UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Aspectos da teoria invariante e equivariante para a ação do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski

Leandro Nery de Oliveira

Tese de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PPG-Mat)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Leandro Nery de Oliveira

Aspectos da teoria invariante e equivariante para a ação do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências – Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Miriam Garcia Manoel

USP – São Carlos
Agosto de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

- O48a Oliveira, Leandro Nery de
Aspectos da teoria invariante e equivariante
para a ação do grupo de Lorentz no espaço de
Minkowski / Leandro Nery de Oliveira; orientadora
Míriam Garcia Manoel. -- São Carlos, 2017.
117 p.
- Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2017.
1. Grupo de Lorentz. 2. Espaço de Minkowski. 3.
Teoria invariante. I. Manoel, Míriam Garcia, orient.
II. Título.

Leandro Nery de Oliveira

**Aspects of invariant and equivariant theory for the action of
the Lorentz group on the Minkowski space**

Doctoral dissertation submitted to the Institute of
Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in
partial fulfillment of the requirements for the degree of
the Doctorate Program in Mathematics. *FINAL
VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Miriam Garcia Manoel

**USP – São Carlos
August 2017**

À minha esposa Jorgeane e aos meus dois filhos Helena e Heitor.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha esposa Jorgeane Oliveira, pelo amor, paciência, compreensão, encorajamento e aos meus filhos Helena e Heitor, meus grandes presentes.

À professora Míriam, pelo profissionalismo, seriedade e paciência. Sou eternamente grato pela orientação e apoio bem como sua ajuda pessoal com a minha estadia em São Carlos.

Ao professor Leonardo Câmara pelo incentivo e apoio.

Aos meus amigos Thiago, Maico, Fernando, Karlo, Telau, Giovani e Marcos Aurélio pela sincera amizade e momentos de desabafo.

Aos meus amigos do doutorado, Camilo, Dione, Rogélio e Martin, pelo momentos de estudos e descontração, em especial a Patrícia pelas discussões e conversas.

À minha cunhada Ana Helena (Lene), por se dispor a vir de Rio Branco a São Carlos me ajudar, cuidando dos meus filhos nas incontáveis horas que passei distante deles.

À CAPES pelo auxílio financeiro durante todo o doutorado.

A todos aqueles que me ajudaram de alguma forma durante o doutorado.

*“A matemática, vista corretamente,
possui não apenas verdade,
mas também suprema beleza -
uma beleza fria e austera, como a da escultura.”
(Bertrand Russell)*

RESUMO

OLIVEIRA, L. N. **Aspectos da teoria invariante e equivariante para a ação do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski**. 2017. 117 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Neste trabalho, introduzimos a teoria invariante e equivariante para a ação do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski. Na teoria clássica, muitos resultados são válidos somente para a ação de grupos compactos em espaços Euclidianos. Continuamos o estudo para alguns subgrupos de Lorentz compactos e apresentamos uma forma de calcular as involuções de Lorentz em $O(n, 1)$. Fazemos uma empolgante discussão sobre uma classe de matrizes centrossimétricas polinomiais com aplicações em teoria invariante, estabelecendo um rumo para a pesquisa em subgrupos de Lorentz não compactos. Por fim, apresentamos alguns resultados da teoria equivariante para subgrupos de Lorentz.

Palavras-chave: Grupo de Lorentz, Espaço de Minkowski, Teoria invariante, Teoria equivariante.

ABSTRACT

OLIVEIRA, L. N. **Aspects of invariant and equivariant theory for the action of the Lorentz group on the Minkowski space.** 2017. 117 p. Tese (Doutorado em Ciências – Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

In this work, we introduce the invariant and equivariant theory for the Lorentz group on the Minkowski space. In the classical theory, many results are valid only for compact groups on Euclidean spaces. We continue the study of some compact Lorentz subgroups and present a way of calculating the Lorentz involutions in $O(n, 1)$. We make an exciting discussion about a class of polynomial centrosymmetric matrices with applications in invariant theory, setting a course for research in non-compact Lorentz groups. Finally, we present some results for the equivariant theory of Lorentz subgroups.

Keywords: Lorentz Group, Minkowski space, Invariant theory, Equivariant theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	– (i) Plano do tipo espaço	(ii) Plano do tipo luz	(iii) Plano	
	do tipo tempo			47
Figura 2	– Espaço hiperbólico $\mathcal{H}^n(r)$ em relação ao cone luz.			51
Figura 3	– Ação de uma matriz de $SO_0(2, 1)$ em um vetor v de um espaço hiperbólico.			51
Figura 4	– Fix do tipo espaço e seu complemento Lorentz ortogonal			65
Figura 5	– Fix do tipo luz e seu complemento Lorentz ortogonal			65
Figura 6	– Fix do tipo tempo e seu complemento Lorentz ortogonal			66
Figura 7	– Cadeia de Isotropia de $O(1, 1)$.			101
Figura 8	– Cadeia de Isotropia de $O(2, 1)$.			105

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Subespaços invariantes de $O(1, 1)$.	63
Tabela 2	– Subespaços de pontos fixos de $\mathbb{R}^{1+1}$ e $\mathbb{R}^{2+1}$.	68
Tabela 3	– Polinômios $\Gamma^{\text{In}(2)}$ -invariantes	97
Tabela 4	– Subgrupos de isotropia de $O(1, 1)$.	101
Tabela 5	– Subgrupos de isotropia de $O(2, 1)$.	105

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	21
1 PRELIMINARES	25
1.1 Grupos de Lie e teoria de representação	25
1.1.1 Teoria invariante	27
1.1.2 Aplicações equivariantes	31
1.2 Os grupos de Lorentz	32
1.2.1 A decomposição polar e as componentes conexas de $O(n, 1)$	33
1.2.2 $O(n, 1)$ como o produto semidireto dos subgrupos $SO_0(n, 1)$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	40
1.2.3 A decomposição em valores singulares	42
1.2.4 Vetores no espaço de Minkowski	44
1.2.5 Subespaços do espaço de Minkowski	46
2 A AÇÃO DO GRUPO DE LORENTZ NO ESPAÇO DE MINKOWSKI	49
2.1 A ação do grupo de Lorentz	49
2.2 Teoria invariante e o subespaço de pontos fixos	53
2.3 Operadores de Reynolds	55
2.4 Subespaços invariantes	59
2.4.1 Complemento Lorentz invariante	59
2.4.2 Subespaços invariantes em $\mathbb{R}^{1+1}$	61
2.4.3 Subespaços invariantes em $\mathbb{R}^{2+1}$	63
3 AS INVOLUÇÕES DE LORENTZ	69
3.1 Involuções em $O(1, 1)$ e invariantes	69
3.2 Involuções em $O(2, 1)$ e invariantes	71
3.3 Involuções em $O(n, 1)$	74
3.4 O subespaço de pontos fixos de uma involução de Lorentz	84
4 SOBRE OS INVARIANTES PARA ROTAÇÕES DE LORENTZ	87
4.1 Matriz centrossimétrica polinomial em duas variáveis	89
4.2 A base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma^\theta)$	96

5	APLICAÇÕES EQUIVARIANTES PELA AÇÃO DE UM SUBGRUPO DE LORENTZ	99
5.1	Cadeia de isotropia de $O(1,1)$ e $O(2,1)$	100
5.1.1	<i>Cadeia de isotropia de $O(1,1)$</i>	<i>100</i>
5.1.2	<i>Cadeia de isotropia de $O(2,1)$</i>	<i>101</i>
5.2	Aplicações equivariantes	104
5.2.1	<i>O módulo das aplicações equivariantes por uma involução de $O(1,1)$</i>	<i>107</i>
5.2.2	<i>Aplicações equivariantes por uma involução de $O(2,1)$</i>	<i>108</i>
	REFERÊNCIAS	111
APÊNDICE A	MATRIZES DE $R_h(\theta)$	115

INTRODUÇÃO

De uma maneira geral, os sistemas dinâmicos estudam a evolução de um fenômeno, que depende do tempo, bem como suas propriedades locais e globais. A teoria de sistemas dinâmicos que são equivariantes com respeito à ação de grupos usa diversas ferramentas da Álgebra e da Topologia, como a teoria da representação de grupos, teoria invariante, ações de grupos e teoria da bifurcação, além da teoria de singularidades. Contribuições importantes foram dadas por Golubitsky, Stewart e Schaeffer com o livro clássico [17], Vanderbauwhede [41] e outros trabalhos que vieram a partir de então. Diferentes aspectos destas ferramentas são necessários para lidar com as propriedades algébricas e geométricas destes sistemas em espaços não euclidianos, como o espaço que estudamos, o espaço de Minkowski.

Muito do que se tem feito em teoria de sistemas dinâmicos equivariantes usa o fato, como hipótese fundamental, que o grupo é compacto. Nesse sentido, o estudo do grupo de Lorentz, especialmente dos seus subgrupos compactos, torna-se relevante.

Por definição, o grupo de Lorentz é um subgrupo do grupo de Poincaré que preserva a forma bilinear, ou pseudo-produto interno de Lorentz $\langle, \rangle$ e também preserva a distância de Lorentz dada por $\|u - v\| = \sqrt{|\langle u, v \rangle|}$. Porém, o grupo de Lorentz não contém todas as transformações que preservam a distância de Lorentz, isso cabe ao grupo de Poincaré, o grupo de isometrias no espaço de Minkowski. Por várias razões, a descrição de subgrupos gerais do grupo de Lorentz é de grande interesse em aplicações. Por exemplo, é de particular interesse se discutir os subgrupos discretos do grupo de Lorentz; a literatura traz trabalhos que variam dos anos 60 ([19]) até trabalhos recentes como em [37].

O espaço de Minkowski, ou também chamado espaço-tempo, é o contexto em que se combina espaço e tempo em um único sistema de coordenadas. É um espaço vetorial real, $(n + 1)$ -dimensional, dotado de uma pseudo-métrica simétrica, bilinear não degenerada associada ao pseudo-produto interno

$$\langle (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}.$$

Classifica-se os pontos x do espaço de Minkowski como sendo do tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz, se $\langle x, x \rangle$ é positivo, negativo ou nulo, respectivamente. Essa nomenclatura vem da teoria da relatividade de Einstein. Na teoria da relatividade de Einstein, o espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{3+1}$ é o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ onde as três primeiras coordenadas são espaciais e a última coordenada é temporal. Vários autores têm considerado uma grande variedade de aspectos da teoria das

singularidades e da geometria diferencial em espaços de Minkowski ([32] e [39]) e sistemas dinâmicos e bifurcações ([7], [24], [44]).

Discutimos, neste trabalho, aspectos no grupo de Lorentz e no espaço de Minkowski do ponto de vista da teoria invariante e equivariante, importantes ferramentas para a teoria de sistemas dinâmicos equivariantes. Adaptamos a teoria invariante e equivariante, desenvolvida em [17] e [35] para grupos compactos, para o grupo de Lorentz.

A teoria de representação em espaço de Minkowski para o grupo de Lorentz é abordada. Optamos por fazer um texto mais fluido, suave e uniforme. Por isso, incluímos alguns resultados, devidamente referenciados, com as demonstrações. Em outros resultados apresentamos uma demonstração particular.

Uma matriz centrossimétrica $[a_{i,j}]$, de ordem n , é definida por

$$a_{i,j} = a_{n+1-i, n+1-j}, \text{ para todo } i, j = 1, \dots, n.$$

Muitos trabalhos abordam as propriedades das matrizes centrossimétricas ([6], [12], [18], [28], [36], [40] e [43]). Estas matrizes desempenham um papel importante em várias áreas como, por exemplo, no cálculo de probabilidades e na análise de séries temporais ([8]). Também em áreas da engenharia e física como reconhecimento de padrões, teoria de antenas, física quântica, vibração em estruturas e o oscilador quântico-mecânico, teoria da comunicação e análise de fala, como abordado em [9] e [10]. Portanto, existe uma potencial aplicação destas matrizes em sistemas dinâmicos equivariantes. Estudamos, nesta tese, uma classe de matrizes centrossimétricas com entradas polinomiais e mostramos uma aplicação destas matrizes na teoria invariante.

Esperamos que os resultados obtidos nesta tese contribuam para um melhor entendimento dos aspectos da teoria invariante e equivariante da ação do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski.

A seguir, descrevemos o conteúdo de cada capítulo destacando alguns dos resultados encontrados.

No capítulo 1 apresentamos os conceitos básicos da teoria invariante e equivariante, que podem ser encontrados em [17] e [35]. Apresentamos também os grupos de Lorentz e sua decomposição em quatro componentes conexas. Destacamos o Teorema 1.2.14, mostrando que matrizes conjugadas estão na mesma componente conexa e escrevemos o grupo de Lorentz como o produto semidireto da componente conexa da identidade com um subgrupo de Lorentz finito de ordem quatro, Proposição 1.2.15. Mostramos a decomposição na forma polar e em valores singulares das matrizes de Lorentz, encontrado em [13], sendo esta última de grande importância para os resultados neste trabalho. Apresentamos também os subespaços do tipo luz, tempo e espaço, do espaço de Minkowski, e suas principais propriedades.

No capítulo 2, fazemos uma reunião de alguns resultados e propriedades mais gerais sobre o grupo de Lorentz. Estudamos a ação do grupo de Lorentz no espaço de Minkowski. No

Teorema 2.1.6, mostramos que a ação do grupo de Lorentz em $\mathbb{R}^{n+1}$ é absolutamente irredutível. O Lema 2.3.1 é importante para estabelecer um método que possa nos dar uma base de Hilbert de um grupo Γ , uma vez que se conheça a base de Hilbert de um subgrupo de Γ de índice quatro, usando para isso operadores de Reynolds e o Teorema 2.3.3, encontrado em [3]. Mostramos, na Proposição 2.4.1, que todo subespaço de Minkowski Γ -invariante, não degenerado, admite um complemento Lorentz ortogonal Γ -invariante. No caso de subespaço degenerado apresentamos uma condição suficiente para encontrarmos um complemento Lorentz ortogonal, Proposição 2.4.2. Finalizamos o capítulo apresentando alguns resultados e propriedades sobre subespaços invariantes do espaço de Minkowski, mostrando vários resultados sobre os espaços invariantes em $\mathbb{R}^{1+1}$ e $\mathbb{R}^{2+1}$, dando um destaque aos espaços de pontos fixos e sua natureza geométrica no espaço de Minkowski.

O capítulo 3 é dedicado aos $\mathbb{Z}_2$ -subgrupos de Lorentz. Fazemos uma classificação geral das matrizes de involução de Lorentz em $O(n, 1)$. As Proposições 3.1.1 e 3.2.1 nos dão a forma geral de uma involução de Lorentz em $O(1, 1)$ e $O(2, 1)$, respectivamente, e no Teorema 3.3.4 mostramos como pode ser escrita uma involução em $O(n, 1)$. Por fim, o Corolário 3.3.5 ajuda-nos a encontrar de maneira simples uma involução de Lorentz. Apresentamos os polinômios invariantes pela ação de involuções em $O(1, 1)$ (Proposição 3.1.4) e $O(2, 1)$ (Proposição 3.2.4) e alguns polinômios invariantes pela ação de $O(3, 1)$ (Proposições 3.3.3 e 3.3.6). Encerramos o capítulo mostrando que o conjunto dos pontos fixos, da ação de um grupo gerado por uma involução, nunca será um espaço do tipo luz, Teorema 3.4.3.

No capítulo 4 estudamos o grupo gerado pela rotação hiperbólica *pura* em $O(1, 1)$. No estudo dos invariantes para o grupo gerado por esta rotação hiperbólica, chegamos a um tipo especial de matrizes conhecida como matrizes centrossimétricas. Dedicamos boa parte do capítulo ao estudo das propriedades destas matrizes com entradas polinomiais. Chegamos ao final do capítulo com algumas conjecturas.

Finalmente, no capítulo 5 mostramos a cadeia de isotopia dos grupos $O(1, 1)$ e $O(2, 1)$. Mostramos que dado uma função Γ -invariante podemos achar uma aplicação Γ -equivariante, usando um resultado da teoria clássica, Proposição 5.2.1. Finalizamos o capítulo apresentando um procedimento, Teorema 5.2.2, para o cálculo das aplicações Γ -equivariantes a partir das funções Γ -invariantes, e vice-versa, desde que se conheça a base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes ou os geradores do módulo das aplicações Γ -equivariantes.

PRELIMINARES

Neste capítulo encontra-se a teoria clássica necessária para a leitura deste trabalho.

Inicialmente, vemos alguns resultados essenciais para os resultados nos capítulos posteriores. A maior parte dos resultados aqui podem ser encontradas em [13], [17], [29] e [35]. Este capítulo é dividido em duas seções.

Na primeira seção, vemos alguns conceitos fundamentais sobre teoria de grupos, definindo grupo de Lie linear e ação deste grupo em um espaço vetorial. Por isso, também damos uma noção sobre teoria de representação, visto que um grupo pode agir num espaço vetorial de várias formas. Definimos as funções invariantes e aplicações equivariantes e anunciamos os seus clássicos teoremas. Ao finalizar esta primeira seção, apresentamos dois algoritmos que nos ajudam a determinar uma base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes pela ação de um grupo de Lie compacto.

Na segunda seção, introduzimos os conceitos sobre grupo de Lorentz e espaço de Minkowski. Apresentamos a decomposição do grupo de Lorentz em quatro componentes conexas e também uma forma de decompor cada elemento deste grupo em valores singulares ou escrevê-los na forma polar. Esta decomposição é de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos à frente. Encerramos o capítulo apresentando propriedades importantes sobre os subespaços vetoriais do espaço de Minkowski.

1.1 Grupos de Lie e teoria de representação

Nesta seção tratamos sobre grupos de Lie e teoria de representação, além de noções da teoria invariante e equivariante. Começamos com os grupos de Lie, em [20] achamos uma excelente referência com uma leitura agradável. Seja $GL(n)$ o grupo das matrizes invertíveis de ordem n .

O espaço $GL(n)$ pode ser identificado como um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$. Assim, um subgrupo fechado é um subconjunto fechado de $GL(n)$ que tem estrutura de subgrupo. Temos então:

Definição 1.1.1. *Um subgrupo de Lie fechado de $GL(n)$ é chamado de grupo de Lie linear.*

Em [17] vemos que todo grupo de Lie compacto é topologicamente isomorfo a um grupo de Lie linear. Neste caso, o chamaremos apenas de grupo de Lie. Por toda esta seção, o grupo Γ representa um grupo de Lie compacto e V um espaço vetorial real, a menos de menção em contrário.

Definimos a *ação à esquerda* de um grupo Γ num espaço V , ou simplesmente uma ação de Γ em V , como uma função $\varsigma : \Gamma \times V \rightarrow V$ tal que

(i) Para todo $\gamma, \delta \in \Gamma$ e todo $v \in V$,

$$\varsigma(\gamma, \varsigma(\delta, v)) = \varsigma(\gamma\delta, v),$$

(ii) Para todo $v \in V$ temos que

$$\varsigma(I, v) = v.$$

onde I é o elemento identidade de Γ . Para abreviar a notação usaremos γv em lugar de $\varsigma(\gamma, v)$, para indicar a ação de γ em v .

A ação é chamada *fiel* se $\gamma v = v$ para todo $v \in V$ então $\gamma = I$. A ação é chamada *transitiva* se para quaisquer $u, v \in V$ existe algum $\gamma \in \Gamma$ tal que $u = \gamma v$.

Definição 1.1.2 ([5]). *A uma ação de Γ em V corresponde um homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \rho : \Gamma &\longrightarrow GL(V) \\ \gamma &\longmapsto \rho_\gamma \end{aligned}$$

chamado representação de Γ em V .

Duas ações podem ser isomorfas. Sejam V e W espaços vetoriais n -dimensionais e suponha que o grupo de Lie Γ age em ambos (note que estamos considerando que a ação em V e W podem ser distintas). Dizemos que as ações são isomorfas, ou que os espaços V e W são Γ -isomorfos, se existe um isomorfismo linear $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ tal que $\mathcal{T}(\gamma v) = \gamma \mathcal{T}(v)$, para todo $v \in V$ e $\gamma \in \Gamma$.

Podemos estender a mesma ideia para o caso em que o grupo Γ age em V , pela ação $\gamma \cdot v$, e outro grupo Δ age em W , pela ação $\delta * w$, supondo que Γ e Δ são isomorfos. De fato, sendo $\mathcal{J} : \Gamma \rightarrow \Delta$ um isomorfismo de grupos, dizemos que as ações são isomorfas se existe um isomorfismo linear $\mathcal{T} : V \rightarrow W$ tal que $\mathcal{T}(\gamma \cdot v) = \mathcal{J}(\gamma) * \mathcal{T}(v)$, para todo $v \in V$ e $\gamma \in \Gamma$.

Podemos identificar qualquer grupo de Lie compacto contido em $GL(n)$ como um subgrupo do grupo ortogonal $O(n)$ ([17]). Essa identificação é feita usando uma forma de integração que é invariante por translação dos elementos de Γ . Ela é chamada de *Integral de Haar* ([30]).

1.1.1 Teoria invariante

Muitos problemas em álgebra aplicada têm simetrias ou são invariantes sob determinadas transformações naturais. Propriedades na geometria euclideana são invariantes sob o grupo euclidiano de rotações, reflexões e translações; propriedades na geometria projetiva são invariantes sob o grupo de transformações projetivas e, como veremos adiante, propriedades do espaço de Minkowski são invariantes pela ação do grupo de Lorentz. Dessa forma, a teoria invariante é muito mais do que uma observação filosófica, ela tem uma importância prática e uma elegância matemática ímpar.

Definição 1.1.3 ([17]). *Seja Γ um grupo de Lie agindo em um espaço vetorial V . Uma função real $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante sob a ação de Γ se*

$$f(\gamma x) = f(x)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$.

Como a ação de Γ em V é linear, e sendo Γ finitamente gerado, é suficiente verificar a igualdade acima apenas para os geradores de Γ .

O teorema a seguir afirma que existe um subconjunto finito de polinômios invariantes, $u_1, \dots, u_s$ tal que todo polinômio invariante pode ser escrito como uma função polinomial de $u_1, \dots, u_s$. Este conjunto finito não é único e é chamado de *base de Hilbert*, ou de conjunto de geradores do anel de funções polinomiais, e os elementos são chamados de *invariantes fundamentais*. O conjunto de todos os polinômios invariantes, pela ação de um grupo Γ , tem a estrutura de um anel e é denotado por $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Teorema 1.1.4 (Hilbert-Weyl). *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo num espaço V . Então existe uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.*

Demonstração. Veja [17], p. 54, Theorem 4.2. □

Em geral, o cálculo do conjunto de geradores para o conjunto $\mathcal{P}(\Gamma)$ é extremamente difícil.

Note que o *Teorema de Hilbert-Weyl* nos restringe a grupos compactos, embora seja possível achar exemplos de grupos não compactos que possuem uma base de Hilbert. Luna, em [23], demonstrou que o *Teorema de Hilbert-Weyl* também é verdadeiro para representações racionais

de grupos algébricos reductivos. Uma explanação sobre grupos reductivos e uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [11], Proposição 2.2.10.

O teorema de Schwarz, que se baseia no teorema de Hilbert-Weyl, nos dá uma descrição dos germes invariantes. Para entendê-lo melhor, precisamos da seguinte definição:

Definição 1.1.5 ([38]). *Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $\mathcal{F}$ o conjunto de todas as aplicações suaves $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definidas em uma vizinhança U de x . Definimos a seguinte classe de equivalência em $\mathcal{F}$: $f_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $f_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ são equivalentes se existe um aberto $W \subset U_1 \cap U_2$ contendo x tal que $f_1|_W = f_2|_W$. A classe de equivalência da aplicação f é chamada de germe de f em x , ou simplesmente de germe de f .*

Se $f(x) = y$, chamamos x de fonte do germe e y de meta do germe. Denotamos por $\mathcal{E}_{n,m}$ o conjunto dos germes de funções de fonte nula, isto é, $\mathcal{E}_{n,m} = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m\}$. Se $m = 1$ denotamos apenas por $\mathcal{E}_n$.

O teorema a seguir garante que a base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$ é também a base de Hilbert para o anel dos germes Γ -invariantes $\mathcal{E}(\Gamma)$. A notação $\mathcal{E}(\Gamma)$ é usada para indicar o anel dos germes Γ -invariantes $V, 0 \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 1.1.6 (Teorema de Schwarz, 1975). *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo num espaço V . Seja $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o conjunto $\mathcal{P}(\Gamma)$ de polinômios Γ -invariantes. Seja $f \in \mathcal{E}(\Gamma)$. Então existe um germe suave $h : \mathbb{R}^s, 0 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que*

$$f(x) = h(u_1, \dots, u_s).$$

Demonstração. Veja [17], p. 58, Theorem 4.3. □

Dizemos que um conjunto de polinômios Γ -invariantes tem uma *relação* se existe um polinômio não nulo $r(y_1, \dots, y_s)$ tal que

$$r(u_1(x), \dots, u_s(x)) \equiv 0,$$

onde o conjunto $\{u_1, \dots, u_s\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{E}(\Gamma)$. Tais relações também são chamadas de *syzygies*.

O anel $\mathcal{P}_V = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ é uma álgebra graduada sobre $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{P}_V = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \mathcal{P}_{V_d},$$

onde $\mathcal{P}_{V_d}$ é o subespaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas de grau d . Seja $\mathcal{P}_d(\Gamma)$ o subespaço de todos os polinômios Γ -invariantes homogêneos de grau d . Como a ação de Γ em V é linear então $\gamma f \in \mathcal{P}_d(\Gamma)$, para todo $\gamma \in \Gamma$ e $f \in \mathcal{P}_d(\Gamma)$. Portanto, o anel dos polinômios Γ -invariantes $\mathcal{P}(\Gamma)$ é uma álgebra graduada sobre $\mathbb{R}$.

Definição 1.1.7 ([35]). A série de Hilbert da álgebra graduada $\mathcal{P}(\Gamma)$ é a função dada por

$$\Phi_\Gamma(t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim(\mathcal{P}_d(\Gamma))t^d.$$

O teorema a seguir é um clássico resultado que nos dá uma forma explícita da série de Hilbert em termos das matrizes de Γ (ou da representação (ρ, Γ)). A série de Hilbert definida desta forma é chamada de série de Molien.

Teorema 1.1.8 (Molien, 1897). *Seja Γ um grupo compacto. A série de Hilbert do anel de polinômios Γ -invariantes é*

$$\Phi_\Gamma(t) = \int_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{(\det(I - t\gamma))}. \quad (1.1)$$

Uma demonstração para este teorema pode ser encontrada em [35].

Observação 1.1.9. *Se Γ é um grupo finito então a série de Molien é dada por*

$$\Phi_\Gamma(t) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{(\det(I - t\gamma))}.$$

A série de Molien nos dá uma estimativa sobre a contagem de polinômios homogêneos, pelo menos para os de grau mais baixo. Com o auxílio de algum software é possível achar essa estimativa para graus maiores.

Os polinômios $p_1, \dots, p_m$ são algebricamente independentes se não existe relação entre estes polinômios, isto é, se o único polinômio $r(x_1, \dots, x_m)$ tal que $r(p_1, \dots, p_m) \equiv 0$ é o polinômio nulo. A proposição a seguir, que pode ser encontrada em [35], simplifica o cálculo da série de Hilbert para o caso em que os polinômios são algebricamente independentes.

Proposição 1.1.10 ([35]). *Sejam $p_1, \dots, p_m$ polinômios algebricamente independentes de $K[x]$ que são homogêneos de grau $d_1, \dots, d_m$, respectivamente. Então a série de Hilbert do subanel graduado $R := K[p_1, \dots, p_m]$ é dada por*

$$H(R, t) = \sum_{d=0}^{\infty} \dim_K(R_d)t^d = \frac{1}{(1 - t^{d_1})(1 - t^{d_2}) \dots (1 - t^{d_m})}.$$

Como determinar quando polinômios são algebricamente independentes? Precisamos, antes de responder esta questão, de algumas definições.

Uma ordem total $\prec$ sobre os monômios $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ em $K[x_1, \dots, x_n]$ é chamada de ordem monomial se $1 \prec x_1$ e $x_1 \prec x_2$ o que implica que $x_1 x_3 \prec x_2 x_3$, para todos os monômios $x_1, x_2, x_3 \in K[x_1, \dots, x_n]$.

Um exemplo de ordem monomial é a ordem graduada lexicográfica. Nesta ordem,

$$x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \prec x_1^{b_1} \dots x_n^{b_n}$$

se $\sum a_i < \sum b_i$. Ou se ambos têm o mesmo grau mas a primeira diferença não-nula, $a_i - b_i$, é negativa.

Outro exemplo é a ordem lexicográfica. O nome da ordem lexicográfica vem de sua generalização da ordem dada às palavras em um dicionário: uma seqüência de letras. Nesta ordem, a ordem $x \prec y \prec z$ em três variáveis induz uma ordem lexicográfica $1 \prec x \prec x^2 \prec x^3 \prec \dots \prec y \prec yx \prec yx^2 \prec \dots \prec z \prec zx \prec zx^2 \prec \dots$ em $K[x, y, z]$.

Fixada uma ordem monomial $\prec$ em $K[x_1, \dots, x_n]$, e dado um polinômio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, denotamos por:

1. $\text{init}(f)$ o maior monômio do polinômio f , chamado *monômio inicial* de f ;
2. $\text{init}(I) := \langle \{\text{init}(f) : f \in I\} \rangle$, o ideal gerado pelos monômios iniciais de todos os polinômios do ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$.

Um ideal gerado por monômios iniciais é chamado de *ideal monomial*.

Definição 1.1.11 ([35]). Um subconjunto finito $\mathcal{G} := \{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ de um ideal I é chamado base de Gröbner para I se o ideal monomial $\text{init}(I)$ for gerado pelo conjunto

$$\{\text{init}(g_1), \text{init}(g_2), \dots, \text{init}(g_s)\}.$$

Apresentamos a seguir dois procedimentos para o cálculo de uma base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes pela ação de um grupo compacto. O primeiro algoritmo determina se um conjunto de polinômios é algebricamente independentes ou não.

Algoritmo 1.1.12 ([35]). ENTRADA: Um conjunto de polinômios $F := \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset K[x]$.

QUESTÃO: F é algebricamente dependente sobre K ? Se sim, encontre os polinômios não nulos P , em m variáveis, tais que $P(f_1, f_2, \dots, f_m) \equiv 0$.

SOLUÇÃO:

- (i) Introduzimos m novas variáveis $y := (y_1, y_2, \dots, y_m)$;
- (ii) Calculamos a base de Gröbner $\mathcal{G}$ de $\{f_1 - y_1, f_2 - y_2, \dots, f_m - y_m\}$, com respeito à ordem lexicográfica $x_1 > x_2 > \dots > x_n > y_1 > y_2 > \dots > y_m$;
- (iii) Seja $\mathcal{G}' = \mathcal{G} \cap K[y]$. Então F é algebricamente independente se $\mathcal{G}' = \emptyset$. Caso contrário, os polinômios de F são algebricamente dependentes e cada elemento não nulo $P(y) \in \mathcal{G}'$ é uma relação tal que $P(f_1, f_2, \dots, f_m) \equiv 0$.

Suponha um conjunto de polinômios invariantes $\{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathcal{P}(\Gamma)$. O próximo algoritmo determina se esse conjunto gera o anel dos polinômios invariantes $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Algoritmo 1.1.13 ([14],[15] e [35]). ENTRADA: Um conjunto de polinômios $F := \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathcal{P}(\Gamma)$;

QUESTÃO: O conjunto F gera $\mathcal{P}(\Gamma)$?

SOLUÇÃO:

- (i) Use o Algoritmo 1.1.12 para verificar se os polinômios $\{p_1, \dots, p_m\}$ são algebricamente independentes;
- (ii) Se os polinômios $\{p_1, \dots, p_m\}$ são algebricamente independentes, calcule a série de Hilbert $H(R, t)$, segundo a Proposição 1.1.10;
- (iii) Se os polinômios são algebricamente dependentes, calcule a série de Hilbert $H(R, t)$, segundo a definição.
- (iv) Calcule a série de Molien $\Phi_\Gamma(t)$. Se $\Phi_\Gamma(t) = H(R, t)$ então o conjunto $\{p_1, \dots, p_m\}$ gera o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, e aqui termina o algoritmo.
- (v) Caso contrário $\Phi_\Gamma(t) - H(R, t) = c_d t^d + c_{d+1} t^{d+1} + \dots$, onde c_d é algum inteiro positivo.
- (vii) Encontre todos os c_d invariantes de grau d e adicione-os ao conjunto F . Recomece pelo item (i).

