Atratores globais para uma equação viscoelástica
não linear com história

Paulo Nicanor Seminario Huertas

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Atratores globais para uma equação viscoelástica não linear com história

Paulo Nicanor Seminario Huertas

Orientador: Prof. Dr. Ma To Fu

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Ciências de Computação e Matemática Computacional. *EXEMPLAR DE DEFESA*.

USP – São Carlos
Janeiro de 2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H887a Huertas, Paulo Nicanor Seminario
Atratores globais para uma equação viscoelástica
não linear com história / Paulo Nicanor Seminario
Huertas; orientador Ma To Fu. -- São Carlos, 2015.
74 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas
e de Computação, Universidade de São Paulo, 2015.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Equações da
onda. 3. Atratores globais. 4. Equação viscoelástica
com história. I. Fu, Ma To, orient. II. Título.

Aunque me fuercen, yo nunca voy a decir que todo
tiempo por pasado fue mejor. Mañana es mejor.
- "Cantata de puentes amarillos". L. A. Spinetta

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer em especial a meu orientador o Prof. Dr. Ma To Fu, por sua dedicação, paciência, ajuda, amizade, apoio em todo o tempo que ele me orientou.

A meus queridos pais, Mercedes Elena Huertas Porras e Oswaldo Angel Robles Rodriguez que sempre me apoiaram, me deram sua compreensão, amor e pelo sacrifício que fizeram para continuar com meus estudos e chegar até onde estou. A meu pai de sangue, Paulo N. Seminario Bohorquez que me apoiou e o qual agradeço a vida. A minha irmã Mercedes E. Seminario Huertas assim como a meus avós Antonieta Porras e Aurelio Huertas pela amizade e pelo apoio de forma incondicional durante toda minha vida.

Aos professores do departamento de Matemática do ICMC que contribuíram com a minha formação pelos ensinamentos, apoio e motivação.

Aos funcionários da Biblioteca do ICMC, das seções de pós-graduação, da área financeira e da diretoria.

Aos meus amigos Alfredo Sotelo, Miguel Angel Zambrano, Karol Veliz, Dante Baldeon, Patricia Hilario, Norbil Cordova, Lito Bocanegra, Felipe Correa, Yonny, etc... todos eles tem minha gratidão por todo o apoio.

A Spinetta, Charly e Fito que estão sempre comigo em todo momento.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro sem o qual não teria sido possível este trabalho.

Peço desculpas às pessoas que não citei e que me ajudaram direta ou indiretamente no mestrado, agradeço muito.

Resumo

Neste trabalho estudamos uma classe de equações de ondas da forma

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h,$$

definida num domínio limitado de $\mathbb{R}^3$, com condição de fronteira de Dirichlet e parâmetros $\alpha, \rho > 0$.

Tais equações modelam problemas de viscoelasticidade não linear e têm sido estudados por diversos autores. Aqui, apresentamos um teorema de existência, unicidade e dependência contínua em relação aos dados iniciais, para soluções fracas, como discutido por Conti, Marchini & Pata (2014).

Em seguida provamos um teorema novo sobre a existência de atratores globais para o sistema dinâmico associado ao problema, explorando não somente a dissipação dada pelo termo de memória. Tal resultado generaliza substancialmente o trabalho pioneiro de Araújo, Ma & Qin (2013).

Abstract

In this work we study a class of wave equations of the form

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h,$$

defined in a bounded domain of $\mathbb{R}^3$, with Dirichlet boundary condition and parameters $\alpha, \rho > 0$.

Such equations model problems from nonlinear visco-elasticity and have been considered by several authors. Here, we prove the well-posedness of the problem, as discussed by Conti, Marchini & Pata (2014).

Next, we prove a new result on the existence of global attractors for the dynamical system generated by the problem, by exploring the dissipation the memory term only. The result extends substantially the pioneering work by Araújo, Ma & Qin (2013).

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Espaços de Sobolev	5
1.2 Espaços de Bochner com peso	11
1.3 Sistemas dinâmicos e atratores globais	12
1.4 Soluções fracas (mild solutions)	15
2 Equação viscoelástico não-linear com história	17
2.1 Entorno funcional	18
2.2 Problema com história	21
3 Boa colocação do problema	25
3.1 Existência de soluções fracas	28
3.1.1 Problema aproximado	29
3.1.2 Primeira estimativa	30
3.1.3 Segunda estimativa	35
3.1.4 Terceira estimativa	36
3.1.5 Passagem ao limite	37
3.2 Dependência contínua e unicidade das soluções fracas	39
3.2.1 Dependência contínua das soluções fracas	39
3.2.2 Unicidade das soluções fracas	48
4 Existência de atrator global	49
4.1 Dissipatividade	51
4.2 Desigualdade de estabilização	56
4.3 Compacidade assintótica	68

Introdução

Nessa dissertação estudamos a dinâmica assintótica de uma equação de ondas não linear da forma

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h, \quad (1)$$

definida numa região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, adicionados de dados iniciais e condição de fronteira do tipo Dirichlet.

Essa classe de equações foi primeiramente estudada por Cavalcanti, Domingos Cavalcanti & Ferreira [6], como uma versão visco-elástica do problema de vibrações

$$g(u_t)u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} = 0,$$

onde $g(u_t)$ representa uma forma não linear de densidade de material. No caso $g(u_t) = 1$, essa equação modela vibrações de hastes finas conforme justificado em Love [22, Capítulo 20]. O caráter visco-elástico da equação (1) vem da integral de convolução que modela efeitos de memória do material, cf. por exemplo, Fabrizio & Morro [13].

Em Cavalcanti, Domingos Cavalcanti & Ferreira [6] o problema (1) foi estudado na forma

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^t \mu(t-s) \Delta u(s) ds = \mathcal{F}. \quad (2)$$

Supondo-se $\rho \in (0, 2]$ e que $\mu(t)$ decai exponencialmente a zero quando $t \rightarrow \infty$, eles provaram que a energia do sistema decai exponencialmente quando acrescentamos uma dissipação forte $\mathcal{F} = \Delta u_t$. A partir daquele trabalho muitos outros autores aportaram novas contribuições para equações do tipo (2), por exemplo, [17, 18, 20, 21, 25, 26, 27, 37, 38]. Entre esses, destacamos o trabalho de Messaoudi & Tatar [26] onde foi provado que o decaimento exponencial da energia continua válido com $\mathcal{F} = 0$, explorando somente a dissipação dada pelo termo de memória.

Observamos que se $\rho = 0$ (densidade constante) e Δu_{tt} for removida, então a equação (1) se reduz a bem conhecida equação de onda visco-elástica. Nessa direção o problema foi estudada por diferentes autores, por exemplo, em [7, 8, 24, 29, 30, 35], entre outros.

Por outro lado, em todos trabalhos acima citados sobre o problema (2), a questão da unicidade de soluções nunca é tratada. De fato, há uma aparente dificuldade devida ao termo $|u_t|^\rho u_{tt}$. A primeira prova da boa colocação do problema, e portanto sua unicidade, foi estabelecida recentemente em Araújo, Ma & Qin [2], através da restrição $\rho > 1$. O resultado foi apresentado num contexto mais geral envolvendo memória com história como na equação (1). Aqui, o conceito de história vem do fato que no termo de convolução na equação (1) precisamos conhecer os valores de $u(x, t)$ com $t \in (-\infty, t]$. Mais tarde, Conti, Marchini & Pata [11] apresentaram um novo resultado de boa colocação do problema (1) num contexto mais geral

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u + \gamma(-\Delta)^\theta \partial_t u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h, \quad (3)$$

com $\rho \in [0, 4)$ e $N = 3$.

Agora, observando que problemas de visco-elasticidade com história definem sistemas dinâmicos autônomos (veja Capítulo 4), foi também provado em [2] a existência de um atrator global para o sistema dinâmico associado ao problema (2). Para isso foi preciso adicionar uma dissipação forte do tipo Δu_t . Motivados por esse resultado sobre a existência de atratores, duas versões de atratores não autônomos foram estudados em Qin, Zhang & Sun [32] e Qin, Feng & Zhang [33], onde são adicionadas na equação (1) forças do tipo $h = h(x, t)$. No caso autônomo seus resultados melhoram o correspondente em [2] por considerar uma dissipação extra fraca u_t ao invés da forte Δu_t .

O nosso trabalho está dividido em quatro capítulos.

- No Capítulo 1 listamos definições e resultados para a compreensão dos capítulos seguintes a serem desenvolvidos.
- No Capítulo 2 apresentamos o conceito de visco-elasticidade com história, seguindo os textos de Pata & Zucchi [30] e Conti, Marchini & Pata [11].
- No Capítulo 3 apresentamos mais detalhadamente a prova da boa colocação do problema correspondente à equação (1) seguindo de perto o trabalho de Conti, Marchini & Pata [11].
- No Capítulo 4 provamos um novo teorema de existência de atratores globais para a equação (1) com $\rho \in (0, 4]$. Nosso resultado explora apenas a dissipação dada pelo

termo da memória. Não necessitamos de dissipações extras tais como u_t ou Δu_t . Dessa forma nosso resultado melhora os resultados anteriores em [2, 32, 33].

Sobre a metodologia, observamos que o sistema dinâmico associado ao nosso problema é tipicamente hiperbólica, assim, preferimos seguir a metodologia apresentada por Chueshov & Lasiecka [9] [10] onde usamos uma desigualdade de estabilização como em [2]. Os resultados do Capítulo 4 serão apresentados em forma de artigo na referência [23].

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre os espaços de Sobolev, os espaços de Bochner com peso, os sistemas dinâmicos e as soluções suaves o qual nos brindará uma boa base para o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Espaços de Sobolev

Apresentaremos a seguir definições e teoremas relacionados aos Espaços de Sobolev. Para maior informação, o leitor interessado pode consultar Adams & Fournier [1] e Brézis [4].

Definição 1.1: Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Representa-se por $E^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, o espaço vetorial constituído pelas funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mensuráveis, cuja potencia p , $|f|^p$ é Lebesgue integrável, isto é:

$$E^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}$$

Define-se em $E^p(\Omega)$ a relação $\sim$ dada por:

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ quase sempre em } \Omega.$$

Notemos que $\sim$ é uma relação de equivalência. Assim, faz sentido considerar o quociente de $E^p(\Omega)$ por $\sim$. A coleção das classes de equivalência obtida por $\frac{E^p(\Omega)}{\sim}$ forma um espaço vectorial, que denotaremos por:

$$L^p(\Omega) := \frac{E^p(\Omega)}{\sim},$$

no qual definimos a norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ onde } u \in L^p(\Omega).$$

Definição 1.2: Uma função mensurável $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é dita essencialmente limitada se existe $C > 0$ tal que $|u(x)| \leq C$ quase sempre (q.s) em $x \in \Omega$. A coleção das classes de equivalência das funções definidas em Ω pela relação $\sim$ e essencialmente limitadas é denotada por $L^\infty(\Omega)$. Define-se a norma em $L^\infty(\Omega)$ por:

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|u(x)| = \inf\{C > 0; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } x \in \Omega\}$$

É possível mostrar que $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$, além disso, para o caso particular $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

onde u e v pertencem a $L^2(\Omega)$.

Lema 1.3: (*Desigualdade de Young*). Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Lema 1.4: (*Desigualdade de Young com ϵ*). Sejam $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\epsilon > 0$ qualquer. Então,

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon)b^q, \quad \forall a, b \geq 0,$$

onde $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-\frac{q}{p}} q^{-1}$. No caso particular quando $p = q = 2$, dita desigualdade reduz-se a

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2, \quad \forall a, b \geq 0.$$

Teorema 1.5: (*Desigualdade de Hölder*). Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^{p'}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$, com p' o expoente conjugado de p , ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então:

$$uv \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int_{\Omega} |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Teorema 1.6: (*Desigualdade de Hölder Generalizada*). Sejam $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_n \leq \infty$ tais que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r} \leq 1$. Se $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, \dots, n$, então:

$$u := \prod_{i=1}^n u_i \in L^r(\Omega) \quad e$$

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^n \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Teorema 1.7: (*Lema de Imersão*). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um conjunto aberto com medida finita, p e q tais que $1 \leq p < q \leq \infty$. Então:

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Definição 1.8: Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O Espaço de Sobolev de ordem m modelado sobre $L^p(\Omega)$, que denotaremos por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. É dizer:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ multi-índice tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Quando $1 \leq p < \infty$, não é difícil mostrar que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço normado munido da norma:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Analogamente, $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço normado munido da norma:

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Teorema 1.9: Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $m \in \mathbb{N}$.

- Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.
- Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços reflexivos para $1 < p < \infty$.
- Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são espaços separáveis para $1 \leq p < \infty$.
- No caso particular, quando $p = 2$, $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle_{W^{m,2}(\Omega) \times W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

dito espaço o denotaremos por $H^m(\Omega)$.

Definição 1.10: Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como:

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

isto é, como o fecho do espaço das funções teste com respeito à norma em $W^{m,p}(\Omega)$. No caso $p = 2$, denotaremos $H_0^m(\Omega) := \overline{D(\Omega)}^{H^m(\Omega)}$.

Definição 1.11: Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos o espaço dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ como:

$$[W_0^{m,p}(\Omega)]' =: W^{-m,p'}(\Omega),$$

onde p e p' são expoentes conjugados. No caso $p=2$, denotaremos $[H_0^m(\Omega)]' =: H^{-m}(\Omega)$.

Teorema 1.12: (*Imersões de Sobolev*). Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio e, para $1 \leq k \leq n$, seja Ω_k a interseção de Ω com o plano de dimensão k em $\mathbb{R}^n$. (Se $k = n$ então $\Omega_k = \Omega$.) Se $j \geq 0$ e $m \geq 1$ são números inteiros dados e se $1 \leq p < \infty$.

- *PARTE I: Suponha que Ω cumpre a condição do cone.*

- *Caso A: Se $mp > n$ ou $m = n$ e $p = 1$, então:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega).$$

Alem disso, se $1 \leq k \leq n$, então:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad \text{para } p \leq q \leq \infty,$$

e, em particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{para } p \leq q \leq \infty.$$

- *Caso B: Se $mp = n$ e $1 \leq k \leq n$, então:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad \text{para } p \leq q < \infty,$$

e, em particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{para } p \leq q < \infty.$$

- *Caso C: Se $mp < n$ e, o bem, $n - mp < k \leq n$ ou $p = 1$ e $n - m \leq k \leq n$, então:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega_k) \quad \text{para } p \leq q \leq p^* = \frac{kp}{n - mp},$$

e, em particular,

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \quad \text{para } p \leq q \leq p^* = \frac{kp}{n - mp}.$$

- *PARTE II: Suponha que Ω satisfaz a condição forte local de Lipschitz. Então o espaço $C_B^j(\Omega)$ do caso A, pode ser substituído pelo espaço menor $C^j(\bar{\Omega})$, e as imersões podem ser reescritas como:*

- Se $mp > n > (m-1)p$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \quad \text{para } 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p}.$$

- Se $n = (m-1)p$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}) \quad \text{para } 0 < \lambda < 1.$$

- Se $n = m-1$ e $p = 1$, então

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j,1}(\bar{\Omega}).$$

Lembremos que $C^{j,\lambda}(\bar{\Omega})$ representa o espaço das funções em $C^j(\bar{\Omega})$ cujas derivadas de ordem λ são j -Holder contínuas.

- **PARTE 3:** Todas as imersões da parte A e B são válidas para Ω um domínio arbitrário se os espaços de Sobolev envolvidos em ditas partes, são substituídas por seus correspondentes W_0 -espaços.

Observação 1.13: No caso da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, a melhor constante de dita imersão é dada por λ_1 , sendo λ_1 o primeiro autovalor do operado $-\Delta$. Isto é, se $u \in H_0^1(\Omega)$, então

$$\lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

com

$$\lambda_1 = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L^2(\Omega)}^2}.$$

Teorema 1.14: (Teorema de Rellich-Kondrachov). Sejam Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$, Ω_0 um subdomínio limitado de Ω , e Ω_0^k a interseção de Ω_0 com um plano k -dimensional em $\mathbb{R}^n$. Sejam $j \geq 0$ e $m \geq 1$ inteiros, e $1 \leq p < \infty$.

- **PARTE I:** Se Ω satisfaz a condição do cone e $mp \leq n$, então seguem as seguintes imersões compactas:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \text{se } 0 < n - mp < k \leq n \text{ e } 1 \leq q < \frac{kp}{n - mp}.$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \text{se } n = mp, 1 \leq k \leq n \text{ e } 1 \leq q < \infty.$$

- **PARTE II:** Se Ω satisfaz a condição do cone e $mp > n$, então seguem as seguintes imersões compactas:

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C_B^j(\Omega_0)$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \text{se } 1 \leq q < \infty.$$

- *PARTE III: Se Ω satisfaz a condição forte local de Lipschitz, então seguem as seguintes imersões compactas:*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^j(\bar{\Omega}_0^k) \quad \text{se } 0mp > n.$$

$$W^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}_0^k) \quad \text{se } mp > n \geq (m-1)p \text{ e } 0 < \lambda < m - \frac{n}{p}.$$

- *PARTE IV: Se Ω é um domínio arbitrário em $\mathbb{R}^n$, então seguem as seguintes imersões compactas:*

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} W^{j,q}(\Omega_0^k) \quad \text{se } 0 < n - mp < k \leq n \text{ e } 1 \leq q < \frac{kp}{n - mp}.$$

$$W_0^{j+m,p}(\Omega) \xhookrightarrow{c} C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}_0^k) \quad \text{se } mp > n \geq (m-1)p \text{ e } 0 < \lambda < m - \frac{n}{p}.$$

Teorema 1.15: (*Desigualdade de Poincaré*). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante $C = C(p, |\Omega|) > 0$ tal que:*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{m,p}(\Omega).$$

Definição 1.16: *Seja X um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por:*

$$(L^p(0, \tau; X); \|\cdot\|_{L^p(0, \tau; X)})$$

ao espaço de Banach das funções vetoriais mensuráveis $u : (0, \tau) \rightarrow X$, tais que $\|u(t)\|_X$ pertence a $L^p(0, \tau)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0, \tau; X)} = \left(\int_0^\tau \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

No caso $p = \infty$, denotaremos por $(L^\infty(0, \tau; X); \|\cdot\|_{L^\infty(0, \tau; X)})$ ao espaço de Banach das funções vetoriais mensuráveis $u : (0, \tau) \rightarrow X$, tais que $\|u(t)\|_X$ pertence a $L^\infty(0, \tau)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, \tau; X)} = \sup_{t \in (0, \tau)} \text{ess} \|u(t)\|_X.$$

Uma ferramenta que vai ser fortemente usada no trabalho sera o Teorema de Compacidade de Simon [34], que é uma extensão do Teorema de Aubin-Lions.

Teorema 1.17: (*Teorema de Compacidade de Simon*). *Sejam X, B, Y espaços de Banach tais que $X \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow Y$. Suponhamos que:*

- (u_n) é limitada em $L^\infty(0, \tau; X)$

- $(\partial_t u_n)$ é limitada em $L^r(0, \tau; Y)$, $r > 1$.

Então, (u_n) é relativamente compacto em $C(0, \tau; B)$.

Lema 1.18: (*Desigualdade de Gronwall*). Sejam $\alpha \geq 0$ uma constante, $\beta \in L^1(a, b)$ e $\phi \in L^\infty(a, b)$ tais que $\beta > 0$ e $\phi \geq 0$. Se

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \quad a \leq t \leq b.$$

1.2 Espaços de Bochner com peso

Nesta seção faremos uma revisão dos espaços de Bochner, que será fundamental para poder definir o "espaço de história" que está envolto em nossa equação. Para maior detalhe se remite ao leitor consultar os trabalhos de Adams & Fournier [1], Yosida [39], Butzer [5] e Folland [14].

Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$ e seja f uma função definida no intervalo (a, b) em $\mathbb{R}$ (que pode ser finito) e tendo valores em X . Além disso, seja ν uma medida em (a, b) dada por $d\nu(s) = \mu(s)ds$ onde μ é contínua e positiva em (a, b) .

Definição 1.19: (Integral de Bochner). Se $A_1, A_2, \dots, A_k$ é uma coleção finita de subconjuntos disjuntos de (a, b) tendo cada um medida ν finita, e se $x_1, x_2, \dots, x_k$ é um conjunto de elementos de X , chamaremos à função f dada por

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \chi_{A_i} x_i, \quad a < t < b,$$

como "função simples" sobre (a, b) em X . Para este tipo de funções simples definimos a integral de f como

$$\int_a^b f(s)d\nu(s) = \sum_{i=1}^k \nu(A_i)x_i = \sum_{i=1}^k \left(\int_{A_i} \mu(s)ds \right) x_i,$$

a qual independe da escolha de dita partição.

Agora, seja f uma função arbitrária definida sobre (a, b) em X . Diremos que " f é (fortemente) medível" em (a, b) , se existe uma sequência f_i de funções simples com suporte em (a, b) tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|f_j(t) - f(t)\|_X \quad \text{q.s. em } (a, b).$$

Então, definimos a "Integral de Bochner de f em (a, b) " como

$$\int_a^b f(s) d\nu(s) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b f_j(s) d\nu(s),$$

Analogamente, como a integral das funções simples, a integral anterior independe da escolha da sequência de funções simples que aproximam f .

Teorema 1.20: *Uma função f é Bochner integrável em $(a, b) \Leftrightarrow$ a função $\|f(\cdot)\|_X$ é integrável em (a, b) .*

Definição 1.21: (Espaço $L_\mu^p(a, b; X)$).

- Se $1 \leq p < \infty$, diremos que $f \in (L_\mu^p(a, b; X); \|\cdot\|_{L_\mu^p(a, b; X)})$ se

$$\|f\|_{L_\mu^p(a, b; X)} = \left(\int_a^b \|f(s)\|_X^p d\nu(s) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \mu(s) \|f(s)\|_X^p ds \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- Se $p = \infty$, diremos que $f \in (L_\mu^\infty(a, b; X); \|\cdot\|_{L_\mu^\infty(a, b; X)})$ se

$$\|f\|_{L_\mu^\infty(a, b; X)} = \sup_{a < s < b} \text{ess} \|f(s)\|_X < \infty.$$

Teorema 1.22:

- O espaço $L_\mu^p(a, b; X)$ para $1 \leq p \leq \infty$ é de Banach.
- Se o espaço X é de Hilbert então o espaço $L_\mu^2((a, b); X)$ é de Hilbert, e o produto interno é dado por

$$\langle u, v \rangle_{L_\mu^2((a, b); X) \times L_\mu^2((a, b); X)} = \int_a^b \mu(s) \langle u, v \rangle_{X \times X} ds$$

1.3 Sistemas dinâmicos e atratores globais

Nesta seção faremos uma revisão sobre alguns tópicos referentes à teoria dos sistemas dinâmicos definidos por um semigrupo fortemente contínuo de um espaço de Banach X . Repassaremos os resultados apresentados em Teman [36], Hale [16], Babin & Vishik [3], e faremos um estudo mais perto aos trabalhos de Chueshov & Lasiecka [9], [10].

Definição 1.23: Uma família de operadores não necessariamente lineares $S(t)_{t \geq 0}$, fortemente contínua em X , é chamado de C_0 – *semigrupo* se:

- $S(0) = I$ (Operador identidade de X).

- $S(t+s) = S(t)S(s)$ para cada $t, s \geq 0$.
- A aplicação $[0, \infty) \times X \ni (t, x) \mapsto S(t)(x) \in X$ é contínua para cada $x \in X$ dado.

O par $(X, S(t))$ também é chamado sistema dinâmico, definido pelo semigrupo $S(t)$.

Definição 1.24: Sejam $(X, S(t))$ um sistema dinâmico e $\mathcal{A}$ um subconjunto de X .

- Diremos que $\mathcal{A}$ é positivamente invariante pelo ação semigrupo $S(t)$, quando $S(t)\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$.
- Diremos que $\mathcal{A}$ é invariante pelo ação do semigrupo $S(t)$, quando $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ para todo $t \geq 0$.

Definição 1.25: (Definição de Atrator Global). Seja $(X, S(t))$ um sistema dinâmico. Diremos que um subconjunto $\mathcal{A} \subset X$ é um Atrator Global de $(X, S(t))$ quando:

- $\mathcal{A}$ é um conjunto fechado e limitado,
- $\mathcal{A}$ é um conjunto invariante por $S(t)$,
- $\mathcal{A}$ atrai qualquer subconjunto limitado de X pela ação do semigrupo $S(t)$, isto é, para todo limitado $B \subset X$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} dist_H(S(t)B, \mathcal{A}) = 0,$$

onde $dist_H(A, B)$ é a semi-distancia de Hausdorff entre os subconjuntos $A, B \subset X$ e é dada por

$$dist_H(A, B) := \sup_{x \in A} d_X(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y).$$

Definição 1.26: (Conjunto Absorvente). Seja $(X, S(t))$ um sistema dinâmico. Um conjunto $\mathcal{B} \subset X$ é chamado de "Conjunto Absorvente de $(X, S(t))$ " se, para qualquer subconjunto limitado $B \subset X$, existe $\tau_0 = \tau_0(B) \geq 0$ tal que

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geq \tau_0.$$

Quando um sistema dinâmico $(X, S(t))$ possui um conjunto absorvente limitado, dizemos que $(X, S(t))$ é um sistema dinâmico dissipativo.

Definição 1.27: (Compacidade Assintótica). Um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é dito "Assintoticamente Compacto" se existe um conjunto $K \subset X$ compacto tal que para cada conjunto limitado $B \subset X$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} dist_H(S(t)B, K) = 0.$$

Agora apresentaremos um resultado conhecido sobre a existência de atratores globais para semigrupos que será a pedra angular para a prova da existência do atrator global em nosso trabalho, o leitor interessado pode consultar Miranville & Zelik [28].

Teorema 1.28: *Seja $(X, S(t))$ um sistema dinâmico. Então, diremos que dito sistema dinâmico possui atrator global $\mathcal{A}$ se, e somente se, é assintoticamente compacto e dissipativo. Além disso, em caso afirmativo, se $\mathcal{B}$ denota a coleção de todos os subconjuntos limitados não vazios de X , então o atrator $\mathcal{A}$ vem dado por*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} w(B)$$

onde $w(B)$ é o conjunto w -limite de B e é dado por

$$w(B) = \{x \in X : \text{existem sequencias } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{R}^+ \text{ com } t_n \rightarrow \infty \\ \text{e } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ em } B, \text{ tais que } x = \lim_{n \rightarrow \infty} S(t_n)x_n\}.$$

Nosso sistema envolto no presente trabalho, na verificação da compacidade assintótica pode ser bastante difícil. Por isso, introduzimos o conceito de regularidade assintótica, que será usado junto aos resultados feitos por Chueshov & Lasiecka [10], onde apontam que num sistema dissipativo os conceitos de compacidade assintótica e regularidade assintótica são equivalentes.

Definição 1.29: (Regularidade Assintótica). Um sistema dinâmico $(X, S(t))$ é "Assintoticamente Regular" se, para qualquer conjunto limitado e positivamente invariante $B \subset X$, existe um conjunto compacto $K \subset \overline{B}^X$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}_H(S(t)B, K) = 0.$$

Teorema 1.30: (Chueshov & Lasiecka [10] 7.1.4 Proposition). Assumamos que X é um espaço de Banach e $(X, S(t))$ um sistema dinâmico dissipativo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- $(X, S(t))$ é assintoticamente compacto.
- $(X, S(t))$ é assintoticamente regular.

Teorema 1.31: (Chueshov & Lasiecka [10] 7.1.11 Proposition) Seja $(X, S(t))$ um sistema dinâmico. Suponhamos que para algum conjunto limitado positivamente invariante $B \subset X$ e para algum $\epsilon > 0$, exista $T = T(\epsilon, B)$ tal que

$$\|S(T)z^1 - S(T)z^2\|_X \leq \epsilon + \phi_T(z^1, z^2), \quad \forall z^1, z^2 \in B,$$

onde $\phi_T : B \times B \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} \phi_T(z^n, z^m) = 0. \quad (1.1)$$

para alguma sequencia (z^n) em B . Então, $(X, S(t))$ é um sistema dinâmico assintoticamente regular.

1.4 Soluções fracas (mild solutions)

Nesta seção faremos uma revisão sobre as soluções suaves no sentido de A. Pazy [31]. Consideremos o problema de valor inicial não-homogêneo

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t) + f(t), \quad t > 0 \quad (1.2)$$

$$u(0) = x$$

com $f : [0, \tau) \rightarrow X$, onde A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\Sigma(t)$, tal que a correspondente equação homogênea tem uma solução única para cada valor $x \in \text{dom}(A)$.

Definição 1.32: A função $u : [0, \tau] \rightarrow X$ é uma "solução clássica" de (1.2) em $[0, \tau)$, se u é contínua em $[0, \tau)$, continuamente diferenciável em $(0, \tau)$, $u(t) \in \text{dom}(A)$ para todo $t \in (0, \tau)$ e (1.2) é satisfeito em $[0, \tau)$.

Teorema 1.33: Se $f \in L^1(0, \tau; X)$, então para cada $x \in X$ o problema de valor inicial (1.2), tem como máximo uma solução (clássica) que é dada por

$$u(t) = \Sigma(t)x + \int_0^t \Sigma(t-s)f(s)ds.$$

Definição 1.34: Seja A um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\Sigma(t)$. Se $x \in X$ e $f \in L^1(0, \tau; X)$, então a função $u \in C([0, \tau]; X)$ é dada por

$$u(t) = \Sigma(t)x + \int_0^t \Sigma(t-s)f(s)ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (1.3)$$

Dita função u é chamada fraca (mild solution) de (1.2) em $[0, \tau]$.

Observação 1.35:

- Não toda solução suave é solução clássica.
- É claro que se $f \in L^1(0, \tau; X)$, o problema (1.2) tem uma única solução fraca.

Equação viscoelástico não-linear com história

Neste capítulo, estudamos principalmente as bases para a boa colocação do problema correspondente à equação (1). Explicaremos detalhadamente o entorno funcional que envolve o problema e como vamos a enfocar a "história" envolvida nessa equação, dado que seguiremos o argumento de Dafermos [12]. Além disso, faremos um estudo detalhado do trabalho de Conti, Marchini & Pata [11], tanto neste capítulo como no Capítulo 3.

Enunciemos as hipóteses que se serão usadas ao longo do trabalho. Lembramos que a nossa equação

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h,$$

está definida numa região limitada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ com fronteira $\partial\Omega$ suave e com condições de Dirichlet, isto é $u(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0$. Ademais $\rho \in [0, 4]$ e $\alpha > 0$ um parâmetro fixo.

Assumiremos as seguintes hipóteses:

(H1) A equação possui condições iniciais

$$u(x, 0) = u_0, \quad \partial_t u(x, 0) = v_0, \quad u(x, -s)|_{s \in \mathbb{R}^+} = \phi_0(s) \quad \forall x \in \Omega,$$

onde $u_0, v_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi_0 : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ funções dadas. Notemos que a função ϕ_0 nos da informação sobre a história passada de u .

(H2) A função $h \in L^2(\Omega)$ é independente do fator temporal e representa alguma força externa ao sistema.

(H3) A função f é possivelmente não linear, localmente Lipschitz e satisfaz

$$f(0) = 0; \tag{2.1}$$

que cumpre a condição de crescimento

$$|f(u) - f(v)| \leq c|u - v|(1 + |u|^q + |v|^q), \quad (2.2)$$

onde, c é uma constante e $q \in [0, 4)$,

e que cumpre a condição de dissipação

$$\liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u} > -\lambda_1, \quad (2.3)$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor de $-\Delta$. Além disso, seja $\widehat{f}(u) = \int_0^u f(y)dy$, então também pedimos

$$f(u)u - \widehat{f}(u) \geq -\frac{\beta}{2}u^2 - m_f \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

onde m_f é uma constante que só depende de f e $\beta \in (0, \lambda_1)$.

(H4) O núcleo da convolução (o memória) μ é uma função que satisfaz

$$\mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+), \quad 0 < \mu(s) < \infty, \quad \mu'(s) \leq 0, \quad (2.5)$$

e que existem $k_0, k_1 > 0, k_2 > 0$ tais que

$$\int_0^\infty \mu(s)ds = k_0 \in (0, \alpha), \quad (2.6)$$

$$\mu'(s) \leq -k_1\mu(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}^+. \quad (2.7)$$

e

$$\int_0^\infty -\mu'(s)ds = k_2, \quad 0 < k_2 < \infty. \quad (2.8)$$

Observação 2.1: Notemos que das hipóteses anteriores temos que $k_2 \geq k_0k_1$.

Observação 2.2: Para facilitar as contas, sem perda de generalidade, assumiremos que

$$\alpha - k_0 = 1. \quad (2.9)$$

2.1 Entorno funcional

Agora construiremos um espaço "bom" onde serão definidas as soluções fracas da equação (1). Dado que o problema envolve uma convolução referente à história do material, vamos ter que definir uma nova variável que habitara dentro de um espaço de Bochner com peso que se apresentara nesta mesma seção.

Observação 2.3: Para facilitar as contas ao largo do trabalho, usaremos certas notações que explicaremos a continuação:

- Dado que nosso problema envolve ao operador Laplaciano, denotaremos por

$$A := -\Delta,$$

notemos ademais que

$$\text{dom}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega).$$

- Denotaremos a norma no espaço $L^p(\Omega)$, para todo $p \in [1, \infty]$ como:

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

alem disso, denotamos o produto interno em $L^2(\Omega)$ como

$$(u, v) := \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

- Dadas as observações anteriores notemos que podemos denotar a norma no espaço $H_0^1(\Omega)$ como

$$\|\nabla u\|_2 := \|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

alem disso, denotamos o produto interno neste espaço por

$$\langle u, v \rangle_1 := \langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v) = (Au, v), \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

- A dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ será denotada por

$$\langle f, u \rangle := \langle f, u \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad \forall f \in H^{-1}(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Definição 2.4: Dada a hipóteses (2.5), definimos a medida ν em $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+})$ dada por

$$d\nu(s) = \mu(s)ds.$$

Definição 2.5: (Espaço de história). Dado ν como na definição anterior, definimos o espaço de Bochner com peso

$$\mathcal{M} := L^2_\mu(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \quad (2.10)$$

chamado "espaço de história". Além disso, dado que $H_0^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, o espaço $\mathcal{M}$ munida do seguinte produto interno e norma

$$\langle \eta, \xi \rangle_{\mathcal{M}} := \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta(s), \xi(s) \rangle_1 ds, \quad \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 := \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \eta\|_2^2 ds, \quad \forall \eta, \xi \in \mathcal{M}$$

é um espaço de Hilbert.

Agora, como já se falou anteriormente, nós seguiremos o enfoque de Dafermos, e para isso é preciso definir o seguinte semigrupo traslação a direita.

Definição 2.6: Definimos o seguinte semigrupo $\Sigma(t)$ em $\mathcal{M}$ dado por

$$[\Sigma(t)\eta](s) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < s \leq t \\ \eta(s-t) & \text{se } s > t \end{cases} \quad (2.11)$$

Dito semigrupo sera chamado "Semigrupo Traslação a Direita".

É claro observar que dito semigrupo cumpre com as seguintes propriedades:

- O semigrupo $\Sigma(t)$ é um semigrupo C_0 -semigrupo de operadores lineares.
- O gerador infinitesimal do semigrupo $\Sigma(t)$ é dado pelo operador lineal $T : \text{dom}(T) \rightarrow \mathcal{M}$ onde

$$T\eta = -\eta', \quad \text{dom}(T) = \{\eta \in \mathcal{M} : \eta' \in \mathcal{M}, \eta(0) = 0\}. \quad (2.12)$$

Teorema 2.7: Dada o semigrupo anterior $\Sigma(t)$, com o gerador infinitesimal T , se cumpre que

$$\langle T\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}} \leq 0, \quad \forall \eta \in \text{dom}(T). \quad (2.13)$$

Demonstração. Seja $\eta \in \text{dom}(T)$, então temos que

$$\begin{aligned}
\langle T\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}} &= \langle -\eta', \eta \rangle_{\mathcal{M}} = \int_0^\infty \mu(s) \langle -\eta', \eta \rangle_1 ds \\
&= - \int_0^\infty \mu(s) \left[\int_\Omega \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \eta'}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} dx \right] ds \\
&= - \int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu(s) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \eta'}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} ds \right] dx \\
&= - \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} \left(\sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right|^2 \right) ds \right] dx \\
&= - \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} \|\nabla \eta(s)\|_{\mathbb{R}^3}^2 ds \right] dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta(s)\|_{\mathbb{R}^3}^2 ds \right] dx - \int_\Omega [\mu(s) \|\nabla \eta(s)\|_{\mathbb{R}^3}^2]_0^\infty dx \\
&= \frac{1}{2} \int_\Omega \left[\int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta(s)\|_{\mathbb{R}^3}^2 ds \right] dx,
\end{aligned}$$

agora por (2.5) temos que $\mu' \leq 0$, então

$$\langle T\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}} \leq 0$$

□

2.2 Problema com história

Seguindo com o enfoque no marco da história para nossa equação, vamos a "modificar" nossa equação por meio de um "deslocamento" que gerará uma nova variável. Seguiremos, como se falamos antes, o trabalho de Dafermos [12]. Também podemos encontrar o mesmo tipo de enfoque em Giorgi, Grasseli & Pata [15], Pata & Zucchi [30] e Conti, Marchini & Pata [11].

Definição 2.8: Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{R}^3$, com fronteira $\partial\Omega$ suave. Seja η o "Deslocamento Relativo da História do Sistema", o qual é dado por

$$\eta = \eta^t(x, s) = u(x, t) - u(x, t - s), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

A pergunta é, por que a necessidade de definir dito deslocamento?. A necessidade é escrever de uma "melhor" maneira o termo da convolução em nossa equação. Pois notemos que se derivamos dito deslocamento formalmente com relação a t e s obtemos

$$\eta_t^t(x, s) = -\eta_s^t(x, s) + u_t(x, t), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad t \geq 0, \quad (2.15)$$

assim o termo original da história (convolução), é reescrita como

$$\int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds = \left(\int_0^\infty \mu(s) ds \right) \Delta u - \int_0^\infty \mu(s) \Delta \eta^t(s) ds.$$

Agora reescrevendo a equação (1) com este cambio, temos que

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \alpha \Delta u + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) ds + f(u) = h,$$

torna-se

$$|\partial_t u|^\rho \partial_{tt} u - \Delta \partial_{tt} u - \left(\alpha - \int_0^\infty \mu(s) ds \right) \Delta u - \int_0^\infty \mu(s) \Delta \eta^t(s) ds + f(u) = h,$$

alem disso, pela observação (2.9) e tendo em quenta que $A = -\Delta$, temos que finalmente a equação (1) se escreve como

$$|u_t|^\rho u_{tt} + A u_{tt} + A u + \int_0^\infty \mu(s) A \eta^t(s) ds + f(u) = h \quad (2.16)$$

Observação 2.9: Notemos que trocamos de notação para a derivada de u respeito de t , isto é só para não sobrecarregar as notações ao largo do trabalho. Alem disso, omitimos também o par de variáveis $(x, t) \in [0, \infty)$.

Assim, para terminar de reescrever nossa equação em termos de este deslocamento, vamos a definir a seguinte condição inicial para η .

Definição 2.10: Seja $\phi_0 : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ como na hipóteses **(H1)** . Definimos a condição inicial ($t = 0$) para nosso deslocamento relativo da história do sistema como

$$\eta^0(x, s) := u_0(x, 0) - u(x, -s) = u_0(x, 0) - \phi_0(x, s), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Observação 2.11: Notemos que definindo assim a condição inicial, temos certa compatibilidade com a equação (2.15), isto nos permitirá trabalhar com um sistema de equações, referentes a u e η em lugar de só a equação (1).

