SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 17/10/2005

Assinatura:

Invariantes analíticos para curvas irredutíveis¹

Maria Elenice Rodrigues Hernandez

Orientadora: *Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas*

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos
Outubro de 2005

¹Este trabalho teve suporte financeiro do CNPq

Aluna: *Maria Elenice Rodrigues Hernandes*

A Comissão Julgadora:

Profa. Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

ma

Prof. Dr. Daniel Levcovitz

Daniel Levcovitz

Prof. Dr. Abramo Hefez

Abramo Hefez

Prof. Dr. Arnaldo Leite Pinto Garcia

Arnaldo Leite Pinto Garcia

Prof. Dr. Alexandre Cesar Gurgel Fernandes

Alexandre Cesar Gurgel Fernandes

*À você, meu querido esposo
Marcelo, minha profunda
gratidão e amor.*

Agradecimentos

À Deus, pelas bençãos de todos os dias.

O meu sincero agradecimento à Profa. Maria Aparecida Soares Ruas, pela amizade e por toda a atenção, paciência e carinho dedicados na orientação deste trabalho.

Aos meus amados pais, Alipio e Adete, por todo o incentivo e compreensão pela minha ausência.

Ao meu querido esposo Marcelo, que com tanto amor, dedicação e paciência suportou esta distância comigo. E por todas as discussões que tanto contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Agradeço à minha linda e querida família, e a todos os meus amigos pelo apoio e força em todos os momentos.

Aos amigos da pós: Elíris, João Carlos, Lizandro, Begoña, Roland, Silas, Vanda, Benito e tantos outros que não pude citar, por todos os momentos felizes que compartilhamos juntos.

Aos queridos amigos Andrea, Billy e a Ana Cláudia por me receber em sua casa com tanto carinho.

À todos os professores do ICMC-USP, que direta ou indiretamente contribuíram para a minha formação e aos funcionários que com tanta atenção e carinho me auxiliaram neste projeto.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo de invariantes associados às curvas analíticas irreduzíveis em $\mathbb{C}^n$. Para curvas definidas por uma parametrização $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, apresentamos uma descrição algébrica do invariante $\mathcal{A}_c$ -codimensão de ϕ , que denotamos por $\mathcal{A}_c cod(\phi)$, em termos das ordens de certas diferenciais de Kähler. Como consequência, obtemos uma relação entre a $\mathcal{A}_c cod(\phi)$ e alguns invariantes clássicos da teoria de curvas. Uma descrição mais simples para tal relação é apresentada no caso de curvas planas irreduzíveis.

Para curvas monomiais em $\mathbb{C}^n$, o principal resultado apresenta uma fórmula para a $\mathcal{A}_c cod(\phi)$ em termos do invariante delta, da dimensão de mergulho e do tipo Cohen-Macaulay do anel local da curva. Comparamos ainda os resultados obtidos para a $\mathcal{A}_c cod(\phi)$, com as relações existentes na literatura sobre o número de Tjurina, no caso de curvas de interseção completa.

Abstract

The aim of this work is to study invariants of analytic irreducible curves in $\mathbb{C}^n$. For curves given by a parametrization $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, we present an algebraic description of the invariant $\mathcal{A}_c$ -codimension of ϕ , denoted by $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$, in terms of orders of certain Kähler differentials. As a consequence of this approach we get a relation between $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ and some classical invariants of curve theory. The simplest description of such relation is given when ϕ is the parametrization of an irreducible plane curve.

A more detailed study of monomial curves is given. The main result in this setting is a formula for the $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ in terms of the delta invariant, the embedding dimension and the Cohen-Macaulay type of the local ring of curve. Formulas relating the $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ and the Tjurina number of a complete intersection is also obtained.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Subvariedades Analíticas Complexas	7
1.2 Teoria de Curvas	9
1.2.1 Semigrupo de Valores	12
1.2.2 Módulo de Diferenciais de Kähler	15
1.3 Teoria de Singularidades de Aplicações	17
1.3.1 Os Grupos de Mather $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$	18
1.3.2 Desdobramento Versal	22
1.3.3 Determinação Finita	23
1.4 Invariantes Aritméticos	25
2 Curvas Analíticas em $\mathbb{C}^{n-1}$	29
2.1 $\mathcal{A}_e$ -codimensão de Curvas Parametrizadas	29
2.2 $\mathcal{A}_e cod(\phi)$ e as Diferenciais de Kähler	34
3 Curvas Analíticas Monomiais	49
3.1 Curvas Monomiais em $\mathbb{C}^{n-1}$	50
3.2 Tjurina $\times \mathcal{A}_e$ -codimensão(ϕ)	60
3.3 Curvas Monomiais em $\mathbb{C}^3$	63
3.4 Resultados Gerais	64
4 Curvas Analíticas Planas	69
4.1 $\mathcal{A}_e$ -codimensão de Curvas Planas	69
4.2 Fórmula para a $\mathcal{A}_e cod(\phi)$	73
4.3 Deformações de Curvas Planas	76
Referências Bibliográficas	79
Índice Remissivo	83

Introdução

Este trabalho tem como objetivo o estudo de invariantes associados às curvas analíticas irreduzíveis em $\mathbb{C}^n$. Na teoria analítica de curvas, alguns invariantes se destacam, entre eles, o semigrupo de valores de uma curva, o invariante delta, o número de Milnor, o número de Tjurina, entre outros. Se consideramos $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ uma curva irreduzível dada parametricamente, então a $\mathcal{A}_e$ -codimensão do espaço tangente à órbita de ϕ , pela ação do grupo $\mathcal{A}$ de Mather, denotada por $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$, é um invariante analítico importante na teoria de singularidades de aplicações, pois exprime o número mínimo de parâmetros de um desdobramento versal de ϕ , no espaço de todas as parametrizações de curvas em $\mathbb{C}^n$.

É inegável a importância dos invariantes no estudo local de singularidades, em questões como as de classificação e deformação de singularidades ou na busca de propriedades analíticas e/ou topológicas associadas às mesmas.

Uma das abordagens para este assunto é considerar uma deformação flat de uma dada curva e buscar propriedades sobre a família de curvas obtida. Nesta direção, Buchweitz e Greuel provam, em [BG] que uma família flat de curvas reduzidas, com singularidade isolada, é topologicamente trivial se, e somente se, o número de Milnor é constante na família. A importância do número de Milnor neste contexto, vem do fato que ele controla a topologia numa família flat de curvas reduzidas.

Similarmente, Briançon, Galligo e Granger em [BGG], comparam as diferentes noções de equisingularidade, introduzidas por diferentes autores, no caso de deformações flat de germes de curvas reduzidas e apresentam condições necessárias e/ou suficientes para que uma família de curvas seja equisingular fixado um certo número de invariantes.

Este trabalho aborda o estudo de invariantes de curvas, não como membro de uma família, mas como objeto isolado. Considerando uma curva analítica $\mathcal{C}$ dada como o conjunto de zeros de aplicações analíticas, digamos $f_1, \dots, f_k$, definidas numa vizinhança

da origem de $\mathbb{C}^n$ temos que se $\mathcal{C}$ é irredutível e 0 é uma singularidade isolada da curva, então existe uma parametrização ϕ de $\mathcal{C}$, isto é, uma aplicação de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}^n$ que descreve o conjunto de zeros de $f_1, \dots, f_k$ numa vizinhança da origem.

Bruce e Gaffney em [BGa], estabelecem uma conexão entre germes de parametrizações $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ de germes de curvas algébricas e as equações que definem estas curvas implicitamente, estabelecendo a noção de equivalência adequada em ambos os casos. Mais especificamente, se f_1 e f_2 definem curvas analíticas planas irredutíveis e ϕ_1 e ϕ_2 são suas respectivas parametrizações, então ϕ_1 e ϕ_2 são $\mathcal{A}$ -equivalentes se, e somente se, f_1 e f_2 são $\mathcal{K}$ -equivalentes. Utilizando este resultado e a classificação de germes de funções dada por Arnol'd em [Ar], Bruce e Gaffney obtêm uma lista dos germes $\mathcal{A}$ simples de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}^2$ considerando as equações que definem a sua imagem.

Mais geralmente, para o estudo de curvas em $\mathbb{C}^n$, a noção de equivalência dada pelo grupo de contato $\mathcal{K}$ é mais adequada para curvas dadas implicitamente, e a do grupo $\mathcal{A}$ para curvas parametrizadas. Uma questão pertinente é: como se comportam os invariantes dentro de cada uma destas classes de curvas?

Uma importante área na teoria de singularidades de aplicações é o estudo de deformações. Uma deformação de um germe f é versal se ela descreve, num certo sentido, todas as possíveis deformações de f , a menos de elementos que pertençam à mesma classe de equivalência. O número mínimo de parâmetros em uma deformação versal de um germe de interseção completa, definida por uma aplicação f , é dado pelo número de Tjurina τ . Tjurina em [Tj], prova que neste caso, τ é exatamente a $\mathcal{K}_c$ -codimensão do espaço tangente à órbita de f pela ação do grupo $\mathcal{K}$. Já no caso de curvas parametrizadas por um germe de aplicação ϕ , o número mínimo de parâmetros num desdobramento versal, é dado pela $\mathcal{A}_c$ -codimensão do espaço tangente à órbita de ϕ (veja [Ma]).

Diante disso, qual é a relação entre os invariantes τ e $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$?

Um dos propósitos deste trabalho é estabelecer relações entre estes invariantes, de modo a obter alguma informação sobre as deformações de uma curva dada implicitamente, com as deformações de sua parametrização.

Existem na literatura alguns trabalhos relacionando o número de Tjurina com outros invariantes clássicos, por exemplo, envolvendo o número de Tjurina e o número de Milnor. Nesta direção, Greuel em [Gr1], considerando subvariedades de interseção completa X de dimensão $n \geq 1$, prova que se X é irredutível então $\tau \leq \mu$ e que X é quase-homogênea se, e somente se, $\mu = \tau$. Looijenga e Steenbrink em [LS], provam que a desigualdade $\tau \leq \mu$ vale mais geralmente para qualquer subvariedade de interseção completa com singularidade

isolada. Novamente, Greuel em [Gr2], para curvas quase-homogêneas com determinadas propriedades, relaciona o número de Tjurina com o número de Milnor e o tipo Cohen-Macaulay do anel local da curva. Anne Frügbis-Krüger em [Fr], estuda deformações de curvas espaciais Cohen-Macaulay de codimensão 2, que não são de interseção completa, do ponto de vista da teoria de deformação de singularidades, determinando o número de Tjurina como a codimensão de uma certa álgebra de matrizes.

Resultados recentes da teoria relacionam a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de germes $\phi : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ e o número de singularidades estáveis 0-dimensionais (invariantes 0-estáveis) que aparecem em uma perturbação estável ϕ_t de ϕ (veja [DM], [M1], [M2]).

D. Mond em [M2], estuda propriedades sobre a topologia de uma perturbação estável de multigerms $\phi : \mathbb{C}^n, S \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, 0$, onde S é um conjunto finito e $(n, n+1)$ são boas dimensões. Se ϕ possui $\mathcal{A}_e$ -codimensão finita então a imagem de uma perturbação estável ϕ_t de ϕ , tem o tipo de homotopia de um bouquet de n -esferas. O número destas esferas é chamado o número de Milnor da imagem e denotado por $\mu_I(\phi)$. Quando $n = 2$, $\mu_I(\phi)$ pode ser calculado em termos dos invariantes 0-estáveis $C(\phi)$, que é o número de cross-caps de ϕ_t , $T(\phi)$ que é o número de pontos triplos de ϕ_t e do número de Milnor da curva dos pontos duplos. Para $\phi : \mathbb{C}, S \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$, o único invariante 0-estável que aparece numa estabilização ϕ_t de ϕ é o número de pontos duplos transversais ("nodes"), que é o invariante δ . Em [M1], Mond prova que se $\phi : \mathbb{C}, S \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ é finitamente determinado então

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) \leq \mu_I(\phi) = \delta - r + 1,$$

onde r é o número de ramos da curva, com igualdade se, e somente se, ϕ é quase-homogênea.

No estudo de curvas $\phi : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ com $n > 2$ e singularidade isolada, não há uma interpretação geométrica para a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$, em termos de singularidades 0-estáveis, similares ao que vimos acima, pois $\phi : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ com $n > 2$ é estável se, e somente se, é um mergulho.

Diante disso, o principal objetivo deste trabalho, é obter uma possível descrição para a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de curvas dadas parametricamente em $\mathbb{C}^n$, em termos de invariantes clássicos.

Utilizando ferramentas da teoria de curvas, vamos estabelecer um outro método para a obtenção de uma base para o espaço normal à órbita do germe ϕ . Para tanto, consideramos o $\mathcal{O}$ -módulo de diferenciais de Kähler associado à uma curva analítica irredutível $\mathcal{C}$, onde $\mathcal{O}$ é o anel local da curva. Observamos que existe uma estreita relação entre o espaço

tangente à $\mathcal{A}$ -órbita de uma parametrização ϕ de $\mathcal{C}$, e as diferenciais de Kähler da curva. Com isso, determinamos um método para o cálculo da $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ a partir das ordens de certas diferenciais de Kähler e como consequência, obtemos o Teorema 2.11, que estabelece uma relação entre $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ e alguns invariantes como o invariante delta, a multiplicidade da curva, entre outros. Esta relação admite uma descrição mais simples para curvas planas irredutíveis, e neste caso obtemos o Teorema 4.6, que descreve uma fórmula para a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ em termos do invariante delta e do número de lacunas especiais da curva. Para curvas monomiais em $\mathbb{C}^n$, o principal resultado apresenta uma fórmula para a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ em termos do invariante delta, da dimensão de mergulho e do tipo Cohen-Macaulay do anel local da curva. Tal resultado decorre do Teorema 2.11 e de um resultado de Cavaliere e Niesi [CN2], que relaciona o tipo Cohen-Macaulay do anel local de uma curva monomial e o número de elementos de um subconjunto do conjunto de Apéry, que está associado ao semigrupo de valores da curva.

Passamos agora à descrição dos capítulos.

O Capítulo 1 apresenta as ferramentas necessárias à compreensão do trabalho, destacando inicialmente alguns conceitos na teoria local de curvas, entre eles o semigrupo de valores e o módulo de diferenciais de Kähler associados a uma curva dada. Em seguida, da teoria de singularidades de aplicações, apresentamos as relações de equivalências entre curvas e conceitos como de desdobramentos versais e de determinação finita. Finalizando o capítulo, apresentamos invariantes nos quais estaremos interessados, bem como algumas relações entre os mesmos, já conhecidas na literatura.

No Capítulo 2, dada uma curva parametrizada $\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, o objetivo é apresentar uma descrição da $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ em termos de invariantes analíticos conhecidos. Estabelecemos um paralelo entre o espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ e o módulo de diferenciais de Kähler da curva, determinando assim a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de ϕ , em termos de ordens de certas diferenciais. Tal descrição leva a uma relação entre $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ e invariantes como o invariante delta, a multiplicidade e novos invariantes definidos no trabalho (Teorema 2.11).

No Capítulo 3, estudamos curvas irredutíveis monomiais em $\mathbb{C}^n$. Neste contexto, as técnicas desenvolvidas no capítulo anterior tornam-se bem mais simples, permitindo a obtenção de uma fórmula para a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$, em termos do invariante delta, da dimensão de mergulho e do tipo Cohen-Macaulay do anel local da curva. Como aplicação dos resultados obtidos, no caso de curvas de interseção completa, estabelecemos uma relação entre o número de Tjurina e a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$. Uma caracterização especial para este último

invariante é obtida para curvas monomiais em $\mathbb{C}^3$. Como consequência deste resultado, apresentamos condições necessárias e suficientes para que uma curva em $\mathbb{C}^3$ seja de interseção completa, através da $\mathcal{A}_e$ -codimensão de sua parametrização e do invariante delta. São apresentados, ainda alguns resultados gerais para curvas em $\mathbb{C}^n$ com boas propriedades, e neste caso obtemos uma estimativa para a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ em termos dos resultados obtidos para curvas monomiais. Como aplicação dos resultados apresentados sobre a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de curvas monomiais, completamos a classificação obtida por Gibson e Hobbs em [GH], determinando quais curvas são de interseção completa.

O estudo de curvas planas irredutíveis é discutido no Capítulo 4. Neste caso, um invariante que se destaca é o conjunto das lacunas especiais da curva. No Teorema 4.6, obtemos uma fórmula relacionando a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ com o invariante delta e o conjunto das lacunas especiais da curva. Tal fórmula estende, no caso irredutível, o resultado de D. Mond ([M1], Theorem 2.3) mencionado anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas noções básicas da Geometria Algébrica e da Teoria de Singularidades necessárias ao estudo local de curvas analíticas irreduzíveis. Estas duas abordagens se complementam, conduzindo a uma relação entre invariantes e a uma maior compreensão sobre as deformações de tais curvas.

Num primeiro momento estabelecemos alguns conceitos gerais sobre subvariedades analíticas complexas, em seguida apresentamos uma seção sobre curvas analíticas irreduzíveis em $\mathbb{C}^n$, com singularidade isolada, destacando alguns objetos que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho, entre eles, o semigrupo de valores e o módulo de diferenciais de Kähler associados a uma curva dada. Na seção seguinte, num contexto mais geral, destacamos os principais conceitos dentro da Teoria de Singularidades de aplicações, entre eles, as relações de equivalência de germes dadas pelos grupos de Mather, o desdobramento versal e a determinação finita. Na última seção deste capítulo, definimos alguns invariantes analíticos como o invariante delta, o número de Milnor, o número de Tjurina, a $\mathcal{A}_e$ -codimensão entre outros e apresentamos algumas relações entre os mesmos presentes na literatura.

1.1 Subvariedades Analíticas Complexas

Nesta seção são apresentados alguns conceitos básicos sobre subvariedades analíticas complexas necessários ao estudo local de curvas. Como referência citamos, por exemplo, [Fi], [Gu], [AM], entre outros.

DEFINIÇÃO 1.1. *Uma subvariedade analítica de um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ é um subconjunto V de U tal que para todo ponto $p \in V$, existe uma vizinhança aberta U_p de p em U e um*

número finito de funções analíticas $f_1, \dots, f_r$ em U_p tais que

$$V \cap U_p = \{q \in U_p; f_1(q) = \dots = f_r(q) = 0\}.$$

Denotamos por $\mathcal{O}_n = \{\text{germes de funções analíticas numa vizinhança da origem de } \mathbb{C}^n\}$. Este conjunto é um anel Noetheriano local, cujo ideal maximal será denotado por $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n; f(0) = 0\}$. Considere $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ o anel das séries de potências nas variáveis $X_1, \dots, X_n$ que convergem absolutamente em alguma vizinhança de 0. Pode-se provar que o anel $\mathcal{O}_n$ é isomorfo ao anel $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ (veja, por exemplo, [Gu] Theorem 2).

Sejam V e W subvariedades analíticas de $\mathbb{C}^n$. Definimos $V \sim W$ se existe uma vizinhança U de 0 tal que $V \cap U = W \cap U$. Esta é uma relação de equivalência. Denominamos a classe de equivalência de V como o **germe de V em 0**, que denotamos também por V , sempre que não houver risco de confusão.

Sejam $f_1, \dots, f_r$ germes em $\mathcal{O}_n$. Escolhemos uma vizinhança U de 0 tal que estes germes são representados por funções analíticas em U , que também denotamos por $f_1, \dots, f_r$. O conjunto $V(f_1, \dots, f_r)$ é o germe em 0 do conjunto $\{z \in U; f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}$ denominado o germe da subvariedade analítica definida por $f_1, \dots, f_r$.

Mais geralmente, seja I um ideal em $\mathcal{O}_n$. Como $\mathcal{O}_n$ é um anel Noetheriano, existe um número finito de germes $f_1, \dots, f_r$ tais que $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ (o ideal gerado por $f_1, \dots, f_r$). O conjunto $V(I) = V(f_1, \dots, f_r)$ é o germe da subvariedade analítica definida por I . É fácil verificar que ela não depende da escolha dos geradores de I . Reciprocamente, considere V um germe de subvariedade analítica em 0 e escolhamos uma vizinhança U de 0 tal que o germe é representado por uma subvariedade em U . É fácil ver que o conjunto

$$I(V) = \{f \in \mathcal{O}_n; f(z) = 0 \text{ para todo } z \in V \text{ numa vizinhança de } 0\}$$

é um ideal de $\mathcal{O}_n$.

DEFINIÇÃO 1.2. Um germe V de uma subvariedade analítica é **redutível** se $V = V_1 \cup V_2$ onde V_1 e V_2 são germes de subvariedades analíticas e $V_j \neq V$ para $j = 1, 2$. Um germe que não é redutível é **irredutível**.

TEOREMA 1.3. ([Gu]) Um germe V de uma subvariedade analítica é irredutível se, e somente se, $I(V)$ é um ideal primo.

Seja V o germe de uma subvariedade analítica de um conjunto aberto de $\mathbb{C}^n$, definida numa vizinhança de 0 por $f_1, \dots, f_r$. Defina

$$\mathcal{O}_V = \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}.$$

Este conjunto é um anel Noetheriano denominado o **anel de coordenadas da subvariedade** V em 0.

Considere V o germe de uma subvariedade analítica irredutível. Definimos a dimensão de V como sendo a dimensão de Krull do anel local $\mathcal{O}_V$. Se V é uma subvariedade analítica qualquer em $\mathbb{C}^n$, então V se escreve como uma união finita $V = \bigcup_{i=1}^r V_i$ onde cada V_i é uma subvariedade analítica irredutível. Neste caso a dimensão de V é dada por $\dim V = \max_{1 \leq i \leq r} \{\dim V_i\}$. Dizemos que V possui dimensão pura (ou é equidimensional) se todas as componentes irredutíveis V_i possuem a mesma dimensão.

Uma classe importante de germes de subvariedades analíticas são os germes de interseção completa.

DEFINIÇÃO 1.4. *Seja V um germe de subvariedade analítica em 0 de dimensão pura k em $\mathbb{C}^n$. Dizemos que V é uma **interseção completa** se o ideal $I(V)$ é gerado por $n - k$ germes de funções analíticas definidas numa vizinhança da origem. Em particular, se $k = n - 1$, V é um germe de hipersuperfície.*

1.2 Teoria de Curvas

Apresentamos nesta seção alguns conceitos da teoria algébrica local de curvas como suporte indispensável neste trabalho ao estudo de curvas analíticas em $\mathbb{C}^n$. Dentre os principais objetos a serem estudados estão o semigrupo de valores e o módulo de diferenciais de Kähler associados a uma curva dada. As principais referências são [Z2], [HH], [Her], [BK], [Wa2] entre outras.

Sejam $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$, séries que convergem absolutamente numa vizinhança da origem de $\mathbb{C}^n$, satisfazendo às seguintes propriedades:

- (a) $f_i(0) = 0$ para $i = 1, \dots, r$;
- (b) o ideal $\langle f_1, \dots, f_r \rangle$ é um ideal primo de $\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}$.

Uma **curva analítica irredutível** em $\mathbb{C}^n$ (ou um ramo), determinada(o) por $f_1, f_2, \dots, f_r$ é o conjunto $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{C}^n; f_1(X) = \dots = f_r(X) = 0\}$ em alguma vizinhança da origem, tal que o anel

$$\mathcal{O} = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}$$

é um domínio cuja dimensão de Krull é igual 1.

