Números de Milnor e obstrução de Euler

Aurélio Menegon Neto

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Defesa: 27 de junho de 2007

Assinatura: _____

Números de Milnor e obstrução de Euler[†]

Aurélio Menegon Neto

Orientador: *Prof. Dr. Raimundo Nonato Araújo dos Santos*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC/USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

VERSÃO REVISADA APÓS A DEFESA

USP - São Carlos

Agosto/2007

À minha amada mãe,
Léia.

*“De tarde quero descansar, chegar até a praia
Ver se o vento ainda está forte
E vai ser bom subir nas pedras.
Sei que faço isso para esquecer
Eu deixo a onde me acertar
E o vento vai levando tudo embora.*

*Agora está tão longe
Vê, a linha do horizonte me distrai:
Dos nossos planos é que tenho mais saudade,
Quando olhávamos juntos na mesma direção.*

*Aonde está você agora
Além de aqui dentro de mim?*

*Agimos certo sem querer
Foi só o tempo que errou
Vai ser difícil sem você
Porque você está comigo o tempo todo.*

*Quando vejo o mar
Existe algo que diz:
- A vida continua e se entregar é uma bobagem.*

*Já que você não está aqui,
O que posso fazer é cuidar de mim.
Quero ser feliz ao menos.
Lembra que o plano era ficarmos bem?*

*Ei, olha só o que achei: cavalos-marinhos.
Sei que faço isso para esquecer
Eu deixo a onda me acertar
E o vento vai levando tudo embora.”*

Renato Russo

Ao meu saudoso pai,
in memoriam.

Agradecimentos

Numa tarde qualquer, tomei-me de estranha coragem e decidi desviar meu caminho. Optei pela paixão. Desisti da carreira de engenheiro para engajar-me em uma longa jornada de aprendizado sobre a mais pura das ciências: a matemática. E o que parecia ser quase impossível foi se tornando realidade! Mas meus méritos são limitados. Certamente o presente trabalho não seria realidade sem o enorme apoio com o qual sempre contei, de diversas pessoas que contribuíram de várias maneiras. Por isso, gostaria de agradecer...

À minha mãe, que sempre priorizou a educação dos filhos acima de qualquer coisa, por vezes em detrimento dos próprios sonhos. A ela que sempre investiu em seus filhos todas as suas riquezas, as espirituais, emocionais, físicas e financeiras, com o único propósito de fazê-los homens. À ela que sempre apoiou minhas decisões, muitas vezes sem compreendê-las. A ela, que eu tanto amo, deixo meu amor e minha eterna gratidão.

Ao meu pai, cuja preocupação primeira sempre foram os estudos dos filhos e cujos ensinamentos e amor me trouxeram até aqui. A ele dedico todo este trabalho; a ele dedico todos os meus pensamentos.

Ao meu irmão Leandro, uma das pessoas mais bonitas que já conheci. Um genuíno irmão mais velho: amigo, gentil, alegre, sempre educando, ajudando e ensinando, e por vezes tomando as funções do meu falecido pai. Um apoio essencial na minha vida.

Ao meu irmão David, meu melhor amigo. A pessoa que melhor me conhece e que me acompanhou em cada passo da vida, desde o primeiro. Esteve ao meu lado em todas as dificuldades, alegrias, dúvidas... um presente de Deus!

Ao companheiro Eduardo, que sofreu comigo todas as dificuldades dessa transição para a matemática e sempre torceu pelo meu sucesso. Sem falar em sua ajuda prática no dia-a-dia, sem a qual eu não teria tido metade do tempo que tive para me dedicar aos estudos.

Aos amigos Camargo, Célia e Dê, cujos conselhos, alegria e amor me foram fundamentais nesses anos. À minha cunhada tão querida, Juliana, por quem tenho muito afeto; e ao Gabriel, pelo bom humor! Aos amigos Bianca, Flavinha, Marcelo e Rachel, que moram no meu coração.

À minha querida vó, Yolanda.

Ao meu orientador, Raimundo, pela enorme atenção, paciência e dedicação; e pela excelente orientação.

À professora Sandra, cuja orientação e amizade me foram essenciais nos últimos anos, sem as quais eu jamais teria tido coragem nem estímulos para trilhar este caminho. A ela deixo meu agradecimento especial. Sua paixão pela matemática e pelo ensinar tem inspirado a mim e a muitos outros estudantes.

Ao professor Roberto, que muito atenciosamente ajudou na correção deste trabalho e contribuiu com valiosas sugestões.

Ao meu grande amigo Douglas, a quem devo agradecer pela sincera amizade, paciência, atenção e pelos muitos e bons momentos de diversão.

Ao amigo Márcio, pelo apoio em vários momentos difíceis do mestrado, bem como pela trabalhosa correção desta dissertação, e ao amigo Nivaldo, cuja contribuição matemática foi, sem dúvida alguma, essencial para a realização deste trabalho. É muito raro encontrar alguém disposto a ajudar mesmo quando não há o que pedir em troca.

À companheira de estudos Vanessa e, finalmente, a todos os outros amigos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos professores e funcionários do ICMC, que se dedicam para que este instituto contribua na construção de uma nação mais justa.

Finalmente, ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

Neste trabalho, definimos a obstrução local de Euler de um espaço analítico complexo singular (X, x_0) , denotada por $Eu(X, x_0)$, e a obstrução local de Euler de uma função holomorfa f definida neste espaço, com uma singularidade isolada em x_0 , denotada por $Eu_f(X, x_0)$; e apresentamos duas fórmulas para seus respectivos cálculos. Em seguida, através de uma abordagem geométrica, determinamos as relações entre $Eu_f(X, x_0)$ e algumas generalizações do número de Milnor para funções em espaços singulares.

Abstract

In this work we define the local Euler obstruction of a complex analytic singularity (X, x_0) , denoted $Eu(X, x_0)$, and the local Euler obstruction of a holomorphic function f defined on this space, with an isolated singularity at x_0 , denoted $Eu_f(X, x_0)$; and we present two formulas for their respective calculations. Next, using a geometric approach, we determine the relations between $Eu_f(X, x_0)$ and several generalizations of the Milnor number for functions on singular spaces.

Sumário

Introdução	17
1 Preliminares	19
1.1 Característica de Euler-Poincaré e o teorema de Poincaré-Hopf	19
1.2 Germes de aplicações	21
1.3 Espaços analíticos complexos	22
1.4 Fibrados vetoriais	23
1.5 Modificação de Nash	25
1.6 Estratificação de Whitney	25
2 O número de Milnor	27
2.1 O teorema da fibração	27
2.2 A topologia da fibra	31
3 Obstrução de Euler	37
3.1 Obstrução local de Euler de um germe analítico singular	37
3.2 Índice GSV	40
3.3 Obstrução local de Euler de uma função	42
3.4 Obstrução global de Euler	45
4 Números de Milnor e obstrução local de Euler	47
4.1 Obstrução local de Euler e morsificação de funções	47
4.2 Números de Milnor	49
4.2.1 Número de Milnor de Lê	49
4.2.2 Outro número de Milnor	50
4.3 Exemplo	51
Bibliografia	55

Introdução

O objeto central de estudo deste trabalho são as funções holomorfas definidas em espaços analíticos complexos (X, x_0) , com singularidade isolada em x_0 , digamos,

$$f : (X, x_0) \longrightarrow \mathbb{C} .$$

O objetivo principal desta dissertação é apresentar em um único texto os principais conceitos e resultados da teoria de singularidades para funções holomorfas com singularidade isolada e os recentes resultados obtidos nos estudos da obstrução local de Euler de f , para então podermos relacionar essas duas teorias, resultando em comparações entre generalizações do número de Milnor e a obstrução local de Euler de f .

No capítulo 1, apresentamos algumas definições básicas que serão utilizadas ao longo do texto. Procuramos nos limitar ao que for realmente necessário para a compreensão dos capítulos seguintes, de forma a não produzir um texto desnecessariamente cansativo.

No capítulo 2, fazemos um breve estudo da Teoria de Milnor para funções analíticas definidas em um aberto U de $\mathbb{C}^n$, com base em [18]. Na primeira seção, provamos o teorema da fibração de Milnor. Em seguida, estudamos a topologia das fibras obtidas pela fibração de Milnor e particularizamos para o caso de uma singularidade isolada, onde definimos o número de Milnor $\mu(f)$.

No capítulo 3, nos dedicamos ao estudo da obstrução local de Euler. Na primeira seção, definimos a obstrução local de Euler de um germe analítico complexo (possivelmente singular) e apresentamos uma fórmula para o seu cálculo, originalmente demonstrada em [1]. Em seguida, definimos o índice GSV de um campo de vetores. Na seção 2.3, baseados em [2], definimos a obstrução local de Euler de f e apresentamos uma fórmula para o seu cálculo, bem como alguns corolários. Na quarta seção, definimos o conceito de obstrução global de Euler.

Finalmente, no capítulo 4, estudamos as relações entre o número de Milnor $\mu(f)$ e a obstrução local de Euler $Eu_f(X, x_0)$, com base em [25].

No caso de um germe não-singular (X, x_0) e de uma função holomorfa f com um ponto crítico isolado em x_0 , os três seguintes invariantes coincidem (para (c), a menos de sinal):

- (a) o número de Milnor de f em x_0 , denotado por $\mu(f)$;
- (b) o número de pontos de Morse em uma morsificação de f (ver [31], teorema 2.5, por exemplo);
- (c) o índice de Poincaré-Hopf de $\overline{\text{grad } f}$ em x_0 (ver exemplo 4.1.1).

Este fato é essencialmente devido ao trabalho de Milnor nos anos sessenta [18]. Existem extensões de todos esses invariantes para o caso em que (X, x_0) é um germe singular, mas eles não coincidem em geral. Uma das extensões de (c) é a obstrução de Euler de f em x_0 , definida no terceiro capítulo.

A idéia principal do quarto capítulo é que, para X singular, a obstrução local de Euler de f , $Eu_f(X, x_0)$, está mais proximamente relacionada a (b). Usamos a versão homológica do teorema do bouquet para a fibra de Milnor dada em [30], que relaciona as contribuições no bouquet ao número de pontos de Morse. Através desta relação, pode-se comparar $Eu_f(X, x_0)$ com número de Milnor de f .

Comparamos $Eu_f(X, x_0)$ com duas generalizações diferentes do número de Milnor para funções com singularidade isolada em espaços singulares, uma devido a [14] e outra devido a [9] para curvas singulares e a [12] para funções em germes de interseção completa com singularidade isolada em geral.

