Toros incompressíveis para ações Anosov de $\mathbb{R}^k$
sobre uma variedade de dimensão $k + 2$

Romenique da Rocha Silva

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 26 de setembro de 2011

Assinatura: _____

Toros incompressíveis para ações Anosov de $\mathbb{R}^k$ sobre uma variedade de dimensão $k + 2$ ¹

Romenique da Rocha Silva

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Maquera Apaza

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.
VERSÃO REVISADA

USP - São Carlos

Setembro de 2011

¹Projeto financiado pela CAPES

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586t Silva, Romenique da Rocha
Toros incompressíveis para ações Anosov de R^k
sobre uma variedade de dimensão $k+2$ / Romenique da
Rocha Silva; orientador Carlos Maquera -- São
Carlos, 2011.
63 p.

Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em
Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
de Computação, Universidade de São Paulo, 2011.

1. Matemática. 2. Sistemas dinâmicos. 3. Ação
Anosov. 4. Folheações de codimensão um. 5. Toro
incompressível. I. Maquera, Carlos, orient. II. Título.

Ao meu pai Ranulfo Florêncio da Silva,
que já me chamava de Doutor antes
mesmo de ser Bacharel.

Ao Padre José Carlos Nascimento
que me ajudou e que rezou por todos
os dias da sua vida, Meus Sinceros
Agradecimentos.

A minha Esposa Lília, companheira de
todas as horas.

A minha Princesa Letícia, que é a
razão do meu viver.

A minha Mãe Margarida, minha flor
predileta.

Agradecimentos

Ao Joathan, que me ajudou no momento mais difícil de minha caminhada.

Ao meu orientador Carlos Maquera pelo apoio, amizade, paciência e também por acreditar no meu trabalho.

A Edineia Javarine, amiga que nos momentos tensos, me ajudou a esquecer os problemas e me fez rir.

A professora Zezé Reis, que também me ajudou no início.

Ao professor Oziride por tirar algumas dúvidas ao longo das pesquisas.

A minha família, Lília, Letícia e Joice pela paciência e compreensão em tudo.

A minha mãe Margarida, meus irmãos e irmãs pelo apoio e confiança.

A meu irmão Rafael e sua esposa Graça Céu pela hospedagem em sua casa por um período.

A minha sogra Valdelice, que considero uma mãe.

À CAPES, pelo apoio financeiro recebido durante o doutorado.

Resumo

Dentre todos os sistemas dinâmicos os sistemas Anosov têm atraído a atenção de muitos matemáticos. No caso de fluxo Anosov em uma variedade fechada M de dimensão três, Sérgio Fenley definiu o conceito de losangos no recobrimento universal de M e obteve resultados importantes envolvendo losangos e automorfismos do recobrimento universal. Seguindo o que foi feito por Fenley, e utilizando o conceito de losangos no espaço das órbitas do fluxo levantado (no recobrimento universal), Thierry Barbot obteve condições suficientes para que um toro incompressível numa 3-variedade fechada suportando um fluxo Anosov seja isotópico a um outro que é transversal ao fluxo.

Neste trabalho consideramos ações Anosov de $\mathbb{R}^k$ sobre uma variedade fechada M de dimensão $k + 2$. Primeiramente, conseguimos resultados análogos aos de Fenley (sobre existência de losangos) para estas ações, e usando isso, finalmente obtemos condições suficientes para que um toro incompressível seja isotópico a um toro transversal à ação. Este último resultado é uma generalização do resultado de Barbot mencionado acima.

Abstract

Among all dynamical systems the Anosov systems has attracted the attention of many mathematicians. In the case of an Anosov flow in a closed manifold M of dimension three, Sérgio Fenley defined the concept of lozenges in the universal covering of M and obtained important results involving lozenges and covering automorphism. Following what was made by Fenley, and using the concept of lozenge on the orbit space of the lifted flow (in the universal covering), Thierry Barbot obtains sufficient conditions for an incompressible torus in a closed 3-manifold supporting an Anosov flow to be isotopic to another which is transverse to flow.

In this work we considered Anosov actions of $\mathbb{R}^k$ on a closed manifold M of dimension $k + 2$. First, we obtain analogous results those of Fenley (about existence of lozenges) for this actions, and using this, finally we obtain sufficient conditions for an incompressible torus to be isotopic to another torus which is transverse to action. This last result is a generalization of Barbot's result mentioned above.

Lista de Figuras

1.1	Levantamentos dos caminhos α, c, b, β	7
1.2	Uniformidade transversal.	10
1.3	Variedade imersa que não é uma folha.	11
1.4	As seções transversais $D(t_i)$ e $D(t_{i+1})$	12
3.1	Lados positivo e negativo da folha F	28
3.2	$\mathcal{J}_+^u(p)$, com representação em dimensões reduzidas.	28
3.3	Losango em $\widetilde{M}$	29
3.4	Folha F_1 na fronteira de $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$	30
3.5	Folha $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_i)$ próxima de L	31
3.6	Formação do losango de lados $\widetilde{W}_-^u(\mathcal{Q}_1), \widetilde{W}_+^s(\mathcal{Q}_1), \widetilde{W}_+^u(\mathcal{O}_0)$ e $\widetilde{W}_-^s(\mathcal{O}_0)$	32
3.7	Folha L na fronteira de $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$	32
3.8	$F_i \subset \partial B_i$ com $F_i \cap \widetilde{W}^u(\mathcal{O}) \neq \emptyset$	34
3.9	A cadeia conectando as duas órbitas.	35
4.1	A projeção p^s	39
4.2	A ação do automorfismo g sobre um g -losango.	41
4.3	$\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ em posição direta.	41
4.4	$\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ em posição indireta.	41
4.5	$\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^{+-}(x_1)$ em posição indireta.	42
4.6	As componentes do anel $\mathcal{A}$	44
4.7	As componentes de $\widetilde{\mathcal{A}}$	44
4.8	As folheações nas componentes do anel $\mathcal{A}$ e de $\widetilde{\mathcal{A}}$	46
4.9	O losango $\mathcal{L}^{++}(x_i) = \mathcal{L}^{--}(y_i)$	48
4.10	Caminho c_0 no losango $\mathcal{L}_0$	49
4.11	Faixa $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ em $\widetilde{M}$	49
4.12	Curvas de auto-interseção com ponto duplo e triplo.	49
4.13	Eliminando as auto-interseções.	49
4.14	Anel $\mathcal{A}_2$ com $\partial \mathcal{A}_2 = \theta_1 \cup f_1$	50
4.15	$h_2(U_+(x)) \subset U_+(x)$	54
4.16	$h_2(S_+(x)) \subset S_+(x)$	54
4.17	O compacto K	55

4.18 Os pontos fixos p e t_1 de f e o ponto fixo y_1 de h_2	56
---	----

Lista de Símbolos

$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$	
I	$I = [0, 1]$ quando I estiver indicando um intervalo da reta
$Diff^r(M)$	Grupo dos difeomorfismos de classe C^r em M
$Home(M)$	Grupo dos homeomorfismos de M
■	Indica o final de uma prova

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Automorfismos de recobrimento	5
1.2 Folheações	8
1.2.1 Espaço e topologia das folhas	9
1.2.2 Holonomia	11
1.2.3 Folheações orientáveis e transversalmente orientáveis	13
1.3 Ação de $\mathbb{R}^k$	15
2 Ações Anosov de $\mathbb{R}^k$: algumas propriedades gerais	17
2.1 Sistemas Anosov	17
2.1.1 Difeomorfismo Anosov	17
2.1.2 Fluxo Anosov	19
2.1.3 Ação Anosov	20
2.2 Algumas propriedades gerais de ações Anosov de codimensão um irreduzíveis	21
2.3 Folhas e órbitas periódicas para automorfismos do recobrimento universal .	22
3 Losangos para ações Anosov de $\mathbb{R}^k$ sobre variedades de dimensão $k + 2$	27
3.1 Orientação transversal e losangos	27
3.2 Existência de losangos e cadeia de losangos	29
3.3 Uma consequência fundamental	35
4 Posição ótima de um 2-toro incompressível	37
4.1 A ação de $\pi_1(M)$ no espaço das órbitas Q^ϕ	37
4.2 Losangos em Q^ϕ	39
4.3 Anel de Birkhoff	43
4.4 Toro incompressível em M: Prova do Teorema B	51
Referências Bibliográficas	59

Introdução

Na teoria clássica dos sistemas dinâmicos há um grupo de sistemas que atraiu e continua atraindo a atenção de muitos matemáticos de renome internacional, são os difeomorfismos e fluxos de Anosov, cujos conceitos foram introduzidos por Anosov em [1], que originalmente não eram chamados desta maneira. Tais sistemas têm propriedades dinâmicas muito interessantes, e quando eles são de codimensão um, a teoria de folheações é usada com muita eficácia no estudo de suas dinâmicas.

Anosov mostrou que todo difeomorfismo Anosov de classe C^r ($r \geq 1$) é C^r -estruturalmente estável. Verjovsky em [31] mostrou que *um fluxo Anosov de codimensão um em uma variedade de dimensão maior que três é transitivo*.

Fenley em [9], [10], [11], [12], [13] e Barbot em [2], [3], [4], [5], [6] realizaram um estudo intenso dos fluxos Anosov numa variedade fechada M de dimensão três. A seguir relatamos alguns dos resultados obtidos por eles, os quais motivaram o nosso estudo realizado na tese. Uma variedade mergulhada em M é dita *incompressível* se o mergulho induz uma aplicação injetiva entre os grupos fundamentais. Em [11] Fenley mostrou que: *Se T é um toro mergulhado em M que é transverso ao fluxo, então T é incompressível*. Torna-se natural então, perguntarmos o que podemos afirmar se tivermos como hipótese que T é um toro incompressível em M . Barbot em [5] e Fenley em [9] estudaram a existência de um toro incompressível em M e a sua classe de isotopia, de maneira que esse toro seja isotópico a um outro que esteja em melhor posição possível em relação ao fluxo, e o melhor que podemos esperar é que seja transverso ao fluxo. Ambos obtiveram resultados com condições distintas para que se concluísse que um determinado toro T incompressível em M seja isotópico a um outro que é transverso ao fluxo. Um dos resultados do Fenley diz que: *Se nenhum laço em T é livremente homotópico a uma órbita fechada do fluxo ϕ , então ϕ é topologicamente conjugado a uma suspensão de um difeomorfismo Anosov de um toro de dimensão dois*. Além disto, T é isotópico a um toro transverso ao fluxo.

Barbot [5], inspirado no trabalho de Fenley em [11], fez uso do conceito de losango no espaço das órbitas do levantamento do fluxo ϕ no recobrimento universal e resultados relacionados com anéis de Birkhoff, para mostrar o seguinte resultado:

Teorema (Barbot). *Seja T um toro incompressível em M e suponha que existem dois caminhos fechados c_1 e c_2 em T tais que:*

- (i) c_1 e c_2 não são homólogos em T ;

(ii) Para $i = 1, 2$, c_i é livremente homotópico em M a uma órbita periódica de ϕ .

Então T é isotópico a um toro transverso a ϕ .

Por outro lado, Fenley [9] usou o fato dos espaços das folhas das folheações estável fraca $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e instável fraca $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ não serem Hausdorff e o Teorema de Barbot citado acima para mostrar que: *Se existe um $g \in \pi_1(T)$ que não tem folhas invariantes, mas existe uma folha F de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ (ou de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$) tal que F e $g(F)$ não se separam no respectivo espaço das folhas. Então T é isotópico a um toro transverso a ϕ .*

Existe uma extensa literatura sobre ações Anosov de $\mathbb{R}^k$, noção originalmente dada por Pugh e Shub em [30], devida aos trabalhos de Katok e colaboradores [18], [19] [20], [21], [22], [23], e recentemente Maquera e Barbot [24] e [25], entre outros. Em particular, Maquera e Barbot estudaram ações Anosov de codimensão um e obtiveram vários resultados importantes que serão fundamentais para o nosso trabalho.

O objetivo principal desta tese é mostrar uma versão do Teorema de Barbot para uma ação Anosov ϕ de $\mathbb{R}^k$ de classe C^1 sobre uma $(k+2)$ -variedade fechada M . Sejam $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ a aplicação de recobrimento universal de M e $\widetilde{\phi}$ a ação de $\mathbb{R}^k$ sobre $\widetilde{M}$ que é o levantamento da ação ϕ . Temos assim, o nosso primeiro resultado, que foi obtido por Fenley [11] para um fluxo Anosov numa 3-variedade, que garante a existência de cadeias de losangos (veja a Definição 3.3) no recobrimento universal da variedade M .

Teorema A. *Sejam ϕ uma ação Anosov de codimensão um irreduzível, de $\mathbb{R}^k$ em M com $\dim(M) = k+2$ e g um automorfismo do recobrimento universal $\widetilde{M}$ distinto da identidade que fixa duas órbitas $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$ de $\widetilde{\phi}$. Então, $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$ são conectadas por uma cadeia finita de losangos, todos invariantes por g , assim como os seus vértices. Mais ainda, esta cadeia pode ser escolhida como sendo minimal.*

Para a noção de minimalidade, veja Definição 3.6. Com este resultado em mãos, além de outros que seguem em consequência dele, passamos a estudar o conceito e os resultados envolvendo losangos no espaço das órbitas de $\widetilde{\phi}$ que, pelo trabalho de Maquera e Barbot, é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Finalmente o nosso segundo resultado, e principal, é uma generalização do Teorema de Barbot acima e obtido em [5].

Teorema B. *Seja T um toro de dimensão dois incompressível em M e suponha que existem dois caminhos fechados c_1 e c_2 em T tais que:*

(i) c_1 e c_2 não são homólogos em T ;

(ii) Para $i = 1, 2$, existem $x_0^i \in M$, e v um elemento Anosov dos grupos de isotropia de x_0^1 e de x_0^2 indivisível em ambos tais que c_i é livremente homotópico em M ao caminho $\alpha_i : I \rightarrow M$ dado por $\alpha_i(s) = \phi(sv, x_0^i)$.

Então T é isotópico a um toro transverso à ação ϕ .

Mais detalhes da noção de indivisível ver em Definição 2.30. Para dar um ideia de como este trabalho se desenvolve, a seguir daremos uma breve descrição de sua estrutura.

O Capítulo 1 é onde veremos alguns resultados e definições que serão utilizados nos capítulos seguintes. Falamos um pouco sobre folheações, que será importante para entendermos aquelas que nos serão dadas pela ação Anosov. Algo que também vemos no primeiro capítulo é o conceito de automorfismos do recobrimento, que será crucial em todo o trabalho.

No Capítulo 2 daremos as noções de difeomorfismo, fluxo e ação Anosov, citando algumas propriedades e resultados importantes. A atenção maior será dada às ações, que formam o sistemas Anosov no qual estamos interessados. Apresentamos as ações Anosov irredutíveis de codimensão um, com alguns resultados importantes obtidos por Maquera e Barbot em [24]. Com toda informação que teremos até então, passaremos a estudar a ação dos automorfismos do recobrimento sobre as folheações e as órbitas em $\widetilde{M}$.

No terceiro capítulo, e a partir dele, consideraremos sempre uma ação Anosov de $\mathbb{R}^k$ de codimensão um irredutível em M , variedade fechada de dimensão $k + 2$. Definiremos losangos em $\widetilde{M}$ (o recobrimento universal de M) e cadeias de losangos, para em seguida obtermos resultados importantes, como o Teorema A citado acima e um outro (Proposição 3.9) que envolve um automorfismo do recobrimento e uma folha invariante.

Finalmente, no Capítulo 4 veremos o conceito de losangos agora definidos no espaço das órbitas de $\widetilde{\phi}$. Os resultados obtidos para losangos em $\widetilde{M}$ no Capítulo 3 também se aplicam nesse caso. Veremos novos resultados envolvendo losangos e anel de Birkhoff em M (Definição 4.14) para chegarmos na última seção com tudo que será necessário para enunciar e provar o Teorema B.

Capítulo 1

Preliminares

Veremos alguns resultados e definições que serão necessários em capítulos posteriores, quando usaremos com muita frequência, por exemplo, a relação entre o grupo fundamental de uma variedade M e o grupo dos automorfismos de recobrimento, bem como as folheações que nos serão dadas por uma ação Anosov.

1.1 Automorfismos de recobrimento

Sejam E e X espaços topológicos. Quando estivermos falando de caminhos, I indicará o intervalo fechado $[0, 1]$.

Teorema 1.1 (Levantamento de caminhos, [7]). *Sejam $\pi : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ uma aplicação de recobrimento e $\alpha : I \rightarrow X$ um caminho contínuo tal que $\alpha(0) = x_0$. Então existe um único caminho contínuo $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ tal que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $\tilde{\alpha}(0) = e_0$.*

Qualquer caminho contínuo $\tilde{\alpha}$ que satisfaça $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ é chamado de *levantamento* de α .

Teorema 1.2 (Levantamento de homotopias, [7]). *Sejam (Y, d) um espaço métrico, $\pi : E \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento e $F : Y \times I \rightarrow X$ uma homotopia. Suponhamos que a aplicação $f : Y \rightarrow X$ dada por $f(y) = F(y, 0)$ possua um levantamento $\tilde{f} : Y \rightarrow E$. Então existe uma única homotopia $\tilde{F} : Y \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ para todo $y \in Y$ e $\pi \circ \tilde{F} = F$.*

Proposição 1.3 ([7]). *Sejam $\pi : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ um recobrimento e α e β dois caminhos em X tais que $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Se α e β são homotópicos com extremos fixos ($\alpha \simeq \beta \text{ rel}(0, 1)$) e $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ são dois levantamentos de α e β com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = e_0$ então $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ e $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta} \text{ rel}(0, 1)$.*

Seja $\pi : E \rightarrow X$ um recobrimento. Dizemos que uma aplicação contínua e bijetiva

$f : E \rightarrow E$ é um *automorfismo do recobrimento* $E \xrightarrow{\pi} X$ se o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi \\ & X & \end{array}$$

Isto significa que o automorfismo do recobrimento $E \xrightarrow{\pi} X$ é um levantamento da aplicação $\pi : E \rightarrow X$.

Denotemos por $Home(E)$ o grupo dos homeomorfismos de E , por $G(E, \pi, X)$ o conjunto de todos os automorfismos do recobrimento $E \xrightarrow{\pi} X$ e por $Diff^r(E)$ o grupo dos difeomorfismos de E de classe C^r . Os resultados seguintes (Lema 1.4 e Teorema 1.5) podem ser encontrados em [7].

Lema 1.4 ([7]). $G(E, \pi, X)$ é um subgrupo de $Home(E)$. Se E e X são variedades diferenciáveis e π é de classe C^r então $G(E, \pi, X) \subset Diff^r(E)$.

No que estamos interessados, e que nos será bastante útil, é no caso em que E é o recobrimento universal de X . Neste caso, o grupo de automorfismos do recobrimento tem uma descrição dada da seguinte maneira:

Fixemos um e_0 em E , e $x_0 = \pi(e_0) \in X$. Dado $f \in G(E, \pi, X)$, seja $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ um caminho tal que $\tilde{\alpha}(0) = e_0$ e $\tilde{\alpha}(1) = f(e_0)$. Definimos o caminho $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$. Então

$$x_0 = \alpha(0) = \pi \circ \tilde{\alpha}(0) = \pi(e_0) = \pi \circ f(e_0) = \pi \circ \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1)$$

ou seja, α é um caminho fechado em X com $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.

Definamos $\varphi : G(E, \pi, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ dada por $\varphi(f) = [\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, onde α é como acima. Da Proposição 1.3 e do fato de E ser simplesmente conexo, segue que φ está bem definida. Mais precisamente:

Teorema 1.5 ([7]). Se E é o recobrimento universal de X , $e_0 \in E$, $x_0 = \pi(e_0)$ e $\varphi : G(E, \pi, X) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ é como acima, então φ é um isomorfismo de grupos. Além disto, dado $e_1 \in \pi^{-1}(x_0)$, existe um único automorfismo $f \in G(E, \pi, X)$ tal que $f(e_0) = e_1$.

Em particular, o teorema anterior também nos garante que o único automorfismo do recobrimento $E \xrightarrow{\pi} X$ que tem ponto fixo é a identidade.

A seguir mostramos um teorema que nos dá a relação entre automorfismos do recobrimento associados a dois caminhos livremente homotópicos.

Teorema 1.6. Sejam $c, \alpha : I \rightarrow X$ dois caminhos fechados em X , e f o automorfismo do recobrimento associado a $[\alpha]$. Se c é livremente homotópico a α , então f também é o automorfismo do recobrimento associado a $[c]$.

Prova: Dizer que c é livremente homotópico a α significa que existe uma homotopia $F : I \times I \rightarrow X$ com

$$F(s, 0) = \alpha(s), \quad F(s, 1) = c(s), \quad F(0, t) = F(1, t), \quad \forall s, t \in I.$$

Seja $\alpha(0) = x_0$ e fixemos um ponto $e_0 \in E$ tal que $\pi(e_0) = x_0$. Seja $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$ um levantamento de α com $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. Como f é o automorfismo do recobrimento associado à classe de α , temos que $f(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\alpha}(1)$.

O nosso objetivo é mostrar que f também é o automorfismo associado à classe de c , isto é, que $f(\tilde{c}(0)) = \tilde{c}(1)$ para um levantamento $\tilde{c}$ de c .

Pelo Teorema do levantamento de homotopias (Teorema 1.2) existe uma única homotopia $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{\alpha}(s)$ para todo $s \in I$ e $\pi \circ \tilde{F} = F$.