O anel de coordenadas $\mathcal{O}$ ($= \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$) é um domínio Noetheriano, local e completo e neste caso será chamado o anel local da curva $\mathcal{C}$, cujo ideal maximal será denotado por $\mathcal{M}$. No que segue, a origem de $\mathbb{C}^n$ é uma singularidade isolada da curva $\mathcal{C}$.

No trabalho, mesmo que não mencionado, estaremos sempre considerando germes de curvas analíticas.

Por razões de dimensão, um conjunto de geradores $f_1, \dots, f_r$ do ideal que define uma curva analítica irredutível $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}^n$ tem pelo menos $n - 1$ elementos (veja [Ei], pag. 248). Em particular no caso em que a curva $\mathcal{C}$ possui pelo menos um conjunto de geradores, com exatamente $n - 1$ elementos, a curva é uma **interseção completa** (Definição 1.4).

EXEMPLO 1.5. *Curvas Planas*

Uma curva analítica plana irredutível $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}^2$, é o conjunto dos zeros de uma série de potências $f \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$, convergente numa vizinhança da origem de $\mathbb{C}^2$ e tal que f é irredutível em $\mathbb{C}\{X_1, X_2\}$, com $f \in \mathcal{M}$, $f \neq 0$. Os conjuntos $f^{-1}(0)$ e $g^{-1}(0)$ definem a mesma curva se, e somente se, $g = Uf$, para alguma unidade $U \in \mathbb{C}\{X_1, X_2\}$. Em particular, todo ramo plano é de interseção completa.

Considere $\mathcal{O}$ o anel local de uma curva analítica irredutível $\mathcal{C}$, seja $\mathcal{K}$ o corpo de frações de $\mathcal{O}$ e $\overline{\mathcal{O}}$ o fecho inteiro de $\mathcal{O}$ em $\mathcal{K}$. O anel $\overline{\mathcal{O}}$ é um anel de valorização discreta. Pode-se provar que

$$\overline{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{C}\{t\},$$

onde t é uma indeterminada (veja [AM]).

Note que,

$$\mathcal{O} = \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\},$$

onde $x_i = X_i + \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Como $\mathcal{O} \subseteq \bar{\mathcal{O}}$, temos o seguinte monomorfismo de $\mathbb{C}$ -álgebras

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{O} &\rightarrow \bar{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{C}\{t\} \\ x_i &\mapsto p_i(t) \end{aligned}$$

onde $p_i(t) \in \mathcal{M}_t \setminus \{0\}$, para $i = 1, \dots, n$ e $\mathcal{M}_t$ é o ideal maximal de $\mathbb{C}\{t\}$.

Veja que se $\Phi: \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle}$ é o epimorfismo canônico, então considerando

$$\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\} \xrightarrow{\Phi} \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}}{\langle f_1, \dots, f_r \rangle} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}\{t\}$$

temos que, para cada $i = 1, \dots, n$

$$0 = \varphi \circ \Phi(f_i(X_1, \dots, X_n)) = \varphi(f_i(x_1, \dots, x_n)) = f_i(p_1(t), \dots, p_n(t)).$$

As considerações acima garantem a existência de uma parametrização para o conjunto dos zeros de $f_1, \dots, f_r$ numa vizinhança da origem. A representação

$$\begin{cases} x_1 = p_1(t) \\ x_2 = p_2(t) \\ \vdots \\ x_n = p_n(t) \end{cases}$$

será chamada de parametrização de $\mathcal{C}$, onde identificamos x_i com sua imagem $\varphi(x_i) = p_i(t)$. Claramente, tem-se que

$$\mathcal{O} \simeq \varphi(\mathcal{O}) = \mathbb{C}\{p_1(t), \dots, p_n(t)\} \subseteq \mathbb{C}\{t\}. \quad (1.1)$$

Como $\mathcal{C}$ é uma curva definida sobre um corpo de característica zero, sempre podemos obter uma parametrização dada por

$$\begin{cases} x_1 = t^m \\ x_2 = p_2(t) \\ \vdots \\ x_n = p_n(t) \end{cases}$$

com $m = \min\{\text{ord } p_i(t), i = 1, \dots, n\}$, chamada **parametrização de Newton-Puiseux** de $\mathcal{C}$.

O inteiro m é a *multiplicidade da curva* $\mathcal{C}$.

Dizemos que uma parametrização é primitiva, se não é possível fazer uma substituição do tipo $u = t^s$, tal que a parametrização $\{x_1 = p_1(u), \dots, x_n = p_n(u)\}$ determine a mesma curva. Deste modo, numa parametrização primitiva o máximo divisor comum de m e dos expoentes dos termos das séries $p_i(t)$'s é igual a 1. Ao longo de todo o trabalho as parametrizações serão sempre primitivas.

EXEMPLO 1.6. *Curvas Monomiais*

Uma curva monomial em $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma curva que admite uma parametrização da forma

$$\begin{cases} x_1 &= t^{v_1} \\ x_2 &= t^{v_2} \\ &\vdots \\ x_n &= t^{v_n}. \end{cases}$$

1.2.1 Semigrupo de Valores

O semigrupo de valores associado a uma curva é um importante objeto dentro da teoria algébrica de curvas e neste trabalho particularmente desempenha um papel fundamental.

Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$, com $0 \in S$. Dizemos que S é um semigrupo se S é fechado em relação a operação usual de adição.

Considere $\mathcal{C}$ uma curva analítica irreduzível, $\phi(t) = (t^m, p_2(t), \dots, p_n(t))$ uma parametrização de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{O}$ o anel local de $\mathcal{C}$. Como vimos

$$\begin{aligned} \varphi: \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbb{C}\{t\} = \overline{\mathcal{O}} \\ g &\longmapsto \varphi(g) = g(t) \end{aligned}$$

é tal que $\mathcal{O} \simeq \varphi(\mathcal{O}) = \mathbb{C}\{t^m, p_2(t), \dots, p_n(t)\} \subset \mathbb{C}\{t\}$.

O **semigrupo de valores** da curva $\mathcal{C}$ é o conjunto

$$\Gamma = \{v(g); g \in \mathcal{O} \setminus \{0\}\},$$

onde $v(g) = v(g(t))$ e v é a valorização natural de $\mathbb{C}\{t\}$. Convencionamos que $v(0) = \infty$.

Todo subanel de $\mathbb{C}\{t\}$ determina um semigrupo $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$.

Definimos o conjunto L das lacunas do semigrupo Γ , como sendo o conjunto $\mathbb{N} \setminus \Gamma$.

Quando o número de lacunas é finito existe um único elemento $c \in \Gamma$ satisfazendo

- (a) $c - 1 \notin \Gamma$
- (b) se $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq c$ então $n \in \Gamma$.

Este elemento c será chamado o **condutor do semigrupo** Γ .

Uma propriedade importante dos semigrupos associados a curvas analíticas irredutíveis é que este sempre possui condutor.

Vários destes conceitos e resultados valem mais geralmente para curvas algebróides irredutíveis, ou seja, cujos geradores $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_n]]$, o anel das séries de potências formais nas variáveis $X_1, \dots, X_n$.

Se $\Gamma \subseteq \mathbb{N}$ é um semigrupo então Γ é finitamente gerado, ou seja, existem elementos $v_0, v_1, \dots, v_g \in \Gamma$ tais que todo $u \in \Gamma$, pode ser expresso como $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_g v_g$ com $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para $0 \leq i \leq g$.

No caso de curvas analíticas (algebróides) irredutíveis, o semigrupo Γ associado a uma curva possui um sistema mínimo de geradores $v_0, v_1, \dots, v_g$ desta forma denotaremos $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$. Tais geradores podem ser obtidos calculando as ordens dos elementos de uma **Base Standard Mínima** $\{h_0, h_1, \dots, h_g\}$ do anel local $\mathcal{O}$, isto é, um conjunto mínimo de geradores de $\mathcal{O}$ tais que $v(h_i) = v_i$. Em [HH] são apresentados algoritmos para obtenção de tais Bases Standard. Em particular foram implementados em Maple e CoCoA, programas para o cálculo do semigrupo de valores de uma curva irredutível em $\mathbb{C}^n$, bem como para obtenção de uma Base Standard para o módulo de diferenciais associado a uma curva, que definiremos logo adiante.

EXEMPLO 1.7. *Seja C a curva plana irredutível dada pela parametrização*

$$\begin{cases} x &= t^4 \\ y &= t^6 + t^7. \end{cases}$$

Uma Base Standard Mínima para o anel local $\mathcal{O}$ é dada por $B = \{x, y, x^3 - y^2\}$. Deste modo, tomando as ordens dos elementos de B , determinamos os geradores do semigrupo

Γ da curva $\mathcal{C}$. Como $v(x) = 4$, $v(y) = 6$ e $v(x^3 - y^2) = v(-2t^{13} - t^{14}) = 13$ temos que

$$\Gamma = \langle 4, 6, 13 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, \dots\}.$$

Portanto $c = 16$ é o condutor do semigrupo e o conjunto das lacunas de Γ é dado por $L = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 15\}$.

DEFINIÇÃO 1.8. Seja $\Gamma \subset \mathbb{N}$ um semigrupo com condutor c e $0 \neq p \in \Gamma$. Definimos $a_0 = 0$ e indutivamente

$$a_i = \min \left\{ \Gamma \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} (a_j + p\mathbb{N}) \right\}$$

para $i = 1, \dots, p-1$.

A sequência $a_0 < a_1 < \dots < a_{p-1}$ é chamada a **seqüência de Apéry** de Γ com relação à p . O conjunto $A_p = \{a_0, a_1, \dots, a_{p-1}\}$ é denominado conjunto de Apéry.

De agora em diante, sempre que nos referirmos à seqüência de Apéry de um semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ de uma curva, esta será determinada com relação à v_0 , ou seja, com relação à multiplicidade da curva.

Segue da definição, que dada a seqüência de Apéry com relação à v_0 temos as seguintes propriedades:

1. $a_i \not\equiv a_j \pmod{v_0}$ para $0 \leq i, j \leq v_0 - 1$ com $i \neq j$;
2. $\Gamma = \bigcup_{j=0}^{v_0-1} (a_j + v_0\mathbb{N})$;
3. $c = a_{v_0-1} - v_0 + 1$.

Note que todo elemento a da seqüência de Apéry é expresso como $a = n_1 v_1 + \dots + n_g v_g$, com $n_i \in \mathbb{N}$. De fato, como $a \in \Gamma$ temos que $a = n_0 v_0 + n_1 v_1 + \dots + n_g v_g$, para algum $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1, \dots, g$. Suponha $n_0 \neq 0$. Isso implica que $a - n_0 v_0 = n_1 v_1 + \dots + n_g v_g \in \Gamma$. Pela propriedade (2), existe $a_j \in A_p$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $a - n_0 v_0 = a_j + k v_0$, o que implica que $a = a_j + (k + n_0) v_0$, ou seja, $a \equiv a_j \pmod{v_0}$, o que contradiz a propriedade (1) acima. Logo, $a = n_1 v_1 + \dots + n_g v_g$.

Pelo mesmo argumento anterior, os elementos da forma $a_j - k v_0 \notin \Gamma$ com $k \in \mathbb{N}$, ou seja, as lacunas do semigrupo podem ser determinadas através da seqüência de Apéry.

Uma classe de curvas amplamente estudada na literatura são as curvas Gorenstein, que podem ser definidas à partir de uma propriedade sobre seu semigrupo de valores.

DEFINIÇÃO 1.9. *Seja Γ um semigrupo com condutor c . Γ é um **semigrupo simétrico** se para todo $z \in \mathbb{Z}$ temos*

$$z \in \Gamma, \text{ se e somente se, } c - 1 - z \notin \Gamma.$$

As afirmações abaixo são equivalentes:

- (i) Γ é um semigrupo simétrico;
- (ii) $\mathbb{N} \setminus \Gamma = z(\Gamma \cap [0, c-1]) = \frac{c}{2}$.

PROPOSIÇÃO 1.10. ([Ap]) *Seja $\Gamma := \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ um semigrupo cujo conjunto de Apéry é dado por $A_p = \{a_0, a_1, \dots, a_{v_0-1}\}$. São equivalentes:*

- (a) Γ é um semigrupo simétrico;
- (b) $a_{v_0-1} - a_i \in A_p$ para cada $i = 0, 1, \dots, v_0 - 1$;
- (c) $a_i + a_j = a_{v_0-1}$ para $0 \leq i, j \leq v_0 - 1$ e $i + j = v_0 - 1$.

DEFINIÇÃO 1.11. *Dizemos que um ramo $\mathcal{C}$ é **Gorenstein** se seu semigrupo de valores é simétrico.*

EXEMPLO 1.12. *Toda curva de interseção completa é Gorenstein (veja [Ei], Corolário 21.19). Em particular, toda curva plana é Gorenstein.*

1.2.2 Módulo de Diferenciais de Kähler

Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^n$, como definida anteriormente. O **$\mathcal{O}$ -módulo de diferenciais de Kähler** associado à curva $\mathcal{C}$ é o $\mathcal{O}$ -módulo gerado por $dx_1, \dots, dx_n$, denotado por

$$\mathcal{O}d\mathcal{O} = \mathcal{O}dx_1 + \mathcal{O}dx_2 + \dots + \mathcal{O}dx_n,$$

onde $\mathcal{O}$ é o anel local da curva.

Consideremos o seguinte homomorfismo de $\mathcal{O}$ -módulos,

$$\begin{aligned}\Psi: \mathcal{O}dx_1 + \cdots + \mathcal{O}dx_n &\longrightarrow \overline{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{C}\{t\} \\ g_1dx_1 + \cdots + g_ndx_n &\longmapsto g_1(t)\frac{dx_1(t)}{dt} + \cdots + g_n(t)\frac{dx_n(t)}{dt},\end{aligned}$$

onde $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{O}$.

O submódulo de torção de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ é definido por

$$\mathcal{T} = \{\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}; \exists h \in \mathcal{O} \setminus \{0\} \text{ com } h\omega = 0\}.$$

Pode-se mostrar que $\mathcal{T} = \text{Ker}(\Psi)$ (veja [HH]). Em geral o módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ não tem torção nula. Consideraremos

$$\frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{\mathcal{T}} \simeq \text{Im}(\Psi) \subset \mathbb{C}\{t\}.$$

No que segue, vamos identificar o módulo de diferenciais $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ com sua imagem em $\mathbb{C}\{t\}$ pela aplicação Ψ .

DEFINIÇÃO 1.13. *Seja $\omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}/\mathcal{T}$. Definimos a ordem da diferencial ω como sendo $v(\omega) = v(\Psi(\omega)) + 1$, onde v denota a valorização discreta de $\overline{\mathcal{O}}$.*

DEFINIÇÃO 1.14. *Dizemos que uma diferencial $w \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ é exata, se existe $g \in \mathcal{O}$ tal que $w = dg$. Caso contrário, dizemos que w é uma diferencial não exata.*

Note que, se $w \in \mathcal{O}d\mathcal{O}/\mathcal{T}$ é uma diferencial exata, então $v(w) \in \Gamma$. Logo, se $v(w) \in L$, então certamente w é uma diferencial não exata.

Considere o conjunto $\Delta = \{v(\omega); \omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}/\mathcal{T}\}$.

Note que, se $h \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, então $dh = h_x dx + h_y dy \in \mathcal{O}d\mathcal{O}$ e satisfaz

$$v(dh) = v(\Psi(dh)) + 1 = v(h) \in \Delta.$$

Portanto, $\Gamma \subset \Delta$.

Os elementos de $\Delta \setminus \Gamma$ são chamados de **lacunas especiais do semigrupo Γ** , ou da curva, ou seja, são aquelas lacunas que são dadas como ordem de uma diferencial não exata de $\mathcal{O}d\mathcal{O}/\mathcal{T}$.

O conjunto Δ pode ser determinado por meio de uma Base Standard para o módulo $\mathcal{O}d\mathcal{O}$, que é um conjunto de geradores particulares para este módulo. Um algoritmo para o cálculo de tais Bases, bem como do conjunto Δ pode ser encontrado em [HH].

1.3 Teoria de Singularidades de Aplicações

Nesta seção definimos alguns conceitos básicos da Teoria de Singularidades de Aplicações, entre eles, as relações de equivalência dadas pelos grupos de Mather, desdobramento versal e determinação finita. Num primeiro momento nossos objetos serão definidos num contexto mais geral, para germes de aplicações.

Considere o conjunto

$$\mathcal{O}(n, p) = \{f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0 ; f \text{ germe de aplicação analítica numa vizinhança de } 0\}.$$

Quando $p = 1$ temos que $\mathcal{O}(n, 1) = \mathcal{O}_n$ é o conjunto dos germes de funções analíticas definidas numa vizinhança da origem de $\mathbb{C}^n$, definido anteriormente. Note que $\mathcal{O}(n, p)$ é um $\mathcal{O}_n$ -módulo livre de posto p .

Os elementos em $\mathcal{O}(n, p)$ podem ser identificados através de certas relações de equivalência dadas por ações de grupos.

DEFINIÇÃO 1.15. *Seja G um grupo e M um conjunto. Uma ação de G em M é uma aplicação $\Phi : G \times M \rightarrow M$ com $(g, x) \mapsto g \cdot x$, que para todo $x \in M$ satisfaz:*

$$(a) \quad \Phi(1, x) = 1 \cdot x = x, \text{ onde } 1 \text{ é o elemento identidade de } G;$$

$$(b) \quad \Phi(gh, x) = g \cdot (h \cdot x), \text{ para todo } g, h \in G.$$

Dada uma ação, podemos definir uma relação de equivalência $\sim$ em M do seguinte modo: se $x, y \in M$ dizemos que x é **G -equivalente** a y , se existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$. Indicamos essa equivalência por $x \underset{G}{\sim} y$.

A classe de equivalência de um elemento $x \in M$ é chamada a **órbita** de x e denotada por

$$G(x) = \{g \cdot x ; \text{ para todo } g \in G\}.$$

1.3.1 Os Grupos de Mather $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$

Vamos introduzir os grupos de Mather e suas ações sobre $\mathcal{O}(n, p)$.

O grupo de mudanças de coordenadas na fonte é definido por

$$\mathcal{R} = \{h : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0 : h \text{ é germe de bi-holomorfismo}\},$$

cuja ação sobre $f \in \mathcal{O}(n, p)$ é a composição à direita, ou seja, $f \circ h^{-1}$.

Já o grupo de mudanças de coordenadas na meta é dado por

$$\mathcal{L} = \{k : \mathbb{C}^p, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0 : k \text{ é germe de bi-holomorfismo}\},$$

cuja ação sobre $f \in \mathcal{O}(n, p)$ é a composição à esquerda, ou seja, $k \circ f$.

O **grupo das mudanças de coordenadas na fonte e na meta**, denotado por $\mathcal{A} = \mathcal{R} \times \mathcal{L}$, é o grupo dos germes de bi-holomorfismos $(h, k) \in \mathcal{R} \times \mathcal{L}$ tais que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n, 0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^p, 0 \\ \downarrow h & & \downarrow k \\ \mathbb{C}^n, 0 & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}^p, 0 \end{array}$$

ou seja, sua ação sobre $f \in \mathcal{O}(n, p)$ é dada por $k \circ f \circ h^{-1}$.

O **grupo de contato** $\mathcal{K}$ é o grupo dos germes de bi-holomorfismos (H, h) , com

$$H : \mathbb{C}^{n+p}, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^{n+p}, 0 \quad \text{e} \quad h : \mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n, 0$$

tais que,

- (i) $H \circ i = i \circ h$, onde $i : \mathbb{C}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0$ é a inclusão $i(x) = (x, 0)$,
- (ii) $\pi_1 \circ H = h \circ \pi_1$ onde $\pi_1 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^n, 0$ é a projeção natural na primeira coordenada, e
- (iii) $\pi_2 \circ H(x, 0) = 0$ onde $\pi_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p, 0$ é a projeção natural na segunda coordenada.

A ação de $\mathcal{K}$ em $\mathcal{O}(n, p)$ é definida da seguinte maneira $(h(x), H \cdot f(x)) = H(x, f(x))$,

ou seja, a ação é sobre o gráfico de f :

$$\text{graf}(H(f)) = H(\text{graf}(f)).$$

Em outras palavras, $f \underset{\mathcal{K}}{\sim} g$ com $f, g \in \mathcal{O}(n, p)$, se o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n, 0 & \xrightarrow{(I_n, f)} & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{C}^n, 0 \\ h \downarrow & & \downarrow H & & \downarrow h \\ \mathbb{C}^n, 0 & \xrightarrow{(I_n, g)} & \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p, 0 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{C}^n, 0. \end{array}$$

onde I_n é a aplicação identidade de $\mathbb{C}^n$. O grupo $\mathcal{C}$ é obtido tomando $h = I_n$, na definição do grupo $\mathcal{K}$.

Vamos definir os espaços tangentes às órbitas dos grupos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{K}$, pois são os objetos que nos interessam neste trabalho. Denotemos por $T\mathbb{C}^n$ o fibrado tangente a $\mathbb{C}^n$. Considere o seguinte diagrama de fibrados tangentes

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{C}^n & \xrightarrow{Tf} & T\mathbb{C}^p \\ \pi_1 \downarrow & \nearrow \sigma & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{C}^n, 0 & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^p, 0 \end{array}.$$

Um campo de vetores ao longo de f é um germe $\sigma : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow T\mathbb{C}^p$ tal que $\pi_2 \circ \sigma = f$. Indiquemos por

$$\theta(f) = \{ \sigma : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow T\mathbb{C}^p ; \text{ germe de campos de vetores ao longo de } f \}.$$

Similarmente definimos

$$\theta(n) = \{ s : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow T\mathbb{C}^n ; \pi_1 \circ s = I_n \}$$

e

$$\theta(p) = \{ \eta : \mathbb{C}^p, 0 \rightarrow T\mathbb{C}^p ; \pi_2 \circ \eta = I_p \}.$$

Os conjuntos $\theta(n)$ e $\theta(p)$ são os conjuntos dos campos de vetores ao longo da identidade em $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^p$, respectivamente.

É fácil verificar que $\theta(f)$ é isomorfo a $\mathcal{O}(n, p)$. Assim, $\theta(f)$ é um $\mathcal{O}_n$ -módulo livre de

posto p . Analogamente, $\theta(n)$ é um $\mathcal{O}_n$ -módulo livre de posto n e $\theta(p)$ é um $\mathcal{O}_p$ -módulo livre de posto p .