No caso em que o germe (X, x_0) é uma interseção completa com singularidade isolada, usamos o índice GSV de campos vetoriais para determinar completamente as relações entre $Eu_f(X, x_0)$, o número de Milnor de f e o índice GSV relativo a f .

Preliminares

1.1 Característica de Euler-Poincaré e o teorema de Poincaré-Hopf

Em 1758, Euler publicou a descoberta da chamada fórmula de Euler. Para um poliedro P em $\mathbb{R}^3$, de dimensão 2, homeomorfo à esfera S^2 , tem-se

$$n_0 - n_1 + n_2 = 2,$$

onde n_0 é o número de vértices de P , n_1 é o número de arestas e n_2 é o número de faces.

Para um poliedro 2-dimensional geral P em $\mathbb{R}^3$, a soma alternada

$$\chi(P) = n_0 - n_1 + n_2$$

é a chamada *característica de Euler de P* .

Poincaré generalizou este resultado, em 1893, para um poliedro finito P de qualquer dimensão e revelou o significado desse número "mágico". Denotemos por n_i o número de simplexes i -dimensionais de um poliedro finito n -dimensional P . A *característica de Euler-Poincaré de P* é definida por

$$\chi(P) = \sum_i (-1)^i n_i.$$

Definição 1.1.1. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é triangularizável se existe um homeomorfismo $h : |K| \rightarrow X$, para algum poliedro K (onde $|K|$ é o espaço topológico dado*

pelo conjunto K com a topologia induzida do espaço ambiente). Neste caso, K é dito uma *triangularização* de X .

Abaixo, temos um importante resultado devido a Poincaré (veja [3]):

Teorema 1.1.2. *Sejam (K, h) e (K', h') duas triangularizações do mesmo espaço X . Então $\chi(K) = \chi(K')$.*

Este número, independente da triangularização de X , é chamado de *característica de Euler-Poincaré* de X e denotado por $\chi(X)$. Este número é um invariante topológico do espaço X . Por exemplo, a característica de Euler-Poincaré da esfera S^n é $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Também, a característica de Euler-Poincaré do espaço projetivo real P^n é $\chi(P^n) = 0$, se n é ímpar, e $\chi(P^n) = 1$, se n é par. Considere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Definição 1.1.3. *Uma variedade topológica n -dimensional é um espaço topológico M satisfazendo a seguinte propriedade: Para todo ponto $a \in M$, existe uma vizinhança U_a de a em M homeomorfa a uma bola aberta $B^n \subset \mathbb{K}^n$ via um homeomorfismo $\phi : B^n \rightarrow U_a$ tal que $\phi(0) = a$ e o bordo de U_a , chamado de *link local* de a , é homeomorfo à esfera S^{n-1} .*

Considere M uma variedade diferenciável compacta de dimensão n e seja $v : M \rightarrow \mathbb{K}^n$ um campo de vetores contínuo em M com singularidades isoladas, onde uma singularidade a do campo de vetores v é um ponto de M no qual o campo é zero ou não está definido. Em tal ponto, definiremos o índice do campo de vetores v da seguinte forma:

Definição 1.1.4. *Considere $B(a)$ uma bola aberta de $\mathbb{K}^n$, com centro em a e suficientemente pequena tal que a seja o único ponto singular de v em $\phi(B(a))$. O campo de vetores v é bem definido e não-singular em $\phi(S(a))$, onde $S(a) = \partial B(a)$ e a esfera $S(a) \cong S^{n-1}$ é orientada, de acordo com a orientação de $\mathbb{R}^n$. Vamos definir a aplicação de Gauss*

$$\gamma : S(a) \cong S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$

colocando $\gamma(x) = v(\phi(x))/\|v(\phi(x))\|$. Geometricamente, o grau da aplicação de Gauss é o número de vezes que o ciclo $\gamma(S(a))$ cobre S^{n-1} , isto é, o grau da aplicação

$$\gamma_* : H_{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{Z} \longrightarrow H_{n-1}(S^{n-1}) \approx \mathbb{Z},$$

onde $H_n(X)$ denota o n -ésimo grupo de homologia de um espaço topológico X . Chamamos este número de índice local de Poincaré-Hopf de v no ponto a e o denotamos por $I(v, a)$.

Este índice não depende da escolha da bola $B(a)$ satisfazendo as condições anteriores. Agora, enunciaremos o teorema de Poincaré-Hopf.

Teorema 1.1.5 (Poincaré-Hopf). *Seja M uma variedade diferenciável compacta orientada e seja v um campo de vetores tangente contínuo em M com finitas singularidades isoladas a_i . Então:*

$$\chi(M) = \sum_i I(v, a_i).$$

O corolário abaixo é uma importante consequência do teorema de Poincaré-Hopf:

Corolário 1.1.6. *Se $\chi(M) \neq 0$, então qualquer campo de vetores contínuo tangente à superfície M admite pelo menos um ponto singular. Reciprocamente, toda variedade compacta M com $\chi(M) = 0$ admite um campo de vetores contínuo tangente sem singularidades.*

Observação 1.1.7. O teorema 1.1.5 continua válido se M for uma variedade diferenciável compacta orientada com bordo, desde que se tome o campo de vetores v "apontando" para fora em todos os pontos do bordo. Veja [21], página 35.

1.2 Germes de aplicações

Dados m, p inteiros positivos fixos, considere $F_p = \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^p; \ 0 \in U, \ U \text{ aberto de } \mathbb{R}^m\}$.

Definição 1.2.1. *Duas aplicações $f_1, f_2 \in F_p$, $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^p$, são ditas equivalentes, e denotamos $f_1 \equiv f_2$, se existe um aberto V tal que $V \subset U_1 \cap U_2$, $0 \in V$ e $f_1|_V$ é idêntica a $f_2|_V$.*

Definição 1.2.2. *O quociente $(F_p / \equiv)$ é dito o conjunto dos germes de aplicações definidas em 0.*

Defina:

- a) $F_p^0 = \{f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p; \ 0 \in U, \ f \text{ contínua}\};$
- b) $F_p^k = \{f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p; \ 0 \in U, \ f \in C^k\}, \quad k = 1, \dots, \infty.$
- c) $F_p^w = \{f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p; \ 0 \in U, \ f \text{ analítica}\}.$

Para $p = 1$, defina F_1 como sendo o quociente $(F_1 / \equiv)$, com as seguintes operações:

$$[f] + [g] = [f + g] \quad \text{e} \quad [f] \cdot [g] = [f \cdot g],$$

onde $[f]$ denota a classe de equivalência de f em $(F_1 / \equiv)$.

Estas operações induzem sobre F_1 uma estrutura de anel comutativo com unidade, denotado por $(F_1, +, \cdot)$ (a unidade é a classe de equivalência da função constante $g = 1$).

Definição 1.2.3. *Chamamos o quociente $(F_1^\infty / \equiv)$, denotado por E_m , de anel dos germes das funções suaves (de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$), e chamamos o quociente $(F_1^w / \equiv)$, denotado por A_m , de anel dos germes das funções analíticas (de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}$).*

Agora, considere o conjunto $\tilde{F}_p^w = \{f : U \subset \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^p; \ 0 \in U \text{ e } f \text{ analítica}\}$. Definimos:

Definição 1.2.4. *O quociente $(\tilde{F}_p^w / \equiv)$, denotado por $O_{m,p}$, é dito o anel dos germes das aplicações analíticas complexas de $\mathbb{C}^m$ em $\mathbb{C}^p$, e o quociente $(\tilde{F}_1^w / \equiv)$, denotado por O_m , é dito o anel dos germes das funções analíticas complexas ou holomorfas (de $\mathbb{C}^m$ em $\mathbb{C}$).*

Proposição 1.2.5. *Os anéis E_m , A_m e O_m são anéis locais, isto é, possuem um único ideal maximal, a saber, $M_m = \{[f]; f(0) = 0\}$.*

Podemos generalizar esses conceitos para o caso $p > 1$, como faremos abaixo:

Dados $[f], [g] \in F_p^\infty$ e $[h] \in F_1^\infty$, defina:

$$[f] + [g] = [f + g] \quad \text{e} \quad [h] \cdot [f] = [h \cdot f]$$

Proposição 1.2.6. *Com as operações acima, $(F_p^\infty / \equiv, +)$ é um $(F_1^\infty / \equiv)$ - módulo livre. Analogamente, $(O_{m,p} / \equiv, +)$ é um $(O_m / \equiv)$ - módulo livre.*

1.3 Espaços analíticos complexos

Uma extensão natural dos conceitos de variedades algébricas é obtida ao se considerarem funções analíticas ao invés de apenas polinômios, isto é, ao se considerar o conjunto de zeros de uma ou mais funções analíticas.

Definição 1.3.1. *Considere o conjunto dos pares (V_α, U_α) , onde U_α é uma vizinhança aberta da origem em $\mathbb{C}^n$ e V_α é um subconjunto de U_α contendo 0. Dois pares (V_1, U_1) e (V_2, U_2) são ditos equivalentes se existe uma vizinhança $W \subset U_1 \cap U_2$ da origem tal que $V_1 \cap W = V_2 \cap W$. Uma classe de equivalência destes pares é chamada germe na origem em $\mathbb{C}^n$.*

Definição 1.3.2. *Seja $[f] \in O_n$. Definimos $V(f)$, chamado de germe de espaço analítico, como sendo a classe de equivalência do conjunto $f^{-1}(0)$.*

Definição 1.3.3. *Um germe de variedade analítica em torno da origem, denotado por $(V, 0)$, é a classe de equivalência de um conjunto $V = f_1^{-1}(0) \cap \dots \cap f_r^{-1}(0)$, onde $f_1, \dots, f_r$ são funções analíticas complexas.*

Definição 1.3.4. *Um germe de variedade analítica V é irredutível se, para quaisquer germes V_1, V_2 tais que $V = V_1 \cup V_2$, temos $V = V_1$ ou $V = V_2$. Caso contrário, V é dito redutível.*

O teorema abaixo garante que qualquer germe de variedade analítica tem uma única decomposição em uniões de subvariedades irredutíveis, chamadas de componentes irredutíveis:

Teorema 1.3.5. *Seja V um germe de variedade analítica. Então podemos escrever*

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_k,$$

onde cada V_i é irredutível e não é subconjunto de V_j , para $i \neq j$. Além disso, $V_1, \dots, V_k$ são unicamente determinados por V .

