i_{k_1}$.

Se $j_1 = n - p_2$ então $j_1 = j_2 = \dots = j_{k_2}$, assim, sucessivamente,

Se $t_1 = n - p_q$ então $t_1 = t_2 = \dots = t_{k_q}$.

Prova:

Faremos para o subconjunto:

$J_1; J_2 \subseteq J^{k_1} (n, p_1) \times J^{k_2} (n, p_2)$ com:

$J_1 = (i_1, i_2, \dots, i_{k_1})$ e $J_2 = (j_1, j_2, \dots, j_{k_2})$

Condição Necessária:

(i) Segue como consequência imediata das definições que:

$i_1, i_2, \dots, i_{k_1}$ e $j_1, j_2, \dots, j_{k_2}$ são todos positivos e
 $n \geq i_1$; $n \geq j_1$.

Verificação de que: $i_j \geq i_{j+1}$ e $j_i \geq j_{i+1}$.

Seja I_1 o ideal finitamente gerado em ε_n pelas componentes de um representante de algum jato em Σ^{J_1} e da mesma forma I_2 gerado pelas componentes de algum jato em Σ^{J_2} .

Podemos supor que:

$$\Delta^{i_t} \dots \Delta^{i_1} I_1 = \langle g_1, \dots, g_{\sigma_t} \rangle \text{ com } \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots$$

e

$$\Delta^{j_r} \dots \Delta^{j_1} I_2 = \langle h_1, \dots, h_{\delta_r} \rangle \text{ com } \delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots$$

Suponhamos, também, que $\Delta^{s_{i_j}} \dots$

$\dots \Delta^{i_1} I_1$ e $\Delta^{s_{j_i}} \dots \Delta^{j_1} I_2$ sejam próprios. Isto significa que todos os menores de ordem $(n - s + 1)$ da matriz jacobiana de $g_1, \dots, g_{\sigma_j}$ se anulam, assim como todos os menores de ordem $(n - s + 1)$ da matriz jacobiana de $h_1, \dots, h_{\delta_i}$. Em particular, todos os menores de ordem $(n - s + 1)$ das matrizes jacobianas de $g_1, \dots, g_{\sigma_j - 1}$ e de $h_1, \dots, h_{\delta_i - 1}$ se anulam. Logo, os ideais $\Delta^{s_{i_j} - 1} \dots \Delta^{i_1} I_1$ e $\Delta^{s_{j_i} - 1} \dots \Delta^{j_1} I_2$ são próprios e, conseqüentemente, $s \leq i_j$ e $s \leq j_i$.

Fazendo $s = i_j + 1$ e $s = j_i + 1$,

respectivamente, obtemos:

$i_j + 1 \leq i_j$ e $j_i + 1 \leq j_i$. No caso de ideais não finitamente gerados, a técnica se aplica analogamente.

(ii) Sabemos que o primeiro índice i_1 é igual ao rank do núcleo do representante do jato considerado como gerador e, portanto, $i_1 \geq n - p_1$. Analogamente, $j_1 \geq n - p_2$.

(iii) Se $i_1 = n - p_1$ então $\Delta^{i_1} I_1 = \Delta_{p_1+1} I_1 = I_1$ e se $j_1 = n - p_2$ então $\Delta^{j_1} I_2 = \Delta_{p_2+1} I_2 = I_2$. Segue, imediatamente, que:

$$i_1 = i_2 = \dots = i_{k_1} \text{ e } j_1 = j_2 = \dots = j_{k_2}.$$

Condição Suficiente:

Suponhamos que as condições (i), (ii), (iii) estejam satisfeitas. Temos que mostrar a existência de um par de germes $(f_1, f_2) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0)$, $f_1 = (f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1p_1})$; $f_2 = (f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2p_2})$ que seja do tipo $\Sigma^{J_1; J_2}$ com $J_1 = (i_1, i_2, \dots, i_{k_1})$ e $J_2 = (j_1, j_2, \dots, j_{k_2})$.

1. Para $i_1 = n - p_1$ e $j_1 = n - p_2$, definimos:

$$f_{11} = x_1, \dots, f_{1p_1} = x_{p_1}$$

e

$$f_{21} = x_1, \dots, f_{2p_2} = x_{p_2}$$

2. Para $i_1 > n - p_1$, definimos:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{1i} = x_i, \quad 1 \leq i \leq n - i_1 \\ f_{1n - i_1 + 1} = \sum_{n - i_1 + 1}^{n - i_2} x_k^2 + \sum_{n - i_2 + 1}^{n - i_3} x_k^3 + \dots \\ f_{1i} = 0, \quad n - i_1 + 2 \leq i \leq p_1 \end{array} \right.$$