Agora a pergunta é, em que espaço se encontra dito deslocamento relativo?. É aqui onde entra nosso espaço da história $\mathcal{M}$, para olhar melhor isto estudemos mais de cerca a função η .

Notemos que em realidade nossa função η "trabalha" da seguinte maneira

$$\eta : [0, \infty) \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\eta^t(x, s) := \eta(t, x, s) = u(x, t) - u(x, t - s).$$

Notemos que se fixamos $t \in [0, \infty)$ claramente temos

$$\eta^t : s \mapsto \eta^t(\cdot, s) \in H_0^1(\Omega),$$

Ademais, como olhamos na equação (2.16) vamos a ter termos do tipo

$$\int_0^\infty \mu(s) A \eta^t(x, s) ds,$$

assim que precisamos de um espaço "bom", onde se tenha certo controle em expressões como a anterior. Para isso, fixando $t \in [0, \infty)$, temos que η^t pertence ao espaço da história $\mathcal{M}$ como em (2.10). Notemos que esta é a "motivação" de definir o espaço da história dessa forma.

Consequentemente, o sistema correspondente à equação (1) se escreverá como:

$$|u_t|^\rho u_{tt} + A u_{tt} + A u + \int_0^\infty \mu(s) A \eta^t(s) ds + f(u) = h, \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (2.17)$$

$$\eta_t^t(s) = -\eta_s^t(s) + u_t, \quad \text{em } \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2.18)$$

com condições de fronteira

$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \quad \eta = 0 \quad \text{sobre } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \quad (2.19)$$

e dados iniciais

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = v_0(x), \quad \eta^t(x, 0) = 0, \quad \eta^0(x, s) = \eta_0(x, s), \quad (2.20)$$

onde

$$\eta_0(x, s) = u_0(x, 0) - \phi(x, s), \quad (x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

Observação 2.12: Notemos que tendo em conta a equação (2.18), notamos que $\eta_s^t \in \mathcal{M}$, e ademais temos que $\eta^t(0) = 0$ para cada $x \in \Omega$. Assim, pelo resultado (2.12) temos que $\eta^t \in \text{dom}(T)$. Portanto nossa equação (2.18) também se pode escrever em termos de T como:

$$\eta_t^t(s) = T \eta^t(s) + u_t, \quad \text{em } \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (2.21)$$

A seguir, vamos a apresentar nossos resultados para o sistema (2.17)-(2.18), que é autônomo.

Boa colocação do problema

Neste capítulo apresentaremos um dos resultados principais de nosso trabalho, a "boa colocação do problema". Começaremos definindo o que é uma solução fraca para nosso sistema e provaremos a existência de estas soluções pelo método de Faedo-Galerkind, método que é descrito de boa maneira no trabalho de Lions [19]. Para a prova de existência de soluções estudaremos os resultados apresentado por Cavalcanti, Domingos Cavalcanti & Ferreira [6], Han & Wang [17], Pata & Zucchi [30] e faremos um estudo mais detalhado dos trabalhos de Conti, Marchini & Pata [11] e Araujo, Ma & Qin [2] para a prova da unicidade de soluções e a dependência continua dos dados.

Começaremos definindo o "Espaço de Fase" para nosso problema. Principalmente ele nos dirá onde moram as soluções fracas que vamos a definir.

Definição 3.1: (Espaço de Fase). Seja $\mathcal{M}$ como em (2.10). Definimos o "Espaço de Fase $\mathcal{H}$ " como

$$\mathcal{H} := H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times \mathcal{M},$$

o qual é um espaço normado, com a norma dada por:

$$\|(u, v, \eta)\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\eta\|_{\mathcal{M}}^2, \quad \forall (u, v, \eta) \in \mathcal{H}.$$

Agora já temos todas as ferramenta para definir o que é uma solução fraca para o sistema (2.17)-(2.18).

Definição 3.2: Seja $\tau > 0$ fixo mas arbitrário. Dado o sistema (2.17)-(2.18), com condições de fronteira (2.19) e dados iniciais (2.20). Se ditos dados iniciais $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ e $h \in L^2(\Omega)$, então diremos que a função $z = (u, u_t, \eta) \in C([0, \tau], \mathcal{H})$ é uma "Solução Fraca" de (2.17)-(2.18) se satisfaz a condição inicial $z(0) = (u_0, v_0, \eta_0)$ e

$$\langle |u_t|^\rho u_{tt}, \varphi \rangle + \langle u_{tt}, \varphi \rangle_1 + \langle u, \varphi \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^t(s), \varphi \rangle_1 ds + \langle f(u), \varphi \rangle = (h, \varphi), \quad (3.1)$$

$$\langle \eta_t^t + \eta_s^t, \xi \rangle_{\mathcal{M}} = \langle u_t(t), \xi \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (3.2)$$

para todo $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\xi \in \mathcal{M}$, e $t \in [0, \tau]$ quase sempre.

Observação 3.3: Uma pergunta óbvia é, que sentido tem as expressões $\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi \rangle$ e $\langle f(u(t)), \varphi \rangle$ na equação (3.1)? Para responder isto analisaremos ambos casos.

- No caso, $\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi \rangle$, dado que $u, u_t \in C([0, \tau], H_0^1(\Omega))$ e $\rho \in [0, 4)$, temos que

$$|u_t|^\rho u_t \in L^\infty(0, \tau; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))$$

pois,

$$\int_\Omega |u_t(t)|^{\frac{(\rho+2)(\rho+1)}{\rho+1}} dx = \|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq C^{\rho+2} \|\nabla u_t(t)\|_2^{\rho+2} < \infty,$$

onde C é a constante produto da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ a qual é válida dado que $\rho + 2 < 6 = 2^*$.

Ademais se $\|\nabla u_t\|_2 \leq R$ para algum $R > 0$, se tem que $|u_t|^\rho u_t$ é uniformemente limitada em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ com respeito de t , pois

$$\int_0^\tau \int_\Omega |u_t(t)|^{\frac{(\rho+2)(\rho+1)}{\rho+1}} dx dt = \int_0^\tau \|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} dt \leq C^{\rho+2} \int_0^\tau \|\nabla u_t(t)\|_2^{\rho+2} dt \leq \tau R^{\rho+2} C^{\rho+2}.$$

Assim, é válida a seguinte igualdade no sentido das distribuições:

$$\begin{aligned} \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t) \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} &= -\frac{1}{\rho+1} \langle |u_t(t)|^\rho u_t(t), \varphi_t(t) \rangle_{D'(\Omega) \times D(\Omega)} \\ &= -\frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t) \varphi_t(t) dx \end{aligned}$$

$\forall \varphi \in D([0, \tau], \Omega)$ e para quase todo $t \in [0, \tau]$, dado que $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow L_{loc}^1(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$ e da caracterização das distribuições que pertencem a $L_{loc}^1(\Omega)$. Agora, como $\overline{D(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, por um passagem ao limite e pela continuidade podemos generalizar dita igualdade para todo $\varphi(t) \in H_0^1(\Omega)$, além disso como $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ pois $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) = (L^{\rho+2}(\Omega))'$ a expressão $\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t) \rangle$ se pode olhar como

$\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}$ para todo $\varphi(t) \in H_0^1(\Omega)$ e para quase todo $t \in [0, \tau]$.

Então teremos que

$$\begin{aligned} \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} &= -\frac{1}{\rho+1} \langle |u_t(t)|^\rho u_t(t), \varphi_t(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \\ &= -\frac{1}{\rho+1} \int_{\Omega} |u_t(t)|^\rho u_t(t) \varphi_t(t) dx \end{aligned}$$

- No caso, $\langle f(u(t)), \varphi \rangle$, procederemos praticamente igual ao caso anterior. Notemos que $f(u(t)) \in L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$, para quase todo $t \in [0, \tau]$, pois: (omitiremos a variável t nas contas, mas ter presente que o resultado é para quase todo $t \in [0, \tau]$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(u)|^{\frac{q+2}{q+1}} dx &\leq \int_{\Omega} [c|u|(1+|u|^q)]^{\frac{q+2}{q+1}} dx \\ &\leq c^{\frac{q+2}{q+1}} 2^{\frac{q+2}{q+1}} \left[\int_{\Omega} |u|^{\frac{q+2}{q+1}} dx + \int_{\Omega} |u|^{q+2} dx \right] \\ &= c^{\frac{q+2}{q+1}} 2^{\frac{q+2}{q+1}} \|u\|_{\frac{q+2}{q+1}}^{\frac{q+2}{q+1}} + c^{\frac{q+2}{q+1}} 2^{\frac{q+2}{q+1}} \|u\|_{q+2}^{q+2} \\ &\leq \left(\frac{C_f^1}{2}\right)^{\frac{q+2}{q+1}} \|\nabla u\|_2^{\frac{q+2}{q+1}} + \left(\frac{C_f^2}{2}\right)^{\frac{q+2}{q+1}} \|\nabla u\|_2^{q+2} < \infty, \end{aligned}$$

onde se uso (2.2) e (2.1) na primeira desigualdade e as constantes C_f^1 e C_f^2 dependem de c , q e as imersões $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$ respectivamente dado que $q \in [0, 4)$. Notemos ademais que

$$\|f(u)\|_{\frac{q+2}{q+1}}^{\frac{q+2}{q+1}} = \left(\int_{\Omega} |f(u)|^{\frac{q+2}{q+1}} dx \right)^{\frac{q+1}{q+2}} \leq C_f^1 \|\nabla u\|_2 + C_f^2 \|\nabla u\|_2^{q+1} \leq C_f \|\nabla u\|_2 (1 + \|\nabla u\|_2^q), \quad (3.3)$$

onde $C_f = \max\{C_f^1, C_f^2\} > 0$.

Observação 3.4: Notemos que se (u, u_t, η) é solução fraca do sistema (2.17)-(2.18) teremos que $\eta \in C([0, \tau], \mathcal{M})$ e $u_t \in L^1(0, \tau; \mathcal{M})$. Então poderemos dizer que η é uma solução suave para a equação (2.18), o mais claramente, de sua forma equivalente (2.21), isto é para

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= T\eta + u_t \\ \eta^0 &= \eta_0. \end{aligned}$$

Agora, como $\eta_0 \in \mathcal{M}$, pela definição de solução suave, teremos que

$$\eta^t = \Sigma(t)\eta_0 + \int_0^t \Sigma(t-y)u_t(y)dy,$$

isto implica (por (2.11)) que a representação explícita para η estará dada por

$$\eta^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s) & \text{se } 0 \leq s \leq t \\ \eta_0(s-t) + u(t) - u_0 & \text{se } s > t \end{cases}$$

Notemos que esta ultima expressão é compatível com a construção do deslocamento η^t .

Dado que já temos definido que é uma solução fraca para o sistema (2.17)-(2.18), começaremos a provar a existência de ditas soluções.

3.1 Existência de soluções fracas

Como se falo ao começo do capítulo, provaremos a existência de soluções fracas pelo método de Faedo-Galerkin. Começaremos enunciando o teorema que vai ser feito nesta seção.

Teorema 3.5: *(Existência de Soluções Fracas).*

*Dado o sistema (2.17)-(2.18), com condições de fronteira (2.19) e dados iniciais (2.20). Suponha certa as hipóteses **(H1)** - **(H4)** . Se os dados iniciais $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ e $h \in L^2(\Omega)$, então o sistema (2.17)-(2.18) possui uma solução fraca*

$$(u, u_t, \eta) \in C([0, \tau], \mathcal{H}), \quad \forall \tau > 0, \quad (3.4)$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H_0^1(\Omega)), \\ u_{tt} &\in L^2([0, \tau], H_0^1(\Omega)), \quad \eta \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}). \end{aligned}$$

Para poder provar o teorema (3.5) começaremos fornecendo certas ferramentas que vai ajudar a aplicar o método de Faedo-Galerkin. Para maior detalhe se remite ao leitor revisar os trabalhos de Conti, Marchini & Para [11], Araujo, Ma & Qin [2], Cavalcanti, Domingos Cavalcanti & Ferreira [6], Han & Wang [17] e Pata & Zucchi [30].

Como sabemos o método de Faedo-Galerkin consiste em ter uma base de auto-funções "boa" para modelar o problema aproximado referente à equação e poder trabalhar em ele. Começaremos fornecendo dita base.

Seja $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ a base de auto-funções de $-\Delta u = \lambda u$ em Ω , com condições de fronteira de Dirichlet. Então, dita base é ortonormal em $L^2(\Omega)$ e ortogonal em $H_0^1(\Omega)$. Ademais cumpre que:

$$\begin{cases} -\Delta \omega_j = \lambda_j \omega_j, & x \in \Omega \\ \omega_j = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\lambda_j \geq 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$.

Observação 3.6: Notemos de dita base de auto-funções existe, pois podemos olhar $-\Delta = A$, onde $A : \text{dom}(A) \subset L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ com $H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^2(\Omega)$, e olhando o produto interno em $H_0^1(\Omega)$ como uma forma bilinear continua, cumprindo que $(Au, v) = \langle u, v \rangle$ temos que A é fechado, não limitado, positivo definido, autoadjunto e é um isomorfismo (vide Temam [36] Capítulo 2). Assim, da teoria espectral, existe a base $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$.

Assim, já temos uma base para $L^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Agora temos que construir uma base para $\mathcal{M}$.

Lema 3.7: *Existe uma base $\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty$ ortonormal para $\mathcal{M} = L_\mu^2(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$ com $\zeta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$, para todo $j \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Sejam $\{h_j\}_{j=1}^\infty$ uma base ortonormal de $L_\mu^2(\mathbb{R}^+) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ e $\{\bar{\omega}_j\}_{j=1}^\infty$ tal que

$$\bar{\omega}_j = \frac{\omega_j}{\|\nabla \omega_j\|_2}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Definindo $\zeta_i = h_p \bar{\omega}_k$ e $\zeta_j = h_m \bar{\omega}_n$, obtemos que:

$$\begin{aligned} \langle \zeta_i, \zeta_j \rangle_{\mathcal{M}} &= \int_0^\infty \mu(s) \left(\int_\Omega \nabla \zeta_i \nabla \zeta_j dx \right) ds \\ &= \int_0^\infty \mu(s) h_p(s) h_m(s) \left(\int_\Omega \nabla \bar{\omega}_k \nabla \bar{\omega}_n dx \right) ds \\ &= \delta_{pm} \delta_{kn} \\ &= \delta_{ij}, \end{aligned}$$

Assim, $\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty$ é uma base ortonormal para $\mathcal{M}$ com $\zeta_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega))$, $\forall j \in \mathbb{N}$. $\square$

Dado que já temos definidas as respectivas bases ortonormais para nossos espaços, podemos começar a prova do Teorema 3.5.

Demonstração. (Teorema 3.5). A prova sera feita em cinco etapas, começaremos definindo o "Problema Aproximado" para o sistema (2.17)-(2.18). Logo faremos três tipos diferentes de estimativas a partir de dito problema aproximado e finalmente procederemos a explicar em que "sentido" se aplicara o limite no problema.

3.1.1 Problema aproximado

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos os subespaços gerados

$$\text{Span}\{\omega_1, \dots, \omega_m\} \subset H_0^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \text{Span}\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\} \subset \mathcal{M}.$$

Para os dados iniciais $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$, procuramos as soluções aproximadas

$$u^m(t) = \sum_{j=1}^m a_{mj}(t)\omega_j \quad \text{e} \quad \eta^{t,m} = \sum_{j=1}^m b_{mj}(t)\zeta_j(s),$$

tais que

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, \omega_j \rangle + \langle u_{tt}^m, \omega_j \rangle_1 + \langle u^m, \omega_j \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^{t,m}(s), \omega_j \rangle_1 ds + \langle f(u^m), \omega_j \rangle = \langle h, \omega_j \rangle, \quad (3.5)$$

$$\langle \eta_t^{t,m}, \zeta_j \rangle_{\mathcal{M}} = -\langle \eta_s^{t,m}, \zeta_j \rangle_{\mathcal{M}} + \langle u_t^m(t), \zeta_j \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (3.6)$$

para $j \in [1, m]$, com condições iniciais

$$u^m(0) = u_0^m, \quad u_t^m(0) = v_0^m, \quad \eta^{0,m} = \eta_0^m, \quad (3.7)$$

onde u_0^m, v_0^m, η_0^m são escolhidos de forma que

$$u_0^m \rightarrow u_0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \quad v_0^m \rightarrow v_0 \text{ em } H_0^1(\Omega), \quad \eta_0^m \rightarrow \eta_0 \text{ em } \mathcal{M}. \quad (3.8)$$

Assim, o sistema (3.5)-(3.6) com condições iniciais (3.7) é um sistema de equações diferenciais ordinárias em t . Tal sistema possui existência local via Teorema de Carathéodory (vide Han & Wang [17]). Agora, faremos certas estimativas a priori que mostrarão que as soluções locais $(u^m, u_t^m, \eta^{t,m})$ podem ser estendidas ao intervalo $[0, \infty)$.

3.1.2 Primeira estimativa

Dado que temos que:

$$u_t^m(t) = \sum_{j=1}^m a'_{mj}(t)\omega_j \quad \text{e} \quad \eta^{t,m} = \sum_{j=1}^m b_{mj}(t)\zeta_j(s),$$

Então, multiplicamos por $a'_{mj}(t)$ à equação (3.5) e por $b_{mj}(t)$ à equação (3.6), tomando a somatória em ambas equações desde $j = 1$ até $j = m$, obtemos

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_t^m \rangle + \langle u_{tt}^m, u_t^m \rangle_1 + \langle u^m, u_t^m \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^{t,m}(s), u_t^m \rangle_1 ds + \langle f(u^m), u_t^m \rangle = \langle h, u_t^m \rangle, \quad (3.9)$$

$$\langle \eta_t^{t,m}, \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}} = -\langle \eta_s^{t,m}, \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}} + \langle u_t^m(t), \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}}. \quad (3.10)$$

Definição 3.8: Definimos o funcional

$$\mathcal{E}(t) := \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 = \|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.11)$$

o qual sera chamado por "Energia Auxiliar do Sistema (3.9)-(3.10)".

Em particular, tendo em conta o problema aproximado anterior, denotaremos por

$$\mathcal{E}^m(t) := \frac{1}{2} \|\nabla u^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}^2 = \|(u^m(t), u_t^m(t), \eta^{t,m})\|_{\mathcal{H}}.$$

Definição 3.9: Definimos o funcional

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2} \|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \mathcal{E}(t) + \int_{\Omega} \widehat{f}(u(t)) dx - \int_{\Omega} hu(t) dx, \quad (3.12)$$

ou seja,

$$E(t) = \frac{1}{\rho+2} \|u_t(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 + \int_{\Omega} \widehat{f}(u(t)) dx - \int_{\Omega} hu(t) dx.$$

Dito funcional sera chamado de "Energia do Sistema (3.9)-(3.10)".

Em particular, tendo em conta o problema aproximado anterior, denotaremos por

$$E^m(t) := \frac{1}{\rho+2} \|\nabla u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \mathcal{E}^m(t) + \int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(t)) dx - \int_{\Omega} hu^m(t) dx.$$

O qual chamaremos por "Energia Aproximada" para o sistema (3.9)-(3.10).

Agora notemos que

$$\frac{1}{\rho+2} \frac{d}{dt} \|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} = \langle |u_t^m(t)|^{\rho} u_{tt}^m(t), u_t^m(t) \rangle,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u^m(t)\|_2^2 = \langle u^m(t), u_t^m(t) \rangle_1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_t^m(t)\|_2^2 = \langle u_{tt}^m(t), u_t^m(t) \rangle_1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}^2 = \langle \eta_t^{t,m}, \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}},$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(t)) dx = \langle f(u^m(t)), u_t^m(t) \rangle,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} hu^m(t) dx = \langle h, u_t^m(t) \rangle,$$

assim, temos de estas igualdades, da definição de $E^m(t)$ e das equações (3.9) e (3.10), que

$$\frac{d}{dt} E^m(t) = -\langle \eta_s^{t,m}, \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}} = \langle T\eta^{t,m}, \eta^{t,m} \rangle_{\mathcal{M}} \leq 0. \quad (3.13)$$

Esto ultimo é pela desigualdade (2.13).