Definimos o caminho $b : I \rightarrow M$ por $b(t) = F(0, t)$, $b(0) = F(0, 0) = \alpha(0)$ e $b(1) = F(0, 1) = c(0)$. E agora definimos os caminhos $\tilde{c}, \tilde{b}, \tilde{\beta}$ por (veja a Figura 1.1)

$$\tilde{c}(s) = \tilde{F}(s, 1), \quad \tilde{b}(t) = \tilde{F}(0, t), \quad \tilde{\beta}(t) = \tilde{F}(1, t).$$

Já sabemos que $\tilde{\alpha}$ é um levantamento de α com $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{\alpha}(s)$ e como $\pi \circ \tilde{F} = F$ podemos notar que $\tilde{c}$ é um levantamento de c ; $\tilde{b}$ e $\tilde{\beta}$ são dois levantamentos de b , pois

$$\begin{aligned} \pi \circ \tilde{c}(s) &= \pi \circ \tilde{F}(s, 1) = F(s, 1) = c(s) \\ \pi \circ \tilde{b}(t) &= \pi \circ \tilde{F}(0, t) = F(0, t) = b(t) \\ \pi \circ \tilde{\beta}(t) &= \pi \circ \tilde{F}(1, t) = F(1, t) = F(0, t) = b(t) \end{aligned}$$

Figura 1.1: Levantamentos dos caminhos α, c, b, β .

Usando a propriedade da definição de automorfismos do recobrimento temos que

$$\pi \circ f(\tilde{b}) = \pi(\tilde{b}) = b,$$

logo, $f(\tilde{b})$ é um levantamento de b com

$$f(\tilde{b}(0)) = f(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\alpha}(1)$$

e como sabemos pelo Teorema do levantamento de caminhos (teorema 1.1) que existe um único levantamento de b que começa em $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0)$, temos que $f(\tilde{b}) = \tilde{\beta}$. Portanto

$$f(\tilde{c}(0)) = f(\tilde{b}(1)) = \tilde{\beta}(1) = \tilde{c}(1).$$

Mostramos que $f(\tilde{c}(0)) = \tilde{c}(1)$, como queríamos. ■

1.2 Folheações

Usaremos as definições e alguns resultados que podem ser encontrados em [7]. Uma folheação de dimensão n de uma variedade diferenciável M de dimensão m é, a grosso modo, uma decomposição de M em subvariedades conexas de dimensão n , chamadas folhas, que se aglomeram localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ com segunda coordenada constante. Vejamos a definição formal.

Definição 1.7. Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma *folheação* de classe C^r e dimensão n de M , é um atlas máximo $\mathcal{F}$ de classe C^r em M com as seguintes propriedades:

- (i) Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ onde U_1 e U_2 são discos abertos de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^{m-n}$ respectivamente.
- (ii) Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da forma

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

Dizemos também que M é folheada por $\mathcal{F}$. E que esta folheação tem codimensão $m - n$.

As cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ são também chamadas de *cartas trivializadoras* de $\mathcal{F}$.

Consideremos uma carta trivializadora (U, φ) de $\mathcal{F}$ tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados *placas* de U , ou *placas* de $\mathcal{F}$. Fixando um $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho de classe C^r , portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão n e classe C^r de M .

Um *caminho de placas* de $\mathcal{F}$ é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Como M é recoberta pelas placas de $\mathcal{F}$, podemos definir em M a seguinte relação de equivalência: $p \sim q$ se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$.

Definição 1.8. As classes de equivalência da relação citada acima são chamadas *folhas* de $\mathcal{F}$.

Teorema 1.9 ([7]). *Seja M uma variedade folheada por uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão n e classe C^r . Toda folha F de $\mathcal{F}$ possui uma estrutura de variedade C^r de dimensão n , tal que os domínios das cartas locais são placas de $\mathcal{F}$. A aplicação $i : F \rightarrow M$ definida por $i(p) = p$ é uma imersão biunívoca de classe C^r , quando em F consideramos a estrutura de variedade intrínseca. Além disto F é uma subvariedade C^r de M se, e somente se, i é um mergulho.*

Há uma outra definição de folheações que pode ser encontrada em algumas referências (como em [26]), mas ambas são equivalentes. Vejamos essa outra definição.

Definição 1.10. Uma folheação $\mathcal{F}$ de codimensão s e classe $C^r, r \geq 1$ de M está definida por uma coleção máxima de pares $(U_i, f_i), i \in I$, onde os U_i são abertos me M e as $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^s$ são submersões satisfazendo:

- (i) $\bigcup_{i \in I} U_i = M$;
- (ii) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe um difeomorfismo local g_{ij} de classe C^r de $\mathbb{R}^s$ tal que $f_i = g_{ij} \circ f_j$ em $U_i \cap U_j$.

As f_i são chamadas *aplicações distinguidas* de $\mathcal{F}$.

Nesta definição as placas de $\mathcal{F}$ em U_i são as componentes conexas dos conjuntos $f_i^{-1}(c), c \in \mathbb{R}^s$.

A verificação da equivalência entre as duas definições de folheação pode ser feita com a utilização do lema seguinte:

Lema 1.11 ([7]). *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de uma variedade M . Existe uma cobertura $C = \{U_i | i \in I\}$ de M por domínios de cartas locais de $\mathcal{F}$ tal que se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido num domínio de uma carta local de $\mathcal{F}$.*

1.2.1 Espaço e topologia das folhas

Como vimos no Teorema 1.9 as folhas de uma folheação em uma variedade em M herdam uma estrutura de variedade diferenciável imersa. Veremos propriedades dessas imersões e da topologia das folhas.

Estaremos considerando uma variedade M de dimensão m folheada por uma folheação $\mathcal{F}$ de dimensão $n < m$ e classe C^r .

Definição 1.12. O *espaço das folhas* de $\mathcal{F}$, denotado por $M/\mathcal{F}$, é o espaço quociente de M pela relação de equivalência $\sim$ que identifica dois pontos de M se eles estão numa mesma folha de $\mathcal{F}$.

Em $M/\mathcal{F}$ consideramos a topologia quociente, que pode não ser tão simples, podendo $M/\mathcal{F}$ não ser nem mesmo Hausdorff, como veremos futuramente com as folheações dadas por uma ação Anosov.

Definição 1.13. Dado um subconjunto A de M , o *saturado* de A por $\mathcal{F}$ é o conjunto

$$\mathcal{F}(A) = \{x \in M | x \sim y \text{ para algum } y \in A\}$$

Se denotamos por $\wp : M \rightarrow M/\mathcal{F}$ a projeção quociente e por F_x à folha de $\mathcal{F}$ que contém x , temos que

$$\mathcal{F}(A) = \wp^{-1}(\wp(A)) = \bigcup_{x \in A} F_x.$$

Teorema 1.14 ([7]). *A aplicação $\wp$ é uma aplicação aberta, ou seja, o saturado $\mathcal{F}(A)$ de um subconjunto A aberto de M é aberto.*

Seja Σ uma subvariedade de M . Dizemos que Σ é *transversal a $\mathcal{F}$* quando Σ é transversal a todas as folhas de $\mathcal{F}$ que ela encontra. Quando

$$\dim(\Sigma) + \dim(\mathcal{F}) = \dim(M)$$

dizemos que Σ é uma *seção transversal* de $\mathcal{F}$.

Teorema 1.15 (Uniformidade transversal de $\mathcal{F}$, [7]). *Seja F uma folha da folheação $\mathcal{F}$. Dados q_1, q_2 em F , existem seções transversais de $\mathcal{F}$, Σ_1, Σ_2 com $q_1 \in \Sigma_1$ e $q_2 \in \Sigma_2$ e um difeomorfismo C^r , $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ tais que, para qualquer folha F' de $\mathcal{F}$ tem-se $f(F' \cap \Sigma_1) = F' \cap \Sigma_2$.*

Figura 1.2: Uniformidade transversal.

A Figura 1.2 ilustra o Teorema da uniformidade transversal, e como consequência dele temos outros dois teoremas que dizem respeito à topologia das folhas.

Teorema 1.16 ([7]). *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação em M , F uma folha de $\mathcal{F}$ e Σ uma seção transversal de $\mathcal{F}$ tal que $\Sigma \cap F \neq \emptyset$. Temos três possibilidades:*

- (i) $\Sigma \cap F$ é discreto e neste caso F é uma folha mergulhada.
- (ii) O fecho de $\Sigma \cap F$ em Σ contém um aberto. Isto ocorre se, e somente se, o fecho $\overline{F}$ tem interior não vazio e $\text{int}(\overline{F}) = \overline{F} - \partial\overline{F}$ é um aberto que contém F .
- (iii) $\overline{\Sigma \cap F}$ é um conjunto sem pontos isolados com interior vazio.

Para ilustrar um caso em que este teorema pode ser usado, Camacho [7] mostra o seguinte exemplo:

Observe a subvariedade F imersa em $\mathbb{R}^2$ visualizando a Figura 1.3. Ela não pode ser folha de nenhuma folheação definida num aberto de $\mathbb{R}^2$. De fato, se tomarmos uma seção transversal Σ passando pelo ponto x veremos que x é um ponto de acumulação da interseção $\Sigma \cap F$ enquanto que a interseção de uma seção transversal passando por y tem uma estrutura topológica diferente, e neste momento podemos usar o teorema anterior para concluir a nossa afirmação do início deste parágrafo.

Figura 1.3: Variedade imersa que não é uma folha.

Teorema 1.17 ([7]). *Seja F uma folha de uma folheação $\mathcal{F}$. As afirmações abaixo são equivalentes:*

- (i) F é uma folha fechada.
- (ii) Se (U, φ) é uma carta trivializadora de $\mathcal{F}$ tal que $\overline{U}$ é compacto, então $U \cap F$ contém um número finito de placas de U .
- (iii) A imersão $i : F \rightarrow M, i(x) = x$ é própria, ou seja, para qualquer compacto $K \subset M$ a imagem inversa $i^{-1}(K)$ é compacto.

Em particular, se F é fechada então F é uma folha mergulhada.

1.2.2 Holonomia

Nesta subseção, $\mathcal{F}$ denota uma folheação de codimensão n e classe $C^r, r \geq 1$ de uma variedade M de dimensão m .

Sejam F uma folha de $\mathcal{F}$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho e Σ_0, Σ_1 pequenas seções transversais a $\mathcal{F}$ de dimensão n passando por $p_0 = \gamma(0)$ e $p_1 = \gamma(1)$ respectivamente. Definiremos uma transformação local entre Σ_0 e Σ_1 ao longo das folhas de $\mathcal{F}$ sobre o caminho γ levando p_0 em p_1 .

Do Lema 1.11 segue que existe uma sequência de cartas locais $(U_i)_{i=0}^k$ e uma partição de $[0, 1], 0 = t_0 < \dots < t_{k+1} = 1$ tais que:

- (i) Se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então $U_i \cup U_j$ está contido numa carta local de $\mathcal{F}$;
- (ii) $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ para todo $0 \leq i \leq k$.

Dizemos que $(U_i)_{i=0}^k$ é uma *cadeia subordinada* a γ .

Para cada $0 \leq i \leq k$ fixemos uma seção transversal a $\mathcal{F}$, $D(t_i) \subset U_{i-1} \cap U_i$ homeomorfa a um disco de dimensão n passando por $\gamma(t_i)$. Consideremos $D(0) = \Sigma_0$ e $D(1) = \Sigma_1$.

Deste modo, para cada $x \in D(t_i)$ suficientemente próximo de $\gamma(t_i)$ a placa de U_i que passa por x intercepta $D(t_{i+1})$ num único ponto $f_i(x)$ (veja a Figura 1.4).

Figura 1.4: As seções transversais $D(t_i)$ e $D(t_{i+1})$.

O domínio da aplicação f_i contém um disco $D'_i \subset D(t_i)$ contendo $\gamma(t_i)$. Daí podemos fazer a composição

$$f_\gamma = f_k \circ f_{k-1} \circ \cdots \circ f_0$$

que está bem definida de uma vizinhança de p_0 em Σ_0 em Σ_1 . Chamaremos f_γ de *aplicação de holonomia associada a γ* .

Lema 1.18 ([7]). *A aplicação f_γ independe dos discos $(D(t_i))_{i=1}^k$ e da cadeia subordinada, isto é, se $\tilde{f}_\gamma$ e f_γ são duas aplicações de holonomia associadas ao mesmo caminho, então $\tilde{f}_\gamma$ e f_γ coincidem na interseção dos seus domínios.*

Observação 1.19. Da maneira como a aplicação f_γ é definida temos o seguinte:

- (i) $f_\gamma(p_0) = p_1$.
- (ii) Se $\gamma^{-1} = \gamma(1 - t)$, então $f_{\gamma^{-1}} = (f_\gamma)^{-1}$.
- (iii) Sendo $\mathcal{F}$ de classe C^r ($r \geq 1$) as aplicações intermediárias f_i ($0 \leq i \leq k$) são C^r , logo f_γ é C^r . Como f_γ possui uma inversa $f_{\gamma^{-1}}$ também C^r , f_γ é um difeomorfismo de classe C^r .

Definição 1.20. Sejam X, Y espaços topológicos e $x \in X$. No conjunto de aplicações $f : V \rightarrow Y$, onde $V \subset X$ é uma vizinhança de x , introduzimos a relação de equivalência $\sim$, onde $f \sim g$ se, e somente se, existe uma vizinhança W de x tal que $f|_W = g|_W$. A classe de equivalência de f é denominada *germe* de f em x .

Quando $X = Y$, o conjunto $G(X, x)$ de germes de homeomorfismos locais que fixam x é um grupo com a multiplicação

$$\text{germe}(f) \circ \text{germe}(g) = \text{germe}(f \circ g)$$

sendo que o domínio de $f \circ g$ é a interseção do domínio de g com $g^{-1}(D)$, sendo D o domínio de f .

Teorema 1.21 ([7]). *Sejam $\gamma_i : I \rightarrow M, i = 0, 1$, caminhos contidos numa folha F de $\mathcal{F}$ tais que $\gamma_i(0) = p_0, \gamma_i(1) = p_1, i = 0, 1$. Sejam Σ_0, Σ_1 seções transversais a F em p_0 e p_1 respectivamente. $D_i \subset \Sigma_0$ e $f_{\gamma_i} : D_i \rightarrow \Sigma_1$ aplicações de holonomia associadas a γ_i , e φ_{γ_i} o germe de f_{γ_i} em p_0 .*

(i) *Se $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel}(0, 1)$ então $\varphi_{\gamma_0} = \varphi_{\gamma_1}$.*

(ii) *Se $p_0 = p_1$ e $\Sigma_0 = \Sigma_1$, então a transformação $\gamma \rightarrow \varphi_{\gamma^{-1}}$ induz um homomorfismo*

$$\Phi : \pi_1(F, p_0) \rightarrow G(\Sigma_0, p_0), \quad \Phi([\gamma]) = \varphi_{\gamma^{-1}}$$

do grupo fundamental de F em p_0 no grupo de germes de difeomorfismos C^r de Σ_0 que deixam p_0 fixo.

Definição 1.22. O subgrupo $\text{Hol}(F, p_0) = \Phi(\pi_1(F, p_0))$ de $G(\Sigma_0, p_0)$ é chamado *grupo de holonomia* de F em p_0 .

Dados $p_0, p_1 \in F$, qualquer caminho $\alpha : I \rightarrow F$ com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = p_1$ induz um isomorfismo

$$\alpha^* : \text{Hol}(F, p_0) \rightarrow \text{Hol}(F, p_1)$$

com $\alpha^*(\Phi([\mu])) = \varphi_\alpha \circ \Phi([\mu]) \circ \varphi_{\alpha^{-1}}$. Desta maneira podemos falar do *grupo de holonomia de F* como sendo qualquer grupo isomorfo a $\text{Hol}(F, p_0)$.

Esta noção foi introduzida por Ehresmann em [8].

1.2.3 Folheações orientáveis e transversalmente orientáveis

Um *campo de vetores* de classe C^r em M é uma aplicação de classe $C^r, X : M \rightarrow TM$, tal que $\wp \circ X$ é a identidade de M sendo $\wp : TM \rightarrow M$ a projeção natural do fibrado tangente. Em outras palavras um campo de vetores X em M é uma aplicação que associa a cada ponto $x \in M$ um vetor do espaço tangente a M em x . Uma curva $C^1, \gamma : (a, b) \rightarrow M$ que satisfaz $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ com $\gamma(0) = x$ é chamada *órbita* ou *curva integral* de X por x .

Um *campo de k -planos* em uma variedade diferenciável M é uma aplicação P que associa a cada ponto $q \in M$ um subespaço vetorial de dimensão k de $T_q M$. Dizemos que P é de classe C^r se para todo $q \in M$ existem k campos de vetores $C^r, X^1, \dots, X^k$, definidos numa vizinhança V de q tais que para todo $x \in V, \{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ é uma base de $P(x)$.

Proposição 1.23 ([7]). *Toda folheação $\mathcal{F}$ de dimensão k e classe $C^r, r \geq 1$, em M , define um campo de k -planos de classe C^{r-1} em M .*

Dado um espaço vetorial E de dimensão $n \geq 1$, dizemos que duas bases ordenadas de E , $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$ definem a mesma orientação em E se a matriz de mudança de base $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ definida por $v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j$, tem determinante positivo. Se B é o conjunto das bases ordenadas de E , a relação $\sim$, em que $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ definem a mesma orientação em E , é uma relação de equivalência em B , a qual possui duas classes de equivalência chamadas *orientações de E* .

Seja P um campo de k -planos contínuo em M . Diremos que P é orientável se para cada $x \in M$ for possível escolher uma orientação $\mathcal{O}(x)$ em $P(x)$ de forma que a aplicação $x \mapsto \mathcal{O}(x)$ seja contínua no seguinte sentido: Consideremos uma cobertura de M por abertos $(U_i)_{i \in I}$ tal que para cada $i \in I$ a restrição $P|_{U_i}$ é definida por k campos de vetores contínuos $X_i^1, \dots, X_i^k$. Para cada $x \in U_i$, as bases $\mathcal{B}(x) = \{X_i^1(x), \dots, X_i^k(x)\}$ e $\mathcal{B}'(x) = \{-X_i^1(x), \dots, X_i^k(x)\}$ definem duas orientações distintas em $P(x)$, digamos $\mathcal{O}_i^+(x)$ e $\mathcal{O}_i^-(x)$. Dizemos que a escolha de $\mathcal{O}$ é contínua se $\mathcal{O}|_{U_i} = \mathcal{O}_i^+$ para todo i e sempre que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ temos que $\mathcal{O}_i^+ = \mathcal{O}_j^+$ na interseção.

Se $k = \dim(M)$ e $P(x) = T_x M$ dizemos que M é orientável.

Proposição 1.24 ([7]). *Se M é simplesmente conexa, então todo campo de k -planos ($1 \leq k \leq \dim(M)$) é orientável. Em particular, M é orientável.*

Vejamos agora as noções de orientabilidade e orientabilidade transversal na teoria de folheações.

Seja P um campo de k -planos em M . Dizemos que $\tilde{P}$ é um campo *complementar* a P ou *transversal* a P , se para todo x em M tivermos

$$P(x) + \tilde{P}(x) = T_x M \quad \text{e} \quad P(x) \cap \tilde{P}(x) = \{0\}.$$

Da definição fica claro que $\tilde{P}$ é um campo de planos de codimensão k .

Definição 1.25. Seja P um campo contínuo de k -planos. Dizemos que P é transversalmente orientável se existe um campo complementar a P contínuo e orientável.

Proposição 1.26 ([7]). *Se P é transversalmente orientável, qualquer campo de planos contínuos e complementar a P é orientável.*

Teorema 1.27 ([7]). *Seja P um campo de k -planos de classe C^r em M . Valem as seguintes propriedades:*

- (i) *Se P é orientável e transversalmente orientável, então M é orientável;*
- (ii) *Se M é orientável, então P é orientável se e somente se é transversalmente orientável.*

Definição 1.28. Uma folheação $\mathcal{F}$ de classe C^r ($r \geq 1$) é *orientável* se o campo de planos tangente a $\mathcal{F}$ é orientável. De maneira análoga, $\mathcal{F}$ é *transversalmente orientável* se o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$ é transversalmente orientável. Denotamos o campo de planos tangentes a $\mathcal{F}$ por $T\mathcal{F}$.

Considerando uma folheação como acima, em cada ponto $x \in M$ o espaço tangente à folha que contém x em x é um subespaço do espaço tangente $T_x M$. Isto define um subfibrado de TM de classe C^r cujas fibras têm a mesma dimensão da folheação $\mathcal{F}$, este fibrado é o $T\mathcal{F}$ da definição acima e o chamamos de *fibrado tangente de $\mathcal{F}$* .

Definição 1.29. Quando um subfibrado E de TM é o fibrado tangente de uma folheação, dizemos que E é *integrável*.

1.3 Ação de $\mathbb{R}^k$

Temos a definição mais geral de uma ação de um grupo de Lie G em uma variedade M , mas nos concentraremos no caso que mais nos interessa, ações de $\mathbb{R}^k$ em M .

Definição 1.30. Uma *ação* de classe C^r de $\mathbb{R}^k$ em M é uma aplicação $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ de classe C^r , que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\phi(0, x) = x$ para todo $x \in M$.
- (ii) $\phi(u, \phi(v, x)) = \phi(u + v, x)$ para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^k$ e $x \in M$.

Dado um $v \in \mathbb{R}^k$, ao denotarmos por $\phi^v : M \rightarrow M$ a aplicação definida por $\phi^v(x) = \phi(v, x)$, da definição de uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M segue que $\phi^{-v} = (\phi^v)^{-1}$ e consequentemente ϕ^v é um difeomorfismo de classe C^r .

A *órbita de um ponto $x \in M$* pela ação ϕ é o conjunto

$$\mathcal{O}_x(\phi) = \{\phi(v, x) | v \in \mathbb{R}^k\}$$

e o *grupo de isotropia* de $x \in M$ pela ação ϕ é o subgrupo de $\mathbb{R}^k$ definido por

$$\Gamma_x = \Gamma_x(\phi) = \{v \in \mathbb{R}^k | \phi(v, x) = x\}.$$

Dizemos que $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ é uma *ação folheada* se para todo $x \in M$ o espaço tangente à órbita de ϕ passando por x tem dimensão s fixa, ou seja, a dimensão da órbita $\mathcal{O}_x(\phi)$ é s para qualquer $x \in M$. Quando $s = k$ dizemos que ϕ é *localmente livre*.