A série $\Phi_\Gamma(t) - H(R, t) = c_d t^d + c_{d+1} t^{d+1} + \dots$ nos dá a informação que existem c_d invariantes linearmente independentes de grau d , que não podem ser expressos em função dos polinômios $p_1, \dots, p_m$.

Estes dois algoritmos são usados nesta tese para calcular a base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes, pela ação de algumas classes de grupos de Lorentz compactos, em especial as involuções descritas nos Capítulos 3 e 5. Também usamos o programa MAPLE ([27]) como recurso para calcular, entre outras coisas, a base de Gröbner, polinômios invariantes e o subespaço de pontos fixos. No texto, deixamos claro quando fazemos uso deste software.

1.1.2 Aplicações equivariantes

Definição 1.1.14 ([17]). Seja Γ um grupo de Lie agindo em V . Dizemos que uma aplicação $g : V \rightarrow V$ comuta com Γ ou é Γ -equivariante se

$$g(\gamma x) = \gamma g(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$.

O produto de uma aplicação Γ -equivariante por uma função Γ -invariante é uma aplicação Γ -equivariante. Denotamos por $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V)$ o módulo das aplicações polinomiais Γ -equivariantes

de V em V sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$, e por $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma; V)$ o módulo dos germes suaves de aplicações Γ -equivariantes de V em V sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.

Os teoremas a seguir nos garantem que os módulos $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V)$ e $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma; V)$ são finitamente gerados, se o grupo Γ for compacto.

Teorema 1.1.15 ([17]). *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V . Então existe um conjunto finito de polinômios Γ -equivariantes $g_1, \dots, g_r$ que geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$.*

A versão Γ -equivariante do teorema de Schwarz, Teorema 1.1.6, foi provada por Poénaru. Uma prova pode ser encontrada em [17].

Teorema 1.1.16 (Poénaru, 1976). *Seja Γ um grupo de Lie compacto e sejam $g_1, \dots, g_r$ geradores do módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma)$. Então $g_1, \dots, g_r$ geram o módulo $\vec{\mathcal{E}}(\Gamma; V)$ sobre o anel $\mathcal{E}(\Gamma)$.*

1.2 Os grupos de Lorentz

Nesta seção, apresentamos o grupo de Lorentz e seus resultados básicos. As referências principais são [13], [22] e [29]. Como alguns resultados nestas referências aparecem sem a demonstração preferimos refazê-las. Em alguns outros casos, reproduzimos as demonstrações dada a sua importância para este texto.

Denotamos por $J = J_{p,q}$ a matriz em $M_n(\mathbb{R})$ dada por $J_{p,q} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix}$, onde $I_p \in M_p(\mathbb{R})$ e $I_q \in M_q(\mathbb{R})$, $p, q \geq 1$ com $p + q = n$.

A matriz J pode ser associada com a forma bilinear simétrica não degenerada $\phi_{p,q} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi_{p,q}(x, y) = x^t J y = \sum_{i=1}^p x_i y_i - \sum_{j=p+1}^n x_j y_j,$$

onde x^t denota a transposta de x que é tomado como vetor coluna, e com a forma quadrática $\phi_{p,q} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi_{p,q}(x) = x^t J x = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^n x_j^2.$$

Chamamos esta forma quadrática de *métrica de Lorentz*. O espaço $\mathbb{R}^n$, com a métrica de Lorentz, é chamado de *espaço de Minkowski*.

Temos,

Definição 1.2.1 ([13]). *O grupo*

$$O(p, q) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}); A^t J_{p,q} A = J_{p,q}\}$$

é chamado grupo pseudo-ortogonal de assinatura (p, q) .

Se $A \in O(p, q)$ então $|\det A| = 1$, $\det J = \det I_q = (-1)^q$ e $A^{-1} = JA^t J$. Ainda, o grupo $O(p, q)$ é fechado também em relação a transposição.

$O(p, q)$ é o grupo de todas as isometrias que preservam a forma quadrática $\phi_{p,q}$. O subgrupo ortogonal especial do grupo $O(p, q)$ é dado por

$$SO(p, q) = \{A \in O(p, q) ; \det A = 1\}.$$

Este subgrupo também é fechado em relação a transposição.

Daqui em diante, tratamos do grupo $O(n, 1)$, o grupo pseudo-ortogonal de assinatura um, também chamado de grupo de Lorentz, e seus subgrupos estudando sua ação no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{n+1}$. Também usamos o pseudo-produto interno de Lorentz, como na definição:

Definição 1.2.2. A forma bilinear $\langle, \rangle : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada pseudo-produto interno de Lorentz, com $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i - x_{n+1} y_{n+1}$.

Os elementos do espaço de Minkowski são representados por (x, t) , onde $t \in \mathbb{R}$, na física, é interpretado como tempo e $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ são conhecidas como coordenadas espaciais.

1.2.1 A decomposição polar e as componentes conexas de $O(n, 1)$

Determinamos a decomposição polar e a decomposição em valores singulares das matrizes do grupo de Lorentz $O(n, 1)$. Escrevendo $J = J_{n,1}$ e dado qualquer $A \in O(n, 1)$ escrevemos

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ v^t & c \end{pmatrix}$$

onde $B \in M_n(\mathbb{R})$, u e v são vetores (coluna) de $\mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Começamos com a decomposição polar do grupo de Lorentz $O(n, 1)$.

Proposição 1.2.3 ([13]). Toda matriz $A \in O(n, 1)$ tem uma decomposição polar da forma

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{I_n + vv^t} & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix}$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{I_n + vv^t} & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix}$$

onde $Q \in O(n)$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$.

Demonstração. Escrevemos A em bloco:

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ v^t & c \end{pmatrix},$$

com $B \in M_n(\mathbb{R})$, u e v são vetores (coluna) de $\mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$. Como $A \in O(n, 1)$ então $A^t J A = J$, isto é,

$$\begin{pmatrix} B & u \\ v^t & c \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & u \\ v^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

assim temos,

$$\begin{pmatrix} B^t & v \\ u^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & u \\ -v^t & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e daí,

$$\begin{cases} B^t B - v v^t = I_n \\ B^t u - c v = 0 \\ u^t B - c v^t = 0 \\ u^t u - c^2 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} B^t B = I_n + v v^t \\ B^t u = c v \\ u^t u = c^2 - 1 \end{cases}$$

Usando $A J A^t = J$, de forma análoga, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} B B^t = I_n + u u^t \\ B v = c u \\ v v^t = c^2 - 1 \end{cases}.$$

Temos, portanto, as equações

$$\begin{cases} B^t B = I_n + v v^t \\ B^t u = c v \\ B v = c u \\ u^t u = c^2 - 1 = v v^t \end{cases}.$$

Note que

$$v v^t = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & \cdots & v_1 v_n \\ v_1 v_2 & v_2^2 & \cdots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \cdots & v_n^2 \end{pmatrix}$$

é simétrica. De $u^t u = c^2 - 1$ temos que $\|u\| = \sqrt{c^2 - 1}$, portanto $|c| \geq 1$ e de $B^t B = I_n + v v^t$ concluímos que $B^t B$ é simétrica e positiva definida, pois

$$B B^t = \begin{pmatrix} v_1^2 + 1 & v_1 v_2 & \cdots & v_1 v_n \\ v_1 v_2 & v_2^2 + 1 & \cdots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & \cdots & v_n^2 + 1 \end{pmatrix},$$

com os menores principais de determinante positivo.

Geometricamente, sabe-se que $H = \frac{v v^t}{v^t v}$ é a projeção ortogonal de qualquer vetor em $\mathbb{R}^n$ na reta determinada por v . Consequentemente, o núcleo de $v v^t$ é o complemento ortogonal de v .

A matriz vv^t tem autovalor 0 com multiplicidade $n - 1$ e autovalor $c^2 - 1$ com multiplicidade 1. Os autovetores associados ao autovalor 0 são ortogonais a v e o autovetor associado a $c^2 - 1$ é proporcional a v . Segue que $I_n + vv^t$ tem autovalor 1 com multiplicidade $n - 1$ e autovalor c^2 com multiplicidade 1, os autovalores são como os de vv^t .

$B \in M_n(\mathbb{R})$ tem uma forma polar $B = QS_1$, onde Q é ortogonal, S_1 é simétrica positiva definida e $S_1^2 = BB^t = I_n + vv^t$. Portanto, S_1 tem autovalor 1 com multiplicidade $n - 1$ e autovalor $|c|$ com multiplicidade 1. Consideremos então dois casos:

Caso 1. Se $c > 0$. Então, v é um autovetor de S_1 para c e como $Bv = cu$ temos

$$cu = Bv = QS_1v = Q(cv) = cQv$$

então $Qv = u$. Assim,

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ v^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QS_1 & Qv \\ v^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & c \end{pmatrix}$$

onde $Q \in O(n)$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$.

Caso 2. Se $c < 0$. Então, v é um autovetor de S_1 para $-c$, e como $Bv = cu$ então

$$cu = Bv = QS_1v = Q(-cv) = cQ(-v)$$

assim $Q(-v) = u$, e daí

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} B & u \\ v^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QS_1 & Q(-v) \\ v^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & -c \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde $Q \in O(n)$ e $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$.

□

Observação 1.2.4. A matriz

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix}$$

é chamada de Lorentz boost. Na demonstração acima, mostramos que a matriz $S_1 = \sqrt{I + vv^t}$ é simétrica definida positiva. Essa é uma propriedade importante para demonstrar que a ação do grupo de Lorentz $O(n, 1)$ é absolutamente irredutível em $\mathbb{R}^{n+1}$, feita no capítulo 2.

O resultado abaixo caracteriza a matriz Lorentz boost.

Proposição 1.2.5 ([13]). *Assuma $v \neq 0$. Os autovalores de*

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{I + vv^t} & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix},$$

com $|c| = \sqrt{\|v\|^2 + 1}$ são 1, com multiplicidade $n - 1$, e^θ e $e^{-\theta}$, cada um com multiplicidade 1 (para algum $\theta > 0$). Uma base ortonormal de autovetores de S consiste de vetores da forma

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

onde $u_i \in \mathbb{R}^n$, com $i = 1, \dots, n - 1$, são ortogonais a v e dois a dois ortogonais.

Pelo resultado acima temos que o determinante da matriz Lorentz boost é sempre igual a 1.

Sejam

$$\Lambda_{n+1}^p = \begin{pmatrix} I_{n-1,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \Lambda_{n+1}^t = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

matrizes de $O(n, 1)$. Note que

$$\Lambda_{n+1}^p \Lambda_{n+1}^t = \Lambda_{n+1}^{pt} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Denotamos por $SO_0(n, 1)$ o subgrupo de $O(n, 1)$ dado pela componente conexa da identidade. Logo, as classes laterais $\Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$, $\Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$ são conexas. Se $\det(A) = 1$ então $A \in SO_0(n, 1)$ ou $A \in \Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1)$. O resultado da proposição a seguir nos dá uma caracterização para uma matriz em $SO_0(n, 1)$.

Proposição 1.2.6. *$A \in SO_0(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = 1$ e $a_{(n+1)(n+1)} > 0$.*

Demonstração. Se $A \in SO_0(n, 1)$, então a decomposição polar de A é da forma

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} S,$$

com $Q \in O(n)$, $\varepsilon = \pm 1$ e $c = \sqrt{\|v\|^2 + 1} > 0$. Suponha que $Q \in SO(n)$, o que implica que $\varepsilon = 1$ pois $\det(S) = 1$. Então existe um caminho contínuo $\lambda : [0, 1] \rightarrow SO(n)$, com $\lambda(0) = I_n$ e $\lambda(1) = Q$. Considere agora a aplicação $\delta : [0, 1] \rightarrow SO_0(n, 1)$ dada por:

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} \lambda(t)S_1 & \lambda(t)v \\ v^t & c \end{pmatrix}.$$

É imediato que δ está bem definida e é um caminho contínuo de $\delta(0) = S$ a $\delta(1) = A$. Assim, $a_{(n+1)(n+1)} = c > 0$.

Por outro lado, suponha $A \in O(n, 1)$, com $\det(A) = 1$ e $a_{(n+1)(n+1)} > 0$. Podemos decompor A de duas formas:

$$A = \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & c \end{pmatrix}, \text{ com } Q_1 \in SO(n), \quad (1.3)$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} Q_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & c \end{pmatrix}, \text{ com } Q_2 \in O(n) \setminus SO(n).$$

Mas $a_{(n+1)(n+1)} > 0$ e $c = \sqrt{\|v\|^2 + 1} > 0$, então A é como em (1.3). A aplicação $\alpha : [0, 1] \rightarrow SO(n)$ com $\alpha(0) = I_n$ e $\alpha(1) = Q_1$ é contínua. Portanto, a aplicação $\beta : [0, 1] \rightarrow SO_0(n, 1)$ definida por

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é um caminho contínuo em $SO_0(n, 1)$. Logo $A \in SO_0(n, 1)$. □

O resultado da proposição acima aparece enunciado em [13] sem demonstração.

Note, pela Proposição 1.2.6, que $\Lambda_{n+1}^{pt} \notin SO_0(n, 1)$. Portanto, a classe lateral $\Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1)$ é conexa e $SO_0(n, 1) \cap \Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1) = \emptyset$. A proposição a seguir caracteriza os elementos de $\Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1)$.

Proposição 1.2.7. $A \in \Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = 1$ e $a_{(n+1)(n+1)} < 0$.

Se $\det(A) = -1$ então $A \in \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$ ou $A \in \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$. A proposição a seguir nos ajuda a caracterizar os elementos destas classes laterais.

Proposição 1.2.8.

(i) $A \in \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = -1$ e $a_{(n+1)(n+1)} > 0$.

(ii) $A \in \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$ se, e somente se, $\det(A) = -1$ e $a_{(n+1)(n+1)} < 0$.

Demonstração. (i) Se $A \in \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$ então $\det(A) = -1$ e existe $B \in SO_0(n, 1)$ tal que

$$A = \Lambda_{n+1}^p B = \begin{pmatrix} I_{n-1,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1,1} Q S_1 & I_{n-1,1} Q v \\ v^t & c \end{pmatrix},$$

com $Q \in SO(n)$ e $a_{(n+1)(n+1)} = c = \sqrt{\|v\|^2 + 1} > 0$. Por outro lado, se $\det(A) = -1$ então $A \in \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$ ou $A \in \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$. Suponha $A \in \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$, então

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q S_1 & Q v \\ -v^t & -c \end{pmatrix}$$

o que implica que $a_{(n+1), (n+1)} < 0$, contradição. Logo $A \in \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$.

A prova é análoga para (ii). □

Da proposição acima é imediato que $\Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1) \cap \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1) = \emptyset$. Vemos assim que o grupo de Lorentz $O(n, 1)$ tem pelo menos quatro componentes conexas. O resultado a seguir, já conhecido na literatura, mostra que $O(n, 1)$ tem exatamente quatro componentes conexas. Apresentamos uma demonstração usando a decomposição polar.

Proposição 1.2.9.

$$O(n, 1) = SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1).$$

Demonstração. Como $\Lambda_{n+1}^i SO_0(n, 1) \subset O(n, 1)$ para $i = p, t, pt$ é imediato que

$$SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1) \dot{\cup} \Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1) \subset O(n, 1),$$

Por outro lado, se $A \in O(n, 1)$ então, pela decomposição polar, temos

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

com $S_1 = \sqrt{I_n + vv^t}$.

Suponha que (1.4) ocorre. Se $Q \in SO(n)$ então $\det(A) = 1$ e $a_{(n+1), (n+1)} = |c| > 0$, portanto $A \in SO_0(n, 1)$. Se $Q \notin SO(n)$ então $\det(Q) = -1$ o que implica que $\det(A) = -1$, mas ainda teremos que $a_{(n+1), (n+1)} > 0$. Suponha

$$Q = \begin{pmatrix} X_{(n-1) \times (n-1)} & Y_{(n-1) \times 1} \\ Z_{1 \times (n-1)} & k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

Note que

$$Q = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Z & -k \end{pmatrix} = I_{n-1, 1} \begin{pmatrix} X & Y \\ -Z & -k \end{pmatrix} = I_{n-1, 1} Q',$$

onde $\det(Q') = -\det(Q) = 1$. Além disso, $Q' \in SO(n)$. Portanto,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1, 1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix} = \\ &= \Lambda_{n+1}^p \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix} = \Lambda_{n+1}^p A' \end{aligned}$$

com $\det(A') = 1$ e $a'_{(n+1)(n+1)} > 0$ e ainda

$$A^t J A = J \Rightarrow (\Lambda_{n+1}^p A')^t J (\Lambda_{n+1}^p A') = J \Rightarrow (A')^t J A' = J \Rightarrow A' \in O(n, 1).$$

Daí $A' \in SO_0(n, 1)$. Logo $A \in \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$.

Suponha que (1.5) ocorre. Se $Q \in SO(n)$ então $\det(A) = -1$ e $a_{(n+1)(n+1)} = -|c| < 0$. Mostremos que $A \in \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$. De fato, podemos reescrever Q como $Q = I_n Q$. Daí

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} = I_{n,1} A'$$

com

$$A' = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix}.$$

Note que $A' \in SO_0(n, 1)$ pois

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} &= |c| \cdot \det \left(S_1 - (-v) \frac{1}{|c|} (-v^t) \right) = \\ &= |c| \cdot \det \left(S_1 - \frac{1}{|c|} v v^t \right) = \det \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix} \end{aligned}$$

assim, $\det(A') = 1$ e como $a'_{(n+1)(n+1)} = |c| > 0$ segue o resultado, pela Proposição 1.2.6. Portanto, $A \in \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$.

Se $Q \notin SO(n)$ então $\det(A) = 1$ e ainda $a_{(n+1)(n+1)} = -|c| < 0$. Como anteriormente, podemos reescrever Q como $Q = I_n I_{n-1,1} Q'$, com $Q' \in SO(n)$. Assim,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_n I_{n-1,1} Q' & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_n I_{n-1,1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1,1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} = \\ &= \Lambda_{n+1}^p \Lambda_{n+1}^t \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & -v \\ -v^t & |c| \end{pmatrix} = \Lambda_{n+1}^p \Lambda_{n+1}^t B \end{aligned}$$

Como $Q' \in SO(n)$ então $\det(B) = 1$ e ainda temos que $b'_{(n+1)(n+1)} = |c| > 0$. Portanto $B \in SO_0(n, 1)$ e consequentemente $A \in \Lambda_{n+1}^p \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$. Logo, o resultado segue. $\square$

1.2.2 $O(n, 1)$ como o produto semidireto dos subgrupos $SO_0(n, 1)$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Nesta subseção, mostramos que $SO_0(n, 1)$ é um subgrupo normal de $O(n, 1)$ e que este grupo é o produto semidireto dos grupos $SO_0(n, 1)$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Provamos também que duas matrizes conjugadas em $O(n, 1)$ devem pertencer à mesma componente conexa. Precisamos de alguns resultados preliminares.

Definição 1.2.10 ([34]). *Sejam Γ um grupo e Σ e Δ subgrupos de Γ . Dizemos que Γ é o produto semi-direto de Δ por Σ se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. Δ é subgrupo normal de Γ ;
2. $\Delta \cap \Sigma = e$;
3. $\Gamma = \Delta\Sigma$.

Neste caso, escrevemos $\Gamma = \Delta \rtimes \Sigma$.

Proposição 1.2.11 ([4]). *Se*

$$A = \begin{pmatrix} B & u \\ v^t & c \end{pmatrix},$$

com $B \in M(n)$, $c \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{R}^n$, então $\|u\| = \|v\|$.

Proposição 1.2.12 ([4]). *Sejam $A, B \in O(n, 1)$, se $C = AB$ então*

$$\text{sinal}(c_{(n+1)(n+1)}) = \text{sinal}(a_{(n+1)(n+1)}) \cdot \text{sinal}(b_{(n+1)(n+1)})$$

.

Demonstração. Sejam

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & u \\ v^t & c \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} B_1 & w \\ z^t & k \end{pmatrix},$$

com $A_1, B_1 \in M(n)$, $c, k \in \mathbb{R}$ e $u, v, w, z \in \mathbb{R}^n$. Temos que $c_{(n+1)(n+1)} = v^t w + ck = ck + \langle v, w \rangle$. Temos portanto dois casos:

Caso 1. $\text{sinal}(c) = \text{sinal}(k)$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} c_{(n+1)(n+1)} &= ck + \langle v, w \rangle \geq ck - |\langle v, w \rangle| \geq ck - \|v\| \cdot \|w\| = \\ &= \sqrt{1 + \|v\|^2} \cdot \sqrt{1 + \|z\|^2} - \|v\| \cdot \|w\| = \\ &= \sqrt{1 + \|v\|^2} \cdot \sqrt{1 + \|w\|^2} - \|v\| \cdot \|w\| > 0 \end{aligned}$$

pois $1 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 > \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$ e $\|z\| = \|w\|$, pela proposição anterior.

Assim $\text{sinal}(c_{(n+1)(n+1)}) = \text{sinal}(ck + \langle v, w \rangle) = \text{sinal}(c) \cdot \text{sinal}(k) > 0$.

Caso 2. $\text{senal}(c) \neq \text{senal}(k)$

Neste caso, temos

$$\begin{aligned} c_{(n+1)(n+1)} &= ck + \langle v, w \rangle \leq ck + |\langle v, w \rangle| \leq ck + \|v\| \cdot \|w\| = \\ &= -\sqrt{1 + \|v\|^2} \cdot \sqrt{1 + \|w\|^2} + \|v\| \cdot \|w\| = \\ &= -\sqrt{1 + \|v\|^2} \cdot \sqrt{1 + \|w\|^2} + \|v\| \cdot \|w\| < 0 \end{aligned}$$

o que mostra que $\text{senal}(c_{(n+1)(n+1)}) = \text{senal}(ck + \langle v, w \rangle) = \text{senal}(c) \cdot \text{senal}(k) < 0$ $\square$

Com os resultados acima, estamos prontos para mostrar que $SO_0(n, 1)$ é subgrupo normal de $O(n, 1)$.

Proposição 1.2.13. $SO_0(n, 1)$ é subgrupo normal de $O(n, 1)$.

Demonstração. Tome $S \in SO_0(n, 1)$ e seja $A \in O(n, 1)$ qualquer, então

$$\det(A^{-1}SA) = \det(A^{-1}) \cdot \det(S) \cdot \det(A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1$$

pois $\det(S) = 1$. Basta analisar o sinal de $B = A^{-1}SA$. Temos, pela Proposição 1.2.12, que

$$\begin{aligned} \text{senal}(b_{(n+1)(n+1)}) &= \text{senal}(a_{(n+1)(n+1)}^{-1}) \cdot \text{senal}(s_{(n+1)(n+1)}) \cdot \text{senal}(a_{(n+1)(n+1)}) = \\ &= \text{senal}(a_{(n+1)(n+1)}^{-1}) \cdot \text{senal}(a_{(n+1)(n+1)}) = \\ &= (\text{senal}(a_{(n+1)(n+1)}))^2 > 0 \end{aligned}$$

pois $\text{senal}(s_{(n+1)(n+1)}) > 0$ e $\text{senal}(a_{(n+1)(n+1)}^{-1}) = \text{senal}(a_{(n+1)(n+1)})$ uma vez que

$$A^{-1} = JA^tJ = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^t & v \\ u^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^t & -v \\ -u^t & c \end{pmatrix}.$$

Portanto $A^{-1}SA \in SO_0(n, 1)$. Logo, $SO_0(n, 1)$ é subgrupo normal de $O(n, 1)$. $\square$

No caso do grupo ortogonal $O(n)$ observamos que duas matrizes, cada uma em uma de suas 2 componentes conexas, não podem ser conjugadas (semelhantes), pois a conjugação de matrizes preserva o determinante. Uma questão natural é verificar isso no grupo de Lorentz $O(n, 1)$, em que, ao contrário, há elementos com mesmo determinante em componentes conexas distintas. O próximo resultado responde esta questão:

Teorema 1.2.14. Matrizes conjugadas em $O(n, 1)$ estão na mesma componente conexa.

Demonstração. Sejam $A, B \in O(n, 1)$ matrizes com determinante 1. Suponha que $A = (a_{ij}) \in SO_0(n, 1)$ e $B = (b_{ij}) \in \Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1)$. Temos que $\text{senal}(a_{(n+1)(n+1)})$ é positivo e também que

$\text{senal}(b_{(n+1)(n+1)})$ é negativo, pela Proposição 1.2.6. Suponha, por absurdo, que A e B sejam conjugadas, isto é, existe $P \in O(n, 1)$ tal que $A = PBP^{-1}$. Temos, portanto, que

$$\begin{aligned} \text{senal}(a_{(n+1)(n+1)}) &= \text{senal}(p_{(n+1)(n+1)}) \cdot \text{senal}(b_{(n+1)(n+1)}) \cdot \text{senal}(p_{(n+1)(n+1)})^{-1} \\ &= \text{senal}(b_{(n+1)(n+1)}) \cdot (\text{senal}(p_{(n+1)(n+1)}))^2 \\ &= -(\text{senal}(p_{(n+1)(n+1)}))^2, \end{aligned}$$

contradição. De modo análogo, mostramos o mesmo para $\Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1)$ e $\Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$. $\square$

Um segundo ponto importante é como se decompõe $O(n, 1)$ a partir do subgrupo $SO_0(n, 1)$ de índice quatro. Para o subgrupo abeliano $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{I_{n+1}, \Lambda_{n+1}^p, \Lambda_{n+1}^t, \Lambda_{n+1}^{pt}\}$, temos:

Proposição 1.2.15.

$$O(n, 1) = SO_0(n, 1) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2).$$

Demonstração. Observe que $SO_0(n, 1) \cap (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = \{I_{n+1}\}$. De fato, temos que $\Lambda_{n+1}^p, \Lambda_{n+1}^t \notin SO_0(n, 1)$ pois $\det \Lambda_{n+1}^p = \det \Lambda_{n+1}^t = -1$ e $\Lambda_{n+1}^p \Lambda_{n+1}^t \notin SO_0(n, 1)$ dado que $\text{senal}(\Lambda_{n+1}^p \Lambda_{n+1}^t) < 0$. Basta verificar que $O(n, 1) = SO_0(n, 1) \cdot (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$. Já sabemos que

$$O(n, 1) = SO_0(n, 1) \cup \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1) \cup \Lambda_{n+1}^t SO_0(n, 1) \cup \Lambda_{n+1}^{pt} SO_0(n, 1).$$

Assim, se $A \in O(n, 1)$ então existe $B \in SO_0(n, 1)$ tal que $A = B$ ou $A = \Lambda_{n+1}^p B$ ou $A = \Lambda_{n+1}^t B$ ou $A = \Lambda_{n+1}^{pt} B$. Como $SO_0(n, 1)$ é subgrupo normal de $O(n, 1)$, segue a afirmação. $\square$

1.2.3 A decomposição em valores singulares

Apresentamos nesta subseção a decomposição de uma matriz de Lorentz em valores singulares. No capítulo 3, usamos esta decomposição para estudar as involuções de Lorentz.

Teorema 1.2.16 (Decomposição em Valores Singulares, [13]). *Toda matriz $A \in O(n, 1)$ pode ser escrita como*

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $\varepsilon = \pm 1$, $P \in O(n)$, $Q \in SO(n)$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Da Proposição 1.2.3, qualquer matriz $A \in O(n, 1)$ pode ser escrita como

$$A = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{I + vv^t} & v \\ v^t & |c| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} S,$$

onde $\varepsilon = \pm 1$, $R \in O(n)$ e $|c| = \sqrt{||v||^2 + 1}$. Se $|c| = 1$ então $||v|| = 0$ o que implica que $v = 0$, sendo assim $S = I_{n+1}$ e, portanto, $\theta = 0$. Assumimos $|c| > 1$, o que significa que $\theta > 0$. Os autovalores da matriz

$$\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

são e^θ e $e^{-\theta}$. Como essa matriz é simétrica existe uma matriz ortogonal T tal que

$$D = \begin{pmatrix} e^\theta & 0 \\ 0 & e^{-\theta} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} T^t.$$

Daí

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Deste fato, vemos que a matriz

$$E = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1 \times 2} \\ 0_{2 \times n-1} & D \end{pmatrix},$$

cujas diagonais são dados pelos autovalores de S , é dada por

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Pela Proposição 1.2.5 uma base ortonormal de autovetores de S consiste de vetores da forma

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}||v||} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}||v||} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

onde $u_i \in \mathbb{R}^n$. Agora multiplicamos as matrizes

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n-1} & \frac{v}{\sqrt{2}||v||} & \frac{v}{\sqrt{2}||v||} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Obtemos assim uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde as colunas de Q são os vetores $u_1, \dots, u_{n-1}, \frac{v}{\sqrt{2}\|v\|}$. Trocando u_1 por $-u_1$, se necessário, podemos fazer com que essa matriz tenha determinante 1. Além disso, note que

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^t & 0 \\ u_2^t & 0 \\ \vdots & \vdots \\ u_{n-1}^t & 0 \\ \frac{v^t}{\sqrt{2}\|v\|} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{v^t}{\sqrt{2}\|v\|} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$S = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo,

$$A = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} S,$$

onde $P = RQ$. □

Observação 1.2.17. Na decomposição em valores singulares (DVS), se $A \in SO(n, 1)$ então $\varepsilon = 1$ e $P \in SO(n)$. De fato, se $\varepsilon = -1$ então $\text{senal}(a_{n+1, n+1}) < 0$, contradição. Além disso, como $\det(P)\varepsilon = 1$ então $\det(P) = 1$, o que implica que $P \in SO(n)$.

Pelo teorema anterior podemos concluir o seguinte corolário.

Corolário 1.2.18 ([13]). Os valores singulares de qualquer matriz $A \in O(n, 1)$ são 1, com multiplicidade $n - 1$, e^θ e $e^{-\theta}$, cada um com multiplicidade 1, para algum $\theta \geq 0$.

No caso $\theta = 0$, A é uma matriz ortogonal da forma

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

com $R \in O(n)$. Assim, os dois valores singulares e^θ e $e^{-\theta}$, $\theta \notin 0$, caracterizam as matrizes de Lorentz não ortogonais.

1.2.4 Vetores no espaço de Minkowski

Como notação, escrevemos todo vetor $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ como $u = (u, t)$ onde $u \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$, de modo que o pseudo-produto interno de Lorentz possa ser expresso como

$$\langle u, v \rangle = \langle (u, t), (v, s) \rangle = u \cdot v - ts$$

onde $u \cdot v$ é o produto interno euclidiano usual. Dizemos que dois vetores $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ são pseudo-ortogonais, ou *Lorentz ortogonais*, se $\langle u, v \rangle = 0$.

Assim, classificamos os vetores $(u, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ como segue:

Definição 1.2.19 ([13]). Um vetor não nulo $u = (u, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ é chamado de

- (a) *Tipo espaço* (spacelike) se $\langle u, u \rangle > 0$, isto é, se $\|u\|^2 > t^2$;
- (b) *Tipo tempo* (timelike) se $\langle u, u \rangle < 0$, isto é, se $\|u\|^2 < t^2$;
- (c) *Tipo luz* (lightlike) ou *isotrópico* se $\langle u, u \rangle = 0$, isto é, se $\|u\|^2 = t^2$.

Para quaisquer dos casos acima, dizemos que o sinal de um vetor é *positivo* se $t > 0$ e *negativo* se $t < 0$.

Definição 1.2.20 ([39]). O conjunto dos vetores do tipo luz

$$LC^* = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle u, u \rangle = 0\},$$

é chamado cone luz.

Definição 1.2.21 ([39]). Temos as seguintes pseudo-esferas em $\mathbb{R}^{n+1}$, com centro em $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ e raio $r > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n(p, r) &= \{u \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle u - p, u - p \rangle = -r^2\}; \\ S_1^n(p, r) &= \{u \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle u - p, u - p \rangle = r^2\}. \end{aligned}$$

O espaço $\mathcal{H}^n(r)$ é chamado de espaço hiperbólico, $S_1^n(r)$ é chamado de espaço de Sitter.

Observação 1.2.22. Os conjuntos LC^* , $\mathcal{H}^n(0, r) = \mathcal{H}^n(r)$ e $S_1^n(0, r) = S_1^n(r)$ são pseudo-esferas centradas na origem em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Note que, para cada $r > 0$, o espaço hiperbólico dado por

$$\mathcal{H}^n(r) = \mathcal{H}_-^n(r) \cup \mathcal{H}_+^n(r)$$

é um hiperboloide de duas folhas. Assim, o espaço hiperbólico $\mathcal{H}^n(r)$ tem duas componentes conexas ([13]).