Agora, integrando de 0 a t a desigualdade acima, obtemos

$$E^m(t) \leq E^m(0), \quad (3.14)$$

mas, esta desigualdade se pode melhorar a partir dos dados iniciais, para isto analisemos $E^m(0)$, então temos que

$$E^m(0) = \frac{1}{\rho+2} \|u_t^m(0)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \mathcal{E}^m(0) + \int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(0)) dx - \int_{\Omega} h u^m(0) dx,$$

de onde observamos que:

- Suponhamos que $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, então como

$$\mathcal{E}^m(0) = \|(u^m(0), u_t^m(0), \eta^{t,m}(0))\|_{\mathcal{H}}^2 = \|(u_0^m, v_0^m, \eta_0^m)\|_{\mathcal{H}}^2,$$

e pelas convergências (3.8), temos que $\mathcal{E}^m(0) \leq Q_1(R)$ onde $Q_1 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente e independente do tempo.

- Suponhamos que $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, então

$$\frac{1}{\rho+2} \|u_t^m(0)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq \frac{1}{\rho+2} C^{\rho+2} \|\nabla u_0^m\|_2^{\rho+2} \leq \frac{1}{\rho+2} C^{\rho+2} R^{\frac{\rho+2}{2}} := Q_2(R),$$

onde a segunda desigualdade é dada pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ com constante $C > 0$. Ademais, análogo a Q_1 , Q_2 é uma função crescente e independente do tempo.

- Suponhamos que $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, então

$$\int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(0)) dx = \int_{\Omega} \widehat{f}(u_0^m) dx,$$

pela hipóteses (2.4), (2.2) e (2.1) temos que

$$\widehat{f}(u) \leq f(u)u + \frac{\beta}{2}u^2 + m_f \leq c|u|(1+|u|^q)u + \frac{\beta}{2}u^2 + m_f \leq c(|u|^2 + |u|^{q+2}) + \frac{\beta}{2}|u|^2 + m_f,$$

assim, existira uma função Q_3 análoga as anteriores tal que

$$\int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(0)) dx \leq Q_3(R)$$

- Suponhamos que $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, então

$$\int_{\Omega} h u^m(0) dx \leq \|h\|_2 \|u_0^m\|_2 \leq \epsilon \|h\|_2^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|u_0^m\|_2^2 \leq \epsilon \|h\|_2^2 + \frac{1}{4\lambda_1\epsilon} \|\nabla u_0^m\|_2^2 = \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2 + \frac{1}{4} \|\nabla u_0^m\|_2^2 \quad (3.15)$$

onde a segunda desigualdade se obtêm usando a desigualdade de Young com ϵ , a terceira desigualdade é dada pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ com constante de imersão $\lambda_1 > 0$ e para ter a igualdade final só tomamos $\epsilon = \frac{1}{\lambda_1}$. Análogo aos outros casos, existe uma função Q_4 tal que

$$\int_{\Omega} hu^m(0)dx \leq Q_4(R).$$

Assim, podemos dizer que se $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, existe uma função $Q_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ crescente e independente do tempo, tal que

$$E^m(0) \leq Q(R) \quad (3.16)$$

Observação 3.10: Notemos que $Q_0(R)$, não só depende dos dados iniciais, também depende de $\|h\|, m_f, \beta, \rho, q, |\Omega|, \lambda_1$ e algumas constantes de imersões antes mencionadas.

Agora encontremos alguma relação entre $\mathcal{E}^m(t)$ e $E^m(0)$.

Notemos que como $\frac{1}{\rho+2}\|u_t^m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \geq 0$ temos

$$E^m(t) \geq \mathcal{E}^m(t) + \int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(t))dx - \int_{\Omega} hu^m(t)dx$$

ademais procedendo de maneira análoga como em (3.15) temos que

$$-\int_{\Omega} hu^m(t)dx \geq -\frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2 - \frac{1}{4}\|\nabla u^m(t)\|_2^2$$

assim, obtemos que

$$E^m(t) \geq \frac{1}{2}\mathcal{E}^m(t) + \int_{\Omega} \widehat{f}(u^m(t))dx - \frac{1}{\lambda_1}\|h\|_2^2.$$

Notemos agora que pela hipóteses (2.3), dado $\epsilon > 0$ (pequeno) existe $R > 0$ tal que

$$\frac{f(y)}{y} > -\lambda_1 + \epsilon \quad \text{se } |y| > R$$

logo, seja $\lambda = \lambda_1 - \epsilon > 0$ para ϵ o suficientemente pequeno, então, existe $C > 0$ tal que

$$f(y) \geq -\lambda y - C,$$

notemos que esta C vem dos dados referentes a $0 \leq |y| \leq R$. Integrando de 0 a u respeito a y , teremos que

$$\widehat{f}(u) \geq -\frac{\lambda}{2}u^2 - Cu,$$

agora integrando sobre Ω teremos que

$$\int_{\Omega} \widehat{f}(u) dx \geq -\frac{\lambda}{2} \|u\|_2^2 - C \|u\|_1$$

então, dada a imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, existira uma constante $\bar{\lambda} > 0$ que depende de λ e a constante de imersão, tal que

$$\int_{\Omega} \widehat{f}(u) dx \geq -\bar{\lambda} \|u\|_2^2,$$

finalmente dada a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, teremos que

$$\int_{\Omega} \widehat{f}(u) dx \geq -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1} \|\nabla u\|_2^2 \geq -\frac{2\bar{\lambda}}{\lambda_1} \mathcal{E}(t).$$

Assim, tomando $\epsilon > 0$ muito pequeno, existira uma constante fixa $\nu > 0$ tal que

$$E^m(t) \geq \nu \mathcal{E}^m(t) - \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2,$$

ou seja,

$$\mathcal{E}^m(t) \leq \frac{E^m(t) + C_h}{\nu}, \quad (3.17)$$

onde $C_h = \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2$.

Com isto, e por (3.14) e (3.16), se $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, existe uma função $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ crescente e independente do tempo, tal que

$$\mathcal{E}^m(t) \leq Q(R).$$

Com a estimativa acima concluímos que

$$u^m(t) \text{ é limitado em } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t^m(t) \text{ é limitado em } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$\eta^{t,m} \text{ é limitado em } L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}).$$

isto é, se tem as seguintes convergências fraca estrela

$$u^m \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$u_t^m \xrightarrow{*} u_t \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)),$$

$$\eta^{\bullet,m} \xrightarrow{*} \eta^\bullet \text{ em } L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M}).$$

Observação 3.11: A expressão $\eta^{\bullet,m}$ denota a função $\eta^{\bullet,m} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $\eta^{\bullet,m}(t) = \eta^{t,m}$. Análogo para $\eta^\bullet$. Esta notação se usara ao largo do trabalho cada vez que se precise.

3.1.3 Segunda estimativa

Nesta subseção queremos estimar principalmente $\int_0^t \|\nabla u_{tt}^m(s)\|_2^2 ds$ para $t \in [0, \tau]$ com $\tau > 0$ fixo.

Começaremos multiplicando a equação (3.5) por a_{mj}'' e somando em relação a j de 1 até m , assim obtemos

$$\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_{tt}^m \rangle + \|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 = -\langle u^m, u_{tt}^m \rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m \rangle_1 ds - \langle f(u^m), u_{tt}^m \rangle + \langle h, u_{tt}^m \rangle,$$

dado que $\langle |u_t^m|^\rho u_{tt}^m, u_{tt}^m \rangle \geq 0$, teremos que

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leq -\langle u^m, u_{tt}^m \rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m \rangle_1 ds - \langle f(u^m), u_{tt}^m \rangle + \langle h, u_{tt}^m \rangle.$$

Notemos que para estimar $\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2$, basta estimar cada termo do lado direito da igualdade acima.

• **Estimando $\langle u^m, u_{tt}^m \rangle_1$**

$$\langle u^m, u_{tt}^m \rangle_1 \leq \|\nabla u^m\|_2 \|\nabla u_{tt}^m\|_2.$$

• **Estimando $\int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m \rangle_1 ds$.**

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m \rangle_1 ds &= \int_0^\infty \mu(s) \left[\int_\Omega \nabla \eta^{t,m}(s) \nabla u_{tt}^m dx \right] ds \\ &\leq \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \eta^{t,m}(s)\|_2 \|\nabla u_{tt}^m\|_2 ds \\ &= \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \left(\int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \eta^{t,m}(s)\|_2 ds \right) \\ &= \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \left(\int_0^\infty \mu^{1/2} \mu^{1/2} \|\nabla \eta^{t,m}(s)\|_2 ds \right) \\ &\leq \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \left(\int_0^\infty \mu(s) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \eta^{t,m}(s)\|_2^2 ds \right)^{1/2} \\ &= k_0^{1/2} \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

Assim

$$\int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^{t,m}(s), u_{tt}^m \rangle_1 ds \leq k_0^{1/2} \|\nabla u_{tt}^m\|_2 \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}}. \quad (3.18)$$

• **Estimando $\langle f(u^m), u_{tt}^m \rangle$**

Pela observação (3.3) temos que

$$\langle f(u^m), u_{tt}^m \rangle \leq \|f(u^m)\|_{\frac{q+2}{q+1}} \|u_{tt}^m\|_{q+2} \leq C \|\nabla u_{tt}^m\|_2 (C_f^1 \|\nabla u^m\|_2 + C_f^2 \|\nabla u^m\|_2^{q+1}), \quad (3.19)$$

onde $C > 0$ é a constante da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$, pois lembremos que $q \in [0, 4)$.

• **Estimando** (h, u_{tt}^m)

$$(h, u_{tt}^m) \leq \|h\|_2 \|u_{tt}^m\|_2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2 \|\nabla u_{tt}^m\|_2.$$

Assim, a partir de estas estimativas teremos que

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leq \|\nabla u_{tt}^m\|_2 (\|\nabla u^m\|_2 + k_0^{1/2} \|\eta^{t,m}\|_{\mathcal{M}} + CC_f^1 \|\nabla u^m\|_2 + CC_f^2 \|\nabla u^m\|_2^{q+1} + \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2).$$

Analogamente como se trabalho na primeira estimativa, se $\|(u_0, v_0, \eta_0)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq R$, existe uma função $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ crescente e independente do tempo, tal que

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 + \frac{1}{2} Q(R)$$

então,

$$\|\nabla u_{tt}^m\|_2^2 \leq Q(R).$$

Agora, seja $\tau > 0$ fixo com $t \in [0, \tau]$. Integrando de 0 a t temos

$$\int_0^t \|\nabla u_{tt}^m(s)\|_2^2 ds \leq tQ(R) \leq \tau Q(R), \quad t \in [0, \tau]$$

Notemos que a cota superior $\tau Q(R)$ agora não só depende dos dados iniciais, se não que agora também depende de τ .

Com a estimativa acima concluimos que

$$(u_{tt}^m) \text{ é limitada em } L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega)),$$

ou seja, se tem a seguinte convergência fraca estrela

$$u_{tt}^m \xrightarrow{*} u_{tt} \text{ em } L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega)).$$

3.1.4 Terceira estimativa

Nesta subseção queremos estimar $\||u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}$. Esta estimativa junto com a estimativa anterior, nos dará a convergência para o termo não linear $|u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t)$. Assim, teremos que

$$\||u_t^m(t)|^\rho u_t^m(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} = \|u_t^m(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}^{\rho+1} \leq C^{\rho+1} \|\nabla u_t^m(t)\|_2^{\rho+1},$$

onde $C > 0$ é uma constante que se obtêm da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$.

Procedendo igual que a segunda estimativa, teremos que para algum $\tau > 0$ fixo se cumpre que

$$(|u_t^m|^\rho u_t^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, \tau; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)).$$

3.1.5 Passagem ao limite

Com as estimativas a priori obtidas acima, podemos passar ao limite as soluções aproximadas e garantir a existência de uma solução global fraca satisfazendo os dados iniciais, mas o problema acontece com os termos não lineares, pelo qual nesta subseção estudaremos "em que sentido" será a passagem ao limite para ditos termos. Os termos não lineares na equação são

$$f(u^m) \text{ e } |u_t^m|^\rho u_{tt}^m.$$

Alem disso, será feito um estudo da passagem ao limite para o problema aproximado da equação (2.18).

- *Limite para $|u_t^m|^\rho u_{tt}^m$.*

Como olhamos na observação (3.3), para cada $t \in [0, \tau]$, temos que $|u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t) \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$. Pela imersão compacta $W^{1,\infty}(0, \tau; H_0^1(\Omega)) \xhookrightarrow{c} C([0, \tau]; L^2(\Omega))$, passando a uma subsequencia se for necessário, teremos que

$$u_t^m \rightarrow u_t \text{ em } C([0, \tau]; L^2(\Omega)),$$

isto é pela primeira e segunda estimativa. Assim, em particular, teremos que

$$|u_t^m|^\rho u_{tt}^m \rightarrow |u_t|^\rho u_{tt} \text{ q.s. em } \Omega \times [0, \tau]$$

Alem disso, pela terceira estimativa temos que

$$(|u_t^m|^\rho u_{tt}^m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, \tau; L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega))$$

ou seja $|u_t^m|^\rho u_{tt}^m$ é uniformemente limitada em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ respeito de $t \in [0, \tau]$. Assim, pelo teorema de convergência dominada e pela definição de derivada distribucional, teremos que

$$-\frac{1}{p+1} \int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \varphi_t(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^\tau \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t) \rangle dt,$$

onde $\varphi \in D([0, \tau]; H_0^1(\Omega))$. Agora, por outro lado, temos que

$$-\frac{1}{p+1} \int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \varphi_t(t) \rangle dt = \int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \varphi(t) \rangle dt$$

então

$$\int_0^\tau \langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \varphi(t) \rangle dt \rightarrow \int_0^\tau \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t) \rangle dt.$$

Da arbitrariedade de φ , concluímos que

$$\langle |u_t^m(t)|^\rho u_{tt}^m(t), \varphi(t) \rangle \rightarrow \langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t), \varphi(t) \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ e para quase todo } t \in [0, \tau].$$

- *Limite para $f(u^m)$.*

Procederemos de maneira análoga ao anterior caso. Pelo fato que $W^{1,\infty}(0, \tau; H_0^1(\Omega)) \xhookrightarrow{c} C([0, \tau]; L^2(\Omega))$ e passando a uma subsequencia se for necessário, teremos que

$$u^m \rightarrow u \quad \text{q.s. em } \Omega \times [0, \tau],$$

agora, dado que f é continua temos que

$$f(u^m) \rightarrow f(u) \quad \text{q.s. em } \Omega \times [0, \tau].$$

Pela observação (3.3) notamos que $f(u^m)$ é uniformemente limitada em $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ respeito de $t \in [0, \tau]$, obtemos que

$$\int_0^\tau \langle f(u^m), \varphi \rangle dt \rightarrow \int_0^\tau \langle f(u), \varphi \rangle dt, \quad \varphi \in D([0, \tau]; H_0^1(\Omega)).$$

Dado que $\overline{D(\Omega)}^{H_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, por um passagem ao limite por densidade e continuidade, e dado que φ é arbitrário, temos que

$$\langle f(u^m), \varphi \rangle \rightarrow \langle f(u), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \text{ e para quase todo } t \in [0, \tau].$$

- *Tratamento do Limite para a Equação (2.18).*

Notemos que pela primeira estimativa temos que $\eta^{t,m} \in \text{dom}(T)$, e procedendo igual que a observação (3.4), a representação para $\eta^{t,m}$ é dada por

$$\eta^{t,m}(s) = \begin{cases} u^m(t) - u^m(t-s) & \text{se } 0 < s \leq t \\ \eta_0^m(s-t) + u^m(t) - u_0^m & \text{se } s > t \end{cases}$$

Ademais, como $u_0^m \rightarrow u_0$ e $\eta_0^m \rightarrow \eta_0$ fortemente, e tendo em conta novamente as convergências ao final da primeira estimativa, teremos que $\eta^{\bullet,m} \rightharpoonup \bar{\eta}^{\bullet}$ na topologia fraca em $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M})$ para certo $\bar{\eta} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M})$. Assim obtemos que

$$\bar{\eta}^t(s) = \begin{cases} u(t) - u(t-s) & \text{se } 0 < s \leq t \\ \eta_0(s-t) + u(t) - u_0 & \text{se } s > t \end{cases}$$

agora como $\eta^{\bullet,m} \xrightarrow{*} \eta^{\bullet}$ em $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{M})$, obriga a que $\bar{\eta} = \eta$. Assim η^t é uma solução suave para a equação (2.18), e em particular, dado que já temos a representação de η^t , esta cumpre a equação (3.2).

Assim, dadas as diferentes estimativas e tendo as respectivas aclarações respeito aos limites no problema aproximado, podemos garantir a existência de soluções fracas para o sistema (2.17)-(2.18), o que prova o Teorema 3.5. $\square$

3.2 Dependência contínua e unicidade das soluções fracas

Nesta seção se seguirá o trabalho feito por Conti, Marchini & Pata [11], dado que eles apresentam a prova da dependência contínua das soluções fracas com respeito aos dados iniciais e a unicidade das soluções fracas para nosso sistema (2.17)-(2.18).

Seja $\tau > 0$ fixo mas arbitrário. Dado $(u^1, u_t^1, \eta^{\bullet,1}), (u^2, u_t^2, \eta^{\bullet,2}) \in C([0, \tau], \mathcal{H})$ duas soluções fracas para o sistema (2.17)-(2.18), satisfazendo os dados iniciais

$$(u^i(0), u_t^i(0), \eta^{0,i}) = z_i \quad \forall i = 1, 2,$$

onde $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$.

Dado que queremos provar a unicidade das soluções, denotaremos a diferença de ditas soluções como

$$\bar{u} = u^1 - u^2, \quad \bar{\eta} = \eta^{\bullet,1} - \eta^{\bullet,2}.$$

Notemos que $\bar{u}, \bar{\eta} \in C([0, \tau], \mathcal{H})$ e que pela linearidade da derivada temos que $\bar{u}_t = u_t^1 - u_t^2$.

3.2.1 Dependência contínua das soluções fracas

Agora enunciaremos e demonstraremos o teorema que nos garante a dependência contínua das soluções fracas com respeito aos dados iniciais, isto va ser de suma importância para a prova da unicidade.

Teorema 3.12: *(Dependência Contínua das Soluções Fracas Com Respeito aos Dados Iniciais).*

Seja $R \geq 0$ e dadas as definições anteriores. Se $\|z_i\|_{\mathcal{H}} \leq R$ para $i = 1, 2$ então se cumpre que

$$\|\nabla \bar{u}(t)\|_2^2 + \|\nabla \bar{u}_t(t)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1 + \tau)Q(R)e^{\tau(\tau+1)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.20)$$

para todo $t \in [0, \tau]$, onde $Q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função crescente independente de $\tau > 0$.

Demonstração. Começaremos a prova introduzindo as seguintes variáveis

$$w(t) = \int_0^t u(y)dy \quad \text{e} \quad \xi^t(s) = \int_0^t \eta^y(s)dy.$$

Alem disso definimos a seguinte função $\sigma : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ tal que

$$\sigma(\nu) = \frac{1}{1+\rho} \nu |\nu|^\rho. \quad (3.21)$$

Observação 3.13:

- Se $u \in H_0^1(\Omega)$, efetivamente, $\sigma(u) \in L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ pois

$$\int_{\Omega} |\sigma(u)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}} |u|^{\rho+2} dx = \frac{1}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}} \|u\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq \frac{C}{(1+\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}} \|\nabla u\|_2^{\rho+2} \leq \infty,$$

onde $C > 0$ é a constante produto da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$.