Proposição 1.31 ([7]). *As órbitas de uma ação folheada definem as folhas de uma folheação.*

Observação 1.32. Dizer que ϕ é localmente livre é equivalente a dizer que o grupo de isotropia de qualquer ponto $x \in M$ é discreto. E quando isto acontece as órbitas são difeomorfas a $\mathbb{R}^l \times \mathbb{T}^{k-l}$, $0 \leq l \leq k$.

Definição 1.33. Um *fluxo* de classe C^r em M é uma ação $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ de classe C^r .

Quando um fluxo é uma ação localmente livre nós o chamamos de fluxo *não-singular*.

A um fluxo ϕ em M de classe C^r está associado um campo de vetores de classe C^{r-1} dado por

$$X(x) = \frac{d}{dt}\phi(t, x)|_{t=0}.$$

Da maneira como definimos o campo de vetores X , a curva $t \mapsto \phi(t, x)$ é a órbita de X que passa por x , o que podemos comprovar observando que

$$\frac{d}{dt}\phi(t, x) = \frac{d}{ds}\phi(s + t, x)|_{s=0} = \frac{d}{ds}\phi(s, \phi(t, x))|_{s=0} = X(\phi(t, x)).$$

Reciprocamente, se um campo de vetores X de classe C^r em M tem todas as suas órbitas definidas em $\mathbb{R}$, existe um único fluxo $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, de classe C^r , tal que a curva $t \mapsto \phi(t, x)$ é a órbita de X em $x = \phi(0, x)$ (Teorema de Picard).

Quando X é um campo de vetores de classe C^r e M é uma variedade compacta é possível mostrar (vide [27]) que o fluxo associado a X está definido de $\mathbb{R} \times M$ em M .

Observação 1.34. Quando temos uma ação $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$, em algumas situações, fixado um $v \in \mathbb{R}^k$, usamos a notação ϕ^{tv} para indicar o fluxo dado por $\phi^{tv}(x) = \phi(tv, x)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Ações Anosov de $\mathbb{R}^k$: algumas propriedades gerais

Na Seção 2.1 daremos as noções e alguns resultados importantes relativos a difeomorfismos, fluxos e ações Anosov. Falaremos rapidamente sobre difeomorfismos e fluxos Anosov: as noções desses dois sistemas foram introduzidas por Anosov em [1]. O foco principal será dado às ações Anosov de $\mathbb{R}^k$ em uma variedade M , ver Definição 2.10, que é o tema de maior interesse deste trabalho.

Na Seção 2.2 apresentamos algumas propriedades gerais para ações Anosov de codimensão um irredutíveis, estes resultados, em sua maioria, foram obtidos por Barbot e Maquera em [24].

Finalmente, na Seção 2.3, considerando a ação dos automorfismos do recobrimento universal apresentamos algumas propriedades importantes sobre órbitas e folhas (no recobrimento universal) que são preservadas por estes automorfismos. Isto será importante para mostrar os nossos resultados principais da tese.

2.1 Sistemas Anosov

No que resta deste capítulo M denotará uma variedade fechada e de classe C^∞ .

2.1.1 Difeomorfismo Anosov

Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo de classe C^r com $1 \leq r \leq \infty$.

Definição 2.1. Dizemos que f é um *difeomorfismo Anosov* se existe uma decomposição contínua do fibrado tangente $TM = E^s \oplus E^u$ tal que

1. Ambos E^s e E^u são invariantes pela derivada Df ,
2. Existem constantes $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|(Df^n)_x(v)\| \leq c\lambda^n \|v\|, \quad \forall v \in E_x^s, \quad \forall n > 0,$$

$$\|(Df^{-n})_x(v)\| \leq c\lambda^n \|v\|, \forall v \in E_x^u, \forall n > 0.$$

Os subfibrados E^s e E^u são integráveis com folhas de classe C^r , ou seja, existem folheações $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ associadas a E^s, E^u chamadas *folheação estável* e *folheação instável* respectivamente. Além disto, ambas as folheações são invariantes por f , isto é, f leva uma folha de $\mathcal{F}^s$ (respectivamente de $\mathcal{F}^u$) em outra folha de $\mathcal{F}^s$ (respectivamente de $\mathcal{F}^u$) (isto pode ser consultado em [32]).

Dado f um difeomorfismo definido em M , dizemos que f é C^r -*estruturalmente estável* se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^r(M)$ de f no grupo dos difeomorfismos de classe C^r em M , provido da topologia C^r , tal que todo $g \in \mathcal{U}$ é topologicamente conjugado a f , ou seja, para todo $g \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo h de M tal que $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Ainda considerando um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$, o *conjunto errante* de f é o conjunto formado por cada ponto x de M que tem uma vizinhança $U_x \subset M$ com $f^n(U_x) \cap f^m(U_x) = \emptyset$ para todo $n \neq m$. O complementar do conjunto errante é o *conjunto não-errante*, que denotamos por $\Omega(f)$.

O dois teoremas seguintes também podem ser encontrados em [32].

Teorema 2.2 (Anosov). *Seja f um difeomorfismo Anosov de classe C^r ($r \geq 1$) definido em uma variedade fechada M . Então f é C^r -estruturalmente estável. Além disto, o conjunto dos difeomorfismos Anosov é um aberto, na topologia C^r , do grupo dos difeomorfismos de classe C^r de M .*

Teorema 2.3 (Anosov). *Seja f um difeomorfismo Anosov definido em uma variedade fechada M . Se o conjunto não-errante de f é igual a M , então os pontos periódicos de f são densos em M .*

O seguinte exemplo que descrevemos a seguir pode ser encontrado em [26]. Seja $SL(n, \mathbb{Z})$ o grupo das matrizes quadradas de ordem n com entradas inteiras e determinante igual a 1. Consideremos um matriz $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ com autovalores de módulo diferente de 1, A é chamada de matriz *hiperbólica*. Denotamos por E^s a soma dos autoespaços associados aos autovalores de módulo menor que 1 e por E^u a soma dos autoespaços associados aos autovalores de módulo maior que 1. Os espaços E^s e E^u são invariantes por A , $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, e existem $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\begin{aligned} \|A^m(v)\| &\leq c\lambda^m \|v\|, \forall v \in E^s, \forall m > 0 \\ \|A^{-m}(v)\| &\leq c\lambda^m \|v\|, \forall v \in E^u, \forall m > 0. \end{aligned}$$

Isto significa que $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo Anosov, mas o que nós queremos é um difeomorfismo Anosov definido em uma variedade fechada.

Como A é uma matriz de determinante igual a 1 e entradas inteiras, então $A(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Logo A induz um difeomorfismo f_A no n -toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

Proposição 2.4. *O difeomorfismo $f_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ é Anosov.*

2.1.2 Fluxo Anosov

Definição 2.5 (Fluxo Anosov). Dizemos que um fluxo não-singular $\phi^t : M \rightarrow M$ de classe C^r ($r \geq 1$) é um *fluxo Anosov* se existe uma decomposição contínua do fibrado tangente $TM = E^{ss} \oplus E^0 \oplus E^{uu}$ tal que

1. E^0 tem dimensão um e é tangente ao fluxo;
2. E^{uu} e E^{ss} são invariantes por $D\phi^t$, para qualquer t ;
3. Existem constantes $c > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que

$$\|D\phi^t(v)\| \leq c\lambda^t\|v\|, \quad \forall v \in E^{ss}, \quad \forall t \geq 0,$$

$$\|D\phi^{-t}(v)\| \leq c\lambda^t\|v\|, \quad \forall v \in E^{uu}, \quad \forall t \geq 0.$$

Os subfibrados E^{ss} e E^{uu} são integráveis, com as folheações $\mathcal{F}^{ss}$ e $\mathcal{F}^{uu}$, *estável forte* e *instável forte* respectivamente. Além disto, os fibrados $E^0 \oplus E^{ss}$ e $E^0 \oplus E^{uu}$ também são integráveis (Pugh-Shub [30]), gerando as folheações $\mathcal{F}^s$ *estável fraca* e $\mathcal{F}^u$ *instável fraca*. Existe no máximo uma órbita fechada de ϕ em cada folha de $\mathcal{F}^s$ ou $\mathcal{F}^u$.

Dizemos que um fluxo Anosov é de *codimensão um* se a dimensão de E^{ss} ou a dimensão de E^{uu} é igual a 1.

Definição 2.6. Um ponto $x \in M$ é chamado *não-errante* do fluxo ϕ , se para qualquer vizinhança $U \subset M$ de x e qualquer $T > 0$, existe $t > T$ tal que $\phi^t(U) \cap U \neq \emptyset$. O conjunto de todos os pontos não-errantes de ϕ é chamado *conjunto não-errante* de ϕ e denotamos por $\Omega(\phi)$.

O teorema seguinte pode ser consultado em [26].

Teorema 2.7. *As condições seguintes são equivalentes (ϕ um fluxo Anosov):*

- (i) *O conjunto não-errante $\Omega(\phi)$ é toda a variedade M .*
- (ii) *O conjunto dos pontos periódicos é denso em M .*
- (iii) *Existe um ponto $x \in M$ tal que sua órbita $\mathcal{O}_x(\phi)$ é densa em M .*
- (iv) *Todas as folhas da folheação instável fraca são densas em M .*
- (v) *Todas as folhas da folheação estável fraca são densas em M .*

Definição 2.8. Dizemos que um fluxo é *topologicamente transitivo* se ele admite uma órbita densa.

Se valem as condições do teorema anterior, então o fluxo Anosov é topologicamente transitivo.

Franks e Williams, em [14], construíram um exemplo em dimensão três de um fluxo Anosov que não é topologicamente transitivo. Já Verjovsky em [31] mostrou o seguinte resultado:

Teorema 2.9. *Um fluxo Anosov de codimensão um em uma variedade de dimensão maior que três é transitivo.*

2.1.3 Ação Anosov

A noção de ação Anosov foi introduzida por Pugh e Shub em [30]. Alguns dos resultados que mencionaremos nesta seção podem ser consultados no trabalho de Barbot e Maquera em [24].

Definição 2.10 (Ação Anosov). Seja ϕ uma ação localmente livre de classe C^2 de $\mathbb{R}^k$ em M . Denotamos por $T\phi$ o subfibrado k -dimensional de TM que é tangente às órbitas de ϕ .

1. Dizemos que $a \in \mathbb{R}^k$ é um *elemento Anosov* para ϕ , se $g = \phi(a, \cdot)$ age de forma normalmente hiperbólica em relação à folheação das órbitas, ou seja, existem números reais $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ e uma decomposição contínua Dg -invariante do fibrado tangente

$$TM = E_a^{ss} \oplus T\phi \oplus E_a^{uu}$$

tais que

$$\|Dg^n(v)\| \leq c\lambda^n \|v\|, \forall v \in E_a^{ss}, \forall n \geq 0,$$

$$\|Dg^{-n}(v)\| \leq c\lambda^n \|v\|, \forall v \in E_a^{uu}, \forall n \geq 0.$$

2. Dizemos que ϕ é uma *ação Anosov* se algum $a \in \mathbb{R}^k$ é um elemento Anosov para ϕ .

Os subfibrados E_a^{ss} , E_a^{uu} , $T\phi \oplus E_a^{ss}$, $T\phi \oplus E_a^{uu}$ são integráveis (Hirsch, Pugh, Shub [16]), com as folheações correspondentes $\mathcal{F}_a^{ss}$, $\mathcal{F}_a^{uu}$, $\mathcal{F}_a^s$, $\mathcal{F}_a^u$ chamadas de *folheação estável forte*, *folheação instável forte*, *folheação estável fraca*, e *folheação instável fraca*, respectivamente.

Observação 2.11. Seja $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\phi)$ o conjunto dos elementos Anosov de ϕ .

(i) $\mathcal{A}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^k$.

(ii) Cada componente conexa de $\mathcal{A}$ é um cone convexo aberto de $\mathbb{R}^k$.

Qualquer cone convexo aberto contido em uma componente conexa de $\mathcal{A}$ é chamado *subcone regular*.

- (iii) Se $\mathcal{A}_a$ é a componente conexa de $\mathcal{A}$ que contém a , então $\mathcal{F}_a^{ss} = \mathcal{F}_b^{ss}$, $\mathcal{F}_a^{uu} = \mathcal{F}_b^{uu}$, $\mathcal{F}_a^s = \mathcal{F}_b^s$, $\mathcal{F}_a^u = \mathcal{F}_b^u$ para todo $b \in \mathcal{A}_a$.

Fixando um cone Anosov, por praticidade, sempre que possível, vamos omitir o elemento Anosov na notação dos fibrados e das folheações e denotaremos apenas $\mathcal{F}^{ss}$, $\mathcal{F}^{uu}$, $\mathcal{F}^s$, $\mathcal{F}^u$.

Proposição 2.12. *Qualquer órbita de ϕ cujo grupo de isotropia contém um elemento Anosov é compacta.*

Proposição 2.13. *Dado um subcone regular $\mathcal{C}$, o grupo de isotropia de qualquer órbita compacta tem um elemento em $\mathcal{C}$.*

Definição 2.14. Diremos que uma ação Anosov tem *codimensão um* quando a dimensão de E^{uu} for igual a 1.

Como havíamos definido para o caso de fluxo, dizemos que uma ação Anosov é *topologicamente transitiva* se ela admite uma órbita densa.

Os resultados anteriores podem ser vistos em [24] no mesmo trabalho em que Barbot e Maquera mostraram o próximo teorema, que é uma generalização do Teorema 2.9 de Verjovsky, para ações Anosov.

Teorema 2.15. *Toda ação Anosov de codimensão um de $\mathbb{R}^k$ em uma variedade fechada de dimensão maior que $k + 2$ é topologicamente transitiva.*

2.2 Algumas propriedades gerais de ações Anosov de codimensão um irredutíveis

Daremos a noção de ação Anosov de codimensão um irredutível, e a partir de então estaremos sempre considerando ações desse tipo, pois elas nos possibilitam um maior conhecimento em relação às folheações obtidas no espaço de recobrimento universal de M , através do trabalho de Barbot e Maquera em [24].

Seja $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ o recobrimento universal de M . As folheações $\mathcal{F}^{uu}$, $\mathcal{F}^{ss}$, $\mathcal{F}^u$ e $\mathcal{F}^s$ são levantadas para as folheações $\widetilde{\mathcal{F}}^{uu}$, $\widetilde{\mathcal{F}}^{ss}$, $\widetilde{\mathcal{F}}^u$, $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ em $\widetilde{M}$ respectivamente, e ϕ é levantada para $\widetilde{\phi}$ em $\widetilde{M}$.

Vamos denotar por $W^s(x)$ a folha de $\mathcal{F}^s$ contendo o ponto $x \in M$, e de modo semelhante, para um ponto $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$, definimos $W^u(x)$, $W^{ss}(x)$, $W^{uu}(x)$, $\widetilde{W}^s(\widetilde{x})$, $\widetilde{W}^u(\widetilde{x})$, $\widetilde{W}^{ss}(\widetilde{x})$, $\widetilde{W}^{uu}(\widetilde{x})$.

Definição 2.16. Uma ação Anosov de codimensão um é dita *irredutível* se, para quaisquer $v \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ e $x \in M$ com $\phi^v(x) = x$ temos que, a holonomia ao longo de $\gamma = \{\phi^{tv}(x) | t \in [0, 1]\}$ de $W^s(x)$ é uma contração ou expansão topológica.

Definição 2.17. Uma variedade mergulhada em M é dita *incompressível* se o mergulho induz um homomorfismo injetivo entre grupos fundamentais.

Proposição 2.18 ([24]). *Se ϕ é uma ação Anosov de codimensão um irreduzível em M , então qualquer órbita de ϕ é incompressível.*

Dizemos que uma folheação é *por planos fechados* se todas as folhas são fechadas e imagens de mergulhos de $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.19 ([24]). *Seja ϕ uma ação Anosov de codimensão um irreduzível em M . As folheações $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}, \tilde{\mathcal{F}}^{ss}, \tilde{\mathcal{F}}^u, \tilde{\mathcal{F}}^s$ e a folheação definida pelas órbitas de $\tilde{\phi}$ são folheações por planos fechados. A intersecção entre uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ e uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ é no máximo uma órbita de $\tilde{\phi}$. Cada órbita de $\tilde{\phi}$ encontra uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^{uu}$ ou $\tilde{\mathcal{F}}^{ss}$ no máximo uma vez.*

Da proposição anterior sabemos que as folhas de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ e $\tilde{\mathcal{F}}^u$ são planos topológicos, portanto, por um resultado de Palmeira em [29], $\tilde{M}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, onde $n = \dim(M)$.

O resultado seguinte nos garante que as órbitas de uma ação Anosov ϕ de codimensão um irreduzível são toros $\mathbb{T}^k$ ou planos.

Proposição 2.20 ([24]). *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação Anosov de codimensão um, irreduzível. Qualquer órbita não compacta de ϕ é um plano.*

Já o corolário abaixo também nos descreve como são as órbitas de uma ação Anosov de codimensão um mesmo que ele não seja irreduzível.

Corolário 2.21 ([24]). *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação Anosov de codimensão um, não necessariamente irreduzível. Qualquer órbita não compacta de ϕ é difeomorfa a $\mathbb{T}^l \times \mathbb{R}^{k-l}$.*

Outro resultado importante obtido por Barbot e Maquera em [24] é o seguinte.

Teorema 2.22. *Se ϕ é uma ação Anosov de codimensão um, irreduzível de $\mathbb{R}^k$ em M com $\dim(M) = n$, então o espaço das órbitas de $\tilde{\phi}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^{n-k}$.*

2.3 Folhas e órbitas periódicas para automorfismos do recobrimento universal

Como o grupo fundamental $\pi_1(M)$ é isomorfo ao grupo dos automorfismos do recobrimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ (Teorema 1.5), identificaremos um automorfismo g com um elemento $g \in \pi_1(M)$.

Definição 2.23. Dado um automorfismo $g \in \pi_1(M)$ dizemos que g é *indivisível* em $\pi_1(M)$ se sempre que escrevermos $g = h^n$ para $h \in \pi_1(M)$ e $n \in \mathbb{Z}$ tivermos que $n = 1$ e $h = g$ ou $n = -1$ e $h = g^{-1}$.

Definição 2.24. Dizemos que $g \in \pi_1(M)$ deixa uma folha F de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (ou de $\tilde{\mathcal{F}}^u$) *quase invariante* se F e $g(F)$ não são separados no respectivo espaço das folhas. Equivalentemente, F e $g(F)$ não têm vizinhanças saturadas disjuntas em $\tilde{M}$.

Uma órbita $\mathcal{O}$ de $\tilde{\phi}$ é dita *periódica* se existe um automorfismo do recobrimento g não-trivial, com $g(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. De maneira análoga, dizemos que uma folha F de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (ou de $\tilde{\mathcal{F}}^u$) é *periódica* se existe $g \in \pi_1(M)$ com $g(F) = F$, $g \neq id$.

Usaremos $\mathcal{O}$ para denotar uma órbita de $\tilde{\phi}$ ou de ϕ desde que, na ocasião, não haja a possibilidade de confusão.

Proposição 2.25. *Uma órbita $\tilde{\mathcal{O}}$ de $\tilde{\phi}$ é periódica se, e somente se, $\mathcal{O} = \pi(\tilde{\mathcal{O}})$ é uma órbita compacta de ϕ .*

Prova: Fixemos $x_0 \in M$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ com $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$, e seja $\tilde{\mathcal{O}} = \{\tilde{\phi}(v, \tilde{x}_0) | v \in \mathbb{R}^k\}$ uma órbita de $\tilde{\phi}$. Sabemos que $\pi(\tilde{\phi}(v, \tilde{x}_0)) = \phi(v, x_0)$, logo $\mathcal{O} = \pi(\tilde{\mathcal{O}}) = \{\phi(v, x_0) | v \in \mathbb{R}^k\}$.

(1) Suponhamos que $\tilde{\mathcal{O}}$ seja uma órbita periódica de $\tilde{\phi}$, ou seja, existe um automorfismo $g \in \pi_1(M) \setminus \{id\}$ tal que $g(\tilde{\mathcal{O}}) = \tilde{\mathcal{O}}$, (lembre-se que o único automorfismo do recobrimento que tem ponto fixo é a identidade) logo, existe um $v_0 \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ tal que

$$g(\tilde{x}_0) = g(\tilde{\phi}(0, \tilde{x}_0)) = \tilde{\phi}(v_0, \tilde{x}_0).$$

Com isto e com a propriedade dos automorfismos do recobrimento, temos que

$$\phi(0, x_0) = \pi(\tilde{\phi}(0, \tilde{x}_0)) = \pi \circ g(\tilde{\phi}(0, \tilde{x}_0)) = \pi(\tilde{\phi}(v_0, \tilde{x}_0)) = \phi(v_0, x_0).$$

Isto, junto com a Proposição 2.20, nos mostra que $\mathcal{O}$ é uma órbita compacta de ϕ .

(2) Agora, se temos como hipótese que $\mathcal{O}$ é uma órbita compacta de ϕ , existe um $v_0 \in \mathbb{R}^k - \{0\}$ com $\phi(v_0, x_0) = x_0$, tomamos $t_0 = \min\{t > 0 | \phi(tv_0, x_0) = x_0\}$ e definimos o caminho $\alpha : [0, t_0] \rightarrow M$ por $\alpha(t) = \phi(tv_0, x_0)$, $\alpha(0) = \alpha(t_0) = x_0$, existe um único caminho contínuo $\tilde{\alpha} : [0, t_0] \rightarrow \tilde{M}$ com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ que é um levantamento de α . Seja $\tilde{\beta} : [0, t_0] \rightarrow \tilde{M}$ o caminho definido por $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\phi}(tv_0, \tilde{x}_0)$, $\tilde{\beta}(0) = \tilde{x}_0$ e

$$\pi \circ \tilde{\beta}(t) = \pi(\tilde{\phi}(tv_0, \tilde{x}_0)) = \phi(tv_0, x_0) = \alpha(t), \quad \forall t \in [0, t_0],$$

logo, $\tilde{\beta} = \tilde{\alpha}$. $\tilde{\alpha}(t_0) = \tilde{y}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ e existe um único automorfismo do recobrimento $g \in \pi_1(M)$ tal que $g(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$.