Para $j_1 > n - p_2$, definimos:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{2j} = x_j, \quad 1 \leq j \leq n - j_1 \\ f_{2n - j_1 + 1} = \sum_{n - j_1 + 1}^{n - j_2} x_k^2 + \sum_{n - j_2 + 1}^{n - j_3} x_k^3 + \dots \\ f_{2j} = 0, \quad n - j_1 + 2 \leq j \leq p_2 \end{array} \right.$$

A prova é análoga para:

$$\begin{aligned} \sum_{J_1; J_2; \dots; J_q} &\subseteq J^{k_1}(n, p_1) \times J^{k_2}(n, p_2) \times \dots \times \\ &\times J^{k_q}(n, p_q). \end{aligned}$$

Consequência desse Teorema:

A partição do espaço-produto $J^{k_1}(n, p_1) \times \dots \times J^{k_q}(n, p_q)$ em subconjuntos, não vazios, $\sum_{J_1; J_2; \dots; J_q}$

é finita.

II.5 - DEFINIÇÃO

Seja $(f_1, f_2, \dots, f_q) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ uma q -upla de germes de aplicações C^∞ do tipo $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q}$.

Pelas definições anteriores, $f_1 : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1}, 0)$ é do tipo Σ^{J_1} com $J_1 = (i_1, i_2, \dots, i_{k_1})$. Essa aplicação é chamada genérica no sentido de Boardman se:

$j^{k_1} f_1 : R^n \rightarrow J^{k_1} (n, p_1) \supset \Sigma^{J_1}$ for transversal a todas as subvariedades de Boardman Σ^{J_1} , para todo inteiro $k_1 \geq 1$.

Então:

$\Sigma^{J_1} f_1 = (j^{k_1} f_1)^{-1}(\Sigma^{J_1})$ será uma subvariedade do R^n de mesma codimensão que Σ^{J_1} .

Analogamente, se essa condição de transversalidade for satisfeita para $f_2, \dots, f_q$ diremos que as aplicações f_j , $2 \leq j \leq q$, são genéricas no sentido de Boardman.

No conjunto $\Sigma^{J_1} f_1 \cap \Sigma^{J_2} f_2 \cap \dots \cap \Sigma^{J_q} f_q$, a q -upla de aplicações $(f_1, f_2, \dots, f_q)$ é do tipo $\Sigma^{J_1; J_2; \dots; J_q}$.

II.6 - TEOREMA (ver I.14)

"Se $\Sigma^{J_1} f_1, \Sigma^{J_2} f_2, \dots, \Sigma^{J_q} f_q$ esti

verem em posição geral, então em uma vizinhança de um ponto da intersecção, essas subvariedades poderão ser, simultaneamente, linearizadas".

Corolário:

" $\Sigma^{J_1} f_1 \cap \Sigma^{J_2} f_2 \cap \dots \cap \Sigma^{J_q} f_q$ será uma subvariedade do R^n ".

Definição:

Seja $(f_1, f_2) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0)$ um par de aplicações C^∞ , sendo f_1 do tipo Σ^{J_1} e f_2 do tipo Σ^{J_2} .

Se $\Sigma^{J_1} f_1$ e $\Sigma^{J_2} f_2$ forem subvariedades do R^n e se $\Sigma^{J_1} f_1 \cap \Sigma^{J_2} f_2 \neq \emptyset$, diremos que

$\Sigma^{J_1} f_1$ e $\Sigma^{J_2} f_2$ são transversais à sua intersecção $\Sigma^{J_1} f_1 \cap$

$\cap \Sigma^{J_2} f_2$ se a injeção $i : \Sigma^{J_1} f_1 \rightarrow R^n$ for transversal a

$\Sigma^{J_2} f_2$, em cada ponto da intersecção, isto é:

$$T_x(\Sigma^{J_1} f_1) + T_x(\Sigma^{J_2} f_2) = T_x(R^n), \text{ para todo } x \in \Sigma^{J_1} f_1 \cap$$

$$\cap \Sigma^{J_2} f_2 \text{ "}. \quad "$$

EXEMPLOS:

$$1) \quad \begin{array}{ccc} & f_1 & \nearrow \\ R^2 & & \\ & f_2 & \searrow \\ & & R \end{array}$$

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y$$

com f_1 e f_2 do tipo Σ^1

$$\text{Jac}(f_1) = \begin{bmatrix} 2x & 2y \end{bmatrix}; \quad \text{Jac}(f_2) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^1 f_1 = \{x = 0 \text{ e } y \neq 0\}$$

$$\Sigma^1 f_2 = \{x = 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} & j^1 f_1 & \nearrow \\ R^2 & & J^1(2, 1) \supset \Sigma^1 \\ & j^1 f_2 & \searrow \\ & & J^1(2, 1) \supset \Sigma^1 \end{array}$$

Temos que f_1 e f_2 admitem ponto crítico não degenerado, então $j^1 f_1$ e $j^1 f_2$ são transversais à Σ^1 .