- Igual que na observação (3.3), como $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) = (L^{\rho+2}(\Omega))'$ e dado que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, pois $\rho \in [0, 4)$, temos que $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. Assim vai ter sentido falar da expressão

$$\langle \sigma(u), \varphi \rangle := \langle \sigma(u), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Alem disso, vai estar dada por

$$\langle \sigma(u), \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \sigma(u) \varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

isto devido à caracterização das distribuição que pertencem a $L_{loc}^1(\Omega)$.

- Dado que $\rho \in [0, 4)$, a função σ é monótona. (Vide Zeidler [40] pag. 502.).
- Dado $u, v \in \mathbb{R}$ teremos que

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| \leq c_\sigma (|u|^\rho + |v|^\rho) |u - v| \quad (3.22)$$

onde $c_\sigma > 0$ é uma constante que depende de ρ . Comprovaremos o resultado apenas para o caso $\rho \in (0, 4)$, pois se $\rho = 0$ a prova é trivial. Então notemos que

$$|\sigma(u) - \sigma(v)| = \frac{1}{1+\rho} ||u|^\rho u - |v|^\rho v| = \frac{1}{\rho+1} (\rho+1) |\zeta|^\rho |u - v|,$$

onde $\zeta \in [u, v]$, isto é pelo Teorema do Valor Meio. Agora seja $\theta \in [0, 1]$ tal que $\zeta = (1 - \theta)u + \theta v$, então teremos que

$$\begin{aligned}
 |\sigma(u) - \sigma(v)| &= \frac{1}{1 + \rho} ||u|^\rho u - |v|^\rho v| \leq |(1 - \theta)u + \theta v|^\rho |u - v| \\
 &\leq 2^\rho ||u - \theta u|^\rho + |\theta v|^\rho| |u - v| \\
 &\leq 2^\rho |2^\rho |u|^\rho + \theta^\rho |u|^\rho + \theta^\rho |v|^\rho| |u - v| \\
 &\leq 2^\rho |2^\rho |u|^\rho + |u|^\rho + |v|^\rho| |u - v| \\
 &\leq 2^\rho |(2^\rho + 1)|u|^\rho + |v|^\rho| |u - v| \\
 &\leq 2^\rho (2^\rho + 1) ||u|^\rho + |v|^\rho| |u - v| \\
 &= c_\sigma ||u|^\rho + |v|^\rho| |u - v|.
 \end{aligned}$$

Com isto comprovamos o resultado.

Notemos que, integrando a equação (2.17) de 0 a t , obtemos

$$\sigma(u_t) + Aw_{tt} + Aw + \int_0^\infty \mu(s) A\xi(s) ds + \int_0^t f(u(y)) dy = th + g \quad (3.23)$$

com

$$g = Au_t(0) + \sigma(u_t(0))$$

Agora, construímos cada variável anterior para cada um das soluções $(u^1, u_t^1, \eta^{t,1})$ e $(u^2, u_t^2, \eta^{t,2})$. Assim teremos que

$$w^i(t) = \int_0^t u^i(y) dy, \quad \xi^{t,i} = \int_0^t \eta^{y,i}(s) dy, \quad \forall i = 1, 2.$$

Alem disso, denotamos por

$$\bar{w}(t) = w^1(t) - w^2(t) \quad \text{e} \quad \bar{\xi}^t = \xi^{t,1} - \xi^{t,2}.$$

Notemos que $(\bar{w}, \bar{\xi}^t)$ satisfaz o sistema

$$\sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2) + A\bar{w}_{tt} + A\bar{w} + \int_0^\infty \mu(s) A\bar{\xi}^t(s) ds + F = G, \quad (3.24)$$

$$\bar{\xi}_t^t = T\bar{\xi}^t + \bar{w}_t - \bar{u}(0) + \bar{\eta}^0. \quad (3.25)$$

com

$$F(t) = \int_0^t [f(u^1(y)) - f(u^2(y))] dy, \quad G = A\bar{u}_t(0) + \sigma(u_t^1(0)) - \sigma(u_t^2(0)).$$

Isto é fácil de comprovar, so basta restar a equação (3.23) e (2.18) nas respectivas variáveis referentes a cada solução fraca, e trocar pelas variáveis $\bar{w}$ e $\bar{\xi}^t$.

Agora, aplicando $\bar{w}_{tt} = u_t^1 - u_t^2$ na equação (3.24), e pela monotonia da função σ , obtemos

$$\|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2 \leq -\langle \bar{w}, \bar{w}_{tt} \rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s) \langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt} \rangle_1 ds - \langle F, \bar{w}_{tt} \rangle + \langle G, \bar{w}_{tt} \rangle \quad (3.26)$$

Análogo à prova da existência de soluções, vamos a definir uma "Energia Auxiliar" para o problema.

Definição 3.14: Definimos o funcional

$$\Lambda(t) := \frac{1}{2} \|\nabla \bar{w}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \bar{w}_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2 = \|(\bar{w}(t), \bar{w}_t(t), \bar{\xi}^t)\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.27)$$

Dito funcional sera chamado "Energia Auxiliar" para o sistema (3.24)-(3.25).

Neste ponto partiremos a prova do teorema em três etapas para poder estimar cada termo da expressão (3.20).

Prova do Teorema: Estimção para $\|\nabla \bar{u}(t)\|_2^2$

Notemos que

$$\frac{d}{dt} \Lambda(t) = \langle \bar{w}(t), \bar{w}_t(t) \rangle_1 + \langle \bar{w}_{tt}(t), \bar{w}_t(t) \rangle_1 + \langle \bar{\xi}_t^t, \bar{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}} \quad (3.28)$$

Então, aplicando $\bar{w}_{tt}$ na equação (3.24), aplicando $\bar{\xi}^t$ na equação (3.25) e pela igualdade (3.28), obtemos que

$$\frac{d}{dt} \Lambda(t) = \langle T \bar{\xi}^t, \bar{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}} - \langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), \bar{w}_t \rangle - \langle F, \bar{w}_t \rangle + \langle G, \bar{w}_t \rangle + \langle \bar{\eta}^0 - \bar{u}(0), \bar{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}}. \quad (3.29)$$

Ademais, notemos que

$$-\frac{d}{dt} \langle F, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle + \langle F_t, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle = -\langle F, \bar{w}_t \rangle - \langle F, \bar{w}_{tt} \rangle \quad (3.30)$$

$$\frac{d}{dt} \langle G, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle = \langle G, \bar{w}_t + \bar{w}_{tt} \rangle \quad (3.31)$$

agora, pelo resultado (2.13), e tendo em conta as igualdades (3.30)-(3.31), temos que a equação (3.29) se pode escrever como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Lambda(t) + \|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2 &\leq -\langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), \bar{w}_t \rangle - \frac{d}{dt} \langle F, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle + \langle F_t, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle \\ &\quad + \frac{d}{dt} \langle G, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle + \langle \bar{\eta}^0 - \bar{u}(0), \bar{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}} - \langle \bar{w}, \bar{w}_{tt} \rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s) \langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt} \rangle_1 ds. \end{aligned}$$

Por outro lado, é fácil ver que pela hipóteses temos que existe uma função $Q_0 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, crescente, independente do tempo, tal que

$$\|\nabla u^i\|_2^2 + \|\nabla u_t^i\|_2^2 + \|\eta^{t,i}\|_{\mathcal{M}}^2 \leq Q_0(R) \quad \forall i = 1, 2.$$

Observação 3.15: Para não sobre carregar de notações o trabalho, a partir de agora denotaremos por $Q(R)$ a qualquer função crescente, independente do tempo, que contenha a $Q_0(R)$.

Agora começaremos a estimar alguns termos da desigualdade acima

• **Estimativa para** $\langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), \bar{w}_t \rangle$

Pela observação (3.13), pelo fato de que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+2}(\Omega)$ e como $\bar{w}_{tt} = u_t^1 - u_t^2$, teremos que,

$$\begin{aligned} \langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), u_t^1 - u_t^2 \rangle &\leq c_\sigma \int_{\Omega} (|u_t^1|^\rho + |u_t^2|^\rho) |u_t^1 - u_t^2| |\bar{w}_t| dx \\ &= c_\sigma \int_{\Omega} |u_t^1|^\rho |u_t^1 - u_t^2| |\bar{w}_t| dx + c_\sigma \int_{\Omega} |u_t^2|^\rho |u_t^1 - u_t^2| |\bar{w}_t| dx \\ &\leq c_\sigma \|u_t^1\|_{\rho+2}^\rho \|u_t^1 - u_t^2\|_{\rho+2} \|\bar{w}_t\|_{\rho+2} \\ &\quad + c_\sigma \|u_t^2\|_{\rho+2}^\rho \|u_t^1 - u_t^2\|_{\rho+2} \|\bar{w}_t\|_{\rho+2} \\ &\leq Q(R) \|\nabla u_t^1 - \nabla u_t^2\|_2 \|\nabla \bar{w}_t\|_2 + Q(R) \|\nabla u_t^1 - \nabla u_t^2\|_2 \|\nabla \bar{w}_t\|_2 \\ &\leq Q(R) \|\nabla u_t^1 - \nabla u_t^2\|_2 \|\nabla \bar{w}_t\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2 + Q(R) \|\nabla \bar{w}_t\|_2^2 \end{aligned}$$

Assim vemos que:

$$\langle \sigma(u_t^1) - \sigma(u_t^2), u_t^1 - u_t^2 \rangle \leq \frac{1}{2} \|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2 + Q(R) \|\nabla \bar{w}_t\|_2^2 \quad (3.32)$$

Observação 3.16: Na estimativa acima, foi fortemente usado o fato de que

$$\frac{\rho}{\rho+2} + \frac{1}{\rho+2} + \frac{1}{\rho+2} = 1. \quad (3.33)$$

Esta igualdade vai ser usada ao largo de todo o trabalho.

• **Estimativa para** $\langle \bar{\eta}^0 - \bar{u}(0), \bar{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}}$

$$\langle \bar{\eta}^0 - \bar{u}(0), \bar{\xi}^t \rangle_{\mathcal{M}} \leq \|\nabla \bar{u}(0)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2 + c \|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2.$$

Onde $c > 0$ é uma constante produto da desigualdade de Young com épsilon.

- **Estimativa para** $\langle \bar{w}, \bar{w}_{tt} \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt} \rangle_1 ds$

$$\begin{aligned} \langle \bar{w}, \bar{w}_{tt} \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt} \rangle_1 ds &\leq (\|\nabla \bar{w}\|_2 + k_0^{\frac{1}{2}} \|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}) \|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2 \\ &\leq c(\|\nabla \bar{w}\|_2^2 + \|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2) + \frac{1}{2} \|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\langle \bar{w}, \bar{w}_{tt} \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \bar{\xi}^t(s), \bar{w}_{tt} \rangle_1 ds \leq c(\|\nabla \bar{w}\|_2^2 + \|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}}^2) + \frac{1}{2} \|\nabla \bar{w}_{tt}\|_2^2 \quad (3.34)$$

Onde $c > 0$ é uma constante produto da desigualdade de Young que também depende de k_0 .

Estas dois ultimas estimativas se fazem análogo ao processo visto na seção anterior, na "Segunda Estimativa".

Dadas estas estimativas, nossa desigualdade se pode escrever como

$$\frac{d}{dt} \Lambda(t) \leq Q(R) \Lambda(t) - \frac{d}{dt} \langle F, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle + \frac{d}{dt} \langle G, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle + \langle F_t, \bar{w} + \bar{w}_t \rangle + \|\nabla \bar{u}(0)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2 \quad (3.35)$$

Agora, tomemos $s \in [0, \tau]$ tal que integremos (3.35) no intervalo $(0, s)$ respeito de t , então teremos que

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &\leq Q(R) \int_0^s \Lambda(t) dt - \langle F(s), \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s) \rangle + \langle G, \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s) \rangle \\ &\quad - \langle G, \bar{u}(0) \rangle + \int_0^s \langle F_t(t), \bar{w}(t) + \bar{w}_t(t) \rangle dt + (1+s) \|\nabla \bar{u}(0)\|_2^2 + s \|\bar{\eta}^0\|_{\mathcal{M}}^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Mas, notemos que

$$\begin{aligned} \langle F(s), \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s) \rangle &\leq \|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\nabla \bar{w}(s) + \nabla \bar{w}_t(s)\|_2 \\ &\leq \epsilon \|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\epsilon} (\|\nabla \bar{w}(s)\|_2^2 + \|\nabla \bar{w}_t(s)\|_2^2) \\ &\leq \epsilon \|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\epsilon} \Lambda(s), \end{aligned}$$

com $\epsilon > 0$ da desigualdade de Young com épsilon. Seja $\delta > 0$ então, procedendo de maneira análoga teremos que

$$\langle G, \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s) \rangle \leq \delta \|G(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{\delta} \Lambda(s).$$

Assim, ajustando os valores para ϵ e δ temos que

$$\begin{aligned} \langle F(s), \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s) \rangle + \langle G, \bar{w}(s) + \bar{w}_t(s) \rangle - \langle G, \bar{u}(0) \rangle &\leq c \|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + c \|G\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \Lambda(s) + c \|\nabla \bar{u}(0)\|_2^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $c > 0$ é uma constante que depende dos valores escolhidos para ϵ e δ de tal maneira que o coeficiente de $\Lambda(s)$ seja $\frac{1}{2}$.

Substituindo (3.37) em (3.2.1), obtemos que

$$\begin{aligned} \Lambda(s) &\leq Q(R) \int_0^s \Lambda(t) dt + c \|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + c \|G\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^s \langle F_t(t), \bar{w}(t) + \bar{w}_t(t) \rangle dt + c(1+s) \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Novamente, vamos a estimar termo por termo do lado direito da desigualdade acima.

• **Estimativa para $\|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$**

Notemos que como $q \in [0, 4)$, pela hipóteses (2.2) e pela imersão $L^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} \|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^{\frac{q+2}{q+1}} &\leq C \|F(s)\|_{\frac{q+2}{q+1}}^{\frac{q+2}{q+1}} \\ &\leq C \left[\int_{\Omega} \left(\int_0^s c |u^1(y) - u^2(y)| (1 + |u^1(y)|^q + |u^2(y)|^q) dy \right)^{\frac{q+2}{q+1}} dx \right. \\ &\leq C s^{\frac{1}{q+1}} c^{\frac{q+2}{q+1}} \int_0^s \int_{\Omega} (1 + |u^1(y)|^q + |u^2(y)|^q)^{\frac{q+2}{q+1}} |u^1(y) - u^2(y)|^{\frac{q+2}{q+1}} dx dy \\ &\leq C s^{\frac{1}{q+1}} c^{\frac{q+2}{q+1}} \int_0^s \left(\int_{\Omega} (1 + |u^1(y)|^q + |u^2(y)|^q)^{\frac{q+2}{q+1} \frac{q+1}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |\bar{u}(y)|^{q+2} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dy \\ &\leq s^{\frac{1}{q+1}} Q(R) \int_0^s \|\nabla \bar{u}(y)\|_2^{\frac{q+2}{q+1}} dy, \end{aligned}$$

onde, $C > 0$ é a constante da imersão $L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ e $c > 0$ vem da hipóteses (2.2). Notemos também que a ultima desigualdade se deve a que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$. Além disso, $Q(R)$ depende de $c, C, q, |\Omega|, R$.

Agora, como $\frac{2}{q+2} < 1$

$$\begin{aligned} \|F(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 &\leq s^{\frac{2}{q+2}} Q(R) \left(\int_0^s \|\nabla \bar{u}(y)\|_2^{\frac{q+2}{q+1}} dy \right)^{\frac{2(q+1)}{q+2}} \\ &\leq s Q(R) \int_0^s \|\nabla \bar{u}(y)\|_2^2 dy \\ &\leq s Q(R) \int_0^s \Lambda(y) dy. \end{aligned}$$

- **Estimativa para** $\|G\|_{H^{-1}(\Omega)}^2$

Repetindo as contas da estimativa (3.32), teremos que

$$\begin{aligned} \|\sigma(u_t^1(0)) - \sigma(u_t^2(0))\|_{\frac{\frac{\rho+2}{\rho+1}}{\frac{\rho+2}{\rho+1}}} &\leq c_\sigma \int_\Omega (|u_t^1(0)|^\rho + |u_t^2(0)|^\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} |\bar{u}_t(0)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx \\ &\leq Q(R) \|\nabla \bar{u}_t(0)\|_2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}. \end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$\|G\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq Q(R) \|\nabla \bar{u}_t(0)\|_2^2$$

- **Estimativa para** $\int_0^s \langle F_t(t), \bar{w}(t) + \bar{w}_t(t) \rangle dt$

Razonando igual que as anteriores estimativas, obtemos que

$$\|F_t\|_{\frac{\frac{\rho+2}{\rho+1}}{\frac{\rho+2}{\rho+1}}} \leq c \int_\Omega (1 + |u^1|^\rho + |u^2|^\rho)^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} |\bar{u}|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx \leq Q(R) \|\nabla \bar{u}\|_2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}$$

onde $c > 0$ é a constante da hipóteses (2.2).

Então teremos que

$$\begin{aligned} \int_0^s \langle F_t(t), \bar{w}(t) + \bar{w}_t(t) \rangle dt &\leq \int_0^s \|F_t(t)\|_{\frac{\rho+2}{\rho+1}} (\|\bar{w}(t)\|_{\rho+2} + \|\bar{w}_t(t)\|_{\rho+2}) dt \\ &\leq Q(R) \int_0^s \Lambda(t) dt. \end{aligned}$$

Assim, substituindo as estimativas acima na desigualdade (3.38), teremos que

$$\Lambda(s) \leq (1+s)Q(R) \int_0^s \Lambda(t) dt + (1+s)Q(R) \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall s \in [0, \tau].$$

Finalmente aplicando a desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$\Lambda(s) \leq (1 + \tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall s \in [0, \tau]. \quad (3.39)$$

Em particular,

$$\|\nabla \bar{u}(s)\|_2^2 \leq (1 + \tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall s \in [0, \tau].$$

Prova do Teorema: Estimção para $\|\nabla \bar{u}_t\|_2^2$

A estimção para $\bar{u}_t$ vem diretamente de igualdade (3.26), pois $\bar{w}_{tt} = u_t^1 - u_t^2 = \bar{u}_t$. Assim, tendo em conta dita igualdade e a estimativa (3.34), teremos que

$$\|\nabla \bar{u}_t\|_2^2 \leq \frac{1}{2}(\|\nabla \bar{w}\|_2 + k_0^{\frac{1}{2}}\|\bar{\xi}^t\|_{\mathcal{M}} + \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|G\|_{H^{-1}(\Omega)})^2 + \frac{1}{2}\|\nabla \bar{u}_t\|_2^2$$

e pela desigualdade (3.39) e as estimativas sobre $\|F\|_{H^{-1}(\Omega)}$ e $\|G\|_{H^{-1}(\Omega)}$, obtemos

$$\|\nabla \bar{u}_t(s)\|_2^2 \leq (1 + \tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall s \in [0, \tau].$$

Prova do Teorema: Estimção para $\|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2$

Finalmente, para estimar $\|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2$, primeiro apliquemos $\bar{\eta}$ na equação

$$\bar{\eta}_t = T\bar{\eta} + \bar{u}_t.$$

Procedendo de maneira análoga que na seção anterior, teremos que

$$\frac{d}{dt}\|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}}^2 = \langle T\bar{\eta}, \bar{\eta} \rangle_{\mathcal{M}} + \langle \bar{u}_t, \bar{\eta} \rangle_{\mathcal{M}} \leq k_0^{\frac{1}{2}}\|\nabla \bar{u}_t\|_2\|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}} \leq \|\bar{\eta}\|_{\mathcal{M}}^2 + c\|\nabla \bar{u}_t\|_2^2, \quad (3.40)$$

onde $c > 0$ é uma constante que se obtém da desigualdade de Young com épsilon.