Definição 1.3.6. *Seja V um germe (não-vazio) de variedade analítica irredutível em torno da origem. Pelo teorema III.5.2(c) de [27], é possível representar V por um conjunto analítico X que contém uma variedade analítica X_0 conexa, aberta e densa em X . Definimos a dimensão de V por:*

$$\dim(V) = \dim(X_0).$$

Definição 1.3.7. *Seja V um germe de variedade analítica em torno da origem. Seja $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ a decomposição de V em componentes irredutíveis. A dimensão de V é definida por*

$$\dim(V) = \max_{1 \leq i \leq k} \dim(V_i).$$

Dizemos que V tem dimensão pura (ou que V é equidimensional) se todas as componentes irredutíveis têm a mesma dimensão.

Definição 1.3.8. *Um germe de subvariedade analítica em x é uma classe de equivalência de um conjunto V contendo x tal que, para alguma vizinhança U de x , o conjunto $V \cap U$ é um germe de variedade analítica.*

Definição 1.3.9. *Dizemos que um ponto z de um germe de subvariedade analítica V é um ponto regular se, para alguma vizinhança U de z , o conjunto $V \cap U$ é o conjunto de zeros de um número finito de germes de função analítica que possuem z como ponto regular. Caso contrário, z é dito ponto singular de V .*

Definição 1.3.10. *Seja x um ponto de um espaço analítico X , definido em um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, e seja m a dimensão de X em x . Então, em qualquer vizinhança de x , X não pode ser definido como o conjunto de zeros comuns de menos que $n - m$ funções holomorfas em x (veja exercício IV.2.1 de [27]). Se pudermos fazê-lo com exatamente $n - m$ funções dessa forma, então diremos que X é uma interseção completa geométrica em x .*

1.4 Fibrados vetoriais

Seja B um espaço topológico fixo, chamado *espaço base*.

Definição 1.4.1. *Um fibrado vetorial real ξ sobre B de posto n consiste em:*

1. *Um espaço topológico $E = E(\xi)$, chamado espaço total;*
2. *Uma aplicação contínua sobrejetora $\pi : E \rightarrow B$, chamada projeção;*
3. *Uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ no conjunto $\pi^{-1}(b)$, para cada $b \in B$, satisfazendo a seguinte condição (trivialidade local):*

Para cada $b \in B$, existem uma vizinhança $U \subset B$ de b , um inteiro $n \geq 0$ e um homeomorfismo $h : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que para cada $b' \in U$, a correspondência $x \mapsto h(b', x)$ define um isomorfismo entre o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e o espaço vetorial $\pi^{-1}(b')$.

O par (U, h) é dito um sistema de coordenadas local para ξ em b . Se for possível escolher $U = E$, então ξ será dito um *fibrado trivial*. O espaço vetorial $\pi^{-1}(b)$ é chamado de *fibra* sobre b , denotado por F_b ou $F_b(\xi)$.

O conceito de um fibrado vetorial suave é definido analogamente, colocando B e E variedades suaves, π uma aplicação contínua e pedindo que, para todo $b \in B$, exista um sistema de coordenadas local (U, h) , com $b \in U$, tal que h é um difeomorfismo.

Definição 1.4.2. *Dois fibrados vetoriais ξ e η sobre uma mesma base B são ditos isomorfos (e denotamos $\xi \approx \eta$) se existe um homeomorfismo $f : E(\xi) \rightarrow E(\eta)$ que leva cada espaço vetorial $F_b(\xi)$ isomorficamente sobre o correspondente espaço vetorial $F_b(\eta)$.*

Definição 1.4.3. *Uma seção de um fibrado vetorial ξ com espaço base B é uma função contínua*

$$s : B \longrightarrow E(\xi)$$

que leva cada $b \in B$ em um vetor da fibra $F_b(\xi)$. Tal seção é dita nunca-nula se $s(b)$ é um vetor diferente de zero em $F_b(\xi)$, para todo $b \in B$.

Definição 1.4.4. *A variedade de Grassmann, denotada por $G(d, n)$, é o conjunto de todos os subespaços vetoriais complexos de dimensão d do espaço euclidiano C^n .*

Observamos que a variedade de Grassmann $G(d, n)$ é compacta (veja [15]).

Seja M uma variedade complexa suave de dimensão n . Sejam $T_x M$ o espaço tangente a M no ponto $x \in M$ e $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$.

Definição 1.4.5. *O fibrado em grassmannianas dos d -planos (complexos) de TM sobre M é o fibrado vetorial em que:*

1. *O espaço total é $M \times G(d, n)$;*
2. *A projeção é dada por $\nu(x, P) = x$;*
3. *A fibra G_x sobre $x \in M$ é o conjunto dos d -planos (complexos) de $T_x M$.*

Agora, construiremos um fibrado vetorial canônico sobre $M \times G(d, n)$, que chamaremos de *fibrado tautológico*: tome E como o conjunto de todas as ternas (x, P, v) , onde $x \in M$, $P \in G(d, n)$ e $v \in P$. Em $E \subset (M \times G(d, n) \times \mathbb{R}^n)$, coloque a topologia induzida.

Defina a aplicação projeção $\pi : E \rightarrow M \times G(d, n)$ pondo $\pi(x, P, v) = (x, P)$. A estrutura de espaço vetorial na fibra sobre (x, P) é definida por

$$t_1 \cdot (x, P, v_1) + t_2 \cdot (x, P, v_2) = (x, P, t_1 v_1 + t_2 v_2).$$

O fibrado vetorial construído acima satisfaz a condição de trivialidade local (veja [20]).

1.5 Modificação de Nash

Sejam $(M, 0)$ um germe de variedade complexa suave e $(X, 0) \subset (M, 0)$ um germe de variedade analítica complexa equidimensional, de dimensão complexa d .

Considere o fibrado vetorial em grassmanianas dos d -planos de TM , como o construído na seção anterior. Sobre a parte regular de X , denotada por X_{reg} , podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : X_{reg} &\longrightarrow M \times G(d, n) \\ x &\longmapsto \sigma(x) = (x, T_x X_{reg}) \end{aligned}$$

O esquema abaixo ilustra esta construção:

$$\begin{array}{ccc} & & M \times G(d, n) \\ & \nearrow \sigma & \downarrow \nu \\ X_{reg} & \longrightarrow & M \end{array}$$

Definição 1.5.1. A modificação de Nash $\tilde{X}$ de X é definida como o fecho da imagem de σ em $M \times G(d, n)$.

1.6 Estratificação de Whitney

A idéia da estratificação de Whitney é decompor um subconjunto singular de uma variedade suave em partes não-singulares, isto é, em subvariedades de M , satisfazendo certas condições (as chamadas condições de Whitney).

Definição 1.6.1. Seja $(X, 0)$ um subconjunto de uma variedade suave M . Uma estratificação de X é uma partição de X em subvariedades de M (chamadas de estratos) tais que, para todo ponto $x \in X$, existe uma vizinhança U de x em M que encontra apenas um número finito de estratos.

Definição 1.6.2. Uma estratificação $\{V_\alpha\}$ satisfaz a condição de fronteira se dados dois estratos V_α e V_β com $V_\alpha \cap \overline{V_\beta} \neq \emptyset$, então $V_\alpha \subset \partial V_\beta$.

Definição 1.6.3. Dizemos que uma estratificação $\{V_\alpha\}$ de um subconjunto X obedecendo a condição de fronteira satisfaz as condições de Whitney se, para todo par (V_α, V_β) com $V_\beta \subset \overline{V_\alpha}$ e para todo $y \in V_\beta$, valem:

- Dada uma sequência qualquer de pontos x_i de V_α que converge para y e tal que o limite $\lim_{i \rightarrow \infty} T_{x_i}(V_\alpha) = T$ existe na grassmaniana correspondente (compacta), então $T_y(V_\beta) \subset T$.
- Dada uma sequência qualquer de pontos y_i de V_β que converge para y e tal que o limite $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{x_i y_i} = \lambda$ existe no espaço projetivo, então $\lambda \subset T$.

Teorema 1.6.4. *Toda variedade analítica complexa admite uma estratificação satisfazendo essas duas condições.*

Denotaremos por $\mathbb{B}_\epsilon$ a bola aberta de centro na origem e raio ϵ .

Teorema 1.6.5 (Bertini-Sard). *Se $\{V_\alpha\}$ é uma estratificação de Whitney de X , então para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a esfera $\partial\mathbb{B}_\epsilon$ é transversal a todos os estratos V_α .*

O número de Milnor

Este capítulo é baseado no trabalho de Milnor [18] e tem como objetivo apresentar os conceitos de fibração de Milnor e do número de Milnor, que serão necessários nos capítulos seguintes, sem exigir grandes conhecimentos de topologia algébrica.

Para saber mais sobre a teoria introduzida neste capítulo, indicamos [6], [23] e [31], onde Carneiro & Soares, Nascimento e Tomazella, respectivamente, detalham bem os conceitos e teoremas aqui apresentados.

2.1 O teorema da fibração

Seja $f(z_1, \dots, z_m)$ uma função analítica de m variáveis complexas. Defina o gradiente de f por

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_m} \right),$$

onde a barra denota o conjugado complexo.

Dessa forma, temos que se $z = p(t)$ é um caminho em $\mathbb{C}^m$, então

$$\frac{df(p(t))}{dt} = \left\langle \frac{dp}{dt}, \text{grad } f \right\rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto interno hermitiano, dado por

$$\langle a, b \rangle = \sum a_j \bar{b}_j,$$

com $a, b \in \mathbb{C}^m$.

Em outras palavras, a derivada direcional de f na direção de um vetor v em um ponto z é igual ao produto interno $\langle v, \text{grad } f(z) \rangle$.

Agora, defina $K = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon$ a interseção do conjunto de zeros de f com a esfera $S_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^m; \|z\| = \epsilon\}$.

Defina também $\phi : S_\epsilon \setminus K \rightarrow S^1$ dada por $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.

Lema 2.1.1. *Os pontos críticos de ϕ são exatamente os pontos $z \in S_\epsilon \setminus K$ para os quais o vetor $i \text{grad } \log f(z)$ é um múltiplo real do vetor z .*

Prova: Primeiramente observe que, localmente, o logaritmo pode ser definido como uma função e seu gradiente

$$\text{grad } \log f(z) = \frac{\text{grad } f(z)}{\overline{f(z)}}$$

é bem definido em todo o domínio $S_\epsilon \setminus K$.