Portanto, $(j^1 f_1)^{-1}(\Sigma^1) = \Sigma^1 f_1$ e $(j^1 f_2)^{-1}(\Sigma^1) = \Sigma^1 f_2$ são subvariedades do R^2 .

$\Sigma^1 f_1 \subset \Sigma^1 f_2 \Rightarrow \Sigma^1 f_1 \cap \Sigma^1 f_2$ não é uma intersecção transversal. Logo, $\Sigma^1 f_1$ e $\Sigma^1 f_2$ não são transversais à sua intersecção.

$$2) \quad \begin{array}{ccc} & f_1 & \\ R^2 & \nearrow & R^2 \\ & f_2 & \\ & \searrow & R^2 \end{array}$$

$$f_1(x, y) = (x, y^3 + xy)$$

$$f_2(x, y) = (x, y^2)$$

com f_1 e f_2 do tipo Σ^1 .

$$\text{Jac}(f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 3y^2 + x \end{bmatrix}; \quad \text{Jac}(f_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^1 f_1 = \{3y^2 + x = 0\}$$

$$\Sigma^1 f_2 = \{y = 0\}$$

$$\begin{array}{ccc} & j^1 f_1 & \\ R^2 & \nearrow & J^1(2, 2) \supset \Sigma^1 \\ & j^1 f_2 & \\ & \searrow & J^1(2, 2) \supset \Sigma^1 \end{array}$$

f_1 e f_2 são aplicações estáveis então, $j^1 f_1$ e $j^1 f_2$ são

transversais a Σ^1 . Portanto, $(j^1 f_1)^{-1}(\Sigma^1) = \Sigma^1 f_1$ e

$(j^1 f_2)^{-1}(\Sigma^1) = \Sigma^1 f_2$ são subvariedades do R^2 .

$$\Sigma^1 f_1 \cap \Sigma^1 f_2 = \{(0, 0)\}$$

É óbvio que $\Sigma^1 f_1$ e $\Sigma^1 f_2$ são

transversais à sua intersecção.

3) Generalização do Exemplo 2:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^3 + x_{n-1} x_n)$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^2)$$

$\Sigma^i f_1$ e $\Sigma^i f_2$ serão transversais à sua intersecção, com restrição sobre i pois $\Sigma^i f_1$ e $\Sigma^i f_2$ deverão ser subvariedades do R^n de codim i^2 .

$$f_1(x, y, z) = y + z^2$$

$$f_2(x, y, z) = (x, y^2 + z^3 + xz)$$

f_1 e f_2 do tipo Σ^2

$$\text{Jac}(f_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2z \end{bmatrix} ; \text{Jac}(f_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 2y & 3z^2 + x \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^2 f_1 = \{z = 0\}$$

$$\Sigma^2 f_2 = \{y = 0 \text{ e } x = -3z^2\}$$

f_1 admite ponto crítico não degenerado, então $j^1 f_1$ é transversal a Σ^2 .

f_2 é estável, então $j^1 f_2$ é transversal a Σ^2 .

Portanto, $(j^1 f_1)^{-1}(\Sigma^2) = \Sigma^2 f_1$ e

$(j^1 f_2)^{-1}(\Sigma^2) = \Sigma^2 f_2$ são subvariedades do R^3 .

$$\Sigma^2 f_1 \cap \Sigma^2 f_2 = \{(0, 0, 0)\}$$

Temos que:

$$T_{\bar{x}}(\Sigma^2 f_1) + T_{\bar{x}}(\Sigma^2 f_2) = T_{\bar{x}} R^3, \quad \bar{x} \in \Sigma^2 f_1 \cap \Sigma^2 f_2.$$

De fato:

$$1. T_{\bar{x}}(\Sigma^2 f_1) = \text{Ker}(df_1)_{\bar{x}} = \{(x, 0, z)\}$$

$$2. T_{\bar{x}}(\Sigma^2 f_2) = \text{Ker}(df_2)_{\bar{x}} = \{(0, y, z)\}$$

Portanto, $\Sigma^2 f_1$ e $\Sigma^2 f_2$ são trans

versais à sua intersecção.

$$f_1(x, y, z) = x^2 + z$$

$$f_2(x, y, z) = (x, y^2 + z^3 + xz)$$

f_1 do tipo Σ^2 e f_2 do tipo Σ^1 .

$$\text{Jac}(f_1) = \begin{bmatrix} 2x & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{Jac}(f_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 2y & 3z^2 + x \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^2 f_1 = \{x = 0\}$$

$$\Sigma^1 f_2 = \{y \neq 0 \text{ e } x = -3z^2\}$$

$$\begin{array}{ccc} & j^1 f_1 & \\ R^3 & \swarrow & J^1(3, 1) \supset \Sigma^2 \\ & \searrow & \\ & j^1 f_2 & J^1(3, 2) \supset \Sigma^1 \end{array}$$

f_1 admite ponto crítico não degenerado então, $j^1 f_1$ é transversal a Σ^2 .