Considere as aplicações,

$$\begin{aligned} \iota f : \theta(n) &\longrightarrow \theta(f) \\ s &\longmapsto \iota f(s) = df(s), \end{aligned}$$

onde df é a diferencial de f . E

$$\begin{aligned} wf : \theta(p) &\longrightarrow \theta(f) \\ \eta &\longmapsto wf(\eta) = \eta \circ f. \end{aligned}$$

A aplicação ιf é um homomorfismo de $\mathcal{O}_n$ módulos. Por outro lado, podemos observar através da aplicação

$$\begin{aligned} f^* : \mathcal{O}_p &\dashrightarrow \mathcal{O}_n \\ \eta &\longmapsto f^*(\eta) = \eta \circ f, \end{aligned}$$

que wf é um morfismo sobre f^* , isto é:

DEFINIÇÃO 1.16. *Se A é um R -módulo, B um S -módulo e $\phi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis, então $\Phi : A \longrightarrow B$ é um morfismo sobre ϕ , se $\Phi(\alpha a + \beta b) = \phi(\alpha)\Phi(a) + \phi(\beta)\Phi(b)$ para todo $\alpha, \beta \in R$ e $a, b \in A$.*

Sejam

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n\theta(n) &= \{s \in \theta(n); s(0) = 0\} \text{ e} \\ \mathcal{M}_p\theta(p) &= \{\eta \in \theta(p); \eta(0) = 0\}. \end{aligned}$$

submódulos de $\theta(n)$ e $\theta(p)$, respectivamente, onde $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n; f(0) = 0\}$ é o ideal maximal do anel local $\mathcal{O}_n$, similarmente para $\mathcal{M}_p$.

O espaço tangente à órbita de f pela ação do grupo $\mathcal{A}$ é definido como

$$T\mathcal{A}(f) = \iota f(\mathcal{M}_n\theta(n)) + wf(\mathcal{M}_p\theta(p)),$$

onde $T\mathcal{R}(f) = \iota f(\mathcal{M}_n\theta(n))$ e $T\mathcal{L}(f) = wf(\mathcal{M}_p\theta(p))$ são os espaços tangentes às órbitas de f , pelos grupos $\mathcal{R}$ e $\mathcal{L}$, respectivamente. É fácil ver que $T\mathcal{R}(f)$ possui uma estrutura de $\mathcal{O}_n$ -módulo e $T\mathcal{L}(f)$ possui uma estrutura de $f^*(\mathcal{O}_p)$ -módulo. Assim, $T\mathcal{A}(f)$ possui

uma estrutura de $f^*(\mathcal{O}_p)$ -módulo.

Por sua vez, o **espaço tangente à órbita de f pela ação do grupo $\mathcal{K}$** é definido como

$$TK(f) = tf(\mathcal{M}_n\theta(n)) + f^*(\mathcal{M}_p)\theta(f).$$

Neste trabalho estamos particularmente interessados no espaço tangente estendido à $\mathcal{A}$ -órbita de f definido como

$$T\mathcal{A}_e(f) = tf(\theta(n)) + wf(\theta(p)).$$

Note que, neste caso, podemos considerar elementos $s \in \theta(n)$ e $\eta \in \theta(p)$ tais que $s(0) \neq 0$ e $\eta(0) \neq 0$.

Dada uma curva analítica irreduzível $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}^n$, seja $\phi : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ uma parametrização da curva $\mathcal{C}$, que a menos de mudanças de coordenadas pelo grupo $\mathcal{A}$, pode ser dada por

$$\phi : \begin{cases} x_0 &= t^{v_0} \\ x_1 &= t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_{i1}t^i \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= t^{v_{n-1}} + \sum_{i>v_{n-1}} a_{in-1}t^i. \end{cases} \quad (1.2)$$

Em coordenadas, o $\mathcal{A}_e$ -espaço tangente estendido à órbita de ϕ é dado por

$$T\mathcal{A}_e(\phi) = \left\{ \begin{bmatrix} v_0 t^{v_0-1} \\ v_1 t^{v_1-1} + \dots \\ \vdots \\ v_{n-1} t^{v_{n-1}-1} + \dots \end{bmatrix} [\epsilon(t)] + \begin{bmatrix} \eta_0(\phi(t)) \\ \eta_1(\phi(t)) \\ \vdots \\ \eta_{n-1}(\phi(t)) \end{bmatrix} ; \begin{matrix} \epsilon \in \mathcal{O}_1 \text{ e } \eta_i \in \mathcal{O}_n, \\ 0 \leq i \leq n-1 \end{matrix} \right\}.$$

Naturalmente temos que $\mathcal{O}_1 = \{f : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0; f \text{ germe de função analítica}\} \simeq \mathbb{C}\{t\}$, ou seja, $\mathcal{O}_1 \simeq \overline{\mathcal{O}}$, onde $\overline{\mathcal{O}}$ é o fecho integral do anel local $\mathcal{O}$ da curva em seu corpo de frações.

O espaço tangente estendido do grupo $\mathcal{K}$ é

$$TK_e(f) = tf(\theta(n)) + f^*(\mathcal{M}_p)\theta(f).$$

Denotemos por $\mathcal{G}$ qualquer um dos grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}$ ou $\mathcal{K}$.

Dado $f \in \mathcal{O}(n, p)$, definimos a $\mathcal{G}$ -codimensão ($\mathcal{G}_e$ -codimensão) de f por

$$\mathcal{G}cod(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}_n\theta(f)}{T\mathcal{G}(f)} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_ecod(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(f)}{T\mathcal{G}_e(f)}.$$

1.3.2 Desdobramento Versal

O conceito de desdobramento versal foi introduzido por R. Thom e representa uma contribuição importante da Teoria de Singularidades para outras áreas da matemática.

DEFINIÇÃO 1.17. Um **desdobramento** a s -parâmetros de um germe $f_0 \in \mathcal{O}(n, p)$ é um germe

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 &\longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0 \\ (x, u) &\longmapsto (f(x, u), u) \end{aligned}$$

tal que $f(x, 0) = f_0(x)$.

O germe $f(x, u)$ é uma **deformação** de f_0 .

DEFINIÇÃO 1.18. Dois desdobramentos $F, G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0$ de f_0 são $\mathcal{A}_e$ -isomorfos, se existirem desdobramentos da identidade I :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 &\longrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^s, 0 \\ (x, u) &\longmapsto (h(x, u), u), \quad \text{com } h(x, 0) = I_n(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K : \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0 &\longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^s, 0 \\ (y, u) &\longmapsto (k(y, u), u), \quad \text{com } h(x, 0) = I_p(x) \end{aligned}$$

tais que, $K \circ F \circ H^{-1} = G$.

DEFINIÇÃO 1.19. Dado um germe $h : \mathbb{C}^t, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ com $u = h(v)$, definimos o pull-back h^*F de F por h , como sendo o desdobramento de f_0 a t parâmetros $(h^*F)(x, v) = (f(x, h(v)), v)$.

Dois desdobramentos F, G de f_0 são **equivalentes**, se existir um germe de difeomorfismo $h : \mathbb{C}^s, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ tal que G é isomorfo a h^*F .

DEFINIÇÃO 1.20. Se G é um desdobramento de f_0 a t parâmetros, dizemos que G é **induzido por F** se existe um germe $h : \mathbb{C}^t, 0 \rightarrow \mathbb{C}^s, 0$ (t não necessariamente igual a s) tal que G é isomorfo à h^*F .

Dizemos que F é um **desdobramento versal** se todos os desdobramentos de f_0 são induzidos por F .

A $\mathcal{A}_c$ -codimensão de um germe f é o número mínimo de parâmetros necessários num $\mathcal{A}_c$ -desdobramento versal de f (ver [Ma], XIV 1.1).

Dado $f_0 \in \mathcal{O}(n, p)$, sejam $l = \mathcal{A}_c \text{cod}(f_0) < \infty$ e $g_1, \dots, g_l \in \theta(f) \simeq \mathcal{O}(n, p)$ uma $\mathbb{C}$ -base para o complementar de $T\mathcal{A}_c(f)$ em $\theta(f)$, ou seja, uma base para o **espaço normal** $\mathcal{N} = \frac{\theta(f)}{T\mathcal{A}_c(f_0)}$. Podemos definir um desdobramento F de f_0 por

$$F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0 \longrightarrow \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^l, 0$$

$$(x, u) \longmapsto (f(x, u), u),$$

onde $f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^l g_i(x)u_i$. Este desdobramento F é versal.

1.3.3 Determinação Finita

Para introduzir o conceito de determinação finita torna-se necessária a definição de k -jato. Dado $f \in \mathcal{O}(n, p)$, considere a série de Taylor de f em 0 truncada na ordem k . Duas aplicações $f, g \in \mathcal{O}(n, p)$ têm o mesmo k -jato na origem se seus polinômios de Taylor em 0 de grau k coincidem. A classe de equivalência definida pela relação acima é denominada o **k -jato** de f na origem e a notação usual é $j^k f(0)$. O conjunto de tais elementos, isto é, aplicações polinomiais de grau menor ou igual à k com termo constante zero, é denotado por $J^k(n, p)$.

DEFINIÇÃO 1.21. Um germe $f \in \mathcal{O}(n, p)$ é k - $\mathcal{G}$ -determinado se para todo $g \in \mathcal{O}(n, p)$ com $j^k g(0) = j^k f(0)$ temos $f \sim_{\mathcal{G}} g$, ou seja, se a $\mathcal{G}$ -órbita de f contém o conjunto de todos os germes $g \in \mathcal{O}(n, p)$ tais que $j^k g(0) = j^k f(0)$.

Diremos que f é $\mathcal{G}$ -finitamente determinado se f é k - $\mathcal{G}$ -determinado para algum $k < \infty$.

Existem critérios para determinar se um dado germe de aplicação é ou não finitamente determinado, um deles é o chamado **critério geométrico de determinação finita**. Apresentamos abaixo uma versão deste critério para o grupo $\mathcal{K}$:

TEOREMA 1.22. ([Wa1], Theorem 2.1) *Seja $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ com $n \geq p$ então 0 é uma singularidade isolada de $f^{-1}(0)$ se, e somente se, f é $\mathcal{K}$ -finitamente determinado.*

Pode-se provar que, se $f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ (com $n \geq p$) é um germe de aplicação $\mathcal{K}$ -finitamente determinado então o conjunto $f^{-1}(0)$ é um germe de **interseção completa** de dimensão pura $n - p$.

Outro critério de determinação finita é o chamado **critério infinitesimal de Mather**, que enunciamos abaixo:

TEOREMA 1.23. ([Wa1], Theorem 1.2) *Para todo $f \in \mathcal{O}(n, p)$ e cada grupo $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$ as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) f é finitamente $\mathcal{G}$ -determinado,
- (b) para algum k , $T\mathcal{G}(f) \supset \mathcal{M}_n^k \theta(f)$,
- (c) $\mathcal{G}cod(f) < \infty$,
- (d) $\mathcal{G}_c cod(f) < \infty$.

PROPOSIÇÃO 1.24. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^n$ e $\phi : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ uma parametrização da curva. Então ϕ é $\mathcal{A}$ -finitamente determinada.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja a parametrização ϕ como em 1.2. O submódulo $\mathcal{M}_1^k \theta(\phi)$ de $\theta(\phi)$ é gerado pelos elementos $(t^k, 0, \dots, 0), (0, t^k, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, t^k)$.

Associado à curva $\mathcal{C}$, tem-se um semigrupo de valores Γ com condutor c . Sabemos que para todo $k \in \Gamma$, existe $g \in \mathcal{O}$ com $g \neq 0$ tal que $g(\phi(t)) = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \dots$, com

$a_i \in \mathbb{C}$, $i \geq k$ e $a_k \neq 0$, deste modo $v(g) = v(g(\phi(t))) = k$. O espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ é dado pelo conjunto

$$T\mathcal{A}(\phi) := \left\{ \begin{bmatrix} v_0 t^{v_0-1} \\ v_1 t^{v_1-1} + \dots \\ \vdots \\ v_{n-1} t^{v_{n-1}-1} + \dots \end{bmatrix} [\epsilon(t)] = \begin{bmatrix} \eta_0(\phi(t)) \\ \eta_1(\phi(t)) \\ \vdots \\ \eta_{n-1}(\phi(t)) \end{bmatrix}; \begin{matrix} \epsilon \in \mathcal{M}_1 \mathcal{O}_1 \text{ e } \eta_i \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_n, \\ 0 \leq i \leq n-1 \end{matrix} \right\}.$$

Vamos denotar os elementos do espaço tangente à órbita de ϕ como um elemento em $\mathbb{C}\{t\}^n := \mathbb{C}\{t\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t\}$.

Tomando $\epsilon = 0$, $\eta_i = g \in \mathcal{O}$ e $\eta_j = 0$ para $j = 1, \dots, n$ com $j \neq i$ obtemos o elemento $(0, \dots, 0, g(\phi(t)), 0, \dots, 0) \in T\mathcal{A}(\phi)$. Em outras palavras, para todo $k \in \Gamma$, obtemos um elemento em $T\mathcal{A}(\phi)$ cuja coordenada não nula possui ordem k . Como c é o condutor do semigrupo, todo $k \in \mathbb{N}$ com $k \geq c$ pertence ao semigrupo. Portanto todos os geradores de $\mathcal{M}_1^k \theta(\phi)$ módulo $\mathcal{M}_1^{k+1} \theta(\phi)$ pertencem à $T\mathcal{A}(\phi)$ para $k \geq c$. Como tal fato se verifica para todo k maior ou igual a c , temos que $\mathcal{M}_1^k \theta(\phi) \subset T\mathcal{A}(\phi)$ para todo $k \geq c$. Pelo Teorema 1.23, o germe ϕ é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado.

Pela proposição anterior e pelo critério infinitesimal de Mather, temos que se ϕ é uma parametrização de uma curva analítica irreduzível então $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ é finita.

Mais geralmente, para cada um dos grupos $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{K}$ (e até para uma classe mais ampla dos grupos geométricos introduzida por Damon) a condição de codimensão finita é equivalente à existência de um desdobramento versal.

1.4 Invariantes Aritméticos

Definimos aqui alguns invariantes da teoria de curvas e apresentamos relações entre os mesmos presentes na literatura, ver por exemplo, [Ber], [B], [BG], [Gr1], [Gr2], [M1], [Mil] *et al.*

Segue do critério geométrico de determinação finita (Teorema 1.22) que a equivalência de contato (grupo $\mathcal{K}$) é a noção correta para o estudo de curvas definidas implicitamente como o conjunto de zeros de aplicações. Já no caso de curvas dadas por parametrizações, o grupo $\mathcal{A}$ é o mais adequado (ver Proposição 1.24).

Desse modo, neste trabalho, um objeto $\mathcal{K}$ -invariante é um invariante na classe das

curvas dadas implicitamente e um objeto $\mathcal{A}$ -invariante se refere às curvas dadas parametricamente. Não apresentamos uma demonstração por se tratar de resultados bem conhecidos na literatura.

Seja $\phi : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^n, 0$ uma parametrização de uma curva analítica irreduzível $\mathcal{C}$. A $\mathcal{A}_c$ -codimensão do germe ϕ é um $\mathcal{A}$ -invariante analítico de ϕ .

O **semigrupo de valores** da curva, definido na primeira seção deste capítulo, é um $\mathcal{A}$ -invariante de ϕ (e também um $\mathcal{K}$ -invariante), amplamente estudado na literatura. Zariski em [Z2] provou que o semigrupo de valores é um invariante topológico completo para curvas planas irreduzíveis.

O **invariante delta** ($\mathcal{A}, \mathcal{K}$ -invariante) é definido por

$$\delta = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{\mathcal{O}},$$

onde $\mathcal{O}$ é o anel local da curva e $\tilde{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{C}\{t\}$. O invariante delta também representa o número de lacunas do semigrupo de valores Γ da curva $\mathcal{C}$, pois como vimos o anel local $\mathcal{O} \simeq \mathbb{C}\{t^{v_0}, p_1(t), \dots, p_n(t)\}$, onde $\phi(t) = (t^{v_0}, p_1(t), \dots, p_n(t))$ é uma parametrização de Puiseux da curva $\mathcal{C}$, logo

$$\delta = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{\mathbb{C}\{t^{v_0}, p_1(t), \dots, p_n(t)\}} = \#\mathbb{N} \setminus \Gamma.$$

O invariante delta e o condutor do semigrupo Γ caracterizam as curvas irreduzíveis Gorenstein (Definição 1.11). Uma curva $\mathcal{C}$ é Gorenstein se, e somente se, seu semigrupo de valores Γ é simétrico. Entretanto, vimos que Γ é simétrico se, e somente se, $\frac{c}{2} = \#\mathbb{N} \setminus \Gamma = \delta$, onde c é o condutor do semigrupo. Portanto, $\mathcal{C}$ é Gorenstein se, e somente se, $c = 2\delta$.

Também podemos determinar a $\mathcal{L}_c$ -codimensão do espaço tangente à órbita de ϕ através do invariante delta, já que

$$\mathcal{L}_c \text{cod}(\phi) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(\phi)}{T\mathcal{L}_c(\phi)} = n \cdot \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{t\}}{\mathbb{C}\{t^{v_0}, p_1(t), \dots, p_n(t)\}} = n\delta.$$

Buchweitz e Greuel [BG] definem o **número de Milnor** μ para curvas reduzidas com singularidade isolada. Esta é uma generalização do número de Milnor clássico para curvas planas, introduzido por Milnor em [Mil], e que foi estendido para curvas de interseção

completa por Greuel. Em [BG], encontramos uma generalização da fórmula de Milnor para curvas reduzidas $\mu = 2\delta - r + 1$, onde r é o número de ramos da curva. Em particular, no caso de uma curva analítica plana irreduzível determinada por $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ temos que

$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X, Y\}}{\langle f_X, f_Y \rangle} = 2\delta = c,$$

onde f_X e f_Y são as derivadas parciais de f com respeito a X e Y , respectivamente.

Delorme em [De], provou que o conjunto Δ , definido na Seção 1.2.2, é um $\mathcal{A}$ -invariante no caso de curvas planas irreduzíveis. Em particular, o conjunto das **lacunas especiais** $\Delta \setminus \Gamma$ é um $\mathcal{A}$ -invariante. Na verdade, estes também são $\mathcal{K}$ -invariantes de curvas planas.

Outro importante invariante é o **número de Tjurina** τ , que no contexto da teoria clássica de deformação de singularidades é definido como a dimensão do espaço T^1 , que é o espaço de deformações de primeira ordem de $(\mathcal{C}, 0)$, onde $\mathcal{C}$ é uma curva reduzida com singularidade isolada na origem de $\mathbb{C}^n$ (ver, [Gr2], [Pal], [S], entre outros).

Entretanto, se $X_0 = f^{-1}(0)$ é uma subvariedade de interseção completa (Definição 1.4), segue de Tjurina [Tj] que

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(f)}{tf(\theta(n)) + f^*(\overline{\mathcal{M}_p})\theta(f)},$$

ou seja, $\tau = \mathcal{K}_e \text{cod}(f)$. Portanto, o número de Tjurina representa o número mínimo de parâmetros numa deformação $\mathcal{K}$ -versal de uma subvariedade analítica de interseção completa com singularidade isolada. Naturalmente τ é um **$\mathcal{K}$ -invariante**, uma vez que a $\mathcal{K}_e \text{cod}(f)$ o é.

Utilizando dualidade local, Greuel prova em [Gr1], o seguinte resultado:

TEOREMA 1.25. ([Gr1], Satz 0.3) *Seja X uma interseção completa de dimensão $n \geq 1$, com singularidade isolada na origem.*

- (1) *Se X é quase-homogênea então $\mu = \tau$;*
- (2) *Se X é irreduzível então $\tau \leq \mu$.*

Looijenga e Steenbrink em [LS], provaram que a desigualdade $\tau \leq \mu$ vale mais geralmente para qualquer subvariedade de interseção completa com singularidade isolada. Segue da demonstração do teorema acima que para *curvas de interseção completa* (não

necessariamente irredutível), o número de Tjurina pode ser dado por uma álgebra mais simples,

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}}{\langle f_1, \dots, f_{n-1}, J(f) \rangle},$$

onde $J(f)$ é o ideal Jacobiano de f em $\mathcal{O}$, gerado pelos menores maximais da matriz Jacobiana. Este resultado não é válido em geral.

No caso de curvas irredutíveis de interseção completa, o Corolário 1.28 abaixo, apresenta uma relação interessante envolvendo o número de Tjurina e o conjunto das lacunas especiais da curva, que segue como consequência dos resultados de Berger e Pinkham, enunciados a seguir:

PROPOSIÇÃO 1.26. ([Ber]) *Dada $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^n$ uma curva irredutível de interseção completa e $\mathcal{T}$ o submódulo de torção de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$. Então,*

$$l(\mathcal{T}) = c - \sharp\Delta \setminus \Gamma,$$

onde $l(\mathcal{T})$ é o comprimento do submódulo de torção $\mathcal{T}$ e c é o condutor do semigrupo (ver Seção 1.2.2).

PROPOSIÇÃO 1.27. ([Pin]) *Seja $\mathcal{C}$ uma curva Gorenstein. Então $l(\mathcal{T}) = \tau$.*

Como toda curva de interseção completa é Gorenstein temos o seguinte corolário:

COROLÁRIO 1.28. *Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^n$ uma curva irredutível de interseção completa, então*

$$\tau = c - \sharp\Delta \setminus \Gamma.$$

Dessa relação concluímos que $\sharp\Delta \setminus \Gamma$ é um $\mathcal{K}$ -invariante para curvas irredutíveis de interseção completa.

Uma demonstração mais simples de que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X_1, \dots, X_n\}}{\langle f_1, \dots, f_{n-1}, J(f) \rangle} = c - \sharp\Delta \setminus \Gamma$$

pode ser encontrada em [Her] (Corolário 2.1, pag. 56).

Capítulo 2

Curvas Analíticas em $\mathbb{C}^{n+1}$

Neste capítulo obtemos propriedades sobre a $\mathcal{A}_e$ -codimensão do espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita do germe ϕ , onde ϕ é uma parametrização de uma curva analítica irreduzível $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, com singularidade isolada na origem.

Na primeira seção, é apresentado um método já conhecido para o cálculo da $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$, em seguida obtemos uma estimativa para este invariante, em termos do invariante delta, da multiplicidade e da dimensão de mergulho da curva.

Na seção seguinte, estabelecemos uma relação entre os elementos do espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ e elementos do $\mathcal{O}$ -módulo de diferenciais de Kähler, onde $\mathcal{O}$ é o anel local da curva. Tal relação determina um novo método para o cálculo da $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$, que pode então ser determinada a partir das ordens de certas diferenciais de Kähler. Estas são as ferramentas necessárias ao Teorema 2.11, que estabelece uma relação entre a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$, as diferenciais e os invariantes mencionados acima. Deste teorema decorrem todas as demais caracterizações para curvas monomiais e planas, obtidas nos capítulos posteriores.

2.1 $\mathcal{A}_e$ -codimensão de Curvas Parametrizadas

Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irreduzível em $\mathbb{C}^{n+1}$ e ϕ uma parametrização de $\mathcal{C}$ da forma

$$\phi : \begin{cases} x_0 &= t^{v_0} \\ x_1 &= t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_{i1} t^i \\ &\vdots \\ x_n &= t^{v_n} + \sum_{i>v_n} a_{in} t^i, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $a_{ij} \in \mathbb{C}$ para $j = 1, \dots, n$.

Como vimos a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de ϕ é dada por $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(\phi)}{T\mathcal{A}_e(\phi)}$, onde $T\mathcal{A}_e(\phi)$ é o espaço tangente estendido à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ .

Na Seção 1.3.2, vimos que a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de ϕ é o número mínimo de parâmetros de um $\mathcal{A}_e$ -desdobramento versal de ϕ , deste modo se $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = l < \infty$ e $g_1, \dots, g_l \in \theta(\phi)$ é uma $\mathbb{C}$ -base para o espaço normal denotado por $\mathcal{N} = \frac{\theta(\phi)}{T\mathcal{A}_e(\phi)}$, então

$$\Phi(t, u_1, \dots, u_l) = (\phi(t) + \sum_{i=1}^l u_i g_i(t), u_i)$$

é um desdobramento versal de ϕ com $u_i \in \mathbb{C}$ para todo $i = 1, \dots, l$.