Como $\tilde{x}_0 = \tilde{\phi}(0, \tilde{x}_0) \neq \tilde{\phi}(t_0 v_0, \tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$, temos que $g \neq id$ e sendo $g(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0 \in \tilde{\mathcal{O}}$, concluímos que $g(\tilde{\mathcal{O}}) = \tilde{\mathcal{O}}$.

Observe que tanto o automorfismo g quanto a órbita $\tilde{\mathcal{O}}$ são determinados quando nós escolhemos o $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. ■

Proposição 2.26. *Uma folha $F \in \tilde{\mathcal{F}}^s$ (ou $F \in \tilde{\mathcal{F}}^u$) é periódica se, e somente se, $\pi(F)$ contém uma órbita compacta de ϕ .*

Prova: Se F é periódica, então existe um $g \in \pi_1(M) \setminus \{id\}$ com $g(F) = F$. Fixamos um $\tilde{x}_0 \in F$ e tomamos um caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow F$ com $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$ e $\tilde{\alpha}(1) = g(\tilde{x}_0)$. Definindo $\alpha : I \rightarrow M$ por $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$ é um levantamento de α e $[\alpha]$ é a classe associada ao automorfismo do recobrimento $g \neq id$, logo $[\alpha]$ não é trivial, e como $\alpha(I) \subset \pi(F)$ concluímos que $\pi(F)$ não é simplesmente conexa, logo existe uma órbita compacta $\mathcal{O}$ de ϕ contida em $\pi(F)$.

Se supomos que $\pi(F)$ contém uma órbita compacta $\mathcal{O}$ de ϕ , pelo que vimos na prova da Proposição 2.25 um levantamento $\tilde{\mathcal{O}} \subset F$ de $\mathcal{O}$ satisfaz $g(\tilde{\mathcal{O}}) = \tilde{\mathcal{O}}$ para algum $g \in \pi_1(M) \setminus \{id\}$, como g leva a folha estável F em uma folha da folheação estável $\tilde{\mathcal{F}}^s$ e $\tilde{\mathcal{O}} \subset F$, segue que $g(F) = F$. ■

Definição 2.27. O *estabilizador* de uma folha F de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (ou F de $\tilde{\mathcal{F}}^u$) é

$$\text{Stab}(F) = \{g \in \pi_1(M) \mid g(F) = F\}.$$

Observação 2.28. É imediata a observação de que o estabilizador de F , $\text{Stab}(F)$, é não-trivial se, e somente se, F é uma folha periódica.

Proposição 2.29. *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação Anosov de codimensão um irreduzível. Se o estabilizador de uma folha F de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (ou F de $\tilde{\mathcal{F}}^u$) não é trivial então $\text{Stab}(F)$ é um grupo livre de torção com k geradores.*

Prova: Se o estabilizador $\text{Stab}(F)$ é não-trivial então F é periódica, e das Proposições 2.25 e 2.26 vemos que existe uma órbita periódica $\mathcal{O} \subset F$. Fixemos um $\tilde{x}_0 \in F$ tal que $\mathcal{O} = \{\tilde{\phi}(v, \tilde{x}_0) \mid v \in \mathbb{R}^k\}$, e seja $x_0 = \pi(\tilde{x}_0)$. Sabemos da Proposição 2.25 que $\pi(\mathcal{O})$ é uma órbita compacta de ϕ , logo o grupo de isotropia de $x_0 \in \pi(\mathcal{O})$ é $\mathbb{Z}^k$. Tomemos $v_1, v_2, \dots, v_k$ geradores do grupo de isotropia de x_0 .

Sejam $\tilde{y}_i = \tilde{\phi}(v_i, \tilde{x}_0)$ e $\tilde{\alpha}_i : I \rightarrow F$ o caminho dado por $\tilde{\alpha}_i(t) = \tilde{\phi}(tv_i, \tilde{x}_0)$ que vai de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{y}_i$, para $1 \leq i \leq k$. Observemos que $\tilde{y}_i \in \pi^{-1}(x_0)$, pois $\pi(\tilde{y}_i) = \pi(\tilde{\phi}(v_i, \tilde{x}_0)) = \phi(v_i, x_0) = x_0$, e tomemos $g_i \in \pi_1(M)$ com $g_i(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_i$ o automorfismo do recobrimento, não-trivial, associado à classe do caminho $\alpha_i : I \rightarrow \pi(F)$ dado por

$$\alpha_i(t) = \pi \circ \tilde{\alpha}_i(t) = \pi(\tilde{\phi}(tv_i, \tilde{x}_0)) = \phi(tv_i, x_0).$$

Como g_i leva órbita em órbita, e $g_i(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_i = \tilde{\phi}(v_i, \tilde{x}_0)$ temos que $g_i(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \subset F$, logo $g_i(F) = F$, e concluímos que

$$\mathbb{Z}^k \cong \{g_1^{n_1} \circ g_2^{n_2} \circ \dots \circ g_k^{n_k} \mid n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\} \subset \text{Stab}(F).$$

Agora, dado $h \in \text{Stab}(F)$, digamos que $\mathcal{Q} = \{\tilde{\phi}(v, \tilde{z}_0) \mid v \in \mathbb{R}^k\}$ com $\tilde{z}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ seja a órbita de $\tilde{\phi}$ que está contida em F e é invariante por h . Sabemos que $\pi(\mathcal{Q}) = \pi(\mathcal{O}) \subset \pi(F)$, pois cada folha de $\mathcal{F}^s$ tem no máximo uma órbita compacta.

Para algum vetor $v_0 \in \mathbb{R}^k$, diferente do vetor nulo, $h(\tilde{z}_0) = \tilde{\phi}(v_0, \tilde{z}_0)$. Definimos o caminho $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathcal{Q}$ de $\tilde{z}_0$ a $h(\tilde{z}_0)$ dado por $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\phi}(tv_0, \tilde{z}_0)$. h é o automorfismo do

recobrimento associado à classe do caminho $\alpha : I \rightarrow \pi(\mathcal{O})$ dado por $\alpha(t) = \phi(tv_0, x_0)$ porque $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$. Com isto nós temos que $\alpha(1) = x_0$, ou seja, $\phi(v_0, x_0) = x_0$, mostrando que v_0 pertence ao grupo de isotropia de x_0 , logo $v_0 = n_1^0 v_1 + \cdots + n_k^0 v_k$ com $n_i^0 \in \mathbb{Z}$. Portanto, a classe de homotopia do caminho α é a mesma classe de homotopia do caminho $\alpha_1^{n_1^0} * \cdots * \alpha_k^{n_k^0}$. De maneira mais objetiva concluímos que $h = g_1^{n_1^0} \circ \cdots \circ g_k^{n_k^0}$. Com isto podemos observar que

$$\text{Stab}(F) = \{g_1^{n_1} \circ g_2^{n_2} \circ \cdots \circ g_k^{n_k} | n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{Z}\}.$$

■

Definição 2.30. Dado um $x \in M$ seja Γ_x o grupo de isotropia de x . Para $v \in \Gamma_x$ dizemos que v é *indivisível* em Γ_x se sempre que escrevermos $v = nu$ para $u \in \Gamma_x$ e $n \in \mathbb{Z}$ tivermos que $n = 1$ e $u = v$ ou $n = -1$ e $u = -v$.

Observação 2.31. Quando temos uma órbita compacta $\mathcal{O}$ de ϕ , falar em grupo de isotropia de $\mathcal{O}$ é o mesmo que falar do grupo de isotropia de qualquer $x \in \mathcal{O}$.

Dado um caminho fechado γ em M denotamos por h_γ o automorfismo do recobrimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ associado à classe do caminho γ . Dado um $v \in \mathbb{R}^k$ definimos o conjunto

$$G(v) = \{h_\gamma | \gamma \text{ é uma órbita periódica do fluxo } \phi^{tv}\}$$

e com isto fazemos a seguinte definição.

Definição 2.32. Seja F uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (ou de $\tilde{\mathcal{F}}^u$), chamamos de *estabilizador de F relativo ao vetor v* , o conjunto

$$\text{Stab}_v(F) = \{g \in G(v) | g(F) = F\}.$$

Proposição 2.33. *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação Anosov de codimensão um irreduzível. Se o estabilizador de uma folha F de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (ou de $\tilde{\mathcal{F}}^u$) relativo a um vetor v não é trivial, então $\text{Stab}_v(F)$ é um grupo cíclico infinito.*

Prova: Como já vimos anteriormente, na prova da Proposição 2.29, existe uma órbita compacta $\mathcal{O}$ de ϕ com $\pi^{-1}(\mathcal{O}) \subset F$ tal que v pertence ao grupo de isotropia da órbita $\mathcal{O}$. Podemos supor que v é indivisível no grupo de isotropia de $\mathcal{O}$. Sendo assim, definimos o caminho $\alpha : I \rightarrow M$ dado por $\alpha(t) = \phi(tv, x_0)$ para algum $x_0 \in \mathcal{O}$. Se denotamos por h_α o automorfismo associado à classe de α , como acima, pela própria definição do conjunto $G(v)$ podemos notar que qualquer elemento de $\text{Stab}_v(F)$ será uma potência de h_α , ou seja,

$$\text{Stab}_v(F) = \{h_\alpha^n | n \in \mathbb{Z}\}$$

■

Capítulo 3

Losangos para ações Anosov de $\mathbb{R}^k$ sobre variedades de dimensão $k + 2$

Na Seção 3.1 generalizamos a noção de losango, que foi introduzida por Fenley em [12] para um fluxo Anosov em uma variedade de dimensão três, para ações Anosov de $\mathbb{R}^k$ em M com $\dim(M) = k + 2$. Para que possamos generalizar essa definição para uma ação Anosov precisamos que ambas as folheações estável fraca e instável fraca tenham codimensão um, o que equivale a termos $\dim(E^{ss}) = \dim(E^{uu}) = 1$. Por isto nós teremos sempre uma ação Anosov de $\mathbb{R}^k$ em M com $\dim(M) = k + 2$.

Na Seção 3.2 no Teorema 3.5 damos condições suficientes que garantem a existência de uma cadeia de losangos. Este resultado é uma generalização de um resultado obtido por Fenley [11]. Além disso, na Proposição 3.7 mostramos que esta cadeia pode ser escolhida de tal maneira que ela seja minimal.

Finalmente na Seção 3.3, como consequência dos resultados da seção anterior, na Proposição 3.9 mostramos que, no nível do recobrimento universal, se um automorfismo de recobrimento da forma g^n pertence ao estabilizador de uma folha, então necessariamente g deve pertencer ao estabilizador.

3.1 Orientação transversal e losangos

Como $\widetilde{M}$ é simplesmente conexa, $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ sempre são transversalmente orientáveis (veja as Proposições 1.23 e 1.24, e o Teorema 1.27) e assumimos uma orientação de acordo com os levantamentos das orientações transversais de $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ se alguma delas for transversalmente orientável.

Outro fato importante que segue de $\widetilde{M}$ ser simplesmente conexa é que as folhas de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ separam $\widetilde{M}$. Com isto, e sabendo que estas duas folheações têm codimensão um, temos a seguinte definição.

Definição 3.1. O *lado positivo* de uma folha F de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ (ou de $\widetilde{\mathcal{F}}^u$) é a componente conexa de $\widetilde{M} - F$ definida pela orientação transversal positiva para F (veja a Figura 3.1). De

maneira análoga definimos o *lado negativo* de F .

Figura 3.1: Lados positivo e negativo da folha F .

Para qualquer $x \in \widetilde{M}$ seja $\widetilde{W}_+^s(x)$ a componente conexa de $\widetilde{W}^s(x) - \mathcal{O}_x(\widetilde{\phi})$ contida no lado positivo de $\widetilde{W}^u(x)$ e $\widetilde{W}_+^{ss}(x) = \widetilde{W}^{ss}(x) \cap \widetilde{W}_+^s(x)$. De maneira similar definimos $\widetilde{W}_-^s(x)$, $\widetilde{W}_+^u(x)$, $\widetilde{W}_-^u(x)$, $\widetilde{W}_-^{ss}(x)$, $\widetilde{W}_+^{uu}(x)$, $\widetilde{W}_-^{uu}(x)$. Poderemos chamar $\widetilde{W}_+^s(x)$ de *semifolha positiva*. Dada uma órbita $\mathcal{O}$ de $\widetilde{\phi}$ também podemos denotar $\widetilde{W}^s(\mathcal{O})$ com o mesmo significado acima.

Definição 3.2. Dado $p \in \widetilde{M}$, seja

$$\mathcal{J}_+^u(p) = \{F \in \widetilde{\mathcal{F}}^s \mid F \cap \widetilde{W}_+^u(p) \neq \emptyset\}.$$

Note que a folha $\widetilde{W}^s(p) \notin \mathcal{J}_+^u(p)$. De maneira semelhante definimos $\mathcal{J}_-^u(p)$, $\mathcal{J}_+^s(p)$, $\mathcal{J}_-^s(p)$ (veja a Figura 3.2).

Figura 3.2: $\mathcal{J}_+^u(p)$, com representação em dimensões reduzidas.

Definição 3.3 (Losango). Suponha que $p, q \in \widetilde{M}$, $p \notin \widetilde{W}^s(q)$, $p \notin \widetilde{W}^u(q)$ e satisfazem

$$\mathcal{J}_+^u(p) \cap \mathcal{J}_+^s(p) = \mathcal{J}_-^u(q) \cap \mathcal{J}_-^s(q) \quad (i).$$

Então dizemos que esta interseção é um *losango* $\mathcal{B}$ em $\widetilde{M}$ com vértice $p (+, +)$ (ou $\mathcal{O}_p(\tilde{\phi}) (+, +)$) e vértice $q (-, -)$ (veja a Figura 3.3). Note que a equação (i) implica que $\mathcal{J}_+^u(p) = \mathcal{J}_-^u(q)$ e $\mathcal{J}_+^s(p) = \mathcal{J}_-^s(q)$. Se de outro modo p e q satisfazem

$$\mathcal{J}_+^s(p) \cap \mathcal{J}_-^u(p) = \mathcal{J}_-^s(q) \cap \mathcal{J}_+^u(q) \quad (ii).$$

Então esta interseção é um losango $\mathcal{B}$ com vértice $p (+, -)$ e vértice $q (-, +)$. O losango é um conjunto aberto em $\widetilde{M}$. As semifolhas $\widetilde{W}_+^s(p)$, $\widetilde{W}_+^u(p)$, $\widetilde{W}_-^s(q)$ e $\widetilde{W}_-^u(q)$ no caso (i) não estão em $\mathcal{B}$ mas estão contidos em $\partial\mathcal{B}$. O mesmo acontece no caso (ii).

Figura 3.3: Losango em $\widetilde{M}$.

Uma sequência de losangos $\{Z_i\}_{i \in I}$ forma uma *cadeia* se, para cada $i \in I$, Z_i e Z_{i+1} compartilham de um mesmo vértice. O *comprimento* da cadeia é a cardinalidade de $I \subset \mathbb{Z}$, sendo que I pode ser finito ou não.

Definição 3.4 (Losangos Adjacentes). Dois losangos são *adjacentes* se compartilham um vértice e existe uma folha estável ou instável intersectando ambos.

3.2 Existência de losangos e cadeia de losangos

O resultado seguinte nos mostra em que condições podemos garantir a existência de losangos, mais que isso, nos mostra a existência de cadeias de losangos. Tal resultado foi originalmente obtido por Fenley em [11] para um fluxo Anosov em uma variedade de dimensão três e se adapta perfeitamente ao nosso caso.

Teorema 3.5 (Teorema A). *Sejam ϕ uma ação Anosov de codimensão um irreduzível, de $\mathbb{R}^k$ em M , $\dim(M) = k + 2$, $g \in \pi_1(M) \setminus \{id\}$, $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$, órbitas de $\tilde{\phi}$ invariantes por g .*

Então, $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$ são conectadas por uma cadeia finita de losangos, todos invariantes por g , assim como os seus vértices.

Prova: Vamos construir uma cadeia de losangos ligando $\mathcal{O}_0$ a $\mathcal{O}$.

Consideremos $F_0 = \widetilde{W}^s(\mathcal{O}_0)$, $F = \widetilde{W}^s(\mathcal{O})$, $\mathcal{E}_0$ o lado de F_0 que contém F e $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0) \subset \mathcal{E}_0 \subset \widetilde{M}$, onde $*$ indica o lado de F_0 que contém F como na Definição 3.2.

Como g preserva orientações transversais, pois tem duas órbitas periódicas, $g(\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)) = \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$. Pelo Teorema 2.22 o espaço das órbitas de $\tilde{\phi}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$, logo, o conjunto de órbitas em $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_0)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}$ e g induz uma contração ou expansão neste conjunto. Com isso, qualquer folha de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ contida em $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$ não é invariante por g . Logo $F \not\subset \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$. $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$ é um subconjunto próprio de $\widetilde{M}$, aberto, conexo e saturado por $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. Portanto, sua fronteira é uma união não vazia de folhas de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$. Como $F \cap \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0) = \emptyset$, $F \subset \partial \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$ ou existe uma única folha $F_1 \subset \partial \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$ que separa F de $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$ (veja a Figura 3.4). Considerando o segundo caso, como $g(\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)) = \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$, é claro que $g(F_1) \subset \partial \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$, logo, se $g(F_1) \neq F_1$, então $g(F_1)$ não separa F_0 de F , o que é uma contradição com o fato de g deixar ambas F_0 e F invariantes. Ou seja, $g(F_1) = F_1$.

Figura 3.4: Folha F_1 na fronteira de $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$.

Tomamos $F_1 \subset \partial \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$ como antes, $g(F_1) = F_1$, com isto sabemos que existe uma órbita $\mathcal{O}_1 \subset F_1$ de $\tilde{\phi}$ com $g(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_1$. Ou $F_1 = F$ se $F \subset \partial \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$. Se $F_1 \neq F$ de maneira indutiva encontramos F_i e $\mathcal{O}_i$, $i = 1, 2, \dots$

Afirmção (1): Para algum i , $F_i = F$ e consequentemente $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}$.

Suponhamos que a afirmação seja falsa. E seja $\mathcal{C}_i$ o lado de F_i contendo F_{i-1} . Deste modo, $\partial \mathcal{C}_i = F_i$ e $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}_{i+1}$. Para qualquer i , $F \not\subset \mathcal{C}_i$, então

$$F \not\subset \mathcal{C} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_i.$$

$\mathcal{C}$ é um subconjunto aberto próprio de $\widetilde{M}$, saturado por $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. Usando o argumento anterior, seja $L \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$, $L \subset \partial\mathcal{C}$ com $L = F$ se $F \subset \partial\mathcal{C}$ ou L sendo a única folha estável contida no bordo de $\mathcal{C}$ que separa F de todos os $\mathcal{C}_i$. Portanto $g(L) = L$. Seja $\mathcal{O}^*$ a única órbita em L com $g(\mathcal{O}^*) = \mathcal{O}^*$. Como $L \subset \partial\mathcal{C}$, as folhas $F_i = \widetilde{W}^s(\mathcal{O}_i)$ estão todas limitadas por L , logo, para i suficientemente grande (veja a Figura 3.5),

$$\emptyset \neq \widetilde{W}^u(\mathcal{O}^*) \cap \widetilde{W}^s(\mathcal{O}_i) = \mathcal{Q}_i.$$

Figura 3.5: Folha $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_i)$ próxima de L .

Como g deixa $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}^*)$ e $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_i)$ invariantes, $g(\mathcal{Q}_i) = \mathcal{Q}_i$, o que contradiz o fato de $\mathcal{O}^*$ ser a única órbita em $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}^*)$ com tal propriedade. Assim provamos a Afirmação (1).

Observe que, como $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_1) \subset \partial\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$, existe uma folha estável P com

$$P \cap \widetilde{W}^u(\mathcal{O}_0) \neq \emptyset \text{ e } P \cap \widetilde{W}^u(\mathcal{O}_1) \neq \emptyset.$$

• Agora nós mostraremos que as órbitas $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}_1$ são conectadas por uma cadeia de losangos, todos intersectando uma mesma folha estável.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{O}_1$ está no lado positivo de $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_0)$ e no lado negativo de $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_0)$ (veja a Figura 3.6). Seja $\mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0)$ como na Definição 3.2, então $g(\mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0)) = \mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0)$ e $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_1) \cap \mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0) = \emptyset$. Como antes, existe uma única folha instável $H_1 \subset \partial\mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0)$ que separa $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_1)$ de $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_0)$, ou $H_1 = \widetilde{W}^u(\mathcal{O}_1)$. Vimos que $g(H_1) = H_1$. Seja $\mathcal{Q}_1$ a única órbita em H_1 com $g(\mathcal{Q}_1) = \mathcal{Q}_1$. Note que $\widetilde{W}^u(\mathcal{Q}_1) \cap \widetilde{W}^s(\mathcal{O}_0) = \emptyset$, e isto implica que $\mathcal{Q}_1$ está no lado positivo de $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_0)$ (veja a Figura 3.6).

Afirmação (2): $\widetilde{W}_-^u(\mathcal{Q}_1), \widetilde{W}_+^s(\mathcal{Q}_1), \widetilde{W}_+^u(\mathcal{O}_0)$ e $\widetilde{W}_-^s(\mathcal{O}_0)$ formam um losango.

Observe que, como $\widetilde{W}^u(\mathcal{Q}_1) \subset \partial\mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0)$, existe uma folha $S \in \widetilde{\mathcal{F}}^u$, com

$$a \in S \cap \widetilde{W}_-^s(\mathcal{O}_0) \neq \emptyset \text{ e } b \in S \cap \widetilde{W}^s(\mathcal{Q}_1) \neq \emptyset. \quad (3.1)$$

Primeiro vejamos que $\mathcal{O}_0$ está no lado negativo de $\widetilde{W}^s(\mathcal{Q}_1)$. A orientação transversal de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ induz uma orientação em S . Se a órbita $\mathcal{O}_0$ estivesse no lado positivo da folha $\widetilde{W}^s(\mathcal{Q}_1)$, haveria uma contradição na orientação de S em a e b (veja a Figura 3.6).