f_2 é estável então, $j^1 f_2$ é transversal a Σ^1 .

$$\text{Portanto, } (j^1 f_1)^{-1}(\Sigma^2) = \Sigma^2 f_1$$

e $(j^1 f_2)^{-1}(\Sigma^1) = \Sigma^1 f_2$ são subvariedades do R^3 .

$$\Sigma^2 f_1 \cap \Sigma^1 f_2 = \{(0, y, 0)\}$$

$$T_{\bar{x}}(\Sigma^2 f_1) + T_{\bar{x}}(\Sigma^1 f_2) = T_{\bar{x}} R^3, \quad \bar{x} \in \Sigma^2 f_1 \cap \Sigma^1 f_2$$

De fato:

$$1. T_{\bar{x}}(\Sigma^2 f_1) = \text{Ker} (df_1)_{\bar{x}} = \{(x, y, 0)\}$$

$$2. T_{\bar{x}}^{-1} (\Sigma^1 f_2) = \text{Ker } (d f_2) \quad \bar{x} = \{(0, 0, z)\}$$

Portanto, $\Sigma^2 f_1$ e $\Sigma^1 f_2$ são transversais à sua intersecção.

Observação:

Dada $(f_1, f_2, \dots, f_q) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2} \times \dots \times R^{p_q}, 0)$ uma q-upla de aplicações C^∞ , tais que, $f_i : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_i}, 0)$, $1 \leq i \leq q$ sejam genéricas no sentido de Boardman. Então:

$$(*) \quad (\Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_{k_1}, i_{k_1}+1} f_1 =$$

$$= \Sigma^{i_{k_1}+1} (f_1 \mid \Sigma^{i_1, i_2, \dots, i_{k_1}} f_1),$$

$$\Sigma^{j_1, j_2, \dots, j_{k_2}, j_{k_2}+1} f_2 =$$

$$= \Sigma^{j_{k_2}+1} (f_2 \mid \Sigma^{j_1, j_2, \dots, j_{k_2}} f_2), \dots,$$

$$\Sigma^{t_1, t_2, \dots, t_{k_q}, t_{k_q}+1} f_q =$$

$$= \Sigma^{t_{k_q}+1} (f_q \mid \Sigma^{t_1, t_2, \dots, t_{k_q}} f_q))$$

Em outras palavras, toda q-upla de aplicações C^∞ pode se transformar numa q-upla de aplicações genéricas no sentido de Boardman por pequenas perturba

ções e, como consequência de (*), são válidas as inclusões:

$$\begin{aligned}
 (\Sigma^{i_1} f_1, \Sigma^{j_1} f_2, \dots, \Sigma^{t_1} f_q) &\supseteq (\Sigma^{i_1, i_2} f_1, \Sigma^{j_1, j_2} f_2, \dots, \\
 &\Sigma^{t_1, t_2} f_q) \supseteq (\Sigma^{i_1, i_2, i_3} f_1, \Sigma^{j_1, j_2, j_3} f_2, \dots, \\
 &\Sigma^{t_1, t_2, t_3} f_q) \supseteq \dots
 \end{aligned}$$

II. 7 - COMPARAÇÃO ENTRE OS TIPOS DE SINGULARIDADES DOS PARES DE GERMES E OS TIPOS DE SINGULARIDADES DOS PARES COMO GERMES

Consideremos os diagramas:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{I)} \quad (R^n, 0) & \begin{array}{l} \xrightarrow{f_1, f'_1} \\ \xrightarrow{f_2, f'_2} \end{array} & \begin{array}{l} (R^{p_1}, 0) \quad (f_1, f_2) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0) \\ (R^{p_2}, 0) \quad (f'_1, f'_2) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0) \end{array}
 \end{array}$$

$$\text{II)} \quad f = (f_1, f_2) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0)$$

$$f' = (f'_1, f'_2) : (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0)$$

1º caso:

Em I, existem distintas singularidades do tipo $\Sigma^{J_1; J_2}$ e $\Sigma^{J'_1; J'_2}$ tais que, em II, são do mesmo tipo Σ^J .

Exemplo:

1. $(f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, (y, x^2 + yz + z^3))$$

Pelo exemplo 4 (pág. 47), o par
 (f'_1, f'_2) é do tipo $\Sigma^2, 2, \dots; 2, 1, 0$.

2. $(f'_1, f'_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, (y, z^3 + xz)).$$

Pelo exemplo 6 (pág. 51), o par
 (f'_1, f'_2) é do tipo $\Sigma^2, 2, \dots; 2, 0$.