O conjunto $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, com $e_i \in \mathbb{R}^{n+1}$, é uma base ortonormal, segundo Lorentz, de $\mathbb{R}^{n+1}$ se:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{se } 1 \leq i, j \leq n \\ -1, & \text{se } i = j = n+1 \end{cases}.$$

Proposição 1.2.23 ([29]). Suponha que u seja um vetor tipo-tempo e $v \neq 0$ um vetor tipo-tempo ou tipo-luz. Seja $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ uma base ortonormal, segundo Lorentz, de $\mathbb{R}^{n+1}$ e sejam $u = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i$ e $v = \sum_{i=1}^{n+1} y_i e_i$, então:

- (a) $x_{n+1}y_{n+1} > 0$, neste caso, $\langle u, v \rangle < 0$;
- (b) $x_{n+1}y_{n+1} < 0$, neste caso, $\langle u, v \rangle > 0$.

Com a proposição acima decorre o seguinte:

Proposição 1.2.24 ([29]). *Sejam u e v vetores não nulos em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $\langle u, v \rangle = 0$. Se u é um vetor tipo-tempo então v é vetor tipo-espaço.*

A prova dessa proposição é uma consequência imediata da Proposição 1.2.23, dado que se u é um vetor tipo-tempo e $\langle u, v \rangle = 0$ então v não pode ser tipo-tempo nem tipo-luz.

Note que a recíproca da Proposição 1.2.24 não vale. Basta tomar, em $\mathbb{R}^3$, os vetores $u = (0, 6, 4\sqrt{2})$ e $v = (2, 4, 3\sqrt{2})$, que são ambos vetores tipo-espaço, mas $\langle u, v \rangle = 0$.

Definição 1.2.25. ([13]) *Para $u = (u, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, definimos a pseudo-norma de u por*

$$||u|| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|} = \sqrt{||u||^2 - t^2}.$$

As propriedades da pseudo-norma são ([29]):

- (1) $||u|| \geq 0$ e $||u|| = 0 \Leftrightarrow u$ é tipo-luz;
- (2) $||\lambda u|| = |\lambda| ||u||$, com $\lambda \in \mathbb{R}$;
- (3) Cauchy-Schwarz Invertida: $|\langle u, v \rangle| \geq ||u|| ||v||$, com u e v vetores tipo-tempo.
- (4) Desigualdade Triangular Invertida: Sejam u e v vetores tipo-tempo com a mesma orientação, isto é, $\langle u, v \rangle < 0$. Então $||u + v|| \geq ||u|| + ||v||$.

1.2.5 Subespaços do espaço de Minkowski

Dizemos que um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^{n+1}$ é do tipo tempo se V tem um vetor tipo tempo; é do tipo espaço se todos os vetores não nulos de V são do tipo espaço; e é do tipo luz caso nenhuma das condições acima forem satisfeitas ([33]).

Também podemos definir estes subespaços a partir do produto interno de Lorentz, como a seguir.

Definição 1.2.26. *Seja V um subespaço vetorial do espaço de $\mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que o espaço V é:*

- (i) *do tipo espaço se o produto interno de Lorentz restrito a V for positivo definido;*
- (ii) *do tipo tempo se o produto interno de Lorentz restrito a V for indefinido e não degenerado;*
- (iii) *do tipo luz se o produto interno de Lorentz restrito a V for positivo semi-definido.*

No caso de $\mathbb{R}^{2+1}$, temos as seguintes figuras representando os planos do tipo espaço, luz e tempo, respectivamente:

Figura 1 – (i) Plano do tipo espaço (ii) Plano do tipo luz (iii) Plano do tipo tempo

Definição 1.2.27 ([33]). *Um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^{n+1}$ é não degenerado se a forma bilinear restrita ao subespaço for não degenerada.*

Proposição 1.2.28. *O espaço V é não degenerado se, e somente se, $V \cap V^\perp = \{0\}$.*

Demonstração. Suponha que $V \cap V^\perp \neq \{0\}$. Então, existe $0 \neq v \in V \cap V^\perp$. Como $v \in V^\perp$ então $\langle u, v \rangle_L = 0$, para todo $u \in V$. Dado que também $v \in V$ e $w \neq 0$ segue que $V|_{\langle v \rangle_L}$ é degenerado. Por outro lado, suponha por absurdo que V seja degenerado. Então existe $0 \neq v \in V$ tal que $\langle u, v \rangle_L = 0$, para todo $u \in V$. Daí $v \in V^\perp$, o que implica que $0 \neq v \in V \cap V^\perp$. Contradição. $\square$

A proposição a seguir aparece em [31] enunciada para qualquer espaço vetorial dotado de um produto escalar não degenerado. Propomos aqui uma demonstração para o espaço de Minkowski.

Proposição 1.2.29. *Dado qualquer subespaço V do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{n+1}$ temos que*

$$\dim V + \dim V^\perp = n + 1.$$

Demonstração. Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base para o espaço vetorial V . Definimos a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por $\varphi(x) = AJx$, onde $J = I_{n,1}$ e

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix}_{k \times (n+1)}$$

é a matriz cujas linhas são formadas pelos vetores da base de V . Temos então que $\dim(\text{Im}(\varphi)) = \text{Rank} A = k$. Assim, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim \ker \varphi + k = n + 1$. Note, porém, que $\ker \varphi = V^\perp$. Logo $\dim V^\perp = n + 1 - k$. $\square$

Proposição 1.2.30 ([21]). *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^{n+1}$ vetores do tipo-luz. Então $\langle u, v \rangle = 0$ se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.*

Proposição 1.2.31. *Se V é um espaço tipo-luz então $\dim(V \cap V^\perp) = 1$.*

Demonstração. Sejam $u, v \in V \cap V^\perp$. Então $\langle u, v \rangle_L = 0$. Note que u e v são vetores do tipo-luz. Assim, pela Proposição 1.2.30 eles são linearmente dependentes. Isso nos dá que $\dim(V \cap V^\perp) \leq 1$. Por outro lado, sendo V um espaço do tipo-luz então $\dim V \neq 0$. Desta forma, tomemos $0 \neq v \in V$ com v um vetor tipo-luz. Então $\langle v, v \rangle_L = 0$ o que implica que $v \in V^\perp$. Assim, $\dim(V \cap V^\perp) \geq 1$, e o resultado segue. $\square$

Como consequência da proposição acima, juntamente com a Proposição 1.2.28, temos:

Corolário 1.2.32. *Todo espaço do tipo-luz é degenerado.*

Proposição 1.2.33 ([33]). *O espaço vetorial V é do tipo-espaço se, e somente se, $V^\perp$ é do tipo-tempo.*

Uma consequência imediata desta proposição é que se V é do tipo-luz então $V^\perp$ também é do tipo-luz.

No capítulo 2, usamos a Proposição 1.2.33 para classificar a natureza dos subespaços que são invariantes pela ação de um subgrupo discreto de Lorentz.

A AÇÃO DO GRUPO DE LORENTZ NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

No decorrer deste capítulo, estudamos a ação do grupo de Lorentz $O(n, 1)$ no espaço de Minkowski. Mostramos também que a ação do grupo de Lorentz é absolutamente irredutível em $\mathbb{R}^{n+1}$. Apresentamos um método que nos ajuda a determinar, via operadores de Reynolds, a base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes de um grupo Γ , uma vez que se conheça o anel dos polinômios de um subgrupo de Γ de índice dois ou quatro. Finalizamos este capítulo estudando os subespaços invariantes de $\mathbb{R}^{1+1}$ e os subespaços invariantes de $\mathbb{R}^{2+1}$, especialmente os subespaços de pontos fixos.

2.1 A ação do grupo de Lorentz

Começamos estudando a ação do subgrupo $SO_0(n, 1)$ no espaço hiperbólico $\mathcal{H}^n(r)$.

Já que toda isometria de Lorentz, $A \in SO(n, 1)$, preserva o produto interno de Lorentz, temos que A preserva (globalmente) todo o espaço hiperbólico $\mathcal{H}^n(r)$. Então todo $A \in SO_0(n, 1)$ preserva cada componente conexa do espaço hiperbólico, $\mathcal{H}_+^n(r)$ e $\mathcal{H}_-^n(r)$. Isto segue da seguinte proposição.

Proposição 2.1.1 ([13]). *Toda isometria de $SO_0(n, 1)$ preserva os vetores tipo-tempo positivos (resp. negativos) e os vetores tipo-luz positivos (resp. negativos). Mais ainda, se $A \in SO(n, 1)$ preserva todos os vetores tipo-tempo positivos então $A \in SO_0(n, 1)$.*

Temos também:

Proposição 2.1.2. *Se $A \in O(n, 1)$ preserva os vetores do tipo tempo positivos (resp. negativos) então $A \in SO_0(n, 1) \cup \Lambda_{n+1}^p SO_0(n, 1)$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, tome $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 1)$ (tipo tempo e positivo). Tome a matriz de Lorentz $A \in O(n, 1)$ na sua forma polar. Temos que

$$Ae_{n+1} = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Qv \\ \varepsilon c \end{pmatrix}.$$

Como, por hipótese, A preserva todos os vetores do tipo tempo positivos, então $\varepsilon c > 0$ o que implica que $\varepsilon = 1$, uma vez que $c = \sqrt{1 + \|v\|^2} > 0$. Portanto,

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & v \\ v^t & c \end{pmatrix}.$$

Como $Q \in O(n)$ segue que $A \in SO_0(n, 1) \cup \Lambda_{n+1}^P SO_0(n, 1)$. □

Note que o sinal de um vetor do tipo espaço pode não ser preservado. De fato, tome a matriz de $SO_0(1, 1)$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

agindo no vetor do tipo espaço $v = (\sqrt{2}, -1)$. Temos que $Av = e_1$, onde $e_1 = (1, 0)$. Assim, a ação de uma matriz de $SO_0(1, 1)$ em um vetor do tipo espaço negativo não preserva o sinal do vetor. Este exemplo mostra também que cada ramo da hipérbole que compõe o espaço de Sitter $S_1^1(1)$ não é invariante pela ação de $SO_0(1, 1)$.

Uma consequência imediata da Proposição 2.1.1 é que qualquer matriz $A \in SO_0(n, 1)$ deixa $\mathcal{H}_+^n(r)$ (resp. $\mathcal{H}_-^n(r)$) invariante. Portanto, as ações

$$\varphi_1 : SO_0(n, 1) \times \mathcal{H}_+^n(r) \longrightarrow \mathcal{H}_+^n(r) \text{ e } \varphi_2 : SO_0(n, 1) \times \mathcal{H}_-^n(r) \longrightarrow \mathcal{H}_-^n(r)$$

dadas por $\varphi_i(A, u) = Au$, $i = 1, 2$, estão bem definidas. E vale também:

Proposição 2.1.3. A ação $SO_0(n, 1) \times \mathcal{H}_+^n(r) \longrightarrow \mathcal{H}_+^n(r)$ é transitiva.

Demonstração. Segue diretamente da prova encontrada em [\[13\]](#) para $r = 1$. □

Considere o subgrupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{I_{n+1}, \Lambda_{n+1}^P, \Lambda_{n+1}^t, \Lambda_{n+1}^{Pt}\}$ de $O(n, 1)$ agindo no espaço hiperbólico $\mathcal{H}^n(r)$. A órbita de um ponto de $\mathcal{H}^n(r)$ pela ação de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ é formada por vértices de um retângulo contidos em $\mathcal{H}^n(r)$. A Figura 2 ilustra o caso $n = 1$ e nos ajuda a visualizar a ação de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ no espaço hiperbólico $\mathcal{H}^1(r)$.

Podemos entender a ideia geométrica da ação de uma matriz de $SO_0(n, 1)$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ usando a decomposição em valores singulares. Pela Proposição 1.2.16, temos que uma matriz de $SO_0(n, 1)$ pode ser decomposta como

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Figura 2 – Espaço hiperbólico $\mathcal{H}^n(r)$ em relação ao cone luz.

onde $P, Q \in SO(n)$. Desta forma, quando esta matriz age em $v = (x, t)$ temos uma rotação da coordenada espacial x com preservação do sinal da coordenada t . Após isso, uma rotação hiperbólica nas coordenadas x'_n e t ; onde x'_n é a n -ésima coordenada resultante da rotação de x por Q . E por fim, uma rotação na coordenada espacial, novamente sem mudança de sinal na $(n+1)$ -ésima coordenada. A Figura 3 ilustra esta ação no espaço hiperbólico $\mathcal{H}^2(r)$.

Figura 3 – Ação de uma matriz de $SO_0(2, 1)$ em um vetor v de um espaço hiperbólico.

Definição 2.1.4 ([17]). *Uma representação de um grupo Γ em um espaço vetorial V é absolutamente irredutível se as únicas aplicações lineares em V que comutam com Γ são múltiplos escalares da identidade.*

O resultado a seguir é usado na prova do Teorema 2.1.6.

Proposição 2.1.5. *Seja Γ agindo num espaço V e seja Σ um subgrupo de Γ . Se V é absolutamente irredutível para Σ então ele é absolutamente irredutível para Γ .*

Demonstração. Suponha que não. Então existe uma aplicação $A : V \rightarrow V$ com $A(\gamma x) = \gamma A(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, onde A não é um múltiplo escalar da identidade. Assim, temos que $A|_{\Sigma}$ não é múltiplo escalar da identidade. Portanto, V não é absolutamente irredutível para Σ , contradição. $\square$

Teorema 2.1.6. *O espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{n+1}$ é absolutamente irredutível para o grupo de Lorentz $O(n, 1)$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.1.5 basta mostrar que $\mathbb{R}^{n+1}$ é absolutamente irredutível para um subgrupo de $O(n, 1)$. Tome o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ como uma base para $\mathbb{R}^n$ e defina o subgrupo Σ gerado pelas matrizes de Lorentz tomadas na sua forma polar:

$$A_i = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_i & v_i \\ v_i^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_i & v_i \\ v_i^t & c \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_i & v_i \\ v_i^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_i & v_i \\ -v_i^t & -c \end{pmatrix}$$

com $i = 1, \dots, n$. Tome a matriz

$$W = \begin{pmatrix} X & y \\ z^t & k \end{pmatrix}$$

que comuta com todos os A_i e B_i , isto é, $A_i W = W A_i$ e $B_i W = W B_i$, $i = 1, \dots, n$. Assim, para $A_i W = W A_i$ obtemos as equações:

$$X S_i + y v_i^t = S_i X + v_i z^t \quad (2.1)$$

$$X v_i + c y = S_i y + k v_i \quad (2.2)$$

$$z^t S_i + k v_i^t = v_i^t X + c z^t \quad (2.3)$$

$$z^t v_i = v_i^t y \quad (2.4)$$

e para $B_i W = W B_i$, obtemos

$$X S_i - y v_i^t = S_i X + v_i z^t \quad (2.5)$$

$$X v_i - c y = S_i y + k v_i \quad (2.6)$$

$$z^t S_i - k v_i^t = -v_i^t X - c z^t \quad (2.7)$$

$$z^t v_i = -v_i^t y \quad (2.8)$$

Comparando as equações (2.2) e (2.6), para um mesmo i , temos

$$(Xv_i + cy) - (Xv_i - cy) = 0 \Rightarrow y = 0,$$

pois $c \neq 0$. Somando as equações (2.3) e (2.7), obtemos

$$z^t S_i = 0 \Rightarrow z^t S_i z = 0 \iff z = 0,$$

pois, da demonstração da Proposição 1.2.3, S_i é simétrica positiva definida. Assim, todas as equações acima podem ser reescritas como

$$XS_i = S_i X$$

$$Xv_i = kv_i$$

$$v_i^t X = kv_i^t$$

Observe que $Xv_i = kv_i$, para todo v_i com $i = 1, \dots, n$. Ou seja, k é um autovalor de X com multiplicidade n . Portanto, a matriz X é semelhante à matriz kI_n , ou melhor, $X = kI_n$. Assim, $W = kI_{n+1}$, isto é, se Σ é gerado pelas matrizes A_i e B_i então $\mathbb{R}^{n+1}$ é absolutamente irredutível para Σ . Logo, pela Proposição 2.1.5, $\mathbb{R}^{n+1}$ é absolutamente irredutível para $O(n, 1)$. $\square$

2.2 Teoria invariante e o subespaço de pontos fixos

Nesta seção mostramos a relação entre a teoria invariante e o subespaço de pontos fixos. Mostramos como podemos calcular o subespaço de pontos fixos de um grupo gerado por uma quantidade finita de elementos e também como definir uma aplicação invariante a partir deste conjunto.

Dado um grupo de Lie Γ agindo num espaço vetorial V , definimos o subespaço de pontos fixos de Γ como o subespaço vetorial de V dado por

$$\text{Fix}(\Gamma) = \{v \in V : \gamma v = v, \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Lema 2.2.1. *Suponha o grupo Γ agindo num espaço V . Dada a decomposição de V como $V = V_1 \times V_2$ e de Γ como $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ tal que a ação seja diagonal, isto é, $\gamma v = (\gamma_1, \gamma_2) \cdot (v_1, v_2) = (\gamma_1 v_1, \gamma_2 v_2)$, então $\text{Fix}(\Gamma) = \text{Fix}(\Gamma_1) \times \text{Fix}(\Gamma_2)$.*

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\Gamma) &= \{v \in V : \gamma v = v, \forall \gamma \in \Gamma\} \\ &= \{(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 : (\gamma_1 v_1, \gamma_2 v_2) = (v_1, v_2), \forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2\} \\ &= (\text{Fix}(\Gamma_1) \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \text{Fix}(\Gamma_2)) \\ &= \text{Fix}(\Gamma_1) \times \text{Fix}(\Gamma_2). \end{aligned}$$

$\square$

A proposição a seguir nos ajuda a fazer o cálculo do Fix de um grupo gerado por dois elementos, desde que se conheça os subespaços de pontos fixos dos subgrupos gerados por cada um destes elementos. Indicamos por $Fix(\gamma)$ o subespaço de pontos fixos da ação do grupo gerado por γ .

Proposição 2.2.2. *Sejam Γ um grupo de Lie agindo em um espaço V e $\Sigma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$ um subgrupo, com $\gamma_i \in \Gamma$. Então*

$$Fix(\Sigma) = Fix(\gamma_1) \cap Fix(\gamma_2).$$

Demonstração. Se $x \in Fix(\Sigma)$ então, em particular, $\gamma_i x = x$, $i = 1, 2$. Logo $x \in Fix(\gamma_1) \cap Fix(\gamma_2)$. Reciprocamente, se $x \in Fix(\gamma_1) \cap Fix(\gamma_2)$ então $\gamma_i x = x$, $i = 1, 2$, o que implica que $\gamma_i x = \gamma_j x$, $i, j = 1, 2$. Portanto, $\gamma_i \circ \gamma_j(x) = x$, assim $x \in Fix(\gamma_i \circ \gamma_j)$. Logo $x \in Fix(\Sigma)$. $\square$

Note que o caso acima pode ser estendido para o caso em que Σ é gerado por uma quantidade finita de elementos. Uma demonstração análoga, mostra que se $\gamma_i \in \Gamma$, $i = 1, \dots, n$, com Γ um grupo de Lie agindo em V , são tais que geram o subgrupo Σ , isto é, $\Sigma = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_n \rangle$, então $Fix(\Sigma) = \cap_{i=1}^n Fix(\gamma_i)$.

A proposição a seguir mostra como podemos achar uma aplicação linear Γ -invariante conhecendo o subespaço de pontos fixos e vice-versa.

Proposição 2.2.3. *Seja Γ um grupo agindo num espaço V e algum $v \in V$. Defina a aplicação $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ por $L(x) = \langle v, x \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno de Lorentz. A aplicação L é Γ -invariante se, e somente se, $v \in Fix(\Gamma)$.*

Demonstração. Suponha que L seja Γ -invariante, então $L(\gamma x) = L(x)$, para todo $x \in V$ e $\gamma \in \Gamma$. Temos que

$$\langle v, x \rangle = \langle v, \gamma^{-1}x \rangle = \langle \gamma v, \gamma \gamma^{-1}x \rangle = \langle \gamma v, x \rangle.$$

Portanto, $v \in Fix(\Gamma)$. Por outro lado, se $v \in Fix(\Gamma)$ então $\gamma v = v$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Temos que

$$L(\gamma^{-1}x) = \langle v, \gamma^{-1}x \rangle = \langle \gamma v, x \rangle = \langle v, x \rangle = L(x).$$

Logo, L é Γ -invariante. $\square$

Terminamos esta seção com um resultado que mostra como podemos construir uma aplicação Γ -invariante, com $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ com ação diagonal em um espaço vetorial $V = V_1 \times V_2$, conhecendo aplicações que sejam Γ_1 -invariante e Γ_2 -invariante.

Proposição 2.2.4. *Sejam $L_1 : V_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $L_2 : V_2 \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações lineares tais que $L = L_1 \oplus L_2$, com L definida na Proposição 2.2.3. Seja o grupo $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ com ação diagonal em $V = V_1 \times V_2$. Temos que L é Γ -invariante se, e somente se, L_1 é Γ_1 -invariante e L_2 é Γ_2 -invariante.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $L(x) = L(x_1, x_2) = L_1(x_1) \oplus L_2(x_2)$. Suponha que L seja Γ -invariante, então sendo L definida por $L(x) = \langle v, x \rangle$ temos, pela Proposição 2.2.3, que $v = (v_1, v_2) \in \text{Fix}(\Gamma)$. Mas, pelo Lema 2.2.1, vemos que $\text{Fix}(\Gamma) = \text{Fix}(\Gamma_1) \times \text{Fix}(\Gamma_2)$ o que implica que $(v_1, v_2) \in \text{Fix}(\Gamma_1) \times \text{Fix}(\Gamma_2)$. Então $L_1(x_1) = \langle (v_1, 0), (x_1, 0) \rangle$ e $L_2(x_2) = \langle (0, v_2), (0, x_2) \rangle$ e daí,

$$L_1(\gamma_1 x_1) \oplus L_2(x_2) = L((\gamma_1, I) \cdot (x_1, x_2)) = L(x_1, x_2) = L_1(x_1) \oplus L_2(x_2).$$

Como a soma é direta, segue que $L_1(\gamma_1 x_1) = L_1(x_1)$. Portanto, L_1 é Γ_1 -invariante. De maneira análoga mostramos que L_2 é Γ_2 -invariante.

A recíproca é imediata. □

2.3 Operadores de Reynolds

Nesta seção apresentamos um método, encontrado em [2], que nos ajuda a encontrar o anel dos polinômios invariantes de subgrupos de Lorentz, que podem ser escritos como o produto semidireto por um subgrupo normal de índice 2 ou 4. De fato, veja que na prova do Lema 2.3.1, temos que Σ é um subgrupo de índice 4 de Γ , mas que $\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2^1$ é um subgrupo normal de índice 2 de Γ . Finalizamos mostrando um exemplo de uma classe de subgrupos compactos de $O(3, 1)$, não contido em $O(4)$, onde calculamos a base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes utilizando este método prático.

O resultado a seguir deve ser um resultado bem estabelecido na literatura, muito embora não conseguimos encontrar uma referência. Para a sua demonstração usamos a Definição 1.2.10 para produto semi-direto.

Lema 2.3.1. *Seja Γ um grupo e Σ um subgrupo normal de Γ . Suponha que $\Gamma = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_2^2)$, onde $\mathbb{Z}_2^1 = \langle \gamma_1 \rangle$ e $\mathbb{Z}_2^2 = \langle \gamma_2 \rangle$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ distintos. Então $\Gamma = (\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2^1) \rtimes \mathbb{Z}_2^2$.*

Demonstração. Afirmamos que $\Delta = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2^1$ é subgrupo normal de Γ . Sejam $\gamma \in \Gamma$ e $\delta \in \Delta$ quaisquer, então existe $\sigma \in \Sigma$ tal que $\delta = \sigma \gamma_1$. Desta forma, temos que

$$\gamma \delta \gamma^{-1} = \gamma (\sigma \gamma_1) \gamma^{-1} = (\gamma \sigma \gamma^{-1}) (\gamma \gamma_1 \gamma^{-1}) = \tilde{\sigma} (\gamma \gamma_1 \gamma^{-1}),$$

com $\tilde{\sigma} \in \Sigma$, pois $\Sigma \triangleleft \Gamma$. Afirmamos que $\gamma \gamma_1 \gamma^{-1} \in \Delta$. De fato, note que $\gamma_1 \in \Delta$ e como $\Gamma = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_2^2)$ então existe algum $\sigma_1 \in \Sigma$ tal que $\gamma = \sigma_1 \gamma_1^i \gamma_2^j$, para $i, j = 0, 1$. Daí,

$$\gamma \gamma_1 \gamma^{-1} = (\sigma_1 \gamma_1^i \gamma_2^j) \gamma_1 (\sigma_1 \gamma_1^i \gamma_2^j)^{-1} = \sigma_1 \gamma_1 \sigma_1^{-1},$$

pois $\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_2^2$ é abeliano. Dado que $\sigma_1, \gamma_1 \in \Delta$, segue que $\gamma \gamma_1 \gamma^{-1} \in \Delta$ o que implica que $\gamma \delta \gamma^{-1} \in \Delta$. Assim, Δ é subgrupo normal de Γ .

Agora, basta mostrar que $\Gamma = \Delta \rtimes \mathbb{Z}_2^2$. Seja $\gamma \in \Gamma$ qualquer. Como $\Gamma = \Sigma (\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_2^2)$, segue que $\gamma = \sigma \gamma_1^i \gamma_2^j$, para algum $i, j = 0, 1$. Já que $\sigma \gamma_1^i = \delta \in \Delta$ temos que $\gamma = \delta \gamma_2^j$, e assim, $\gamma \in \Delta \mathbb{Z}_2^2$,

o que implica que $\Gamma = \Delta \mathbb{Z}_2^2$. Resta mostrar que $\Delta \cap \mathbb{Z}_2^2 = \{e\}$. De fato, como $\Delta = \Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2^1$ então $\Sigma \cap \mathbb{Z}_2^1 = \{e\}$ e dado que $\mathbb{Z}_2^1 \cap \mathbb{Z}_2^2 = \{e\}$ e $\gamma_2 \notin \Sigma$ segue que $\Delta \cap \mathbb{Z}_2^2 = \Sigma \mathbb{Z}_2^1 \cap \mathbb{Z}_2^2 = \{e\}$. $\square$

Denotamos por $\mathbb{R}[V]$ o anel das funções polinomiais de V em $\mathbb{R}$. Se $f \in \mathbb{R}[V]$ e γ um elemento do grupo Γ agindo em V então definimos a ação de γ em f por

$$\gamma f(x) = f(\gamma^{-1}x), \text{ para todo } x \in V.$$

Assim, se $\gamma f = f$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então f é Γ -invariante.

Definição 2.3.2 ([11]). *Seja Γ um grupo de Lie agindo em um espaço vetorial V . Um operador de Reynolds é uma projeção Γ -invariante, isto é, é uma aplicação linear*

$$R : \mathbb{R}[V] \longrightarrow \mathbb{R}[V]^\Gamma := \mathcal{P}(\Gamma),$$

tal que

- (i) $R(f) = f$, para todo $f \in \mathcal{P}(\Gamma)$;
- (ii) R é Γ -invariante, isto é, $R(\gamma f) = R(f)$, para todo $f \in \mathbb{R}[V]$ e todo $\gamma \in \Gamma$.

Para grupos finitos, o operador de Reynolds é dado por ([14]):

$$R(f(x)) = \frac{1}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma x).$$

Considere um epimorfismo $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}_2$, onde $\mathbb{Z}_2$ é o grupo multiplicativo $\{-1, 1\}$. Uma função polinomial $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *anti-invariante* se

$$f(\gamma x) = \sigma(\gamma)f(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$ ([2]).

Sejam Σ um subgrupo normal de Γ de índice 2 e $\mathcal{P}(\Sigma)$ o anel dos polinômios Σ -invariantes. Considere o operador definido como $R : \mathbb{R}[V] \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma)$, com

$$R(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(\gamma x)),$$

para um $\gamma \in \Gamma \setminus \Sigma$, arbitrário e fixado. Seja também $S : \mathbb{R}[V] \rightarrow \mathbb{R}[V]$, o operador definido por

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(\gamma x)).$$

R e S são operadores de Reynolds ([1]). Tais operadores são usados no seguinte resultado:

Teorema 2.3.3 ([2]). *Seja $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Sigma)$. Então o conjunto*

$$\{R(u_i), S(u_i)S(u_j); 1 \leq i, j \leq s\}$$

é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Observação 2.3.4. Usando o Lema 2.3.1, aplicamos o Teorema 2.3.3 em sequência para produzir os invariantes de $\Gamma = \Sigma \rtimes (\mathbb{Z}_2^1 \times \mathbb{Z}_2^2)$. De fato, pelo Lema 2.3.1, temos que $\Gamma = (\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2^1) \rtimes \mathbb{Z}_2^2$. Sabendo qual é a base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Sigma)$ usamos o Teorema 2.3.3 para calcular a base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2^1)$. Como $\Sigma \rtimes \mathbb{Z}_2^1$ é um subgrupo normal de índice 2 de Γ , aplicamos novamente o Teorema 2.3.3 para encontrar a base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Apresentamos dois exemplos para ilustrar este procedimento.

Exemplo 2.3.5. Considere o subgrupo de Lorentz dado por

$$SO_{n,1}(n-1) := \left\{ R_\varphi = \begin{pmatrix} P_\varphi & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} : P_\varphi \in SO(n-1) \right\}. \quad (2.9)$$

Para $n = 3$, $SO_{3,1}(2)$ é um subgrupo compacto de $O(3,1)$ isomorfo a $SO(2)$. Este isomorfismo evidencia que o conjunto $\{x^2 + y^2, z, t\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(SO_{3,1}(2))$, já que $\mathcal{P}(SO(2)) = \langle x^2 + y^2 \rangle$. Considere agora um $\mathbb{Z}_2$ -subgrupo de $O(3,1)$ gerado por uma involução da forma:

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & S_h^-(\theta) \end{pmatrix}, \text{ com } S_h^-(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix},$$

com $\theta \in \mathbb{R}$ fixado.

Calculamos a base de Hilbert para $\mathcal{P}(SO_{3,1}(2) \rtimes \mathbb{Z}_2(\gamma_1))$, onde

$$SO_{3,1}(2) \rtimes \mathbb{Z}_2(\gamma_1) = SO_{3,1}(2) \cup \gamma_1 SO_{3,1}(2).$$

Temos que a ação de γ_1 em $\mathbb{R}^{3+1}$ é dada por

$$\gamma_1 \cdot (x, y, z, t) = (x, y, \cosh(\theta)z + \sinh(\theta)t, -\sinh(\theta)z - \cosh(\theta)t).$$

Sendo $u_1(x, y, z, t) = x^2 + y^2$, $u_2(x, y, z, t) = z$, $u_3(x, y, z, t) = t$, usando o operador de Reynolds R , obtemos:

$$\begin{aligned} R(u_1(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(u_1(x, y, z, t) + u_1(\gamma_1(x, y, z, t))) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + x^2 + y^2) = x^2 + y^2, \\ R(u_2(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(u_2(x, y, z, t) + u_2(\gamma_1(x, y, z, t))) = \frac{1}{2}((\cosh(\theta) + 1)z + \sinh(\theta)t), \\ R(u_3(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(u_3(x, y, z, t) + u_3(\gamma_1(x, y, z, t))) = -\frac{1}{2}((\cosh(\theta) - 1)t + \sinh(\theta)z). \end{aligned}$$

Temos que $R(u_2(x, y, z, t)) = -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)}R(u_3(x, y, z, t))$. Ainda, usando o operador de Reynolds S , temos que

$$\begin{aligned} S(u_1(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(u_1(x, y, z, t) - u_1(\gamma_1(x, y, z, t))) = 0, \\ S(u_2(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(u_2(x, y, z, t) - u_2(\gamma_1(x, y, z, t))) = -\frac{1}{2}((\cosh(\theta) - 1)z + \sinh(\theta)t), \\ S(u_3(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(u_3(x, y, z, t) - u_3(\gamma_1(x, y, z, t))) = \frac{1}{2}((\cosh(\theta) + 1)t + \sinh(\theta)z). \end{aligned}$$

Vemos que $S(u_2(x, y, z, t)) = -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)} S(u_3(x, y, z, t))$.