Com o intuito de calcular a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ precisamos determinar uma $\mathbb{C}$ -base para o espaço normal à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ . Para facilitar a notação, vamos representar um elemento de $T\mathcal{A}_e(\phi)$, quando não houver risco de confusão, como um elemento em $\mathbb{C}\{t\}^{n+1} = \mathbb{C}\{t\} \times \dots \times \mathbb{C}\{t\}$. Segue de Gibson em [Gib] (páginas 106 e 156) que

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = \text{cod}_0(\phi) + \text{cod}_1(\phi) + \text{cod}_2(\phi) + \dots, \quad (2.2)$$

onde $\text{cod}_k(\phi) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{T\mathcal{A}_e(\phi) + \mathcal{M}_1^k \theta(\phi)}{T\mathcal{A}_e(\phi) + \mathcal{M}_1^{k+1} \theta(\phi)}$, com $\mathcal{M}_1^k \theta(\phi) = \{g \in \mathcal{O}(n, p); j^{k-1}g(0) = 0\}$.

Como ϕ é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado (Proposição 1.24), temos que $\text{cod}_k(\phi) \neq 0$ para um número finito de k 's. Para calcular cada $\text{cod}_k(\phi)$, basta verificar se os geradores de $\mathcal{M}_1^k \theta(\phi)$, dados pelos $n+1$ elementos $(0, \dots, t^k, \dots, 0)$ pertencem à $T\mathcal{A}_e(\phi) + \mathcal{M}_1^{k+1} \theta(\phi)$. O próximo passo é seleccionar entre os geradores que não pertencem à $T\mathcal{A}_e(\phi) + \mathcal{M}_1^{k+1} \theta(\phi)$ uma base para o quociente

$$\frac{T\mathcal{A}_e(\phi) + \mathcal{M}_1^k \theta(\phi)}{T\mathcal{A}_e(\phi) + \mathcal{M}_1^{k+1} \theta(\phi)};$$

o número de elementos da base é a $\text{cod}_k(\phi)$.

Seja ϕ como em (2.1), então o processo apresentado acima para o cálculo da $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ garante o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 2.1. *Existe uma base monomial para o espaço normal $\mathcal{N}$.*

Nosso objetivo neste momento é apresentar uma estimativa para o invariante $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$. Lembremos que o espaço tangente estendido à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ (2.1) é dado por

$$T\mathcal{A}_e(\phi) = \left\{ \begin{bmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_0(\phi(t)) \\ \eta_1(\phi(t)) \\ \vdots \\ \eta_n(\phi(t)) \end{bmatrix} ; \begin{array}{l} \epsilon \in \mathcal{O}_1 \text{ e } \eta_i \in \mathcal{O}_{n+1}, \\ \text{com } 0 \leq i \leq n \end{array} \right\}.$$

Deste modo, $(w_0, w_1, \dots, w_n) \in \theta(\phi)$ pertence à $T\mathcal{A}_e(\phi)$ se, e somente se, existem $\epsilon \in \mathcal{O}_1$ e $\eta_i \in \mathcal{O}_{n+1}$ tais que

$$\begin{cases} w_0 = dx_0 \cdot \epsilon + \eta_0(\phi) \\ w_1 = dx_1 \cdot \epsilon + \eta_1(\phi) \\ \vdots \\ w_n = dx_n \cdot \epsilon + \eta_n(\phi). \end{cases} \quad (2.3)$$

Indiquemos $\phi = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n) = (\phi_0, \psi)$ onde $\psi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Naturalmente, o espaço $\theta(\phi) \simeq \theta(\phi_0) \oplus \theta(\psi)$.

Considere os seguintes subespaços

$$T_0 = \{ w_0 \in \theta(\phi_0); \ w_0 = dx_0 \cdot \epsilon + \eta_0(\phi), \ \epsilon \in \mathcal{O}_1, \ \eta_0 \in \mathcal{O}_{n+1} \} \text{ e}$$

$$T = \{ (w_1, \dots, w_n) \in \theta(\psi); \ (0, w_1, \dots, w_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi) \}.$$

As codimensões de T_0 e T são dadas por $\text{cod } T_0 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(\phi_0)}{T_0}$ e $\text{cod } T = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(\psi)}{T}$, respectivamente.

Como ϕ é $\mathcal{A}$ -finitamente determinado (Proposição 1.24), temos que as codimensões de T_0 e T são finitas. Se $(w_0, w_1, \dots, w_n) \in \theta(\phi)$ então denotamos por $[(w_0, w_1, \dots, w_n)]$ a classe deste elemento no quociente $\theta(\phi)/T\mathcal{A}_e(\phi)$, analogamente para $\theta(\phi_0)$ e $\theta(\psi)$.

PROPOSIÇÃO 2.2. *Se $\mathcal{C}$ é uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^{n+1}$ com ϕ uma parametrização de $\mathcal{C}$, então*

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) := \text{cod } T_0 - \text{cod } T.$$

DEMONSTRAÇÃO: Considere a seguinte sequência

$$0 \longrightarrow \frac{\theta(\psi)}{T} \xrightarrow{i^*} \frac{\theta(\phi)}{T\mathcal{A}_e(\phi)} \xrightarrow{\pi^*} \frac{\theta(\phi_0)}{T_0} \longrightarrow 0,$$

onde i^* e π^* são definidas por

$$i^*([(w_1, \dots, w_n)]) = [(0, w_1, \dots, w_n)],$$

$$\pi^*([(w_0, w_1, \dots, w_n)]) = [w_0].$$

Provemos que a sequência é exata. A aplicação π^* está bem definida, pois dado $w = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi)$, existem $c \in \mathcal{O}_1$ e $\eta_i \in \mathcal{O}_{n+1}$, $i = 0, \dots, n$ satisfazendo o sistema (2.3), em particular $w_0 = dx_0 \cdot c + \eta_0(\phi)$. Portanto, $\pi^*(w) \in T_0$.

Claramente, $\text{Im}(i^*) = \text{Ker}(\pi^*)$. Provemos que i^* é injetora. Seja $(w_1, \dots, w_n) \in \theta(\psi)$ tal que $i^*([(w_1, \dots, w_n)]) = 0$. Isso implica que $[(0, w_1, \dots, w_n)] = 0$, ou seja, $(0, w_1, \dots, w_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi)$, o que ocorre se, e somente se, $(w_1, \dots, w_n) \in T$. Portanto, $[(w_1, \dots, w_n)] = 0$.

Note que, π^* é sobrejetora. De fato, seja $[w_0]$ um elemento em $\theta(\phi_0)/T_0$. Considere $w = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \theta(\phi)$, para algum $(w_1, \dots, w_n) \in \theta(\psi)$. Como vimos $\pi^*(T\mathcal{A}_e(\phi)) = T_0$. Portanto, $\pi^*([w]) = [w_0]$.

Portanto, $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = \text{cod } T_0 - \text{cod } T$.

LEMA 2.3. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^{n+1}$, com multiplicidade v_0 e ϕ uma parametrização de $\mathcal{C}$. Então $\text{cod } T_0 = v_0 - 2$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja Γ o semigrupo de valores de $\mathcal{C}$. Lembremos que,

$$T_0 = \{ w_0 \in \theta(\phi_0); \quad w_0 = dx_0 \cdot c + \eta_0(\phi), \quad c \in \mathcal{O}_1, \quad \eta_0 \in \mathcal{O}_{n+1} \}.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq v_0 - 1$, e escolha $\epsilon = \frac{1}{v_0} t^{k-v_0+1} \in \mathcal{O}_1$, então obtemos que

$$dx_0 \cdot \epsilon = v_0 t^{v_0-1} \cdot \left(\frac{1}{v_0} t^{k-v_0+1} \right) = t^k \in T_0.$$

Note ainda que, se $k \in \Gamma$, então existe $\eta_0 \in \mathcal{O}_{n+1}$ tal que $\eta_0(\phi(t)) = a_k t^k + \dots \in T_0$, com $a_i \in \mathbb{C}$.

Claramente, se $w_0 = t^k \in \theta(\phi_0)$ é tal que k é uma lacuna com $1 \leq k \leq v_0 - 2$, então w_0 não pertence à T_0 . Portanto $\text{cod } T_0 = v_0 - 2$.

Por outro lado, podemos estimar $\text{cod } T$ em termos de invariantes clássicos. Vimos que $T = \{ (w_1, \dots, w_n) \in \theta(\psi); (0, w_1, \dots, w_n) \in T\mathcal{A}_c(\phi) \}$.

Naturalmente, $\theta(\psi) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \overline{\mathcal{O}}$, assim $\frac{\theta(\psi)}{T}$ é isomorfo a um submódulo de $\bigoplus_{i=1}^n \frac{\overline{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}$. Como $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\overline{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}$, temos que

$$\text{cod } T = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\theta(\psi)}{T} \leq n\delta.$$

E portanto, pela Proposição 2.2 e pelo Lema 2.3 obtemos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 2.4. *Se $\mathcal{C}$ é uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^{n+1}$, com multiplicidade v_0 e ϕ é uma parametrização de $\mathcal{C}$ então*

$$\boxed{\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = \text{cod } T_0 + \text{cod } T \leq n\delta + v_0 - 2.}$$

Obtemos assim uma primeira estimativa para $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ em termos de invariantes que dependem apenas do semigrupo de valores e da dimensão de mergulho da curva.

2.2 $\mathcal{A}_{\text{ecod}}(\phi)$ e as Diferenciais de Kähler

Nesta seção, veremos que o espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ está intimamente relacionado com certas diferenciais de Kähler. Com isso, determinamos um método para o cálculo da $\mathcal{A}_{\text{ecod}}(\phi)$, em termos das ordens destas diferenciais. Segue desta caracterização, o Teorema 2.11, que estabelece uma relação entre a $\mathcal{A}_{\text{ecod}}(\phi)$ e invariantes conhecidos.

Denotemos por $\mathcal{O}dx_0 + \mathcal{O}dx_i = \mathcal{O}_{x_i}$ com $i = 1, \dots, n$, o $\mathcal{O}$ -submódulo do módulo de diferenciais de Kähler $\mathcal{O}d\mathcal{O} = \mathcal{O}dx_0 + \mathcal{O}dx_1 + \dots + \mathcal{O}dx_n$.

Lembremos que o espaço tangente estendido à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ é dado em coordenadas por:

$$T\mathcal{A}_e(\phi) = \left\{ \begin{bmatrix} dx_0 \\ dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} [\epsilon(t)] + \begin{bmatrix} \eta_0(\phi(t)) \\ \eta_1(\phi(t)) \\ \vdots \\ \eta_n(\phi(t)) \end{bmatrix} ; \begin{array}{l} \epsilon \in \mathcal{O}_1 \text{ e } \eta_i \in \mathcal{O}_{n+1}, \\ \text{com } 0 \leq i \leq n \end{array} \right\}.$$

A relação entre os elementos do espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ e as diferenciais em $\mathcal{O}_{x_1}, \dots, \mathcal{O}_{x_n}$ é dada pelo seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 2.5. *Seja $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ uma parametrização de uma curva analítica irredutível $\mathcal{C}$. O elemento $(0, f_1, f_2, \dots, f_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi)$ se, e somente se, para algum $j = 1, \dots, n$ temos que*

$$f_j = \frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0} \in \frac{\mathcal{O}_{x_j}}{dx_0},$$

para algum $\eta_0, \eta_j \in \mathcal{O}$, com $v(\eta_0) \geq v(dx_0)$ sempre que $\eta_0 \neq 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Com efeito, se $(0, f_1(t), \dots, f_n(t)) \in T\mathcal{A}_e(\phi)$ então o sistema

$$\begin{cases} dx_0 \cdot \epsilon(t) + \eta_0(\phi(t)) = 0 \\ dx_1 \cdot \epsilon(t) + \eta_1(\phi(t)) = f_1(t) \\ \vdots \\ dx_n \cdot \epsilon(t) + \eta_n(\phi(t)) = f_n(t), \end{cases}$$

tem solução, para algum $\epsilon \in \overline{\mathcal{O}}$ e $\eta_i \in \mathcal{O}_{n+1}$ onde $i = 0, 1, \dots, n$. Afim de facilitar a notação denotaremos $\eta_i(\phi(t))$ por η_i .

Se $\eta_0 = 0$ temos que $\epsilon = 0$ e assim segue do sistema acima que $f_i(t) = \eta_i(\phi(t))$ para

todo $i = 1, \dots, n$. Como $\mathcal{O} \simeq \mathbb{C}\{t^{v_0}, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\}$ onde $\phi(t) = (t^{v_0}, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$ concluímos que $f_i \in \mathcal{O}$ e portanto,

$$f_i = \frac{\eta_i dx_0}{dx_0} \in \frac{\mathcal{O}_{x_i}}{dx_0}$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

Agora se $\eta_0 \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$, isolando c na primeira equação do sistema temos $c(t) = -\frac{\eta_0}{dx_0}$. Como $c \in \overline{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{C}\{t\}$ então $v(\eta_0) \geq v(dx_0)$. Substituindo c no sistema, obtemos:

$$\frac{\eta_1 dx_0 - \eta_0 dx_1}{dx_0} = f_1(t), \dots, \frac{\eta_n dx_0 - \eta_0 dx_n}{dx_0} = f_n(t).$$

Reciprocamente, suponha que para algum $j = 1, \dots, n$ temos

$$f_j = \frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0} \in \frac{\mathcal{O}_{x_j}}{dx_0}$$

onde $\eta_0, \eta_j \in \mathcal{O}$. Se $\eta_0 \neq 0$ temos $v(\eta_0) \geq v(dx_0)$, então escolha $c(t) = -\frac{\eta_0}{dx_0} \in \mathbb{C}\{t\}$ e assim obtemos o seguinte elemento no espaço tangente

$$\begin{pmatrix} dx_0 \cdot (-\eta_0/dx_0) + \eta_0 \\ dx_1 \cdot (-\eta_0/dx_0) + \eta_1 \\ \vdots \\ dx_j \cdot (-\eta_0/dx_0) + \eta_j \\ \vdots \\ dx_n \cdot (-\eta_0/dx_0) + \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta_1 dx_0 - \eta_0 dx_1}{dx_0} \\ \vdots \\ \frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0} \\ \vdots \\ \frac{\eta_n dx_0 - \eta_0 dx_n}{dx_0} \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi),$$

onde $\eta_j \in \mathcal{O}$ para todo $j = 0, 1, \dots, n$. Se $\eta_0 = 0$ então $f_j = \eta_j \in \mathcal{O}$ e como vimos $(0, \dots, f_j(\phi), \dots, 0) \in T\mathcal{A}_e(\phi)$ para todo $j = 1, \dots, n$.

Vimos na seção anterior, que é possível obter uma base monomial para o espaço $\mathcal{N} = \theta(\phi)/T\mathcal{A}_e(\phi)$. Nosso objetivo é obter uma correspondência entre elementos desta base e ordens de certas diferenciais de Kähler.

Como $T\mathcal{A}_e(\phi) = T\mathcal{R}_e(\phi) - T\mathcal{L}_e(\phi)$, onde $T\mathcal{L}_e(\phi) = \oplus_{i=0}^n \mathcal{O}$, vemos que todo ele-

mento $(0, \dots, 0, g, 0, \dots, 0)$, com $g \in \mathcal{O}$ pertence à $T\mathcal{A}_e(\phi)$. Mais ainda, se $k \in \Gamma$ então $(0, \dots, 0, t^k, 0, \dots, 0)$ pode ser obtido como um elemento em $T\mathcal{A}_e(\phi)$ módulo termos de ordem maior ou igual a $k+1$. Deste modo, os únicos elementos que contribuem para uma base (monomial) do espaço normal são da forma $(0, \dots, t^k, \dots, 0)$ onde k é uma lacuna do semigrupo.

Sabemos que a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ pode ser obtida a partir da multiplicidade da curva e de $\text{cod } T$, onde

$$T = \{ (w_1, \dots, w_n) \in \theta(\psi); \quad (0, w_1, \dots, w_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi) \}$$

tal que $\psi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$, vamos determinar uma base para $\text{cod } T$.

Para isto, faremos n decomposições do conjunto das lacunas L do semigrupo Γ , em uniões disjuntas de conjuntos convenientes, de forma que, para cada um destes conjuntos, estas lacunas vão corresponder a ordens de elementos que pertencem ou ao espaço tangente $T\mathcal{A}_e(\phi)$ ou à $\mathcal{N}$.

Para cada $i = 1, \dots, n$ considere os seguintes conjuntos:

$$N_i = \left\{ k \in L: \quad k \neq v \left(\frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0} \right) \text{ com } \eta_i \in \mathcal{O}, \eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\} \right\},$$

onde $\mathcal{M}$ é o ideal maximal do anel local $\mathcal{O}$.

Se $k \in L$ é tal que $k = v \left(\frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0} \right)$ com $\eta_i \in \mathcal{O}, \eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, então pela Proposição 2.5 obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta_1 dx_0 - \eta_0 dx_1}{dx_0} \\ \vdots \\ \frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0} \\ \vdots \\ \frac{\eta_n dx_0 - \eta_0 dx_n}{dx_0} \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi),$$

com $\eta_j \in \mathcal{O}$, $j = 1, \dots, n$, $j \neq i$. Logo, k pertence a um dos conjuntos abaixo:

$$M_i = \left\{ k \in L, \ k > v_i, \text{ tal que para qualquer } \omega = \frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0}, \text{ com } v(\omega) = k \right. \\ \left. \text{ existem } j = 1, \dots, n, \ j \neq i \text{ e } \eta_j \in \mathcal{O} \text{ tais que } k \geq v \left(\frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0} \right) \in L \right\},$$

$$\Delta_i = \left\{ k \in L, \ k > v_i, \text{ tal que existe } \omega = \frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0}, \text{ com } v(\omega) = k \text{ tal que} \right. \\ \left. k < v \left(\frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0} \right), \text{ para todo } j = 1, \dots, n, \ j \neq i \text{ e } \eta_j \in \mathcal{O} \right\}.$$

Observe que para cada $i = 1, \dots, n$ os conjuntos são disjuntos e temos

$$L = N_i \dot{\cup} M_i \dot{\cup} \Delta_i. \quad (2.4)$$

Vamos analisar cada um dos conjuntos desta decomposição. Pela Proposição 2.5, se $k = v(f_i) \in N_i$, então não é possível obter em $T\mathcal{A}_e(\phi)$ um elemento com a primeira coordenada nula e tal que f_i comparece na $(i+1)$ -ésima coordenada.

Por outro lado, se $k \in M_i \dot{\cup} \Delta_i$ para algum $1 \leq i \leq n$, então $k = v \left(\frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0} \right)$ com $\eta_0, \eta_i \in \mathcal{O}$. Segue da Proposição 2.5, que a esta lacuna corresponde um elemento

$$(0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi)$$

onde $f_j = \frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0}$ com $v(\eta_0) \geq v(dx_0)$ pois $k > v_i$, além disso cada f_j comparece na $(j+1)$ -ésima posição.

A observação abaixo garante que os elementos $(0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)$ tais que para algum i , a ordem de f_i pertence a Δ_i não contribuem para uma base do espaço normal $\mathcal{N}$.

OBSERVAÇÃO 2.6. Se $k = v(f_i) \in \Delta_i$, onde $f_i = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \dots$, com $a_l \in \mathbb{C}$, $l \geq k$, então o elemento $(0, \dots, 0, a_k t^k, 0, \dots, 0) \in T\mathcal{A}_e(\phi) + \mathcal{M}_1^{k+1} \theta(\phi)$.

De fato, seja $k = v(f_i) \in \Delta_i$ então $f_i = \frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0}$ para algum $i = 1, \dots, n$ e $\eta_0, \eta_i \in \mathcal{O}$.

Como vimos, segue da Proposição 2.5, que a esta ordem corresponde um elemento

$$(0, f_1, \dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_n) \in TA_c(\phi),$$

onde $f_j = \frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0}$ com $\eta_j \in \mathcal{O}$ e $j = 0, \dots, n$, satisfazendo $v(f_j) > k$ para todo $j \neq i$.

Como $f_i = a_k t^k + a_{k+1} t^{k+1} + \dots$ onde $a_l \in \mathbb{C}$, $l \geq k$ temos que

$$(0, \dots, 0, a_k t^k, 0, \dots, 0) \in TA_c(\phi) + \mathcal{M}_1^{k-1} \theta(\phi).$$

Segue da observação acima e de (2.2) que os elementos de Δ_i estão associados a elementos que não contribuem para uma base de $\mathcal{N}$.

Os conjuntos N_i, M_i e Δ_i descritos acima, podem ser obtidos por uma inspeção minuciosa dos elementos de $\mathcal{O}_{x_i}/dx_0$, uma vez que há um número finito de possibilidades a serem verificadas, ou ainda utilizando o algoritmo apresentado em [HH] que permite calcular uma Base Standard para os submódulos $\mathcal{O}_{x_i}$.

Neste momento estamos aptos a determinar a $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ em termos das decomposições das lacunas apresentadas acima:

PROPOSIÇÃO 2.7. *Se ϕ é uma parametrização de uma curva analítica irredutível $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}^{n-1}$, de multiplicidade v_0 e semigrupo Γ , então existe $V_i \subseteq M_i$ tal que*

$$\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = v_0 - 2 + \sum_{i=1}^n \sharp N_i + \sum_{i=1}^n \sharp V_i.$$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos determinar quais elementos da forma $(0, t^k, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, t^k)$ com k uma lacuna, pertencem a uma base do espaço normal $\mathcal{N}$, determinando assim $\text{cod } T$.

Observe que, se $(0, 0, \dots, t^k, \dots, 0) \in \mathcal{N}$, onde t^k se encontra na $(i+1)$ -ésima coordenada, então pela decomposição disjunta do conjunto das lacunas (2.4) temos que $k \in N_i \cup M_i \cup \Delta_i$. Pela Observação 2.6, $k \notin \Delta_i$, pois caso contrário, o elemento $(0, 0, \dots, t^k, \dots, 0)$ pertenceria à $TA_c(\phi)$.

Considere U um conjunto de geradores do espaço $\mathcal{N}$ dado por

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t^k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t^{k_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{k_2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ t^{k_n} \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} k = 1, \dots, v_0 - 2 \\ \text{e } k_i \in N_i \cup M_i, \\ \text{com } i = 1, \dots, n \end{array} \right\}.$$

Deste conjunto de geradores do espaço normal $\mathcal{N}$ extraímos uma base, que denotamos por $\mathcal{B}$.

Os únicos elementos da forma $(t^k, 0, \dots, 0) \in \mathcal{B}$, são aqueles tais que $k = 1, \dots, v_0 - 2$. Agora, seja $k_i \in N_i$ com $1 \leq i \leq n$, ou seja, k_i não é dado como ordem de um elemento em $\mathcal{O}_{x_i}/dx_0$. Segue da Proposição 2.5, que não é possível obter no espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ , o elemento $(0, \dots, 0, t^{k_i}, 0, \dots, 0)$. Portanto, todos os elementos da forma $(0, \dots, 0, t^{k_i}, 0, \dots, 0) \in U$ com $k_i \in N_i$ pertencem à base $\mathcal{B}$.