3. $f = (f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R^3, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, x^2 + yz + z^3)$$

Pelo exemplo 5, item 1, (pág.
 50), f é do tipo $\Sigma^1, 1, 0$.

4. $f' = (f'_1, f'_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R^3, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z^3 + xz)$$

Pelo exemplo 7, item 1, (pág.
 52), f' é do tipo $\Sigma^1, 1, 0$.

Neste exemplo, os tipos de singularidades dos pares de germes são distintos e quando considerados como germes: $(R^3, 0) \rightarrow (R^3, 0)$ apresentam o mesmo tipo de singularidade.

2º caso:

Em II, existem distintas singularidades dos tipos Σ^J e $\Sigma^{J'}$ tais que, em I, são do mesmo tipo $\Sigma^{J_1; J_2}$.

Exemplo:

1. $f = (f_1, f_2) : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z^3 + xz)$$

Pelo exemplo anterior (Ítem 4),
 f é do tipo $\Sigma^{1, 1, 0}$.

2. $f' = (f'_1, f'_2) : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, y, z^4 + xz + yz^2).$$

Pelo exemplo 8, Ítem 2, (pág. 55), f' é do tipo $\Sigma^{1, 1, 1, 0}$.

3. $(f_1, f_2) : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, (y, z^3 + xz))$$

Pelo exemplo anterior (Ítem 2),
o par (f_1, f_2) é do tipo $\Sigma^{2, 2, \dots; 2, 0}$.

4. $(f'_1, f'_2) : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, 0)$ definido por:

$$(x, y, z) \mapsto (x, (y, z^4 + xz + yz^2)).$$

Pelo exemplo 9 (pág. 56), o par

(f'_1, f'_2) é do tipo $\Sigma^2, 2, \dots; 2, 0$.

Neste exemplo, os germes: $(R^3, 0) +$

$\rightarrow (R^3, 0)$ apresentam singularidades distintas e quando considerados como pares de germes apresentam o mesmo tipo de singularidade.

EXISTÊNCIA DE TRANSFORMAÇÃO PERMISSÍVEL DO TIPO PRODUTO CARTESIANO, QUE LEVA UM MODELO DO TIPO Σ^J EM OUTRO MODELO COM O MESMO TIPO DE SINGULARIDADE.

Exemplo:

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 (R^3, 0) & \xrightarrow{f = (f_1, f_2)} & (R \times R^2, 0) \\
 \uparrow \Phi & & \downarrow \psi_1 \quad \downarrow \psi_2 \\
 (R^3, 0) & \xrightarrow{f' = (f'_1, f'_2)} & (R \times R^2, 0)
 \end{array}$$

$\Psi = \psi_1 \times \psi_2 : (R \times R^2, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ com

$$\Psi(y_1, y_2, y_3) = (\psi_1(y_1), \psi_2(y_2, y_3))$$

Consideremos os modelos $f =$

$= (f_1, f_2)$ e $f' = (f'_1, f'_2)$, definidos abaixo do tipo $\Sigma^1, 1, 0$.

$f = (f_1, f_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ definido por:

$(x, y, z) \mapsto (y_1, y_2, y_3)$ com:

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = y \\ y_3 = z^3 + xz \end{cases}$$

$f' = (f'_1, f'_2) : (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ definido por:

$(x, y, z) \mapsto (y'_1, y'_2, y'_3)$ com:

$$\begin{cases} y'_1 = y \\ y'_2 = x \\ y'_3 = x^2 + yz + z^3 \end{cases}$$

1. Primeira transformação de coordenadas, na fonte:

$$\phi : \begin{cases} X = y \\ Y = x \\ Z = z \end{cases}$$

$f \circ \phi : (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ é definida por:

$$\begin{cases} Y_1 = X \\ Y_2 = Y \\ Y_3 = Z^3 + XZ \end{cases}$$

2. Definição de $\Psi = \Psi_1 \times \Psi_2 : (R \times R^2, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$

$$\Psi : \begin{cases} \Psi_1(Y_1) = Y_1 \\ \Psi_2(Y_2, Y_3) = (Y_2, Y_3 + Y_2^2) \end{cases}$$

$$\text{Jac } (\Psi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & \vdots & 2Y_2 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz jacobiana de Ψ tem rank máximo e, portanto, Ψ é um difeomorfismo local.