Agora, tome $\frac{f(z)}{|f(z)|} = e^{i\theta(z)}$, com $\theta : S_\epsilon \setminus K \rightarrow [0, 2\pi)$. Temos que

$$i\theta = \log \left(\frac{f}{|f|} \right) = \log f - \log |f|.$$

Multiplicando a igualdade por $-i$ e tomando a parte real dos dois lados, obtemos

$$\theta = \Re(-i \log f).$$

Diferenciando θ ao longo de uma curva $z = p(t)$, ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt}(p(t)) &= \Re \left(\frac{d}{dt}(-i \log f) \right) \\ &= \Re \left\langle \frac{dp}{dt}, \text{grad } (-i \log f) \right\rangle \\ &= \Re \left\langle \frac{dp}{dt}, i \text{grad } \log f \right\rangle. \end{aligned}$$

Em outras palavras, a derivada direcional da função $\theta(z)$ na direção $v = dp/dt$ é

$$\Re \langle v, i \text{grad } \log f(z) \rangle.$$

Agora, observamos que o espaço vetorial hermitiano $\mathbb{C}^m$ também pode ser visto como um espaço vetorial euclidiano (de dimensão $2m$) sobre os reais, definindo o produto interno usual de dois vetores a e b como a parte real $\Re \langle a, b \rangle = \Re \langle b, a \rangle$.

Observe, por exemplo, que um vetor v é tangente à esfera S_ϵ em z se, e somente se, o produto interno real $\Re \langle v, z \rangle$ é zero. Assim, se o vetor $i \text{grad } \log f(z)$ é um múltiplo real de z (isto é, se este vetor é normal a S_ϵ em z), então para todo vetor v tangente a S_ϵ em z , a derivada direcional $\Re \langle v, i \text{grad } \log f(z) \rangle$ de θ na direção v é igual a zero. Logo, z é um ponto crítico da aplicação $\phi(z) = e^{i\theta(z)}$.

Por outro lado, se os vetores $i \text{grad } \log f(z)$ e z são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$, então existe um vetor v satisfazendo

$$\begin{cases} \Re \langle v, z \rangle &= 0 \\ \Re \langle v, i \text{grad } \log f(z) \rangle &= 1. \end{cases}$$

Logo, v é tangente a S_ϵ e a derivada direcional de θ na direção v é $1 \neq 0$ e, portanto, z não é ponto crítico de ϕ . ■

Agora, assuma que f seja um polinômio que se anula na origem e defina $V = f^{-1}(0)$.

Lema 2.1.2. *Para todo $z \in \mathbb{C}^m \setminus V$ suficientemente próximo da origem, os vetores z e $i \operatorname{grad} \log f(z)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$.*

A prova deste lema segue diretamente do lema abaixo, cuja demonstração se encontra em [18].

Lema 2.1.3. *Dado um polinômio f qualquer que se anula na origem, existe um número $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $z \in \mathbb{C}^m \setminus V$ com $\|z\| \leq \epsilon_0$, os vetores z e $\operatorname{grad} \log f(z)$ ou são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ ou*

$$\operatorname{grad} \log f(z) = \lambda z$$

onde λ é um número complexo não-nulo cujo argumento tem valor absoluto menor que $\pi/4$.

Prova do lema 2.1.2: Pelo lema 2.1.3, se tivermos $\operatorname{grad} \log f(z) = \lambda z$, então $\Re(\lambda) > 0$ e, portanto, λ não pode ser imaginário puro. ■

Juntando os lemas 2.1.1 e 2.1.2, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.4. *Se $\epsilon < \epsilon_0$, então a aplicação $\phi : S_\epsilon \setminus K \rightarrow S^1$ não possui pontos críticos.*

Deste teorema segue que, para cada $e^{i\theta} \in S^1$, a imagem inversa

$$F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta}) \subset S_\epsilon \setminus K$$

é uma variedade suave de dimensão real $2m - 2$.

Definição 2.1.5. F_θ é dita a fibra de Milnor de f .

A definição acima faz sentido, uma vez que todas as fibras F_θ são todas difeomorfas, como veremos em breve.

Lema 2.1.6. *Se $\epsilon < \epsilon_0$, existe um campo de vetores tangentes suave $v(z)$ definido em $S_\epsilon \setminus K$ tal que, para todo $z \in S_\epsilon \setminus K$, o produto interno complexo $\langle v(z), i \operatorname{grad} \log f(z) \rangle$ é não-nulo e o módulo de seu argumento é menor que $\pi/4$.*

Prova: Vamos construir tal campo localmente, na vizinhança de um ponto z_α .

Caso 1: Se z_α e $\operatorname{grad} \log f(z_\alpha)$ são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$, então existe v tal que

$$\begin{cases} \Re \langle v, z_\alpha \rangle & = 0 \\ \Re \langle v, i \operatorname{grad} \log f(z_\alpha) \rangle & = 1. \end{cases}$$

Logo, v é tangente a S_ϵ em z_α .

Caso 2: Se $\text{grad log } f(z_\alpha) = \lambda z_\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$, tome $v = i z_\alpha$. Então v é tangente a S_ϵ em z_α , pois

$$\Re \langle v, z_\alpha \rangle = 0,$$

e pelo lema 2.1.3, o número $\langle i z_\alpha, i \text{grad log } f(z_\alpha) \rangle = \bar{\lambda} \|z_\alpha\|^2$ tem argumento menor que $\pi/4$ em módulo.

Em ambos os casos, pode-se escolher um campo de vetores tangentes local $v_\alpha(z)$ tal que $v_\alpha(z_\alpha) = v$. A condição

$$|\arg \langle v_\alpha(z), i \text{grad log } f(z) \rangle| < \pi/4$$

certamente valerá em uma vizinhança de z_α . Usando uma partição da unidade, obtemos um campo de vetores global $v(z)$ com a mesma propriedade. ■

Agora, defina o seguinte campo w em $S_\epsilon \setminus K$:

$$w(z) = \frac{v(z)}{\Re \langle v(z), i \text{grad log } f(z) \rangle}.$$

Note que

$$|\Re \langle w(z), \text{grad log } f(z) \rangle| = \frac{|\Re \langle v(z), \text{grad log } f(z) \rangle|}{|\Re \langle v(z), i \text{grad log } f(z) \rangle|} = \frac{|\Re \langle v(z), i \text{grad log } f(z) \rangle|}{|\Re \langle v(z), i \text{grad log } f(z) \rangle|} < 1.$$

Assim, obtemos um campo de vetores tangentes suave w em $S_\epsilon \setminus K$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} \Re \langle w(z), i \text{grad log } f(z) \rangle &= 1 \\ |\Re \langle w(z), \text{grad log } f(z) \rangle| &< 1. \end{cases}$$

Esta última inequação nos garante que o fluxo gerado pelo campo w está definido para todo $t \in \mathbb{R}$, pois do contrário, se alguma curva integral $p(t)$ tende a K_ϵ quando $t \rightarrow t_0 < \infty$, então $\lim_{t \rightarrow t_0} f(p(t)) = 0$, ou seja, $\lim_{t \rightarrow t_0} \Re(\log f(p(t))) = -\infty$. Mas isto não ocorre, pois $\frac{d}{dt} \Re(\log f(p(t))) = \Re \langle w(p(t)), \text{grad log } f(p(t)) \rangle$, ou seja, $\Re \log f(p(t))$ tem derivada limitada.

Além disso, colocando $\phi(z) = e^{i \theta(z)}$, note que

$$d\theta(p(t))/dt = \Re \langle dp/dt, i \text{grad log } f \rangle = 1.$$

Portanto,

$$\theta(p(t)) = t + \text{constante}.$$

Desta forma, se h é o fluxo gerado por w , então $h_t : S_\epsilon \setminus K_\epsilon \rightarrow S_\epsilon \setminus K_\epsilon$ é um difeomorfismo tal que $h_t(F_\theta) = F_{\theta+t}$. Portanto, dado $e^{i\theta} \in S^1$, seja U_θ um intervalo aberto em S^1 em torno de $e^{i\theta}$. Então a aplicação

$$\begin{aligned} \psi_\theta &: U_\theta \times F_\theta \longrightarrow \phi^{-1}(U_\theta) \\ (e^{i\alpha}, z) &\longmapsto h_{\alpha-\theta}(z) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo entre o produto $U_\theta \times F_\theta$ e $\phi^{-1}(U_\theta)$.

Isso prova o teorema da fibração de Milnor:

Teorema 2.1.7. *Para $\epsilon \leq \epsilon_0$, o espaço $S_\epsilon \setminus K$ é um espaço fibrado suave sobre S^1 , com aplicação projeção $\phi(z) = \frac{f(z)}{|f(z)|}$.*

Para concluir esta seção, apresentaremos um lema que será útil mais tarde. Seja D_ϵ o disco fechado, cuja fronteira é S_ϵ .

Lema 2.1.8. *Existe um campo de vetores suave v em $D_\epsilon \setminus V$ tal que o produto interno*

$$\langle v(z), \text{grad log } f(z) \rangle$$

é real e positivo, para todo $z \in D_\epsilon \setminus V$, e portanto o produto interno $\langle v(z), z \rangle$ tem parte real positiva.

A prova é similar à de 2.1.6. Agora, considere as soluções da equação diferencial

$$dp/dt = v(p(t))$$

em $D_\epsilon \setminus V$. A condição de que

$$\langle dp/dt, \text{grad log } f(p(t)) \rangle$$

é real e positivo nos diz que o argumento de $f(p(t))$ é constante e que $|f(p(t))|$ é estritamente crescente como função de t .

Portanto, partindo de qualquer ponto interior $z \in D_\epsilon \setminus V$ e seguindo a trajetória da curva integral, caminhamos para fora da origem, em uma direção de aumento de $|f|$, até alcançarmos um ponto z' em $D_\epsilon \setminus V$, o qual deve satisfazer

$$\frac{f(z')}{|f(z')|} = \frac{f(z)}{|f(z)|}.$$

Usando esta correspondência $z \mapsto z'$, provaremos o seguinte lema:

Lema 2.1.9. *Sejam c uma constante complexa com $|c|$ suficientemente pequeno e $c/|c| = e^{i\theta}$. A interseção do hiperplano $f^{-1}(c)$ com a bola aberta $\mathbb{B}_\epsilon$ é difeomorfa à parte da fibra F_θ que intercepta o conjunto definido pela inequação $|f(z)| > |c|$.*

Prova: Tome $z \in (f^{-1}(c) \cap \mathbb{B}_\epsilon)$. Assim, $\frac{f(z')}{|f(z')|} = \frac{f(z)}{|f(z)|} = \frac{c}{|c|} = e^{i\theta}$. Portanto, $z' \in F_\theta$ e $|f(z')| > |f(z)| = |c|$. ■

2.2 A topologia da fibra

Primeiramente, enunciaremos abaixo o Lema da Seleção da Curva, que será utilizado mais tarde e cuja demonstração se encontra em [18].

Seja $V \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto algébrico real e seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto definido por um número finito de desigualdades polinomiais,

$$U = \{x \in \mathbb{R}^m; \ g_1(x) > 0, \dots, g_k(x) > 0\},$$

isto é, U é um conjunto semi-algébrico.