Aplicando a desigualdade de Gronwall em (3.40), e tendo em conta a estimativa sobre $\|\nabla \bar{u}_t\|_2$, obtemos que

$$\|\bar{\eta}^s\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1 + \tau)Q(R)e^{\tau(1+\tau)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall s \in [0, \tau].$$

Assim, somando todas as estimativas teremos que

$$\|\nabla \bar{u}(s)\|_2^2 + \|\nabla \bar{u}_t(s)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^s\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1 + \tau)Q(R)e^{\tau(\tau+1)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall s \in [0, \tau],$$

o que prova o teorema. □

3.2.2 Unicidade das soluções fracas

Teorema 3.17: (*Unicidade das Soluções Fracas*). *Seja $\tau > 0$ fixo mas arbitrário. Dado o sistema (2.17)-(2.18), com condições de fronteira (2.19) e dados iniciais (2.20). Suponha certa as hipóteses (H1) - (H4) . Se os dados iniciais $(u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ e $h \in L^2(\Omega)$, então o sistema (2.17)-(2.18) possui uma única solução fraca para todo $t \in [0, \tau]$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.5, se tem que existem soluções fracas para o sistema com dados iniciais (2.20).

Sejam (u, u_t, η^t) e (v, v_t, ξ^t) dois soluções para o sistema (2.17)-(2.18) com dados iniciais (2.20).

Assim, pelo Teorema 3.12 temos que

$$\|\nabla \bar{u}(t)\|_2^2 + \|\nabla \bar{u}_t(t)\|_2^2 + \|\bar{\eta}^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leq (1 + \tau)Q(R)e^{\tau(\tau+1)Q(R)}\|z_1 - z_2\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall t \in [0, \tau].$$

onde

$$\bar{u} = u - v, \quad \bar{\eta}^t = \eta^t - \xi^t, \quad z_1 = (u_0, v_0, \eta_0) = z_2.$$

Então, é claro que $(u, u_t, \eta^t) = (v, v_t, \xi^t)$ para todo $t \in [0, \tau]$, o que prova a unicidade. $\square$

Existência de atrator global

Neste Capítulo apresentaremos uma das nossas principais contribuições, provaremos a existência de um atrator global para o problema (2.17)-(2.18). Começaremos o capítulo definindo o C_0 -semigrupo associado a dito sistema,

Teorema 4.1: *Dado o sistema (2.17)-(2.18) seu operador solução dado por $S(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tal que*

$$S(t)(u_0, v_0, \eta_0) = (u(t), u_t(t), \eta^t), \quad t \geq 0,$$

onde $(u(t), u_t(t), \eta^t)$ é uma solução fraca correspondente ao sistema (2.17)-(2.18), define um C_0 -semigrupo.

Demonstração. Notemos que pelo capítulo anterior, dito operador solução $S(t) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ satisfaz as propriedades de semigrupo, ou seja

$$S(0) = I \quad \text{e} \quad S(t+s) = S(t)S(s), \quad s, t \geq 0,$$

isto é devido à unicidade das soluções fracas sempre que se fixa o dado inicial.

Agora provaremos que $S(t)$ é fortemente contínuo.

Seja $z = (u_0, v_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$ então dado que $S(t)z = (u, u_t, \eta^t)$ tal que $(u(0), u_t(0), \eta^0) = z = (u_0, v_0, \eta_0)$ e como $(u, u_t, \eta^t) \in C([0, \tau], \mathcal{H})$ para todo $\tau > 0$ (vide (3.4)), e pela dependência contínua respeito aos dados iniciais, teremos que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)z - z\|_{\mathcal{H}} = 0,$$

o que prova o teorema. □

Notemos que pelo teorema anterior teremos que o par $(\mathcal{H}, S(t))$ é um sistema dinâmico correspondente ao sistema (2.17)-(2.18).

Teorema 4.2: *(Existência de Atrator Global).*

Dado o sistema (2.17)-(2.18). Suponha certa as hipóteses (H1) - (H4) com $h \in L^2(\Omega)$, então o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondente a dito sistema possui atrator global.

Demonstração. O método usado para a prova do atrator é dado pelo Teorema 1.28, o que reduz-se a provar que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ seja dissipativo e assintoticamente compacto.

Para provar isto, dividiremos a prova em três etapas. Primeiro provaremos a existência de um conjunto absorvente limitado para o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$, isto garante que dito sistema é dissipativo.

Na segunda etapa se mostrara um dos resultados mais importantes de todo o trabalho, se provará que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ cumpre uma desigualdade de estabilização, isto ajudara a provar que $(\mathcal{H}, S(t))$ é assintoticamente regular.

Finalmente na terceira etapa provaremos a compacidade assintótica, para o qual dividiremos a prova em dois resultados, o primeiro consistirá em provar que o sistema é assintoticamente regular, isto vai ser possível pela desigualdade de estabilização que se prova na segunda etapa e os Teoremas 1.31 e 1.17. No segundo resultado provaremos diretamente a compacidade assintótica pelo Teorema 1.30.

Observação 4.3: Para facilitar as contas se terá as seguintes considerações.

- Omitiremos a variável temporal t . Só se colocará em casos onde se tenha alguma confusão.
- Denota-se por C a qualquer constante genérica que dependa de alguma imersão.
- Dado que $\rho \in [0, 4)$, $q \in [0, 4)$ e $2^* = 6$ se tem as seguintes imersões

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega), \quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega).$$

- Dado que $\frac{p}{p+2} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+2} = 1$ para $p = \rho$ o $p = q$, se usara muito a desigualdade de Holder generalizada com ditos expoentes diretamente. Quando seja necessário se colocará em evidencia a soma anterior.
- Procedendo igual que no Capítulo 3, na prova da Primeira Estimativa (vide (3.17), (3.14) e (3.16)), teremos que se cumpre

$$\begin{aligned} 2\mathcal{E}(t) &= \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla u_t(t)\|_2^2 + \|\eta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leq \frac{2E(t) + 2C_h}{\nu} \\ &\leq \frac{2E(0) + 2C_h}{\nu} \\ &\leq C_{0\nu} + C_{h\nu}, \end{aligned}$$

onde $C_h = \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2$, $C_{h\nu}$ é um valor genérico positivo que depende de $\|h\|_2$, λ_1 e ν , e $C_{0\nu}$ um valor genérico positivo que depende dos dados iniciais e de ν , com $\nu > 0$ um valor fixo que se obtêm da hipóteses (2.3).

4.1 Dissipatividade

Proposição 4.4: *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondente ao sistema (2.17)-(2.18) possui um conjunto absorvente limitado.*

Demonstração. Seja o funcional $J : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$J(t) := E(t) + \epsilon\psi(t), \quad \epsilon > 0,$$

onde $E(t)$ é energia do sistema definido em (3.12) e ψ é dado por

$$\psi(t) = \frac{1}{\rho+1} \int_{\Omega} |u_t(t)|^\rho u_t(t) u(t) dx + \langle u_t(t), u(t) \rangle_1.$$

Observação 4.5: Análogo a como se provou na observação (3.3), a integral $\int_{\Omega} |u_t(t)|^\rho u_t(t) u(t) dx$ no operador $\psi(t)$ é entendida como dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Esta observação foi primeiramente colocada no trabalho de Cavalcanti, Domingos Cavalcanti & Ferreira [6].

Lema 4.6: *Existe um $\epsilon_0 > 0$, que depende dos dados iniciais (2.20) tal que*

$$\frac{1}{2}E(t) - \frac{C_h}{2} \leq J(t) \leq \frac{3}{2}E(t) + \frac{C_h}{2}, \quad t \geq 0, \epsilon \in (0, \epsilon_0],$$

onde $C_h = \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2 > 0$.

Demonstração.

- Analisemos $|\psi(t)|$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} |u_t(t)|^{\rho} u_t(t) u(t) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |u_t|^{\rho} |u_t| |u| dx \\
 &\leq \left(\int_{\Omega} |u_t|^{\rho+2} dx \right)^{\frac{\rho}{\rho+2}} \left(\int_{\Omega} |u_t|^{\rho+2} dx \right)^{\frac{1}{\rho+2}} \left(\int_{\Omega} |u|^{\rho+2} dx \right)^{\frac{1}{\rho+2}} \\
 &\leq C \|\nabla u_t\|_2^{\rho} \|\nabla u_t\|_2 \|\nabla u\|_2 \\
 &\leq C(C_{0\nu} + C_{h\nu})^{\rho/2} \|\nabla u_t\|_2 \|\nabla u\|_2 \\
 &\leq \frac{(C_{0\nu} + C_{h\nu})^{\rho}}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{C^2}{2} \|\nabla u\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)| &\leq \frac{(C_{0\nu} + C_{h\nu})^{\rho}}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{C^2}{2} \|\nabla u\|_2^2 + |\langle u_t, u \rangle_1| \\
 &\leq \frac{(C_{0\nu} + C_{h\nu})^{\rho}}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{C^2}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 \\
 &= \left(\frac{(C_{0\nu} + C_{h\nu})^{\rho} + 1}{2} \right) \|\nabla u_t\|_2^2 + \left(\frac{C^2 + 1}{2} \right) \|\nabla u\|_2^2 \\
 &\leq \frac{C_1}{2} (\|\nabla u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2) \\
 &\leq C_1(\mathcal{E}(t)) \\
 &\leq C_1 \left(\frac{E(t) + C_h}{\nu} \right),
 \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{(C_{0\nu} + C_{h\nu})^{\rho}, C^2 + 1\}$. Tomando $\epsilon_0 = \min\{\frac{\nu}{2C_1}, 1\}$ então teremos que

$$|\epsilon\psi(t)| \leq \frac{1}{2}E(t) + \frac{C_h}{2}, \quad \forall \epsilon \in (0, \epsilon_0].$$

Assim temos que

$$-\frac{1}{2}E(t) - \frac{C_h}{2} \leq \epsilon\psi(t) \leq \frac{1}{2}E(t) + \frac{C_h}{2},$$

isto é,

$$\frac{1}{2}E(t) - \frac{C_h}{2} \leq J(t) \leq \frac{3}{2}E(t) + \frac{C_h}{2}, \quad t \geq 0, \epsilon \in (0, \epsilon_0].$$

□

Lema 4.7: *Existe uma constante $C_0 > 0$ que depende dos dados iniciais, m_f e $|\Omega|$ tal que*

$$\psi'(t) \leq -E(t) - C_0 \int_0^{\infty} \mu'(s) \|\nabla \eta^t(s)\|_2^2 ds + C_0, \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Como

$$\psi(t) = \frac{1}{\rho+1} \int_{\Omega} |u_t|^\rho u_t u dx + \langle u_t, u \rangle_1$$

então teremos que

$$\psi'(t) = \int_{\Omega} (|u_t|^\rho u_{tt} + Au_{tt}) u dx + \frac{1}{\rho+1} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|\nabla u_t\|_2^2.$$

Substituindo na equação (2.17) teremos que

$$\int_{\Omega} (|u_t|^\rho u_{tt} + Au_{tt}) u dx = -\|\nabla u\|_2^2 - \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^t(s), u \rangle_1 ds + (h, u) - \int_{\Omega} f(u) u dx,$$

Procedendo de maneira análoga a (3.18) e aplicando a desigualdade de Young com $\epsilon = 2$ teremos que

$$\int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^t(s), u \rangle_1 ds \leq \frac{1}{8} \|\nabla u\|_2^2 + 2k_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2. \quad (4.1)$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned} -\|\nabla u\|_2^2 - \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta^t(s), u \rangle_1 ds + (h, u) - \int_{\Omega} f(u) u dx &\leq \frac{1}{8} \|\nabla u\|_2^2 + 2k_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 - \|\nabla u\|_2^2 \\ &\quad + (h, u) - \int_{\Omega} f(u) u dx, \end{aligned}$$

e comparando com $\psi'(t)$ temos

$$\psi'(t) \leq -\frac{7}{8} \|\nabla u\|_2^2 + 2k_0 \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + (h, u) - \int_{\Omega} f(u) u dx + \frac{1}{\rho+1} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \|\nabla u_t\|_2^2.$$

Agora, somando e restando $E(t)$ obtemos

$$\psi'(t) \leq -E(t) - \frac{3}{8} \|\nabla u\|_2^2 + \left(\frac{1}{2} + 2k_0\right) \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + \langle \widehat{f}(u), 1 \rangle - \int_{\Omega} f(u) u dx + \frac{2}{\rho+1} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{3}{2} \|\nabla u_t\|_2^2. \quad (4.2)$$

Por outro lado, pela hipóteses (2.4) e pela observação (1.13) temos que

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}(u), 1 \rangle - \int_{\Omega} f(u) u dx &= \int_{\Omega} (\widehat{f}(u) - f(u) u) dx \\ &\leq \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} u^2 dx + m_f |\Omega| \\ &= \frac{\beta}{2\lambda_1} \|\nabla u\|_2^2 + m_f |\Omega|, \end{aligned}$$

alem disso, como $\beta \in (0, \lambda_1)$ então

$$\langle \widehat{f}(u), 1 \rangle - \int_{\Omega} f(u) u dx \leq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + m_f |\Omega|.$$

Substituindo isto em (4.2), e como $-\frac{7}{8} + \frac{1}{2} < 0$ obtemos

$$\psi'(t) \leq -E(t) + \left(\frac{1}{2} + 2k_0\right) \|\eta\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{2}{\rho+1} \|u_t\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{3}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 + m_f |\Omega|.$$

Agora, pela hipóteses (2.7) e pela imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$ teremos

$$\psi'(t) \leq -E(t) - \frac{4k_0+1}{k_1} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta^t(s)\|_2^2 ds + C \|\nabla u_t\|_2^2 + m_f |\Omega|.$$

O que é equivalente a

$$\psi'(t) \leq -E(t) - \frac{4k_0+1}{k_1} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta^t(s)\|_2^2 ds + C(C_{0\nu} + C_{h\nu}) + m_f |\Omega|,$$

Finalmente, como $\mu'(s) \leq 0$ pela hipóteses (2.5) e tomando $C_0 = \max\{\frac{4k_0+1}{k_1}, C(C_{0\nu} + C_{h\nu}) + m_f |\Omega|\}$, obtemos que

$$\psi'(t) \leq -E(t) - C_0 \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta^t(s)\|_2^2 ds + C_0, \quad t \geq 0.$$

□

Lema 4.8: Dado $E(t)$ como em (3.12), então se cumpre a seguinte igualdade

$$E'(t) = \langle T\eta^t, \eta^t \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta^t(s)\|_2^2 ds.$$

Demonstração. Notemos que de (3.13) e do Teorema (2.7) temos que

$$E'(t) = \langle T\eta^t, \eta^t \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta^t(s)\|_{\mathbb{R}^3}^2 ds dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta^t(s)\|_2^2 ds,$$

o que prova o Lema. □

Conclusão.

Pelos Lemas (4.7)-(4.8) temos que

$$J'(t) = E'(t) + \epsilon \psi'(t) \leq -\epsilon E(t) + \left(\frac{1}{2} - \epsilon C_0\right) \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \eta^t(s)\|_2^2 ds + \epsilon C_0, \quad \epsilon > 0,$$

alem disso, do Lema (4.6) e tomando $\epsilon \in (0, \min\{\frac{1}{2C_0}, \epsilon_0\}]$, obtemos

$$J'(t) \leq -\frac{2\epsilon}{3}J(t) + \frac{\epsilon C_h}{3} + \epsilon C_0.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall acima teremos que

$$J(t) \leq J(0)e^{-\frac{2\epsilon t}{3}} + \left(\frac{C_h\epsilon}{3} + \epsilon C_0\right) \int_0^t e^{-\frac{2\epsilon(t-s)}{3}} ds = \left(J(0) - \frac{C_h + 3C_0}{2}\right)e^{-\frac{2\epsilon t}{3}} + \frac{C_h + 3C_0}{2}. \quad (4.3)$$

Por outro lado, do Lema (4.6) e dado que $\frac{3C_0}{2} > 0$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}E(t) - \frac{C_h}{2} &\leq J(t), \\ J(0) &\leq \frac{3}{2}E(0) + \frac{C_h}{2} + \frac{3C_0}{2}, \end{aligned}$$

substituindo isto na desigualdade (4.3) se obterá

$$\frac{1}{2}E(t) \leq \frac{3}{2}E(0)e^{-\frac{2\epsilon t}{3}} + \frac{2C_h + 3C_0}{2}.$$

Como $\nu\mathcal{E}(t) - C_h \leq E(t)$ (vide (3.17)), com $\nu > 0$ um valor fixo, teremos que

$$\|(u(t), u_t(t), \eta^t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{E}(t) \leq \frac{3}{\nu}E(0)e^{-\frac{2\epsilon t}{3}} + \frac{3(C_h + C_0)}{\nu}.$$

Com isto, concluímos que qualquer bola fechada de centro em 0 e raio R , que denotaremos por $\overline{B}_R(0)$, onde $R > (1 + \frac{3(C_h + C_0)}{\nu})^{\frac{1}{2}}$, é um conjunto absorvente limitado do sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$, pois, dado $B \subset \mathcal{H}$ limitado, existe $T_B > 0$ grande tal que

$$\frac{3}{\nu}E(0)e^{-\frac{2\epsilon t}{3}} < 1, \quad \forall t > T_B.$$

Logo, $S(t)B \in \overline{B}_R(0)$ se $t > T_B$.

O que prova a Proposição (4.4) e pelo tanto o sistema $(\mathcal{H}, S(t))$ é dissipativo.

□

4.2 Desigualdade de estabilização

Nesta seção provaremos uma desigualdade de estabilização para duas soluções fracas do sistema (2.17)-(2.18) com diferentes dados iniciais. Para a prova construiremos um novo operador baseado no trabalho de Messaoudi & Tatar [25] e Araujo, Ma & Qin [2].

Proposição 4.9: *Dado um conjunto limitado $B \subset \mathcal{H}$, sejam $z_1 = (u, u_t, \eta^t)$ e $z_2 = (v, v_t, \xi^t)$ duas soluções fracas para o sistema (2.17)-(2.18) tal que $z_1(0) = (u_0, u_1, \eta_0)$ e $z_2(0) = (v_0, v_1, \xi_0)$ pertencem a B , então*

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_B e^{-\vartheta t} + C_B \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} (1 + \|\nabla u_{tt}(t)\|_2 + \|\nabla v_{tt}(t)\|_2) (\|w(t)\|_{p+2} + \|w_t(t)\|_{p+2}) ds,$$

onde $w = u - v$, ϑ e C_B constantes positivas que dependem de B , e $p = \max\{\rho, q\}$.

Demonstração. Seja $\zeta^t = \eta^t - \xi^t$, então notemos que o par (w, ζ) satisfaz o sistema

$$Aw + Aw_{tt} + \int_0^\infty \mu(s) A\zeta^t(s) ds = -|u_t|^\rho u_{tt} + |v_t|^\rho v_{tt} - f(u) + f(v), \quad (4.4)$$

$$\zeta_t^t = -\zeta_s^t + w_t, \quad (4.5)$$

com condições iniciais

$$w(0) = u(0) - v(0), \quad w_t(0) = u_1 - v_1, \quad \zeta^0 = \eta_0 - \xi_0. \quad (4.6)$$

Análogo aos anteriores capítulos, definimos a "Energia Auxiliar" para o sistema (4.4)-(4.5) dada por

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{2} \|\nabla w(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2.$$

Alem disso, definimos o funcional $\Upsilon : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\Upsilon(t) = \delta \mathcal{L}(t) + \epsilon \chi(t) + \kappa(t),$$

onde $\epsilon, \delta > 0$ serão fixados posteriormente, e

$$\chi(t) = \langle w_t, w \rangle_1, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \kappa(t) = & - \int_0^\infty \mu(s) \langle w_t(t), \zeta^t(s) \rangle_1 ds - \int_0^\infty \mu(s) \left(\frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t) \zeta^t(s) dx \right) ds \\ & + \int_0^\infty \mu(s) \left(\frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |v_t(t)|^\rho v_t(t) \zeta^t(s) dx \right) ds. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Observação 4.10: Ao igual que a observação (4.5), as integrais em $\kappa(t)$ são entendidas como dualidade entre $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

Lema 4.11: *Existem constantes $\beta_1, \beta_2, \delta_0 > 0$ tal que*

$$\beta_1 \mathcal{L}(t) \leq \Upsilon(t) \leq \beta_2 \mathcal{L}(t), \quad t \geq 0, \quad 0 < \epsilon \leq \frac{k_0}{2}, \quad \delta > \delta_0,$$

onde k_0 é dado pela hipóteses (2.6).