3. $\Psi \circ f \circ \Phi: (R^3, 0) \rightarrow (R \times R^2, 0)$ é definida por:

$$\begin{aligned} \Psi \circ f \circ \Phi(x, y, z) &= \Psi(Y_1, Y_2, Y_3) = \\ &= (\Psi_1(Y_1), \Psi_2(Y_2, Y_3)) = (X, Y, Z^3 + XZ + Y^2) = \\ &= (y, x, z^3 + yz + x^2) = f'(x, y, z). \end{aligned}$$

$\therefore$

$$\Psi \circ f \circ \Phi(x, y, z) = f'(x, y, z).$$

II.8 - COMPORTAMENTO DO SÍMBOLO DE BOARDMAN DE UM PAR DE DESDOBRAMENTOS À r -PARÂMETROS DO TIPO $(t, r-t)$ DO PAR DE GERMES (f_1, f_2) E DO SÍMBOLO DE BOARDMAN DO PAR DE GERMES (f_1, f_2)

Seja $(F_1, F_2): (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^t \times R^{p_1} \times R^{r-t} \times R^{p_2}, 0)$ um par de desdobramentos a r -parâmetros do tipo $(t, r-t)$ do par de germes $(f_1, f_2): (R^n, 0) \rightarrow (R^{p_1} \times R^{p_2}, 0)$ (ver I. 13).

Analisemos os seguintes exemplos:

Exemplo 1:

Seja $(f_{01}, f_{02}) : (R, 0) \rightarrow (R \times$

$\times R, 0)$ definido por:

$$x \mapsto (x, x)$$

Consideremos o desdobramento a

2-parâmetros do tipo $(1, 1)$:

$(F_1, F_2) : (R^2 \times R, 0) \rightarrow (R \times R \times R \times R, 0)$ definido por:

$$(F_1, F_2) (u_1, u_2, x) = (u_1, u_2 + x, u_2, u_1 + x)$$

$$f_1 (u_1, u_2, x) = u_2 + x ; f_1 (0, x) = x = f_{01} (x)$$

$$f_2 (u_1, u_2, x) = u_1 + x ; f_2 (0, x) = x = f_{02} (x)$$

(i) O símbolo de Boardman de

f_{01} é $(0, 0, \dots)$.

(ii) Símbolo de Boardman de F_1 :

$$I_2 = \langle u_1, u_2 + x \rangle$$

$$\text{Jac } (F_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, s \geq 3$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Rightarrow j_1 = 1$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 I_2 = I_2$, obtemos $j_2 = 1$ e assim, sucessivamente.

O símbolo de Boardman de F_1 é $(1, 1, \dots)$.

Portanto, f_{01} é do tipo Σ^0 e F_1 é do tipo $\Sigma^1, 1, \dots$.

Analogamente, f_{02} é do tipo Σ^0 e F_2 é do tipo $\Sigma^1, 1, \dots$.

Exemplo 2:

Seja $(f'_{01}, f'_{02}) : (R, 0) \rightarrow (R \times R \times R, 0)$ definido por:

$$x \mapsto (x^2, x^2)$$

Consideremos o desdobramento a 2-parâmetros do tipo $(1, 1)$:

$(F'_1, F'_2) : (R^2 \times R, 0) \rightarrow (R \times R \times R \times R, 0)$ definido por:

$$(F'_1, F'_2)(u_1, u_2, x) = (u_1, u_2^2 + x^2, u_2, u_1^2 + x^2).$$

$$f'_1(u_1, u_2, x) = u_2^2 + x^2; f'_1(0, x) = x^2 = f'_{01}(x)$$

$$f'_2(u_1, u_2, x) = u_1^2 + x^2; f'_2(0, x) = x^2 = f'_{02}(x)$$

(i) Símbolo de Boardman de f'_{01} :

$$I_1 = \langle x^2 \rangle$$

$$\text{Jac } (f'_{01}) = [2x]$$

$$\Delta_0 I_1 = I_1$$

$$\Delta_1 I_1 = \langle x \rangle$$

$$\Delta_s I_1 = I_1, s \geq 2$$

$$\Delta^0 I_1 = \Delta_2 I_1 = I_1$$

$$\Rightarrow i_1 = 1$$

$$\Delta^1 I_1 = \Delta_1 I_1 = \langle x \rangle$$

$$\Delta^2 I_1 = \Delta_0 I_1 = I_1$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 I_1 =$

$\langle x \rangle$, obtemos $i_2 = 0$.

O símbolo de Boardman de f'_{01} é $(1, 0)$.

(ii) Símbolo de Boardman de F'_1 :

$$I_2 = \langle u_1, u_2^2 + x^2 \rangle$$

$$\text{Jac } (F'_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2u_2 & 2x \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_2 = \langle u_1, u_2, x \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, \quad s \geq 3$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = \langle u_1, u_2, x \rangle$$

$$\Rightarrow j_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_2 =$

$$= \langle u_1, u_2, x \rangle :$$

$$\text{"Jac"} \Delta^2 I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$$

$$\Delta_1 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_3 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2, \quad s \geq 4$$

$$\Delta^0 \Delta^2 I_2 = \Delta_4 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$$

$$\Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta_3 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle \Rightarrow j_2 = 0$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 \Delta^2 I_2 =$

$$= \Delta^2 I_2, \text{ obtemos } j_3 = 0 \text{ e assim, sucessivamente.}$$

O símbolo de Boardman de F'_1 é $(2, 0)$.