Como vimos, a cada ordem $k_i \in M_i$ corresponde um elemento

$$(0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi),$$

com $v(f_j) \leq v(f_i) = k_i$ para algum $j \neq i$. Assim, eventualmente nem todos os elementos de U da forma $(0, 0, \dots, t^{k_i}, \dots, 0)$, onde $k_i \in M_i$ pertencem a $\mathcal{B}$. Deste modo, considere os seguintes conjuntos:

$$V_i = \{k \in M_i ; (0, 0, \dots, t^k, \dots, 0) \in \mathcal{B}\} \quad \text{e}$$

$$V'_i = \{k \in M_i ; (0, 0, \dots, t^k, \dots, 0) \in U \setminus \mathcal{B}\}.$$

$$\text{Donde concluímos que } \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = \sharp \mathcal{B} = v_0 - 2 + \sum_{i=1}^n \sharp N_i + \sum_{i=1}^n \sharp V_i.$$

$$\text{OBSERVAÇÃO 2.8. Note que, } \sum_{i=1}^n \sharp V_i + \sum_{i=1}^n \sharp V'_i = \sum_{i=1}^n \sharp M_i.$$

Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 2.9. Seja ϕ uma parametrização de uma curva analítica $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}^3$ dada por

$$\phi : \begin{cases} x_0 &= t^6 \\ x_1 &= t^8 + t^{13} \\ x_2 &= t^9 + t^{13}. \end{cases}$$

O semigrupo da curva $\mathcal{C}$ é dado por $\Gamma = \langle 6, 8, 9 \rangle$, cujo condutor é $c = 20$ e o conjunto das lacunas é

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 11, 13, 19\}.$$

Como $\delta = 10$, temos que $\mathcal{C}$ é Gorenstein pois $c = 2\delta$. O espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita de ϕ é o conjunto dos elementos da forma

$$\begin{bmatrix} 6t^5 \\ 8t^7 + 13t^{12} \\ 9t^8 + 13t^{12} \end{bmatrix} [\epsilon(t)] + \begin{bmatrix} \eta_0(t^6, t^8 + t^{13}, t^9 + t^{13}) \\ \eta_1(t^6, t^8 + t^{13}, t^9 + t^{13}) \\ \eta_2(t^6, t^8 + t^{13}, t^9 + t^{13}) \end{bmatrix},$$

onde $\epsilon \in \tilde{\mathcal{O}}$ e $\eta_i \in \mathcal{O}_3$ para $i = 0, 1, 2$.

Como vimos no resultado anterior, para todo $k = 1, \dots, v_0 - 2 = 4$ temos que $(t^k, 0, 0) \in \mathcal{N}$.

Desta maneira a decomposição do conjunto das lacunas como em (2.4) permite determinar os demais elementos da forma $(0, t^k, 0)$ e $(0, 0, t^k)$ que compõem uma base do espaço normal $\mathcal{N}$.

A primeira decomposição do conjunto das lacunas é dada por:

N_1	1, 2, 3, 4, 5, 7
Δ_1	10, 11, 19
M_1	13

De fato, observe que toda lacuna k com $1 \leq k \leq 6 = v_1 - 2$, não é ordem de um elemento em $\mathcal{O}_{x_1}/dx_0$, logo, pela Proposição 2.5, $k = 1, \dots, 5 \in N_1$. E não é difícil ver que a lacuna 7 não é ordem de um elemento em $\mathcal{O}_{x_1}/dx_0$, isto é, pertence a N_1 .

Por outro lado, $10, 11, 19 \in \Delta_1$ pois

$$\begin{aligned} (a) \quad 10 &= v \left(\frac{x_1 dx_1}{dx_0} \right) \xrightarrow{\epsilon = \frac{x_1}{dx_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3}t^{10} + \frac{21}{6}t^{15} + \frac{13}{6}t^{20} \\ \frac{3}{2}t^{11} + \frac{13}{6}t^{15} + \frac{3}{2}t^{16} + \frac{13}{6}t^{20} \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi) \\ (b) \quad 11 &= v \left(\frac{x_2 dx_1}{dx_0} \right) \xrightarrow{\epsilon = \frac{x_2}{dx_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3}t^{11} + \frac{4}{3}t^{15} + \frac{13}{6}t^{16} + \frac{13}{6}t^{20} \\ 0 \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi) \\ (c) \quad 19 &= v \left(\frac{x_1 x_2 dx_1}{dx_0} \right) \xrightarrow{\epsilon = \frac{x_1 x_2}{dx_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3}t^{19} + \frac{4}{3}t^{23} + \frac{21}{3}t^{24} + \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi). \end{aligned}$$

E ainda,

$$(d) \quad 13 = v \left(\frac{8x_1 dx_0 - 6x_0 dx_1}{dx_0} \right) \xrightarrow{\epsilon = \frac{6x_0}{dx_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ -5t^{13} \\ -4t^{13} \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi).$$

Observe que não existe um outro elemento de $\mathcal{O}_{x_i}/dx_0$, cuja ordem seja 13. Logo, $13 \in M_1$.

Na segunda decomposição do conjunto das lacunas temos:

N_2	1, 2, 3, 4, 5, 7, 10
Δ_2	19
M_2	11, 13

De fato, nenhuma lacuna k tal que $1 \leq k \leq 7 = v_2 - 2$, é ordem de um elemento em $\mathcal{O}_{x_2}/dx_0$, logo $k = 1, \dots, 5, 7 \in N_2$. Efetuando alguns cálculos, constatamos que $10 \in N_2$. Temos que

$$19 = v \left(\frac{x_1^2 dx_2}{dx_0} \right) \xrightarrow{\epsilon = \frac{x_1^2}{dx_0}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2}t^{19} + \frac{13}{6}t^{23} + 3t^{24} + \dots \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi)$$

logo, $19 \in \Delta_2$.

Observe ainda que as únicas representações de elementos em $\mathcal{O}_{x_2}/dx_0$ que possuem ordem 11 e 13, são dadas pelos elementos $\frac{x_1 dx_2}{dx_0} \in \frac{9x_2 dx_0 - 6x_0 dx_2}{dx_0}$, respectivamente. Eles correspondem aos mesmos elementos em $T\mathcal{A}_c(\phi)$ dados em (a) e (d). Portanto, $11, 13 \in M_2$.

Deste modo,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t^{k_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{k_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t^{13} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{11} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^{13} \end{pmatrix}; \begin{array}{l} k := 1, \dots, 4 \\ k_i \in N_i, \ i = 1, 2, \\ 13 \in M_1, \\ 11, 13 \in M_2 \end{array} \right\}.$$

Note que, apesar de $(0, t^{13}, 0), (0, 0, t^{13}) \notin T\mathcal{A}_c(\phi) + \mathcal{M}_1^{14}\theta(\phi)$, eles não podem estar simultaneamente na base, pois existe uma combinação destes dois elementos (veja (d)) tal que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5t^{13} \\ -4t^{13} \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_c(\phi)$$

Facilmente, vemos que $U \setminus \{(0, 0, t^{13})\}$ é uma base para o espaço normal $\mathcal{N}$. Assim,

$$V_1 = \{13 \in M_1\} \quad \text{e} \quad V_2' = \{13 \in M_2\},$$

Portanto, $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = r_0 - 2 + \sharp N_1 + \sharp N_2 + \sharp V_1 = 19$.

No exemplo a seguir, os conjuntos V_i' são vazios, para todo $i = 1, \dots, n$. Além disso, fica evidente neste caso, a importância de se conhecer todas as possíveis representações de elementos de $\mathcal{O}_{x_i}/dx_0$ cujas ordens são lacunas.

EXEMPLO 2.10. Considere a curva dada pela parametrização

$$\phi : \begin{cases} x_0 &= t^6 \\ x_1 &= t^{10} + 2t^{11} \\ x_2 &= t^{14} - t^{17} \\ x_3 &= t^{19} + t^{23}. \end{cases}$$

O semigrupo de valores desta curva é dado por $\Gamma = \langle 6, 10, 14, 19, 21 \rangle$, cujo condutor é

$c = 24$. Facilmente vemos que o conjunto das lacunas de Γ é

$$L = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 23\}.$$

Deste modo, $\delta = 13$ e como $c \neq 2\delta$, a curva não é Gorenstein.

O espaço tangente à órbita de ϕ é dado por elementos da forma:

$$\begin{bmatrix} 6t^5 \\ 10t^9 + 22t^{10} \\ 14t^{13} + 17t^{16} \\ 19t^{18} + 23t^{22} \end{bmatrix} [\epsilon(t)] + \begin{bmatrix} \eta_0(t^6, t^{10} + 2t^{11}, t^{14} + t^{17}, t^{19} + t^{23}) \\ \eta_1(t^6, t^{10} + 2t^{11}, t^{14} + t^{17}, t^{19} + t^{23}) \\ \eta_2(t^6, t^{10} + 2t^{11}, t^{14} + t^{17}, t^{19} + t^{23}) \\ \eta_3(t^6, t^{10} + 2t^{11}, t^{14} + t^{17}, t^{19} + t^{23}) \end{bmatrix},$$

onde $\epsilon \in \overline{\mathcal{O}}$ e $\eta_i \in \mathcal{O}_A$, para $i = 0, 1, 2, 3$.

Na primeira decomposição do conjunto das lacunas L temos:

N_1	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13
Δ_1	11, 15, 17, 23

Pelo mesmo argumento do exemplo anterior, garantimos que as lacunas que não são ordens de elementos em $\mathcal{O}_{x_1}/dx_0$ são dadas no conjunto N_1 acima. Vamos verificar que todas as lacunas que são ordens de uma diferencial em $\mathcal{O}_{x_1}/dx_0$ pertencem ao conjunto Δ_1 . Com efeito,

$$\begin{aligned} (a) \quad 11 = v\left(\frac{10x_1dx_0 - 6x_0dx_1}{dx_0}\right) &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -2t^{11} \\ -3t^{17} \\ -4t^{23} \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi) \\ (b) \quad 15 = v\left(\frac{10x_2dx_0 - 6x_1dx_1}{dx_0}\right) &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -42t^{15} - 44t^{16} + 10t^{17} \\ -14t^{18} - 28t^{19} - 17t^{21} - 34t^{22} \\ -19t^{23} - 38t^{24} - 23t^{27} - 46t^{28} \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_e(\phi) \end{aligned}$$

$$\text{Analogamente para as ordens } 17 = v\left(\frac{10x_0x_1dx_0 - 6x_0^2dx_1}{dx_0}\right) \text{ e } 23 = v\left(\frac{x_3dx_1}{dx_0}\right).$$

Na segunda decomposição temos,

N_2	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15
M_2	17
Δ_2	23

Veja que $17 = v \left(\frac{14x_2dx_0 - 6x_0dx_2}{dx_0} \right)$, assim obtemos exatamente o mesmo elemento em $T\mathcal{A}_c(\phi)$ dado em (a), uma vez que temos o mesmo ϵ nos dois casos. Pode-se verificar que não existe outra diferencial em $\mathcal{O}_{x_2}/dx_0$ cuja ordem seja 17, deste modo concluímos que $17 \in M_2$, logo $(0, 0, t^{17}, 0) \notin T\mathcal{A}_c(\phi) + \mathcal{M}_1^{18}\theta(\phi)$ e portanto, $(0, 0, t^{17}, 0) \in \mathcal{N}$.

A lacuna 23 é um caso interessante. Note que

$$(1) \quad 23 = v \left(\frac{14x_0^2x_1dx_0 - 6x_2dx_2}{dx_0} \right) \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{87}{2}t^{23} \\ 28t^{23} - 31t^{25} - 17t^{28} \\ -19t^{27} - 19t^{30} - \dots \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_c(\phi).$$

Observe que escolhendo $\eta_3 \in \mathcal{O}$ conveniente, obtemos o mesmo elemento em $T\mathcal{A}_c(\phi)$ dado acima, com a última coordenada igual a zero, já que a ordem 27 está acima do condutor. Analisando o elemento em (1) diríamos que $23 \in M_2$, entretanto esta não é a única representação de um elemento em $\mathcal{O}_{x_2}/dx_0$ com ordem 23. Como vimos, $23 \in \Delta_1$ e é dado por $23 = v_3 + v_1 - v_0$, isto é,

$$(2) \quad 23 = v \left(\frac{x_3dx_1}{dx_0} \right) \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3}t^{23} + \frac{11}{3}t^{24} + \frac{5}{3}t^{27} + \frac{11}{3}t^{28} \\ \frac{7}{3}t^{27} + \frac{17}{6}t^{30} + \frac{7}{3}t^{31} + \frac{17}{6}t^{34} \\ \frac{19}{6}t^{32} + \frac{21}{3}t^{36} + \frac{23}{6}t^{40} \end{pmatrix} \in T\mathcal{A}_c(\phi).$$

Multiplicando o vetor em (2) por uma constante e somando com o vetor em (1) temos:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{87}{2}t^{23} \\ 28t^{23} - 31t^{25} - 17t^{28} \\ -19t^{27} - 19t^{30} - \dots \end{pmatrix} = \frac{3 \cdot 87}{5 \cdot 2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{3}t^{23} + \frac{11}{3}t^{24} + \frac{5}{3}t^{27} + \frac{11}{3}t^{28} \\ \frac{7}{3}t^{27} + \frac{17}{6}t^{30} + \frac{7}{3}t^{31} + \frac{17}{6}t^{34} \\ \frac{19}{6}t^{32} + \frac{21}{3}t^{36} + \frac{23}{6}t^{40} \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{957}{10}t^{24} + \frac{87}{2}t^{27} + \frac{957}{10}t^{28} \\ 28t^{23} + 31t^{25} + \frac{609}{10}t^{27} + \dots \\ 19t^{27} + 19t^{30} + \dots \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, $(0, 0, t^{23}, 0) \in T\mathcal{A}_c(\phi) + \mathcal{M}_1^{24}\theta(\phi)$. Portanto, $23 \in \Delta_2$.

Finalmente, na última decomposição temos

N_3	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 15, 17
M_3	23

Neste caso, a diferencial em $\mathcal{O}_{x_3}/dx_0$ de ordem $23 = v_1 + v_3 - v_0$, isto é, $\frac{x_1 dx_3}{dx_0}$ determina, a menos de constantes, o mesmo elemento de $\mathcal{O}_{x_1}/dx_0$ com ordem $15 \in \Delta_1$ obtido em (b). Como não existe outra diferencial em $\mathcal{O}_{x_3}/dx_0$, tal que sua ordem seja 23, concluímos que $23 \in M_3$, ou seja, o elemento $(0, 0, 0, t^{23}) \in \mathcal{N}$.

Neste caso, pode-se constatar que os conjuntos V_i' são vazios e $V_i = M_i$ para cada $i = 1, 2, 3$.

Portanto,

$$\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = v_0 - 2 + \sharp N_1 + \sharp N_2 + \sharp N_3 + \sharp M_2 + \sharp M_3 = 38.$$

Como vimos na Subseção 1.3.2, a $\mathcal{A}_c$ -codimensão de ϕ representa o número mínimo de parâmetros num desdobramento versal do germe ϕ , cuja deformação é dada por:

$$\Phi = \begin{cases} X_0 = t^6 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \\ X_1 = t^{10} + 2t^{11} + b_1 t + \cdots + b_9 t^9 + b_{13} t^{13} \\ X_2 = t^{14} + t^{17} + c_1 t + \cdots + c_9 t^9 + c_{11} t^{11} + c_{13} t^{13} + c_{15} t^{15} + c_{17} t^{17} \\ X_3 = t^{19} + t^{23} + d_1 t + \cdots + d_9 t^9 + d_{11} t^{11} + d_{13} t^{13} + d_{15} t^{15} + d_{17} t^{17} + d_{23} t^{23}, \end{cases}$$

onde $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$ e $b_6 = c_6 = d_6 = 0$.

Tendo em mãos uma descrição da $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ em termos das ordens de diferenciais de Kähler, obtemos o seguinte teorema.

TEOREMA 2.11. *Seja ϕ uma parametrização de uma curva analítica irredutível $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ com semigrupo Γ e multiplicidade v_0 . Então*

$$\boxed{\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = \sum_{i=1}^n \sharp V'_i + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i = n\delta + v_0 - 2.}$$

DEMONSTRAÇÃO: Pela decomposição do conjunto das lacunas L de Γ em (2.4), temos que para cada $i = 1, \dots, n$

$$L = N_i \cup M_i \cup \Delta_i.$$

Somando o número de elementos das n decomposições de L , pela Observação 2.8 temos

$$\begin{aligned} n \cdot \sharp L &= \sum_{i=1}^n \sharp N_i + \sum_{i=1}^n \sharp M_i + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sharp N_i + \sum_{i=1}^n \sharp V_i + \sum_{i=1}^n \sharp V'_i + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i. \end{aligned}$$

Adicionando $v_0 - 2$ em ambos os lados, temos

$$\left(v_0 - 2 + \sum_{i=1}^n \sharp N_i + \sum_{i=1}^n \sharp V_i \right) + \sum_{i=1}^n \sharp V'_i + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i = n \cdot \delta + v_0 - 2,$$

segue da Proposição 2.7 que

$$\mathcal{A}_c\text{cod}(\phi) + \sum_{i=1}^n \sharp V'_i + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i = n \cdot \delta + v_0 - 2.$$

Dentro deste contexto, $\sum_{i=1}^n \sharp V'_i + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i$ é o invariante que nos permite estabelecer uma relação entre a $\mathcal{A}_c$ -codimensão de ϕ e os invariantes delta, a multiplicidade e a dimensão de mergulho da curva. Entretanto, o cálculo deste invariante não é simples, e a princípio não conhecemos uma descrição deste novo objeto em termos de invariantes conhecidos na literatura, para curvas irredutíveis quaisquer em $\mathbb{C}^n$. Uma tal descrição é possível em casos particulares de curvas monomiais e de curvas planas.

Uma das direções para a continuidade da investigação, é o estudo de propriedades do invariante $\sum_{i=1}^n \sharp V'_i + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i$, caracterizando-o de uma maneira mais simples, afim de generalizar os resultados obtidos até o momento.

Capítulo 3

Curvas Analíticas Monomiais

Para curvas analíticas monomiais, é possível obter uma descrição mais simples dos conjuntos que determinam uma base para o espaço normal da parametrização ϕ , levando ao principal resultado do Capítulo, o Teorema 3.9, que determina a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ em termos do invariante delta, da dimensão de mergulho e do tipo Cohen-Macaulay do anel local da curva. A prova deste teorema decorre do Teorema 2.11 e de um resultado de Cavaliere e Niesi [CN2], que relaciona o tipo Cohen-Macaulay do anel local de uma curva monomial e o número de elementos de um subconjunto do conjunto de Apéry.

O número de Tjurina determina o número mínimo de parâmetros numa deformação versal, de uma curva analítica de interseção completa dada como zeros de funções (implicitamente). Já no caso de curvas dadas parametricamente, este número é dado pela $\mathcal{A}_e$ -codimensão do espaço tangente à órbita da aplicação que parametriza a curva. Na segunda seção, relacionamos o número de Tjurina e a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$, no caso de curvas irreduzíveis monomiais de interseção completa.

As curvas monomiais em $\mathbb{C}^3$ são estudadas na Seção 3.3. A literatura apresenta belos resultados sobre esta classe de curvas, entre os quais [Ser], [CN1], [CN2], [B], [Gr2]. Como consequência das fórmulas obtidas, damos condições para que uma curva irreduzível seja de interseção completa, através da $\mathcal{A}_e$ -codimensão de sua parametrização e do número de Milnor.

Finalizamos, destacando resultados para curvas em $\mathbb{C}^n$ com boas propriedades, e neste caso obtemos uma estimativa para a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ em termos dos resultados obtidos para curvas monomiais. Como aplicação dos resultados do Capítulo, completamos a classificação obtida por Gibson e Hobbs em [GH], determinando quais curvas são de interseção completa.

3.1 Curvas Monomiais em $\mathbb{C}^{n+1}$

Apresentamos aqui uma descrição do invariante $\sum_{i=1}^n \sharp V'_i + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i$ em termos do semigrupo de valores e com isso, obtemos uma fórmula para a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de curvas monomiais.

Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^{n+1}$ que admite uma parametrização monomial

$$\phi : \begin{cases} x_0 &= t^{v_0} \\ x_1 &= t^{v_1} \\ &\vdots \\ x_n &= t^{v_n}. \end{cases}$$

Neste caso, o cálculo da $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ torna-se mais simples e o conjunto de Apéry desempenha um papel fundamental.

Na decomposição que fizemos do conjunto das lacunas, destacamos os seguintes conjuntos:

$$N_i = \left\{ k \in L; \quad k \neq v \left(\frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0} \right) \text{ com } \eta_i \in \mathcal{O}, \eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\} \right\},$$

$$M_i = \left\{ k \in L, \quad k > v_i, \text{ tal que para qualquer } \omega = \frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0}, \text{ com } v(\omega) = k \right. \\ \left. \text{ existem } j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \text{ e } \eta_j \in \mathcal{O} \text{ tais que } k \geq v \left(\frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0} \right) \in L \right\},$$

$$\Delta_i = \left\{ k \in L, \quad k > v_i, \text{ tal que existe } \omega = \frac{\eta_i dx_0 - \eta_0 dx_i}{dx_0}, \text{ com } v(\omega) = k \text{ tal que} \right. \\ \left. k < v \left(\frac{\eta_j dx_0 - \eta_0 dx_j}{dx_0} \right), \text{ para todo } j = 1, \dots, n, \quad j \neq i \text{ e } \eta_j \in \mathcal{O} \right\}.$$

Seja $\mathcal{C}$ uma curva irredutível monomial e suponha que o semigrupo de valores de $\mathcal{C}$ é dado por $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$.

AFIRMAÇÃO 3.1. *Se uma lacuna k é dada como ordem de um elemento de $\mathcal{O}_{x_i}/dx_0$, então $k = v\left(\frac{\eta_0 dx_i}{dx_0}\right)$, para algum $\eta_0 \in \mathcal{O}$.*

DEMONSTRAÇÃO: De fato, como a curva é monomial, se existem $\eta_0, \eta_i \in \mathcal{O}$ tais que $v(\eta_0 dx_i) = v(\eta_i dx_0)$, então a diferencial $\eta_0 dx_i - \eta_i dx_0$ é nula.

Seja $\omega = \eta_0 dx_i - \eta_i dx_0$ não nula tal que $k = v(\frac{\omega}{dx_0})$, então $v(\eta_0 dx_i) \neq v(\eta_i dx_0)$, pelo que argumentamos acima. Assim,

$$k = \min \left\{ v\left(\frac{\eta_0 dx_i}{dx_0}\right), v(\eta_i) \right\}.$$

Como $v(\eta_i) \in \Gamma$, segue que $k = v\left(\frac{\eta_0 dx_i}{dx_0}\right)$.