Assim, o conjunto

$$\{R(u_1), R(u_2), S(u_2)^2\} = \{(\cosh(\theta) - 1)t + \sinh(\theta)z, x^2 + y^2, ((\cosh(\theta) - 1)z + \sinh(\theta)t)^2\}$$

é uma base de Hilbert de $\mathcal{P}(SO_{3,1}(2) \rtimes \mathbb{Z}_2)$, pelo Teorema 2.3.3. Outra base de Hilbert pode ser dada por

$$\{(\cosh(\theta) - 1)t + \sinh(\theta)z, x^2 + y^2, z^2 - t^2\}.$$

De fato, observe que

$$\frac{1}{2(\cosh(\theta) - 1)} \left(((\cosh(\theta) - 1)t + \sinh(\theta)z)^2 - ((\cosh(\theta) - 1)z + \sinh(\theta)t)^2 \right) = z^2 - t^2,$$

implicando que os conjuntos $\{R(u_1), R(u_2), S(u_2)^2\}$ e $\{R(u_1), R(u_2), z^2 - t^2\}$ geram o mesmo anel de polinômios invariantes pela ação de $SO_{3,1}(2) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Exemplo 2.3.6. Considere o grupo $SO_{3,1}(2)$ do exemplo anterior e um $\mathbb{Z}_2$ -subgrupo de Lorentz gerado por outra involução:

$$\gamma_2 := \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & S_h^+(\theta) \end{pmatrix}, \text{ com } S_h^+(\theta) = \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix},$$

com $\theta \in \mathbb{R}$ fixado.

Calculamos aqui a base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma)$, onde

$$\Gamma = SO_{3,1}(2) \rtimes (\mathbb{Z}_2(\gamma_1) \times \mathbb{Z}_2(\gamma_2)) = SO_{3,1}(2) \cup \gamma_1 SO_{3,1}(2) \cup \gamma_2 SO_{3,1}(2) \cup \gamma_1 \gamma_2 SO_{3,1}(2).$$

Pelo Lema 2.3.1, temos

$$\Gamma = (SO_{3,1}(2) \rtimes \mathbb{Z}_2(\gamma_1)) \rtimes \mathbb{Z}_2(\gamma_2).$$

Uma vez que conhecemos a base de Hilbert de $\mathcal{P}(SO_{3,1}(2) \rtimes \mathbb{Z}_2)$, aplicamos novamente o Teorema 2.3.3, para calcular a base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma)$.

A ação de γ_2 em $\mathbb{R}^{3+1}$ é dada por

$$\gamma_2 \cdot (x, y, z, t) = (x, y, -\cosh(\theta)z - \sinh(\theta)t, \sinh(\theta)z + \cosh(\theta)t).$$

Sendo $v_1(x, y, z, t) = (\cosh(\theta) - 1)t + \sinh(\theta)z$, $v_2(x, y, z, t) = x^2 + y^2$, $v_3(x, y, z, t) = z^2 - t^2$ e usando o operador de Reynolds R , obtemos:

$$\begin{aligned} R(v_1(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(v_1(x, y, z, t) + v_1(\gamma_2(x, y, z, t))) = 0, \\ R(v_2(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(v_2(x, y, z, t) + v_2(\gamma_2(x, y, z, t))) = x^2 + y^2, \\ R(v_3(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(v_3(x, y, z, t) + v_3(\gamma_2(x, y, z, t))) = z^2 - t^2. \end{aligned}$$

Ainda, usando o operador de Reynolds S , temos que

$$\begin{aligned} S(v_1(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(v_1(x, y, z, t) - v_1(\gamma_2(x, y, z, t))) = (\cosh(\theta) - 1)t + \sinh(\theta)z, \\ S(v_2(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(v_2(x, y, z, t) - v_2(\gamma_2(x, y, z, t))) = 0, \\ S(v_3(x, y, z, t)) &= \frac{1}{2}(v_3(x, y, z, t) - v_3(\gamma_2(x, y, z, t))) = 0. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 2.3.3, o conjunto

$$\{R(v_2), R(v_3), S(v_1)^2\} = \{x^2 + y^2, z^2 - t^2, ((\cosh(\theta) - 1)t + \sinh(\theta)z)^2\}$$

é uma base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma)$.

Observamos que Γ , no exemplo acima, é um subgrupo compacto de $O(3, 1)$ não contido no grupo ortogonal $O(4)$.

De maneira geral, tomando o grupo $SO_{n,1}(n-1)$ definido em (2.9), podemos encontrar matrizes de Lorentz $\gamma_1, \gamma_2 \in O(n, 1)$ tal que $\Lambda = SO_{n,1}(n-1) \rtimes (\mathbb{Z}_2(\gamma_1) \times \mathbb{Z}_2(\gamma_2))$ seja um grupo compacto não contido no grupo ortogonal $O(n+1)$. De fato, é suficiente que estas matrizes sejam involuções.

2.4 Subespaços invariantes

Nesta seção tratamos dos subespaços do espaço de Minkowski que são invariantes pela ação de um subgrupo de Lorentz. Mostramos que um subespaço de Lorentz invariante só admite um complemento Lorentz ortogonal invariante se ele for não degenerado. Em todo o restante do capítulo apresentamos os subespaços invariantes de $\mathbb{R}^{1+1}$ e estudamos os subespaços de pontos fixos de $\mathbb{R}^{2+1}$ como subespaços invariantes pela ação de determinados subgrupos discretos de Lorentz.

2.4.1 Complemento Lorentz invariante

Seja Γ um grupo de Lie agindo em um espaço vetorial V . Um subespaço W de V é chamado Γ -invariante se $\gamma w \in W$ para todo $w \in W$ e $\gamma \in \Gamma$. A ação de Γ em V é chamada irredutível se os subespaços Γ -invariantes de V são $\{0\}$ e V . Um subespaço W de V é Γ -irredutível se for Γ -invariante e a ação de Γ em W é irredutível. Um exemplo trivial de um subespaço invariante, pela ação de qualquer grupo Γ , é o subespaço de pontos fixos $\text{Fix}(\Gamma)$. Para resultados gerais sobre subespaços invariantes e irredutíveis, ver [17].

Proposição 2.4.1. *Seja $\Gamma \in O(n, 1)$ um subgrupo de Lorentz agindo em $\mathbb{R}^{n+1}$. Todo subespaço não degenerado W , Γ -invariante, admite um complemento Lorentz ortogonal Γ -invariante com $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Seja W um subespaço Γ -invariante. Defina $U = \{u \in \mathbb{M}^{n,1} : \langle w, u \rangle = 0, \forall w \in W\}$. Tome $u \in U$, mostramos que $\gamma u \in U$, para todo $\gamma \in \Gamma$. De fato, note que

$$\langle w, \gamma u \rangle = \langle \gamma^{-1} w, \gamma^{-1} \gamma u \rangle = \langle \gamma^{-1} w, u \rangle = 0,$$

pois $\gamma^{-1} w \in W$. Logo, U é um conjunto Lorentz ortogonal Γ -invariante. Mostramos agora que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n+1}$. É óbvio que $0 \in U$. Também, dados $u_1, u_2 \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $\langle w, u_1 + \alpha u_2 \rangle = \langle w, u_1 \rangle + \alpha \langle w, u_2 \rangle$, o que implica que $u_1 + \alpha u_2 \in U$. Finalizando, observe que sendo W não degenerado então $W \cap W^\perp = \{0\}$ e, pela Proposição 1.2.29, sabemos que $\dim W + \dim W^\perp = n + 1$. Portanto, $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Fica claro, na proposição acima, que para existir um complemento Lorentz ortogonal a um subespaço W , Γ -invariante, tal que $W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^{n+1}$, é suficiente que este subespaço seja não degenerado, isto é, não pode ser do tipo luz. É possível encontrar um complemento, Γ -invariante, a um subespaço do tipo luz. Mas é necessária uma condição específica para o grupo Γ , como podemos ver na próxima proposição.

Proposição 2.4.2. *Seja Γ um subgrupo de Lorentz e W um subespaço do tipo luz. Se $\gamma' \in \Gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$, então $JW^\perp$ é um complemento Γ -invariante, onde $J = I_{n,1}$, com $W \oplus JW^\perp = \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Seja W um subespaço do tipo luz, então segue que $\dim(W \cap W^\perp) = 1$, pela Proposição 1.2.31, o que mostra que $W^\perp$ não é um complemento Lorentz ortogonal para W . Por outro lado, $W \cap JW^\perp = \{0\}$. De fato, seja $w \in JW^\perp$ então existe $v \in W^\perp$ tal que $w = Jv$. Suponha $w \in W \cap JW^\perp$, então temos

$$\langle w, v \rangle = 0 \iff \langle Jv, v \rangle = 0 \iff \langle v, v \rangle_E = 0 \iff v = 0.$$

Onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ indica o produto interno usual no espaço euclidiano. Assim, temos que $w = Jv = 0$. Além disso, é claro que $\dim(JW^\perp) = \dim(W^\perp)$. Falta mostrar que $JW^\perp$ é Γ -invariante. De fato, como W e $W^\perp$ são Γ -invariantes, temos que

$$\gamma w = \gamma Jv = J(\gamma')^{-1}v \in JW^\perp,$$

pois $\gamma' \in \Gamma$, pela hipótese. Logo $W \oplus JW^\perp = \mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Proposição 2.4.3. *Seja Γ um subgrupo de Lorentz agindo num espaço não degenerado W . Se a ação de Γ é absolutamente irredutível então W é irredutível.*

Demonstração. Suponha que a ação não seja irredutível. Então existe um subespaço próprio U de W , Γ -invariante, tendo um complemento Γ -invariante $U^\perp$. Defina $\pi : U \oplus U^\perp \rightarrow W$ a projeção em U com $\ker \pi = U^\perp$. Note que

$$\pi(\gamma(u + \tilde{u})) = \pi(\gamma u + \gamma \tilde{u}) = \gamma u = \gamma \pi(u + \tilde{u})$$

é Γ -equivariante e não é um múltiplo escalar da identidade. Assim, W não é absolutamente irredutível. $\square$

Observação 2.4.4. Se $\gamma' \in \Gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$, a Proposição 2.4.3 também é verdadeira para o caso em que W é degenerado, pois o complemento Γ -invariante de U é $JU^\perp$. A demonstração segue a mesma ideia, bastando definir $\pi : U \oplus JU^\perp \rightarrow V$ a projeção em U com $\ker \pi = JU^\perp$.

2.4.2 Subespaços invariantes em $\mathbb{R}^{1+1}$

Sob que condições um subspaço do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1+1}$ é invariante pela ação de um subgrupo de Lorentz? Os seguintes resultados respondem esta questão.

Proposição 2.4.5. Sejam os grupos cíclicos

$$\Gamma_\theta^1 = \left\langle \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle \quad (2.10)$$

e

$$\Gamma_\theta^2 = \left\langle - \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (2.11)$$

com θ fixado, agindo em $\mathbb{R}^{1+1}$. Temos que os únicos subespaços Γ_θ^1 -invariantes e Γ_θ^2 -invariantes são cada um dos ramos do cone-luz.

Demonstração. Note que $\text{Fix}(\Gamma_\theta^1) = \{0\}$. Tomemos o subespaço $W_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax\}$. Então

$$\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cosh(\theta) + a \sinh(\theta))x \\ (\sinh(\theta) + a \cosh(\theta))x \end{pmatrix}.$$

Para que o ponto resultante pertença a W_a devemos ter que

$$\begin{aligned} \sinh(\theta) + a \cosh(\theta) &= a(\cosh(\theta) + a \sinh(\theta)) \Rightarrow \\ \sinh(\theta) &= a^2 \sinh(\theta) \Rightarrow \\ a^2 &= 1. \end{aligned}$$

Logo, os valores para a que permitem que W_a seja Γ_θ^1 -invariante são $a = -1$ ou $a = 1$. Assim, os subespaços Γ_θ^1 -invariantes são

$$W_1^{\Gamma_\theta^1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\} \text{ e} \quad (2.12)$$

$$W_{-1}^{\Gamma_\theta^1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}. \quad (2.13)$$

A união desses dois subespaços é o cone-luz e obviamente $\mathbb{R}^2 = W_{-1}^{\Gamma_\theta^1} \oplus W_1^{\Gamma_\theta^1}$. Temos ainda que

$\left(W_i^{\Gamma_\theta^1}\right)^\perp = W_i^{\Gamma_\theta^1}$, com $i = -1, 1$. Portanto, $\mathbb{R}^2$ não pode ser obtido como uma soma $W_i^{\Gamma_\theta^1} + \left(W_i^{\Gamma_\theta^1}\right)^\perp$, $i = -1, 1$.

O resultado é análogo para o grupo Γ_θ^2 . □

Observe que, na Proposição 2.4.5, os conjuntos $W_i^{\Gamma_\theta^1}$, com $i = -1, 1$, são degenerados. Assim, um complemento Lorentz ortogonal que seja Γ_θ^1 -invariante pode ser dado por $JW_i^{\Gamma_\theta^1}$, pela Proposição 2.4.2. Neste caso, $W_i^{\Gamma_\theta^1} \oplus JW_i^{\Gamma_\theta^1} = \mathbb{R}^{1+1}$, com $i = -1, 1$.

Considere, por outro lado, os $\mathbb{Z}_2$ -subgrupos cíclicos de $O(1, 1)$ dados por

$$\Gamma_\theta^3 = \left\langle \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle \text{ e} \quad (2.14)$$

$$\Gamma_\theta^4 = \left\langle \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle, \quad (2.15)$$

com θ fixado, cada um agindo no espaço $\mathbb{R}^{1+1}$.

Proposição 2.4.6. *Os únicos subespaços Γ_θ^3 -invariantes e Γ_θ^4 -invariantes, não triviais, de $\mathbb{R}^{1+1}$ são as retas de pontos fixos, $\text{Fix}(\Gamma_\theta^3)$ e $\text{Fix}(\Gamma_\theta^4)$, e as retas Lorentz ortogonais às retas de pontos fixos, respectivamente.*

Demonstração. Façamos para Γ_θ^3 . Tomemos o subespaço $W_a^{\Gamma_\theta^3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax\}$. Então

$$\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ax \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cosh(\theta) + a \sinh(\theta))x \\ -(\sinh(\theta) + a \cosh(\theta))x \end{pmatrix}.$$

Para que o ponto resultante pertença a $W_a^{\Gamma_\theta^3}$ devemos ter que

$$\begin{aligned} -\sinh(\theta) - a \cosh(\theta) &= a(\cosh(\theta) + a \sinh(\theta)) \Rightarrow \\ a^2 \sinh(\theta) + 2a \cosh(\theta) + \sinh(\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $a_1 = -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)}$ e $a_2 = -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)}$.

Assim, temos dois subespaços invariantes, a saber,

$$W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)}x \right\} \text{ e} \quad (2.16)$$

$$W_{a_2}^{\Gamma_\theta^3} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)}x \right\}. \quad (2.17)$$

Observe que $W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3} = \text{Fix}(\Gamma_\theta^3)$. Ainda, as retas $W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3}$ e $W_{a_2}^{\Gamma_\theta^3}$ são ortogonais pelo pseudo produto interno de Lorentz, pois

$$\left\langle \left(x, -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)}x\right), \left(x, -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)}x\right) \right\rangle_L = x^2 - \left(\frac{\cosh^2(\theta)-1}{\sinh^2(\theta)}\right)x^2 = 0$$

Logo, $W_{a_2}^{\Gamma_\theta^3} = (W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3})^\perp$. Observe ainda que $W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3} = \text{Fix}(\Gamma_\theta^3)$.

O resultado é análogo para Γ_θ^4 , sendo que

$$W_{a_1}^{\Gamma_\theta^4} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)}x \right\} \text{ e } W_{a_2}^{\Gamma_\theta^4} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)}x \right\},$$

onde $W_{a_2}^{\Gamma_\theta^4} = (W_{a_1}^{\Gamma_\theta^4})^\perp$ e $W_{a_1}^{\Gamma_\theta^4} = \text{Fix}(\Gamma_\theta^4)$. □

Tabela 1 – Subespaços invariantes de $O(1, 1)$.

Grupo	Subespaço invariante	Subespaço Lorentz ortogonal	Complemento
Γ_θ^1	$W_1^{\Gamma_\theta^1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$	$W_1^{\Gamma_\theta^1}$	Não
	$W_{-1}^{\Gamma_\theta^1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$	$W_1^{\Gamma_\theta^2}$	Não
Γ_θ^2	$W_1^{\Gamma_\theta^1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$	$W_1^{\Gamma_\theta^1}$	Não
	$W_{-1}^{\Gamma_\theta^1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$	$W_1^{\Gamma_\theta^2}$	Não
Γ_θ^3	$W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)}x \right\},$	$W_{a_2}^{\Gamma_\theta^3}$	Sim
	$W_{a_2}^{\Gamma_\theta^3} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)}x \right\}$	$W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3}$	Sim
Γ_θ^4	$W_{a_1}^{\Gamma_\theta^4} = W_{a_2}^{\Gamma_\theta^3},$	$W_{a_2}^{\Gamma_\theta^4}$	Sim
	$W_{a_2}^{\Gamma_\theta^4} = W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3}$	$W_{a_1}^{\Gamma_\theta^4}$	Sim

Observe que para Γ_θ^1 , dado em (2.10) na Proposição 2.4.5, as retas $W_1^{\Gamma_\theta^1}$ e $W_{-1}^{\Gamma_\theta^1}$ são do tipo luz. Neste caso, não é possível decompor o espaço $\mathbb{R}^{1+1}$ como soma do subespaço invariante pelo seu subespaço Lorentz ortogonal. Chegamos à mesma conclusão para o grupo Γ_θ^2 dado em (2.11).

Por outro lado, para os grupos Γ_θ^3 e Γ_θ^4 , dados em (2.14) e (2.15) na Proposição 2.4.6, os subespaços Γ_θ^3 -invariantes e Γ_θ^4 -invariantes não são do tipo luz. Mais especificamente, $W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3}$ (2.16) é do tipo espaço enquanto que $W_{a_2}^{\Gamma_\theta^3}$ (2.17) é do tipo tempo. Ou ainda, $W_{a_1}^{\Gamma_\theta^4}$ é do tipo tempo enquanto que $W_{a_2}^{\Gamma_\theta^4}$ é do tipo espaço. Temos ainda que os subespaços $W_{a_1}^{\Gamma_\theta^3}$ e $W_{a_1}^{\Gamma_\theta^4}$ têm um complemento Lorentz ortogonal.

A Tabela 1 resume os resultados da Proposição 2.4.5 e da Proposição 2.4.6, mostrando ainda se os subespaços invariantes possuem ou não um complemento Lorentz ortogonal.

2.4.3 Subespaços invariantes em $\mathbb{R}^{2+1}$

Finalizamos este capítulo estudando alguns subespaços invariantes de $\mathbb{R}^{2+1}$, particularmente o subespaço de pontos fixos e seu respectivo subespaço Lorentz ortogonal.

Proposição 2.4.7. *Seja o grupo cíclico $\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi)$ gerado pela matriz $R_h^+(\varphi, \theta, \phi) \in SO_0(2, 1)$ dada por*

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com φ, θ e ϕ fixados. Então o subespaço de pontos fixos de $\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi)$, $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi))$, e o subespaço Lorentz ortogonal, $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi))^\perp$, são dados de acordo com as seguintes condições:

(i) Se $\varphi \neq \pi - \phi$, então $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi))$ é a reta

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : y = -\frac{\text{sen}(\phi) - \text{sen}(\varphi)}{\cos(\phi) + \cos(\varphi)} x \text{ e } z = -\frac{(\cos(\varphi) \text{sen}(\phi) + \text{sen}(\varphi) \cos(\phi)) \sinh(\theta)}{(\cosh(\theta) - 1)(\cos(\phi) + \cos(\varphi))} x \right\} \quad (2.18)$$

e $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi))^\perp$ é o plano

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : z = \frac{(\cosh(\theta) - 1)((\text{sen}(\phi) - \text{sen}(\varphi))y - (\cos(\phi) + \cos(\varphi))x)}{(\cos(\varphi) \text{sen}(\phi) + \text{sen}(\varphi) \cos(\phi)) \sinh(\theta)} \right\}. \quad (2.19)$$

(ii) Se $\varphi = \pi - \phi$, temos que $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\pi - \phi, \theta, \phi))$ é a reta

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : y = \frac{\cos(\phi)}{\text{sen}(\phi)} x \text{ e } z = -\frac{\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta) - 1) \text{sen}(\phi)} x \right\}$$

e $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\pi - \phi, \theta, \phi))^\perp$ é o plano

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : z = -\frac{(\cosh(\theta) - 1)}{\sinh(\theta)} (\text{sen}(\phi)x + \cos(\phi)y) \right\}.$$

Demonstração. Um cálculo direto nos dá o subespaço de pontos fixos e o subespaço Lorentz ortogonal nos dois casos. $\square$

Observação 2.4.8. Note que $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\pi - \phi, \theta, \phi))$ é uma reta do tipo tempo. De fato, para $v(\pi - \phi, \theta, \phi) \in \text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\pi - \phi, \theta, \phi))$, temos que

$$\langle v(\pi - \phi, \theta, \phi), v(\pi - \phi, \theta, \phi) \rangle = -\frac{2x^2}{\text{sen}^2(\phi)(\cosh(\theta) - 1)} < 0.$$

$\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\pi - \phi, \theta, \phi))^\perp$ é um complemento Lorentz ortogonal à reta de pontos fixos e, pela Proposição 1.2.33, é um plano do tipo espaço.

A reta $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi))$ pode ser do tipo espaço, luz ou tempo dependendo dos valores de φ , θ e ϕ . Em geral, o subgrupo $\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi)$ é não compacto. Como exemplificamos a seguir.

Exemplo 2.4.9. Sejam $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \ln(2)$, $\phi = -\frac{\pi}{4}$. Temos que

$$\text{Fix}\left(\Sigma_{R_h^+}\left(\frac{\pi}{4}, \ln(2), -\frac{\pi}{4}\right)\right) = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

é do tipo espaço e que $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\frac{\pi}{4}, \ln(2), -\frac{\pi}{4}))^\perp = \{(x, -x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é do tipo tempo. Na Figura 4, o plano é o subespaço Lorentz ortogonal à reta de pontos fixos.

Exemplo 2.4.10. Sejam $\varphi = \phi = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \ln(7 - 4\sqrt{3})$. Temos que

$$\text{Fix}\left(\Sigma_{R_h^+}\left(\frac{\pi}{3}, \ln(7 - 4\sqrt{3}), \frac{\pi}{3}\right)\right) = \{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}\}$$

é do tipo luz e que $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\frac{\pi}{3}, \ln(7 - 4\sqrt{3}), \frac{\pi}{3}))^\perp = \{(x, y, x) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é do tipo luz. Na Figura 5, o plano é o subespaço Lorentz ortogonal à reta de pontos fixos.

Note que neste caso, $\text{Fix}\left(\Sigma_{R_h^+}\left(\frac{\pi}{3}, \ln(7 - 4\sqrt{3}), \frac{\pi}{3}\right)\right) \subset \text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\frac{\pi}{3}, \ln(7 - 4\sqrt{3}), \frac{\pi}{3}))^\perp$.

Figura 4 – Fix do tipo espaço e seu complemento Lorentz ortogonal

Figura 5 – Fix do tipo luz e seu complemento Lorentz ortogonal

Exemplo 2.4.11. Sejam $\varphi = \frac{\pi}{3}, \theta = \ln(2), \phi = \frac{\pi}{6}$. Temos que

$$\text{Fix}\left(\Sigma_{R_h^+}\left(\frac{\pi}{3}, \ln(2), \frac{\pi}{6}\right)\right) = \{(x, (2 - \sqrt{3})x, 3(1 - \sqrt{3})x) : x \in \mathbb{R}\}$$

é do tipo luz e que $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\frac{\pi}{3}, \ln(2), \frac{\pi}{6}))^\perp = \{(x, y, \frac{1}{6}(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3}y - x - 2y)) : x, y \in \mathbb{R}\}$ é do tipo luz. Na Figura 6, o plano é o subespaço Lorentz ortogonal à reta de pontos fixos.

Para grupos gerados por uma matriz em $\Lambda_3^{pt} SO_0(2, 1)$ temos um resultado semelhante:

Proposição 2.4.12. Dado o grupo cíclico $\Sigma_{R_h^-}(\varphi, \theta, \phi)$ gerado pela matriz $R_h^-(\varphi, \theta, \phi) \in \Lambda_3^{pt} SO_0(2, 1)$ dada por

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com φ, θ e ϕ fixados. Então o subespaço de pontos fixos de $\Sigma_{R_h^-}(\varphi, \theta, \phi)$, $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\varphi, \theta, \phi))$, e o subespaço Lorentz ortogonal, $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\pi - \varphi, \theta, \phi))^\perp$, são dados de acordo com as seguintes condições:

Figura 6 – Fix do tipo tempo e seu complemento Lorentz ortogonal

(i) Se $\varphi \neq \pi - \phi$, então $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\varphi, \theta, \phi))$ é a reta

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : y = -\frac{\sin(\phi) - \sin(\varphi)}{\cos(\phi) + \cos(\varphi)}x \text{ e } z = -\frac{(\cos(\varphi)\sin(\phi) + \sin(\varphi)\cos(\phi))\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta) + 1)(\cos(\phi) + \cos(\varphi))}x \right\} \quad (2.20)$$

e $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\pi - \phi, \theta, \phi))^\perp$ é o plano

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : z = \frac{(\cosh(\theta) + 1)((\sin(\phi) - \sin(\varphi))y - (\cos(\phi) + \cos(\varphi))x)}{(\cos(\varphi)\sin(\phi) + \sin(\varphi)\cos(\phi))\sinh(\theta)} \right\}.$$

(ii) Se $\varphi = \pi - \phi$, temos que $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\pi - \phi, \theta, \phi))$ é a reta

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : y = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}x \text{ e } z = -\frac{\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta) + 1)\sin(\phi)}x \right\}$$

e $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\pi - \phi, \theta, \phi))^\perp$ é o plano

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : z = -\frac{(\cosh(\theta) + 1)}{\sinh(\theta)}(x\sin(\phi) + \cos(\phi)y) \right\}.$$

Observação 2.4.13. Note que a reta $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\pi - \phi, \theta, \phi))$ é do tipo espaço. De fato, para o vetor $v(\pi - \phi, \theta, \phi) \in \text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\pi - \phi, \theta, \phi))$ temos que

$$\langle v(\pi - \phi, \theta, \phi), v(\pi - \phi, \theta, \phi) \rangle = \frac{2x^2}{\sin^2(\phi)(\cosh(\theta) - 1)} > 0,$$

o que implica, pela Proposição 1.2.33, que o plano Lorentz ortogonal $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\pi - \phi, \theta, \phi))^\perp$ é do tipo tempo.

Da mesma forma para o caso da reta $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi))$, a reta $\text{Fix}(\Sigma_{R_h^-}(\varphi, \theta, \phi))$ pode ser do tipo espaço, luz ou tempo dependendo dos valores de φ , θ e ϕ .

Na proposição a seguir, fazemos um estudo sobre o subespaço de pontos fixos da ação do grupo gerado por uma matriz em $\Lambda_3^p SO_0(2, 1)$ ou em $\Lambda_3^p SO_0(2, 1)$.

Proposição 2.4.14. *Dado o grupo cíclico $\Sigma_{S_h^+}(\varphi, \theta, \phi)$ gerado pela matriz $S_h^+(\varphi, \theta, \phi) \in \Lambda_3^p SO_0(2, 1)$ dada por*

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e o grupo $\Sigma_{S_h^-}(\varphi, \theta, \phi)$ gerado pela matriz de Lorentz $S_h^-(\varphi, \theta, \phi) \in \Lambda_3^l SO_0(2, 1)$ dada por

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

com φ, θ e ϕ fixados. Assim,

(i) *Se $\varphi = -\phi$, então $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi))$ é o plano*

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : z = -\frac{\sinh(\theta)(\sin(\phi)x + y\cos(\phi))}{\cosh(\theta)-1} \right\}, \quad (2.21)$$

onde $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi))^\perp$ é a reta

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : y = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}x \text{ e } z = -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)\sin(\phi)}x \right\}. \quad (2.22)$$

Temos também que $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^-}(-\phi, \theta, \phi))$ é o plano

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : z = -\frac{\sinh(\theta)(\sin(\phi)x + y\cos(\phi))}{\cosh(\theta)+1} \right\},$$

onde $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^-}(-\phi, \theta, \phi))^\perp$ é a reta

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : y = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}x \text{ e } z = -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)\sin(\phi)}x \right\}.$$

(ii) *Se $\varphi \neq -\phi$, então*

$$\text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(\varphi, \theta, \phi)) = \text{Fix}(\Sigma_{S_h^-}(\varphi, \theta, \phi)) = \{0\}.$$

Observação 2.4.15. *Note que o plano $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi))$ é do tipo tempo. Para verificar isso, é mais prático calcular a natureza do subespaço Lorentz ortogonal $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi))^\perp$, por ser uma reta. Assim, temos que*

$$\begin{aligned} & \left\langle \left(x, \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}x, -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)\sin(\phi)}x \right), \left(x, \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}x, -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)\sin(\phi)}x \right) \right\rangle \\ &= x^2 + \frac{\cos^2(\phi)}{\sin^2(\phi)}x^2 - \frac{(\cosh(\theta)-1)^2}{\sinh^2(\theta)\sin^2(\phi)}x^2 \\ &= \frac{2(\cosh(\theta)-1)}{\sinh^2(\theta)\sin^2(\phi)}x^2 > 0. \end{aligned}$$

Tabela 2 – Subespaços de pontos fixos de $\mathbb{R}^{1+1}$ e $\mathbb{R}^{2+1}$.

Grupo	Subespaços de pontos fixos	Tipo
Γ_θ^1	$\{(0, 0)\}$	-
Γ_θ^2	$\{(0, 0)\}$	-
Γ_θ^3	$\left\{ \left(x, -\frac{\cosh(\theta)-1}{\sinh(\theta)}x \right) \right\}$	Espaço
Γ_θ^4	$\left\{ \left(x, -\frac{\cosh(\theta)+1}{\sinh(\theta)}x \right) \right\}$	Tempo
$\Sigma_{R_h^+}(\varphi, \theta, \phi)$ $\varphi \neq \pi - \phi$	$\left\{ \left(x, -\frac{\sin(\phi) - \sin(\varphi)}{\cos(\phi) + \cos(\varphi)}x, -\frac{(\cos(\varphi)\sin(\phi) + \sin(\varphi)\cos(\phi))\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta)-1)(\cos(\phi) + \cos(\varphi))}x \right) \right\}$	Qualquer
$\Sigma_{R_h^+}(\pi - \phi, \theta, \phi)$	$\left\{ \left(x, \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}x, -\frac{\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta)-1)\sin(\phi)}x \right) \right\}$	Tempo
$\Sigma_{R_h^-}(\varphi, \theta, \phi)$ $\varphi \neq \pi - \phi$	$\left\{ \left(x, -\frac{\sin(\phi) - \sin(\varphi)}{\cos(\phi) + \cos(\varphi)}x, -\frac{(\cos(\varphi)\sin(\phi) + \sin(\varphi)\cos(\phi))\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta)+1)(\cos(\phi) + \cos(\varphi))}x \right) \right\}$	Qualquer
$\Sigma_{R_h^-}(\pi - \phi, \theta, \phi)$	$\left\{ \left(x, \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}x, -\frac{\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta)+1)\sin(\phi)}x \right) \right\}$	Espaço
$\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi)$	$\left\{ \left(x, y, -\frac{\sinh(\theta)(\sin(\phi)x + \cos(\phi)y)}{\cosh(\theta)-1} \right) \right\}$	Tempo
$\Sigma_{S_h^-}(-\phi, \theta, \phi)$	$\left\{ \left(x, y, -\frac{\sinh(\theta)(\sin(\phi)x + \cos(\phi)y)}{\cosh(\theta)+1} \right) \right\}$	Espaço
$\Sigma_{S_h^+}(\varphi, \theta, \phi)$ $\varphi \neq -\phi$	$\{0, 0\}$	-
$\Sigma_{S_h^-}(\varphi, \theta, \phi)$ $\varphi \neq -\phi$	$\{0, 0\}$	-

Isso mostra que $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi))^\perp$ é do tipo espaço o que implica, pela Proposição 1.2.33, que $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi))$ é do tipo tempo. Como são, desta forma, não degenerados, temos que

$$\text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi)) \oplus \text{Fix}(\Sigma_{S_h^+}(-\phi, \theta, \phi))^\perp = \mathbb{R}^{2+1},$$

pela Proposição 2.4.1. De modo análogo, verificamos que a reta $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^-}(-\phi, \theta, \phi))^\perp$ é do tipo tempo. Portanto, o plano $\text{Fix}(\Sigma_{S_h^-}(-\phi, \theta, \phi))$ é do tipo espaço e também

$$\text{Fix}(\Sigma_{S_h^-}(-\phi, \theta, \phi)) \oplus \text{Fix}(\Sigma_{S_h^-}(-\phi, \theta, \phi))^\perp = \mathbb{R}^{2+1}.$$

A Tabela 2 resume todos os resultados desta seção no que diz respeito ao subespaço de pontos fixos. Observe que é possível decompor $\mathbb{R}^{2+1}$ como uma soma direta do subespaço de pontos fixos com o seu complemento Lorentz ortogonal, desde que o subespaço de pontos fixos seja do tipo espaço ou do tipo tempo. Os subgrupos estudados nesta seção são gerados por apenas um elemento. Não é difícil calcular os subespaços de pontos fixos de grupos gerados por dois ou mais elementos, para isto basta aplicar a Proposição 2.2.2.