Portanto, f'_{01} é do tipo $\Sigma^{1,0}$ e F'_1 é do tipo $\Sigma^{2,0}$.

Analogamente, f'_{02} é do tipo $\Sigma^{1,0}$ e F'_2 é do tipo $\Sigma^{2,0}$.

Observamos que alterando o parâmetro há uma estimativa entre os primeiros índices dos símbolos de Boardman f'_{01} e F'_1 e de f'_{02} e F'_2 . Na deformação de f'_{01} aparece, apenas, uma variável complementar e o mesmo ocorre na deformação de f'_{02} .

Exemplo 3:

Seja $(f'_{01}, f'_{02}) : (R, 0) \rightarrow (R \times R, 0)$ definido por:

$$x \mapsto (x^2, x^2)$$

Consideremos o desdobramento a 2-parâmetros do tipo $(1, 1)$:

$(F'_{1'}, F'_{2'}) : (R^2 \times R, 0) \rightarrow (R \times R \times R \times R, 0)$ definido por:

$$(F'_{1'}, F'_{2'}) (u_1, u_2, x) = (u_1, u_2 + x^2, u_2, u_1 + x^2)$$

$$f'_{1'} (u_1, u_2, x) = u_2 + x^2; f'_{1'} (0, x) = x^2 = f'_{01} (x).$$

$$f_2''(u_1, u_2, x) = u_1 + x^2; f_2''(0, x) = x^2 = f_{02}'(x)$$

(i) O símbolo de Boardman de

$$f_{01}' \text{ é } (1, 0).$$

(ii) Símbolo de Boardman de F_1'' :

$$I_2 = \langle u_1, u_2 + x^2 \rangle$$

$$\text{Jac } (F_1'') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, s \geq 3.$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2 \Rightarrow j_1 = 1$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 I_2 =$
 $= I_2$, obtemos $j_2 = 1$ e assim, sucessivamente.

O símbolo de Boardman de F_1'' é
 $(1, 1, \dots)$.

Portanto, f_{01}' é do tipo $\Sigma^{1,0}$ e

F_1'' é do tipo $\Sigma^{1, 1, \dots}$. Analogamente, f_{02}'' e F_2'' são do mesmo tipo que f_{01}'' e F_1'' , respectivamente.

Comparando com o exemplo 1, observamos que alterando a variável do par de desdobramentos, os primeiros índices dos símbolos de Boardman de f_{01}'' e F_1'' e de f_{02}'' e F_2'' são iguais. Em relação ao exemplo 2, foram alterados os parâmetros do par de desdobramentos.

Exemplo 4:

Seja $(f_{01}'', f_{02}'') : (R, 0) \rightarrow (R \times R, 0)$ definido por:

$$x \mapsto (x^2, x^2)$$

Consideremos o desdobramento a 2-parâmetros do tipo $(1, 1)$:

$(F_1''', F_2''') : (R^2 \times R, 0) \rightarrow (R \times R \times R \times R, 0)$ definido por:

$$(F_1''', F_2''') (u_1, u_2, x) = (u_1, u_1 + x^2, u_2, u_2 + x^2)$$

$$f_1'''(u_1, u_2, x) = u_1 + x^2; f_1'''(0, x) = x^2 = f_{01}''(x).$$

$$f_2'''(u_1, u_2, x) = u_2 + x^2; f_2'''(0, x) = x^2 = f_{02}''(x).$$

(i) O símbolo de Boardman de f_{01}''' é $(1, 0)$.

(ii) Símbolo de Boardman de F_1''' :

$$I_2 = \langle u_1, u_1 + x^2 \rangle$$

$$\text{Jac } (F_1''') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2x \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 I_2 = I_2$$

$$\Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 I_2 = \langle u_1, x \rangle$$

$$\Delta_s I_2 = I_2, \quad s \geq 3$$

$$\Delta^0 I_2 = \Delta_4 I_2 = I_2$$

$$\Delta^1 I_2 = \Delta_3 I_2 = I_2$$

$$\Delta^2 I_2 = \Delta_2 I_2 = \langle u_1, x \rangle \Rightarrow j_1 = 2$$

$$\Delta^3 I_2 = \Delta_1 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^2 I_2 =$

$$= \langle u_1, x \rangle$$

$$\text{"Jac"} (\Delta^2 I_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_0 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$$

$$\Delta_1 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_2 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

$$\Delta_s \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2, \quad s \geq 3$$

$$\Delta^0 \Delta^2 I_2 = \Delta_4 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$$

$$\Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta_3 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2 \Rightarrow j_2 = 1$$

$$\Delta^2 \Delta^2 I_2 = \Delta_2 \Delta^2 I_2 = \langle 1 \rangle$$

Repetindo o processo para $\Delta^1 \Delta^2 I_2 = \Delta^2 I_2$, obtemos $j_3 = 1$ e assim, sucessivamente.