Portanto, no caso de curvas monomiais, se $k \in L$ é tal que $k \in v(\frac{\mathcal{O}_{x_i}}{dx_0})$, então

$$k = v\left(\frac{\eta_0 dx_i}{dx_0}\right) = v(\eta_0) + v_i - v_0 \in \Gamma + v_i - v_0,$$

pois $v(dx_i) = v_i$. Se $\eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, então pela Proposição 2.5, tomando $\epsilon = -\frac{\eta_0}{dx_0}$ temos que

$$(0, f_1, \dots, f_i, \dots, f_n) \in T\mathcal{A}_c(\phi)$$

onde $f_j = \eta_j - \frac{\eta_0 dx_j}{dx_0}$ para algum $\eta_j \in \mathcal{O}$. Se $v\left(\frac{\eta_0 dx_j}{dx_0}\right) \in \Gamma$, então escolhendo $\eta_j \in \mathcal{O}$ conveniente temos $f_j = 0$. Por outro lado, se $v\left(\frac{\eta_0 dx_j}{dx_0}\right) \in L$ então $f_j = -\frac{\eta_0 dx_j}{dx_0}$.

Deste modo, se $k \in M_i$, temos que $k = v(\eta_0) + v_i - v_0$ com $v(\eta_0) \in \Gamma$ e existe $j = 1, \dots, n, j \neq i$, tal que $v(f_j) = v(\eta_0) + v_j - v_0 \leq k$. Observe que esta última condição ocorre apenas se $j = 1, \dots, i-1$ e claro que $v(\eta_0) + v_j - v_0 \in L$.

Além disso, note que não pode ocorrer a igualdade $v(f_j) = v(f_i) = k$ uma vez que, $v_j < v_i$ para todo $j = 1, \dots, i-1$.

Portanto, para cada $i = 1, \dots, n$, o conjunto V'_i é vazio (ver demonstração da Proposição 2.7), ou seja, as ordens de M_i determinam elementos que contribuem para uma base do espaço normal $\mathcal{N}$, logo $M_i = V_i$.

A mesma análise pode ser feita para os conjuntos Δ_i . Assim podemos redefinir os

conjuntos M_i e Δ_i da seguinte forma:

$$M_i = \{k \in L, k > v_i, \text{ tal que para toda representação } k = \alpha + v_i - v_0, \\ \text{com } \alpha \in \Gamma, \text{ existe } j = 1, \dots, i-1, \text{ tal que } \alpha + v_j - v_0 \in L\},$$

$$\Delta_i = \{k \in L, k > v_i, \text{ tal que existe uma representação } k = \alpha + v_i - v_0, \\ \text{com } \alpha \in \Gamma \text{ e } \alpha + v_j - v_0 \in \Gamma, \text{ para todo } j = 1, \dots, i-1\}.$$

Note que o conjunto M_1 sempre é vazio.

Portanto, a Proposição 2.7 se reescreve, no caso de curvas monomiais, da seguinte forma:

PROPOSIÇÃO 3.2. *Se ϕ é uma parametrização monomial de uma curva irredutível $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}^{n+1}$, com multiplicidade v_0 , então*

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = v_0 - 2 = \sum_{i=1}^n \#N_i + \sum_{i=2}^n \#M_i.$$

O exemplo abaixo ilustra como podemos determinar a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ em termos do conjunto de Apéry.

EXEMPLO 3.3. *Considere uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^4$ dada pela parametrização:*

$$\phi : \begin{cases} x_0 = t^9 \\ x_1 = t^{20} \\ x_2 = t^{44} \\ x_3 = t^{51}. \end{cases}$$

O semigrupo de valores desta curva é dado por $\Gamma = \langle 9, 20, 44, 51 \rangle$, com condutor $c = 87$ e $\delta = 50$.

É fácil ver que, para todo $k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq v_0 - 2 = 7$, os elementos $(t^k, 0, 0, 0)$ pertencem ao espaço normal $\mathcal{N}$.

Os elementos do conjunto de Apéry e as lacunas do semigrupo Γ são dados na tabela abaixo:

A_p	$L = \{a_j - kv_0; k \in \mathbb{N}, a_j \in A_p\}$									
$\emptyset$										
$v_1 = 20$	11	2								
$2v_1 = 40$	31	22	13	4						
$v_2 = 44$	35	26	17	8						
$v_3 = 51$	42	33	24	15	6					
$v_1 + v_2 = 64$	55	46	37	28	19	10	1			
$2v_1 + v_2 = 84$	75	66	57	48	39	30	21	12	3	
$2v_2 = 88$	79	70	61	52	43	34	25	16	7	
$v_2 + v_3 = 95$	86	77	68	59	50	41	32	23	14	5

Para determinar quais lacunas l são dadas como ordem de um elemento em $\mathcal{O}_{x_i}/dx_0$, que neste caso significa $l = \alpha + v_i - v_0 \in \Gamma + v_i - v_0$, para algum $i = 1, 2, 3$, basta verificar se $\alpha + v_i \in A_p$. Deste modo, é suficiente analisar as lacunas da primeira coluna da tabela acima.

Na primeira decomposição do conjunto das lacunas, os elementos que são ordens de um elemento em $\mathcal{O}_{x_1}/dx_0$ são aquelas lacunas l estritamente maiores que v_1 da forma $l = \alpha + v_1 - v_0$, com $\alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$ tais que $\alpha + v_1 \in A_p$. Neste caso, todas estas lacunas estão em Δ_1 . Logo,

N_1	$1, \dots, 8, 10, \dots, 17, 19, 21, \dots, 26, 28, 30, 32, \dots, 35, 37, 39, 41,$ $42, 43, 46, 48, 50, 52, 57, 59, 61, 66, 68, 70, 77, 79, 86$
Δ_1	$31, 55, 75$

Observe que, os elementos de Δ_1 dados acima, $31 = 2v_1 - v_0 = v_1 + v_1 - v_0$, $55 = v_2 + v_1 - v_0$ e $75 = 2v_1 + v_2 - v_0 = (v_1 + v_2) + v_1 - v_0$ são ordens dos seguintes elementos em $\mathcal{O}_{x_1}/dx_0$:

$$31 = v \left(\frac{x_1 dx_1}{dx_0} \right), \quad 55 = v \left(\frac{x_2 dx_1}{dx_0} \right) \quad \text{e} \quad 75 = v \left(\frac{x_1 x_2 dx_1}{dx_0} \right).$$

Na segunda decomposição de L , queremos determinar as lacunas l estritamente maiores que v_2 , dadas por $l = \alpha + v_2 - v_0$, com $\alpha \in \Gamma \setminus \{0\}$, tais que $\alpha + v_2 \in A_p$. Dentre estas basta verificar quais estão em M_2 ou em Δ_2 . Facilmente, constatamos que

N_2	1, ..., 8, 10, ..., 17, 19, 21, ..., 26, 28, 30, ..., 35, 37, 39, 41, 42, 43, 46, 48, 50, 52, 57, 59, 61, 66, 68, 70, 77
M_2	55, 75, 79
Δ_2	86

Veja que $55 = v_1 + v_2 - v_0$, $75 = 2v_1 + v_2 - v_0$, $79 = v_2 + v_2 - v_0$ e $86 = v_3 + v_2 - v_0$ são ordens dos seguintes elementos em $\mathcal{O}_{x_2}/dx_0$,

$$55 = v \left(\frac{x_1 dx_2}{dx_0} \right), \quad 75 = v \left(\frac{x_1^2 dx_2}{dx_0} \right), \quad 79 = v \left(\frac{x_2 dx_2}{dx_0} \right) \quad e \quad 86 = v \left(\frac{x_3 dx_2}{dx_0} \right).$$

Finalmente, na terceira decomposição de L , obtemos

N_3	1, ..., 8, 10, ..., 17, 19, 21, ..., 26, 28, 30, ..., 35, 37, 39, 41, 42, 43, 46, 48, 50, 52, 55, 57, 59, 61, 66, 68, 70, 75, 77, 79
M_3	86

Onde, $86 = v_2 + v_3 - v_0 \in M_3$ é dado por $86 = v \left(\frac{x_2 dx_3}{dx_0} \right)$.

Concluimos assim que,

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = v_0 - 2 + \sum_{i=1}^3 \sharp N_i + \sum_{i=2}^3 \sharp M_i = 152.$$

Como vimos os conjuntos V'_i são vazios, assim temos uma versão do Teorema 2.11 para curvas monomiais, onde a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ pode ser determinada conhecendo apenas o semigrupo de valores da curva $\mathcal{C}$, já que os conjuntos Δ_i são totalmente determinados a partir deste, e portanto os conjuntos Δ_i são $\mathcal{A}$ -invariantes.

TEOREMA 3.4. *Se ϕ é uma parametrização monomial de uma curva analítica irredutível $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ com semigrupo Γ e multiplicidade v_0 . Então*

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i = n\delta + v_0 - 2.$$

Para a classe de curvas monomiais, é possível apresentar um método sistemático para obter a $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ conhecendo apenas o conjunto de Apéry de Γ . Note no entanto, que um elemento de A_p pode não ser dado de maneira única em termos do sistema mínimo de geradores, neste caso diremos que tal elemento em A_p tem relações. Tal fato será importante para o cálculo da $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ como veremos abaixo:

EXEMPLO 3.5. Considere a parametrização $\phi : \begin{cases} x_0 = t^5 \\ x_1 = t^6 \\ x_2 = t^9. \end{cases}$

O semigrupo é $\Gamma = \langle 5, 6, 9 \rangle$, cujo condutor é $c = 14$. O conjunto das lacunas e conjunto de Apéry de Γ são dados por:

A_p	L
$\emptyset$	
$v_1 = 6$	1
$v_2 = 9$	4
$2v_1 = 12$	7 2
$3v_1 = 2v_2 = 18$	13 8 3

Neste caso a curva é Gorenstein, pois $c = 2\delta$. Veja que $7 = 2v_1 - v_0$ e $13 = 3v_1 - v_0 = 2v_2 - v_0$, assim é fácil observar que $\Delta_1 = \{7, 13\}$ e $\Delta_2 = \{13\}$. Logo, pelo Teorema 3.4,

$$\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = 2\delta + v_0 - 2 - \sharp\Delta_1 - \sharp\Delta_2 = 14 + 3 - 2 - 1 = 14.$$

Note que, a maneira como expressamos a lacuna 13, em termos do conjunto de Apéry foi importante para determinarmos os conjuntos Δ_1 e Δ_2 e conseqüentemente a $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$.

Nosso objetivo neste momento, será determinar precisamente o invariante $\sum_{i=1}^n \sharp\Delta_i$, de modo que não necessitemos analisar todas as representações possíveis de uma lacuna em termos do conjunto de Apéry. Para tanto, vamos definir novos conjuntos, estes por sua vez disjuntos, de tal maneira que estejam em bijeção com os conjuntos Δ_i 's.

Para todo $i = 1, \dots, n$,

$$\Delta_i = \{k \in L, k > v_i, \text{ tal que existe uma representação } k = \alpha + v_i - v_0, \\ \text{com } \alpha \in \Gamma \text{ e } \alpha + v_j - v_0 \in \Gamma, \text{ para todo } j = 1, \dots, i-1\}.$$

Como toda lacuna em Δ_i se escreve como $a_j - v_0$ com $a_j \in A_p$ podemos reescrever estes conjuntos em termos dos elementos do conjunto de Apéry, omitindo $-v_0$, já que para efeito da contagem de seus elementos, isto não é relevante. Com um certo abuso de notação, vamos utilizar o mesmo símbolo para denotar este conjunto. Deste modo,

$$\Delta_i = \{\alpha + v_i \in A_p; \alpha > 0 \text{ e } \alpha + v_j \notin A_p, \text{ para todo } j = 1, \dots, i-1\}.$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, definamos os seguintes conjuntos:

$$\bar{\Delta}_i = \{a \in A_p; a > 0, a + v_j \notin A_p, \forall j < i \text{ e } a + v_i \in A_p\}.$$

É fácil ver que os conjuntos $\bar{\Delta}_i$ são disjuntos. Provemos que estes estão em bijeção com os conjuntos Δ_i :

Afirmação 3.6. *A aplicação $\Phi_i : \Delta_i \longrightarrow \bar{\Delta}_i$ definida por $x \mapsto x - v_i$ para cada $i = 1, \dots, n$ é uma bijeção.*

Demonstração: Dado $x \in \Delta_i$ temos que $x = \alpha + v_i \in A_p$, com $\alpha > 0$ e $\alpha + v_j \notin A_p$ para todo $j = 1, \dots, i-1$. Portanto,

$$\Phi_i(x) = x - v_i = \alpha + v_i - v_i = \alpha \in \bar{\Delta}_i,$$

pois $\alpha \in A_p$.

É fácil ver que Φ_i é injetora. Provemos que é sobrejetora. Seja $w \in \bar{\Delta}_i$, isto é, $w > 0$ tal que

$$w + v_1 \notin A_p, \dots, w + v_{i-1} \notin A_p \text{ e } w + v_i \in A_p.$$

Considere o elemento $u = w + v_i$. As condições acima garantem que $u \in \Delta_i$ e além disso, $\Phi_i(u) = w + v_i - v_i = w$.

Nosso objetivo é determinar a soma do número de elementos dos conjuntos $\overline{\Delta}_i$ e para tanto, vamos introduzir mais um conceito.

Seja $\tilde{A}_p$ o seguinte subconjunto de A_p .

$$\tilde{A}_p = \{b \in A_p : b \neq 0, b + a_i \notin A_p \text{ para todo } a_i \in A_p \setminus \{0\}\}.$$

Este conjunto é não vazio, pois o maior elemento a_{v_0-1} do conjunto de Apéry sempre pertence a ele. O número de elementos de $\tilde{A}_p$, denotado por t_p , é um $\mathcal{A}$ -invariante que possui uma interpretação interessante, no caso de curvas monomiais.

DEFINIÇÃO 3.7. *Seja $(A, \mathcal{M}, k)$ um anel local d -dimensional Cohen-Macaulay, com ideal maximal $\mathcal{M}$ e k um corpo. O tipo de A é o número $r(A) = \dim_k \operatorname{Ext}_A^d(k, A)$.*

Se $r(A) = 1$, então A é um anel Gorenstein.

Para curvas irredutíveis, o anel local $\mathcal{O}$ é um domínio local e completo de dimensão de Krull igual a 1, e portanto $\mathcal{O}$ é um anel Cohen-Macaulay.

Cavaliere e Niesi em [CN2] (Proposition 2.7), provaram que o cálculo do tipo Cohen-Macaulay do anel local $\mathcal{O}$, associado a uma curva monomial, torna-se bem simples. Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ um semigrupo de valores e $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{t^{v_0}, t^{v_1}, \dots, t^{v_n}\}$, então o tipo Cohen-Macaulay do anel $\mathcal{O}$, é dado por

$$r(\mathcal{O}) := t_p = \sharp \tilde{A}_p.$$

Com isso, podemos descrever $\sum_{i=1}^n \sharp \overline{\Delta}_i$ em termos da multiplicidade da curva e do tipo Cohen-Macaulay do anel local $\mathcal{O}$.

PROPOSIÇÃO 3.8. *Se $\mathcal{C}$ é uma curva irredutível em $\mathbb{C}^{n+1}$ que admite uma parametrização monomial ϕ , com multiplicidade v_0 e $t_p = \sharp \tilde{A}_p$. Então,*

$$\sharp \overline{\Delta}_1 = \sharp \overline{\Delta}_2 + \dots + \sharp \overline{\Delta}_n = v_0 - t_p - 1.$$

DEMONSTRAÇÃO: Lembremos que

$$\overline{\Delta}_i = \{a \in A_p : a > 0, a + v_j \notin A_p, \forall j < i \text{ e } a + v_i \in A_p\}.$$

Observe que se $x \in \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2 \cup \dots \cup \bar{\Delta}_n$, então $x \notin \tilde{A}_p$. De fato, se $x \in \bar{\Delta}_j$ para algum $j = 1, \dots, n$, então por definição, $x \in A_p$ e $x + v_j \in A_p$, como $v_j \in A_p$, segue que $x \notin \tilde{A}_p$.

Mais ainda, dado $x \in A_p \setminus \{0\}$, então $x \in \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2 \cup \dots \cup \bar{\Delta}_n$ ou $x \in \tilde{A}_p$. De fato, se $x + v_1 \in A_p$, então $x \in \bar{\Delta}_1$. Caso contrário, se $x + v_1 \notin A_p$, mas $x + v_2 \in A_p$ então concluímos que $x \in \bar{\Delta}_2$ e assim sucessivamente, se $x + v_j \notin A_p$ para todo $j = 1, \dots, n-1$ e $x + v_n \in A_p$ então $x \in \bar{\Delta}_n$. Se x não satisfaz estas condições, então $x \in \tilde{A}_p$. De fato, dado $a_k \in A_p \setminus \{0\}$ temos que para algum $i = 1, \dots, n$ e $a_l \in A_p$, o elemento a_k se escreve como $a_k = v_i + a_l$, logo

$$x + a_k = x + (v_i + a_l) = (x + v_i) + a_l \notin A_p,$$

pois se $(x + v_i) + a_l \in A_p$ então $x + v_i \in A_p$. Absurdo, pois por definição dos conjuntos $\bar{\Delta}_i$'s temos que $x + v_1, x + v_2, \dots, x + v_n \notin A_p$, portanto, $x \in \tilde{A}_p$.

Como $\sharp A_p = v_0$, temos que

$$\sharp A_p - 1 = \sharp \bar{\Delta}_1 + \dots + \sharp \bar{\Delta}_n + \sharp \tilde{A}_p.$$

Donde concluímos que, $\sharp \bar{\Delta}_1 + \dots + \sharp \bar{\Delta}_n = v_0 \cdots t_p - 1$.

Os conjuntos Δ_i e $\bar{\Delta}_i$ estão em bijeção, logo segue da Proposição 3.8 a seguinte caracterização do invariante $\sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i$, em termos de invariantes que dependem unicamente do semigrupo de valores da curva:

$$\sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i = \sum_{i=1}^n \sharp \bar{\Delta}_i = v_0 \cdots t_p - 1.$$

Portanto, para curvas monomiais obtemos uma fórmula para a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ em termos do semigrupo de valores e da dimensão de mergulho da curva.

TEOREMA 3.9. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^{n+1}$, ϕ uma parametrização monomial de $\mathcal{C}$, com multiplicidade v_0 e $t_p = \sharp \tilde{A}_p$. Então,*

$$\boxed{\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) \leq n\delta + t_p - 1.}$$

DEMONSTRAÇÃO: Segue do Teorema 3.4 que

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) + \sum_{i=1}^n \sharp \Delta_i = n\delta + v_0 - 2.$$

Pelos argumentos acima, temos que

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) \leq n\delta + v_0 - 2 - (v_0 - t_p - 1) = n\delta + t_p - 1.$$

OBSERVAÇÃO 3.10. *Como $\tilde{A}_p \subset A_p \setminus \{0\}$ e o conjunto de Apéry possui v_0 elementos, temos que*

$$t_p = \sharp \tilde{A}_p \leq \sharp(A_p \setminus \{0\}) = v_0 - 1.$$

Portanto, $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = n\delta + t_p - 1 \leq n\delta + v_0 - 2$, o que mostra que o resultado do Teorema 3.9, refina a estimativa para a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$, apresentada na Proposição 2.4.

COROLÁRIO 3.11. *Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ um semigrupo de valores, ϕ a curva monomial determinada por este semigrupo em $\mathbb{C}^{n+1}$ e $t_p = \sharp \tilde{A}_p$. Temos que Γ é simétrico se, e somente se, $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = n\delta$.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta notar que $t_p = 1$ se, e somente se, Γ é simétrico.

OBSERVAÇÃO 3.12. *O Corolário 3.11 apresenta uma condição necessária e suficiente para que qualquer curva analítica irredutível $\mathcal{C}$, com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$, seja Gorenstein, em termos da $\mathcal{A}_e$ -codimensão da curva monomial em $\mathbb{C}^{n+1}$ determinada pelo semigrupo Γ . Uma aplicação deste resultado é apresentada no final deste capítulo.*

3.2 Tjurina $\times \mathcal{A}_e$ -codimensão(ϕ)

Nesta seção discutimos as relações entre as deformações de uma curva dada implicitamente e as deformações de sua parametrização no caso de curvas monomiais. Em [Gr2], [Fr] e [Tj] encontramos resultados sobre deformações de curvas na forma implícita e relações para o cálculo do invariante de Tjurina.

Iniciemos com um exemplo:

EXEMPLO 3.13. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irreduzível em $\mathbb{C}\{X, Y, Z, W\}$ determinada pelo ideal*

$$I = \langle Y^2 - X^3, X^2Y^3 - Z^2, XY^6Z - W^2 \rangle.$$

Esta é uma curva de interseção completa. Uma parametrização de $\mathcal{C}$ é dada por

$$\phi : \begin{cases} x &= t^8 \\ y &= t^{12} \\ z &= t^{26} \\ w &= t^{53}. \end{cases}$$

O semigrupo de valores $\Gamma = \langle 8, 12, 26, 53 \rangle$ possui condutor $c = 84$ e $\delta = 42$ (pois, $\mathcal{C}$ é Gorenstein).

Calculmos o número de Tjurina. Vimos na Seção 1.4 que, para curvas de interseção completa, o número de Tjurina é dado como

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{X, Y, Z, W\}}{\langle f_1, f_2, f_3, J(f) \rangle},$$

onde $f = (f_1, f_2, f_3)$ representa as equações que determinam a curva e $J(f)$ é o ideal Jacobiano de f em $\mathcal{O}$ gerado pelos menores maximais da matriz Jacobiana, que neste caso é dada por:

$$\begin{bmatrix} -3X^2 & 2Y & 0 & 0 \\ 2XY^3 & 3X^2Y^2 & -2Z & 0 \\ Y^6Z & 6XY^5Z & XY^6 & -2W \end{bmatrix}$$

O determinante dos menores 3×3 é dado pelas equações:

$$\begin{aligned} g_1 &= -9X^5Y^8 - 4Y^7Z^2 - 36X^3Y^5Z^2 - 4X^2Y^{10} \\ g_2 &= 18X^4Y^2W + 8XY^4W \end{aligned}$$

$$g_3 = -12X^2ZW$$

$$g_4 = 8YZW$$

Com o auxílio do programa Maple ou Singular, podemos calcular uma base de Gröbner para o ideal

$$\langle f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, g_4 \rangle$$

o que nos fornece um conjunto de geradores mais simples. Agora basta calcular a codimensão do ideal gerado pelos termos líderes desta base.

Com isso, obtemos $\tau = \mathcal{K}_c \text{cod}(f) = 84$. Entretanto, como neste caso temos uma parametrização da curva, um método mais simples de calcular o número de Tjurina seria o seguinte: como a parametrização ϕ é monomial temos que o conjunto $\Delta \setminus \Gamma$ é vazio, assim $\tau = c - \sharp \Delta \setminus \Gamma = c = 84$.

Por outro lado, pelo Teorema 3.9 a $\mathcal{A}_c$ -codimensão do germe ϕ é dada por

$$\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = 3\delta + t_p - 1 = 126,$$

pois $t_p = 1$. Portanto, neste caso verificamos que $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) > \tau$.

Considere $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ o anel de polinômios nas variáveis $X_1, \dots, X_n$.

DEFINIÇÃO 3.14. Um polinômio $g \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ é **quase-homogêneo** de grau $d \in \mathbb{Q}_+$ e de pesos $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}_+^n$, se para todo monômio $X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ de g temos $\sum_{j=1}^n a_j \alpha_j = d$.