AS INVOLUÇÕES DE LORENTZ

Neste capítulo abordaremos as involuções de Lorentz. Fazemos uma caracterização das involuções de Lorentz começando pelas involuções em $O(1, 1)$ e $O(2, 1)$, apresentando também uma base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes. Caracterizamos também todas as involuções em $O(n, 1)$, para todo $n \geq 3$. Terminamos o capítulo mostrando que o subespaço de pontos fixos de uma involução nunca é degenerado.

Definição 3.0.1. *Uma matriz A é chamada de matriz de involução se o seu quadrado é a matriz identidade, isto é, se $A^2 = Id$. Chamamos de involução de Lorentz a qualquer involução em $O(n, 1)$.*

Se duas matrizes são conjugadas então os subgrupos gerados por cada uma dessas matrizes são conjugados. A proposição a seguir é um resultado clássico que mostra a existência de uma correspondência entre o subespaço de pontos fixos, as funções invariantes e as aplicações equivariantes pela ação de cada um destes subgrupos.

Proposição 3.0.2. *Sejam os grupos $\Gamma_1 = \langle \gamma \rangle$ e $\Gamma_2 = \langle \delta \rangle$, com γ e δ conjugados, isto é, existe P invertível tal que $\delta = P\gamma P^{-1}$. Então:*

- a) $v \in \text{Fix}(\Gamma_1)$ se, e somente se, $Pv \in \text{Fix}(\Gamma_2)$.
- b) $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ é Γ_1 -invariante se, e somente se, $f \circ P^{-1}$ é Γ_2 -invariante.
- c) $g : V \rightarrow V$ é Γ_1 -equivariante se, e somente se, $P \circ g \circ P^{-1}$ é Γ_2 -equivariante.

3.1 Involuções em $O(1, 1)$ e invariantes

Nesta seção estudamos as involuções de Lorentz em $O(1, 1)$. Calculamos também a base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes para cada involução de Lorentz.

Pela Proposição 1.2.16 qualquer elemento do grupo de Lorentz pode ser decomposto, em valores singulares, da forma:

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

com $\varepsilon = \pm 1$, $P \in O(n)$, $Q \in SO(n)$ e $\theta \in \mathbb{R}$.

No resultado a seguir descrevemos as involuções em $O(1, 1)$.

Proposição 3.1.1. *Pela decomposição em valores singulares, uma involução do grupo de Lorentz $O(1, 1)$ pode ser escrita como uma das seguintes formas:*

$$\gamma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{bmatrix}$$

ou

$$\gamma_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Note que a decomposição em valores singulares de matrizes em $O(1, 1)$ é dada por

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

com $P = \pm 1$ e $\varepsilon = \pm 1$. Assim, podemos reescrevê-la como

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

Fica fácil verificar que as únicas involuções de Lorentz são γ_3 e γ_4 . □

Observação 3.1.2. *Observe que γ_3 e γ_4 estão em componentes conexas diferentes. Desse modo, os grupos $\Gamma_\theta^3 = \langle \gamma_3 \rangle$ e $\Gamma_\theta^4 = \langle \gamma_4 \rangle$ não são conjugados, pelo Teorema 1.2.14.*

Podemos encontrar matrizes, da mesma componente conexa, conjugadas γ_3 e γ_4 . No resultado a seguir descrevemos essa conjugação de matrizes.

Proposição 3.1.3. *As matrizes*

$$\begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

são conjugadas, assim como as matrizes

$$\begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$.

Demonstração. A matriz

$$\begin{pmatrix} \cosh(\frac{\theta}{2}) & -\sinh(\frac{\theta}{2}) \\ -\sinh(\frac{\theta}{2}) & \cosh(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}$$

é uma matriz de conjugação para ambos os pares de matrizes. $\square$

No grupo ortogonal $O(2)$, as matrizes Λ_2^p e Λ_2^t são as matrizes de reflexão de $O(2)$ κ_x e κ_y , respectivamente, e são conjugadas por uma matriz de permutação. Porém, isto não acontece no grupo de Lorentz pois, pelo Teorema 1.2.14, Λ_2^p e Λ_2^t estão em componentes conexas distintas e não podem ser conjugadas por uma matriz de Lorentz em $O(1, 1)$. No entanto, as matrizes Λ_2^p e Λ_2^t são conjugadas por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, pela Proposição 3.0.2, calculamos a base de Hilbert para somente uma destas matrizes.

A menos de conjugação, a base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes por uma involução em $O(1, 1)$ é dada na seguinte proposição:

Proposição 3.1.4. *Considere o subgrupo $\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t)$. Uma base de Hilbert do anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t))$ é $\{x, y^2\}$.*

Observação 3.1.5. *A demonstração da Proposição 3.1.4 é a mesma para o caso das reflexões κ_x , um resultado clássico na literatura.*

3.2 Involuções em $O(2, 1)$ e invariantes

Nesta seção estudamos as involuções do grupo de Lorentz $O(2, 1)$ e a respectiva base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes pela ação do grupo gerado por cada uma dessas involuções, a menos de conjugação.

No teorema a seguir descrevemos as involuções de $O(2, 1)$, escritas na decomposição em valores singulares.

Proposição 3.2.1. *Qualquer involução de Lorentz em $O(2, 1)$ pode ser escrita, em sua decomposição em valores singulares, de uma das seguintes formas:*

$$\begin{pmatrix} -\cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & -\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Tome a decomposição em valores singulares (3.1). Podemos escrever, desta forma, qualquer matriz em $O(2, 1)$ como

$$B_{1,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou como

$$B_{2,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & -\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando a matriz $B_{1,\varepsilon}$ e impondo $B_{1,\varepsilon}^2 = I_3$, obtemos:

$$\begin{cases} \sin(\varphi) \sin(\phi) - \cos(\varphi) \cos(\phi) = \varepsilon \\ \cos(\varphi) = -\varepsilon \cos(\phi) \\ \sin(\varphi) = \varepsilon \sin(\phi) \end{cases}.$$

Do mesmo modo para a matriz $B_{2,\varepsilon}$, obtemos:

$$\begin{cases} \sin(\varphi) \sin(\phi) + \cos(\varphi) \cos(\phi) = \varepsilon \\ \cos(\varphi) = \varepsilon \cos(\phi) \\ \sin(\varphi) = \varepsilon \sin(\phi) \end{cases}.$$

Para $\varepsilon = \pm 1$, obtemos as quatro formas desejadas. □

Observação 3.2.2. Note que as matrizes $B_{1,\varepsilon}$ e $B_{2,\varepsilon}$, para $\varepsilon = \pm 1$, não são conjugadas. De fato, temos que $B_{1,1} = R_h^+(\pi - \phi, \theta, \phi) \in SO_0(2, 1)$, $B_{1,-1} = S_h^-(-\phi, \theta, \phi) \in \Lambda_3^t SO_0(2, 1)$, $B_{2,1} = S_h^+(-\phi, \theta, \phi) \in \Lambda_3^p SO_0(2, 1)$ e $B_{2,-1} = R_h^-(\pi - \phi, \theta, \phi) \in \Lambda_3^{pt} SO_0(2, 1)$, definidas nas Proposições 2.4.7, 2.4.12 e 2.4.14, estão em diferentes componentes conexas. Assim, pelo Teorema 1.2.14, tais matrizes não são conjugadas.

A proposição a seguir mostra que cada involução de Lorentz em $O(2, 1)$ é conjugada a uma das matrizes Λ_3^t , Λ_3^p , $-\Lambda_3^t$ e $-\Lambda_3^p$ em $O(2, 1)$, definidas em (1.2).

Proposição 3.2.3. *Temos a seguinte conjugação de matrizes:*

A matriz $R_h^+(\pi - \phi, \theta, \phi)$ é conjugada à matriz $-\Lambda_3^t$;

A matriz $S_h^-(\phi, \theta, \phi)$ é conjugada à matriz Λ_3^t ;

A matriz $S_h^+(\phi, \theta, \phi)$ é conjugada à matriz Λ_3^p ; e

A matriz $R_h^-(\pi - \phi, \theta, \phi)$ é conjugada à matriz $-\Lambda_3^p$.

Demonstração. A matriz

$$\begin{pmatrix} -\cos(\phi) & -\sin(\phi) \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin(\phi) \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\cos(\phi) \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ 0 & \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix},$$

cuja inversa é

$$\begin{pmatrix} -\cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\cos(\phi) \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin(\phi) \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos(\phi) \sinh\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cosh\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix},$$

é uma matriz de conjugação para todos os pares de matrizes. □

As matrizes Λ_3^t e Λ_3^p são conjugadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, na proposição a seguir obtemos uma base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes por cada uma das matrizes Λ_3^p e $-\Lambda_3^p$ em $O(2,1)$.

Proposição 3.2.4. *Considere a ação de cada um dos subgrupos de Lorentz $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)$, $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^p)$, $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^t)$, $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^t)$ nos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1}$. Então*

(i) *O conjunto*

$$\{x, z, y^2\}$$

é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p))$;

(ii) *O conjunto*

$$\{y, xz, x^2, z^2\}$$

é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^p))$.

Demonstração. É imediato. □

3.3 Involuções em $O(n, 1)$

Nesta seção caracterizamos as involuções de Lorentz em $O(n, 1)$, para $n \geq 3$. Apresentamos algumas classes de involução em $O(3, 1)$ e calculamos a base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes pela ação do grupo formado por essas involuções.

Tome a decomposição em valores singulares (3.1) de uma matriz de Lorentz A , com

$$P = \begin{pmatrix} P_{n-1} & v_1 \\ v_2^t & a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Q = \begin{pmatrix} Q_{n-1} & u_1 \\ u_2^t & b \end{pmatrix}, \quad v_1, v_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \text{e} \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

A condição $A^2 = I_{n+1}$, implica em

$$u_2^t v_1 + ab = -\varepsilon \quad (3.3)$$

$$(u_2^t P_{n-1} + b v_2^t) u_1 = 0 \quad (3.4)$$

$$v_2^t (a u_1 + Q_{n-1} v_1) = 0 \quad (3.5)$$

$$(u_2^t P_{n-1} + b v_2^t) Q_{n-1} = 0 \quad (3.6)$$

$$P_{n-1} (a u_1 + Q_{n-1} v_1) = 0 \quad (3.7)$$

$$v_2^t (Q_{n-1} P_{n-1} + u_1 v_2^t) u_1 - \varepsilon ab = 1 \quad (3.8)$$

$$v_2^t (Q_{n-1} P_{n-1} + u_1 v_2^t) Q_{n-1} - \varepsilon a u_2^t = 0 \quad (3.9)$$

$$P_{n-1} (Q_{n-1} P_{n-1} + u_1 v_2^t) u_1 - \varepsilon b v_1 = 0 \quad (3.10)$$

$$P_{n-1} (Q_{n-1} P_{n-1} + u_1 v_2^t) Q_{n-1} - \varepsilon v_1 u_2^t = I_{n-1} \quad (3.11)$$

As expressões a seguir vêm da ortogonalidade de P e Q :

$$P_{n-1} P_{n-1}^t + v_1 v_1^t = I_{n-1} \quad (3.12)$$

$$P_{n-1}^t P_{n-1} + v_2 v_2^t = I_{n-1} \quad (3.13)$$

$$P_{n-1} v_2 + a v_1 = 0 \quad (3.14)$$

$$P_{n-1}^t v_1 + a v_2 = 0 \quad (3.15)$$

$$v_1^t v_1 + a^2 = 1 \quad (3.16)$$

$$v_2^t v_2 + a^2 = 1 \quad (3.17)$$

$$Q_{n-1} Q_{n-1}^t + u_1 u_1^t = I_{n-1} \quad (3.18)$$

$$Q_{n-1}^t Q_{n-1} + u_2 u_2^t = I_{n-1} \quad (3.19)$$

$$Q_{n-1} u_2 + b u_1 = 0 \quad (3.20)$$

$$Q_{n-1}^t u_1 + b u_2 = 0 \quad (3.21)$$

$$u_1^t u_1 + b^2 = 1 \quad (3.22)$$

$$u_2^t u_2 + b^2 = 1 \quad (3.23)$$

Observe que as expressões acima são as informações que definem uma matriz de involução de Lorentz em $O(n, 1)$, quando escrita na decomposição em valores singulares. Agora damos outra caracterização dessa matriz em $O(n, 1)$.

Proposição 3.3.1. *Sejam os vetores $v_1, v_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ dados nas matrizes P e Q em (3.2). Se pelo menos um desses vetores é nulo então todos eles são nulos.*

Demonstração. Suponha $v_1 = 0$. De (3.3), temos que $ab = -\varepsilon$, o que implica que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Além disso, P_{n-1} é invertível, pois de (3.12) temos $P_{n-1}P_{n-1}^t = I_{n-1}$, o que implica que P_{n-1} é uma matriz ortogonal. De (3.14) temos $P_{n-1}v_2 = 0$ e como P_{n-1} é invertível segue que $v_2 = 0$. De (3.7) obtemos $u_1 = 0$. E de (3.9) obtemos $u_2 = 0$. Nesse caso, segue também que Q_{n-1} é ortogonal.

Suponha $v_2 = 0$. De (3.13), temos que P_{n-1} é ortogonal e, portanto, invertível. Disso segue, de (3.14), que $v_1 = 0$. De (3.7) temos que $u_1 = 0$. E de (3.21) obtemos $u_2 = 0$.

Suponha $u_1 = 0$. De (3.18) segue que Q_{n-1} é invertível e de (3.20) temos $u_2 = 0$. De (3.10) obtemos $v_1 = 0$ e de (3.14) temos $v_2 = 0$.

Suponha $u_2 = 0$. De (3.19) segue que Q_{n-1} é invertível e de (3.21) temos $u_1 = 0$. De (3.10) obtemos $v_1 = 0$ e de (3.14) temos $v_2 = 0$.

□

No caso em que um dos vetores é nulo temos $a = \pm 1$ e $b = \pm 1$. Assim, $b = -\varepsilon a$, pela equação (3.3). Além disso, P_{n-1} e Q_{n-1} são ortogonais, com $(P_{n-1}Q_{n-1})^2 = I_{n-1}$ pela equação (3.11). Dessa forma, se um dos vetores é nulo temos a seguinte caracterização de uma involução de Lorentz:

Corolário 3.3.2. *Se um dos vetores $v_1, v_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ em (3.2) é nulo, então uma involução de Lorentz pode ser escrita em uma das seguintes formas:*

$$\begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa_x R_h(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa_y R_h(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

onde

$$\kappa^2 = I_{n-1}, \kappa_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \kappa_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Como um dos vetores $v_1, v_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ é nulo então, pela Proposição 3.3.1, temos que todos os vetores são nulos, consequentemente P_{n-1} e Q_{n-1} são ortogonais e $b = -\varepsilon a$. Assim, a matriz (3.1) é escrita como

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} P_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & a \cosh(\theta) & a \sinh(\theta) \\ 0 & \varepsilon \sinh(\theta) & \varepsilon \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P_{n-1} Q_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon \cosh(\theta) & a \sinh(\theta) \\ 0 & -a \sinh(\theta) & \varepsilon \cosh(\theta) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Seja $\kappa = P_{n-1} Q_{n-1}$, note que $\kappa^2 = I_{n-1}$. Como $|a| = |\varepsilon| = 1$, temos que a submatriz

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon \cosh(\theta) & a \sinh(\theta) \\ -a \sinh(\theta) & \varepsilon \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

pode ser escrita em uma das seguintes formas: $\kappa_x R_h(\theta)$, $\kappa_y R_h(\theta)$, $R_h(\theta) \kappa_x$ ou $R_h(\theta) \kappa_y$, onde κ_x e κ_y são as matrizes de reflexão de $O(2)$ dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente, e

$$R_h(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$

Para concluir, observe que $\kappa_x R_h(\theta) = R_h(-\theta) \kappa_x$ e que $\kappa_y R_h(\theta) = R_h(-\theta) \kappa_y$. $\square$

Como o grupo gerado pela matriz (3.24) tem ordem 2, podemos estimar o número de invariantes via série de Molien e aplicar a teoria dos invariantes para grupos finitos. Conhecendo alguns dos invariantes, aplicamos o Algoritmo 1.1.13 para determinar um conjunto de geradores do anel dos polinômios invariantes.

Duas classes de subgrupos de Lorentz gerados por involuções em $O(3, 1)$, usando o Corolário 3.3.2, são dadas por

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & 0 & -\sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

e

$$C_2 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & -\cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cosh(\theta) & -\sinh(\theta) \\ 0 & 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix},$$

com ϕ e θ fixados. Observe que estas duas matrizes são conjugadas à matriz

$$\kappa_{yw} = \begin{pmatrix} \kappa_x & 0 \\ 0 & \kappa_x \end{pmatrix},$$

com κ_x a matriz de reflexão em relação ao eixo x , pela conjugação

$$\begin{pmatrix} \sin(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 \\ 1 - \cos(\phi) & -1 - \cos(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\frac{\theta}{2}) & -\sinh(\frac{\theta}{2}) \\ 0 & 0 & -\sinh(\frac{\theta}{2}) & \cosh(\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Portanto, para estas classes de matrizes, é suficiente encontrar a base de Hilbert pela ação do subgrupo $\mathbb{Z}_2(\kappa_{yw})$. Porém, para ilustrar a aplicação dos Algoritmos 1.1.12 e 1.1.13, fazemos o cálculo da base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(C_1))$ na proposição a seguir.

Proposição 3.3.3. *Considere a ação do grupo $\mathbb{Z}_2(C_1)$ nos pontos (x, y, z, w) de $\mathbb{R}^{3+1}$. O conjunto*

$$M = \{ \sin(\phi)x - (\cos(\phi) - 1)y, (\cosh(\theta) + 1)z + \sinh(\theta)w, x^2 + y^2, w^2 - z^2, (\cos(\phi) + \cosh(\theta))xz + \sin(\phi)yz + \sinh(\theta)wx \}$$

é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(C_1))$.

Demonstração. Calculamos a série de Molien para o grupo $\mathbb{Z}_2(C_1)$. Temos que

$$\det(I_4 - t \cdot I_4) = (1 - t)^4$$

e que

$$\det(I_4 - t \cdot C_1) = (1 + t)^2(1 - t)^2.$$

Portanto, a série de Molien é dada por

$$\Phi_{\mathbb{Z}_2(C_1)}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^4} + \frac{1}{(1-t^2)^2} \right) = 1 + 2t + 6t^2 + 10t^3 + 19t^4 + 28t^5 + 44t^6 + \dots$$

Usando o MAPLE, encontramos os polinômios homogêneos invariantes de grau 1, pela ação de $\mathbb{Z}_2(C_1)$ em $\mathbb{R}^{3+1}$,

$$\sin(\phi)x - (\cos(\phi) - 1)y \quad \text{e} \quad (\cosh(\theta) + 1)z + \sinh(\theta)w.$$

Encontramos também os polinômios homogêneos invariantes de grau 2,

$$x^2 + y^2, \tag{3.25}$$

$$\sin(\phi)xy - \cos(\phi)y^2, \tag{3.26}$$

$$(\cos(\phi) + \cosh(\theta))xz + \sin(\phi)yz + \sinh(\theta)xw, \tag{3.27}$$

$$\sin(\phi)xz + (\cosh(\theta) - \cos(\phi))yz + \sinh(\theta)yw, \tag{3.28}$$

$$\sinh(\theta)zw + \cosh(\theta)z^2, \tag{3.29}$$

$$w^2 - z^2. \tag{3.30}$$

Usando o pacote *PolynomialIdeals* do MAPLE mostramos que os polinômios (3.26), (3.28) e (3.29) pertencem ao anel gerado pelo conjunto M . Usando o Algoritmo 1.1.12, mostramos que os polinômios de M são algebricamente dependentes. Assim, a série de Hilbert é dada por

$$H_{\mathbb{Z}_2(C_1)}(t) = \frac{1+t^2}{(1-t)^2(1-t^2)^2}.$$

Note que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^4} + \frac{1}{(1-t^2)^2} \right) = \frac{(t+1)^2 + (1-t)^2}{2(t+1)^2(1-t)^4} = \frac{t^2 + 2t + 1 + 1 - 2t + t^2}{2(1-t)^2(-t^2+1)^2} = \frac{1+t^2}{(1-t)^2(1-t^2)^2}.$$

Logo, pelo Algoritmo 1.1.13, o conjunto M é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(C_1))$. $\square$

No teorema a seguir, damos uma caracterização de uma involução em $O(n, 1)$. Tome P e Q as matrizes dadas em (3.2). Defina a matriz

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{n-1}^t & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} P_1 \cdot P &= \begin{pmatrix} P_{n-1}^t & v_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{n-1} & v_1 \\ v_2^t & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{n-1}^t P_{n-1} + v_2 v_2^t & P_{n-1}^t v_1 + a v_2 \\ v_2^t & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ v_2^t & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por (3.13) e (3.15).

Assim, concluímos que $\det(P_{n-1}) = \pm a$, pois $\det(P) = \pm 1$. Portanto, P_{n-1} é invertível se, e somente se, a é não nulo.

Analogamente, calculamos que $\det(Q_{n-1}) = b$, pois $\det(Q) = 1$. Do mesmo modo, Q_{n-1} é invertível se, e somente se, b é não nulo.

Teorema 3.3.4. *Sejam os vetores $v_1, v_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$ dados nas matrizes P e Q em (3.2), não nulos. Então a matriz (3.1) é uma involução de Lorentz se, e somente se,*

$$(i) \quad b = -\varepsilon a,$$

$$(ii) \quad u_2 = -\varepsilon v_1,$$

$$(iii) \quad P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1 v_2^t) = Q_{n-1}^t,$$

onde $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1 v_2^t$ é uma involução ortogonal.

Demonstração. Suponha a matriz (3.1) uma involução de Lorentz. Usamos as expressões (3.3) a (3.23). Como $\|v_1\|^2 = 1 - a^2$ então $1 - a^2 \geq 0$ o que implica que $|a| \leq 1$. Se tomarmos $|a| = 1$ então $\|v_1\| = 0$, isto é, v_1 é um vetor nulo. O mesmo aplica-se a b , isto é, se $|b| = 1$ então u_1 é um vetor nulo. Neste caso, aplica-se a Proposição 3.3.1 e o Corolário 3.3.2. Por isso, nesta demonstração, tomamos $|a|, |b| < 1$. Suponha $a, b \neq 0$. Tomando (3.20), e multiplicando pela matriz $P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}$ à esquerda, temos:

$$\begin{aligned} Q_{n-1}u_2 + bu_1 = 0 &\Rightarrow Q_{n-1}u_2 = -bu_1 \\ &\Rightarrow P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}(Q_{n-1}u_2) = -bP_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}(u_1). \end{aligned}$$

Substituindo as expressões (3.10) e (3.11) na expressão acima, vemos que

$$\begin{aligned} P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}u_2 &= -bP_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}u_1 \Rightarrow \\ (I_{n-1} + \varepsilon v_1 u_2^t - P_{n-1}u_1 v_2^t Q_{n-1})u_2 &= -b(\varepsilon b v_1 - P_{n-1}u_1 v_2^t u_1) \Rightarrow \\ u_2 + \varepsilon v_1 u_2^t u_2 - P_{n-1}u_1 v_2^t Q_{n-1}u_2 &= -\varepsilon b^2 v_1 + bP_{n-1}u_1 v_2^t u_1 \Rightarrow \\ u_2 + \varepsilon v_1(1 - b^2) - P_{n-1}u_1 v_2^t(-bu_1) &= -\varepsilon b^2 v_1 + bP_{n-1}u_1 v_2^t u_1 \Rightarrow \\ u_2 + \varepsilon v_1 - \varepsilon b^2 v_1 + bP_{n-1}u_1 v_2^t u_1 &= -\varepsilon b^2 v_1 + bP_{n-1}u_1 v_2^t u_1 \Rightarrow \\ u_2 + \varepsilon v_1 &= 0 \\ u_2 &= -\varepsilon v_1. \end{aligned}$$

Do terceiro para o quarto passo acima usamos as equações (3.20) e (3.23). Desse resultado e de (3.3), obtemos que

$$\begin{aligned} u_2^t v_1 + ab = -\varepsilon &\Rightarrow (-\varepsilon v_1^t) v_1 + ab = -\varepsilon \Rightarrow ab = -\varepsilon + \varepsilon v_1^t v_1 \\ &\Rightarrow ab = -\varepsilon + \varepsilon(1 - a^2) \Rightarrow ab = -\varepsilon a^2 \Rightarrow b = -\varepsilon a. \end{aligned}$$

Agora tomando (3.11) e (3.12), e usando que $u_2 = -\varepsilon v_1$, temos

$$\begin{aligned} P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1 v_2^t)Q_{n-1} - \varepsilon v_1 u_2^t &= I_{n-1} \Rightarrow \\ P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1 v_2^t)Q_{n-1} &= I_{n-1} - v_1 v_1^t \Rightarrow \\ P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1 v_2^t)Q_{n-1} &= P_{n-1}P_{n-1}^t \Rightarrow \\ (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1 v_2^t)Q_{n-1} &= P_{n-1}^t, \end{aligned}$$

pois como estamos assumindo que a é não nulo então P_{n-1} é invertível. De maneira análoga, usando (3.11) e (3.19), obtemos

$$P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1 v_2^t) = Q_{n-1}^t,$$

o que implica que

$$Q_{n-1} = (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1 v_2^t)^t P_{n-1}^t.$$

Resta mostrar que $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$ é uma involução ortogonal. De fato, substituindo $Q_{n-1} = (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^t P_{n-1}^t$ na expressão $(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)Q_{n-1} = P_{n-1}^t$, temos

$$\begin{aligned} (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)Q_{n-1} &= P_{n-1}^t \Rightarrow \\ (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^t P_{n-1}^t &= P_{n-1}^t \Rightarrow \\ (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^t &= I_{n-1}, \end{aligned}$$

o que mostra que a matriz $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$ é ortogonal. Note que

$$\begin{aligned} P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t) &= \\ (P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1} + P_{n-1}u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t) &= \\ (P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1} + P_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1})P_{n-1} + (P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}u_1 + P_{n-1}u_1v_2^tu_1)v_2^t. \end{aligned}$$

Aplicando as expressões (3.10) e (3.11) na última expressão acima, e usando que $b = -\varepsilon a$, obtemos

$$\begin{aligned} (I_{n-1} + \varepsilon v_1u_2^t)P_{n-1} + \varepsilon b v_1v_2^t &= \\ P_{n-1} + \varepsilon v_1(-\varepsilon)v_1^tP_{n-1} - av_1v_2^t &= \\ P_{n-1} - v_1v_1^tP_{n-1} - av_1v_2^t &= \\ P_{n-1} - v_1(v_1^tP_{n-1} + av_2^t) &= P_{n-1}. \end{aligned}$$

Sendo a última igualdade obtida a partir de (3.15). Portanto,

$$P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t) = P_{n-1}.$$

Como P_{n-1} é invertível, isso mostra que $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$ é uma involução ortogonal e, portanto, simétrica. Suponha agora $a = 0$. Isso implica que $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ e de (3.15), temos

$$\begin{aligned} v_1^tP_{n-1} = 0 &\Rightarrow v_1^tP_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1} = 0 \\ &\Rightarrow v_1^t(I_{n-1} + \varepsilon v_1u_2^t - P_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1}) = 0 \\ &\Rightarrow v_1^t + \varepsilon v_1^tv_1u_2^t - v_1^tP_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1} = 0 \\ &\Rightarrow v_1^t + \varepsilon u_2^t = 0 \Rightarrow v_1^t = -\varepsilon u_2^t \Rightarrow v_1 = -\varepsilon u_2, \end{aligned}$$

pois $v_1^tv_1 = 1$, por (3.16). Comparando a norma,

$$1 = \|v_2\| = \|v_1\| = \|-\varepsilon u_2\| = \|u_2\| = 1 - b^2 \Rightarrow b = 0.$$

Como $a = 0$, ainda vale a igualdade $b = -\varepsilon a$. A matriz $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$ é ortogonal:

$$\begin{aligned} (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^t &= \\ Q_{n-1}P_{n-1}P_{n-1}^tQ_{n-1}^t + u_1v_2^tP_{n-1}^tQ_{n-1}^t + Q_{n-1}P_{n-1}v_2u_1^t + u_1v_2^tv_2u_1^t &= \\ Q_{n-1}P_{n-1}P_{n-1}^tQ_{n-1}^t + u_1u_1^t, \end{aligned}$$

pois $P_{n-1}v_2 = 0$ por (3.14) e $v_2^t v_2 = 1$. Substituindo na última expressão acima as expressões (3.12) e (3.18), obtemos

$$\begin{aligned} & (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^t = \\ & Q_{n-1}(I_{n-1} - v_1v_1^t)Q_{n-1}^t + u_1u_1^t = \\ & Q_{n-1}Q_{n-1}^t - Q_{n-1}v_1v_1^tQ_{n-1}^t + u_1u_1^t = \\ & I_{n-1} - u_1u_1^t - Q_{n-1}(-\varepsilon u_2)(-\varepsilon u_2^t)Q_{n-1}^t + u_1u_1^t = \\ & I_{n-1} - Q_{n-1}u_2u_2^tQ_{n-1}^t = I_{n-1}, \end{aligned}$$

pois $Q_{n-1}u_2 = 0$ por (3.20). Isso mostra que $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$ é ortogonal também quando $a = 0$. Mostramos que $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$ é uma involução. Observe que desenvolvendo a potência $(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^3$, temos

$$\begin{aligned} & (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^3 = \\ & (Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t) = \\ & (Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1} + Q_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^t + u_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1} + \\ & + u_1v_2^tu_1v_2^t)(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t) = \\ & Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1} + Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^t + Q_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^tu_1v_2^t + \\ & + u_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^tu_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^t + \\ & + u_1v_2^tu_1v_2^tu_1v_2^t + Q_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1}. \end{aligned}$$

Agrupando alguns termos,

$$\begin{aligned} & Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1} + Q_{n-1}\{P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)u_1\}v_2^t + \\ & + u_1\{v_2^t(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)Q_{n-1}\}P_{n-1} + u_1\{v_2^t(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)u_1\}v_2^t \\ & + Q_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1} = \\ & Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1} + Q_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t, \end{aligned}$$

pois $v_2^t(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)u_1 = 1$, $v_2^t(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)Q_{n-1} = 0$ e $P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)u_1 = 0$, pela expressões (3.8) a (3.10). Agora, por (3.11), temos

$$\begin{aligned} & Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1}Q_{n-1}P_{n-1} + Q_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t = \\ & Q_{n-1}(I_{n-1} - v_1v_1^t - P_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1})P_{n-1} + Q_{n-1}P_{n-1}u_1v_2^tQ_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t = \\ & Q_{n-1}P_{n-1} - Q_{n-1}v_1v_1^tP_{n-1} + u_1v_2^t = Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t, \end{aligned}$$

pois, por (3.15), $v_1^tP_{n-1} = 0$. Como a matriz $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$ é ortogonal e, portanto, invertível, e, como acabamos de provar, $(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^3 = Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$, segue que $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$

é uma involução. Por fim, temos da ortogonalidade de $Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t$ que

$$\begin{aligned}
 P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t) &= P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t)^t \\
 &= P_{n-1}(P_{n-1}^tQ_{n-1}^t + v_2u_1^t) \\
 &= P_{n-1}P_{n-1}^tQ_{n-1}^t + P_{n-1}v_2u_1^t \\
 &= (I_{n-1} - v_1v_1^t)Q_{n-1}^t + P_{n-1}v_2u_1^t \\
 &= Q_{n-1}^t - v_1v_1^tQ_{n-1}^t + P_{n-1}v_2u_1^t \\
 &= Q_{n-1}^t,
 \end{aligned}$$

pois $v_1^tQ_{n-1}^t = 0$, por (3.20), e $P_{n-1}v_2 = 0$, por (3.14).

Reciprocamente, um cálculo direto nos mostra que nestas condições uma matriz de Lorentz é uma involução. $\square$

O resultado a seguir estabelece uma forma simples de se detectar uma classe de involuções de Lorentz.