Figura 3.6: Formação do losango de lados $\widetilde{W}^u_-(\mathcal{Q}_1)$, $\widetilde{W}^s_+(\mathcal{Q}_1)$, $\widetilde{W}^u_+(\mathcal{O}_0)$ e $\widetilde{W}^s_-(\mathcal{O}_0)$.

Afirmção (3): $S \cap \widetilde{W}^s_+(\mathcal{Q}_1) \neq \emptyset$.

Suponhamos que a afirmação (3) seja falsa, ou seja, que $S \cap \widetilde{W}^s_-(\mathcal{Q}_1) \neq \emptyset$ (veja a Figura 3.7).

Figura 3.7: Folha L na fronteira de $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$.

Tomando a inversa de g se necessário, assumimos que g induz uma contração no conjunto de órbitas de $\tilde{\phi}$ em $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_0)$. Como S separa $\widetilde{M}$, g também induz uma contração no conjunto de órbitas em $\widetilde{W}^s(\mathcal{Q}_1)$. Em consequência, g induz uma expansão no conjunto de órbitas em $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_0)$ e $\widetilde{W}^u(\mathcal{Q}_1)$. Logo, existe uma folha $L \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ com $L \cap S \neq \emptyset$, que é invariante por g e $L \subset \partial \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$. Mas L separa $\widetilde{W}^u(\mathcal{Q}_1)$ de $\mathcal{O}_0$ e consequentemente também separa $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_1)$ de $\mathcal{O}_0$, e portanto L separa $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_1)$ de $\mathcal{O}_0$. Mas como $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_1) \subset \partial \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$, as únicas folhas estáveis que podem separar $\widetilde{W}^s(\mathcal{O}_1)$ de $\mathcal{O}_0$ estão

contidas em $\mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$. Concluimos que $L \subset \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$ e isso implica que $g(L) \neq L$. Assim chegamos a uma contradição. Mostrando que $S \cap \widetilde{W}_+^s(\mathcal{Q}_1) \neq \emptyset$, a Afirmação (3).

Usando (3.1), a Afirmação (3), a invariância dos conjuntos $\widetilde{W}_+^s(\mathcal{Q}_1)$, $\widetilde{W}_-^s(\mathcal{O}_0)$ e $\mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0)$ por g , e o fato de $\mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0)$ ser conexo, segue que

$$\mathcal{J}_-^s(\mathcal{O}_0) = \mathcal{J}_+^s(\mathcal{Q}_1) \quad (3.2)$$

Como $\mathcal{O}_1 \subset \partial \mathcal{J}_*^u(\mathcal{O}_0)$, existe uma folha $S' \in \widetilde{\mathcal{F}}^s$ com $S' \cap \widetilde{W}_+^u(\mathcal{O}_0) \neq \emptyset$ e $S' \cap \widetilde{W}^u(\mathcal{O}_1) \neq \emptyset$. Se $\mathcal{O}_1 \neq \mathcal{Q}_1$, lembrando que $\widetilde{W}^u(\mathcal{Q}_1)$ separa $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_1)$ de $\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_0)$, temos que $S' \cap \widetilde{W}^u(\mathcal{Q}_1) \neq \emptyset$, e como $\mathcal{O}_0$ está no lado negativo de $\widetilde{W}^s(\mathcal{Q}_1)$, segue que $S' \cap \widetilde{W}_-^u(\mathcal{Q}_1) \neq \emptyset$. E do mesmo modo que anteriormente concluimos que

$$\mathcal{J}_+^u(\mathcal{O}_0) = \mathcal{J}_-^u(\mathcal{Q}_1) \quad (3.3)$$

Com (3.2) e (3.3) concluimos que $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{Q}_1$ são vértices de um losango, e isto confirma a Afirmação (2).

Se $H_1 \cap F_1 \neq \emptyset$, então $H_1 \cap F_1 = \mathcal{Q}_1$ é a órbita periódica em F_1 , logo $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{O}_1$ e temos uma cadeia de losangos de F_0 a F_1 . Caso contrário, começamos com $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{O}_1$ e continuamos como anteriormente. Repetindo esse processo um determinado número de vezes, encontramos uma cadeia finita de losangos ligando $\mathcal{O}_0$ a $\mathcal{O}_1$. Além disso, os losangos nessa cadeia são dois a dois adjacentes, todos têm interseção com uma folha estável e são invariantes por g assim como cada vértice.

O mesmo processo pode ser repetido para cada $\mathcal{O}_i$ e $\mathcal{O}_{i+1}$. Após repetir esse processo um determinado número de vezes vamos obter uma única cadeia finita de losangos conectando as órbitas $\mathcal{O}_0$ e $\mathcal{O}$, sendo que todos os losangos e os seus vértices são invariantes por g . ■

Precisaremos de uma cadeia de losangos específica ligando duas órbitas invariantes por um mesmo automorfismo do recobrimento não trivial, e é esse tipo de cadeia que definiremos agora.

Definição 3.6 (Cadeia minimal). Dizemos que uma cadeia é *minimal* se todos os losangos são diferentes e eles não estão contidos propriamente em outra cadeia ligando os vértices inicial e final.

O resultado seguinte, que garante a existência de uma cadeia minimal de losangos, foi mostrado por Fenley para fluxo Anosov em uma variedade de dimensão três, e damos aqui uma versão para uma ação Anosov.

Proposição 3.7. *Seja $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ uma ação Anosov de codimensão um irredutível, com $\dim(M) = k + 2$. Dadas duas órbitas $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}'$ de $\tilde{\phi}$ ambas invariantes por um automorfismo $g \in \pi_1(M) - \{id\}$. Existe uma única cadeia minimal de losangos ligando $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}'$.*

Prova: O Teorema 3.5 nos garante que existe uma cadeia de losangos $\mathcal{C} = \{B_i\}$, com $1 \leq i \leq n$, de $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}'$, sendo todos os losangos e seus vértices invariantes por g . Seja $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{O}$ e de maneira indutiva definimos como $\mathcal{Q}_i$ o outro vértice de B_i . Consideremos o conjunto A sendo a componente conexa de $\widetilde{M} - (\widetilde{W}^u(\mathcal{O}) \cup \widetilde{W}^s(\mathcal{O}))$ que contém $\mathcal{O}'$. Se $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{O}'$, a prova está concluída. Caso contrário, como $\mathcal{O}' \in A$ existe o menor i tal que $\mathcal{Q}_i \in A$.

• Vejamos que $\mathcal{Q}_{i-1} = \mathcal{O}$.

Se $\mathcal{Q}_{i-1} \neq \mathcal{O}$ então $\mathcal{Q}_{i-1} \notin \widetilde{W}^u(\mathcal{O}) \cup \widetilde{W}^s(\mathcal{O})$ porque $\mathcal{Q}_{i-1}$ é invariante por g e $\mathcal{O}$ é a única órbita invariante por g nesta união. Como $\mathcal{Q}_{i-1}$ também não está em A , existe uma folha estável da fronteira de B_i intersectando $\widetilde{W}^u(\mathcal{O})$ ou uma folha instável da fronteira de B_i que intersecta $\widetilde{W}^s(\mathcal{O})$. Assumamos que o primeiro caso ocorre, e seja F_i a folha estável da fronteira de B_i que tem interseção com $\widetilde{W}^u(\mathcal{O})$ (veja a Figura 3.8),

Figura 3.8: $F_i \subset \partial B_i$ com $F_i \cap \widetilde{W}^u(\mathcal{O}) \neq \emptyset$.

$$g(\widetilde{W}^u(\mathcal{O})) = \widetilde{W}^u(\mathcal{O}), \quad g(F_i) = F_i, \quad \text{portanto } g(\widetilde{W}^u(\mathcal{O}) \cap F_i) = \widetilde{W}^u(\mathcal{O}) \cap F_i.$$

Mas $\mathcal{O} \neq \widetilde{W}^u(\mathcal{O}) \cap F_i$, e ambas são órbitas em $\widetilde{W}^u(\mathcal{O})$ que são invariantes por g , o que é uma contradição. Logo $\mathcal{Q}_{i-1} = \mathcal{O}$. Portanto, B_i tem um vértice que é exatamente a órbita $\mathcal{O}$ e outro que está em A . Definimos $C_1 = B_i$.

Seja $\mathcal{O}_1 = \mathcal{Q}_i$. Existe uma subcadeia de $\mathcal{C}$ começando com B_{i+1} de $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}'$ e esta tem comprimento menor que o comprimento da cadeia $\mathcal{C}$. Agora reiniciamos o procedimento anterior com essa subcadeia encontrada. Após um número finito de vezes obtemos uma cadeia de $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}'$ de modo que os losangos são indutivamente definidos pela seguinte condição:

C_{i+1} é o único losango que tem um vértice em $\mathcal{O}_i$ e está contido na componente conexa de $\widetilde{M} - (\widetilde{W}^u(\mathcal{O}_i) \cup \widetilde{W}^s(\mathcal{O}_i))$ que também contém $\mathcal{O}'$. Além disto, qualquer cadeia de $\mathcal{O}$ a $\mathcal{O}'$ conterá o losango C_1 , e mais uma vez de maneira indutiva, podemos ver que essa cadeia conterá cada C_i . ■

3.3 Uma consequência fundamental

Definição 3.8. Dada uma órbita $\tilde{\mathcal{O}}$ de $\tilde{\phi}$ denotamos por $S_+(\tilde{\mathcal{O}})$ o lado positivo da folha estável $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}})$ e por $U_+(\tilde{\mathcal{O}})$ o lado positivo da folha instável $\tilde{W}^u(\tilde{\mathcal{O}})$. De maneira análoga definimos $S_-(\tilde{\mathcal{O}})$ e $U_-(\tilde{\mathcal{O}})$.

A seguir veremos um resultado para uma ação Anosov $\phi : \mathbb{R}^k \times M \rightarrow M$ que foi originalmente dado por Fenley apenas para um fluxo Anosov em uma variedade de dimensão três. Observe que o teorema é enunciado para uma folha F de $\tilde{\mathcal{F}}^s$, mas não muda em nada se considerarmos uma folha F de $\tilde{\mathcal{F}}^u$.

Proposição 3.9. *Sejam ϕ uma ação Anosov de codimensão um irredutível, de $\mathbb{R}^k$ em M^{k+2} e g um automorfismo não trivial do recobrimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ que preserva orientações transversais de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ e $\tilde{\mathcal{F}}^u$. Seja F uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ tal que, existe um $n \in \mathbb{Z}^*$ com $g^n \neq id$ e $g^n(F) = F$. Então $g(F) = F$.*

Prova: Assumimos que $n > 0$. Sabemos, pela hipótese, que g^n é um automorfismo não trivial do recobrimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$. Além disto,

$$g^n(g(F)) = g(g^n(F)) = g(F)$$

portanto g^n deixa invariantes F e $g(F)$. Como F é periódica, existe uma órbita compacta $\mathcal{O}$ de ϕ em $\pi(F)$. Seja $\tilde{\mathcal{O}}$ o levantamento de $\mathcal{O}$ em F com $g^n(\tilde{\mathcal{O}}) = \tilde{\mathcal{O}}$. Do mesmo modo a órbita $\tilde{\mathcal{O}}' = g(\tilde{\mathcal{O}}) \subset g(F)$ de $\tilde{\phi}$ satisfaz que $g^n(\tilde{\mathcal{O}}') = \tilde{\mathcal{O}}'$.

Faremos a prova por contradição. Se supomos que $g(F) \neq F$, do Teorema 3.5 e da Proposição 3.7, existe uma única cadeia minimal $\mathfrak{B} = \{B_i | 1 \leq i \leq p\}$ de losangos de $\tilde{\mathcal{O}}$ a $\tilde{\mathcal{O}}'$. Seja $\tilde{\mathcal{O}}_0 = \tilde{\mathcal{O}}$, e de maneira indutiva definimos $\tilde{\mathcal{O}}_i$ ($1 \leq i \leq p$) o outro vértice de B_i . Claramente devemos ter que $\tilde{\mathcal{O}}_p = \tilde{\mathcal{O}}'$.

Figura 3.9: A cadeia conectando as duas órbitas.

Assumimos, sem perda de generalidade, que $\tilde{\mathcal{O}}'$ está no lado positivo de $F = \tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}})$ e no lado positivo de $\tilde{W}^u(\tilde{\mathcal{O}})$.

Afirmção: A órbita $\tilde{\mathcal{O}}$ está no lado positivo da folha $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}}')$ e no lado positivo da folha $\tilde{W}^u(\tilde{\mathcal{O}}')$.

Como g preserva orientações transversais, o lado positivo da folha $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}}), S_+(\tilde{\mathcal{O}})$, é levado no lado positivo da folha $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}}'), S_+(\tilde{\mathcal{O}}')$. Suponhamos que a afirmação esteja errada em relação a $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}}')$, ou seja, que a órbita $\tilde{\mathcal{O}}$ está no lado negativo da folha $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}}')$. Com isto temos que $S_+(\tilde{\mathcal{O}}') \subsetneq S_+(\tilde{\mathcal{O}})$, e consequentemente

$$g(S_+(\tilde{\mathcal{O}})) = S_+(\tilde{\mathcal{O}}') \subsetneq S_+(\tilde{\mathcal{O}}).$$

E também teremos que

$$g^n(S_+(\tilde{\mathcal{O}})) \subsetneq S_+(\tilde{\mathcal{O}}).$$

Portanto g^n não deixa F invariante, o que é uma contradição. Consequentemente $\tilde{\mathcal{O}}$ está no lado positivo de $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}}')$, e do mesmo modo concluímos que $\tilde{\mathcal{O}}$ está no lado positivo de $\tilde{W}^u(\tilde{\mathcal{O}}')$, confirmando a afirmação.

Como $\mathfrak{B}$ é uma cadeia minimal ligando $\tilde{\mathcal{O}}$ a $\tilde{\mathcal{O}}'$, a Proposição 3.7 implica que B_1 está no lado positivo de $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}})$ e $\tilde{W}^u(\tilde{\mathcal{O}})$. Pela mesma razão B_p está no lado positivo de $\tilde{W}^s(\tilde{\mathcal{O}}')$ e $\tilde{W}^u(\tilde{\mathcal{O}}')$. Isto implica que $g(B_1) = B_p$, portanto $g(\tilde{\mathcal{O}}_1) = \tilde{\mathcal{O}}_{p-1}$. Além disto $g^n(\tilde{\mathcal{O}}_1) = \tilde{\mathcal{O}}_1$ e $g^n(\tilde{\mathcal{O}}_{p-1}) = \tilde{\mathcal{O}}_{p-1}$.

Se $p = 1$, então somente temos um losango B_1 e, além disso $g(\tilde{\mathcal{O}}') = \tilde{\mathcal{O}}_0$ e $g(B_1) = B_1$. Neste caso chegamos a uma contradição pelo fato de g preservar orientações transversais.

Vamos supor agora que $p > 1$. Por definição, a cadeia minimal de $\tilde{\mathcal{O}}_1$ a $\tilde{\mathcal{O}}_{p-1}$ é exatamente $\mathfrak{B} - \{B_1, B_p\}$. Podemos aplicar o mesmo argumento acima começando com $\tilde{\mathcal{O}}_1$, $\tilde{\mathcal{O}}_{p-1}$ e $\mathfrak{B} - \{B_1, B_p\}$. Cada aplicação desse procedimento elimina dois losangos da cadeia. Por indução nós chegamos a uma cadeia de comprimento 0 ou 1. No primeiro caso a cadeia é reduzida a $\tilde{\mathcal{O}}_{p/2}$ e segue que $g(\tilde{\mathcal{O}}_{p/2}) = \tilde{\mathcal{O}}_{p/2}$. Como g preserva orientações transversais isto implica que g deixa invariantes os vértices $\tilde{\mathcal{O}}_{(p/2)-1}$ e $\tilde{\mathcal{O}}_{(p/2)+1}$ e assim sucessivamente, ou seja, g deixa invariantes todos os vértices da cadeia minimal $\mathfrak{B}$, portanto $g(F) = F$, contrariando a nossa suposição.

Portanto, podemos concluir que $g(F) = F$. ■

Capítulo 4

Posição ótima de um 2-toro incompressível

Continuamos com uma ação Anosov $\phi : \mathbb{R}^k \times M^{k+2} \rightarrow M^{k+2}$ de classe C^1 de codimensão um irredutível. Além disto, a menos de recobrimento finito, assumiremos que M e as folheações fracas e fortes da ação Anosov são orientáveis (para isto é suficiente tomar recobrimentos duplos orientáveis). E com isto teremos que todo automorfismo do recobrimento $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ preserva as orientações transversais das folheações $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$. Também vamos supor que M não admite um mergulho incompressível da garrafa de Klein (veja a Definição 2.17). O objetivo deste capítulo é provar o Teorema B. Isto será feito na Seção 4.4.

As folheações $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ em $\widetilde{M}$ induzem duas folheações $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}^u$ em Q^ϕ , o espaço das órbitas de $\widetilde{\phi}$. Na Seção 4.1 veremos resultados envolvendo os espaços destas folheações e a ação do $\pi_1(M)$ sobre Q^ϕ (resultados análogos foram obtidos por Barbot em [2] e [5] para um fluxo Anosov).

Na Seção 4.2 veremos a noção de losango definido no espaço das órbitas de $\widetilde{\phi}$. Esse conceito foi dado por Barbot considerando um fluxo Anosov. Com isto, veremos um resultado (Proposição 4.12) que nos diz como dois losangos consecutivos em uma cadeia podem se posicionar um em relação ao outro sob certas condições.

Na Seção 4.3 damos a definição de anel de Birkhoff em M , que está relacionado com órbitas compactas da ação ϕ e vemos o Teorema 4.18 que relaciona diretamente um determinado tipo de losango em Q^ϕ com um anel de Birkhoff em M .

Finalmente, na Seção 4.4 damos a prova do Teorema B, na qual usamos resultados dados nas seções anteriores.

4.1 A ação de $\pi_1(M)$ no espaço das órbitas Q^ϕ

Sabemos que Q^ϕ , o espaço das órbitas de $\widetilde{\phi}$, é homeomorfo ao plano $\mathbb{R}^2$ (Teorema 2.22). Denotemos por $\pi^\phi : \widetilde{M} \rightarrow Q^\phi$ a projeção canônica.

Observação 4.1. A ação de $\pi_1(M)$ sobre $\widetilde{M}$ por automorfismos de recobrimento induz, via π^ϕ , uma ação de $\pi_1(M)$ sobre Q^ϕ . Portanto, dado g um automorfismo do recobrimento vamos, a partir de agora, considerar g também como um homeomorfismo do espaço Q^ϕ o qual preserva as folheações $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}^u$. Além disso, observando que as folheações $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}^u$ têm mesma dimensão e têm codimensão um, exatamente como no caso das folheações estável fraca $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e instável fraca $\widetilde{\mathcal{F}}^u$, vários dos resultados que nós vimos no capítulo anterior envolvendo as folheações $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ também são válidos para as folheações $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}^u$, bem como as definições de losango, cadeias de losangos e os resultados que envolvem esse conceito.

As folheações $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ em $\widetilde{M}$ são projetadas por π^ϕ em folheações $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}^u$ em Q^ϕ , respectivamente. Para cada $\sigma = s, u$, denotamos por

- Q^σ o espaço das folhas de $\mathcal{G}^\sigma$, e
- $p^\sigma : Q^\phi \rightarrow Q^\sigma$ a aplicação quociente.

As folheações $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}^u$ são transversalmente orientáveis, e do mesmo modo que fizemos para um folha $\widetilde{W}^\sigma(x)$ em $\widetilde{M}$, dado um $x \in Q^\phi$ denotamos por $w^\sigma(x)$ a folha de $\mathcal{G}^\sigma$ que contém x , e temos o lado positivo de $w^s(x)$ que é a componente conexa de $Q^\phi - w^s(x)$ definida pela orientação transversal positiva de $w^s(x)$ (como na Definição 3.1) e o lado negativo da folha $w^s(x)$ sendo a outra componente conexa de $Q^\phi - w^s(x)$ (o que também vale para um folha $w^u(x)$). O lado positivo da folha $w^s(x)$ denotamos por $S_+(x)$, e lado negativo da folha $w^s(x)$ indicaremos por $S_-(x)$, e de maneira análoga, para a folha $w^u(x)$ temos $U_+(x)$ e $U_-(x)$.

Também definimos as semifolhas $w_+^s(x) = w^s(x) \cap U_+(x)$, $w_-^s(x) = w^s(x) \cap U_-(x)$, $w_+^u(x) = w^u(x) \cap S_+(x)$ e $w_-^u(x) = w^u(x) \cap S_-(x)$.

Observação 4.2. Seja Ω um aberto conexo de Q^σ (com $\sigma = s$ ou $\sigma = u$). Qualquer elemento x de $\partial\Omega$ separa Q^σ em duas componentes conexas uma das quais contém Ω . O complemento em Q^σ dessa componente denotamos por x^c .

O resultado a seguir é dado e demonstrado por Barbot em [2] e também pode ser visto em [5].

Proposição 4.3. Para x percorrendo a fronteira $\partial\Omega$ de Ω , os conjuntos x^c são dois a dois disjuntos. Estes conjuntos são exatamente as componentes conexas de $Q^\sigma \setminus \Omega$.

Como para $\sigma = s, u$, a ação de qualquer $h \in \pi_1(M)$ preserva a folheação $\mathcal{G}^\sigma$, então também podemos olhar h como um homeomorfismo em Q^σ . Dado um $h \in \pi_1(M)$ com um ponto fixo em Q^s , denotamos por Λ_h^s à união das imagens por p^s das folhas de $\mathcal{G}^u$ que são invariantes por h .

Lema 4.4 ([5]). Λ_h^s é um aberto conexo de Q^s .