DEFINIÇÃO 3.15. Uma aplicação holomorfa $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p, 0$ é **quase-homogênea** de tipo $(a_1, \dots, a_n; d_1, \dots, d_p)$, se cada componente f_i é um polinômio quase-homogêneo de pesos $(a_1, \dots, a_n)$ e grau d_i .

Uma curva analítica irreduzível $\mathcal{C} = \{X \in \mathbb{C}^n; f_1(X) = \dots = f_r(X) = 0\}$ é **quase-homogênea** se a aplicação que define a curva $f = (f_1, \dots, f_r)$ é uma aplicação quase-homogênea.

PROPOSIÇÃO 3.16. Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irreduzível. $\mathcal{C}$ é quase-homogênea se, e somente se, existe uma parametrização ϕ de $\mathcal{C}$ monomial.

Com isso podemos estabelecer a seguinte relação:

PROPOSIÇÃO 3.17. *Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, com $n \geq 2$ uma curva irredutível quase-homogênea de interseção completa definida por f e ϕ uma parametrização monomial de $\mathcal{C}$, então*

$$\tau = \mathcal{K}_e \text{cod}(f) \leq \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $n = 2$.

DEMONSTRAÇÃO: Segue do Corolário 1.28, que para toda curva irredutível de interseção completa

$$\tau = c - \sharp \Delta \setminus \Gamma,$$

onde c é o condutor do semigrupo e $\Delta \setminus \Gamma$ é o conjunto das lacunas especiais da curva. Por outro lado, toda curva de interseção completa é Gorenstein, isso implica que $c = 2\delta$ e por definição, o germe f é quase-homogêneo assim o conjunto $\Delta \setminus \Gamma$ é vazio. Logo,

$$\tau = c = 2\delta \leq \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = n\delta.$$

Além disso, $\tau = \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ se, e somente se, $(\mathcal{C}, 0) \subset \mathbb{C}^3$.

Esta proposição garante que para toda curva irredutível, quase-homogênea, de interseção completa $\mathcal{C}$ em $\mathbb{C}^n$ com $n > 3$, o número de parâmetros num desdobramento versal desta curva quando esta é dada parametricamente, é estritamente maior que o número de parâmetros numa deformação versal da mesma, quando dada implicitamente. E que apenas em $\mathbb{C}^3$ estes números coincidem.

Segue da demonstração da Proposição 3.17, que a relação entre os invariantes τ e $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ invertem no caso de curvas planas monomiais, $\tau = 2\delta > \delta = \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$. No próximo capítulo faremos um estudo mais detalhado de curvas irredutíveis planas, abordando as relações entre o número de Tjurina e a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ para uma curva plana qualquer.

3.3 Curvas Monomiais em $\mathbb{C}^3$

As curvas analíticas irreduzíveis monomiais em $\mathbb{C}^3$ serão analisadas nesta seção. Algumas caracterizações aparecem na literatura nesta dimensão.

Dentre elas, destacamos o trabalho dos autores Cavaliere e Niesi em [CN1] que determinaram o tipo Cohen-Macaulay t_p do anel local $\mathcal{O}$, para curvas monomiais em $\mathbb{C}^3$.

PROPOSIÇÃO 3.18. ([CN1]) *Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ um semigrupo de valores. Então,*

$$t_p = \mathfrak{t} \tilde{A}_p = \begin{cases} 1 & \text{se } \Gamma \text{ é simétrico} \\ 2 & \text{se } \Gamma \text{ não é simétrico.} \end{cases}$$

Portanto, segue da proposição anterior e do Teorema 3.9 o seguinte corolário:

COROLÁRIO 3.19. *Se $\mathcal{C}$ é uma curva analítica irreduzível em $\mathbb{C}^3$, dada por uma parametrização monomial $\phi(t) = (t^{v_0}, t^{v_1}, t^{v_2})$, onde c é o condutor do semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$, então temos:*

- (1) $\mathcal{C}$ é Gorenstein se, e somente se, $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = 2\delta = c$.
- (2) $\mathcal{C}$ é não Gorenstein se, e somente se, $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = 2\delta + 1$.

Em outras palavras, o corolário acima nos diz que no caso de curvas irreduzíveis quase-homogêneas em $\mathbb{C}^3$, a paridade da $\mathcal{A}_c$ -codimensão da parametrização determina completamente se uma curva é ou não uma interseção completa, já que segue de Serre [Ser] que em $\mathbb{C}^3$, uma curva $\mathcal{C}$ é Gorenstein se, e somente se, é de interseção completa.

Portanto, do resultado de Serre e da fórmula de Milnor obtemos:

COROLÁRIO 3.20. *Nas hipóteses do corolário anterior, temos que:*

- (1) $\mathcal{C}$ é de interseção completa se, e somente se, $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = \mu$.
- (2) $\mathcal{C}$ não é uma interseção completa se, e somente se, $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = \mu + 1$.

Vimos na Proposição 3.17, uma relação entre o número de Tjurina e a $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ no caso de curvas quase-homogêneas de interseção completa em $\mathbb{C}^{n+1}$, a qual garante que

$$\tau \leq \mathcal{A}_c \text{cod}(\phi),$$

valendo a igualdade se, e somente se, $n=2$, ou seja, para curvas em $\mathbb{C}^3$. Todavia, segue de Buchweitz em [B] e Greuel em [Gr2] o seguinte resultado:

TEOREMA 3.21. *Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^3$ uma curva reduzida com singularidade isolada na origem e $r(\mathcal{O})$ o tipo Cohen-Macaulay do anel local $\mathcal{O}$ da curva. $\mathcal{C}$ é quase-homogênea se, e somente se, $\tau = \mu + r(\mathcal{O}) - 1$.*

Greuel em [Gr2], Corollary 2.5 mostra que $\tau = \mu + r(\mathcal{O}) - 1$ num contexto mais geral. Em particular, vale para toda curva reduzida em $\mathbb{C}^n$, quase-homogênea de interseção completa, com singularidade isolada. Note que o teorema acima, é válido para curvas monomiais em $\mathbb{C}^3$, não necessariamente de interseção completa.

Por outro lado, sabemos que para toda curva de interseção completa, $\tau = \mathcal{K}_e \text{cod}(f)$ onde f é a aplicação que a define. Com isso obtemos o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 3.22. *Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^3$ uma curva irredutível quase-homogênea definida por f e ϕ uma parametrização monomial de $\mathcal{C}$, então*

$$\tau = \mathcal{K}_e \text{cod}(f) = \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi).$$

OBSERVAÇÃO 3.23. *Um problema interessante é estabelecer um isomorfismo entre os espaços de deformação de ϕ e de f .*

3.4 Resultados Gerais

Nesta seção vamos obter algumas estimativas mais precisas para a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$, onde ϕ é uma curva em $\mathbb{C}^n$, não necessariamente monomial, mas com determinadas propriedades.

Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^{n+1}$ e ϕ uma parametrização de $\mathcal{C}$ dada por

$$\phi : \begin{cases} x_0 &= t^{v_0} \\ x_1 &= t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_{i1} t^i \\ &\vdots \\ x_n &= t^{v_n} + \sum_{i>v_n} a_{in} t^i. \end{cases}$$

Definimos $\phi_0(t) = (t^{v_0}, t^{v_1}, \dots, t^{v_n})$ como sendo a parte principal do germe ϕ .

DEFINIÇÃO 3.24. Dizemos que ϕ possui parte principal boa se ϕ_0 determina uma curva monomial irreduzível em $\mathbb{C}^{n+1}$.

Deste modo, uma das condições para que ϕ possua uma parte principal boa é que $\text{mdc}(v_0, v_1, \dots, v_n) = 1$.

Se $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ é o semigrupo de valores associado à ϕ , então o semigrupo de valores associado à ϕ_0 é dado por $\Gamma_0 = \langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle \subset \Gamma$, com $n \leq g$.

Uma propriedade importante do invariante $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ é que este é semicontínuo superiormente. Tal propriedade garante que

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) \leq \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi_0).$$

Se Γ , A_p e δ indicam o semigrupo de valores, o conjunto de Apéry e o invariante delta de ϕ , respectivamente, então denotaremos por Γ_0 , A_{p_0} e δ_0 os mesmos objetos para a curva ϕ_0 . Além disso, denotaremos por t_{p_0} o tipo Cohen-Macaulay do anel local de ϕ_0 , e como vimos, $t_{p_0} = \# \tilde{A}_{p_0}$. Temos assim o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 3.25. Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irreduzível em $\mathbb{C}^{n+1}$ e ϕ uma parametrização de $\mathcal{C}$ com parte principal boa ϕ_0 . Então

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) \leq n\delta_0 + t_{p_0} - 1.$$

Este resultado segue da propriedade de semicontinuidade do invariante $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ e do Teorema 3.9. Note que, esta cota superior para a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ é em termos dos invariantes da curva monomial ϕ_0 .

COROLÁRIO 3.26. Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irreduzível em $\mathbb{C}^{n+1}$ e ϕ uma parametrização de $\mathcal{C}$ com parte principal boa ϕ_0 . Se $\Gamma = \Gamma_0$ então

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) \leq n\delta + t_p - 1.$$

O corolário anterior apresenta uma estimativa mais precisa para a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$, onde ϕ é uma curva em $\mathbb{C}^n$ com parte principal boa, do que a estimativa apresentada na primeira

seção do Capítulo 2, já que

$$\mathcal{A}_{\text{cod}}(\phi) \leq n\delta + t_p - 1 \leq n\delta + v_0 - 2,$$

pois $t_p \leq v_0 - 1$.

Note que a igualdade $n\delta + t_p - 1 = n\delta + v_0 - 2$ ocorre se, e somente se, $t_p = v_0 - 1$, ou seja, $\tilde{A}_p = A_p \setminus \{0\}$. Ilustramos este caso no exemplo abaixo:

EXEMPLO 3.27. (Curvas com dimensão de mergulho maximal)

Uma curva $\mathcal{C}$ é dita uma curva com dimensão de mergulho maximal, se $\mathcal{C}$ é uma curva em $\mathbb{C}^{n+1}$ de multiplicidade $n+1$. Curvas com esta propriedade podem ser representadas parametricamente por

$$\phi : \begin{cases} x_0 = t^{n+1} \\ x_1 = t^{v_1} + \sum_{i>v_1} a_{i1} t^i \\ \vdots \\ x_n = t^{v_n} + \sum_{i>v_n} a_{in} t^i. \end{cases}$$

Não é difícil ver que tais curvas satisfazem as seguintes propriedades:

- (1) O semigrupo de valores de $\mathcal{C}$ é gerado por $\Gamma = \langle n+1, v_1, \dots, v_n \rangle$;
- (2) se $n \geq 2$ então $\mathcal{C}$ não é Gorenstein;
- (3) o conjunto de Apéry é dado por $A_p = \{0, v_1, \dots, v_n\}$. Logo,

$$t_p = \sharp \tilde{A}_p = \sharp A_p \setminus \{0\} = v_0 - 1;$$

- (4) ϕ possui parte principal boa ϕ_0 .

Como o semigrupo de ϕ é igual ao semigrupo de ϕ_0 , temos que

$$\mathcal{A}_{\text{cod}}(\phi) \leq n\delta + t_p - 1 = n\delta + v_0 - 2.$$

EXEMPLO 3.28. Como aplicação dos resultados apresentados sobre a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de curvas monomiais, podemos completar a classificação das singularidades simples de curvas irredutíveis parametrizadas em $\mathbb{C}^3$, obtida por Gibson e Hobbs em [GH], classificando quais curvas são de interseção completa. Para isto, aplicamos os Corolários 3.11 e 3.19 para determinar se o semigrupo associado é ou não simétrico.

A tabela seguinte é obtida da Tabela 2, página 299 em [GH], com exceção da última coluna, em que acrescentamos S ou N conforme o semigrupo seja ou não simétrico.

Forma Normal ϕ		Γ	$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$	I.C.
$(t^3, t^{3k+1}, t^{3n+2})$	$k \leq n < 2k$	$\langle 3, 3k+1, 3n+2 \rangle$	$2k+2n+1$	N
$(t^3, t^{3k+1}, t^{3n+2})$	$n < k \leq 2n$	$\langle 3, 3n+2, 3k+1 \rangle$	$2k+2n+1$	N
$(t^3, t^{3k+1} + t^{3p+2}, t^{3n+2})$	$k \leq p < n < 2k$	$\langle 3, 3k+1, 3n+2 \rangle$	$2k+p+n+1$	N
$(t^3, t^{3n+2} + t^{3p+1}, t^{3k+1})$	$n < p < k \leq 2n$	$\langle 3, 3n+2, 3k+1 \rangle$	$2n+p+k+1$	N
(t^4, t^5, t^6)		$\langle 4, 5, 6 \rangle$	8	S
(t^4, t^5, t^7)		$\langle 4, 5, 7 \rangle$	9	N
(t^4, t^5, t^{11})		$\langle 4, 5, 11 \rangle$	11	N
$(t^4, t^5 + t^7, t^{11})$		$\langle 4, 5, 11 \rangle$	10	N
(t^4, t^6, t^{2k+1})	$k \geq 3$	$\langle 4, 6, 2k+1 \rangle$	$2k+4$	S
$(t^4, t^6 + t^{2k-1}, t^{2k+1})$	$k \geq 4$	$\langle 4, 6, 2k+1 \rangle$	$2k+3$	S
$*(t^4, t^6 + t^{2k-3}, t^{2k+1})$	$k \geq 5$	$\langle 4, 6, 2k+1, 2k-3 \rangle$	$2k+2$	N
$*(t^4, t^6 + t^{2k-7}, t^{2k+1})$	$k \geq 7$	$\langle 4, 6, 2k-1, 2k+1 \rangle$	$2k-1$	N
(t^4, t^7, t^9)		$\langle 4, 7, 9 \rangle$	13	N
$(t^4, t^7, t^9 + t^{10})$		$\langle 4, 7, 9 \rangle$	12	N
(t^4, t^7, t^{10})		$\langle 4, 7, 10 \rangle$	14	S
(t^4, t^7, t^{13})		$\langle 4, 7, 13 \rangle$	15	N
(t^4, t^7, t^{17})		$\langle 4, 7, 17 \rangle$	17	N
$(t^4, t^7 + t^9, t^{10})$		$\langle 4, 7, 10 \rangle$	13	S
$(t^4, t^7 + t^9, t^{13})$		$\langle 4, 7, 13 \rangle$	14	N
$(t^4, t^7 + t^9, t^{17})$		$\langle 4, 7, 17 \rangle$	15	N
$(t^4, t^7 + t^{10}, t^{17})$		$\langle 4, 7, 17 \rangle$	16	N

- As curvas de multiplicidade 3, da tabela acima, não são de interseção completa, pois são curvas de dimensão de mergulho maximal (conforme Exemplo 3.27).
- Para as demais curvas monomiais em $\mathbb{C}^3$, vimos no Corolário 3.19, que o semigrupo é simétrico se, e somente se, $\mathcal{A}_c\text{cod}(\phi)$ é par. Portanto, nestas condições, tais curvas são de interseção completa.
- Note que a forma normal $\phi(t) = (t^4, t^5 + t^7, t^{11})$ possui $\mathcal{A}_c$ -codimensão par, mas o semigrupo da curva $\Gamma = \langle 4, 5, 11 \rangle$ não é simétrico, pois na forma normal anterior a esta, tínhamos verificado tal propriedade.
- Para as formas normais indicadas por (*), usamos o seguinte argumento. Considere a curva monomial ϕ_0 em $\mathbb{C}^4$ determinada pelo semigrupo Γ de ϕ .

Por exemplo, $\phi(t) = (t^4, t^6 + t^{2k-3}, t^{2k+1})$ com $k \geq 5$, com semigrupo dado por $\Gamma = \langle 4, 6, 2k-3, 2k+1 \rangle$ então

$$\phi_0 : \begin{cases} x_0 = t^4 \\ x_1 = t^6 \\ x_2 = t^{2k-3} \\ x_3 = t^{2k+1} \end{cases}$$

Note que, ϕ_0 possui dimensão de mergulho maximal, e portanto

$$\mathcal{A}_c\text{cod}(\phi_0) = 3\delta + t_p - 1 = 3\delta + v_0 - 2 = 3\delta + 2.$$

Segue do Corolário 3.11, que o semigrupo Γ não é simétrico. Logo, a curva ϕ (em $\mathbb{C}^3$) não é de interseção completa.

Capítulo 4

Curvas Analíticas Planas

Um invariante que se destaca no estudo de curvas analíticas irredutíveis planas, é o conjunto das lacunas especiais $\Delta \setminus \Gamma$ da curva. Este é um invariante analítico mais fino que o semigrupo de valores, no sentido que dadas duas curvas com o mesmo semigrupo elas ainda podem diferir pelo conjunto das lacunas especiais.

Na primeira seção deste capítulo, faremos uma análise mais detalhada de como os elementos do espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita da parametrização ϕ de uma curva plana se relacionam com o módulo de diferenciais de Kähler, e veremos que o invariante $\Delta \setminus \Gamma$ surge neste contexto. Em seguida, estabelecemos uma fórmula para a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$, no caso de curvas planas irredutíveis quaisquer e relacionamos tal resultado ao obtido por D. Mond [M1] para multigerms $\phi : \mathbb{C}, S \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$, em que ele estabelece uma desigualdade para a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ em termos de um novo invariante chamado o número de Milnor da imagem.

Na última seção fazemos uma breve análise sobre as deformações de curvas planas dadas implicitamente e as deformações de sua parametrização, observando como o número de Tjurina e a $\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi)$ se relacionam nesta dimensão.

4.1 $\mathcal{A}_e$ -codimensão de Curvas Planas

Considere $\mathcal{C}$ uma curva analítica plana irredutível, dada pelo conjunto de zeros de um germe de aplicação analítica $f : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$, ou seja, $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$. Uma parametrização de Puiseux de $\mathcal{C}$ pode ser dada por

$$\phi : \begin{cases} x = t^{v_0} \\ y = t^{v_1} + \sum_{i > v_1} a_i t^i, \end{cases}$$

onde $x = X + \langle f \rangle$ e $y = Y + \langle f \rangle$, $v_0 < v_1$ e $v_0 \nmid v_1$.

Neste caso, o $\mathcal{O}$ -módulo de diferenciais de Kähler associado a curva é dado por $\mathcal{O}d\mathcal{O} = \mathcal{O}dx + \mathcal{O}dy$, onde $\mathcal{O} := \mathbb{C}\{x, y\}$ é o anel local de $\mathcal{C}$.

Vimos na Proposição 2.5 que, para curvas analíticas irredutíveis em $\mathbb{C}^n$ existe uma relação entre um subconjunto do módulo de diferenciais $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ e o espaço tangente à $\mathcal{A}$ -órbita da parametrização ϕ . Reescrevemos novamente este resultado para curvas planas irredutíveis.

PROPOSIÇÃO 4.1. *Seja $\phi : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ uma parametrização de uma curva analítica plana irredutível $\mathcal{C}$. O elemento $(0, h) \in T\mathcal{A}_c(\phi)$ se, e somente se,*

$$h = \frac{\eta_1 dx - \eta_0 dy}{dx} \in \frac{\mathcal{O}d\mathcal{O}}{dx},$$

com $\eta_0, \eta_1 \in \mathcal{O}$ onde se $\eta_0 \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$ então $v(\eta_0) \geq v(dx)$.

Este resultado foi realmente a motivação para a decomposição do conjunto das lacunas L do semigrupo de valores Γ associado à curva $\mathcal{C}$, em subconjuntos disjuntos, de modo que pudéssemos determinar quais conjuntos contribuíam para uma base do espaço normal e com isso, relacionar a $\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi)$ com outros invariantes clássicos. No caso de curvas planas tal decomposição é bem mais simples, de fato, temos apenas uma decomposição do conjunto das lacunas (ver 2.4) que pode ser reescrita da seguinte maneira $L = N_1 \cup \Delta_1$ onde,

$$N_1 = \left\{ k \in L; \quad k \neq v \left(\frac{\eta_1 dx - \eta_0 dy}{dx} \right), \text{ com } \eta_i \in \mathcal{O}, \quad \eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\} \right\},$$

$$\Delta_1 = \left\{ k \in L; \quad k = v \left(\frac{\eta_1 dx - \eta_0 dy}{dx} \right), \text{ com } \eta_i \in \mathcal{O}, \quad \eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\} \right\}.$$

Observe que dado $k \in \Delta_1$, temos que $k = v(h)$, onde $h = \frac{\eta_1 dx - \eta_0 dy}{dx}$ para algum $\eta_1 \in \mathcal{O}$, $\eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, assim pela proposição dada acima, o elemento $(0, h) \in T\mathcal{A}_c(\phi)$, não contribui para uma base do espaço normal $\mathcal{N} = \frac{\theta(\phi)}{T\mathcal{A}_c(\phi)}$. Portanto, segue da Proposição 2.7, na qual determinamos a $\mathcal{A}_c$ -codimensão da parametrização ϕ em termos da multiplicidade da

curva v_0 e o número de elementos do conjunto N_1 , que

$$\mathcal{A}cod(\phi) = v_0 - 2 + 2N_1.$$

Nosso objetivo neste capítulo é extrair mais informações do conjunto Δ_1 . Recordemos alguns conceitos que serão úteis.

Seja Γ o semigrupo de valores associado à curva. O conjunto

$$\Delta = \{v(\omega); \omega \in \mathcal{O}d\mathcal{O}/T\},$$

onde T é o submódulo de torção de $\mathcal{O}d\mathcal{O}$ (ver Seção 1.2.2). O conjunto $\Delta \setminus \Gamma$ é chamado o conjunto das lacunas especiais da curva $\mathcal{C}$. Delorme em [De] provou que o conjunto Δ é um $\mathcal{A}$ -invariante de curvas planas irredutíveis, conseqüentemente o conjunto $\Delta \setminus \Gamma$ também o é.

Na proposição abaixo, provaremos que se $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ é o semigrupo de uma curva plana, então o conjunto Δ_1 pode ser descrito como uma união disjunta dos seguintes conjuntos:

$$E = \{k \in L; k > v_1, k \in \Gamma + v_i - v_0, \text{ para algum } v_i\},$$

$$\overline{E} = \{k \in L; k > v_1, k \in \Delta \setminus \Gamma - v_0\}.$$

E assim os conjuntos E e $\overline{E}$ também são $\mathcal{A}$ -invariantes.

PROPOSIÇÃO 4.2. *Seja $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$ o semigrupo de valores associado a uma curva plana irredutível. O conjunto das lacunas L do semigrupo admite a seguinte decomposição*

$$L = N_1 \cup E \cup \overline{E}.$$

DEMONSTRAÇÃO: É fácil ver que todas as lacunas estritamente menores que v_1 não podem ser dadas como ordem de um elemento da forma $\frac{\eta_1 dx - \eta_0 dy}{dx}$ com $\eta_1 \in \mathcal{O}$, $\eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$. Portanto, pertencem ao conjunto N_1 .

Se $k \in L$ é tal que $k > v_1$ então $k \in N_1$ ou $k \in \Delta_1$. Suponha que $k \in \Delta_1$, então $k = v(\Omega) - v_0$, onde $\Omega = \frac{\eta_1 dx - \eta_0 dy}{dx}$, com $\eta_1 \in \mathcal{O}$, $\eta_0 \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$.