Corolário 3.3.5. *Se todos os vetores $v_1, v_2, u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$, dados nas matrizes P e Q em (3.2), são não nulos, então podemos encontrar uma involução de Lorentz tal que se $P_{n-1} = -\varepsilon Q_{n-1}^t$ então $u_1 = -\varepsilon v_2$.*

Demonstração. Comparando as expressões (3.15) e (3.20), e usando as relações do Teorema 3.3.4, $b = -\varepsilon a$ e $u_2 = -\varepsilon v_1$, temos

$$\begin{aligned}
 P_{n-1}^t v_1 + a v_2 &= Q_{n-1} u_2 + b u_1 \Rightarrow P_{n-1}^t v_1 + a v_2 = -\varepsilon Q_{n-1} v_1 - \varepsilon a u_1 \\
 &\Rightarrow P_{n-1}^t v_1 + \varepsilon Q_{n-1} v_1 = -\varepsilon a u_1 - a v_2 \\
 &\Rightarrow (P_{n-1}^t + \varepsilon Q_{n-1}) v_1 = -a(\varepsilon u_1 + v_2)
 \end{aligned}$$

Assim, se $P_{n-1} = -\varepsilon Q_{n-1}^t$ então temos que $u_1 = -\varepsilon v_2$. Note que $P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t) = Q_{n-1}^t$, pois

$$\begin{aligned}
 P_{n-1}(Q_{n-1}P_{n-1} + u_1v_2^t) &= P_{n-1}(Q_{n-1}(-\varepsilon Q_{n-1}) + u_1(-\varepsilon u_1^t)) \\
 &= -\varepsilon P_{n-1}(Q_{n-1}Q_{n-1}^t + u_1u_1^t) \\
 &= -\varepsilon P_{n-1} = Q_{n-1}^t.
 \end{aligned}$$

$\square$

Finalizamos esta seção apresentando duas classes de involuções em $O(3, 1)$ calculadas a partir do Teorema 3.3.4 e do Corolário 3.3.5 e a respectiva base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes, pela ação dos grupos gerados por essas involuções.

Considere a matriz, com ϕ e θ fixados, dada por

$$C_3 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & -\cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos $\varepsilon = 1$, $u_2 = (-\sin(\phi), 0) = -(\sin(\phi), 0) = -v_1$ e $a = -\cos(\phi) = -b$. Pelo Teorema 3.3.4, C_3 é uma involução.

Considere também a matriz C_4 , construída agora a partir do Corolário 3.3.5, com ϕ e θ fixados. Mantemos a matriz

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

de C_3 e construímos a matriz P , usando as hipóteses do corolário para $\varepsilon = -1$. Temos $u_1 = (\sin(\phi), 0)$, $u_2 = (-\sin(\phi), 0)$, $b = \cos(\phi)$ e

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, do Corolário 3.3.5, segue que

$$C_4 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ 0 & 0 & \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

é uma involução de Lorentz. Estas duas classe de matrizes são conjugadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2\sin(\phi)\cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2\cos(\phi)\cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, precisamos apenas da base de Hilbert para o anel de polinômios invariantes de uma delas, pela Proposição 3.0.2. Calculamos a base de Hilbert de para o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(C_3))$.

Proposição 3.3.6. *O conjunto*

$$R = \{(\cosh(\theta) - 1)x - \sinh(\theta)\sin(\phi)w, y, (\cosh(\theta) - 1)z + \sinh(\theta)\cos(\phi)w, x^2 + y^2 + z^2 - w^2\}$$

é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(C_3))$.

Demonstração. Calculamos a série de Molien para o grupo $\mathbb{Z}_2(C_3)$. Temos que

$$\det(I_4 - t \cdot I_4) = (1 - t)^4$$

e que

$$\det(I_4 - t \cdot C_3) = (1+t)(1-t)^3.$$

Portanto, a série de Molien é dada por

$$\Phi_{\mathbb{Z}_2(C_3)}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^4} + \frac{1}{(1+t)(1-t)^3} \right) = 1 + 3t + 7t^2 + 13t^3 + 22t^4 + 34t^5 + 50t^6 + \dots$$

Usamos o MAPLE para encontrar os três polinômios homogêneos invariantes de grau 1, pela ação de $\mathbb{Z}_2(C_3)$ em $\mathbb{R}^{3+1}$,

$$\cosh(\theta) - 1)x - \sinh(\theta) \sin(\phi)w, y \quad \text{e} \quad (\cosh(\theta) - 1)z + \sinh(\theta) \cos(\phi)w.$$

Como estes três invariantes de grau 1 geram 6 invariantes de grau 2, e dado que a forma quadrática $x^2 + y^2 + z^2 - w^2$ é um polinômio invariante, então temos o conjunto

$$R = \{(\cosh(\theta) - 1)x - \sinh(\theta) \sin(\phi)w, y, (\cosh(\theta) - 1)z + \sinh(\theta) \cos(\phi)w, x^2 + y^2 + z^2 - w^2\}$$

como um candidato a base de Hilbert. Usando o Algoritmo 1.1.12, mostramos que os polinômios de P são algebricamente independentes. Assim, aplicamos a Proposição 1.2.3 para calcular a série de Hilbert, dada por

$$H_{\mathbb{Z}_2(C_3)}(t) = \frac{1}{(1-t)^3(1-t^2)}.$$

Temos que $\Phi_{\mathbb{Z}_2(C_3)}(t) = H_{\mathbb{Z}_2(C_3)}(t)$. Logo, pelo Algoritmo 1.1.13, o conjunto R é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(C_3))$. $\square$

3.4 O subespaço de pontos fixos de uma involução de Lorentz

Seja $\gamma \in O(n, 1)$ uma involução, com $\mathbb{Z}_2(\gamma)$ agindo em $\mathbb{R}^{n+1}$. Definimos

$$A(\mathbb{Z}_2(\gamma)) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \gamma x = -x\}$$

como o conjunto antipodal de γ . Nesta seção, mostramos que se γ for uma involução então o $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ é não degenerado.

É imediato que $\mathbb{R}^{n+1} = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma)) \oplus A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$.

Proposição 3.4.1. *Se $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ é não degenerado então $A(\mathbb{Z}_2(\gamma)) = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))^\perp$.*

Demonstração. Suponha $w \in A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$. Temos, para todo $v \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ que

$$\langle v, w \rangle = \langle \gamma v, -\gamma w \rangle = \langle v, -w \rangle = -\langle v, w \rangle$$

o que implica que $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $v \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$. Portanto, $w \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))^\perp$. Reciprocamente, suponha $w \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))^\perp$ então $\langle v, w \rangle = 0$ para todo $v \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$. Temos também que $\langle \gamma v, \gamma w \rangle = \langle v, \gamma w \rangle = 0$ para todo $v \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$. Portanto, $\langle v, w \rangle + \langle v, \gamma w \rangle = \langle v, w + \gamma w \rangle = 0$, para todo $v \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ e como $w + \gamma w \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ segue que $w + \gamma w = 0$, pois $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ é não degenerado, e daí temos $\gamma w = -w$. Logo $w \in A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$. $\square$

Observe, da demonstração da Proposição 3.4.1, que se $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ é um subespaço degenerado, então em geral $A(\mathbb{Z}_2(\gamma)) \subset \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))^\perp$.

Corolário 3.4.2. *$\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ é não degenerado se, e somente se, $A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ também é não degenerado.*

Demonstração. Se $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ é não degenerado então, pela Proposição 3.4.1, temos que $A(\mathbb{Z}_2(\gamma)) = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))^\perp$. Portanto, $A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ é não degenerado pela Proposição 1.2.33. Observe que $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma)) = A(\mathbb{Z}_2(-\gamma))$ e que $A(\mathbb{Z}_2(\gamma)) = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(-\gamma))$. Então, supondo que $A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ seja não degenerado, e como $A(\mathbb{Z}_2(\gamma)) = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(-\gamma))$, segue que $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(-\gamma))$ é não degenerado e, pelo mesmo argumento acima, temos que $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(-\gamma))^\perp = A(\mathbb{Z}_2(-\gamma)) = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ também é não degenerado. $\square$

Finalizamos esta seção com o teorema a seguir, mostrando que o subespaço de pontos fixos de qualquer involução é não degenerado.

Teorema 3.4.3. *Seja $\gamma \in O(n, 1)$ uma involução agindo em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então o subespaço de pontos fixos, $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$, é não degenerado.*

Demonstração. Suponha que $\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ seja degenerado. Então $A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ também é degenerado, pelo Corolário 3.4.2. Seja $x \in V$ um ponto do tipo-tempo, isto é, $\langle x, x \rangle < 0$. Como $\mathbb{R}^{n+1} = \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma)) \oplus A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ então $x = u + v$, com $u \in \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$ e $v \in A(\mathbb{Z}_2(\gamma))$. Como, pela Proposição 3.4.1, temos $A(\mathbb{Z}_2(\gamma)) \subset \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\gamma))^\perp$ então $\langle u, v \rangle = 0$. Sendo assim, temos

$$\langle x, x \rangle = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle \geq 0,$$

pois $\langle u, u \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle \geq 0$ uma vez que u e v são elementos de subespaços degenerados. Contradição. $\square$

Corolário 3.4.4. *O significado geométrico do Teorema 3.4.3 é que o subespaço de pontos fixos de um subgrupo gerado por uma involução, em qualquer dimensão, não é do tipo luz. Ou melhor, em qualquer dimensão o subespaço de pontos fixos não tangencia o cone-luz.*

SOBRE OS INVARIANTES PARA ROTAÇÕES DE LORENTZ

Neste capítulo, estudamos sobre o grupo cíclico $\Gamma^\theta = \langle R_h(\theta) \rangle$, onde $R_h(\theta)$ é uma rotação hiperbólica *pura* em $O(1, 1)$ dada por

$$R_h(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

com θ fixado. O grupo Γ^θ é não compacto, infinito, cujos elementos são $R_h(n\theta)$, $n \in \mathbb{Z}$. Também estudamos sobre os possíveis polinômios invariantes $\mathbb{R}^{1+1} \rightarrow \mathbb{R}$ pela ação padrão deste grupo no domínio da função, concluindo com algumas conjecturas que sugerem uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma^\theta)$. Em todo o capítulo assumimos que $\theta \neq 0$.

Vamos usar a notação $\alpha = \cosh(\theta)$ e $\beta = \sinh(\theta)$ em $R_h(\theta)$. Temos, portanto, que a ação de Γ^θ em $\mathbb{R}^{1+1}$ transforma pontos (x, y) em pontos $(\alpha x + \beta y, \beta x + \alpha y)$.

Estamos interessados nos polinômios invariantes pela ação de Γ^θ em $\mathbb{R}^{1+1}$. Como o anel dos polinômios Γ^θ -invariantes $\mathcal{P}(\Gamma^\theta)$ é uma álgebra graduada sobre $\mathbb{R}$, podemos encontrar os polinômios Γ^θ -invariantes grau a grau.

Consideramos um polinômio homogêneo geral de grau 1, $f_1(x, y) = a_1x + a_2y$. Para que f_1 seja Γ^θ -invariante, temos

$$f_1(\alpha x + \beta y, \beta x + \alpha y) - f_1(x, y) = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^{1+1}.$$

De onde obtemos a expressão $a_1(\alpha x + \beta y) + a_2(\beta x + \alpha y) - a_1x - a_2y = 0$. Temos assim, o sistema homogêneo nas variáveis a_1 e a_2 :

$$\begin{cases} (\alpha - 1)a_1 + \beta a_2 = 0 \\ \beta a_1 + (\alpha - 1)a_2 = 0 \end{cases},$$

cujas matrizes dos coeficientes é

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \beta \\ \beta & \alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

O sistema acima admite apenas a solução trivial. Portanto, concluímos que não existem polinômios não nulos Γ^θ -invariantes de grau 1.

Procedemos do mesmo modo para os polinômios homogêneos de grau 2 e 3,

$$f_2(x, y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2, \quad f_3(x, y) = a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3,$$

obtemos as matrizes dos coeficientes do sistema associado:

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\beta & \alpha^2 + \beta^2 - 1 & 2\alpha\beta \\ \beta^2 & \alpha\beta & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha^3 - 1 & \alpha^2\beta & \alpha\beta^2 & \beta^3 \\ 3\alpha^2\beta & \alpha^3 + 2\alpha\beta^2 - 1 & 2\alpha^2\beta + \beta^3 & 3\alpha\beta^2 \\ 3\alpha\beta^2 & 2\alpha^2\beta + \beta^3 & \alpha^3 + 2\alpha\beta^2 - 1 & 3\alpha^2\beta \\ \beta^3 & \alpha\beta^2 & \alpha^2\beta & \alpha^3 - 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Sendo relativamente fácil resolvê-las. Para f_2 encontramos como solução $a_1 = -a_3$ e $a_2 = 0$, o que mostra que qualquer polinômio Γ^θ -invariante de grau 2 é da forma $a_1(x^2 - y^2)$, com $a_1 \in \mathbb{R}$. No caso de f_3 a solução é trivial. Assim, não existem polinômios Γ^θ -invariantes não nulos de grau 3.

Para os polinômios homogêneos de grau 4, 5 e 6,

$$\begin{aligned} f_4(x, y) &= a_1x^4 + a_2x^3y + a_3x^2y^2 + a_4xy^3 + a_5y^4, \\ f_5(x, y) &= a_1x^5 + a_2x^4y + a_3x^3y^2 + a_4x^2y^3 + a_5xy^4 + a_6y^5, \\ f_6(x, y) &= a_1x^6 + a_2x^5y + a_3x^4y^2 + a_4x^3y^3 + a_5x^2y^4 + a_6xy^5 + a_7y^6, \end{aligned}$$

temos as matrizes dos coeficientes do sistema associado

$$\begin{pmatrix} \alpha^4 - 1 & \alpha^3\beta & \alpha^2\beta^2 & \alpha\beta^3 & \beta^4 \\ 4\alpha^3\beta & \alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 - 1 & 2\alpha^3\beta + 2\alpha\beta^3 & 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4 & 4\alpha\beta^3 \\ 6\alpha^2\beta^2 & 3\alpha^3\beta + 3\alpha\beta^3 & \alpha^4 + 4\alpha^2\beta^2 + \beta^4 - 1 & 3\alpha^3\beta + 3\alpha\beta^3 & 6\alpha^2\beta^2 \\ 4\alpha\beta^3 & 3\alpha^2\beta^2 + \beta^4 & 2\alpha^3\beta + 2\alpha\beta^3 & \alpha^4 + 3\alpha^2\beta^2 - 1 & 4\alpha^3\beta \\ \beta^4 & \alpha\beta^3 & \alpha^2\beta^2 & \alpha^3\beta & \alpha^4 - 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^5 - 1 & \alpha^4\beta & \alpha^3\beta^2 & \alpha^2\beta^3 & \alpha\beta^4 & \beta^5 \\ 5\alpha^4\beta & \alpha^5 + 4\alpha^3\beta^2 - 1 & 2\alpha^4\beta + 3\alpha^2\beta^3 & 3\alpha^3\beta^2 + 2\alpha\beta^4 & 4\alpha^2\beta^3 + \beta^5 & 5\alpha\beta^4 \\ 10\alpha^3\beta^2 & 4\alpha^4\beta + 6\alpha^2\beta^3 & \alpha^5 + 6\alpha^3\beta^2 + 3\alpha\beta^4 - 1 & 3\alpha^4\beta + 6\alpha^2\beta^3 + \beta^5 & 6\alpha^3\beta^2 + 4\alpha\beta^4 & 10\alpha^2\beta^3 \\ 10\alpha^2\beta^3 & 6\alpha^3\beta^2 + 4\alpha\beta^4 & 3\alpha^4\beta + 6\alpha^2\beta^3 + \beta^5 & \alpha^5 + 6\alpha^3\beta^2 + 3\alpha\beta^4 - 1 & 4\alpha^4\beta + 6\alpha^2\beta^3 & 10\alpha^3\beta^2 \\ 5\alpha\beta^4 & 4\alpha^2\beta^3 + \beta^5 & 3\alpha^3\beta^2 + 2\alpha\beta^4 & 2\alpha^4\beta + 3\alpha^2\beta^3 & \alpha^5 + 4\alpha^3\beta^2 - 1 & 5\alpha^4\beta \\ \beta^5 & \alpha\beta^4 & \alpha^2\beta^3 & \alpha^3\beta^2 & \alpha^4\beta & \alpha^5 - 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha^6 - 1 & \alpha^5\beta & \alpha^4\beta^2 & \alpha^3\beta^3 & \alpha^2\beta^4 & \alpha\beta^5 & \beta^6 \\ 6\alpha^5\beta & \alpha^6 + 5\alpha^4\beta^2 - 1 & 2\alpha^5\beta + 4\alpha^3\beta^3 & 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 & 4\alpha^3\beta^3 + 2\alpha\beta^5 & 5\alpha^2\beta^4 + \beta^6 & 6\alpha\beta^5 \\ 15\alpha^4\beta^2 & 5\alpha^5\beta + 10\alpha^3\beta^3 & \alpha^6 + 8\alpha^4\beta^2 + 6\alpha^2\beta^4 - 1 & 3\alpha^5\beta + 9\alpha^3\beta^3 + 3\alpha\beta^5 & 6\alpha^4\beta^2 + 8\alpha^2\beta^4 + \beta^6 & 10\alpha^3\beta^3 + 5\alpha\beta^5 & 15\alpha^2\beta^4 \\ 20\alpha^3\beta^3 & 10\alpha^4\beta^2 + 10\alpha^2\beta^4 & 4\alpha^5\beta + 12\alpha^3\beta^3 + 4\alpha\beta^5 & \alpha^6 + 9\alpha^4\beta^2 + 9\alpha^2\beta^4 + \beta^6 - 1 & 4\alpha^5\beta + 12\alpha^3\beta^3 + 4\alpha\beta^5 & 10\alpha^4\beta^2 + 10\alpha^2\beta^4 & 20\alpha^3\beta^3 \\ 15\alpha^2\beta^4 & 10\alpha^3\beta^3 + 5\alpha\beta^5 & 6\alpha^4\beta^2 + 8\alpha^2\beta^4 + \beta^6 & 3\alpha^5\beta + 9\alpha^3\beta^3 + 3\alpha\beta^5 & \alpha^6 + 8\alpha^4\beta^2 + 6\alpha^2\beta^4 - 1 & 5\alpha^5\beta + 10\alpha^3\beta^3 & 15\alpha^4\beta^2 \\ 6\alpha\beta^5 & 5\alpha^2\beta^4 + \beta^6 & 4\alpha^3\beta^3 + 2\alpha\beta^5 & 3\alpha^4\beta^2 + 3\alpha^2\beta^4 & 2\alpha^5\beta + 4\alpha^3\beta^3 & \alpha^6 + 5\alpha^4\beta^2 - 1 & 6\alpha^5\beta \\ \beta^6 & \alpha\beta^5 & \alpha^2\beta^4 & \alpha^3\beta^3 & \alpha^4\beta^2 & \alpha^5\beta & \alpha^6 - 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Seja $f_n(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} y^i$ uma função polinomial homogênea de grau n . Suponha f_n Γ^θ -invariante, isto é,

$$\sum_{i=0}^n a_i ((\alpha x + \beta y)^{n-i} (\beta x + \alpha y)^i - x^{n-i} y^i) = 0.$$

Com base nesta equação achamos um sistema homogêneo nas variáveis a_i , $i = 0, \dots, n$, cuja matriz dos coeficientes $A = [a_{i,j}]$, de ordem $n+1$, é dada por

$$a_{i,j} = \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} \binom{n-j+1}{i-j+s} \alpha^{n-(i-j+2s)} \beta^{i-j+2s} + \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r}. \quad (4.2)$$

Na expressão 4.2 acima, q pode ser qualquer número inteiro desde que fixemos a notação $\binom{p}{q} = 0$, se $p < q$ ou se $q < 0$.

Para que possamos caracterizar essas matrizes precisamos da seguinte definição.

Definição 4.0.1. ([6]) *Seja $A = [a_{i,j}]$ uma matriz de ordem n . Dizemos que A é uma matriz centrossimétrica se*

$$a_{i,j} = a_{n+1-i, n+1-j}, \text{ para todo } i, j = 1, \dots, n.$$

Outra forma de definir uma matriz centrossimétrica é usando a matriz contra-diagonal $L = [l_{i,j}]$, definida como $l_{i,j} = \delta_{i, n+1-j}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, onde $\delta_{i,j}$ é o delta de Kronecker. Assim, uma matriz A é centrossimétrica se, e somente se, $AL = LA$ ([6]).

4.1 Matriz centrossimétrica polinomial em duas variáveis

Nesta seção, mostramos que uma matriz que satisfaz (4.2) é centrossimétrica. Fazemos também uma investigação sobre estas matrizes.

Começamos com algumas propriedades de números binomiais. Uma das propriedades mais conhecidas é a relação de Stifel: Para $n \geq k$ e n, k inteiros positivos, temos

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Enunciamos a seguir um resultado mais geral, ao qual chamamos de *relação de Stiffel p -geral*, que nos auxilia na prova de algumas propriedades da matriz (4.2).

Proposição 4.1.1 (Relação de Stiffel p -Geral). *Seja p um inteiro não negativo, então*

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{n-p}{k-(p-i)}. \quad (4.3)$$

Demonstração. Para $p = 0$ temos

$$\sum_{i=0}^0 \binom{p}{i} \binom{n-0}{k-(0-i)} = \binom{n}{k}.$$

Para $p = 1$,

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \binom{n-1}{k-(1-i)} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k},$$

que é a relação de Stiffel. Suponha, por hipótese de indução, que a relação (4.3) é válida para p , isto é,

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{n-p}{k-(p-i)}.$$

Mostremos a validade para $p + 1$. Tomamos

$$\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)}$$

e usemos a relação de Stiffel para $\binom{p+1}{i}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} &= \sum_{i=0}^{p+1} \left(\binom{p}{i-1} + \binom{p}{i} \right) \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p}{i-1} \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} + \sum_{i=0}^{p+1} \binom{p}{i} \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} \binom{p}{i-1} \binom{n-(p+1)}{k-(p-(i-1))} + \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} \\ &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{n-(p+1)}{k-(p-i)} + \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} \\ &= \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \left(\binom{n-(p+1)}{k-(p-i)} + \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} \right). \end{aligned}$$

Da segunda para a terceira linha, usamos o fato de que $\binom{p}{i-1} = 0$ para $i = 0$ e que $\binom{p}{i} = 0$ para $i = p + 1$. Usamos novamente a relação de Stiffel

$$\binom{n-(p+1)}{k-(p-i)} + \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} = \binom{n-p}{k-(p-i)}.$$

Logo,

$$\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i} \binom{n-(p+1)}{k-(p+1-i)} = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} \binom{n-p}{k-(p-i)} = \binom{n}{k}.$$

□

O próximo resultado nos ajuda a caracterizar os elementos da matriz (4.2).

Proposição 4.1.2. *Mostremos que*

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} = 0, & \text{para } j \neq i \\ \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} = -1, & \text{para } j = i \end{cases}.$$

Demonstração. Note que para $j = i$, temos que $\binom{i-r}{i} = 0$, para todo $r > 0$, pois $i - r < i$ para $r > 0$. Portanto,

$$\sum_{r=0}^{i-1} (-1)^{r+1} \binom{i-r}{i} \binom{i}{r} = (-1)^{0+1} \binom{i-0}{i} \binom{i}{0} + \sum_{r=1}^{i-1} (-1)^{r+1} \binom{i-r}{i} \binom{i}{r} = -1.$$

Suponha agora $j \neq i$. Tratamos de dois casos:

Caso 1. Seja $j < i$.

Temos que $j - r < i$ para $r \geq 0$. Portanto, $\binom{j-r}{i} = 0$ para todo $r \geq 0$, o que implica que

$$\sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} = 0.$$

Caso 2. Seja $j > i$.

Temos que

$$\sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} = \sum_{r=0}^{j-i} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r},$$

pois $\binom{j-r}{i} = 0$ para $r > j - i$. Daí, segue que

$$\sum_{r=0}^{j-i} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} = \sum_{r=0}^{j-i} (-1)^{r+1} \frac{j!}{i!r!(j-r-i)!}.$$

Agora, note que se $a_r = (-1)^{r+1} \frac{1}{r!(2t+1-r)!}$ então $a_{2t+1-r} = -a_r$. Se $j - i = 2t + 1$ é ímpar, então

$$\sum_{r=0}^{j-i} \frac{(-1)^{r+1} j!}{i!r!(j-r-i)!} = \frac{j!}{i!} \sum_{r=0}^{2t+1} a_r = \frac{j!}{i!} \left(\sum_{r=0}^t a_r + \sum_{r=t+1}^{2t+1} a_r \right) = \frac{j!}{i!} \left(\sum_{r=0}^t a_r + \sum_{r=0}^t a_{2t+1-r} \right) = 0.$$

Logo

$$\sum_{r=0}^{j-i} (-1)^{r+1} \frac{j!}{i!r!(j-r-i)!} = 0,$$

para $j - i$ ímpar.

Seja $b_r = (-1)^{r+1} \frac{1}{r!(2t-r)!}$. Então, $b_{2t-r} = b_r$. Se $j - i = 2t$ é par, então

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{j-i} (-1)^{r+1} \frac{j!}{i!r!(j-r-i)!} &= \frac{j!}{i!} \sum_{r=0}^{2t} b_r = \frac{j!}{i!} \left(\sum_{r=0}^{t-1} b_r + (-1)^{t+1} \frac{1}{t!t!} + \sum_{r=t+1}^{2t} b_r \right) \\ &= \frac{j!}{i!} \left(\sum_{r=0}^{t-1} b_r + (-1)^{t+1} \frac{1}{t!t!} + \sum_{r=0}^{t-1} b_{2t-r} \right) \\ &= \frac{j!}{i!} \left(2 \sum_{r=0}^{t-1} b_r + (-1)^{t+1} \frac{1}{t!t!} \right). \end{aligned}$$

Assim, basta mostrar que

$$2 \sum_{r=0}^{t-1} b_r = -(-1)^{t+1} \frac{1}{t!t!}.$$

De fato, mostremos que

$$S_n = 2(b_0 + b_1 + \cdots + b_n) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n!t(2t-(n+1))!}.$$

Note que

$$S_0 = (-1) \frac{1}{0!t(2t-1)!} = -\frac{2}{2t(2t-1)!} = -\frac{2}{(2t)!} = 2b_0.$$

Temos ainda que $S_1 = \frac{1}{t(2t-2)!}$. Por outro lado,

$$S_0 + 2b_1 = -\frac{2}{(2t)!} + \frac{2}{(2t-1)!} = -\frac{2}{(2t)!} + \frac{2(2t)}{(2t)(2t-1)!} = \frac{2(2t-1)}{2t(2t-1)!} = \frac{1}{t(2t-2)!} = S_1.$$

Suponha a afirmação verdadeira para $n = k$, isto é

$$S_k = (-1)^{k+1} \frac{1}{k!t(2t-(k+1))!}.$$

Então temos

$$\begin{aligned} S_k + 2b_{k+1} &= (-1)^{k+1} \frac{1}{k!t(2t-(k+1))!} + (-1)^{k+2} \frac{2}{(k+1)!(2t-(k+1))!} \\ &= (-1)^{k+2} \left(\frac{2}{(k+1)!(2t-(k+1))!} - \frac{1}{k!t(2t-(k+1))!} \right) \\ &= (-1)^{k+2} \frac{2t-(k+1)}{(k+1)!t(2t-(k+1))!} \\ &= (-1)^{k+2} \frac{1}{(k+1)!t(2t-(k+2))!} = S_{k+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$2 \sum_{r=0}^{t-1} b_r = S_{t-1} = -(-1)^{t+1} \frac{1}{t!t!}.$$

□

Outra propriedade peculiar da matriz (4.2) diz respeito à soma de qualquer uma de suas colunas.

Proposição 4.1.3. *A soma de todos os elementos de qualquer coluna da matriz (4.2), de ordem $n+1$, é o polinômio $(\alpha + \beta)^n - 1$.*

Demonstração. Temos que a soma da l -ésima coluna da matriz (4.2) é dada por

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\sum_{s=0}^{l-1} \binom{l-1}{s} \binom{n+1-l}{i-l+s} \alpha^{n-(i-l+2s)} \beta^{i-l+2s} + \sum_{r=0}^{l-1} (-1)^{r+1} \binom{l-r}{i} \binom{l}{r} \right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{s=0}^{l-1} \binom{l-1}{s} \binom{n+1-l}{i-l+s} \alpha^{n-(i-l+2s)} \beta^{i-l+2s} - 1,$$

dado que

$$\begin{cases} \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} = 0, & \text{para } j \neq i \\ \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} = -1, & \text{para } j = i \end{cases}$$

então $\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{r=0}^{l-1} (-1)^{r+1} \binom{l-r}{i} \binom{l}{r} = -1$, pela Proposição 4.1.2. Desejamos saber qual é o coeficiente de $\alpha^{n-v} \beta^v$, para cada $v = 0, \dots, n$. Assim, temos que $i - l + 2s = v$ o que implica $i = v + l - 2s$. Se $s = 0$ então $i = v + l$ e, daí,

$$\sum_{i=1}^0 \binom{l-1}{s} \binom{n-l+1}{v+l-(l-s)} \alpha^{n-(v+l-l+2s)} \beta^{v+l-l+2s} = \binom{l-1}{0} \binom{n-l+1}{v} \alpha^{n-v} \beta^v.$$

Se $s = 1$ então $i = v + l - 2$ e, assim,

$$\sum_{i=1}^1 \binom{l-1}{s} \binom{n-l+1}{v+l-2-(l-s)} \alpha^{n-(v+l-2-l+2s)} \beta^{v+l-2-l+2s} =$$

$$\binom{l-1}{1} \binom{n-l+1}{v-1} \alpha^{n-v} \beta^v.$$

Se $s = 2$ então $i = v + l - 4$ e, daí,

$$\sum_{i=1}^2 \binom{l-1}{s} \binom{n-l+1}{v+l-4-(l-s)} \alpha^{n-(v+l-4-l+2s)} \beta^{v+l-4-l+2s} =$$

$$\binom{l-1}{2} \binom{n-l+1}{v-1} \alpha^{n-v} \beta^v.$$

⋮

Se $s = l - 2$ então $i = v - l + 4$ e, portanto,

$$\sum_{i=1}^{l-2} \binom{l-1}{s} \binom{n-l+1}{v-l+4-(l-s)} \alpha^{n-(v-l+4-l+2s)} \beta^{v-l+4-l+2s} =$$

$$\binom{l-1}{l-2} \binom{n-l+1}{v-l+2} \alpha^{n-v} \beta^v.$$

Se $s = l - 1$ então $i = v - l + 2$ e, daí,

$$\sum_{l=1}^{l-1} \binom{l-1}{s} \binom{n-l+1}{v-l+2-(l-s)} \alpha^{n-(v-l+2-l+2s)} \beta^{v-l+2-l+2s} =$$

$$\binom{l-1}{l-1} \binom{n-l+1}{v-l+1} \alpha^{n-v} \beta^v.$$

Portanto, o coeficiente de $\alpha^{n-v} \beta^v$ é dado por

$$\left(\binom{l-1}{0} \binom{n-l+1}{v} + \binom{l-1}{1} \binom{n-l+1}{v-1} + \cdots + \binom{l-1}{l-1} \binom{n-l+1}{v-l+1} \right) \alpha^{n-v} \beta^v =$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} \binom{n-l+1}{v-i} \alpha^{n-v} \beta^v = \sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{l-1-i} \binom{n-l+1}{v-(l-1-i)} \alpha^{n-v} \beta^v =$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} \binom{l-1}{i} \binom{n-l+1}{v-(l-1-i)} \alpha^{n-v} \beta^v = \binom{n}{v} \alpha^{n-v} \beta^v,$$

sendo a última igualdade obtida pela relação de Stiffel p -Geral (4.3). Tomemos a expressão abaixo e substituimos $i = v + l - 2s$. Note que $0 \leq i - l + 2s \leq n$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{s=0}^{l-1} \binom{l-1}{s} \binom{n+1-l}{i-l+s} \alpha^{n-(i-l+2s)} \beta^{i-l+2s} - 1 =$$

$$\sum_{v=0}^n \sum_{s=0}^{l-1} \binom{l-1}{s} \binom{n+1-l}{v+l-2s-l+s} \alpha^{n-(v+l-2s-l+2s)} \beta^{v+l-2s-l+2s} - 1 =$$

$$\sum_{v=0}^n \sum_{s=0}^{l-1} \binom{l-1}{s} \binom{n+1-l}{v-s} \alpha^{n-v} \beta^v - 1 = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \alpha^{n-v} \beta^v - 1 = (\alpha + \beta)^n - 1.$$

Na igualdade acima fazemos apenas um rearranjo agrupando os termos que têm o mesmo monômio $\alpha^{n-v} \beta^v$. $\square$

A seguir apresentamos um dos principais resultados para a classe de matrizes (4.2).