Observação 4.5. Se $s = p^s(w^s(x))$ para algum $x \in Q^\phi$ então $s_+ = p^s(S_+(x))$. Um resultado análogo do lema seguinte também é válido para um elemento u de Q^u , sendo sua prova também análoga.

Lema 4.6. *Seja h um elemento de $\pi_1(M)$ admitindo pelo menos um ponto fixo em Q^s . Seja s um elemento de Q^s com*

$$h(s_+) \subset s_+.$$

Então existe um ponto fixo y de h em Q^ϕ com a folha instável $w^u(y)$ intersectando a folha estável $(p^s)^{-1}(s)$.

Prova: Mostraremos que cada elemento s satisfazendo a hipótese do lema pertence a Λ_h^s . Pois, se $s \in \Lambda_h^s$ então, da própria definição do conjunto Λ_h^s , existe uma folha instável F com $h(F) = F$ e um ponto $x \in F$ tal que $p^s(x) = s$. Como p^s é constante ao longo das folhas estáveis, $p^s(w^s(x)) = s$ e $w^s(x) = (p^s)^{-1}(s)$, logo $F \cap (p^s)^{-1}(s) \neq \emptyset$. Sendo $h(F) = F$ sabemos que existe um ponto $y \in F$ que é fixado por h e temos $F = w^u(y)$ com $w^u(y) \cap w^s(x) \neq \emptyset$ (veja a Figura 4.1).

Figura 4.1: A projeção p^s .

Façamos por contradição: suponhamos que um $s \notin \Lambda_h^s$ satisfaz a hipótese do lema. Então, existe um elemento s_0 de $\partial\Lambda_h^s$ tal que s_0^c contém s . Logo, s_0^c contém s_+ ou s_- . Note que

$$h(s_+) \subset s_+ \Rightarrow h^{-1}(s_-) \subset s_-.$$

Vamos assumir que s_0^c contém s_+ (caso contrário usamos $h^{-1}(s_-) \subset s_-$). Com isto, $(h(s_0))^c = h(s_0^c)$ contém $h(s_+)$ e como $h(s_+) \subset s_+ \subset s_0^c$, segue que $(h(s_0))^c \cap s_0^c \neq \emptyset$ e da Proposição 4.3 temos que $h(s_0) = s_0$. Esta é uma contradição, pois os pontos fixos de h estão todos no aberto Λ_h^s , logo $\partial\Lambda_h^s$ não tem ponto fixo de h . ■

4.2 Losangos em Q^ϕ

A diferença básica da estrutura do losango em $\widetilde{M}$ que nós vimos no capítulo anterior para o losango em Q^ϕ é que no segundo caso incluiremos os vértices ao losango. Porém,

os resultados encontrados anteriormente poderão ser usados sem problemas.

Lembremos da Definição 1.13 que dado um subconjunto A de Q^ϕ o saturado de A pela folheação $\mathcal{G}^s$ é indicado por $\mathcal{G}^s(A)$.

Definição 4.7. Dado um ponto $x \in Q^\phi$ definimos os seguintes abertos em Q^ϕ :

$$\mathcal{L}^{++}(x) = \mathcal{G}^s(w_+^u(x)) \cap \mathcal{G}^u(w_+^s(x))$$

$$\mathcal{L}^{+-}(x) = \mathcal{G}^s(w_+^u(x)) \cap \mathcal{G}^u(w_-^s(x))$$

$$\mathcal{L}^{-+}(x) = \mathcal{G}^s(w_-^u(x)) \cap \mathcal{G}^u(w_+^s(x))$$

$$\mathcal{L}^{--}(x) = \mathcal{G}^s(w_-^u(x)) \cap \mathcal{G}^u(w_-^s(x))$$

Definição 4.8. Sejam $g \in \pi_1(M)$ e $\mathcal{L}$ uma aberto de Q^ϕ .

- (i) Dizemos que $\mathcal{L}$ é uma *g-losango aberto direto* se existem dois pontos fixos x e y de g tais que:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{++}(x) = \mathcal{L}^{--}(y).$$

- (ii) Dizemos que $\mathcal{L}$ é uma *g-losango aberto indireto* se existem dois pontos fixos x e y de g tais que:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{+-}(x) = \mathcal{L}^{-+}(y).$$

Em ambos os casos os pontos fixos x e y são chamados de *vértices* do losango aberto $\mathcal{L}$.

Como os vértices de um *g-losango* aberto $\mathcal{L}$ (direto ou indireto) são pontos fixos de g , segue que $g(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

Observação 4.9. Seja $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{++}(x) = \mathcal{L}^{--}(y)$ um *g-losango* de vértices x, y . O automorfismo g age sobre $w^u(x)$ como uma contração ou expansão. Suponhamos que x seja um ponto fixo atrator de g sobre $w^u(x)$, então x é um ponto fixo repulsor de g sobre $w^s(x)$. Dada uma folha F de $\mathcal{G}^s$ com $F \cap w_+^u(x) \neq \emptyset$, a imagem de F por g é uma folha $g(F)$ mais próxima da folha $w^s(x)$ do que a folha F . E como sabemos que $F \cap w_-^u(y) \neq \emptyset$ (pela definição do losango) podemos observar que y é um ponto fixo repulsor de g sobre $w^u(y)$ e um ponto fixo atrator de g sobre $w^s(y)$ (veja a Figura 4.2). Dada uma folha L de $\mathcal{G}^u$ com $L \cap w_-^s(y) \neq \emptyset$, a imagem de L por g é uma folha $g(L)$ mais próxima da folha $w^s(x)$ do que a folha L . Isto nos dá uma ideia de como g age num *g-losango*.

Definimos um *losango* (*direto ou indireto*) como sendo a união de um losango aberto com os seus vértices. Dizemos que um losango é *simples* se as órbitas de cada vértice pela ação de $\pi_1(M)$ não contém nenhum ponto do interior do losango.

Como feito no capítulo anterior, dizemos que uma sequência de losangos $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$ forma uma *cadeia* se, para cada $i \in I$, $\mathcal{L}_i$ e $\mathcal{L}_{i+1}$ compartilham de um mesmo vértice. O *comprimento* da cadeia é a cardinalidade de $I \subset \mathbb{Z}$, sendo que I pode ser finito ou não.

Definição 4.10. Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ dois losangos em Q^ϕ que têm um vértice em comum.

- (i) Dizemos que $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ estão em *posição direta* se $\overline{\mathcal{L}_1} \cap \overline{\mathcal{L}_2} = x_1$, sendo x_1 vértice de ambos (veja a Figura 4.3).

Figura 4.2: A ação do automorfismo g sobre um g -losango.

- (ii) Dizemos que $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ estão em *posição indireta* se $\overline{\mathcal{L}_1} \cap \overline{\mathcal{L}_2} = H \cup \{x_1\}$, sendo H uma semifolha na fronteira de ambos os losangos, e x_1 o vértice comum entre $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ (veja a Figura 4.4).

Figura 4.3: $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ em posição direta. Figura 4.4: $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ em posição indireta.

Seja $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ uma cadeia de losangos de vértices $x_0, \dots, x_n$. Para cada índice $1 \leq i \leq n-1$, se $\mathcal{L}_i$ e $\mathcal{L}_{i+1}$ estão em posição direta, indicamos por $H_i = \{x_i\}$ o vértice em comum, se $\mathcal{L}_i$ e $\mathcal{L}_{i+1}$ estão em posição indireta indicamos por H_i a semifolha na fronteira de ambos os losangos como na definição anterior. E com esta notação fazemos a próxima definição.

Definição 4.11. Definimos o *suporte* de uma cadeia de losangos como sendo a união entre $\{x_0, x_n\}$, os H_i e os interiores dos losangos. Se tivermos uma cadeia infinita, dizemos que o *suporte* dessa cadeia é a união entre os H_i e os interiores dos losangos.

A proposição seguinte foi demonstrada por Barbot para fluxo Anosov em uma variedade de dimensão três e se aplica no nosso caso de uma ação Anosov sem a necessidade de adaptações.

Proposição 4.12. *Seja g um elemento de $\pi_1(M)$ que admite um g -losango não-simples. Então, nenhum g -losango é simples e todos os g -losangos estão em posição direta.*

Prova: Seja $\mathcal{L}$ um g -losango não-simples. Denotamos por x_0 e x_1 os vértices de $\mathcal{L}$. Como $\mathcal{L}$ é não-simples podemos supor que existe um $h \in \pi_1(M)$ tal que $h(x_0)$ está no interior de $\mathcal{L}$. Também podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{++}(x_0) = \mathcal{L}^{--}(x_1)$$

Na afirmação seguinte vemos que todos os g -losangos estão em posição direta.

Afirmação: Nenhum dos abertos $\mathcal{L}^{+-}(x_0), \mathcal{L}^{-+}(x_0), \mathcal{L}^{+-}(x_1)$ e $\mathcal{L}^{-+}(x_1)$ é um losango.

Mostraremos por absurdo que $\mathcal{L}^{+-}(x_1)$ não é um losango. Os outros três casos seguem de maneira análoga.

Suponhamos que $\mathcal{L}^{+-}(x_1)$ seja um losango, e x'_0 o seu segundo vértice (veja a Figura 4.5). Como $h(x_0)$ está no interior de $\mathcal{L}$, pela definição de losangos $h(w_+^u(x_0)) = w_+^u(h(x_0))$ encontra $w_-^s(x_1)$ e conseqüentemente encontra $w_+^s(x'_0)$. $h(\mathcal{L}) = \mathcal{L}^{++}(h(x_0))$ é um losango de vértices $h(x_0)$ e $h(x_1)$. Pela estrutura dos losangos, se $h(x_1)$ estivesse em $S_-(x'_0)$, como as semi-folhas $w_-^s(h(x_1))$ e $w_+^u(h(x_0))$ são assintóticas e $w_+^u(h(x_0)) \cap w_+^s(x'_0) \neq \emptyset$, e como a folha $w^s(x'_0)$ separa Q^ϕ em duas componentes conexas, teríamos obrigatoriamente que $w_-^s(h(x_1)) \cap w_+^s(x'_0) \neq \emptyset$, o que é um absurdo, pois duas folhas estáveis não se intersectam (veja a Figura 4.5). Logo,

Figura 4.5: $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^{+-}(x_1)$ em posição indireta.

$$h(x_1) \in S_+(x'_0).$$

De maneira análoga nós concluímos que

$$h(x_1) \in U_+(x_1).$$

O que é um absurdo pois $S_+(x'_0) \cap U_+(x_1) = \emptyset$. Chegamos a este absurdo por supor que $\mathcal{L}^{+-}(x_1)$ fosse um losango. E comprovamos a afirmação.

Seja $\mathcal{L}'$ um g -losango subsequente a $\mathcal{L}$. Da afirmação anterior podemos garantir que $\mathcal{L}'$ e $\mathcal{L}$ estão em posição direta. Podemos supor que $\mathcal{L}'$ seja $\mathcal{L}^{++}(x_1)$ pois o outro caso é análogo.

Vejam os que $h(x_1)$ está no interior de $\mathcal{L}^{++}(x_1)$: seguindo com um raciocínio parecido ao da afirmação anterior sabemos que $w_+^s(h(x_0)) \cap w_-^u(x_1) \neq \emptyset$ e $w_+^u(h(x_0)) \cap w_-^s(x_1) \neq \emptyset$. Exatamente como antes (na afirmação), sendo $w_+^s(h(x_0))$ e $w_-^u(h(x_1))$ assintóticas temos que $w^u(h(x_1)) \subset U_+(x_1)$, ou seja, $h(x_1) \in U_+(x_1)$ e do mesmo modo $h(x_1) \in S_+(x_1)$. Logo,

$$h(x_1) \in \mathcal{G}^s(w_+^u(x_1)) \cap \mathcal{G}^u(w_+^s(x_1)) = \mathcal{L}^{++}(x_1).$$

Com este último argumento mostramos que nenhum g -losango é simples. ■

Observação 4.13. Tanto na afirmação anterior quanto na conclusão da prova da proposição anterior, podemos afirmar que os resultados são válidos para todos os g -losangos porque sabemos que qualquer g -losango pode ser ligado ao losango $\mathcal{L}$ da prova por uma cadeia finita de g -losangos (pelo Teorema 3.5).

4.3 Anel de Birkhoff

Barbot usa o conceito de anel de Birkhoff para um fluxo Anosov em uma variedade de dimensão três. Daremos uma generalização desse conceito para uma ação Anosov de $\mathbb{R}^k$ em M^{k+2} .

Definição 4.14 (Anel de Birkhoff). Um *anel de Birkhoff* é qualquer anel mergulhado em M com interior transverso a ϕ cujo bordo consiste de duas órbitas fechadas do fluxo ϕ^{tv} para algum elemento Anosov v em $\mathbb{R}^k$.

Num anel de Birkhoff há duas folheações transversais de dimensão um induzidas pelas folheações fracas, elas são tangentes ao bordo do anel e as denotaremos por f^s e f^u . Quando essas duas folheações não têm componente de Reeb e só são compactas as folhas que constituem o bordo, o anel é chamado de *anel de Birkhoff elementar*.

Observação 4.15. Dado um anel de Birkhoff $\mathcal{A}$ cujas componentes de bordo são θ_0 e θ_1 , chamamos de *componente* de $\mathcal{A}$ a qualquer sub-anel de $\mathcal{A}$ em que cada componente de bordo é uma folha compacta de f^s ou de f^u e cujo interior não contém folhas compactas de f^s nem de f^u . Como as folhas de f^s e f^u têm holonomia hiperbólica, existe um número finito de folhas compactas em $\mathcal{A}$. E consequentemente, $\mathcal{A}$ tem um número finito de componentes. Denotemos por $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n$ todas as componentes de $\mathcal{A}$ tais que (veja a Figura 4.6):

- θ_0 pertence ao bordo de $\mathcal{A}_0$ e θ_1 pertence ao bordo de $\mathcal{A}_n$;
- $\mathcal{A}$ é a união dos $\mathcal{A}_i$;

- Para $0 \leq i \leq n-1$, $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i+1}$ é uma folha compacta de f^s ou de f^u nos bordos de $\mathcal{A}_i$ e $\mathcal{A}_{i+1}$, e $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ se $|i-j| \neq 1$.

Definição 4.16. Se S é uma superfície mergulhada em M , chamamos de *traço transverso* de S a qualquer π^ϕ -projeção em Q^ϕ para qualquer levantamento de S em $\widetilde{M}$.

Proposição 4.17. *O traço transverso de um anel de Birkhoff é o suporte de uma cadeia finita de losangos. Um anel de Birkhoff é elementar, se e somente se, seu traço transverso é um losango. Este losango é simples.*

Prova: Seja $\mathcal{A}$ um anel de Birkhoff mergulhado em M e θ_0, θ_1 as duas órbitas periódicas do fluxo ϕ^{tv} , para algum $v \in \mathbb{R}^k$, que formam o bordo de $\mathcal{A}$. Ambas as folheações f^s e f^u induzidas por $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$ em $\mathcal{A}$, admitem θ_0 e θ_1 como folhas compactas, e são transversais fora destas duas folhas. Pela própria definição, o anel de Birkhoff $\mathcal{A}$ é elementar se, e somente se, θ_0 e θ_1 são as únicas folhas compactas de f^s e f^u .

Vamos provar que o traço transverso de um anel de Birkhoff é o suporte de uma cadeia finita de losangos. A segunda parte da proposição segue da construção que será feita nesta prova.

Sejam $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n$ todas as componentes de $\mathcal{A}$ como na Observação 4.15 (veja a Figura 4.6). A seguir veremos que cada componente corresponderá a um losango, todos esses losangos formarão a cadeia procurada.

Figura 4.6: As componentes do anel $\mathcal{A}$.

Figura 4.7: As componentes de $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Seja $\widetilde{\mathcal{A}}$ um levantamento de $\mathcal{A}$ em $\widetilde{M}$. Este levantamento $\widetilde{\mathcal{A}}$ é uma faixa transversa a $\widetilde{\phi}$ em seu interior cujas componentes de bordo são duas órbitas $\widetilde{\theta}_0$ e $\widetilde{\theta}_1$ do fluxo $\widetilde{\phi}^{tv}$. Seja $g = [\theta_0]$ elemento indivisível em $\pi_1(M)$ que preserva $\widetilde{\mathcal{A}}$, pois g deixa invariantes $\widetilde{\theta}_0$ e $\widetilde{\theta}_1$ (veja a Afirmação (1)). Sejam $\widetilde{f}^s$ e $\widetilde{f}^u$ os traços de $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ em $\widetilde{\mathcal{A}}$. Cada componente $\mathcal{A}_i$ é levantada numa “componente” $\widetilde{\mathcal{A}}_i$ de $\widetilde{\mathcal{A}}$ (veja a Figura 4.7). Denotamos por a_i e b_i as componentes de bordo de $\widetilde{\mathcal{A}}_i$, satisfazendo o seguinte:

$$a_0 = \widetilde{\theta}_0, \quad b_n = \widetilde{\theta}_1 \quad \text{e para } 0 \leq i \leq n-1, \quad b_i = a_{i+1}.$$

Afirmção (1): Para cada $0 \leq i \leq n$, a_i e b_i são invariantes por g .

Denotemos por α_i e β_i os caminhos fechados em M tais que α_i e β_i são as componentes de bordo de $\mathcal{A}_i$, sendo que

$$\alpha_0 = \theta_0, \beta_n = \theta_1 \text{ e para } 0 \leq i \leq n-1, \beta_i = \alpha_{i+1}.$$

Além disto, tomamos todos os caminhos α_i, β_i com a mesma orientação no anel $\mathcal{A}$ e dando apenas uma volta. Com isto, estando todos eles no anel $\mathcal{A}$, sabemos que α_i é livremente homotópico a β_j para quaisquer $0 \leq i, j \leq n$, e pelo Teorema 1.6, g é o automorfismo associado à classe de α_i e ao mesmo tempo, também é o automorfismo associado à classe de β_j , para quaisquer $0 \leq i, j \leq n$.

Se tomamos um $\tilde{\alpha}_i$ levantamento de α_i em a_i , pela definição de automorfismo do recobrimento temos que $a_i = \{g^m(\tilde{\alpha}_i) | m \in \mathbb{Z}\}$. O mesmo vale para β_i . E assim comprovamos a Afirmção (1).

Sabendo que a_i e b_i são ambos invariantes por g e cada um está contido em uma folha de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ ou de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ concluímos que tal folha é invariante por g e contém uma órbita de $\tilde{\phi}$ que também é g -invariante. Então, para cada índice i existem x_i e y_i em Q^ϕ invariantes por g tais que:

$$\begin{aligned} \pi^\phi(a_i) &\subset w^s(x_i) \text{ ou } \pi^\phi(a_i) \subset w^u(x_i) \\ \pi^\phi(b_i) &\subset w^s(y_i) \text{ ou } \pi^\phi(b_i) \subset w^u(y_i) \end{aligned}$$

Denotemos por $\tilde{f}_i^s$ e $\tilde{f}_i^u$ às restrições de $\tilde{f}^s$ e $\tilde{f}^u$ ao interior de $\tilde{\mathcal{A}}_i$. Como o traço transversal de $\mathcal{A}$ é a união dos traços transversos de suas componentes, precisamos apenas caracterizar os $\pi^\phi(\tilde{\mathcal{A}}_i)$. Vamos mostrar que $\pi^\phi(\tilde{\mathcal{A}}_i)$ é a união de um losango aberto de vértices x_i e y_i com $\pi^\phi(a_i)$ e $\pi^\phi(b_i)$. A menos de uma troca entre as folheações $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$ podemos distinguir quatro tipos possíveis de componentes. Tais possibilidades são ilustradas na Figura 4.8 com a componente $\tilde{\mathcal{A}}_i$ e as folheações correspondente $\tilde{f}_i^s$ e $\tilde{f}_i^u$ no interior de $\tilde{\mathcal{A}}_i$.

Afirmção (2): Qualquer folha de $\tilde{f}_i^s$ encontra cada folha de $\tilde{f}_i^u$ em um único ponto. Existe um caminho $\tilde{c}_i$ transversal às duas folheações $\tilde{f}_i^s$ e $\tilde{f}_i^u$ ligando a_i a b_i e disjunto de seus iterados por g .

Cada folha de f_i^s , ou de f_i^u , é transversal ou assintótica aos bordos de $\mathcal{A}_i$ sendo que folhas de f_i^s e f_i^u podem ser ambas assintóticas a uma mesma componente de bordo de $\mathcal{A}_i$ mas não serão ambas transversas a uma mesma componente de bordo. Isto nos garante que duas folhas quaisquer de f_i^s e f_i^u sempre se intersectam, e o mesmo podemos dizer de $\tilde{f}_i^s$ e $\tilde{f}_i^u$. O fato de as folhas se intersectarem uma única vez é justificado após a Afirmção (3). E tomando um caminho de a_i a b_i que intersecta cada folha de $\tilde{f}_i^s$ e $\tilde{f}_i^u$ no máximo

Figura 4.8: As folheações nas componentes do anel $\mathcal{A}$ e de $\tilde{\mathcal{A}}$.

uma vez, esse caminho será transversal a ambas as folheações. E assim comprovamos a Afirmação (2).

Afirmação (3) *A interseção de cada folha de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ (respectivamente $\tilde{\mathcal{F}}^u$) com $\tilde{\mathcal{A}}_i$ é no máximo uma folha de $\tilde{f}_i^s$ (respectivamente $\tilde{f}_i^u$).*

Qualquer transversal a $\tilde{\mathcal{F}}^s$ intersecta cada folha de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ em no máximo um ponto. Das duas folhas l_1, l_2 quaisquer de $\tilde{\mathcal{F}}^s$, tomando uma folha f de $\tilde{\mathcal{F}}^u$, f intersecta l_1 e l_2 . Sejam L_1, L_2 as folhas em $\tilde{\mathcal{F}}^s$ tais que $l_1 \subset L_1$ e $l_2 \subset L_2$. Como f é uma transversal a $\tilde{\mathcal{F}}^s$ que tem interseção com L_1 e L_2 , nós concluímos que $L_1 \neq L_2$. O caso de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ segue de maneira análoga. Comprovando a Afirmação (3).