Demonstração. Faremos a prova em duas etapas:

• **Estimando $|\epsilon\chi(t)|$**

$$|\chi(t)| = |\langle w_t(t), w(t) \rangle_1| \leq \frac{1}{2} \|\nabla w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla w(t)\|_2^2 \leq \mathcal{L}(t),$$

então para $0 < \epsilon \leq \frac{k_0}{2}$ temos

$$|\epsilon\chi(t)| \leq \frac{k_0}{2} \mathcal{L}(t). \quad (4.9)$$

• **Estimando $|\kappa(t)|$**

Notemos que ao igual que (4.1), aplicando a desigualdade de Young em (3.18) obtemos que

$$\left| - \int_0^\infty \mu(s) \langle w_t(t), \zeta^t(s) \rangle_1 ds \right| \leq \frac{k_0}{2} \|\nabla w_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \leq \alpha_1 \mathcal{L}(t), \quad (4.10)$$

com $\alpha_1 = \max\{1, k_0\}$.

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned} & - \int_0^\infty \mu(s) \left(\frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |u_t(t)|^\rho u_t(t) \zeta^t(s) dx \right) ds + \int_0^\infty \mu(s) \left(\frac{1}{\rho+1} \int_\Omega |v_t(t)|^\rho v_t(t) \zeta^t(s) dx \right) ds \\ & = - \int_0^\infty \mu(s) \int_\Omega (\sigma(u_t) - \sigma(v_t)) \zeta^t(s) dx ds, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde σ é a função definida em (3.21).

Por (3.22) temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\infty \mu(s) \int_\Omega (\sigma(u_t) - \sigma(v_t)) \zeta^t(s) dx ds \right| &\leq c_\sigma \int_0^\infty \int_\Omega |u_t(t)|^\rho |w_t(t)| |\zeta^t(s)| dx ds \\
&\quad + c_\sigma \int_0^\infty \int_\Omega |v_t(t)|^\rho |w_t(t)| |\zeta^t(s)| dx ds \\
&\leq c_\sigma \int_0^\infty \mu(s) \|u_t\|_{\rho+2}^\rho \|w_t\|_{\rho+2} \|\zeta^t(s)\|_{\rho+2} ds \\
&\quad + c_\sigma \int_0^\infty \mu(s) \|v_t\|_{\rho+2}^\rho \|w_t\|_{\rho+2} \|\zeta^t(s)\|_{\rho+2} ds \\
&\leq C c_\sigma \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla u_t\|_2^\rho \|\nabla w_t\|_2 \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 ds \\
&\quad + C c_\sigma \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla v_t\|_2^\rho \|\nabla w_t\|_2 \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 ds \\
&\leq C c_\sigma C_{uh\nu} \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla w_t\|_2 \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 ds \\
&\quad + C c_\sigma C_{vh\nu} \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla w_t\|_2 \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 ds \\
&\leq C c_\sigma C_{uh\nu} \left(\frac{k_0}{2} \|\nabla w_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \right) \\
&\quad + C c_\sigma C_{vh\nu} \left(\frac{k_0}{2} \|\nabla w_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 \right) \\
&\leq \alpha_2 \mathcal{L}(t),
\end{aligned}$$

onde $C_{uh\nu}$ e $C_{vh\nu}$ são constantes positivas que dependem da $\|h\|_2$, ν e dos dados iniciais (u_0, u_1, η_0) e (v_0, v_1, ξ_0) respectivamente (vide (4.3)) e $\alpha_2 = \max\{C c_\sigma (C_{uh\nu} + C_{vh\nu}) \alpha_1, 1\}$, com α_1 como na estimativa (4.10).

Observação 4.12: Ao largo do trabalho se usaram as notações $C_{uh\nu}$ e $C_{vh\nu}$ definidas anteriormente.

Finalmente, de esta ultima estimativa e da estimativa (4.9) obtemos

$$|\Upsilon(t) - \delta \mathcal{L}(t)| \leq (\alpha_2 + \frac{k_0}{2}) \mathcal{L}(t)$$

ou seja,

$$(\delta - \alpha_2 - \frac{k_0}{2}) \mathcal{L}(t) \leq \Upsilon(t) \leq (\delta + \alpha_2 + \frac{k_0}{2}) \mathcal{L}(t)$$

,

o que prova o lema, pois só basta definir $\delta_0 = \alpha_2 + \frac{k_0}{2}$, $\beta_1 = \delta - \alpha_2 - \frac{k_0}{2}$ e $\beta_2 = \delta + \alpha_2 + \frac{k_0}{2}$, as quais são constantes positivas para todo $\delta > \delta_0$.

□

Lema 4.13: *Existe uma constante $C_0 > 0$ que depende de (u_0, u_1, η_0) , (v_0, v_1, ξ_0) , ρ , q e c , onde c é dada pela hipóteses (2.2), tal que*

$$\mathcal{L}'(t) \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t\|_2^2 ds + C_0(1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w_t\|_{p+2},$$

com $p = \max\{\rho, q\}$.

Demonstração. Notemos que aplicando w_t e ζ^t em (4.4) e (4.5) respectivamente, teremos

$$\langle w, w_t \rangle_1 + \langle w_{tt}, w_t \rangle_1 + \int_0^\infty \mu(s) \langle \zeta^t(s), w_t \rangle_1 ds = \langle -|u_t|^\rho u_{tt} + |v_t|^\rho v_{tt}, w_t \rangle + \langle f(v) - f(u), w_t \rangle, \quad (4.12)$$

$$\langle \zeta_t^t, \zeta^t \rangle_{\mathcal{M}} = -\langle \zeta_s^t, \zeta^t \rangle_{\mathcal{M}} + \langle w_t, \zeta^t \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (4.13)$$

e como

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w(t)\|_2^2 = \langle w(t), w_t(t) \rangle_1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla w_t(t)\|_2^2 = \langle w_{tt}(t), w_t(t) \rangle_1,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 = \langle \zeta_t^t, \zeta^t \rangle_{\mathcal{M}},$$

obtemos que

$$\mathcal{L}'(t) = -\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t) - |v_t(t)|^\rho v_{tt}(t), w_t(t) \rangle - \langle f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t) \rangle - \langle \zeta_s^t, \zeta^t \rangle_{\mathcal{M}}. \quad (4.14)$$

Então para provar (4.13) bastara estimar cada termo da igualdade acima

• **Estimando** $|\langle |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t) - |v_t(t)|^\rho v_{tt}(t), w_t(t) \rangle|$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (|u_t|^\rho u_{tt} - |v_t|^\rho v_{tt}) w_t dx \right| &\leq \int_{\Omega} |u_t|^\rho |u_{tt}| |w_t| dx + \int_{\Omega} |v_t|^\rho |v_{tt}| |w_t| dx \\ &\leq \|u_t\|_{\rho+2}^\rho \|u_{tt}\|_{\rho+2} \|w_t\|_{\rho+2} + \|v_t\|_{\rho+2}^\rho \|v_{tt}\|_{\rho+2} \|w_t\|_{\rho+2} \\ &\leq C \|\nabla u_t\|_2^\rho \|\nabla u_{tt}\|_2 \|w_t\|_{\rho+2} + C \|\nabla v_t\|_2^\rho \|\nabla v_{tt}\|_2 \|w_t\|_{\rho+2} \\ &\leq CC_{uh\nu} \|\nabla u_{tt}\|_2 \|w_t\|_{\rho+2} + CC_{vh\nu} \|\nabla v_{tt}\|_2 \|w_t\|_{\rho+2} \\ &\leq C_1 (\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w_t\|_{\rho+2}, \end{aligned}$$

onde $C_1 = \max\{CC_{uh\nu}, CC_{vh\nu}\} > 0$.

- **Estimando** $|\langle f(u(t)) - f(v(t)), w_t(t) \rangle|$

Pelas hipóteses (2.2)-(2.1) e repetindo o processo anterior com q em lugar de ρ , teremos que,

$$\begin{aligned}
|\langle f(u) - f(v), w_t \rangle| &\leq |\langle f(u), w_t \rangle| + |\langle f(v), w_t \rangle| \\
&\leq c \int_{\Omega} |u| |w_t| dx + cCC_{uh\nu} \|w_t\|_{q+2} + c \int_{\Omega} |v| |w_t| dx + cCC_{vh\nu} \|w_t\|_{q+2} \\
&\leq c(\|u\|_{\frac{q+2}{q+1}} \|w_t\|_{q+2} + CC_{uh\nu} \|w_t\|_{q+2} + \|v\|_{\frac{q+2}{q+1}} \|w_t\|_{q+2} + CC_{vh\nu} \|w_t\|_{q+2}) \\
&\leq (cC\|\nabla u\|_2 + cCC_{uh\nu} + cC\|\nabla v\|_2 + cCC_{vh\nu}) \|w_t\|_{q+2} \\
&\leq (cCC_{uh\nu} + cCC_{uh\nu} + cCC_{vh\nu} + cCC_{vh\nu}) \|w_t\|_{q+2} \\
&\leq C_2 \|w_t\|_{q+2},
\end{aligned}$$

onde $C_2 = \max\{2cCC_{uh\nu}, 2cCC_{vh\nu}\} > 0$.

Notemos que se utiliza a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{q+2}{q+1}}(\Omega)$, a qual é possível dado que $q \in [0, 4)$.

- **Estimando** $-\langle \zeta_s^t, \zeta^t \rangle_{\mathcal{M}}$

Notemos que pelo Lema (4.8) temos que

$$-\langle \zeta_s^t, \zeta^t \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds.$$

Assim, dadas as estimativas anteriores, comparando com (4.14) teremos que

$$\mathcal{L}'(t) \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds + C_2 \|w_t\|_{q+2} + C_1 (\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w_t\|_{p+2}.$$

Notemos que tomando $p = \max\{\rho, q\}$, tem-se as imersões $L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$ e $L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, então

$$\mathcal{L}'(t) \leq \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds + CC_2 \|w_t\|_{p+2} + CC_1 (\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w_t\|_{p+2},$$

pelo qual o Lema (4.13) é provado, pois basta definir $C_0 = \max\{CC_1, CC_2\}$.

□

Lema 4.14: *Se cumpre que:*

$$\begin{aligned}
\chi'(t) &\leq -\mathcal{L}(t) - \frac{15}{32} \|\nabla w\|_2^2 + \frac{3}{2} \|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{16k_0 + 1}{2k_1} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t\|_2^2 ds \\
&\quad + C_0 (1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w\|_{p+2},
\end{aligned}$$

sendo $C_0 > 0$ a constante do Lema (4.13) e $p = \max\{\rho, q\}$.

Demonstração. Notemos que

$$\chi'(t) = \langle w_{tt}(t), w(t) \rangle_1 + \|\nabla w_t(t)\|_2^2.$$

Aplicando w em (4.4) e comparando com $\chi'(t)$, temos que

$$\chi'(t) = - \int_0^\infty \mu(s) \langle \zeta^t(s), w \rangle_1 ds - \langle |u_t|^\rho u_{tt} - |v_t|^\rho v_{tt}, w \rangle - \langle f(u) - f(v), w \rangle - \|\nabla w\|_2^2 + \|\nabla w_t\|_2^2,$$

agora, razonando igual que nas estimativas feitas no Lema (4.13), teremos

$$\chi'(t) \leq - \int_0^\infty \mu(s) \langle \zeta^t(s), w \rangle_1 ds + C_1(\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w\|_{\rho+2} + C_2 \|w\|_{q+2} - \|\nabla w\|_2^2 + \|\nabla w_t\|_2^2,$$

alem disso, procedendo igual que (4.1) e tomando $\epsilon = 8$ na desigualdade de Young, obtemos

$$\chi'(t) \leq 8k_0 \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 + \frac{1}{32} \|\nabla w\|_2^2 + C_1(\|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w\|_{\rho+2} + C_2 \|w\|_{q+2} - \|\nabla w\|_2^2 + \|\nabla w_t\|_2^2.$$

Por tanto, somando e restando $\mathcal{L}(t)$ na expressão anterior

$$\chi'(t) \leq -\mathcal{L}(t) + (8k_0 + \frac{1}{2}) \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 - \frac{15}{32} \|\nabla w\|_2^2 + C_0(1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w\|_{p+2} + \frac{3}{2} \|\nabla w_t\|_2^2,$$

onde $p = \max\{\rho, q\}$, $C_0 = \max\{CC_1, CC_2\}$ sendo $C > 0$ a constante das imersões $L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q+2}(\Omega)$ e $L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$, isto é, a mesma constante do Lema (4.13).

Finalmente, pela hipóteses (2.7) teremos,

$$\begin{aligned} \chi'(t) &\leq -\mathcal{L}(t) - \frac{15}{32} \|\nabla w\|_2^2 + \frac{3}{2} \|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{16k_0 + 1}{2k_1} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t\|_2^2 ds \\ &\quad + C_0(1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \|w\|_{p+2}, \end{aligned}$$

o que prova o Lema. □

Lema 4.15: *Existe uma constante $C_\kappa > 0$ que depende de (u_0, u_1, η_0) , (v_0, v_1, ξ_0) , ρ , q , c , k_0 e k_1 , onde c é dada pela hipóteses (2.2) e k_0, k_1 são dados pelas hipóteses (2.6) e (2.7), tal que*

$$\kappa'(t) \leq \frac{k_0}{8} \|\nabla w\|_2^2 - \frac{7k_0}{8} \|\nabla w_t\|_2^2 - C_\kappa \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds$$

Demonstração. Pela definição de $\kappa(t)$ (vide (4.8)), temos que

$$\kappa'(t) = A(t) + B(t), \tag{4.15}$$

onde

$$A(t) := \int_{\Omega} (|v_t(t)|^\rho v_{tt}(t) - |u_t(t)|^\rho u_{tt}(t) - Aw_{tt}(t)) \left(\int_0^\infty \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx, \quad (4.16)$$

$$B(t) := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho+1} |v_t(t)|^\rho v_t(t) - \frac{1}{\rho+1} |u_t(t)|^\rho u_t(t) - Aw_t(t) \right) \left(\int_0^\infty \mu(s) \zeta_t^t(s) ds \right) dx. \quad (4.17)$$

Para provar o Lema, estimaremos $A(t)$ e $B(t)$ por separado.

• **Estimando $A(t)$**

Substituindo (4.4) em (4.16) obtemos

$$A(t) = \int_{\Omega} \left(Aw + \int_0^\infty \mu(s) A\zeta(s) ds + f(u) - f(v) \right) \left(\int_0^\infty \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx.$$

Estimemos termo por termo da igualdade acima.

$$- \textit{Estimando } \int_{\Omega} Aw \left(\int_0^\infty \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx$$

$$\int_{\Omega} Aw \left(\int_0^\infty \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx = \int_0^\infty \mu(s) \langle w, \zeta^t(s) \rangle_1 ds \leq \frac{k_0}{32} \|\nabla w\|_2^2 + 8 \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2.$$

Para a ultima desigualdade se razona igual quem (4.1), usando a desigualdade de Young com $\epsilon = 8$ para os termos $k_0^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_2$ e $\|\zeta^t\|$.

$$- \textit{Estimando } \int_{\Omega} \left(\int_0^\infty \mu(s) A\zeta(s) ds \right) \left(\int_0^\infty \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\int_0^\infty \mu(s) A\zeta(s) ds \right) \left(\int_0^\infty \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx &= \int_0^\infty \mu(s) \left(\int_0^\infty \mu(y) \langle \zeta^t(s), \zeta^t(y) \rangle_1 dy \right) ds \\ &\leq \int_0^\infty \mu(s) \left(\int_0^\infty \mu(y) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 \|\nabla \zeta^t(y)\|_2 dy \right) ds \\ &= \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 \left(\int_0^\infty \mu(y) \|\nabla \zeta^t(y)\|_2 dy \right) ds \\ &\leq k_0^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 \left(\int_0^\infty \mu(y) \|\nabla \zeta^t(y)\|_2^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &= k_0^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \mu(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}} ds \\ &\leq k_0 \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2. \end{aligned}$$

– Estimando $\int_{\Omega} (f(u) - f(v)) \left(\int_0^{\infty} \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx$

Pela hipóteses (2.2) se tem que

$$\int_{\Omega} (f(u) - f(v)) \left(\int_0^{\infty} \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx \leq c \int_{\Omega} (1 + |u|^q + |v|^q) |w| \left(\int_0^{\infty} \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} c \int_{\Omega} |w| \left(\int_0^{\infty} \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx &= c \int_0^{\infty} \mu(s) \left(\int_{\Omega} |w| \zeta^t(s) dx \right) ds \\ &\leq c \int_0^{\infty} \mu(s) \|w\|_2 \|\zeta(s)\|_2 ds \\ &\leq \frac{c}{\lambda_1^2} \int_0^{\infty} \mu(s) \|\nabla w\|_2 \|\nabla \zeta(s)\|_2 ds \\ &= \frac{c}{\lambda_1^2} \|\nabla w\|_2 \int_0^{\infty} \mu(s) \|\nabla \zeta(s)\|_2 ds \\ &\leq \frac{ck_0^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1^2} \|\nabla w\|_2 \|\zeta\|_{\mathcal{M}} \\ &\leq \frac{c^2}{\lambda_1^4} \frac{k_0}{4\epsilon} \|\nabla w\|_2^2 + \epsilon \|\zeta\|_{\mathcal{M}}^2 \\ &= \frac{k_0}{32} \|\nabla w\|_2^2 + \frac{8c^2}{\lambda_1^4} \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2, \quad \epsilon = 8. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c \int_{\Omega} |u|^q \left(\int_0^{\infty} \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx &= c \int_0^{\infty} \mu(s) \left(\int_{\Omega} |u|^q \zeta^t(s) dx \right) ds \\ &\leq c \int_0^{\infty} \mu(s) \|u\|_{q+2}^q \|w\|_{q+2} \|\zeta(s)\|_{q+2} ds \\ &\leq c C C_{uhv} \int_0^{\infty} \mu(s) \|\nabla w\|_2 \|\nabla \zeta(s)\|_2 ds \\ &\leq k_0 c^2 C^2 C_{uhv} \frac{1}{4\epsilon} \|\nabla w\|_2^2 + \epsilon \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}} \\ &= \frac{k_0}{32} \|\nabla w\|_2^2 + 8C_3 \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}, \quad \epsilon = 8c^2 C^2 C_{uhv}, \end{aligned}$$

onde $C_3 = c^2 C^2 C_{uhv} > 0$.

De maneira análoga, existira uma constante $C_4 = c^2 C^2 C_{vhv} > 0$ tal que

$$c \int_{\Omega} |v|^q \left(\int_0^{\infty} \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx \leq \frac{k_0}{32} \|\nabla w\|_2^2 + 8C_4 \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}.$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} (f(u) - f(v)) \left(\int_0^{\infty} \mu(s) \zeta^t(s) ds \right) dx \leq \frac{3k_0}{32} \|\nabla w\|_2^2 + 8C_5 \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2,$$

onde $C_5 = \frac{c^2}{\lambda_1^4} + C_3 + C_4 > 0$.