Proposição 4.1.4. *A matriz definida em (4.2), de ordem $n+1$, é centrossimétrica. Isto é,*

$$a_{i,j} = a_{n+2-i,n+2-j}.$$

Demonstração. É suficiente mostrar a validade da igualdade $a_{i,j} = a_{n+2-i,n+2-j}$ para $j \leq i$. Usando a fórmula em (4.2), temos que

$$a_{n+2-i,n+2-j} = \sum_{s=0}^{n+1-j} \binom{n+1-j}{s} \binom{j-1}{j-i+s} \alpha^{n-(j-i+2s)} \beta^{j-i+2s}$$

$$+ \sum_{r=0}^{n+1-j} (-1)^{r+1} \binom{n+2-j-r}{n+2-i} \binom{n+2-j}{r}.$$

Para que

$$\binom{n+1-j}{s} \binom{j-1}{j-i+s} \neq 0,$$

devemos ter que $j - i + s \leq j - 1 \Rightarrow s \leq i - 1$. Portanto, $s = \min\{i - 1, n + 1 - j\}$. Temos ainda que $j - i + s \geq 0 \Rightarrow s \geq i - j$. Assim, $s = \max\{0, i - j\}$. Se tomarmos $j < i$ temos que $s \geq i - j$. Portanto,

$$\begin{aligned} a_{n+2-i, n+2-j} &= \sum_{s=0}^{\min\{i-1, n+1-j\}} \binom{n+1-j}{i-j+s} \binom{j-1}{s} \alpha^{n-(j-i+2s)} \beta^{j-i+2s} \\ &+ \sum_{r=0}^{n+1-j} (-1)^{r+1} \binom{n+2-j-r}{n+2-i} \binom{n+2-j}{r} \\ &= \sum_{s=0}^{\min\{i-1, n+1-j\}} \binom{n+1-j}{i-j+s} \binom{j-1}{s} \alpha^{n-(j-i+2s)} \beta^{j-i+2s}, \end{aligned}$$

pois $\sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} = 0$ para $j < i$. Além disso, para que

$$\binom{n+1-j}{i-j+s} \binom{j-1}{s} \neq 0,$$

devemos ter que $n+1-j \leq i-j+s \Rightarrow s \leq n+1-i$ e ainda que $s \leq j-1$ o que implica que $s \leq \min\{j-1, n+1-i\}$. Comparando com $a_{i,j}$ vemos que

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \sum_{s=0}^{j-1} \binom{j-1}{s} \binom{n-j+1}{i-j+s} \alpha^{n-(i-j+2s)} \beta^{i-j+2s} + \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \binom{j-r}{i} \binom{j}{r} \\ &= \sum_{s=0}^{\min\{j-1, n+1-i\}} \binom{j-1}{s} \binom{n-j+1}{i-j+s} \alpha^{n-(i-j+2s)} \beta^{i-j+2s}, \end{aligned}$$

pois, como $j < i$, então $j - r < i$, para $r = 1, \dots, j-1$. Portanto, $a_{i,j} = a_{n+2-i, n+2-j}$ para $j < i$. Se $i = j$, então

$$\begin{aligned} a_{n+2-i, n+2-i} &= \sum_{s=0}^{n+1-i} \binom{n+1-i}{s} \binom{i-1}{s} \alpha^{n-2s} \beta^{2s} \\ &+ \sum_{r=0}^{n+1-i} (-1)^{r+1} \binom{n+2-i-r}{n+2-i} \binom{n+2-i}{r}. \end{aligned}$$

Para que

$$\binom{n+1-i}{s} \binom{i-1}{s} \neq 0,$$

devemos ter que $s \leq n+1-i$ e $s \leq i-1$ o que implica que $s \leq \min\{i-1, n+1-i\}$. Também, para que

$$\binom{n+2-i-r}{n+2-i} \neq 0$$

basta que $n+2-i \leq n+2-i-r$ o que implica que $r = 0$. Assim,

$$a_{n+2-i, n+2-i} = \sum_{s=0}^{n+1-i} \binom{n+1-i}{s} \binom{i-1}{s} \alpha^{n-2s} \beta^{2s} - 1.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \sum_{s=0}^{n+1-i} \binom{i-1}{s} \binom{n+1-i}{s} \alpha^{n-2s} \beta^{2s} + \sum_{r=0}^0 (-1)^{r+1} \binom{i-r}{i} \binom{i}{r} \\ &= \sum_{s=0}^{n+1-i} \binom{n+1-i}{s} \binom{i-1}{s} \alpha^{n-2s} \beta^{2s} - 1. \end{aligned}$$

Logo, $a_{i,i} = a_{n+2-i, n+2-i}$. □

Encontramos uma vasta biblioteca de artigos sobre matrizes centrossimétricas, onde destacamos [6], [12], [18], [28], [36], [40] e [43] que abordam algumas propriedades das matrizes centrossimétricas. Em particular, [6], [28] e [43] estuda os autovalores e autovetores das matrizes centrossimétricas, [12] e [40] estabelecem algoritmos para a solução de sistemas lineares centrossimétricos, [18] disserta sobre a inversa de matrizes centrossimétricas, [36] apresenta as chamadas matrizes centrossimétricas generalizadas. No entanto, em nossa pesquisa, nada encontramos sobre matrizes centrossimétricas com entradas polinomiais.

4.2 A base de Hilbert de $\mathcal{P}(\Gamma^\theta)$

Para a matriz $R_h(\theta)$ em (4.1), consideramos o problema de encontrar uma base para o anel dos polinômios invariantes sob a ação em $\mathbb{R}^{1+1}$ do grupo $\Gamma^\theta = \langle R_h(\theta) \rangle$. O que apresentamos na seção anterior fez parte de um esforço para atingir este objetivo.

A matriz $[a_{i,j}]$, de ordem $n+1$, com $a_{i,j}$ como em (4.2) tem um sistema linear associado cuja solução $(a_0, \dots, a_n)$ deixa a função polinomial homogênea $f_n(x, y) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} y^i$ Γ^θ -invariante.

Considere, como exemplo, o grupo gerado por

$$R_h(\ln(2)) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

A Tabela 3 (feita com ajuda do MAPLE) mostra os polinômios homogêneos invariantes até o grau 10, pela ação de $R_h(\ln(2))$ em $\mathbb{R}^{1+1}$ (as matrizes A_i , $i = 1, \dots, 10$, da Tabela 3, são descritas no Apêndice A).

Depois de alguns cálculos e de dezenas de exemplos usando o software MAPLE, elaboramos as seguintes conjecturas a respeito da ação do grupo Γ^θ no espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1+1}$.

Conjectura 4.2.1. *O determinante de uma matriz $[a_{i,j}]$ de ordem par com $a_{i,j}$ como em (4.2) é não nulo.*

Por outro lado, estudamos o determinante da matriz $[a_{i,j}]$ de ordem ímpar, com $a_{i,j}$ como em (4.2):

Tabela 3 – Polinômios $\Gamma^{\ln(2)}$ -invariantes

Grau polinômio	Matriz	Determinante	a_i	Polinômio invariante
1	A_1	$-\frac{1}{2}$	$a_1 = a_2 = 0$	-
2	A_2	0	$a_3 = -a_1, a_2 = 0$	$a_1(x^2 - y^2)$
3	A_3	$\frac{49}{16}$	$a_i = 0, i = 1, \dots, 4$	-
4	A_4	0	$a_3 = -2a_1, a_5 = a_1,$ $a_i = 0, i = 2, 4$	$a_1(x^2 - y^2)^2$
5	A_5	$-\frac{47089}{512}$	$a_i = 0, i = 1, \dots, 6$	-
6	A_6	0	$a_3 = -3a_1, a_5 = 3a_1, a_7 = -a_1,$ $a_i = 0, i = 2, 4, 6$	$a_1(x^2 - y^2)^3$
7	A_7	$\frac{759498481}{65536}$	$a_i = 0, i = 1, \dots, 8$	-
8	A_8	0	$a_3 = -4a_1, a_5 = 6a_1, a_7 = -4a_1, a_9 = a_1,$ $a_i = 0, i = 2, 4, 6, 8$	$a_1(x^2 - y^2)^4$
9	A_9	$\frac{198321002857201}{33554432}$	$a_i = 0, i = 1, \dots, 10$	-
10	A_{10}	0	$a_3 = -5a_1, a_5 = 10a_1, a_7 = -10a_1,$ $a_9 = 5a_1, a_{11} = -a_1, a_i = 0, i = 2, 4, 6, 8$	$a_1(x^2 - y^2)^5$

Conjectura 4.2.2 (Dusân Pagon). *Seja $v_0, v_1, \dots, v_{2k}$ as linhas da matriz $[a_{i,j}]$ de ordem ímpar, com $a_{i,j}$ como em (4.2). Denote cada i , $0 \leq i \leq k$ por*

$$c_i = c_i(k) = (-1)^i \frac{(2i-1)!!(2k-2i-1)!!}{(2k-1)!!},$$

onde $(-1)!! = 1!! = 1$ e $(2i+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2i+1)$, para todos os inteiros positivos i (chamado de fatorial ímpar). Então a seguinte combinação linear de todas as linhas ímpares de $[a_{i,j}]$,

$$\sum_{i=0}^k c_i(k) v_{2i},$$

é igual ao vetor nulo (de comprimento $2k+1$).

Como consequência da Conjectura 4.2.2, temos:

Conjectura 4.2.3. *O determinante de uma matriz $[a_{i,j}]$ de ordem ímpar, com $a_{i,j}$ como em (4.2), é nulo.*

Além disso, conjecturamos também as soluções do sistema linear associado à matriz $[a_{i,j}]$ de ordem ímpar:

Conjectura 4.2.4. *Considere a matriz $[a_{i,j}]$ de ordem $n+1$ ímpar, com $a_{i,j}$ como em (4.2), como a matriz dos coeficientes de um sistema linear. Então o vetor*

$$\mathbf{x} = b(x_1, \dots, x_{n+1}), \text{ onde } b \in \mathbb{R} \text{ e } \begin{cases} x_{2k} = 0, & \text{para } k = 1, \dots, \frac{n}{2} \\ x_{2k-1} = (-1)^{k-1} \binom{\frac{n}{2}}{k-1}, & \text{para } k = 1, \dots, \frac{n}{2} + 1 \end{cases},$$

é uma solução geral do sistema linear associado.

Caso a ordem da matriz $[a_{i,j}]$ seja par, com $a_{i,j}$ como em (4.2), temos como consequência da Conjectura 4.2.1 que a solução do sistema de equações associado é trivial. Isto implica na não existência de polinômios homogêneos invariantes de grau ímpar. Caso $[a_{i,j}]$ tenha ordem $n + 1$ ímpar temos, pela Conjectura 4.2.4, que o polinômio homogêneo de grau n dado por $b(x^2 - y^2)^{\frac{n}{2}}$, com $b \in \mathbb{R}$, é Γ^θ -invariante. Portanto, como consequência das Conjecturas 4.2.1 e 4.2.4, temos:

Conjectura 4.2.5. *O conjunto $\{x^2 - y^2\}$ é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\Gamma^\theta)$.*

Observação 4.2.6. *Temos inúmeros exemplos que dão evidências da validade das conjecturas desta seção, sem contra-exemplos até o momento. Vários caminhos e estratégias foram usados para demonstrar a validade destes resultados. Compartilhamos estas conjecturas com o Prof. Dr. Dusân Pagon, da University of Maribor, Eslovênia. A Conjectura 4.2.2 é fruto desta parceria. Esperamos que, como trabalho futuro, possamos demonstrar estes resultados provendo assim uma importante propriedade sobre o anel dos polinômios invariantes sob a ação do subgrupo Γ^θ de Lorentz. Também, temos planos para continuar o estudo dessa classe de matrizes centrosimétricas polinomiais, uma vez que uma aplicação em teoria invariante pode ser estabelecida, como sugere este capítulo, e dada a importância das matrizes centrossimétricas em outras áreas como estatística ([8]) e engenharia ([9], [10]).*

APLICAÇÕES EQUIVARIANTES PELA AÇÃO DE UM SUBGRUPO DE LORENTZ

Neste capítulo, descrevemos a cadeia de isotropia de $O(1, 1)$ e de $O(2, 1)$. Além disso, supondo Γ um subgrupo de Lorentz agindo em subespaços Γ -invariantes V e W e conhecendo os polinômios homogêneos Γ -invariantes $V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ mostramos como calcular as aplicações Γ -equivariantes $V \rightarrow W$ e uma base para o módulo das aplicações Γ -equivariantes, a partir da base de Hilbert do anel $\mathcal{P}(\Gamma, V \times W)$, para a ação do cartesiano definida como a ação diagonal.

Uma motivação para o que fazemos neste capítulo é sua aplicação nos sistemas dinâmicos. Mais especificamente, considere um sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\dot{x} = g(x), \quad (5.1)$$

onde $g : (V, 0) \rightarrow V$ é um germe de aplicação Γ -equivariante suave na origem, com o grupo Γ agindo linearmente em um espaço vetorial V . Na Definição 1.1.14, vimos que uma aplicação $g : V \rightarrow V$ é Γ -equivariante se

$$g(\gamma x) = \gamma g(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$. Neste caso, uma condição suficiente para um campo equivariante é que para toda solução $x(t)$, $\gamma x(t)$ é também uma solução, para todo $\gamma \in \Gamma$. Assim, o campo equivariante (5.1) é definido como uma EDO com simetrias. Sistemas dinâmicos equivariantes são sistemas dinâmicos que têm simetrias.

Uma propriedade importante de sistemas dinâmicos equivariantes é que os subespaços de pontos fixos, definido no Capítulo 2, são invariantes pela dinâmica, isto é, se Σ é um subgrupo de Γ então ([16])

$$g(\text{Fix}(\Sigma)) \subset \text{Fix}(\Sigma).$$

Um problema de bifurcação com grupo de simetria Γ de (5.1) é definido como um germe $g : (V, 0) \times \mathbb{R} \rightarrow V$ Γ -equivariante suave na origem, a um parâmetro no ponto de equilíbrio, satisfazendo $g(0, 0) = 0$ e $(dg)_{0,0} = 0$. Em problemas de bifurcação, genericamente, existem ramos de soluções em subespaços de pontos fixos unidimensionais. Este resultado é conhecido como o lema dos ramos equivariantes ([17]). Existem centenas de trabalhos que tratam de teoria de bifurcação para campos equivariantes, quando o grupo Γ é compacto e um subgrupo de $O(n)$. Desta forma, estamos interessados na teoria de bifurcação para campos equivariantes, no caso de subgrupos do grupo de Lorentz $O(n, 1)$. Motivados por estes estudos, apresentamos neste capítulo alguns aspectos da teoria invariante e equivariante, com as isotropias e o subespaço de pontos fixos sob a ação de subgrupos de Lorentz.

5.1 Cadeia de isotropia de $O(1, 1)$ e $O(2, 1)$

Estudamos, nesta seção, os subgrupos de isotropia dos grupo de Lorentz $O(1, 1)$ e $O(2, 1)$ e a cadeia de isotropia.

Definição 5.1.1. *Seja o grupo Γ agindo linearmente num espaço vetorial V . O subgrupo de isotropia de x em V é dado por*

$$\Sigma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}.$$

Definimos a órbita de $x \in V$ pela ação de Γ como

$$\Gamma_x = \{\gamma x : \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Elementos numa mesma órbita pela ação de Γ têm subgrupos de isotropia conjugados

$$\Sigma_{\gamma x} = \gamma \Sigma_x \gamma^{-1}.$$

Definição 5.1.2 ([16]). *Seja $H = \{H_i\}$ e $K = \{K_j\}$ duas classes conjugadas de subgrupos de isotropia de Γ . Defina uma ordem parcial $\preceq$ no conjunto de tais classes conjugadas por*

$$H \preceq K \iff H_i \subseteq K_j,$$

para algum par H_i e K_j . A cadeia de isotropia de Γ , nesta ação em $\mathbb{R}^n$, é o conjunto de todas as classes conjugadas dos subgrupos de isotropia, parcialmente ordenados por $\preceq$.

5.1.1 Cadeia de isotropia de $O(1, 1)$

Começamos observando que as involuções em $O(1, 1)$ são conjugadas a

$$\Lambda_2^p = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \Lambda_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pela Proposição 3.1.3.

Tabela 4 – Subgrupos de isotropia de $O(1, 1)$.

Subgrupo de Isotropia	Subespaço de pontos fixos	Dimensão
$O(1, 1)$	$\{(0, 0)\}$	0
$\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t)$	$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^{1+1} : x \neq 0\}$	1
$\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^p)$	$\{(0, y) \in \mathbb{R}^{1+1} : y \neq 0\}$	1
$\{I_2\}$	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{1+1} : x, y \neq 0\}$	2

Figura 7 – Cadeia de Isotropia de $O(1, 1)$.

Ainda, as rotações de Lorentz são da forma

$$R_h(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}$$

ou $-R_h(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Portanto, qualquer elemento de $O(1, 1)$ é uma rotação $R_h(\theta)$ ou $-R_h(\theta)$ ou é conjugado a Λ_2^p ou Λ_2^t .

Considere os subgrupos $\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^p)$, $\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t)$. Obviamente, estes dois grupos não são conjugados. Os subespaços de pontos fixos para cada um desses subgrupos de Lorentz são:

$$\text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^p)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}, \text{Fix}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}.$$

Um vetor da forma $(x, 0) \in \mathbb{R}^{1+1}$, com $x \neq 0$, tem $\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t)$ como subgrupo de isotropia. Um vetor da forma $(0, y) \in \mathbb{R}^{1+1}$, com $y \neq 0$, tem $\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^p)$ como subgrupo de isotropia. Um vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^{1+1}$, com $x, y \neq 0$, tem subgrupo de isotropia trivial. E, obviamente, o subgrupo de isotropia da origem é todo o grupo $O(1, 1)$.

A Tabela 4 mostra os subgrupos de isotropia de $O(1, 1)$ e seus respectivos subespaços de pontos fixos e a Figura 7 mostra a cadeia de isotropia de $O(1, 1)$.

5.1.2 Cadeia de isotropia de $O(2, 1)$

Pela Proposição 3.2.1, as involuções em $O(2, 1)$ são as matrizes $S_h^-(\phi, \theta, \phi)$, $S_h^+(\phi, \theta, \phi)$, $R_h^+(\pi - \phi, \theta, \phi)$ e $R_h^-(\pi - \phi, \theta, \phi)$, dadas nas Proposições 2.4.7, 2.4.12 e 2.4.14. Estas matrizes

são conjugadas, respectivamente, às matrizes

$$\Lambda_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \Lambda_3^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, -\Lambda_3^t, -\Lambda_3^p.$$

pela Proposição 3.2.3.

Começamos encontrando todas as matrizes de Lorentz que fixam o vetor $v_x = (x, 0, 0)$, com $x \neq 0$. Sejam $R_h^+(\varphi, \theta, \phi)$, $R_h^-(\varphi, \theta, \phi)$, $S_h^+(\varphi, \theta, \phi)$ e $S_h^-(\varphi, \theta, \phi)$ como definidas nas Proposições 2.4.7, 2.4.12 e 2.4.14. Temos que $R_h^+(\varphi, \theta, \phi)v_x = v_x$ implica no sistema

$$\begin{cases} \cos(\varphi)\cos(\phi) - \sin(\varphi)\cosh(\theta)\sin(\phi) = 1 \\ \sin(\varphi)\cos(\phi) + \cos(\varphi)\cosh(\theta)\sin(\phi) = 0 \\ \sin(\phi)\sinh(\theta) = 0 \end{cases}.$$

Supondo $\theta \neq 0$ temos que $\varphi = \phi = 0$ ou $\varphi = \phi = \pi$. Em qualquer dos casos, temos

$$R_h^+(0, \theta, 0) = R_h^+(\pi, -\theta, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_h(\theta) \end{pmatrix}.$$

Se $\theta = 0$, temos $\varphi = -\phi$, e então $R_h^+(-\phi, 0, \phi)$ é a matriz identidade. No caso em que $R_h^-(\varphi, \theta, \phi)v_x = v_x$, temos um sistema semelhante

$$\begin{cases} \cos(\varphi)\cos(\phi) + \sin(\varphi)\cosh(\theta)\sin(\phi) = 1 \\ \sin(\varphi)\cos(\phi) - \cos(\varphi)\cosh(\theta)\sin(\phi) = 0 \\ -\sin(\phi)\sinh(\theta) = 0 \end{cases},$$

cujas soluções são $\varphi = \phi = 0$ ou $\varphi = \phi = \pi$ se $\theta \neq 0$. Em qualquer dos casos, temos

$$R_h^-(0, \theta, 0) = R_h^-(\pi, -\theta, \pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R_h(\theta) \end{pmatrix}.$$

Se $\theta = 0$, temos $\varphi = \phi$, e então $R_h^-(\phi, 0, \phi) = \Lambda_3^p$. Nos casos $S_h^+(\varphi, \theta, \phi)v_x = v_x$ e $S_h^-(\varphi, \theta, \phi)v_x = v_x$ chegamos, a menos de conjugação, à solução Λ_3^t e Λ_3^p . Portanto, o subgrupo de isotropia de v_x é dado por

$$\Sigma_{v_x} = \langle R_h^+(0, \theta, 0), R_h^-(0, \theta, 0), \Lambda_3^p, \Lambda_3^t \rangle.$$

De modo similar, calculamos as matrizes de Lorentz que fixam o vetor $v_y = (0, y, 0)$, com $y \neq 0$. Para $R_h^+(\varphi, \theta, \phi)v_y = v_y$ temos o sistema associado

$$\begin{cases} -\cos(\varphi)\sin(\phi) - \sin(\varphi)\cosh(\theta)\cos(\phi) = 0 \\ -\sin(\varphi)\sin(\phi) + \cos(\varphi)\cosh(\theta)\cos(\phi) = 1 \\ \cos(\phi)\sinh(\theta) = 0 \end{cases}.$$

Se $\theta \neq 0$, temos $\varphi = -\phi = -\frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\phi = \frac{\pi}{2}$. Em qualquer dos casos, temos

$$R_h^+ \left(-\frac{\pi}{2}, \theta, \frac{\pi}{2} \right) = R_h^+ \left(\frac{\pi}{2}, -\theta, -\frac{\pi}{2} \right) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & 0 & \sinh(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(\theta) & 0 & \cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$

Se $\theta = 0$, temos $\varphi = -\phi$, e então $R_h^+(-\phi, 0, \phi)$ é a matriz identidade. No caso em que $R_h^-(\varphi, \theta, \phi)v_y = v_y$, temos o sistema

$$\begin{cases} -\cos(\varphi) \sin(\phi) + \sin(\varphi) \cosh(\theta) \cos(\phi) = 0 \\ -\sin(\varphi) \sin(\phi) - \cos(\varphi) \cosh(\theta) \cos(\phi) = 1 \\ \cos(\phi) \sinh(\theta) = 0 \end{cases},$$

com solução $\varphi = -\phi = -\frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = -\phi = \frac{\pi}{2}$ se $\theta \neq 0$ e, neste caso,

$$R_h^- \left(-\frac{\pi}{2}, \theta, \frac{\pi}{2} \right) = R_h^- \left(\frac{\pi}{2}, -\theta, -\frac{\pi}{2} \right) = \begin{pmatrix} -\cosh(\theta) & 0 & -\sinh(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh(\theta) & 0 & -\cosh(\theta) \end{pmatrix}.$$

Se $\theta = 0$, temos $\varphi = \pi + \phi$, e então $R_h^-(\pi + \phi, 0, \phi) = -\Lambda_3^p$. Analogamente para $S_h^+(\varphi, \theta, \phi)v_x = v_x$ e $S_h^-(\varphi, \theta, \phi)v_x = v_x$ chegamos, a menos de conjugação, à solução Λ_3^t e $-\Lambda_3^{pt}$. Portanto, o subgrupo de isotropia de v_y é dado por

$$\Sigma_{v_y} = \left\langle R_h^+ \left(-\frac{\pi}{2}, \theta, \frac{\pi}{2} \right), R_h^- \left(-\frac{\pi}{2}, \theta, \frac{\pi}{2} \right), \Lambda_3^t, -\Lambda_3^{pt} \right\rangle.$$

Temos que Λ_3^p é conjugada a $-\Lambda_3^{pt}$, $R_h^+(0, \theta, 0)$ é conjugada a $R_h^+(-\frac{\pi}{2}, \theta, \frac{\pi}{2})$ e $R_h^-(0, \theta, 0)$ é conjugada a $R_h^-(-\frac{\pi}{2}, \theta, \frac{\pi}{2})$, com conjugação dada pela permutação

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os subgrupos de isotropia Σ_{v_x} e Σ_{v_y} são conjugados.

Do mesmo modo, calculamos o subgrupo de isotropia do vetor $v_z = (0, 0, z)$, com $z \neq 0$:

$$\Sigma_{v_z} = \langle R_h^+(\varphi, 0, \phi), -\Lambda_3^t, \Lambda_3^p \rangle.$$

Os subgrupos $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)$ e $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^t)$ são subgrupos de isotropia de vetores $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : y = 0\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1} : z = 0\}$, respectivamente.

Vetores do tipo $(x, 0, z) \in \mathbb{R}^{2+1}$, com $x, z \neq 0$, tem o subgrupo $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)$ como subgrupo de isotropia.

Vetores do tipo $(x, y, 0) \in \mathbb{R}^{2+1}$, com $x, y \neq 0$, tem $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^t)$ como subgrupo de isotropia.

Para vetores do tipo $(0, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1}$, com $y, z \neq 0$, o subgrupo $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^{pt})$ é o subgrupo de isotropia. Observe, porém, que Λ_3^p é conjugada a $-\Lambda_3^{pt}$. Portanto, o subgrupo $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^{pt})$ é conjugado ao subgrupo $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)$.

O subgrupo $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^t)$, tratado no Capítulo 3, não é subgrupo de isotropia, pois $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^t) \subset \Sigma_{v_z}$. Como $-\Lambda_3^p$ é conjugada a $\Lambda_3^{pt} \in \Sigma_{v_x}$ então o subgrupo $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^p)$ é conjugado ao subgrupo $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^{pt}) \subset \Sigma_{v_x}$. Logo, $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^p)$ não é um subgrupo de isotropia.

Vetores do tipo

$$v^+(x, \varphi, \theta, \phi) = \left(x, -\frac{\sin(\phi) - \sin(\varphi)}{\cos(\phi) + \cos(\varphi)}x, -\frac{(\cos(\varphi)\sin(\phi) + \sin(\varphi)\cos(\phi))\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta) - 1)(\cos(\phi) + \cos(\varphi))}x \right),$$

dado na Proposição 2.4.7, tem como subgrupo de isotropia o subgrupo $\Sigma_{v^+(x, \varphi, \theta, \phi)} = \langle R_h^+(\varphi, \theta, \phi) \rangle$, para φ, θ, ϕ fixados. E vetores do tipo

$$v^-(x, \varphi, \theta, \phi) = \left(x, -\frac{\sin(\phi) - \sin(\varphi)}{\cos(\phi) + \cos(\varphi)}x, -\frac{(\cos(\varphi)\sin(\phi) + \sin(\varphi)\cos(\phi))\sinh(\theta)}{(\cosh(\theta) + 1)(\cos(\phi) + \cos(\varphi))}x \right)$$

dado na Proposição 2.4.12, tem como subgrupo de isotropia o subgrupo $\Sigma_{v^-(x, \varphi, \theta, \phi)} = \langle R_h^-(\varphi, \theta, \phi) \rangle$, para φ, θ, ϕ fixados.

O subgrupo de Lorentz $\langle R_h^+(\varphi, \theta, \phi), R_h^-(\varphi, \theta, \phi) \rangle$ deixa invariante somente a origem. Pela Proposição 2.4.14 o subgrupo gerado pela matriz $S_h^+(\varphi, \theta, \phi)$, para $\varphi \neq -\phi$, deixa invariante somente a origem. Se $\varphi = -\phi$ então $S_h^+(-\phi, \theta, \phi)$ é uma involução de Lorentz, conforme a Proposição 3.2.1. Usamos o mesmo argumento para $S_h^-(\varphi, \theta, \phi)$, com $\varphi \neq -\phi$.

Para um vetor qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^{2+1}$, com $x, y, z \neq 0$, $(x, y, z) \neq v^+(x, \varphi, \theta, \phi)$ e $(x, y, z) \neq v^-(x, \varphi, \theta, \phi)$, um cálculo direto mostra que a matriz identidade é a única que deixa um vetor (x, y, z) , com $x, y, z \neq 0$, invariante.

Nesta subseção, fizemos o estudo de todas as matrizes em $O(2, 1)$, pois qualquer matriz em $O(2, 1)$ pode ser representada por uma das matrizes $R_h^+(\varphi, \theta, \phi)$, $R_h^-(\varphi, \theta, \phi)$, $S_h^+(\varphi, \theta, \phi)$, $S_h^-(\varphi, \theta, \phi)$. Portanto, as retas dada em (2.18), (2.20) e os eixos coordenados x e y de $\mathbb{R}^{2+1}$ são todas as retas invariantes pela ação de algum subgrupo de isotropia de $O(2, 1)$, a menos de conjugação.

A Tabela 5 mostra os subgrupos de isotropia de $O(2, 1)$, seus subespaços de pontos fixos e a respectiva dimensão. A Figura 8 mostra a cadeia de isotropia de $O(2, 1)$.

5.2 Aplicações equivariantes

Nesta seção, descrevemos o cálculo de uma aplicação Γ -equivariante, quando Γ é um subgrupo de Lorentz.

Sabe-se que se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante pela ação de um subgrupo de $O(n)$, então o gradiente $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação equivariante pela ação deste subgrupo. No caso do grupo de Lorentz $O(n, 1)$, temos:

Tabela 5 – Subgrupos de isotropia de $O(2, 1)$.

Subgrupo de Isotropia	Subespaço de pontos fixos	Dimensão
$O(2, 1)$	$\{(0, 0, 0)\}$	0
$\Sigma_{v^+}(x, \varphi, \theta, \phi)$	$\left\{ \left(x, -\frac{\sin(\phi) - \sin(\varphi)}{\cos(\phi) + \cos(\varphi)}x, -\frac{(\cos(\varphi) \sin(\phi) + \sin(\varphi) \cos(\phi)) \sinh(\theta)}{(\cosh(\theta) - 1)(\cos(\phi) + \cos(\varphi))}x \right) : x \neq 0 \right\}$	1
$\Sigma_{v^-}(x, \varphi, \theta, \phi)$	$\left\{ \left(x, -\frac{\sin(\phi) - \sin(\varphi)}{\cos(\phi) + \cos(\varphi)}x, \frac{(\cos(\varphi) \sin(\phi) + \sin(\varphi) \cos(\phi)) \sinh(\theta)}{(\cosh(\theta) - 1)(\cos(\phi) + \cos(\varphi))}x \right) : x \neq 0 \right\}$	1
$\langle R_h^+(0, \theta, 0), R_h^-(0, \theta, 0), \Lambda_3^p, \Lambda_3^t \rangle$	$\{(x, 0, 0) : x \neq 0\}$	1
$\langle R_h^+(\varphi, 0, \phi), -\Lambda_3^t, \Lambda_3^p \rangle$	$\{(0, 0, z) : z \neq 0\}$	1
$\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)$	$\{(x, 0, z) : x, z \neq 0\}$	2
$\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^t)$	$\{(x, y, 0) : x, y \neq 0\}$	2
$\{I_3\}$	$\{(x, y, z) : x, y, z \neq 0, (x, y, z) \neq v^+(x, \varphi, \theta, \phi) \text{ e } (x, y, z) \neq v^-(x, \varphi, \theta, \phi)\}$	3

Figura 8 – Cadeia de Isotropia de $O(2, 1)$.