Consequência da Afirmação (3): *Qualquer órbita de $\tilde{\phi}$ distinta das que contém $\tilde{\theta}_0$ e $\tilde{\theta}_1$ intersecta $\tilde{\mathcal{A}}_i$ em no máximo um ponto.*

Seja $\bar{c}_i = \pi^\phi(\tilde{c}_i)$ a projeção de $\tilde{c}_i$ em Q^ϕ , que é um caminho simples de Q^ϕ transverso a $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}^u$, e é disjunto de todos os seus iterados por g exceto possivelmente nos extremos se $\tilde{\theta}_0$ ou $\tilde{\theta}_1$ pertencerem a $\partial\tilde{\mathcal{A}}_i$.

A existência de $\bar{c}_i$ também mostra que x_i e y_i são diferentes. Como x_i e y_i são pontos fixos de g em ϕ , pelo Teorema 3.5, ou eles são vértices de um mesmo losango ou existe uma cadeia finita com pelo menos dois losangos ligando x_i a y_i , e neste último caso existe um z , ponto fixo de g em Q^ϕ , de forma que z é um vértice de um dos losangos da cadeia e uma das folhas $w^s(z)$ ou $w^u(z)$ desconecta x_i de y_i e intersecta o caminho $\bar{c}_i$. Da Afirmação (3), tal folha, que podemos supor $w^s(z)$, intersecta $\pi^\phi(\mathcal{A}_i)$ em uma componente conexa que é invariante por g , e as únicas componentes conexas de $w^s(z)$ que têm esta propriedade são $w_+^s(z)$ e $w_-^s(z)$. Assim temos que $\mathcal{A}_i$ tem uma folha compacta de f^s em seu interior, o que é uma contradição.

Sabemos então, que x_i e y_i são vértices de um mesmo losango, o qual podemos supor

$$\mathcal{L}^{++}(x_i) = \mathcal{L}^{--}(y_i).$$

Além disto, se $a_i = \tilde{\theta}_0$ então $\pi^\phi(a_i) = x_i$, caso contrário $\pi^\phi(a_i)$ é uma das semifolhas $w_+^u(x_i)$, $w_+^s(x_i)$. De maneira análoga $\pi^\phi(b_i) = y_i$ se $b_i = \tilde{\theta}_1$, ou $\pi^\phi(b_i)$ é uma das semifolhas $w_-^u(y_i)$, $w_-^s(y_i)$.

Como $\bar{c}_i$ é diferente de seus iterados por g , exceto possivelmente nos extremos, temos uma das situações ilustradas na Figura 4.9.

Seja $\mathcal{D}_i$ a região em $\tilde{\mathcal{A}}_i$ cuja fronteira é formada por $\tilde{c}_i, g(\tilde{c}_i)$ e os dois segmentos em a_i e b_i ligando os extremos de $\tilde{c}_i$ aos de $g(\tilde{c}_i)$. $\mathcal{D}_i$ é um domínio fundamental da ação de g sobre $\tilde{\mathcal{A}}_i$ e sua projeção em Q^ϕ é um disco bordado pela imagem de seu bordo. Pela ação de g sobre $\mathcal{L}^{++}(x_i) = \mathcal{L}^{--}(y_i)$ (como visto na Observação 4.9), concluímos a seguinte afirmação:

Afirmação (4): $\pi^\phi(\tilde{\mathcal{A}}_i)$ é a união do losango aberto $\mathcal{L}^{++}(x_i) = \mathcal{L}^{--}(y_i)$ de vértices x_i e y_i com $\pi^\phi(a_i)$ e $\pi^\phi(b_i)$.

Esta última afirmação nos permite concluir que o traço transversal do anel $\mathcal{A}$ é o suporte da cadeia finita de losangos encontrada, a interseção de duas componentes subsequentes

Figura 4.9: O losango $\mathcal{L}^{++}(x_i) = \mathcal{L}^{--}(y_i)$.

$\tilde{\mathcal{A}}_i$ e $\tilde{\mathcal{A}}_{i+1}$ é projetada na semifolha $\pi^\phi(b_i) = \pi^\phi(a_{i+1})$. Isto conclui a prova da primeira parte da proposição.

Pela construção feita segue que o anel de Birkhoff é elementar se, e somente se, o seu traço transversal é um losango, que por sua vez é simples. ■

Teorema 4.18. *Todo losango simples de Q^ϕ é o traço transversal de um anel de Birkhoff elementar.*

Prova: Seja $\mathcal{L}_0$ um g -losango simples de vértices $\tilde{\theta}_0$ e $\tilde{\theta}_1$. Podemos supor que g é indivisível em $\pi_1(M)$, e seja v o elemento Anosov em $\mathbb{R}^k$ associado a g (como na prova da Proposição 2.29). Pelo que vimos na Observação 4.9 existe um caminho c_0 em $\mathcal{L}_0$ de extremos $\tilde{\theta}_0$ e $\tilde{\theta}_1$ sem auto-interseção e disjunto de seus iterados por g (Figura 4.10). Seja $\tilde{c}_0$ um levantamento, via π^ϕ , de c_0 em $\tilde{M}$ com x_0 e x_1 sendo os pontos inicial e final respectivamente do caminho $\tilde{c}_0$. Sejam $\tilde{c}_1$ a imagem de $\tilde{c}_0$ por g , $y_0 = g(x_0)$ e $y_1 = g(x_1)$ os extremos de $\tilde{c}_1$. Consideremos I_0 e I_1 os intervalos $[x_0, y_0]$ e $[x_1, y_1]$ em $\tilde{\rho}_0 = \{\tilde{\phi}^{tv}(x_0) | t \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$ e $\tilde{\rho}_1 = \{\tilde{\phi}^{tv}(x_1) | t \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$. Deste modo, $I_0 \cup \tilde{c}_0 \cup I_1 \cup \tilde{c}_1$ borda um “retângulo” R mergulhado em $\tilde{M}$ transversal a $\tilde{\phi}$ fora de I_0 e I_1 . No interior do retângulo as folhas fracas se encontram no máximo em um ponto. Denotamos por $\tilde{\mathcal{A}}_0$ à união dos iterados do retângulo R por g . O conjunto $\tilde{\mathcal{A}}_0$ é uma faixa invariante por g , bordada por $\tilde{\rho}_0$ e $\tilde{\rho}_1$ e transversal a $\tilde{\phi}$ em seu interior (Figura 4.11).

Sejam $\widehat{M}$ o quociente $\tilde{M}_{/ <g>}$ e $\widehat{\pi} : \widehat{M} \rightarrow M$ a aplicação de recobrimento natural. A ação ϕ é levantada, via $\widehat{\pi}$, para a ação $\widehat{\phi}$, e $\tilde{\mathcal{A}}_0$ passa ao quociente em um anel mergulhado

Figura 4.10: Caminho c_0 no losango $\mathcal{L}_0$.

Figura 4.11: Faixa $\tilde{\mathcal{A}}_0$ em $\tilde{M}$.

Figura 4.12: Curvas de auto-interseção com ponto duplo e triplo.

Figura 4.13: Eliminando as auto-interseções.

$\hat{\mathcal{A}}_0$ transverso a $\hat{\phi}$ em seu interior e bordado por duas órbitas periódicas $\hat{\theta}_0$ e $\hat{\theta}_1$ do fluxo $\hat{\phi}^{tv}$. Como g é indivisível, as restrições de $\hat{\pi}$ a $\hat{\theta}_0$ e $\hat{\theta}_1$ são injetivas. Além disto, se estas duas órbitas periódicas de $\hat{\phi}^{tv}$ têm a mesma imagem por $\hat{\pi}$, existe em M um mergulho incompressível da garrafa de Klein, o que contraria as hipóteses tomadas desde o início deste capítulo. Portanto, existe uma vizinhança $\hat{U}_0$ de $\partial\hat{\mathcal{A}}_0$ em $\hat{M}$ tal que $\hat{\pi}$ restrita a $\hat{U}_0$ é um mergulho. Como nós sabemos que $\mathcal{L}_0$ é um losango simples, podemos afirmar que as imagens por $\hat{\pi}$ de $\partial\hat{\mathcal{A}}_0$ e $\text{int}\hat{\mathcal{A}}_0$ são disjuntas. Diminuindo $\hat{U}_0$ podemos supor que $U_0 = \hat{\pi}(\hat{U}_0)$ e $\hat{\pi}(\hat{\mathcal{A}}_0 \setminus \hat{U}_0)$ são disjuntos. A restrição de $\hat{\pi}$ a $\hat{\mathcal{A}}_0$ é uma imersão do anel em M . Nosso objetivo é mudar dessa imersão para um mergulho injetivo. Podemos assumir

que as auto-interseções de $\widehat{\pi}(\widehat{\mathcal{A}}_0)$ estão em posição geral, ou seja, existe uma quantidade finita de curvas dadas pelas auto-interseções, e tais curvas têm pontos duplos ou triplos, sendo que o número de pontos triplos é finito (veja a Figura 4.12).

Os pontos de auto-interseção estão fora de $\widehat{U}_0$. Usando as técnicas de “cut and paste” (para mais detalhes sobre esta técnica veja [15]) obtemos uma superfície $\mathcal{A}$ mergulhada em M , com bordo formado por $\theta_0 \cup \theta_1$, transversa a ϕ em seu interior e coincidindo com $\widehat{\pi}(\widehat{\mathcal{A}}_0)$ em U_0 (veja a Figura 4.13). Esta superfície é orientável (porque é transversalmente orientável em seu interior, já que é transversa a ϕ), e seu interior é transverso a cada uma das folheações fracas. Essas folheações induzem duas folheações em $\mathcal{A}$ sem singularidades e tangentes ao bordo, $\mathcal{A}$ é um anel de Birkhoff de bordo $\theta_0 \cup \theta_1$.

Figura 4.14: Anel $\mathcal{A}_2$ com $\partial\mathcal{A}_2 = \theta_1 \cup f_1$.

Mostraremos que, do anel $\mathcal{A}$ podemos obter um anel de Birkhoff cujo traço transversal é $\mathcal{L}_0$.

Seja $\widetilde{\mathcal{A}}$ um levantamento de $\mathcal{A}$ em $\widetilde{M}$ contendo $\widetilde{\rho}_0$. Este $\widetilde{\mathcal{A}}$ é uma faixa invariante por g . Denotemos por $\widetilde{\rho}'_1$ a outra componente conexa de $\partial\widetilde{\mathcal{A}}$. Como $\widetilde{\rho}'_1$ e $\widetilde{\rho}_1$ são levantamentos de θ_1 podemos afirmar, pelo Teorema 1.5, que existe um $h \in \pi_1(M)$ tal que $\widetilde{\rho}'_1 = h(\widetilde{\rho}_1)$. Consideremos $\mathcal{L}$ a imagem de $\widetilde{\mathcal{A}}$ por π^ϕ . Da Proposição 4.17 $\mathcal{L}$ é o suporte de uma cadeia finita de losangos ligando $\widetilde{\theta}_0 = \pi^\phi(\widetilde{\rho}_0)$ a $\widetilde{\theta}'_1 = \pi^\phi(\widetilde{\rho}'_1)$. Além disto, como $\widetilde{\mathcal{A}}$ e $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ coincidem numa vizinhança de $\widetilde{\rho}_0$ levantada de U_0 , o primeiro losango da cadeia que inicia em $\widetilde{\theta}_0$ é exatamente $\mathcal{L}_0$. O mesmo argumento aplicado à vizinhança de $\widetilde{\rho}'_1$ mostra que o último losango da cadeia, o qual tem $\widetilde{\theta}'_1 = h(\widetilde{\theta}_1)$ como vértice, é $h(\mathcal{L}_0)$. Seja $\mathcal{A}_1$ a componente de $\mathcal{A}$ que contém θ_0 . O bordo de $\mathcal{A}_1$ é formado por θ_0 e uma folha compacta f_1 , que podemos supor da folheação f^s induzida por $\mathcal{F}^s$ sobre $\mathcal{A}$ (lembre-se da prova da Proposição 4.17). O traço transversal de $\mathcal{A}_1$ é a união do interior de $\mathcal{L}_0$ com $\{\widetilde{\theta}_0\}$ e $w_-^s(\widetilde{\theta}_1)$ (como na Afirmação

(4) da prova da Proposição 4.17). Segue que a folha F de $\mathcal{F}^s$ que contém f_1 é a mesma que contém θ_1 . Como f_1 é transverso a ϕ em F , f_1 e θ_1 são disjuntos, e seja $\mathcal{A}_2$ o anel bordado em F por f_1 e θ_1 . Como $\mathcal{A}_1$ não contém nenhuma folha compacta de $\mathcal{F}^s$ que não seja θ_0 ou f_1 , sua interseção com $\mathcal{A}_2$ se reduz a f_1 (veja a Figura 4.14).

Deformando $\mathcal{A}_1$ com interior transverso às órbitas de ϕ podemos supor que f_1 está suficientemente próximo de θ_1 . Deste modo podemos obter um anel bordado por θ_0 e θ_1 , que será um Anel de Birkhoff elementar cujo traço transverso é o losango $\mathcal{L}_0$. ■

4.4 Toro incompressível em M: Prova do Teorema B

Agora vamos mostrar o teorema principal que a seguir enunciamos novamente.

Teorema B. *Seja T um toro de dimensão dois incompressível em M e suponha que existem dois caminhos fechados c_1 e c_2 em T tais que:*

- (i) c_1 e c_2 não são homólogos em T ;
- (ii) *Para $i = 1, 2$, existem $x_0^i \in M$, e v um elemento Anosov dos grupos de isotropia de x_0^1 e de x_0^2 indivisível em $\Gamma_{x_0^1}$ e em $\Gamma_{x_0^2}$ tais que c_i é livremente homotópico em M ao caminho $\alpha_i : I \rightarrow M$ dado por $\alpha_i(s) = \phi(sv, x_0^i)$.*

Então T é isotópico a um toro transverso à ação ϕ .

Prova: Seja H o subgrupo de $\pi_1(M)$ correspondente a $\pi_1(T) = H_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Temos a seguinte afirmação.

Afirmação (1): *Os laços c_1 e c_2 correspondem a dois elementos distintos h_1 e h_2 de H que admitem pontos fixos no espaço das órbitas de $\tilde{\phi}$.*

De fato, o caminho fechado $c_i : I \rightarrow T$ é livremente homotópico em M ao caminho $\alpha_i : I \rightarrow M$ dado por $\alpha_i(s) = \phi(sv, x_0^i)$. Isto significa que existe uma homotopia $F_i : I \times I \rightarrow M$ com

$$F_i(s, 0) = \alpha_i(s), \quad F_i(s, 1) = c_i(s), \quad F(0, t) = F(1, t), \quad \forall s, t \in I.$$

Fixemos um $\tilde{x}_0^i \in \widetilde{M}$ tal que $\pi(\tilde{x}_0^i) = x_0^i$. Definindo $\tilde{\alpha}_i : I \rightarrow \widetilde{M}$ por $\tilde{\alpha}_i(s) = \tilde{\phi}(sv, \tilde{x}_0^i)$, $\tilde{\alpha}_i$ é um levantamento de α_i , com $\tilde{\alpha}_i(0) = \tilde{x}_0^i$. Seja h_i o automorfismo do recobrimento $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ associado à classe de α_i , ou seja, o automorfismo h_i com $h_i(\tilde{\alpha}_i(0)) = \tilde{\alpha}_i(1)$.

O nosso objetivo é mostrar que h_i também é o automorfismo associado à classe de c_i , e portanto $h_i \in H$, para isto basta verificar que $h_i(\tilde{c}_i(0)) = \tilde{c}_i(1)$ para um levantamento $\tilde{c}_i$ de c_i . O que resta para fazer tal verificação segue exatamente como na prova o Teorema 1.6, pondo o índice i nos caminhos envolvidos e considerando $\tilde{x}_0^i, M, \widetilde{M}, h_i$, no lugar de e_0, X, E, f respectivamente.

Então temos h_1 e h_2 elementos de H associados a c_1 e c_2 respectivamente, e sabemos que h_1 e h_2 são distintos pelo fato de c_1 e c_2 não serem homólogos.

Como o caminho α_i determina uma órbita fechada do fluxo ϕ^{sv} que está contida numa órbita $\mathcal{O}_i$ de ϕ , sabemos que esta órbita $\mathcal{O}_i$ não é uma plano, logo, é compacta (Proposição 2.20). Pelo que vimos na prova da Proposição 2.29 existe uma órbita $\tilde{\mathcal{O}}_i$ de $\tilde{\phi}$ que é um levantamento de $\mathcal{O}_i$ e é invariante por h_i . Com isto, $\pi^\phi(\tilde{\mathcal{O}}_i)$ é um ponto fixo de h_i como uma aplicação no espaço das órbitas de $\tilde{\phi}$. O que comprova a Afirmação (1).

Afirmação (2): h_1 e h_2 são indivisíveis em $\pi_1(M)$.

De fato, vejamos para h_1 , o caso de h_2 segue de maneira análoga. Como v é indivisível em $\Gamma_{x_0^1}$ podemos encontrar $v_1, \dots, v_k$ geradores do grupo de isotopia de x_0^1 , com $v = v_1$. Consideremos g_j , $1 \leq j \leq k$, o automorfismo do recobrimento $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ associado ao elemento v_j do conjunto de geradores do grupo de isotopia citado acima, como feito na prova da Proposição 2.29.

Seja $g \in \pi_1(M)$ tal que $g^n = h_1$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. Para concluir que h_1 é indivisível basta verificar que $n = \pm 1$.

O automorfismo g tem ordem infinita, pois se existisse um $m \in \mathbb{Z}^*$ com $g^m = id$, teríamos

$$id = id^n = (g^m)^n = (g^n)^m = h_1^m$$

e isto não acontece, pois h_1 tem ordem infinita.

Tomando uma folha $F \in \tilde{\mathcal{F}}^s$ invariante por h_1 sabemos também da prova da Proposição 2.29 que o estabilizador de F , $\text{Stab}(F)$ é gerado por $g_1, \dots, g_k$. Sendo $g^n = h_1$ e $h_1(F) = F$, temos $g^n(F) = F$, e como g tem ordem infinita, da Proposição 3.9 segue que $g(F) = F$, ou seja, $g \in \text{Stab}(F)$. Então existem $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ tais que

$$g = g_1^{n_1} \circ \dots \circ g_k^{n_k}.$$

Como $g^n = h_1$ e $h_1 = g_1$,

$$g_1^{nn_1} \circ \dots \circ g_k^{nn_k} = g_1$$

logo, $n_2 = \dots = n_k = 0$ e $g_1^{nn_1} = g_1$, podemos ver então que $nn_1 = 1$ e sendo n e n_1 números inteiros, sabemos que $|n| = 1$, como queríamos. E como dissemos anteriormente, a indivisibilidade de h_2 em $\pi_1(M)$ segue do mesmo modo. Portanto, comprovamos a Afirmação (2).

Afirmação (3): h_1 e h_2 não têm ponto fixo em comum em Q^ϕ .

De fato, suponhamos que h_1 e h_2 têm um mesmo ponto fixo no espaço das órbitas de $\tilde{\phi}$, ou seja, existe uma órbita $\tilde{\mathcal{O}}$ de $\tilde{\phi}$ que é invariante por h_1 e h_2 , sendo assim, se tomamos a folha F de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ que contém $\tilde{\mathcal{O}}$, então $h_1(F) = F = h_2(F)$, h_1 e h_2 pertencem ao estabilizador de F . Mas h_1 e h_2 são automorfismos associados a caminhos que estão

definidos sobre órbitas periódicas do fluxo ϕ^{sv} , e por isto vemos que h_1 e h_2 pertencem ao estabilizador de F relativo a v , $\text{Stab}_v(F)$ (lembre-se da Definição 2.32), e da Proposição 2.33 sabemos que $\text{Stab}_v(F)$ é um grupo cíclico infinito, logo existem $m, n \in \mathbb{Z}$ e um automorfismo g tais que $h_1 = g^m$ e $h_2 = g^n$, e temos uma contradição com o fato de h_1 e h_2 serem indivisíveis e c_1 e c_2 não serem homólogos.

Afirmção (4): *Trocando h_1 por h_2 se necessário, podemos supor que h_1 fixa uma folha de $\mathcal{G}^s$ que intersecta uma folha de $\mathcal{G}^u$ fixada por h_2 .*

Vejamos que esta afirmação é verdadeira. Seja x um ponto fixo de h_1 em Q^ϕ . Deste modo,

$$h_1(h_2(x)) = h_2(h_1(x)) = h_2(x),$$

$h_2(x) \neq x$ também é ponto fixo de h_1 . Seja $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ a cadeia minimal (como na Definição 3.6) de h_1 -losangos ligando x a $h_2(x)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^{++}(x)$. Seja x_1 o outro vértice de $\mathcal{L}_1$: $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^{--}(x_1)$.

Afirmção (4.1): $\mathcal{L}_n$ não é $\mathcal{L}^{++}(h_2(x))$.

De fato, se $n = 1$, então $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^{--}(h_2(x))$. Supondo que $n > 1$ e $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}^{++}(h_2(x))$, como h_2 preserva orientação transversal, leva o losango $\mathcal{L}_1$ de vértices x e x_1 no losango $\mathcal{L}_n$ de vértices $h_2(x_1)$ e $h_2(x)$, com isto e sabendo que a cadeia é minimal, a cadeia $\mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_{n-1}$ liga x_1 a $h_2(x_1)$ e também é minimal, consequentemente a cadeia $\mathcal{L}_3, \dots, \mathcal{L}_{n-2}$ liga x_2 a $h_2(x_2)$ e é minimal, e assim seguimos sempre eliminando os losangos extremos da cadeia anterior:

- (i) se n for ímpar chegaremos a um único losango de vértices x_r e $h_2(x_r)$ e invariante por h_2 , mas como h_2 preserva orientação transversal, se ele deixa invariante um losango então ele deixa fixo cada um dos seus vértices, logo $h_2(x_r) = x_r$ o que é uma contradição;
- (ii) se n for par, após o término do processo de eliminação dos losangos extremos das cadeias teremos que $h_2(x_{n/2}) = x_{n/2}$ o que é uma contradição, pois $x_{n/2}$ é ponto fixo de h_1 , e h_1 não tem ponto fixo em comum com h_2 .