Lema 2.2.1 (Seleção da Curva). *Se $U \cap V$ contém pontos arbitrariamente próximos da origem, isto é, se 0 pertence ao fecho de $U \cap V$, então existe uma curva analítica real*

$$p : [0, \delta) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

com $p(0) = 0$ e com $p(t) \in U \cap V$, para $t > 0$.

No que se segue, descreveremos alguns resultados sobre a topologia da fibra e de $K = S_\epsilon \cap V$, onde $f : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, é uma função polinomial. Tal estudo é baseado em métodos da teoria de Morse e as principais referências para este capítulo são [6] e [18].

Seja $m = n + 1$ inteiro positivo. Sabemos que cada fibra $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ é uma variedade suave de dimensão $2n$. Defina agora as seguintes funções suaves:

$$\begin{array}{ccc} a_\theta : F_\theta & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \log |f(z)| \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a : S_\epsilon - K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \log |f(z)| \end{array}.$$

Estudaremos inicialmente a função a_θ . Em seguida, aproximaremos a_θ por uma função de Morse satisfazendo certas propriedades que permitirão obter os resultados desejados.

Lema 2.2.2. *Os pontos críticos da função a_θ são os pontos $z \in F_\theta$ tais que $\text{grad} \log f(z) = \lambda z$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Prova: Seguindo o mesmo procedimento da prova de 2.1.1, temos que a derivada direcional da função $\log |f(z)| = \Re \log f(z)$ em qualquer direção v é igual ao produto interno real $\Re \langle v, \text{grad} \log f(z) \rangle$. Assim, z é ponto crítico dessa função se, e somente se, $\text{grad} \log f(z)$ é normal a F_θ em z (de acordo com o produto interno real).

Mas, pelo lema 2.1.2, vemos que o espaço de vetores normais à subvariedade $F_\theta \subset \mathbb{C}^m$, de codimensão real 2, é gerado pelos vetores linearmente independentes z e $i \text{grad} \log f(z)$. Logo, z é ponto crítico de a_θ se, e somente se, existe uma relação linear real entre os vetores $\text{grad} \log f(z)$, z e $i \text{grad} \log f(z)$. ■

Agora, estudaremos a Hessiana de a_θ em um ponto crítico, para calcular o índice de Morse. Dado um vetor tangente v em um ponto crítico z , tome um caminho suave $p : \mathbb{R} \rightarrow F_\theta$ tal que $\frac{dp}{dt} = v$ e $p(0) = z$. Então a segunda derivada $\ddot{a}_\theta = \frac{d^2 a_\theta}{dt^2}(p(t))$ em $t = 0$ pode ser expressa como uma função quadrática de v , como mostra o seguinte lema:

Lema 2.2.3. *A segunda derivada de $a_\theta(p(t))$ em $t = 0$ é dada por uma expressão da forma*

$$\ddot{a}_\theta = \sum \Re(b_{jk} v_j v_k) - c \|v\|^2,$$

onde (b_{jk}) é uma matriz de números complexos e c é um número real positivo.

Definição 2.2.4. *Seja $H : T_z F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$H(v) = \Re(\sum b_{jk} v_j v_k) - c\|v\|^2.$$

Defina o índice de Morse de a_θ no ponto crítico z , denotado por I , como sendo a maior dimensão possível de um subespaço linear de $T_z F_\theta$ no qual H é definida negativa. Respectivamente para o índice de Morse da função a .

Lema 2.2.5. *O índice de Morse de $a_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto crítico é $\geq n$. Consequentemente, o índice de Morse de $a : S_\epsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ em qualquer ponto crítico também é $\geq n$.*

Prova: Se $H(v) \geq 0$ para todo $v \neq 0$, note que $H(i v) < 0$, pois o primeiro termo da expressão de $H(v)$ muda de sinal, enquanto o segundo permanece negativo. Note também que $i v \in T_z F_\theta$. Agora, fatore o espaço tangente em z como uma soma direta real $T_0 \oplus T_1$, onde a Hessiana H é definida negativa em T_0 e semi-definida positiva em T_1 . Claramente, a dimensão de T_0 é igual ao índice de Morse I . Mas H também é definida em $i T_1$. Portanto, temos:

$$I \geq \dim(i T_1) = \dim(T_1) = 2n - I.$$

Logo, $I \geq n$. Além disso, como todo ponto crítico de a é também ponto crítico de a_θ , para θ apropriado, e como o índice de a em z é claramente maior ou igual ao índice de a_θ em z , concluímos a prova. ■

Para podermos aproximar a_θ por uma função de Morse, precisaremos do lema abaixo, o qual mostra que todos os pontos críticos de a_θ estão dentro de um subconjunto compacto de F_θ (ou de $S_\epsilon \setminus K$, respectivamente):

Lema 2.2.6. *Existe uma constante $\eta_\theta > 0$ tal que os pontos críticos de a_θ estão dentro do subconjunto compacto $\{z; |f(z)| \geq \eta_\theta\}$ de F_θ . De maneira similar, existe $\eta > 0$ tal que os pontos críticos z de a satisfazem $|f(z)| \geq \eta$.*

Prova: Provaremos apenas o caso de a_θ :

Suponha que existem pontos críticos z de $a_\theta = \log |f|$ em F_θ com $|f(z)|$ arbitrariamente próximo de zero. Então esses pontos críticos têm um ponto limite z_0 no conjunto compacto S_ϵ . Pelo Lema 2.2.1 (de Seleção da Curva), existe um caminho suave $p : (0, \delta) \rightarrow F_\theta$ constituído apenas de pontos críticos, com $p(t) \rightarrow z_0$ quando t tende a 0. Claramente, a função a_θ é constante ao longo desse caminho. Portanto $|f|$ é constante e então não tende a $|f(z_0)| = 0$, uma contradição. ■

Lema 2.2.7. *Existe uma aplicação suave $s_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que todos os pontos críticos de s_θ são não-degenerados, com índice de Morse $I \geq n$ e tal que $s_\theta(z) = |f(z)|$ se $|f(z)|$ está suficientemente próximo de zero. Analogamente, existe uma aplicação suave $s : S_\epsilon \setminus K \rightarrow \mathbb{R}_+$ com todos os pontos críticos não-degenerados, de índice $\geq n$, com $s(z) = |f(z)|$ se $|f(z)|$ está suficientemente próximo de zero.*

Prova: Primeiramente, note que como todos os pontos críticos de $a_\theta = \log |f|$ estão num compacto e têm índice de Morse $I \geq n$, o mesmo ocorre em relação aos pontos críticos de $|f|$. Por outro lado, as funções de Morse formam um aberto denso em $C^\infty(F_\theta, \mathbb{R})$ (veja [19]) e portanto podemos escolher $s_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}_+$, de Morse, que coincide com $|f|$ fora de uma vizinhança compacta que contém os pontos críticos de $|f|$. Nesse compacto, s_θ aproxima $|f|$ uniformemente em classe C^∞ e como os pontos críticos de $|f|$ têm índice de Morse $I \geq n$, o mesmo é verificado para os pontos críticos de s_θ . ■

Observação 2.2.8. Como os pontos críticos de s_θ são não-degenerados, eles são isolados. Além disso, estão contidos em um compacto. Logo, s_θ tem somente um número finito de pontos críticos.

Teorema 2.2.9. *Cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um complexo CW finito, de dimensão n .*

Prova: Para aplicarmos a teoria de Morse na sua forma usual, faz-se necessário o uso de uma aplicação $g_\theta : F_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ com a propriedade de que o conjunto dos z tais que $g_\theta(z) \leq c$ é compacto, para cada constante real c .

Claramente, a função $g_\theta(z) = -\log s_\theta(z)$ satisfaz esta condição, ou seja, $g_\theta^{-1}(-\infty, c] = s_\theta^{-1}[e^{-c}, \infty)$ é compacto, para todo $c \in \mathbb{R}$. Como o índice de Morse de s_θ (ou de $\log s_\theta$) num ponto crítico z é $\geq n$, o índice de $-\log s_\theta$ é $\tilde{I}_\theta = \dim(T_z F_\theta) - I = 2n - I \leq n$.

Agora, de acordo com o teorema principal da teoria de Morse [19], a variedade F_θ tem o mesmo tipo de homotopia que um complexo CW obtido pela adjunção de uma célula de dimensão $\tilde{I}_\theta \leq n$. Como existem finitos pontos críticos, o complexo CW é finito. ■

Para concluir esta seção, daremos uma descrição alternativa da fibra de Milnor, com base no lema 2.1.9. Nas hipóteses daquele lema, tome $|c|$ suficientemente pequeno. Então, segue do lema 2.2.6 que a porção da fibra F_θ definida por $|f(z)| > |c|$ é difeomorfa a toda a fibra F_θ . Assim, acabamos de provar o seguinte teorema:

Teorema 2.2.10. *Se o número complexo $c \neq 0$ está suficientemente próximo de zero, então a interseção da hipersuperfície complexa $f^{-1}(c)$ com a bola aberta $\mathbb{B}_\epsilon$ é uma variedade suave difeomorfa à fibra F_θ .*

Agora, adicione a hipótese de que o polinômio $f(z_1, \dots, z_{n+1})$ não tem pontos críticos em uma vizinhança da origem, exceto possivelmente a própria origem. Então, pelo lema 2.5 de [18], segue que a origem é um ponto não-singular ou um ponto singular isolado da hipersuperfície $V = f^{-1}(0)$. Suponha também $n \geq 1$.

Neste caso (singularidade isolada), Milnor [18] provou o seguinte teorema:

Teorema 2.2.11. *Cada fibra F_θ tem o mesmo tipo de homotopia de um bouquet de esferas $S^n \vee \dots \vee S^n$.*

Assim, podemos definir o *número de Milnor*:

Definição 2.2.12. *O número de esferas S^n do bouquet é chamado de número de Milnor de f em 0 e é denotado por μ .*

Em [18], capítulo 7, Milnor também provou o seguinte teorema:

Teorema 2.2.13. *Seja U aberto de C^n e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função com singularidade isolada em $x_0 \in U$. Então:*

$$(i) \quad \chi(F_\theta) = 1 + (-1)^n \mu;$$

$$(ii) \quad \mu = \text{rank } H_n(F_\theta), \text{ onde } H_n(F_\theta) \text{ é um grupo de homologia média.}$$

As demonstrações dos dois últimos teoremas utilizam técnicas de topologia algébrica e, por essa razão, não as faremos aqui.