Proposição 5.2.1. *Sejam Γ subgrupo de $O(n, 1)$ e $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -invariante. Então $J\nabla f$ é uma aplicação Γ -equivariante.*

Demonstração. Suponha f uma função Γ -invariante, isto é, $f(\gamma x) = f(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Então temos que $D(f(\gamma x))\gamma = D(f(x))$, pela regra da cadeia, onde $D(f(x))$ denota a matriz jacobiana de f em x . O que implica que

$$D(f(\gamma x))\gamma J\gamma^t J = D(f(x))J\gamma^t J,$$

ou seja, $D(f(\gamma x)) = D(f(x))J\gamma^t J$. Temos $D(f(x)) = (\nabla f(x))^t$ e, portanto,

$$\begin{aligned} D(f(\gamma x)) &= D(f(x))J\gamma^t J \Rightarrow (\nabla f(\gamma x))^t = (\nabla f(x))^t J\gamma^t J \Rightarrow \\ &\Rightarrow \nabla f(\gamma x) = J\gamma J\nabla f(x) \\ &\Rightarrow J\nabla f(\gamma x) = \gamma J\nabla f(x). \end{aligned}$$

□

O grupo de Lorentz $O(n, 1)$ bem como o grupo de Lorentz especial $SO(n, 1)$ são redutivos ([42]) e assim os respectivos anéis dos polinômios invariantes, $\mathcal{P}(O(n, 1))$ e $\mathcal{P}(SO(n, 1))$,

são finitamente gerados ([11]). Mais geralmente, para Γ um subgrupo de Lorentz agindo em subespaços Γ -invariantes V e W , se o anel dos polinômios invariantes $\mathcal{P}(\Gamma, V \times W)$ possui uma base de Hilbert, considerando a ação diagonal no cartesiano, então é possível calcular os geradores para o módulo das aplicações Γ -equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma, V)$. No teorema a seguir mostramos como podemos fazer isso.

Teorema 5.2.2. *Seja Γ um subgrupo do grupo de Lorentz $O(n, 1)$. Suponha Γ agindo em V e W subespaços Γ -invariantes do espaço de Minkowski. Definimos uma aplicação Γ -equivariante a partir de uma função $V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ Γ -invariante, e vice-versa. Ainda mais, se existe uma base de Hilbert para $\mathcal{P}(\Gamma, V \times W)$, então existe um conjunto finito de polinômios Γ -equivariantes que geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$.*

Demonstração. Suponha que $g : V \rightarrow W$ seja Γ -equivariante e seja $y \in W$. Então $f(x, y) = \langle g(x), y \rangle$ é uma função $V \times W \rightarrow \mathbb{R}$, Γ -invariante, onde a ação de Γ em $V \times W$ é a ação diagonal $\gamma(x, y) = (\gamma x, \gamma y)$. Assim, temos que

$$f(\gamma x, \gamma y) = \langle g(\gamma x), \gamma y \rangle = \langle \gamma g(x), \gamma y \rangle = f(x, y).$$

Reciprocamente, se $V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ é Γ -invariante pela ação diagonal, consideramos

$$g(x) = J(d_y f)_{(x,0)}^t.$$

Temos $f(\gamma x, \gamma y) = f(x, y)$. Derivando f com relação a y em $(x, 0)$, temos

$$(d_y f)_{(\gamma x, 0)} \gamma = (d_y f)_{(x, 0)}.$$

Então,

$$\gamma^t (d_y f)_{(\gamma x, 0)}^t = (d_y f)_{(x, 0)}^t.$$

Logo,

$$\gamma^t Jg(\gamma x) = Jg(x)$$

o que implica que

$$g(\gamma x) = J(\gamma^t)^{-1} Jg(x).$$

Portanto, $g : V \rightarrow W$ é Γ -equivariante pois $J(\gamma^t)^{-1} J = \gamma$. Seja o conjunto $\{u_1, \dots, u_s\}$ uma base de Hilbert para o anel dos polinômios Γ -invariantes $V \times W \rightarrow \mathbb{R}$. Uma função $f \in \mathcal{P}(\Gamma, V \times W)$ é dada por

$$h(u_1(x, y), \dots, u_s(x, y)),$$

para algum $h : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$. Da construção acima, toda $g \in \vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ é da forma

$$g(x) = \sum_{i=1}^s \frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_s)|_{y=0} \cdot J(d_y u_i)_{(x,0)}^t.$$

Como $\frac{\partial h}{\partial u_i}(u_1(x, 0), \dots, u_s(x, 0))$ é Γ -invariante em $\mathcal{P}(\Gamma, V)$ segue que os s Γ -equivariantes

$$J(d_y u_1)_{(x,0)}^t, J(d_y u_2)_{(x,0)}^t, \dots, J(d_y u_s)_{(x,0)}^t$$

geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\Gamma; V, W)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\Gamma, V)$. □

5.2.1 O módulo das aplicações equivariantes por uma involução de $O(1, 1)$

Aplicamos o Teorema 5.2.2 para obter um sistema de geradores para o módulo das aplicações equivariantes por uma involução de Lorentz de $O(1, 1)$. Nas hipóteses do Teorema 5.2.2, considere $V = W = \mathbb{R}^{1+1}$.

Considere a base de Hilbert do anel $\mathcal{P}(\Gamma_{\mathbb{Z}_2}(\Lambda_2^t))$

$$\{x, y^2\},$$

dada na Proposição 3.1.4.

Proposição 5.2.3. *O conjunto*

$$\{(1, 0), (0, y)\}$$

é um sistema de geradores para o módulo das aplicações equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t); \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t))$.

Demonstração. Para $X = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, temos a ação diagonal $\Lambda_2^t X = (\Lambda_2^t(x, y), \Lambda_2^t(z, w))$, que escrevemos da forma

$$\tilde{\Lambda}_2^t X = \begin{pmatrix} \Lambda_2^t & 0 \\ 0 & \Lambda_2^t \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \\ -w \end{pmatrix}.$$

Temos que,

$$\det(I_4 - t \cdot I_4) = (1 - t)^4, \quad \det(I_4 - t \cdot \tilde{\gamma}_3) = (1 - t)^2(1 + t)^2.$$

Assim, a série de Molien, neste caso, é dada por

$$\Phi_{\mathbb{Z}_2(\tilde{\Lambda}_2^t)}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^4} + \frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} \right) = 1 + 2t + 6t^2 + 10t^3 + 19t^4 + 28t^5 + 44t^6 + \dots,$$

Os invariantes de grau 1 e 2 são $f_1 = x, f_2 = z, f_3 = y^2, f_4 = w^2$ e $f_5 = yw$. Existe uma dependência algébrica entre estes invariantes dada pela relação

$$f_5^2 - f_3 f_4.$$

Portanto, a série de Hilbert é calculada como

$$H_{\mathbb{Z}_2(\tilde{\Lambda}_2^t)}(t) = \frac{1 + t^2}{(1 - t)^2(1 - t^2)^2}.$$

Portanto, temos $\Phi_{\mathbb{Z}_2(\tilde{\Lambda}_2^t)}(t) = H_{\mathbb{Z}_2(\tilde{\Lambda}_2^t)}(t)$. Pelo Algoritmo 1.1.13, o conjunto $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t); \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$. Pelo Teorema 5.2.2, temos que as aplicações $g_i(x, y) = J(d_{(z, w)} f_i)_{(x, y, 0, 0)}^t$, para cada $i = 1, \dots, 5$, geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t); \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Temos que g_i é identicamente nulo para $i = 1, 3, 4$, pois f_1 e f_3 não dependem de z e w e, portanto, $(d_{(z, w)} f_i)_{(x, y, 0, 0)} = 0$, para $i = 1, 3$. Também, $d_{(z, w)} f_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2w \end{pmatrix}$; logo $(d_{(z, w)} f_4)_{(x, y, 0, 0)} = 0$. Por outro lado, $d_{(z, w)} f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$. Assim,

$$J(d_{(z, w)} f_2)_{(x, y, 0, 0)}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da mesma forma, como $d_{(z,w)}f_5 = \begin{pmatrix} 0 & y \end{pmatrix}$, então

$$J(d_{(z,w)}f_5)_{(x,y,0,0)}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(1,0), (0,y)\}$ é um sistema de geradores para o módulo das aplicações equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t); \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_2^t))$. $\square$

Para concluir, tomando a Conjectura 4.2.5 e usando o Teorema 5.2.2, podemos definir um conjunto de geradores para o módulo das aplicações equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\langle R_h(\theta) \rangle; \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Conjectura 5.2.4. *O conjunto*

$$\{(x,y), (y,x)\}$$

é uma base para o módulo das aplicações equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\langle R_h(\theta) \rangle; \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sobre o anel $\mathcal{P}(R_h(\theta))$.

5.2.2 Aplicações equivariantes por uma involução de $O(2,1)$

Nesta subseção, usamos o Teorema 5.2.2 para calcular um sistema de geradores para o módulo das aplicações equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2(\gamma); \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$, com γ uma involução de $O(2,1)$.

Inicialmente, mostramos a base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\gamma), \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ sob a ação diagonal de $\mathbb{Z}_2(\gamma)$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Proposição 5.2.5. *Considere a ação diagonal de cada um dos subgrupos de Lorentz $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)$, $\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^p)$ nos vetores $(x,y,z,p,q,r) \in \mathbb{R}^{2+1} \times \mathbb{R}^{2+1}$. Então:*

(i) *O conjunto*

$$\{x, z, p, r, y^2, q^2, yq\}$$

é uma base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p), \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

(ii) *O conjunto*

$$\{y, q, x^2, z^2, p^2, r^2, xz, xp, xr, pz, rz, pr\}$$

é uma base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^p), \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

Demonstração. A ação diagonal de $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)$ em $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ é representada por

$$\begin{pmatrix} \Lambda_3^p & 0 \\ 0 & \Lambda_3^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

com $X = (x,y,z)$ e $Y = (p,q,r)$. É imediato que os polinômios

$$f_1 = x, f_2 = z, f_3 = p, f_4 = r, f_5 = y^2, f_6 = q^2, f_7 = yq$$

são $\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)$ -invariantes. É claro também que estes polinômios são algebricamente dependentes, com a relação $f_7^2 - f_5 f_6$. Calculamos a série de Molien. Temos que

$$\det(I_6 - tI_6) = (1 - t)^6$$

e que

$$\det \left(I_6 - t \begin{pmatrix} \Lambda_3^p & 0 \\ 0 & \Lambda_3^p \end{pmatrix} \right) = (1-t)^4(1+t)^2.$$

Portanto, a série de Molien é dada por

$$\Phi_{\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-t)^6} + \frac{1}{(1-t)^4(1+t)^2} \right) = 1 + 4t + 13t^2 + 32t^3 + 70t^4 + \dots$$

Agora usamos o Algoritmo 1.1.13. Como os polinômios acima são algebricamente dependentes, temos a série de Hilbert

$$H_{\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)}(t) = \frac{1+t^2}{(1-t)^4(1-t^2)^2}.$$

Um cálculo direto nos leva à igualdade

$$\Phi_{\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)}(t) = H_{\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p)}(t).$$

Logo, o conjunto

$$\{x, z, p, r, y^2, q^2, yq\}$$

é uma base de Hilbert do anel dos polinômios invariantes $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p), \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$.

O outro caso é análogo. □

Finalizando, usamos a Proposição 5.2.5 e o Teorema 5.2.2 para calcular um sistema de geradores para o módulo das aplicações equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2(\gamma); \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\gamma))$, com γ uma involução de $O(2, 1)$. Temos, portanto, a seguinte proposição:

Proposição 5.2.6. (i) *O conjunto*

$$\{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, y, 0)\}$$

é um sistema de geradores para o módulo das aplicações equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p); \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(\Lambda_3^p))$.

(ii) *O conjunto*

$$\{(0, 1, 0), (x, 0, 0), (0, 0, x), (z, 0, 0), (0, 0, z)\}$$

é um sistema de geradores para o módulo das aplicações equivariantes $\vec{\mathcal{P}}(\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^p); \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ sobre o anel $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_2(-\Lambda_3^p))$.

Demonstração. Basta fazer uma aplicação direta do Teorema 5.2.2, especificamente da expressão $g(x, y, z) = J(d_{(p,q,r)}f)_{(x,y,z,0,0,0)}^t$, em cada um dos polinômios invariantes dados na Proposição 5.2.5. □

REFERÊNCIAS

- [1] F. Antoneli, P. H. Baptistelli, A. P. S. Dias, and M. Manoel. Invariant theory and reversible-equivariant vector fields. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 213(5):649–663, 2009.
- [2] P. H. Baptistelli and M. Manoel. Invariants and relative invariants under compact lie groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 217(12):2213–2220, 2013.
- [3] P. H. Baptistelli, M. Manoel, and I. O. Zeli. Normal form theory for reversible equivariant vector fields. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 47(3):935–954, 2016.
- [4] J. C. A. Barata. *Curso de Física-Matemática*. Notas didáticas do DFM-USP, 2013.
- [5] T. Bröcker and T. tom Dieck. *Representations of compact Lie groups*, volume 98. Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] A. Cantoni and P. Butler. Eigenvalues and eigenvectors of symmetric centrosymmetric matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 13(3):275–288, 1976.
- [7] J. Constantopoulos. Relativistic extensions of dynamical systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 18(4):729, 1985.
- [8] E. B. Dagum, L. Guidotti, and A. Luati. Some statistical applications of centrosymmetric matrices. In *New Developments in Classification and Data Analysis*, pages 97–104. Springer, 2005.
- [9] L. Datta and S. Morgera. Some results on matrix symmetries and a pattern recognition application. *IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing*, 34(4):992–994, 1986.
- [10] L. Datta and S. D. Morgera. On the reducibility of centrosymmetric matrices - applications in engineering problems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 8(1):71–96, 1989.
- [11] H. Derksen and G. Kemper. *Computational invariant theory*. Springer, 2015.
- [12] M. El-Mikkawy and F. Atlan. On solving centrosymmetric linear systems. *Applied Mathematics*, 4(12):21, 2013.

- [13] J. Gallier. Notes on group actions, manifolds, lie groups, and lie algebras. *Disponível em:* <http://www.cis.upenn.edu/cis610/lie1.pdf>. Acesso em 2 de julho de 2013, 2005.
- [14] K. Gatermann. *Computer algebra methods for equivariant dynamical systems*. Springer, 2007.
- [15] K. Gatermann and F. Guyard. Gröbner bases, invariant theory and equivariant dynamics. *Journal of Symbolic Computation*, 28(1):275–302, 1999.
- [16] M. Golubitsky and I. Stewart. *The symmetry perspective: from equilibrium to chaos in phase space and physical space*, volume 200. Springer Science & Business Media, 2003.
- [17] M. Golubitsky, I. Stewart, et al. *Singularities and groups in bifurcation theory*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] I. Good. The inverse of a centrosymmetric matrix. *Technometrics*, 12(4):925–928, 1970.
- [19] L. Greenberg. Discrete subgroups of the lorentz group. *Mathematica Scandinavica*, 10:85–107, 1962.
- [20] B. C. Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction*, volume 222. Springer, 2015.
- [21] S. Izumiya. Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone. *Mosc. Math. J*, 9(2):325–357, 2009.
- [22] A. Jaffe. Lorentz transformations, rotations, and boosts, 2013.
- [23] D. Luna. Fonctions différentiables invariantes sous l’opération d’un groupe réductif. In *Annales de l’institut Fourier*, volume 26, pages 33–49, 1976.
- [24] E. Malec. Bifurcation from the maxwell solution in the yang-mills theory. *Acta Physica Polonica. Series B*, 12(7):665–673, 1981.
- [25] M. Manoel and L. N. Oliveira. Invariant theory for the lorentz group on the minkowski space. *Preprint*.
- [26] M. Manoel and L. N. Oliveira. On the action of lorentz involutions on the minkowski space. *Preprint*.
- [27] Maplesoft. *Maple - versão 18.02*. 2014.
- [28] N. Muthiyalu and S. Usha. Eigenvalues of centrosymmetric matrices. *Computing*, 48(2):213–218, 1992.
- [29] G. L. Naber. *The geometry of Minkowski spacetime: An introduction to the mathematics of the special theory of relativity*, volume 92. Springer Science & Business Media, 2012.

- [30] L. Nachbin. *The haar integral*. RE Krieger Pub. Co., 1976.
- [31] B. O’neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, volume 103. Academic press, 1983.
- [32] D. Pei. Singularities of p_2 -valued gauss maps of surfaces in minkowski. 1997.
- [33] J. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149. Springer Science & Business Media, 2006.
- [34] D. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*, volume 80. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] B. Sturmfels. *Algorithms in invariant theory*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [36] D. Tao and M. Yasuda. A spectral characterization of generalized real symmetric centrosymmetric and generalized real symmetric skew-centrosymmetric matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(3):885–895, 2002.
- [37] A. Tarakanov. On some discrete subgroups of the lorentz group. *arXiv preprint arXiv:1301.1636*, 2012.
- [38] F. Tari. Singularidades de aplicações diferenciáveis. *Notas didáticas do ICMC-USP*, (34), 1999.
- [39] F. Tari. Caustics of surfaces in the minkowski 3-space. *QJ Math*, 63(1):189–209, 2012.
- [40] Z. Tian and C. Gu. The iterative methods for centrosymmetric matrices. *Applied mathematics and computation*, 187(2):902–911, 2007.
- [41] A. Vanderbauwhede. *Local bifurcation and symmetry*, volume 75. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- [42] N. R. Wallach. *Real Productive Groups I*, volume 132. Academic press, 1988.
- [43] J. R. Weaver. Centrosymmetric (cross-symmetric) matrices, their basic properties, eigenvalues, and eigenvectors. *The American Mathematical Monthly*, 92(10):711–717, 1985.
- [44] D. A. Woodside. Uniqueness theorems for classical four-vector fields in euclidean and minkowski spaces. *Journal of Mathematical Physics*, 40(10):4911–4943, 1999.

MATRIZES DE $R_h(\theta)$

Apresentamos, a seguir, as matrizes representadas na Tabela 3, do Capítulo 4.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{16} & \frac{15}{16} & \frac{9}{16} \\ \frac{15}{8} & \frac{9}{8} & \frac{15}{8} \\ \frac{9}{16} & \frac{15}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{61}{64} & \frac{75}{64} & \frac{45}{64} & \frac{27}{64} \\ \frac{225}{64} & \frac{151}{64} & \frac{177}{64} & \frac{135}{64} \\ \frac{135}{64} & \frac{177}{64} & \frac{151}{64} & \frac{225}{64} \\ \frac{27}{64} & \frac{45}{64} & \frac{75}{64} & \frac{61}{64} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{369}{256} & \frac{375}{256} & \frac{225}{256} & \frac{135}{256} & \frac{81}{256} \\ \frac{375}{64} & \frac{261}{64} & \frac{255}{64} & \frac{189}{64} & \frac{135}{64} \\ \frac{675}{128} & \frac{765}{128} & \frac{675}{128} & \frac{765}{128} & \frac{675}{128} \\ \frac{135}{64} & \frac{189}{64} & \frac{255}{64} & \frac{261}{64} & \frac{375}{64} \\ \frac{81}{256} & \frac{135}{256} & \frac{225}{256} & \frac{375}{256} & \frac{369}{256} \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} \frac{2101}{1024} & \frac{1875}{1024} & \frac{1125}{1024} & \frac{675}{1024} & \frac{405}{1024} & \frac{243}{1024} \\ \frac{9375}{1024} & \frac{6601}{1024} & \frac{5775}{1024} & \frac{4185}{1024} & \frac{2943}{1024} & \frac{2025}{1024} \\ \frac{5625}{512} & \frac{5775}{512} & \frac{5033}{512} & \frac{4959}{512} & \frac{4185}{512} & \frac{3375}{512} \\ \frac{3375}{512} & \frac{4185}{512} & \frac{4959}{512} & \frac{5033}{512} & \frac{5775}{512} & \frac{5625}{512} \\ \frac{2025}{1024} & \frac{2943}{1024} & \frac{4185}{1024} & \frac{5775}{1024} & \frac{6601}{1024} & \frac{9375}{1024} \\ \frac{243}{1024} & \frac{405}{1024} & \frac{675}{1024} & \frac{1125}{1024} & \frac{1875}{1024} & \frac{2101}{1024} \end{pmatrix}$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} \frac{11529}{4096} & \frac{9375}{4096} & \frac{5625}{4096} & \frac{3375}{4096} & \frac{2025}{4096} & \frac{1215}{4096} & \frac{729}{4096} \\ \frac{28125}{2048} & \frac{19827}{2048} & \frac{16125}{2048} & \frac{11475}{2048} & \frac{7965}{2048} & \frac{5427}{2048} & \frac{3645}{2048} \\ \frac{84375}{4096} & \frac{80625}{4096} & \frac{68679}{4096} & \frac{62145}{4096} & \frac{50679}{4096} & \frac{39825}{4096} & \frac{30375}{4096} \\ \frac{16875}{1024} & \frac{19125}{1024} & \frac{20715}{1024} & \frac{20277}{1024} & \frac{20715}{1024} & \frac{19125}{1024} & \frac{16875}{1024} \\ \frac{30375}{4096} & \frac{39825}{4096} & \frac{50679}{4096} & \frac{62145}{4096} & \frac{68679}{4096} & \frac{80625}{4096} & \frac{84375}{4096} \\ \frac{3645}{2048} & \frac{5427}{2048} & \frac{7965}{2048} & \frac{11475}{2048} & \frac{16125}{2048} & \frac{19827}{2048} & \frac{28125}{4096} \\ \frac{729}{4096} & \frac{1215}{4096} & \frac{2025}{4096} & \frac{3375}{4096} & \frac{5625}{4096} & \frac{9375}{4096} & \frac{11529}{4096} \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} \frac{61741}{16384} & \frac{46875}{16384} & \frac{28125}{16384} & \frac{16875}{16384} & \frac{10125}{16384} & \frac{6075}{16384} & \frac{3645}{16384} & \frac{2187}{16384} \\ \frac{328125}{16384} & \frac{230491}{16384} & \frac{178125}{16384} & \frac{124875}{16384} & \frac{85725}{16384} & \frac{57915}{16384} & \frac{38637}{16384} & \frac{25515}{16384} \\ \frac{590625}{16384} & \frac{534375}{16384} & \frac{444241}{16384} & \frac{379575}{16384} & \frac{301185}{16384} & \frac{231687}{16384} & \frac{173745}{16384} & \frac{127575}{16384} \\ \frac{590625}{16384} & \frac{624375}{16384} & \frac{632625}{16384} & \frac{596071}{16384} & \frac{566337}{16384} & \frac{501975}{16384} & \frac{428625}{16384} & \frac{354375}{16384} \\ \frac{354375}{16384} & \frac{428625}{16384} & \frac{501975}{16384} & \frac{566337}{16384} & \frac{596071}{16384} & \frac{632625}{16384} & \frac{624375}{16384} & \frac{590625}{16384} \\ \frac{127575}{16384} & \frac{173745}{16384} & \frac{231687}{16384} & \frac{301185}{16384} & \frac{379575}{16384} & \frac{444241}{16384} & \frac{534375}{16384} & \frac{590625}{16384} \\ \frac{25515}{16384} & \frac{38637}{16384} & \frac{57915}{16384} & \frac{85725}{16384} & \frac{124875}{16384} & \frac{178125}{16384} & \frac{230491}{16384} & \frac{328125}{16384} \\ \frac{2187}{16384} & \frac{3645}{16384} & \frac{6075}{16384} & \frac{10125}{16384} & \frac{16875}{16384} & \frac{28125}{16384} & \frac{46875}{16384} & \frac{61741}{16384} \end{pmatrix}$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} \frac{325089}{65536} & \frac{234375}{65536} & \frac{140625}{65536} & \frac{84375}{65536} & \frac{50625}{65536} & \frac{30375}{65536} & \frac{18225}{65536} & \frac{10935}{65536} & \frac{6561}{65536} \\ \frac{234375}{8192} & \frac{163683}{8192} & \frac{121875}{8192} & \frac{84375}{8192} & \frac{57375}{8192} & \frac{38475}{8192} & \frac{25515}{8192} & \frac{16767}{8192} & \frac{10935}{8192} \\ \frac{984375}{16384} & \frac{853125}{16384} & \frac{692991}{16384} & \frac{568125}{16384} & \frac{440775}{16384} & \frac{333045}{16384} & \frac{246159}{16384} & \frac{178605}{16384} & \frac{127575}{16384} \\ \frac{590625}{8192} & \frac{590625}{8192} & \frac{568125}{8192} & \frac{516933}{8192} & \frac{466905}{8192} & \frac{400617}{8192} & \frac{333045}{8192} & \frac{269325}{8192} & \frac{212625}{8192} \\ \frac{1771875}{32768} & \frac{2008125}{32768} & \frac{2203875}{32768} & \frac{2334525}{32768} & \frac{2347875}{32768} & \frac{2334525}{32768} & \frac{2203875}{32768} & \frac{2008125}{32768} & \frac{1771875}{32768} \\ \frac{212625}{8192} & \frac{269325}{8192} & \frac{333045}{8192} & \frac{400617}{8192} & \frac{466905}{8192} & \frac{516933}{8192} & \frac{568125}{8192} & \frac{590625}{8192} & \frac{590625}{8192} \\ \frac{127575}{16384} & \frac{178605}{16384} & \frac{246159}{16384} & \frac{333045}{16384} & \frac{440775}{16384} & \frac{568125}{16384} & \frac{692991}{16384} & \frac{853125}{16384} & \frac{984375}{16384} \\ \frac{10935}{8192} & \frac{16767}{8192} & \frac{25515}{8192} & \frac{38475}{8192} & \frac{57375}{8192} & \frac{84375}{8192} & \frac{121875}{8192} & \frac{163683}{8192} & \frac{234375}{8192} \\ \frac{6561}{65536} & \frac{10935}{65536} & \frac{18225}{65536} & \frac{30375}{65536} & \frac{50625}{65536} & \frac{84375}{65536} & \frac{140625}{65536} & \frac{234375}{65536} & \frac{325089}{65536} \end{pmatrix}$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} \frac{1690981}{262144} & \frac{1171875}{262144} & \frac{703125}{262144} & \frac{421875}{262144} & \frac{253125}{262144} & \frac{151875}{262144} & \frac{91125}{262144} & \frac{54675}{262144} & \frac{32805}{262144} & \frac{19683}{262144} \\ \frac{10546875}{262144} & \frac{7315981}{262144} & \frac{5296875}{262144} & \frac{3628125}{262144} & \frac{2446875}{262144} & \frac{1630125}{262144} & \frac{1075275}{262144} & \frac{703485}{262144} & \frac{457083}{262144} & \frac{295245}{262144} \\ \frac{6328125}{65536} & \frac{5296875}{65536} & \frac{4212589}{65536} & \frac{3346875}{65536} & \frac{2548125}{65536} & \frac{1896075}{65536} & \frac{1383885}{65536} & \frac{993627}{65536} & \frac{703485}{65536} & \frac{492075}{65536} \\ \frac{8859375}{65536} & \frac{8465625}{65536} & \frac{7809375}{65536} & \frac{6890089}{65536} & \frac{5991375}{65536} & \frac{5005305}{65536} & \frac{4068927}{65536} & \frac{3229065}{65536} & \frac{2508975}{65536} & \frac{1913625}{65536} \\ \frac{15946875}{131072} & \frac{17128125}{131072} & \frac{17836875}{131072} & \frac{17974125}{131072} & \frac{17375003}{131072} & \frac{16480029}{131072} & \frac{15015915}{131072} & \frac{13272525}{131072} & \frac{11410875}{131072} & \frac{9568125}{131072} \\ \frac{9568125}{131072} & \frac{11410875}{131072} & \frac{13272525}{131072} & \frac{15015915}{131072} & \frac{16480029}{131072} & \frac{17375003}{131072} & \frac{17974125}{131072} & \frac{17836875}{131072} & \frac{17128125}{131072} & \frac{15946875}{131072} \\ \frac{1913625}{65536} & \frac{2508975}{65536} & \frac{3229065}{65536} & \frac{4068927}{65536} & \frac{5005305}{65536} & \frac{5991375}{65536} & \frac{6890089}{65536} & \frac{7809375}{65536} & \frac{8465625}{65536} & \frac{8859375}{65536} \\ \frac{492075}{65536} & \frac{703485}{65536} & \frac{993627}{65536} & \frac{1383885}{65536} & \frac{1896075}{65536} & \frac{2548125}{65536} & \frac{3346875}{65536} & \frac{4212589}{65536} & \frac{5296875}{65536} & \frac{6328125}{65536} \\ \frac{295245}{262144} & \frac{457083}{262144} & \frac{703485}{262144} & \frac{1075275}{262144} & \frac{1630125}{262144} & \frac{2446875}{262144} & \frac{3628125}{262144} & \frac{5296875}{262144} & \frac{7315981}{262144} & \frac{10546875}{262144} \\ \frac{19683}{262144} & \frac{32805}{262144} & \frac{54675}{262144} & \frac{91125}{262144} & \frac{151875}{262144} & \frac{253125}{262144} & \frac{421875}{262144} & \frac{703125}{262144} & \frac{1171875}{262144} & \frac{1690981}{262144} \end{pmatrix}$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} \frac{8717049}{1048576} & \frac{5859375}{1048576} & \frac{3515625}{1048576} & \frac{2109375}{1048576} & \frac{1265625}{1048576} & \frac{759375}{1048576} & \frac{455625}{1048576} & \frac{273375}{1048576} & \frac{164025}{1048576} & \frac{98415}{1048576} & \frac{59049}{1048576} \\ \frac{29296875}{524288} & \frac{20178837}{524288} & \frac{14296875}{524288} & \frac{9703125}{524288} & \frac{6496875}{524288} & \frac{4303125}{524288} & \frac{2824875}{524288} & \frac{1840725}{524288} & \frac{1191915}{524288} & \frac{767637}{524288} & \frac{492075}{524288} \\ \frac{158203125}{1048576} & \frac{128671875}{1048576} & \frac{100404549}{1048576} & \frac{77821875}{1048576} & \frac{58303125}{1048576} & \frac{42811875}{1048576} & \frac{30903525}{1048576} & \frac{21982995}{1048576} & \frac{15440949}{1048576} & \frac{10727235}{1048576} & \frac{7381125}{1048576} \\ \frac{31640625}{131072} & \frac{29109375}{131072} & \frac{25940625}{131072} & \frac{22278303}{131072} & \frac{18800625}{131072} & \frac{15357375}{131072} & \frac{12248145}{131072} & \frac{9563103}{131072} & \frac{7327665}{131072} & \frac{5522175}{131072} & \frac{4100625}{131072} \\ \frac{132890625}{524288} & \frac{136434375}{524288} & \frac{136040625}{524288} & \frac{131604375}{524288} & \frac{122954337}{524288} & \frac{112431975}{524288} & \frac{99493137}{524288} & \frac{85737015}{524288} & \frac{72108225}{524288} & \frac{59322375}{524288} & \frac{47840625}{524288} \\ \frac{47840625}{262144} & \frac{54219375}{262144} & \frac{59936625}{262144} & \frac{64500975}{262144} & \frac{67459185}{262144} & \frac{68223087}{262144} & \frac{67459185}{262144} & \frac{64500975}{262144} & \frac{59936625}{262144} & \frac{54219375}{262144} & \frac{47840625}{262144} \\ \frac{47840625}{524288} & \frac{59322375}{524288} & \frac{72108225}{524288} & \frac{85737015}{524288} & \frac{99493137}{524288} & \frac{112431975}{524288} & \frac{122954337}{524288} & \frac{131604375}{524288} & \frac{136040625}{524288} & \frac{136434375}{524288} & \frac{132890625}{524288} \\ \frac{4100625}{131072} & \frac{5522175}{131072} & \frac{7327665}{131072} & \frac{9563103}{131072} & \frac{12248145}{131072} & \frac{15357375}{131072} & \frac{18800625}{131072} & \frac{22278303}{131072} & \frac{25940625}{131072} & \frac{29109375}{131072} & \frac{31640625}{131072} \\ \frac{7381125}{1048576} & \frac{10727235}{1048576} & \frac{15440949}{1048576} & \frac{21982995}{1048576} & \frac{30903525}{1048576} & \frac{42811875}{1048576} & \frac{58303125}{1048576} & \frac{77821875}{1048576} & \frac{100404549}{1048576} & \frac{128671875}{1048576} & \frac{158203125}{1048576} \\ \frac{492075}{524288} & \frac{767637}{524288} & \frac{1191915}{524288} & \frac{1840725}{524288} & \frac{2824875}{524288} & \frac{4303125}{524288} & \frac{6496875}{524288} & \frac{9703125}{524288} & \frac{14296875}{524288} & \frac{20178837}{524288} & \frac{29296875}{524288} \\ \frac{59049}{1048576} & \frac{98415}{1048576} & \frac{164025}{1048576} & \frac{273375}{1048576} & \frac{455625}{1048576} & \frac{759375}{1048576} & \frac{1265625}{1048576} & \frac{2109375}{1048576} & \frac{3515625}{1048576} & \frac{5859375}{1048576} & \frac{8717049}{1048576} \end{pmatrix}$$