Assim temos que

$$A(t) \leq \frac{k_0}{8} \|\nabla w\|_2^2 + (k_0 + 8C_5 + 8) \|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2, \quad (4.18)$$

mas, como

$$\|\zeta^t\|_{\mathcal{M}}^2 = \int_0^{\infty} \mu(s) \|\nabla \zeta^t\|_2^2 ds \leq -\frac{1}{k_1} \int_0^{\infty} \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 ds,$$

então poderemos estimar $A(t)$ por

$$A(t) \leq \frac{k_0}{8} \|\nabla w\|_2^2 - \frac{k_0 + 8C_5 + 8}{k_1} \int_0^{\infty} \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 ds.$$

• **Estimando $B(t)$**

Notemos que pela equação (4.5) temos que

$$\int_0^{\infty} \mu(s) \zeta_t^t(s) ds = \int_0^{\infty} \mu'(s) \zeta^t(s) ds + k_0 w_t(t)$$

Assim, $B(t)$ se pode expressar como

$$B(t) = C(t) + k_0 D(t), \quad (4.19)$$

onde

$$C(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho+1} |v_t(t)|^{\rho} v_t(t) - \frac{1}{\rho+1} |u_t(t)|^{\rho} u_t(t) - A w_t(t) \right) \left(\int_0^{\infty} \mu'(s) \zeta^t(s) ds \right) dx,$$

$$D(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\rho+1} |v_t(t)|^{\rho} v_t(t) - \frac{1}{\rho+1} |u_t(t)|^{\rho} u_t(t) - A w_t(t) \right) w_t dx$$

.

Estimaremos $C(t)$ e $D(t)$.

– Estimando $C(t)$

Notemos que pelo feito quando se estimo $|\kappa(t)|$, pelas hipóteses (2.6), (2.7) e (2.8), e pela desigualdade de Young, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \left(\frac{|v_t|^\rho v_t}{\rho+1} - \frac{|u_t|^\rho u_t}{\rho+1} \right) \left(\int_0^\infty \mu'(s) \zeta^t ds \right) dx &= - \int_0^\infty \mu'(s) \int_{\Omega} (\sigma(u_t) - \sigma(v_t)) \zeta^t(s) dx ds \\
&\leq -C_{c_\sigma} C_{uh\nu} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla w_t\|_2 \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 ds \\
&\quad - C_{c_\sigma} C_{vh\nu} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla w_t\|_2 \|\nabla \zeta^t(s)\|_2 ds \\
&\leq C_{c_\sigma} C_{uh\nu} k_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_t\|_2 \left(\int_0^\infty -\mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_{c_\sigma} C_{vh\nu} k_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_t\|_2 \left(\int_0^\infty -\mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_{c_\sigma} C_{uh\nu} k_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_t\|_2 \left(\int_0^\infty -\mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_{c_\sigma} C_{vh\nu} k_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla w_t\|_2 \left(\int_0^\infty -\mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{k_0}{32} \|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{\epsilon_1^u k_2}{k_0} \left(\int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds \right) \\
&\quad + \frac{1}{32} \|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{\epsilon_1^v k_2}{k_0} \left(\int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds \right) \\
&= \frac{k_0}{16} \|\nabla w_t\|_2^2 - \left(\frac{\epsilon_1^u k_2 + \epsilon_1^v k_2}{k_0} \right) \left(\int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds \right),
\end{aligned}$$

onde $\epsilon_1^u = 8C^2 c_\sigma^2 C_{uh\nu}$ e $\epsilon_1^v = 8C^2 c_\sigma^2 C_{vh\nu}$.

Alem disso, se cumpre que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} -Aw_t \left(\int_0^\infty \mu'(s) \zeta^t(s) ds \right) dx &= - \int_0^\infty \mu'(s) \langle w_t, \zeta^t(s) \rangle_1 ds \\
&\leq \frac{k_0}{16} \|\nabla w_t\|_2^2 - \frac{4k_2}{k_0} \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds,
\end{aligned}$$

Pelo qual se obtêm que

$$C(t) \leq \frac{k_0}{8} \|\nabla w_t\|_2^2 - \left(\frac{\epsilon_1^u k_2 + \epsilon_1^v k_2 + 4k_2}{k_0} \right) \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds. \quad (4.20)$$

– *Estimando $D(t)$*

Notemos que $D(t)$ se pode escrever como

$$D(t) = - \int_{\Omega} (\sigma(u_t(t)) - \sigma(v_t(t)))(u_t(t) - v_t(t)) dx - \|\nabla w_t(t)\|_2^2,$$

mas como σ é monótona (vide (3.13)), isto é,

$$(\sigma(u_t(t)) - \sigma(v_t(t)))(u_t(t) - v_t(t)) \geq 0,$$

então,

$$D(t) \leq -\|\nabla w_t(t)\|_2^2. \quad (4.21)$$

Substituindo (4.20)-(4.21) em (4.19) obtemos

$$B(t) \leq -\frac{7k_0}{8}\|\nabla w_t\|_2^2 - \left(\frac{\epsilon_1^u k_2 + \epsilon_1^v k_2 + 4k_2}{k_0}\right) \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds. \quad (4.22)$$

Finalmente, substituindo (4.18)-(4.22) em (4.15) obtém-se que

$$\kappa'(t) \leq -\frac{7k_0}{8}\|\nabla w_t\|_2^2 + \frac{k_0}{8}\|\nabla w\|_2^2 - C_\kappa \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds,$$

onde, $C_\kappa = \frac{k_0 + 8C_5 + 8}{k_1} + \epsilon_1^u + \epsilon_1^v + 4 > 0$, pois pela observação (2.1), temos que

$$\frac{k_0 + 8C_5 + 8}{k_1} + \left(\frac{\epsilon_1^u k_2 + \epsilon_1^v k_2 + 4k_2}{k_0}\right) \leq \frac{k_0 + 8C_5 + 8}{k_1} + \epsilon_1^u + \epsilon_1^v + 4 = C_\kappa.$$

□

Conclusão.

Dados os Lemas (4.13), (4.14) e (4.15), e pela definição de $\Upsilon(t)$, temos que

$$\begin{aligned} \Upsilon'(t) &\leq \left(\frac{\delta}{2} - \frac{16k_0 + 1}{2k_1}\epsilon - C_\kappa\right) \int_0^\infty \mu'(s) \|\nabla \zeta^t(s)\|_2^2 ds + \left(\frac{k_0}{8} - \frac{15\epsilon}{32}\right) \|\nabla w\|_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{3\epsilon}{2} - \frac{7k_0}{8}\right) \|\nabla w_t\|_2^2 - \epsilon \mathcal{L}(t) + C_0(1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2)(\delta \|w_t\|_{p+2} + \epsilon \|w\|_{p+2}). \end{aligned}$$

Tomando

$$\frac{4k_0}{15} < \epsilon < \frac{k_0}{2} < \frac{7k_0}{12},$$

$$\delta > \frac{16k_0 + 1}{k_1} \epsilon + 2C_\kappa,$$

a expressão acima reduz-se a

$$\Upsilon'(t) \leq -\epsilon \mathcal{L}(t) + C_\Upsilon (1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) (\|w_t\|_{p+2} + \|w\|_{p+2}), \quad \forall \epsilon \in \left(\frac{4k_0}{15}, \frac{k_0}{2} \right), \forall \delta > \delta_\Upsilon,$$

onde $\delta_\Upsilon = \max\{\delta_0, \frac{16k_0+1}{k_1} \epsilon + 2C_\kappa\}$, com δ_0 definido no Lema (4.11) e $C_\Upsilon = C_0 \max\{\epsilon, \delta\}$.

Observação 4.16: Notemos que é as restrições $\epsilon \in \left(\frac{4k_0}{15}, \frac{k_0}{2} \right)$ e $\delta > \delta_\Upsilon$, nos permite usar o Lema (4.11) para algum ϵ e δ fixo.

Denotemos por

$$m(t) := C_\Upsilon (1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) (\|w_t\|_{p+2} + \|w\|_{p+2}),$$

assim pelo Lema (4.11) temos que

$$\Upsilon'(t) \leq \frac{\epsilon}{\beta_2} \Upsilon(t) + m(t),$$

e pela desigualdade de Gronwall obtemos

$$\Upsilon(t) \leq \Upsilon(0) e^{-\frac{\epsilon t}{\beta_2}} + \int_0^t e^{-\frac{\epsilon(t-s)}{\beta_2}} m(s) ds.$$

Novamente pelo Lema (4.11) temos

$$\mathcal{L}(t) \leq \frac{\beta_2}{\beta_1} \mathcal{L}(0) e^{-\frac{\epsilon t}{\beta_2}} + \frac{1}{\beta_1} \int_0^t e^{-\frac{\epsilon(t-s)}{\beta_2}} m(s) ds,$$

ou seja,

$$\|z_1(t) - z_2(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_B e^{-\vartheta t} + C_B \int_0^t e^{-\vartheta(t-s)} m(s) ds,$$

com $C_B = \max\{\frac{\beta_2}{\beta_1} \mathcal{L}(0), \frac{1}{\beta_1}\} > 0$ e $\vartheta = \frac{\epsilon}{\beta_2}$ para algum $\epsilon \in \left(\frac{4k_0}{15}, \frac{k_0}{2} \right)$ e $\delta > \delta_\Upsilon$.

□

4.3 Compacidade assintótica

Proposição 4.17: *O sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondente ao sistema (2.17)-(2.18) é assintoticamente compacto.*

Demonstração. Para demonstrar o Teorema, começaremos provando que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é assintoticamente regular, para isto usaremos os Teoremas 1.31 e 1.17.

Seja B um subconjunto limitado de $\mathcal{H}$ e positivamente invariante com respeito a $S(t)$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $\tau > 0$, tal que

$$C_B^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\vartheta\tau}{2}} < \epsilon, \quad (4.23)$$

onde C_B e ϑ são dados pela Proposição (4.9)

Lema 4.18: *Existe uma constante $C_{B,\tau} > 0$ tal que se cumpre*

$$\|S(\tau)z_0^1 - S(\tau)z_0^2\|_{\mathcal{H}} \leq \epsilon + \phi_\tau(z_0^1, z_0^2), \quad \forall z_0^1, z_0^2 \in B,$$

onde

$$\phi_\tau(z_0^1, z_0^2) = C_{B,\tau} \left(\int_0^\tau \|u(s) - v(s)\|_{p+2}^2 + \|u_t(s) - v_t(s)\|_{p+2}^2 ds \right)^{\frac{1}{4}},$$

com $p = \max\{\rho, q\}$.

Demonstração. Consideremos $z_1(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t) = S(t)z_0^1$ e $z_2(t) = (v(t), v_t(t), \xi^t) = S(t)z_0^2$ soluções fracas do sistema (2.17)-(2.18) com respeito aos dados iniciais $z_0^1, z_0^2 \in B$.

Então, no contexto da Proposição (4.9), para todo $t \in (0, \tau)$ temos que,

$$\begin{aligned} \|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C_B e^{-\vartheta\tau} + C_B \int_0^\tau e^{-\vartheta(\tau-s)} (1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) (\|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2}) ds, \\ &\leq C_B e^{-\vartheta\tau} + 2^2 C_B \left(\int_0^\tau e^{-\vartheta(\tau-s)} (1 + \|\nabla u_{tt}\|_2 + \|\nabla v_{tt}\|_2) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\tau \|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Agora, como u_{tt} e v_{tt} são limitados em $L^2(0, \tau; H_0^1(\Omega))$, então existe uma constante $C_{B,\tau} > 0$ tal que

$$\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_B e^{-\vartheta\tau} + C_{B,\tau}^2 \left(\int_0^\tau \|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

então,

$$\begin{aligned} \|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}} &\leq C_B^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\vartheta\tau}{2}} + C_{B,\tau} \left(\int_0^\tau \|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq \epsilon + C_{B,\tau} \left(\int_0^\tau \|w\|_{p+2} + \|w_t\|_{p+2} \right)^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

para algum $\epsilon > 0$ que cumpra (4.23).

□

Lema 4.19: *No contexto do Lema anterior, se cumpre que*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} \phi_\tau(z^n, z^m) = 0,$$

para alguma sequencia $(z^n) \subset B$.

Demonstração. Seja $(z_0^n) = (u_0^n, v_0^n, \eta_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em B .

Consideremos $S(t)(z_0^n) = (u^n(t), u_t^n(t), \eta^{t,n})_{n \in \mathbb{N}}$, como B é positivamente invariante pela ação de $S(t)$ então $(u^n(t), u_t^n(t), \eta^{t,n})_{n \in \mathbb{N}}$ é uniformemente limitada em $\mathcal{H}$, em particular temos que

$$(u^n), (u_t^n) \text{ são limitadas em } C([0, \infty); H_0^1(\Omega)).$$

Agora, como (u_t^n) é limitada em $C([0, \infty); H_0^1(\Omega))$, então

$$(u_{tt}^n) \text{ é limitada em } L^2(0, \tau; L^2(\Omega)), \quad \forall \tau > 0,$$

assim teremos que

$$(u_t^n), (u_{tt}^n) \text{ são limitadas em } L^2(0, \tau; L^2(\Omega)).$$

Agora como se tem a cadeia de imersões

$$H_0^1(\Omega) \xhookrightarrow{c} L^{p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad p = \max\{\rho, q\},$$

tomando respectivamente no Teorema 1.17

$$X = H_0^1(\Omega), \quad B = L^{p+2}(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega), \quad r = 2,$$

temos que (u^n) e (u_t^n) são relativamente compactos em $C(0, \tau; H_0^1(\Omega))$ para todo $\tau > 0$.

Passando a uma subsequencia se for necessário em cada caso, as quais denotaremos igualmente, teremos que

$$(u^n), (u_t^n) \text{ convergem (fortemente) em } C(0, \tau; L^{p+2}(\Omega)), \quad \forall \tau > 0,$$

podemos concluir assim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} C_{B,\tau} \left(\int_0^\tau \|u^n(s) - u^m(s)\|_{p+2}^2 + \|u_t^n(s) - u_t^m(s)\|_{p+2}^2 ds \right)^{\frac{1}{4}} = 0,$$

o que demonstra o Lema. □

Conclusão.

Pelo Teorema 1.31 e pelos Lemas (4.18)-(4.19), concluímos que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ correspondente ao sistema (2.17)-(2.18) é assintoticamente regular e pela Proposição (4.4) também é dissipativo, então temos como resultado do Teorema 1.30 que o sistema dinâmico é assintoticamente compacto o que prova a proposição. □

Conclusão do Teorema 4.2.

Notemos que pela Proposição (4.4) temos que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é dissipativo, também notemos que pela Proposição (4.17) temos que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ é assintoticamente compacto.

Assim pelo Teorema 1.28, concluímos que o sistema dinâmico $(\mathcal{H}, S(t))$ possui atrator global. □

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces, second edition*, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press (**2003**).
- [2] R. O. Araújo, T. F. Ma and Y. Qin, *Long-time behavior of a quasilinear viscoelastic equation with past history*, Journal of Differential Equations 254 (**2013**), 4066-4087.
- [3] A. V. Babin and M. I. Vishik, *Attractors of Evolution Equations*, Studies in Mathematics and its Applications 25, North-Holland, Amsterdam (**1992**).
- [4] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*, Paris, Masson (**1983**).
- [5] P. L. Butzer and H. Berens, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag. New York (**1967**).
- [6] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti and J. Ferreira, *Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping*, Math. Methods. Appl. Sci. 24 (**2001**), 1043-1053.
- [7] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho and J. A. Soriano, *Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping*, Differential and Integral equations 14 (**2001**), 85-116.
- [8] M. M. Cavalcanti and H. Portillo Oquendo, *Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation*, SIAM J. Control Optim. 42 (**2003**), 1310-1324.
- [9] I. Chueshov and I. Lasiecka, *Long-time behavior of second order evolution equation with nonlinear damping*, Mem. Amer. Math. Soc. 195 (**2008**), AMS, Providence.
- [10] I. Chueshov and I. Lasiecka, *Von Karman Evolution Equations: Well-Posedness and Long-Time Dynamics*, Springer Monographs in Mathematics (**2010**).

- [11] M. Conti, E. Marchini and V. Pata, *A well posedness result for nonlinear viscoelastic equations with memory*, Nonlinear Anal. 94 (**2014**), 206-216.
- [12] C. M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. 37 (**1970**), 297-308.
- [13] M. Fabrizio and A. Morro, *Mathematical problems in linear viscoelasticity*, SIAM Studies in Applied Mathematics 12 (**1992**).
- [14] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd edition, Jhon Wiley & Sons. Canada (**1999**).
- [15] C. Giorgi, M. Grasseli and V. Pata, *Well-posedness and longtime behavior of the phasefield model with memory in a history space setting*, Quart. Appl. Math. 59 (**2001**), 701-736.
- [16] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Mathematical Surveys and Monographs, 25, American Mathematical Society, Providence (**1988**).
- [17] X. Han and M. Wang, *General decay of energy for a viscoelastic equation with nonlinear damping*, Math. Methods Appl. 70 (**2009**), 346-358.
- [18] X. Han and M. Wang, *Global existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with damping*, Nonlinear Anal. 70 (**2009**), 3090-3098.
- [19] J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris (**1969**).
- [20] W. Liu, *Uniform decay of solutions for a quasilinear system of viscoelastic equations*, Nonlinear Anal. 71 (**2009**), 2257-2267.
- [21] W. Liu, *General decay and blow-up of solution for a quasilinear viscoelastic problem with nonlinear source*, Nonlinear Anal. 73 (**2010**), 1890-1904.
- [22] A. E. H. Love, *Treatise on Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications (**1944**).
- [23] T. F. Ma and P. N. Seminario Huertas, *Attractors for a class of nonlinear viscoelastic equations with memory*. (em preparação).
- [24] S. A. Messaoudi, *General decay of solutions of a viscoelastic equation*, J. Math. Anal. Appl., 341 (**2008**), 1457-1467.

- [25] S. A. Messaoudi and N. Tatar, *Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem*, Math. Meth. Appl. Sci. 30 (**2007**), 665-680.
- [26] S. A. Messaoudi and N. Tatar, *Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation*, Nonlinear Anal. 68 (**2008**), 785-793.
- [27] S. A. Messaoudi and N. Tatar, *Exponential decay for a quasilinear viscoelastic equation*, Math. Nachr. 282 (**2009**), 1443-1450.
- [28] A. Miranville and S. Zelik, *Handbook of Gifferential Equations*, Handbook of Differential Equations, Evolutionary Equations, Volume 4, Chapter 3 (**2008**).
- [29] J. E. Muñoz Rivera, *Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Math., 52 (**1994**), 628-648.
- [30] V. Pata and A. Zucchi, *Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory*, Adv. Math. Sci. Appl., 11 (**2001**), 505-529.
- [31] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences Vol. 44, Springer-Verlag, New York (**1983**).
- [32] Y. Qin, J. Zhang and L. Sun, *Upper semicontinuity of pullback attractors for a non-autonomous viscoelastic equation*, Appl. Math. Comput. 223 (**2013**), 362-376.
- [33] Y. Qin, B. Feng and M. Zhang, *Uniform attractors for a non-autonomous viscoelastic equation with a past history*, Nonl. Analysis 101 (2014) 1-15.
- [34] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. 146 (**1987**), 65-96.
- [35] C. Sun, D. Cao and J. Duan, *Non-autonomous wave dynamics with memory asymptotic regularity and uniform attractor*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B9 (**2008**), 743-761.
- [36] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Appl. Math. Sci. 68 (**1998**).
- [37] S. T. Wu, *Exponential decay for a nonlinear viscoelastic equation with singular kernels*, Acta Math. Sci. Ser. B. Engl. Ed. 32 (**2012**), 2237-2246.

- [38] S. T. Wu, *General decay of solutions for a nonlinear system of viscoelastic wave equations with degenerate damping and source terms*, J. Math. Anal. Appl. 406 (**2013**), 34-48.
- [39] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag. Berlin (**1965**).
- [40] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Part II-B*, Springer-Verlag. New York (**1990**).