Obstrução de Euler

Denote por (X, x_0) o germe em um ponto x_0 de um espaço analítico complexo de dimensão pura mergulhado em $\mathbb{C}^n$, para algum n . Considere uma estratificação de Whitney V de alguma representação X de (X, x_0) . Seja V_0 o estrato contendo x_0 e sejam $V_1, \dots, V_q$ a quantidade finita de estratos de X contendo x_0 no fecho, além de V_0 . Tal estratificação de Whitney não é única, mas existe uma única "mais econômica" (tendo estratos maximais, no sentido de inclusão de estratos) de acordo com resultados de Mather e Teissier. Aqui, não precisaremos de tal unicidade e portanto apenas fixamos uma estratificação de Whitney V qualquer.

3.1 Obstrução local de Euler de um germe analítico singular

Seja $(X, 0)$ um germe singular analítico complexo equidimensional, de dimensão d , em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{C}^n$. Considere $\tilde{X}$ a modificação de Nash de X , e considere T o fibrado tautológico sobre $\mathbb{C}^n \times G(d, n)$.

Agora, seja $\tilde{T}$ a restrição de T a $\tilde{X}$. Um elemento de $\tilde{T}$ é escrito (x, P, v) , onde $x \in X$, $P \in G(d, n)$ e $v \in P$ (veja as seções 1.7 e 1.8).

Definição 3.1.1. *O fibrado $\tilde{T}$ sobre $\tilde{X}$ é chamado de fibrado de Nash de X .*

O diagrama abaixo ilustra esta construção:

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{T} & \hookrightarrow & T \\
\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
\tilde{X} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n \times G(d, n) \\
\nu \downarrow & & \downarrow \nu \\
X & \hookrightarrow & \mathbb{C}^n
\end{array}$$

Consideremos uma estratificação analítica complexa $(V_i)_{i \in A}$ de X satisfazendo as condições de Whitney. Acrescentando o estrato U/X , obtemos uma estratificação de Whitney de U . Denote por $TU|X$ a restrição a X do fibrado tangente de U .

Definição 3.1.2. *Um campo de vetores estratificado v em X é uma seção contínua de $TU|X$ tal que se $x \in V_i \cap X$, então $v(x) \in T_x(V_i)$.*

Definição 3.1.3. *Um campo de vetores radial em uma vizinhança de 0 em X é um campo de vetores estratificado no qual existe um ϵ_0 tal que, para todo $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, $v(x)$ aponta para fora da bola $\mathbb{B}_\epsilon$ sobre a fronteira $\mathbb{S}_\epsilon = \partial\mathbb{B}_\epsilon$.*

Recorde que, pelo Teorema de Bertini-Sard (1.6.5), para ϵ suficientemente pequeno, as esferas $\mathbb{S}_\epsilon$ são transversais aos estratos $(V_i)_{i \in A}$.

Lema 3.1.4. *Seja v um campo de vetores estratificado nunca-nulo em $Z \subset X$. Então v pode ser levantado como uma seção nunca-nula $\tilde{v}$ de $\tilde{T}$ sobre $\nu^{-1}(Z)$.*

Prova: Se $x \in X_{reg}$, então $\tilde{x} = \nu^{-1}(x) = (x, T_x X_{reg})$ e $v(x) \in T_x X_{reg}$. Assim, definimos $\tilde{v}(\tilde{x}) = (x, T_x X_{reg}, v(x))$. Se $x \in V_\alpha$, então $v(x) \in T_x V_\alpha$. Cada $\tilde{x} = (x, P) \in \nu^{-1}(x)$ está no fecho da imagem de σ , isto é, existe uma sequência $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de pontos de X_{reg} tal que $\lim(x_i) = x$ e $\lim T_{x_i}(X_{reg}) = P$. Pela condição (a) de Whitney, temos $T_x(V_\alpha) \subset P$ e então podemos definir $\tilde{v}(\tilde{x}) = (x, P, v(x))$. ■

Definição 3.1.5. *Seja v um campo de vetores radial em $X \cap \mathbb{S}_\epsilon$ e $\tilde{v}$ o levantamento de v em $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{S}_\epsilon)$. A obstrução local de Euler do germe analítico X , denotada por $Eu(X, 0)$, é definida como a obstrução em se estender $\tilde{v}$ como uma seção nunca-nula de $\tilde{T}$ sobre $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\epsilon)$.*

Mais precisamente, seja $o(\tilde{v}) \in H^{2d}(\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\epsilon), \nu^{-1}(X \cap \mathbb{S}_\epsilon))$ o cociclo de obstrução em estender $\tilde{v}$ como uma seção nunca-nula de $\tilde{T}$ dentro de $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\epsilon)$. A obstrução local de Euler $Eu(X, 0)$ é o inteiro dado pela avaliação de $o(\tilde{v})$ na classe fundamental do par $(\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\epsilon), \nu^{-1}(X \cap \mathbb{S}_\epsilon))$. Não entraremos nos detalhes desta clássica teoria de obstrução, pois este não é o propósito deste trabalho. Para saber mais, veja [29].

Existe um número finito de estratos $V_1, \dots, V_f$ da estratificação de Whitney de X que contêm 0 em seus fechos e então podemos assumir que o representante de $(X, 0)$ é escolhido suficientemente pequeno tal que $V_1, \dots, V_f$ sejam os únicos estratos de X e tal que eles sejam todos conexos. Considere o espaço $\mathbb{L}$ das formas lineares complexas em $\mathbb{C}^n$. Sabemos que $\mathbb{L}$ pode ser identificado com $\mathbb{C}^n$.

Definição 3.1.6. A topologia de Zariski em $\mathbb{C}^n$ é a coleção de todos os subconjuntos de $\mathbb{C}^n$ que são o complementar de uma variedade algébrica em $\mathbb{C}^n$.

Lema 3.1.7. Existe um conjunto aberto de Zariski não-vazio Ω em $\mathbb{L}$ tal que, para todo $l \in \Omega$, existe um representante X de $(X, 0)$ em que:

- (i) para cada $x \in X$, o hiperplano $l^{-1}(0)$ é transversal em $\mathbb{C}^n$ a todo limite de espaços tangentes em $T(X_{reg})$ de pontos em X_{reg} convergindo para x ;
- (ii) para cada y no fecho $\overline{V}_i$ em X de cada estrato V_i , $i = 1, \dots, r$; o hiperplano $l^{-1}(0)$ é transversal em $\mathbb{C}^n$ a todo limite de espaços tangentes em TV_i de pontos convergindo a y . Em particular, para cada $l \in \Omega$, tem-se

$$\tilde{X} \subset \mathbb{C}^n \times (G(d, n) \setminus H^*),$$

onde $H^* := \{T \in G(d, n); l(T) = 0\}$.

Prova: Seja $\check{\mathbb{P}}^{n-1}$ o espaço dual de $\mathbb{P}^{n-1}$, isto é, o espaço de todos os hiperplanos em $\mathbb{C}^n$ que passam pela origem 0. Seja Ω o cone furado (sem o vértice) em $\mathbb{L}$ sobre

$$\Omega_0 = \check{\mathbb{P}}^{n-1} - \Psi,$$

onde Ψ é a subvariedade de hiperplanos contendo um limite de espaços tangentes a X em 0 ou um limite de espaços tangentes a $\overline{V}_i$ em 0, $i = 1, \dots, r$.

Então Ω_0 é claramente aberto, assim como Ω . Por construção, se l está em Ω , então o hiperplano $l^{-1}(0)$ é transversal a todos os limites de espaços tangentes de X em 0 e a todos os limites de espaços tangentes em 0 a $\overline{V}_i$, $i = 1, \dots, r$. Logo, como a propriedade de ser transversal é "aberta", podemos assumir que os representantes X de $(X, 0)$ e $\overline{V}_i$ de $(\overline{V}_i, 0)$, $i = 1, \dots, r$, são suficientemente pequenos, de modo que $l^{-1}(0)$ é transversal a todos os espaços tangentes $T_x(X_{reg})$, para todo x em X_{reg} , e a todos os espaços tangentes $T_y V_i$, para todo $y \in V_i$, $i = 1, \dots, r$.

Isto significa que dados $x \in X_{reg}$ e $y \in V_i$, $i = 1, \dots, r$, temos que $l(T_x X) \neq 0$ e $l(T_y V_i) \neq 0$. De fato, por continuidade, para um representante suficientemente pequeno X de $(X, 0)$, em todo ponto $y \in V_i \subset \overline{V}_j$ e para todo limite E em y de espaços tangentes a V_j , temos que $l(E) \neq 0$. Portanto, temos que

$$\tilde{X} \subset \mathbb{C}^n \times (G(d, n) \setminus H^*),$$

como queríamos. ■

Uma tal forma linear $l \in \Omega$ é dita *geral*.

Observação 3.1.8. Abaixo enunciamos algumas propriedades da obstrução local de Euler (veja [11]):

- (1) $Eu(X, x) = 1$, se $x \in X_{reg}$;

- (2) A obstrução local de Euler é constante em cada estrato de uma estratificação de Whitney;

Agora, enunciamos um teorema, apresentado e demonstrado em [1] (teorema 3.1), que nos fornece uma fórmula para calcular a obstrução de Euler de uma singularidade analítica complexa:

Teorema 3.1.9. *Seja $(X, 0)$ um germe de um espaço analítico complexo equidimensional em $\mathbb{C}^n$. Sejam V_i , $i = 1, \dots, r$ os estratos (conexos) de uma estratificação de Whitney de um pequeno representante X de $(X, 0)$. Então existe um subconjunto de Zariski aberto e denso Ω no espaço das formas lineares complexas sobre $\mathbb{C}^n$ tal que, para todo $l \in \Omega$, existe um ϵ_0 tal que, para qualquer ϵ com $0 < \epsilon < \epsilon_0$ e $t_0 \neq 0$ suficientemente pequeno, temos a seguinte fórmula para a obstrução de Euler de $(X, 0)$:*

$$Eu(X, 0) = \sum_{i=1}^r \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap l^{-1}(t_0)) \cdot Eu_{V_i}(X),$$

onde χ denota a característica de Euler-Poincaré e $Eu_{V_i}(X)$ é o valor da obstrução de Euler de X em qualquer ponto de V_i , $i = 1, \dots, r$.

Em [28], Schürmann apresenta uma prova mais curta deste teorema. Entretanto, não a faremos aqui, pois utiliza técnicas que fogem do objetivo e do contexto desta dissertação.