Isto confirma a Afirmção (4.1).

Como $\mathcal{L}_n$ não é $\mathcal{L}^{++}(h_2(x))$, temos que x está em $U_-(h_2(x))$ ou $S_-(h_2(x))$ (x pode estar em ambos). Além disto, como $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}^{++}(x)$,

$$h_2(x) \in U_+(x) \cap S_+(x).$$

Deste modo:

- (i) Se x está em $U_-(h_2(x))$, como $h_2(x) \in U_+(x)$ segue que $U_+(h_2(x))$ está contido em $U_+(x)$ (veja a Figura 4.15), como h_2 preserva orientações transversais $U_+(h_2(x)) = h_2(U_+(x))$, logo

$$h_2(U_+(x)) \subset U_+(x).$$

- (ii) Se x está em $S_-(h_2(x))$, como $h_2(x) \in S_+(x)$ segue que $S_+(h_2(x))$ está contido em $S_+(x)$ (veja a Figura 4.16), como h_2 preserva orientações transversais $S_+(h_2(x)) = h_2(S_+(x))$, logo

$$h_2(S_+(x)) \subset S_+(x).$$

Figura 4.15:
 $h_2(U_+(x)) \subset U_+(x)$

Figura 4.16:
 $h_2(S_+(x)) \subset S_+(x)$

Do Lema 4.6, no primeiro caso existe uma folha de $\mathcal{G}^s$ fixada por h_2 que tem interseção com $w^u(x)$ e no segundo caso existe uma folha de $\mathcal{G}^u$ fixada por h_2 que tem interseção com $w^s(x)$. Portanto, a Afirmação (4) é verdadeira.

Prosseguindo com a prova do teorema, sejam x_0 e y_0 pontos fixados por h_1 e h_2 respectivamente em Q^ϕ , tais que

$$w^s(x_0) \cap w^u(y_0) = p.$$

Podemos supor que:

$$p = w_+^s(x_0) \cap w_+^u(y_0).$$

Invertendo h_1 ou h_2 se necessário, também podemos assumir que x_0 e y_0 são pontos fixos atratores em $w^s(x_0)$ e $w^u(y_0)$.

$$h_1(h_2(x_0)) = h_2(h_1(x_0)) = h_2(x_0) \text{ e } h_2(h_1(y_0)) = h_1(h_2(y_0)) = h_1(y_0).$$

Portanto, sejam $x' = h_2(x_0)$ e $y' = h_1(y_0)$, pontos fixos de h_1 e h_2 que em $w^s(x')$ e $w^u(y')$ respectivamente são contrações.

$$\begin{aligned} w_+^s(x') \cap w_+^u(y_0) &= h_2(p), \quad w_+^s(x_0) \cap w_+^u(y') = h_1(p) \text{ e} \\ w_+^s(x') \cap w_+^u(y') &= h_2(h_1(p)) = h_1(h_2(p)) \end{aligned}$$

Estas quatro órbitas determinam uma região compacta K no espaço das órbitas (veja a Figura 4.17). K é um “retângulo” de lados

$$\begin{aligned}\alpha &= \partial K \cap w_+^s(x_0) & \alpha' &= \partial K \cap w_+^s(x') \\ \beta &= \partial K \cap w_+^u(y_0) & \beta' &= \partial K \cap w_+^u(y').\end{aligned}$$

Figura 4.17: O compacto K .

Qualquer folha de $\mathcal{G}^u$ que intersecta α também intersecta α' . De fato, seja t' um elemento de α' . Parte da semifolha $w_+^u(t')$ está contida em K e como K é compacto, do item (i) do Teorema 1.16, $w_+^u(t')$ tem necessariamente que encontrar a fronteira ∂K . Como $w_+^u(t')$ “entra” pela componente α' da fronteira, a qual só intersecta uma vez, e $w_+^u(t')$ não tem interseção com β nem β' , a semifolha só pode “sair” de K pela componente α da fronteira. Do mesmo modo, qualquer folha de $\mathcal{G}^s$ que intersecta β também intersecta β' .

Seja $\mathcal{H} : \alpha' \rightarrow \alpha$ a aplicação de holonomia induzida por $\mathcal{G}^u$:

$$\mathcal{H}(t') = w^u(t') \cap \alpha.$$

Seja $f : \alpha \rightarrow \alpha$ a aplicação que associa t a $\mathcal{H}(h_2(t))$. Consideremos $\alpha_0 \subset \alpha$ o conjunto dos elementos t de α tais que $w_-^u(t) \cap w_-^s(y_0) \neq \emptyset$. O conjunto α_0 é um aberto de α f -invariante, pois $w_-^s(y_0)$ é invariante por h_2 e α_0 é a interseção do saturado de $w_-^s(y_0)$ por $\mathcal{G}^u$, que é um aberto, com α . As propriedades topológicas de $Q^\phi \simeq \mathbb{R}^2$ mostram que α_0 é conexo: logo, temos um intervalo não vazio de $w_-^s(p)$ da forma (p, t_1) . Como α_0 é invariante por f e $h_2(w^u(p)) = w^u(p)$, segue que p e t_1 são pontos fixos de f . O extremo t_1 é um ponto fixo atrator de f , p é um ponto fixo repulsor e f não admite ponto fixo em (p, t_1) , pois se admitisse um ponto fixo t_0 neste intervalo, pela própria definição de f , a folha $w^u(t_0)$ seria invariante por h_2 , mas a única folha instável invariante por h_2 que tem

interseção com $w^s(y_0)$ é $w^u(y_0)$. Sendo t_1 um ponto fixo de f , a folha $w^u(t_1)$ é invariante por h_2 , e por isto ela contém um ponto fixo y_1 de h_2 . Se y_1 estivesse em $w_-^u(t_1)$, então y_1 não seria ponto fixo de h_2 , logo $y_1 \in w_+^u(t_1)$.

Figura 4.18: Os pontos fixos p e t_1 de f e o ponto fixo y_1 de h_2 .

Invertendo o procedimento mostra-se que qualquer folha de $\mathcal{G}^u$ que tem interseção com $w_+^s(y_1)$ intersecta $w_-^s(y_0)$ (veja a Figura 4.18). Como K é compacto, repetindo o argumento acima obtém-se uma sequência finita

$$y_0, y_1, \dots, y_{2k} = y'$$

de pontos fixos de h_2 tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{+-}(y_{2i}) &= \mathcal{L}^{-+}(y_{2i+1}) \\ \mathcal{L}^{--}(y_{2i-1}) &= \mathcal{L}^{++}(y_{2i}). \end{aligned}$$

A união Z^y destes losangos invariantes por h_2 incluindo as fronteiras instáveis cobre K . Seguindo o mesmo raciocínio para β' obtemos uma sequência

$$x_0, x_1, \dots, x_{2l} = x'$$

de pontos fixos de h_1 tais que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-+}(x_{2i}) &= \mathcal{L}^{+-}(x_{2i+1}) \\ \mathcal{L}^{--}(x_{2i-1}) &= \mathcal{L}^{++}(x_{2i}). \end{aligned}$$

A união Z^x destes losangos invariantes por h_1 incluindo as fronteiras estáveis cobre K .

Para todo $n = (2k)q + r$ com $0 \leq r < 2k$ definimos $\mathcal{L}_n = h_1^q(\mathcal{L}^{++}(y_r)) = \mathcal{L}^{++}(h_1^q(y_r))$ se r é par, e $\mathcal{L}_n = h_1^q(\mathcal{L}^{+-}(y_r))$ se r é ímpar. Os $\mathcal{L}_n$ formam uma cadeia bi-infinita de losangos invariantes por h_2 . Do mesmo modo, para todo $n = (2l)q + r$ com $0 \leq r < 2l$ definimos $\mathcal{L}'_n = h_2^q(\mathcal{L}^{++}(x_r))$ se r é par e $\mathcal{L}'_n = h_2^q(\mathcal{L}^{+-}(x_r))$ se r é ímpar.

Sejam Z o suporte da cadeia infinita $(\mathcal{L}_n)$ e Z' o suporte da cadeia infinita $(\mathcal{L}'_n)$. Temos K um domínio fundamental da ação de h_2 sobre Z e também da ação de h_1 sobre Z' . Consideremos $H' \subset H$ o subgrupo gerado por h_1 e h_2 . Os conjuntos Z e Z' são abertos H' -invariantes e K é um domínio fundamental de (Z, H') e (Z', H') . Assim:

$$Z = Z' = H' \cdot K.$$

Afirmção (5): *Qualquer elemento g de $\pi_1(M)$ que comute com h_1 e h_2 preserva o conjunto dos losangos $\mathcal{L}_n$.*

Para comprovar esta afirmação vejamos que g leva um h_2 -losango $\mathcal{L}_n$ em outro h_2 -losango do tipo $\mathcal{L}_n$. Como g e h_2 comutam

$$h_2(g(y_i)) = g(h_2(y_i)) = g(y_i).$$

Basta verificarmos que $g(\mathcal{L}_0)$ é um $\mathcal{L}_n$. Já sabemos que é um h_2 -losango, pois g leva o h_2 -losango $\mathcal{L}_0$ de vértices y_0, y_1 no losango aberto $g(\mathcal{L}_0)$ de vértices $g(y_0), g(y_1)$ que pelo que acabamos de ver são pontos fixos de h_2 , logo $g(\mathcal{L}_0)$ é um h_2 -losango. Pela Proposição 3.7, existe uma única cadeia minimal de losangos,

$$\mathcal{L}_0 = \mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_r = g(\mathcal{L}_0)$$

ligando $\mathcal{L}_0$ a $g(\mathcal{L}_0)$. Vejamos que $g(\mathcal{L}_0) \subset \cap_{i \in \mathbb{Z}} U_+(x_{2i})$. Para isto suponhamos que não, ou seja, que existe um $i_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $g(y_1) \in U_-(x_{2i_0})$, logo $w^u(x_{2i_0})$ tem interseção com algum h_2 -losango da cadeia minimal e qualquer folha instável em $U_+(x_{2i_0})$ suficientemente próxima de $w^u(x_{2i_0})$ tem interseção com tal losango, mas pela construção feita acima esse losango necessariamente será um $\mathcal{L}_n$ e tais losangos não têm interseção com $w^u(x_{2i_0})$. Chegamos a uma contradição.

Repetindo o mesmo argumento e considerando também o h_1 -losango $\mathcal{L}'_0$ vemos que,

- $g(\mathcal{L}_0) \subset (\cap_{i \in \mathbb{Z}} U_+(x_{2i})) \cap (\cap_{i \in \mathbb{Z}} U_-(x_{2i+1}));$
- $g(\mathcal{L}'_0) \subset (\cap_{i \in \mathbb{Z}} S_+(y_{2i})) \cap (\cap_{i \in \mathbb{Z}} S_-(y_{2i+1})).$

Resta verificar que $g(\mathcal{L}_0) \subset (\cap_{i \in \mathbb{Z}} S_+(y_{2i})) \cap (\cap_{i \in \mathbb{Z}} S_-(y_{2i+1}))$. Se supormos que $g(\mathcal{L}_0) \subset S_+(y_{2i_0+1})$ para algum $i_0 \in \mathbb{Z}$, como $\mathcal{L}'_0 \cap \mathcal{L}_0 \neq \emptyset$ teremos que $g(\mathcal{L}'_0) \subset S_+(y_{2i_0+1})$ o que é uma contradição. E de maneira análogo concluiremos que $g(\mathcal{L}_0) \subset (\cap_{i \in \mathbb{Z}} S_+(y_{2i})) \cap (\cap_{i \in \mathbb{Z}} S_-(y_{2i+1}))$. Portanto, $g(\mathcal{L}_0)$ é um $\mathcal{L}_n$, e assim comprovamos a Afirmção (5).

Em particular, a Afirmção (5) vale para qualquer elemento de H . Portanto, $Z = Z'$ é H -invariante. Lembre-se que h_2 é indivisível. Existe um elemento h_3 de H , tal que h_2 e

h_3 geram H . Este h_3 atua sobre os pontos fixos y_{2i} permutando-os. Portanto existe um u inteiro tal que:

$$h_3(y_i) = y_{i+2u}.$$

Existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $h_1 = h_2^m \circ h_3^n$, pois $h_1 \in H$ que é gerado por h_2 e h_3 , logo $h_3^n = h_1 \circ h_2^{-m}$ e

$$h_3^n(y_0) = h_1(h_2^{-m}(y_0)) = h_1(y_0) = y_{2k}.$$

Por outro lado,

$$h_3^n(y_0) = y_{2nu},$$

e temos que u divide k . Invertendo u se necessário podemos supor que ele é positivo. É um divisor de k e portanto menor que k . Todos os losangos $\mathcal{L}_n$ ($0 \leq n \leq 2u - 1$) são simples: de fato, basta observar que os h_2 -losangos $\mathcal{L}_0$ e $\mathcal{L}_1$ estão em posição indireta, com isto, através da Proposição 4.12 concluímos que os $\mathcal{L}_n$ são losangos simples. Pelo Teorema 4.18 podemos construir anéis de Birkhoff elementares $\mathcal{A}_n$ ($0 \leq n \leq 2u - 1$) com traço transversal $\mathcal{L}_n$. Dois anéis sucessivos admitem uma órbita comum e periódica do fluxo ϕ^{tv} que pertence a seus bordos. A união dos anéis é a imagem da imersão de um toro “com quinas”. Retomando o argumento da afirmação da prova da Proposição 4.12 mostra-se que nenhum dos $\mathcal{A}_n$ encontra no seu interior uma componente de bordo de outro $\mathcal{A}_i$. Podemos fazer a homotopia ao longo da ação ϕ . A isotopia da união dos $\mathcal{A}_n$ é um mergulho topológico do toro em M , transversal a ϕ exceto num número finito de órbitas, e cujo traço transversal é a união dos $\mathcal{L}_n$ e das semifolhas comuns à fronteira de dois losangos subsequentes. Deformamos cada $\mathcal{A}_n$ em uma vizinhança de seu bordo de modo que união dos anéis perturbados formam a imagem de um toro suave T_0 mergulhado em M transversal a ϕ cujo traço transversal é $Z = Z'$. O grupo fundamental de T_0 é injetado em $\pi_1(M)$ no grupo $\langle h_2, h_3 \rangle = H$. É portanto homotópico a T em M . Os traços de $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$ em T_0 são conjugados às projeções de $\mathcal{G}^s$ e $\mathcal{G}^u$ em $Z_{/H} = Z'_{/H}$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] ANOSOV, D.V. Roughness of geodesic flows on compact manifolds of negative curvature (in Russian), *Dokl.Akad.Nauk SSSR*, 145, pp. 707-709, 1962.
- [2] BARBOT, T. Géométrie transverse des flots d'Anosov. *Thesis, École Norm. Sup. Lyon*, 1992.
- [3] BARBOT, T. Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen I: Morceaux fibrés de bifeuillements d'Anosov.
- [4] BARBOT, T. Flots d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen II: Caracterization des exemples de Handel-Thurston.
- [5] BARBOT, T. Mise en position optimale d'un tore par rapport à un flot d'Anosov. *Comm. Math. Helv.* 70, pp. 113-160, 1995.
- [6] BARBOT, T. Caractérisation des flots d'Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 15, pp. 247-270, 1995.
- [7] CAMACHO, César; NETO, Alcides Lins. Teoria geométrica das folheações. *Instituto de Matemática Pura e Aplicada*, Rio de Janeiro, 1979.
- [8] EHRESMANN, C.; SHIH, W. Sur les espaces feuilletés: théoreme de stabilité. *C. R. Ac. Sc. Paris. v. 243*. pp. 344-346. 1956.
- [9] FENLEY, S. R. Incompressible tori transverse to Anosov flows in 3-manifolds. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 17, n. 1, pp. 105-121, 1997.
- [10] FENLEY, S. R. Anosov flows in 3-manifolds. *Ann. Math.* 139, pp. 79-115, 1994.
- [11] FENLEY, S. R. Quasigeodesic Anosov flows and homotopic properties of closed orbits. *Jour. Diff. Geom.* 41, pp. 479-514, 1995.
- [12] FENLEY, S. R. Homotopic indivisibility of closed orbits of 3-dimensional Anosov flows. *Math. Zeit.* 225, pp. 289-294, 1997.
- [13] FENLEY, S. R. The structure of branching in Anosov foliations of 3-manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 73, pp. 259-297, 1998.

- [14] FRANKS, J.; WILLIAMS, B. Anomalous Anosov flows. *Lecture Notes in Math.*, 819, Springer, Berlin, pp. 158-174, 1980.
- [15] FRIED, D. Transitive Anosov flows and pseudo-anosov maps. *Topology* 22, pp. 299-304, 1983.
- [16] HIRSCH, M.; PUGH, C.; SHUB, M. Invariant manifolds. *Lecture Notes in Math.*, 583, Springer, Berlin, 1977.
- [17] HIRSCH, M.; SMALE, S. Differential equations, dynamical systems and linear algebra. *Academic Press*, 1974.
- [18] IM HOF, H.C. An Anosov action on the bundle of Weyl chambers. *Ergod. Th. & Dyn. Sys.*, 5, pp. 587-593, 1985.
- [19] KATOK, A.; LEWIS, J. Global rigidity results for lattice actions on tori and new examples of volume-preserving actions. *Israel J. Math.* (93), pp. 253-280, 1996.
- [20] KATOK, A.; SPATZIER, R.J. First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (79), pp. 131-156, 1994.
- [21] KALININ, B.; SPATZIER, R. On the classification of Cartan actions. *G.A.F.A. Geom. funct. anal.* (17), pp. 468-490, 2007.
- [22] KATOK, A.; SPATZIER, R. First cohomology of Anosov actions of higher rank abelian groups and applications to rigidity. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 79, pp. 131-156, 1994.
- [23] KATOK, A.; SPATZIER, R. Differential rigidity of Anosov actions of higher rank abelian groups and algebraic lattice actions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, n. 1 (216), pp. 287-314, 1997.
- [24] MAQUERA, Carlos; BARBOT, Thierry. Transitivity of codimension-one Anosov actions of $\mathbb{R}^k$ on closed manifolds. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, 31, pp. 1-22, 2011.
- [25] MAQUERA, Carlos; BARBOT, Thierry. On integrable codimension one Anosov actions of $\mathbb{R}^k$. A aparecer em DCDS-A, 29 (3), p. 803–822, 2011.
- [26] MATSUMOTO, Shigenori. Codimension one Anosov flows. *Lecture Notes Series*, 27, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1995.
- [27] MELO, W.; PALIS, J. Introdução aos sistemas dinâmicos. *Projeto Euclides*, IMPA, Rio de Janeiro, 1978.

- [28] NEWHOUSE, S. E. On codimension one Anosov diffeomorphisms. *Amer. J. Math.* 92, pp. 761-770, 1970.
- [29] PALMEIRA, C.F.B. Open manifolds foliated by planes. *Ann. of Math.*, 107, pp. 109-131, 1978.
- [30] PUGH, C.; SHUB, M. Ergodicity of Anosov actions. *Invent. Math.*, 15, pp. 1-23, 1972.
- [31] VERJOVSKY, Alberto. Codimension one Anosov flows. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 19 (2), pp. 49-77, 1974.
- [32] VERJOVSKY, Alberto. Sistemas de Anosov. *Monografías del IMCA. Universidad Nacional de Ingeniería*, Lima, 1999.

Índice Remissivo

- C^r -estruturalmente estável, 18
- g -losango aberto
 - direto, 40
 - indireto, 40
- Órbita periódica, 23
- Ação
 - Anosov, 20
 - Anosov de codimensão um, 21
 - Anosov de codimensão um irreduzível, 21
 - de $\mathbb{R}^k$, 15
 - folheada, 15
 - localmente livre, 15
 - topologicamente transitiva, 21
- Anel de Birkhoff, 43
 - elementar, 43
- Aplicação
 - de holonomia, 12
 - distinguida, 9
- Automorfismo
 - do recobrimento, 6
 - indivisível, 22
- Cadeia
 - de losangos em $\widetilde{M}$, 29
 - de losangos em Q^ϕ , 40
 - minimal, 33
 - subordinada, 11
- Caminho de placas, 8
- Campo
 - de k -planos, 13
 - de vetores, 13
- Carta trivializadora, 8
- Componente de um anel de Birkhoff, 43
- Comprimento de uma cadeia em $\widetilde{M}$, 29
- Comprimento de uma cadeia em Q^ϕ , 40
- Conjunto
 - errante, 18
 - não-errante, 18, 19
- Curva integral, 13
- Difeomorfismo Anosov, 17
- Elemento Anosov, 20
- Espaço das folhas, 9
- Estabilizador, 24
- Fluxo, 16
 - Anosov, 19
 - Anosov de codimensão um, 19
 - não-singular, 16
 - topologicamente transitivo, 19
- Folha, 8
 - periódica, 23
 - quase invariante, 23
- Folheação, 8
 - orientável, 15
 - por planos fechados, 22
 - transversalmente orientável, 15
- Germe, 12
- Grupo
 - de holonomia, 13
 - de isotropia, 15
- Integrável, 15
- Lado
 - negativo de uma folha, 28
 - positivo de uma folha, 27
- Losango

- em $\widetilde{M}$, 29
- em Q^ϕ , 40
- simples, 40
- Losangos adjacentes, 29
- Placas, 8
- Ponto não-errante, 19
- Posição
 - direta, 40
 - indireta, 41
- Saturado, 9
- Seção transversal, 10
- Semifolha positiva, 28
- Subcone regular, 20
- Suporte de uma cadeia de losangos, 41
- Traço transversal, 44
- Vértice, 40
- Variedade
 - incompressível, 22