O símbolo de Boardman de F_1''' é $(2, 1, 1, \dots)$.

Portanto, f_{01}''' é do tipo $\Sigma^{1, 0}$ e F_1''' é do tipo $\Sigma^2, 1, 1, \dots$.

Analogamente, f_{02}''' é do tipo $\Sigma^{1, 0}$ e F_2''' é do tipo $\Sigma^2, 1, 1, \dots$.

Neste caso, as variáveis complementares não alteram a deformação, portanto, temos o desdobramento usual e a defasagem entre o número de variáveis é mantido.

Conclusões análogas são válidas para um desdobramento a r -parâmetros do tipo:

$(s_1, s_2, \dots, s_{q-1}, r - \sum_{i=1}^{q-1} s_i)$ de uma q -upla de germes.

SUGESTÕES:

Lembremos que um desdobramento a r -parâmetros do tipo $(t, r - t)$ de um par de germes $(f_{01}, f_{02}) : (R^n, 0) \rightarrow (R^p \times R^q, 0)$ é um par de germes $(F_1, F_2) : (R^r \times R^n, 0) \rightarrow (R^t \times R^p \times R^{r-t} \times R^q, 0)$ com:

$$(F_1, F_2)(u, x) = (u_1, \dots, u_t, f_1(u, x), u_{t+1}, \dots, u_r, f_2(u, x)) \text{ e}$$

$$f_1(0, x) = f_{01}(x); f_2(0, x) = f_{02}(x).$$

1. Analisar a deformação $f_1(u, x)$ de f_{01} e verificar como as variáveis complementares $u_{t+1}, \dots, u_r$ influenciam os índices dos símbolos de Boardman de f_{01} e f_1 .

Analogamente, para o comportamento dos índices dos símbolos de Boardman de f_{02} e f_2 .

2. (i) Determinar os símbolos de Boardman de $f_{01}, f_{02}, (f_{01}, f_{02}), F_1, F_2$ e (F_1, F_2) .

(ii) Determinar o grau de determinação de $f_{01}, f_{02}, (f_{01}, f_{02}), F_1, F_2$ e (F_1, F_2) .

(iii) Analisar a correlação entre os símbolos de Boardman e o grau de determinação e fazer a estimativa dos comprimentos dos índices dos símbolos de Boardman com relação ao grau de determinação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - GIBSON, C.G. - "*Singular points of smoth mappings*".
(Research notes in mathematics; 25) - Pitman Publishing Limited Liverpool - 1.979.
- [2] - PEDROSO, H.A. - "*BI - Equivalência de Contacto*". Dissertação de Mestrado - I.C.M.S.C. - USP - 1980.
- [3] - GOLUBITSKY, M. and GUILLEMIN - "*Stable mappings and their singularities*" - Graduate Texts in Math., Springer - 1.973.
- [4] - TADINI, W.M. - "*Germes finitamente determinados e símbolo de Boardman*". - Dissertação de Mestrado - I.C.M.S.C. - USP - 1.976.
- [5] - H.WHITNEY - "*On singularities of mappings of Euclidean Spaces I. Mappings of the plane into the plane*" - Ann of Math. - 62 (1.955) - 374 - 410.
- [6] - COMPTES RENDUS AND SCI. PARIS (1.965) - vol. 260 - "*Formes canoniques des singularités d'une - appli*
cation différentiable" - Note de M. Bernardi Morin transmise par M. Henri Cartan.
- [7] - MARTINET, J. - "*Deploiements verseles des applica*
tions différentiables et classification des ap
plications stables" - Lectures Notes in Mathe-
matics - nº 535 - Springer - 1.975.
- [8] - MARTINET, J. - "*Singularités des fonctions et appli*
cations différentiables" - Monografias de Matemã
tica da PUC, R.J., nº 1 - 1.977.

- [9] - SCHWARTZ, T.J. - "*Differential Geometry and Topology*" - Notes in Mathematics and its applications.
- [10] - DUFOUR, J.P. - "*Stabilité Simultanée des deux fonctions différentiables*" - Annales de L'Institut Fourier - 1.979.
- [11] - DUFOUR, J.P. - "*Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables*" - Ann. Scient. - Ec. Norm. Sup. 4^{ème} série, 10 - 1.977.
- [12] - TADINI, W.M. E SILVA, E.A. - "*Extensões Jacobianas de Ideais*" - Naturalia, 1 : 99 - 130, 1.975; publicado no Mathematical Reviews, vol. 58, nº 6, Ref. 31183b, em dezembro de 1.979.