Observação 3.1.10. Se $\dim(V_i) \geq 1$, então para qualquer $x \in V_i$ e qualquer forma linear l suficientemente geral, temos que

$$Eu(X, x) = Eu(X \cap l^{-1}(l(x)), x).$$

3.2 Índice GSV

Nesta seção precisaremos do seguinte lema, cuja demonstração pode ser vista em [5]:

Lema 3.2.1 (fibrção de Ehresmann). *Seja $f : M \rightarrow N$ uma submersão sobrejetora própria de variedades diferenciáveis. Então f é a projeção de um fibrado (localmente trivial), isto é, a quadra $(M, N, f^{-1}(x), f)$ é um fibrado.*

Seja 0 uma singularidade isolada em um espaço analítico complexo Y . Dizemos que esta singularidade é suavizável se existem um espaço analítico complexo X e uma aplicação analítica

$$\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$$

tal que $\varphi^{-1}(0)$ é Y e $\varphi^{-1}(t)$ é não-singular para todo t próximo de 0. Assuma, por simplicidade, que X está mergulhado em um subconjunto aberto U de $\mathbb{C}^n$. Sabemos, pelos trabalhos de Lê, que existe $\epsilon_0 > 0$ tal que para todo ϵ , com $0 < \epsilon < \epsilon_0$, existe $\eta_\epsilon > 0$ tal que, para todo η , com $0 < \eta < \eta_\epsilon$, a restrição

$$\varphi : \varphi^{-1}(\mathbb{S}_\eta) \cap \mathbb{B}_\epsilon \longrightarrow \mathbb{S}_\eta$$

é um fibrado sobre $\mathbb{S}_\eta$. Então, a característica de Euler-Poincaré de cada fibra

$$\mathbb{F}_t = \varphi^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_\epsilon, \quad t \in \mathbb{S}_\eta,$$

é independente de t .

Agora, denote por v um campo de vetores contínuo em Y com singularidade isolada em 0. Pelo lema 3.2.1 (fibrção de Ehresmann), a interseção de Y com $\mathbb{S}_\epsilon$ é difeomorfa à interseção de $\varphi^{-1}(t)$ com essa esfera. De fato, é fácil ver que a aplicação $\varphi| : X \cap \mathbb{S}_\epsilon \rightarrow \text{Im}(\varphi|)$ é uma submersão sobrejetora própria.

Então podemos pensar em v como sendo um campo de vetores ao redor da fronteira de $\mathbb{F}_t$, denotada por $\partial\mathbb{F}_t$.

Pela teoria de obstrução elementar (veja [29]), podemos estender v ao interior de $\mathbb{F}_t$ com um número finito de singularidades. Uma outra forma de ver este fato é tomando tal extensão como uma seção $v' : \overline{\mathbb{F}}_t \rightarrow T\overline{\mathbb{F}}_t$. Dessa forma, as subvariedades $\overline{\mathbb{F}}_t$ e $v'(\overline{\mathbb{F}}_t)$ de $T\overline{\mathbb{F}}_t$ podem ser consideradas transversais, a menos de uma pequena perturbação em v' (veja [8], seção II.4). Logo, cada singularidade de v' é isolada e como $\overline{\mathbb{F}}_t$ é claramente compacto, segue que v' tem um número finito de singularidades.

Assim, cada uma dessas singularidades tem o seu índice de Poincaré-Hopf local; a soma de todos esses índices locais é o índice de Poincaré-Hopf de v em $\mathbb{F}_t$, que denotamos por $PH(v, \mathbb{F}_t)$. Temos o seguinte lema:

Lema 3.2.2. *Se v é tangente e transversal ao link local de 0 em Y em todo ponto de $\partial\mathbb{F}_t$, então o número $PH(v, \mathbb{F}_t)$ é independente da escolha de t e da extensão de v ao interior desta fibra e temos:*

$$PH(v, \mathbb{F}_t) = \chi(\mathbb{F}_t).$$

Prova: Como, em todo ponto de $\partial\mathbb{F}_t$, v é transversal ao link local de 0 em Y , que é difeomorfo à fronteira das fibras $\mathbb{F}_t$, então o lema é uma consequência imediata do teorema de Poincaré-Hopf para variedades diferenciáveis com bordo (veja a observação 1.1.7). ■

Definição 3.2.3. *O índice GSV de v em Y relativo à suavização dada por φ é definido por $GSV(v; Y; \varphi) = PH(v, \mathbb{F}_t)$ e isto está bem definido, pelo lema 3.2.2. Para $v = r$ um campo de vetores radial em Y , temos*

$$GSV(r; Y; \varphi) = \chi(\mathbb{F}_t).$$

Corolário 3.2.4. *Seja X um subespaço analítico complexo equidimensional de $\mathbb{C}^n$ com uma singularidade isolada em 0. A obstrução de Euler de X em 0 é igual ao índice GSV de um campo de vetores radial em uma seção hiperplana geral $X \cap H$.*

Prova: Sejam $l : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ uma forma linear geral e r um campo de vetores radial estratificado em $Y := X \cap l^{-1}(0)$. Como nosso estudo é local, podemos considerar uma estratificação de Whitney de X dada pelos estratos X_{reg} e $\{0\}$.

Considere $\varphi = l|_X : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma suavização de Y (de fato, $\varphi^{-1}(0) = Y$ e $\varphi^{-1}(t) = l^{-1}(t) \cap X$, que é não-singular para $t \neq 0$ suficientemente pequeno). Assim, se $\mathbb{F}_t$ é a fibra de

Milnor local de φ em 0 (isto é, $\mathbb{F}_t = \varphi^{-1}(t) \cap \mathbb{B}_\epsilon$), então, pela definição do índice GSV, temos que $GSV(r; Y; \varphi) = \chi(\mathbb{F}_t)$.

Por outro lado, o teorema 3.1.9 nos diz que $Eu(X, 0) = \chi(X_{reg} \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap l^{-1}(t)) \cdot Eu_{X_{reg}}(X) + \chi(\{0\} \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap l^{-1}(t)) \cdot Eu_{\{0\}}(X)$. Como $\{0\} \cap l^{-1}(t)$ é vazio e como $Eu_{X_{reg}}(X) = 1$, segue que $Eu(X, 0) = \chi(X_{reg} \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap l^{-1}(t)) = \chi(X \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap l^{-1}(t)) = \chi(\mathbb{F}_t)$.

Logo, $GSV(r; Y; \varphi) = Eu(X, 0)$. ■

É importante notar que o índice GSV depende da escolha da aplicação analítica φ tomada como suavização de X . Entretanto, como consequência do corolário 3.2.4, temos que este número é independente da suavização quando esta é dada por uma forma linear.

3.3 Obstrução local de Euler de uma função

Seja $(X, 0)$ um germe analítico complexo como anteriormente, contido em um subconjunto aberto U de $\mathbb{C}^n$ e dotado de uma estratificação de Whitney analítica complexa $\{V_i\}$. Assumiremos também que $\{0\}$ é um estrato e que todo estrato contém 0 em seu fecho. Para todo ponto $x \in X$, denotaremos por $V_i(x)$ o estrato contendo x .

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, que é uma restrição de uma função holomorfa $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Definição 3.3.1. *Um ponto crítico (ou singular) de f é um ponto $x \in X$ tal que $d\tilde{f}(x)(T_x(V_i(x))) = 0$. Dizemos que f tem uma singularidade isolada em $x_0 \in X$ relativamente à estratificação de Whitney dada se f não tem pontos críticos em uma vizinhança de x_0 em X , exceto pelo próprio x_0 .*

Denotaremos por $\bar{\nabla}\tilde{f}(x)$ o campo de vetores gradiente de $\tilde{f}$ em um ponto $x \in U$, definido por

$$\bar{\nabla}\tilde{f}(x) := \left(\overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}} \right),$$

onde a barra denota o conjugado complexo.

Assumiremos que f tem uma singularidade isolada em $0 \in X$. Isto implica que o núcleo $\ker(d\tilde{f})$ é transversal a $T_x(V_i(x))$ em qualquer ponto $x \in X \setminus \{0\}$. Portanto, em cada ponto $x \in X \setminus \{0\}$, temos que a projeção de $\bar{\nabla}\tilde{f}(x)$ sobre $T_x(V_i(x))$ é diferente de zero.

O campo de vetores obtido por tal processo pode não ser contínuo, mas podemos torná-lo contínuo como na construção de M.-H. Schwartz [24]. Assim, obtemos um campo de vetores contínuo estratificado, que denotaremos por $\bar{\nabla}_X f$ e chamaremos de *campo de vetores gradiente*.

Agora, podemos definir a obstrução local de Euler de uma função:

Definição 3.3.2. *Seja ξ o levantamento de $\bar{\nabla}_X f$ como uma seção do fibrado de Nash $\tilde{T}$ sobre $\tilde{X}$ sem singularidades em $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{S}_\epsilon)$. A obstrução local de Euler de f em 0, denotada por $Eu_f(X, 0)$, é definida pela obstrução para se estender ξ como uma seção nunca-nula de $\tilde{T}$ em $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\epsilon)$.*

O teorema abaixo, originalmente formulado em [2], nos fornece uma fórmula para o cálculo de $Eu_f(X, 0)$:

Teorema 3.3.3. *Seja $f : (X, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função com singularidade isolada em $0 \in X$. Então temos:*

$$Eu(X, 0) = \left(\sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_{V_i}(X) \right) + Eu_f(X, 0).$$

Para provar este teorema, precisaremos do seguinte teorema:

Teorema 3.3.4 (Brasselet e Schwartz [4], Théorème de proportionalité, p. 126).

Seja v um campo de vetores estratificado em um espaço analítico complexo equidimensional X mergulhado em $\mathbb{C}^n$ com um zero isolado em x e seja $I(v, x)$ o índice local de Euler-Poincaré de uma extensão local radial qualquer de v em $\mathbb{C}^n$. Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno (dado pelo teorema de Bertini-Sard (1.6.5)). A restrição de v à interseção $X \cap \mathbb{S}_\epsilon(x)$ é levantada como uma seção nunca-nula $\tilde{v}$ do fibrado de Nash $\tilde{T}$ de X . Seja $O(v, x)$ a obstrução para estender $\tilde{v}$ como uma seção nunca-nula de $\tilde{T}$ sobre $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B}_\epsilon(x))$. Então $O(v, x)$ é igual ao produto de $I(v, x)$ pela obstrução local de Euler de X em x :

$$O(v, x) = I(v, x) \cdot Eu(X, x).$$

Também precisaremos fixar algumas notações. Escolhemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que toda esfera $\mathbb{S}_\gamma$ em U centrada em 0 e de raio $\gamma \leq \epsilon$ intercepta transversalmente qualquer estrato em $X \setminus \{0\}$. Para cada $t \in \mathbb{C}$, tome $Y_t := f^{-1}(t)$. Escolha $\eta > 0$ suficientemente pequeno tal que, para que cada t no disco $\mathbb{D}_\eta$ de raio η ao redor de $0 \in \mathbb{C}$, a hipersuperfície Y_t intercepta transversalmente a esfera $\mathbb{S}_\epsilon$. Agora, escolha ϵ' com $0 < \epsilon' < \epsilon$ e um ponto $t_0 \in \mathbb{D}_\eta$ tal que Y_{t_0} não encontre a esfera $\mathbb{S}_{\epsilon'}$. Observamos que os estratos V_i interceptam $Y_{t_0} := f^{-1}(t_0)$ transversalmente e fornecem uma estratificação de Whitney deste espaço.