Se $v(\Omega) \in \Gamma$, por definição, $v(\Omega) = b_0 v_0 + \dots + b_g v_g$, com algum $b_i > 0$. No entanto,

$b_0 = 0$, pois caso contrário $k = v(\Omega) - v_0 \in \Gamma$ o que é um absurdo, pois k é uma lacuna. Logo,

$$k = b_1 v_1 + \dots + b_g v_g - v_0 = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_j v_j + (b_i - 1) v_i \right) + v_i - v_0 \in \Gamma + v_i - v_0,$$

ou seja, $k \in E$.

Por outro lado, se $v(\Omega) \in L$, por definição, $v(\Omega) \in \Delta \setminus \Gamma$ (veja Seção 1.2.2) e portanto $k = v(\Omega) - v_0 \in \bar{E}$.

OBSERVAÇÃO 4.3. Zariski mostrou em [Z1], que $\min\{\Delta \setminus \Gamma\} = \lambda + v_0$, onde λ é uma lacuna estritamente maior que v_1 . Logo, o conjunto $\bar{E} = \{k \in \Delta \setminus \Gamma - v_0\}$. Portanto, o número de elementos do conjunto $\bar{E}$ é exatamente o número de lacunas especiais do semigrupo Γ , isto é, $\sharp \bar{E} = \sharp \Delta \setminus \Gamma$.

EXEMPLO 4.4. Considere a curva dada pela parametrização

$$\phi : \begin{cases} x = t^4 \\ y = t^6 + t^7. \end{cases}$$

Esta curva possui semigrupo $\Gamma = \langle 4, 6, 13 \rangle$, cujo condutor é $c = 16$. O conjunto de Apéry e as lacunas do semigrupo são dados na tabela abaixo:

A_p	$L = \{a_j - \lambda v_0; a_j \in A_p\}$			
0				
$v_1 = 6$	2			
$v_2 = 13$	9	5	1	
$v_1 + v_2 = 19$	15	11	7	3

Note que, $N_1 = \{1, 2, 3, 5\}$. Observe que $E = \{9, 15\}$ pois $9 = v_2 - v_0$ e $15 = v_1 + v_2 - v_0$.

Por outro lado, $\Delta \setminus \Gamma = \{11, 15\}$, pois $11 = v(6ydx - 4xdy)$ e $15 = v(6xydx - 4x^2dy)$. Assim, $\bar{E} = \{7, 11\}$. Portanto, segue da Proposição 2.7 que

$$\mathcal{A}_c \text{cod}(\phi) = v_0 - 2 + \sharp N_1 = 2 + 4 = 6.$$

4.2 Fórmula para a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$

No segundo capítulo vimos que se $\mathcal{C}$ é uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^{n+1}$, com multiplicidade v_0 e ϕ é uma parametrização de $\mathcal{C}$, então temos a seguinte desigualdade

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) \leq n\delta + v_0 - 2.$$

Por sua vez, o Teorema 2.11 apresenta uma relação para a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$, em termos do número de elementos de certos conjuntos da decomposição das lacunas de Γ . Esse teorema, no caso de curvas planas irredutíveis reduz-se a

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) + \sharp \Delta_1 = n\delta + v_0 - 2.$$

Para curvas irredutíveis monomiais em $\mathbb{C}^{n+1}$, mostramos que

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = n\delta + t_p - 1,$$

onde $t_p = \sharp \tilde{A}_p$. Como toda curva plana é Gorenstein, $t_p = 1$, e portanto para toda curva plana monomial $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = \delta$.

Estamos agora em busca de uma relação para $\mathcal{A}_e$ -codimensão de uma curva plana irredutível qualquer. Para tanto, basta que possamos descrever o conjunto Δ_1 .

Vimos na seção anterior que

$$\Delta_1 = E \cup \overline{E},$$

onde $E = \{k \in L; k > v_1, k \in \Gamma + v_i - v_0, \text{ para algum } v_i\}$ e $\overline{E} = \{k \in \Delta \setminus \Gamma - v_0\}$.

No caso de curvas planas irredutíveis, é possível determinar o número de elementos do conjunto E .

PROPOSIÇÃO 4.5. *O conjunto E possui $v_0 - 2$ elementos.*

DEMONSTRAÇÃO: Vejamos que os elementos do conjunto E podem ser caracterizados em termos do conjunto de Apéry. Seja $k \in E$ dado por $k = \alpha + v_i - v_0$, com $\alpha \in \Gamma$.

Como $k \in L$ temos que $k = \alpha + v_i - v_0 = a_l - \lambda v_0$ para algum $a_l \in A_p$ e $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Suponha que $\lambda > 1$, então,

$$k = \alpha + v_i - v_0 = a_i - (\lambda - 1)v_0 - v_0.$$

Dai, $\alpha + v_i = a_i - (\lambda - 1)v_0$. Como $a_i - \lambda v_0$ é uma lacuna, temos que $a_i - (\lambda - 1)v_0$ também é lacuna, ou seja, $\alpha + v_i$ é uma lacuna, o que nos leva a uma contradição, já que $\alpha, v_i \in \Gamma$. Logo $\lambda = 1$, donde concluímos que $\alpha + v_i = a_i \in A_p$.

Portanto, o conjunto E é o conjunto de todas as lacunas k estritamente maiores que v_1 da forma $k = a_j - v_0$ com $a_j \in A_p$. Como há v_0 elementos no conjunto de Apéry e os primeiros termos $a_0 = 0$ e $a_1 = v_1$ não nos interessam, pois só queremos contar as lacunas estritamente maiores que v_1 , temos que $\sharp E = v_0 - 2$.

A proposição anterior permite, no caso de curvas planas irredutíveis, expressar a $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ em termos das lacunas especiais do semigrupo e do invariante delta.

TEOREMA 4.6. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva plana irredutível, dada por uma parametrização ϕ com semigrupo $\Gamma = \langle v_0, v_1, \dots, v_g \rangle$. Então,*

$$\boxed{\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) + \sharp(\Delta \setminus \Gamma) = \delta.}$$

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 2.11 temos que

$$\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) + \sharp \Delta_1 = \delta + v_0 - 2.$$

Contudo, pela proposição acima, $\sharp \Delta_1 = \sharp E + \sharp \overline{E} = v_0 - 2 + \sharp(\Delta \setminus \Gamma)$.

Portanto, $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) + \sharp(\Delta \setminus \Gamma) = \delta$.

COROLÁRIO 4.7. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva plana irredutível e ϕ uma parametrização da curva. Temos que $\mathcal{C}$ é quase-homogênea se, e somente se, $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = \delta$.*

DEMONSTRAÇÃO: O resultado segue imediatamente do teorema anterior, uma vez que $\mathcal{C}$ é quase-homogênea se, e somente se, $\Delta \setminus \Gamma$ é vazio.

Observe que o teorema anterior estabelece uma relação precisa entre a $\mathcal{A}_e$ -codimensão da parametrização ϕ e invariantes algébricos bem conhecidos no estudo de curvas planas irredutíveis. David Mond em [M1], prova mais geralmente para **multigerms** $\phi : \mathbb{C}, S \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$, que

$$\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi) \leq \delta.$$

Portanto, o Teorema 4.6 estende o resultado de Mond, no caso de curvas planas irredutíveis. Em seu trabalho, ele obtém propriedades sobre a topologia de uma perturbação estável (estabilização) de multigerms de curvas planas parametrizadas como veremos adiante.

David Mond definiu um invariante associado a um germe de aplicação $\phi : \mathbb{C}^n, S \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, 0$, onde S é um conjunto finito.

PROPOSIÇÃO 4.8. ([M2], Theorem 1) *Seja $\phi : \mathbb{C}^n, S \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}, 0$ com $\mathcal{A}_e$ -codimensão finita, e suponha que $(n, n+1)$ são boas dimensões (que significa $n < 15$). Então a imagem de uma perturbação estável de ϕ tem o tipo de homotopia de um bouquet de n -esferas.*

O número destas n -esferas é um $\mathcal{A}$ -invariante analítico de ϕ , chamado o **número de Milnor da imagem** de ϕ e denotado por $\mu_I(\phi)$.

PROPOSIÇÃO 4.9. ([M1], Lemma 2.2) *Seja $\phi : \mathbb{C}, S \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ com $\mathcal{A}_e$ -codimensão finita. Então*

$$\mu_I(\phi) = \delta - r + 1,$$

onde r é o número de ramos da curva.

Mond também provou o seguinte resultado:

PROPOSIÇÃO 4.10. ([M1], Theorem 2.3) *Seja $\phi : \mathbb{C}, S \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ sendo $1-1$ fora de S . Então*

$$\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi) \leq \mu_I(\phi),$$

com igualdade se, e somente se, ϕ é quase-homogênea.

Portanto, no caso de curvas irredutíveis planas, segue do Teorema 4.6 que

$$\mathcal{A}_e\text{cod}(\phi) + \sharp\Delta \setminus \Gamma = \delta = \mu_I(\phi).$$

No caso quase-homogêneo, a $\mathcal{A}_e$ -codimensão de ϕ possui uma interpretação geométrica interessante, $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = \delta$ é exatamente o número de pontos duplos que aparecem numa perturbação estável de ϕ .

OBSERVAÇÃO 4.11. *Um possível desdobramento do Teorema 4.6, é tentar estendê-lo para multigerms $\phi : \mathbb{C}, S \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$, obtendo desta maneira uma generalização completa do resultado de Mond.*

4.3 Deformações de Curvas Planas

Até o momento vimos alguns resultados sobre deformações de curvas planas parametrizadas. Vejamos o que podemos dizer no caso de deformações de curvas implícitas e quais relações podem ser estabelecidas entre elas.

Bruce e Gaffney [BGa], fazem a $\mathcal{A}$ -classificação dos germes simples de curvas planas irredutíveis e estabelecem uma relação entre a ação de grupo $\mathcal{K}$, que é o grupo ideal para o estudo de germes de curvas quando estas são dadas implicitamente, e a ação do grupo $\mathcal{A}$, quando a curva é dada parametricamente. Mais especificamente temos:

PROPOSIÇÃO 4.12. *Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ germes de curvas analíticas planas irredutíveis definidas numa vizinhança da origem por $f_1, f_2 : \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}, 0$. E $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ parametrizações de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, respectivamente. Então, ϕ_1 e ϕ_2 são $\mathcal{A}$ -equivalentes se, e somente se, f_1 e f_2 são $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

Agora, pelo Corolário 1.28, para toda curva irredutível de interseção completa temos que

$$\tau = c - \sharp(\Delta \setminus \Gamma),$$

onde c é o condutor do semigrupo Γ .

Portanto, pelo que provamos no Teorema 4.6 temos que

$$\tau = c - \sharp(\Delta \setminus \Gamma) = 2\delta - \sharp(\Delta \setminus \Gamma) = \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) + \delta.$$

Por outro lado, no caso de curvas de interseção completa $\mathcal{K}_e \text{cod}(f) = \tau$, donde con-

cluímos que

$$\mathcal{K}_e \text{cod}(f) = \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) + \delta.$$

Deste modo as codimensões de fato não coincidem, na verdade o número de deformações da curva implícita f é estritamente maior que as deformações de sua parametrização ϕ ; em outras palavras, o número de parâmetros num $\mathcal{K}$ -desdobramento versal de f é estritamente maior que o número de parâmetros num $\mathcal{A}$ -desdobramento versal de ϕ , ou seja,

$$\tau > \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$$

para qualquer curva plana irredutível.

Note que tal desigualdade inverte no caso de germes quase-homogêneos de interseção completa em $\mathbb{C}^n$ para $n > 3$, como vimos no estudo de germes de curvas monomiais (veja Teorema 3.17).

Finalizamos este capítulo reunindo todos os resultados que obtivemos relacionando os invariantes τ e $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$ para curvas em $\mathbb{C}^n$:

TEOREMA 4.13. *Seja $\mathcal{C}$ uma curva analítica irredutível em $\mathbb{C}^n$, quase-homogênea e de interseção completa, definida por f e seja ϕ uma parametrização de $\mathcal{C}$. Então*

$$\begin{cases} \tau > \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi), & \text{se } n = 2 \\ \tau = \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi), & \text{se } n = 3 \\ \tau < \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi), & \text{se } n > 3, \end{cases}$$

onde $\tau = \mathcal{K}_e \text{cod}(f)$.

Este teorema reflete no caso de curvas quase-homogêneas de interseção completa o quanto o número de parâmetros numa deformação versal do germe de uma curva implícita e paramétrica variam segundo a dimensão de mergulho da curva.

Referências Bibliográficas

- [AM] ATIYAH, M.F. AND MACDONALD, I.G., *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, (1969).
- [Ap] APÉRY, R., *Sur les branches superlinéaires des courbes algébriques*. C. R. Acad. Sci. Paris 222 (1946), 1198 - 2000.
- [Ar] ARNOLD, V.I., *Local normal forms of functions*. Inventiones Math. 35 (1976), 87 - 109.
- [B] BUCHWEITZ, R.-O., *On deformations of monomial curves*. Lecture Notes in Mathematics, 777 (1980), 205 - 220, Springer.
- [Ber] BERGER, R.W., *Report on the torsion of the differential module of an algebraic curve*. Algebraic Geometry and its Applications (1994), 285 - 303.
- [BG] BUCHWEITZ, R.-O. AND GREUEL, G.-M., *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*. Inventiones Math., 58 (1980), 241 - 281.
- [BGa] BRUCE, J.W. AND GAFFNEY, T.J., *Simple singularities of mappings $\mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$* . J. London Math. Soc., (2) 26 (1982), 465 - 474.
- [BGG] BRIANÇON, J., GALLIGO, A. AND GRANGER, M., *Déformations équisingulières des germes de courbes gauches réduites*. Memoire Soc. Math. France, Nouv. Ser. 1 (1980), 1 - 69.
- [BK] BRIESKORN, E. AND KNÖRRER, H., *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser Verlag. Basel - Boston - Stuttgart (1986).
- [CN1] CAVALIERE, M.P. AND NIESI, G., *On monomial curves and Cohen-Macaulay type*. Manuscripta Math., 42 (1983), 147 - 159.

- [CN2] CAVALIERE, M.P. AND NIESI, G., *On form ring of a one-dimensional semigroup ring*. Commutative Algebra: Proceedings of the Trento Conference. NY, Marcel Dekker. Lecture Notes in Pure and Applied Math., 84 (1983), 39 - 48.
- [De] DELORME, C., *Sur les modules des singularités de courbes planes*. Bull. Soc. Math. France 106, (1978) 417 - 446 .
- [DM] DAMON, J. AND MOND, D., *$\mathcal{A}$ -Codimension and the vanishing topology of discriminants*. Inventiones Math., 106 (1991), 217 - 242.
- [Ei] EISENBUD, D., *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*. GTM 150, Springer-Verlag, (1996).
- [Fi] FISCHER, G., *Complex Analytic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics, 538. Springer-Verlag; Heidelberg, (1976).
- [Fr] FRÜHBIS-KRÜGER, ANNE, *Moduli Spaces for Space Curve Singularities*. PhD. Thesis (2000).
- [Ga] GAFFNEY, T., *A note on the order of determination of a finitely determined germ*. Inventiones Math., 52 (1979), 127 - 130.
- [Gib] GIBSON, C.G., *Singular Points of Smooth Mappings*. Research Notes in Math. 25, Pitman, London (1979).
- [Giu] GIUSTI, M., *Classification des singularités isolées simples d'intersections complètes*. Proc. Symp. Pure Math., 40 (1983), 457 - 494.
- [GH] GIBSON, C.G. AND HOBBS, C.A., *Simple singularities of space curves*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 113 No. 2 (1993), 297 - 310.
- [GR] GUNNING, R.C. AND ROSSI, II., *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall; Englewood Cliffs, NJ, (1965).
- [Gr1] GREUEL, G.-M., *Dualität in der lokalen Kohomologie isolierter Singularitäten*. Math. Ann., 250 (1980), 157 - 173.
- [Gr2] GREUEL, G.-M., *On deformation of curves and a formula de Deligne*. Proc. La Rabida. Lecture Notes of Mathematics. Springer (1981), 141 - 168.

- [Gu] GUNNING, R.C., *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*. Volume II: Local Theory. Wadsworth and Brooks/Cole. Mathematics Series, (1990).
- [HH] HEFEZ, A. AND HERNANDES, M.E., *Computational Methods in the Local Theory of Curves*. Publicações Matemáticas do IMPA. 23^o Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, (2001).
- [Her] HERNANDES, M.E., *Métodos computacionais na teoria de curvas algebróides irreduzíveis*. Tese de Doutorado - ICMC-USP, São Carlos (2001).
- [LS] LOOIJENGA, E.J.N. AND STEENBRINK, J.H.M., *Milnor numbers and Tjurina numbers of complete intersections*. Math. Ann. 271 (1985), 121 - 124.
- [M1] MOND, D., *Looking at bent wires - $\mathcal{A}_c$ -codimension and the vanishing topology of parametrized curve singularities*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 117 (1995), 213 - 222.
- [M2] MOND, D., *Vanishing cycles for analytic maps*. Singularity Theory and Applications, Warwick 1989, Springer Lecture Notes in Math. 1462 (1991), 221 - 234.
- [Ma] MARTINET, J., *Singularités des fonctions et applications différentiables*. (Pontificia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 1974) translated as Singularities of smooth functions and mappings, London Math. Soc. Lecture Notes in Math. 58, (Cambridge University Press, 1982).
- [Mil] MILNOR, J.W., *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton University Press, Princeton, (1968).
- [Pal] PALAMODOV, V.P., *Deformations of complex spaces*. Russian Math. Surveys, 31:3 (1976), 129 - 197.
- [Pin] PINKHAM, H., *Deformations of Algebraic Varieties with G_m -action*. Astérisque No. 20, (1974).
- [Ri] RISLER, J.J., *Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane*. Bull. Soc. Math. France, 99 (1971), 305 - 311.
- [S] STEVENS, J., *Deformations of Singularities*. Lecture Notes in Mathematics, 1811, Springer (2003).

- [Scr] SERRE, J.P., *Sur les modules projectifs*. Sem. Dubreil-Pisot, 2 Nov (1960) 1 - 16.
- [Tj] TJURINA, G.N., *Locally semiuniversal flat deformations of isolated singularities of complex spaces*. Math. USSR-Izv., 3 (1969), 967 - 999.
- [W] WALKER, R.J., *Algebraic Curves*. Princeton, New Jersey (1950).
- [Wa1] WALL, C.T.C., *Finite determinacy of smooth map-germs*. Bull. London Math. Soc. 13, no. 6 (1981), 481 - 539.
- [Wa2] WALL, C.T.C., *Singular Points of Plane Curves*. Cambridge University Press (2004).
- [Z1] ZARISKI, O., *Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion*. Proc. Nat. Acad. of Sc. U.S.A, 56 (1966), 781 - 786.
- [Z2] ZARISKI, O., *Le Problème des Modules pour les Branches Planes*. Hermann, Paris (1986).

Índice Remissivo

A

ação de grupo, 17
anel local, 10
Apéry
conjunto de, 14

C

curva
analítica irredutível, 10
com parte principal boa, 65
dimensão de mergulho maximal, 66
Gorenstein, 15
interseção completa, 10
monomial, 12
multiplicidade, 12
plana, 10
quase-homogênea, 61

D

deformação
de um germe, 22
desdobramento
de um germe, 22
equivalência de, 23
versal, 23
determinação finita
critério geométrico de, 24
critério infinitesimal de, 24
diferencial
exata, 16

não exata, 16
ordem de, 16
dimensão
pura, 9
subvariedade analítica, 9

E

espaço normal, 30
espaço tangente
codimensão do, 22
do grupo $\mathcal{A}, \mathcal{K}$, 20
estendido do grupo $\mathcal{A}$, 21
estendido do grupo $\mathcal{K}$, 22

F

fórmula de Milnor, 27

G

germe
de subvariedade analítica, 8
finitamente determinado, 24
quase-homogêneo, 61
órbita de um, 17
grupos de Mather $\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{K}$, 18

I

interseção completa
curva, 10
subvariedade analítica de, 9
invariante delta, 26

J

jato, 23

L

lacunas do semigrupo, 13

lacunas especiais, 16, 27

M

módulo de diferenciais de Kähler, 15

multiplicidade da curva, 12

N

número de Milnor, 26

número de Milnor da imagem, 75

número de Tjurina, 27

P

parametrização

de Newton - Puiseux, 12

primitiva, 12

parte principal boa

curva com, 65

S

semigrupo

condutor do, 13

de valores , 12

lacunas do, 13

lacunas especiais do, 16

simétrico, 15

subvariedade analítica, 7

subvariedade analítica

irredutível, 8

anel de coordenadas da, 9

dimensão da, 9

germe de, 8

interseção completa, 9

redutível, 8

T

tipo Cohen-Macaulay, 57, 63

Tjurina

número de, 27

torção

submódulo de, 16

ERRATA

1. Na definição do conjunto $\mathcal{O}(n, p)$ considere

$$\mathcal{O}(n, p) = \{f : \mathbb{C}^n, 0 \rightarrow \mathbb{C}^p; f \text{ germe de aplicação analítica numa vizinhança de } 0\}.$$

2. No enunciado da Proposição 2.5 leia-se:

Seja $\phi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ uma parametrização de uma curva analítica irreduzível.

- (1) Se $(0, f_1, f_2, \dots, f_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi)$ então para todo $j = 1, \dots, n$ temos que

$$f_j = \frac{\eta_j dx_0 + \eta_0 dx_j}{dx_0} \in \frac{\mathcal{O}_{x_j}}{dx_0},$$

para algum $\eta_0, \eta_j \in \mathcal{O}$, com $v(\eta_0) > v(dx_0)$, $\eta_0 \neq 0$.

- (2) Se existe $f_j = \frac{\eta_j dx_0 + \eta_0 dx_j}{dx_0}$ para algum $\eta_0, \eta_j \in \mathcal{O}$, com $v(\eta_0) \geq v(dx_0)$, $\eta_0 \neq 0$ então

$$(0, f_1, f_2, \dots, f_j, \dots, f_n) \in T\mathcal{A}_e(\phi),$$

onde $f_i = \frac{\eta_i dx_0 + \eta_0 dx_i}{dx_0}$ para todo $i = 1, \dots, n$, com $\eta_i \in \mathcal{O}$.

3. No Exemplo 2.9, $\mathcal{A}_e \text{cod}(\phi) = v_0 - 2 + \sharp N_1 + \sharp N_2 + \sharp V_1 + \sharp V_2 = 19$, onde $V_2 = \{11\}$.

4. O argumento na demonstração da Afirmação 3.1 é:

Seja $\omega = \eta_i dx_0 + \eta_0 dx_i$, com $\eta_0, \eta_i \in \mathcal{O}$ tal que a lacuna k é dada como ordem do elemento $\frac{\omega}{dx_0}$, isto é, $k = v\left(\frac{\omega}{dx_0}\right)$. Como a curva é monomial temos que $k = \min\left\{v(\eta_i), v\left(\frac{\eta_0 dx_i}{dx_0}\right)\right\}$. No entanto, $v(\eta_i) \in \Gamma$, donde concluimos que $k = v\left(\frac{\eta_0 dx_i}{dx_0}\right)$.

5. No enunciado da Proposição 3.22, leia-se $\tau = \mathcal{A}_e \text{cod}(\phi)$.