Finalmente, provaremos o teorema 3.3.3:

Prova do teorema 3.3.3: A demonstração do teorema se baseia em um campo de vetores estratificado w definido em $X_{\epsilon', \epsilon} = X \cap (\mathbb{B}_\epsilon \setminus \text{Int}(\mathbb{B}_{\epsilon'}))$, construído em [2], satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) w coincide com $\overline{\nabla}_X f$ em $X \cap \mathbb{S}_{\epsilon'}$ e sua restrição a $X \cap \mathbb{S}_\epsilon$ é radial;
- (ii) w é tangente a Y_{t_0} ;
- (iii) w tem apenas um número finito de zeros e todos eles estão contidos em Y_{t_0} ;
- (iv) em cada zero a , w é transversalmente radial ao estrato contendo a (isto é, w é transversal ao bordo de uma vizinhança tubular do estrato).

A restrição do campo de vetores w a $\partial(X_{\epsilon', \epsilon})$ é um campo de vetores estratificado e portanto pode ser levantado como uma seção $\tilde{w}$ do fibrado de Nash $\tilde{T}$ em $\nu^{-1}(\partial(X_{\epsilon', \epsilon}))$, pelo lema 3.1.4.

Denote por $Obs(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_\epsilon))$ a obstrução em estender $\tilde{w}$ para $\nu^{-1}(X_\epsilon)$, onde $X_\epsilon := X \cap \mathbb{B}_\epsilon$. Temos:

$$Obs(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_\epsilon)) = Obs(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\epsilon'})) + Obs(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\epsilon', \epsilon})).$$

Pelo propriedade (i), esta fórmula se torna

$$Eu(X, 0) = Eu_f(X, 0) + Obs(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\epsilon', \epsilon})).$$

Pela propriedade (iii), a contribuição de $Obs(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\epsilon', \epsilon}))$ está concentrada em $\nu^{-1}(Y_{t_0} \cap \mathbb{B}_\epsilon)$. As propriedades (iii) e (iv), juntamente com o teorema 3.3.4, implicam que a contribuição de cada singularidade x de w para $Obs(\tilde{w}, \nu^{-1}(X_{\epsilon', \epsilon}))$ é exatamente $Eu(X, x)$ -vezes o índice local de Poincaré-Hopf de w em x , visto como um campo de vetores no estrato $V_i(x)$.

Além disso, pelas propriedades (ii) e (iv) e pelo teorema de Poincaré-Hopf (teorema 1.1.5), a soma dos índices de Poincaré-Hopf da restrição de w a $V_i \cap Y_{t_0}$ é $\chi(V_i \cap Y_{t_0} \cap \mathbb{B}_\epsilon)$. Assim, segue o teorema. ■

É fácil ver que se x_0 é um ponto suave de X e também um ponto regular de f , então $Eu_f(X, x_0) = 0$. Na proposição 3.3.8 abaixo, provaremos que isso ocorre em situações mais gerais.

Definição 3.3.5. *Seja $(X, x_0) \subset (U, x_0)$ um germe de conjunto analítico em $\mathbb{C}^n$, dotado de uma estratificação de Whitney $\{V_i\}$, e seja $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função analítica, a qual é restrição de um holomorfismo regular $\tilde{f} : (U, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Dizemos que x_0 é um ponto geral de f se o hiperplano $\ker d\tilde{f}(x_0)$ é transversal em $\mathbb{C}^n$ a todo limite de espaços tangentes $T_{x_n}(V_i)$, para todo V_i e toda seqüência $x_n \in V_i$ convergindo para x_0 , com $i \neq 0$, e a todo limite de espaços tangentes a $V_0 \setminus \{x_0\}$. Neste caso, também dizemos que f é uma função geral em x_0 . Tal propriedade é independente da escolha da extensão $\tilde{f}$.*

Definição 3.3.6. *Dizemos que $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma função de Morse estratificada em x_0 se $\dim V_0 \geq 1$, f é geral em x_0 com respeito aos estratos V_i , $i \neq 0$, e a restrição $f|_{V_0} : V_0 \rightarrow \mathbb{C}$ tem um ponto de Morse em x_0 .*

O papel especial da dimensão de V_0 foi enfatizado pela seguinte razão: se $\dim V_0 = 0$ (que significa $V_0 = x_0$) então existem funções gerais no germe (X, x_0) , mas não existem funções de Morse.

Proposição 3.3.7. *Se f é geral com respeito a (X, x_0) , então, com uma apropriada mudança local de coordenadas, $\tilde{f}$ é uma forma linear em U (geral com respeito a X).*

Prova: Afirmamos que x_0 é ponto regular de $\tilde{f}$. De fato, se x_0 fosse ponto singular, teríamos que $\ker d\tilde{f}(x_0) = \mathbb{C}^n$, e então x_0 não seria ponto geral de f . Assim, segue do teorema da forma local das submersões que $\tilde{f}$ é localmente uma projeção (linear), a menos de uma mudança de coordenadas. ■

Proposição 3.3.8. *Seja x_0 um ponto geral de $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Então*

$$Eu_f(X, x_0) = 0.$$

Prova: Se f é geral em x_0 , então $\tilde{f}$ é linear (a menos de uma mudança de coordenadas), pela proposição 3.3.7. Portanto, f é linear. Mas o teorema 3.3.3 garante que $Eu_f(X, x_0) = Eu(X, x_0) - (\sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_{V_i}(X))$ e o teorema 3.1.9 diz que $Eu(X, x_0) = (\sum_i \chi(V_i \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap f^{-1}(t_0)) \cdot Eu_{V_i}(X))$. Logo, $Eu_f(X, x_0) = 0$. ■

Proposição 3.3.9. *Seja $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ analítica em x_0 . Então existe um subconjunto aberto de Zariski Ω_f do espaço das formas lineares complexas em $\mathbb{C}^n$ tal que, para todo $l \in \Omega_f$, o ponto x_0 é geral para a aplicação $f + \lambda l : X \rightarrow \mathbb{C}$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$ suficientemente pequeno.*

Proposição 3.3.10. *Seja $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ com singularidade isolada em x_0 . Escolha uma forma linear $l \in \Omega_f$ como na proposição acima, e $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tal que $f_\lambda := f + \lambda l$ é geral em x_0 . Sejam $M_{f,X}$ e $M_{f_\lambda,X}$ as fibras de Milnor de f e f_λ , respectivamente, sobre X . Então,*

$$Eu_f(X, x_0) = \sum_i [\chi(V_i \cap M_{f_\lambda,X}) - \chi(V_i \cap M_{f,X})] \cdot Eu_{V_i}(X).$$

Prova: De fato, aplicando os teoremas 3.1.9 e 3.3.3, temos que

$$\begin{aligned} & \sum_i [\chi(V_i \cap M_{f_\lambda,X}) - \chi(V_i \cap M_{f,X})] \cdot Eu_{V_i}(X) = \\ & \sum_i [\chi(V_i \cap M_{f_\lambda,X}) \cdot Eu_{V_i}(X)] - \sum_i [\chi(V_i \cap M_{f,X}) \cdot Eu_{V_i}(X)] = \\ & \sum_i [\chi(V_i \cap f_\lambda^{-1}(t_0) \cap \mathbb{B}_\epsilon) \cdot Eu_{V_i}(X)] - \sum_i [\chi(V_i \cap f^{-1}(t_0) \cap \mathbb{B}_\epsilon) \cdot Eu_{V_i}(X)] = \\ & Eu(X, x_0) - \sum_i [\chi(V_i \cap f^{-1}(t_0) \cap \mathbb{B}_\epsilon) \cdot Eu_{V_i}(X)] = \\ & Eu_f(X, x_0). \end{aligned}$$

Observação 3.3.11. Note que se $X = \mathbb{C}^d$ e $f : (\mathbb{C}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é uma função analítica com singularidade isolada em 0 e com número de Milnor μ , então o teorema 3.3.3 implica

$$Eu_f(X, x_0) = (-1)^d \mu,$$

pois a característica de Euler-Poincaré da fibra de Milnor de f é igual a $1 + (-1)^{d-1} \mu$, pelo teorema 2.2.13 - i).

3.4 Obstrução global de Euler

Seja $Y \subset \mathbb{C}^n$ um conjunto algébrico fechado de dimensão pura d . Denote por $\tilde{Y}$ a modificação de Nash de Y , isto é:

$$\tilde{Y} = \text{fecho } \{(x, T_x Y_{\text{reg}}) \mid x \in Y_{\text{reg}}\} \subset Y \times G(d, n),$$

onde $G(d, n)$ é a grassmanniana de d -planos complexos em $\mathbb{C}^n$. Sejam $\nu : \tilde{Y} \rightarrow Y$ a projeção natural (analítica) e $\tilde{T}$ o fibrado de Nash sobre $\tilde{Y}$, isto é, a restrição sobre $\tilde{Y}$ do fibrado $\mathbb{C}^n \times U(d, n) \rightarrow \mathbb{C}^n \times G(d, n)$, onde $U(d, n)$ é o fibrado tautológico sobre $G(d, n)$.

Considere um campo de vetores real estratificado v em um subconjunto $V \subset Y$ (aqui, isto significa que o campo de vetores é contínuo e tangente aos estratos). A restrição de v a V tem um levantamento canônico bem-definido $\tilde{v}$ em $\nu^{-1}(V)$ como uma seção do fibrado $\tilde{T}$, como no lema 3.1.4.

Definição 3.4.1. Dizemos que o campo de vetores estratificado v em Y é radial-no-infinito se ele for definido na restrição a Y do complemento de uma bola suficientemente grande B_m centrada na origem de $\mathbb{C}^n$ e se for transversal a S_r , apontando para fora, para qualquer $r > m$. Em particular, v não tem zeros em $Y \setminus B_m$.

O raio suficientemente grande m da definição acima é fornecido pelo seguinte resultado, cuja demonstração é indicada em [26]:

Lema 3.4.2. Existe $m \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $r \geq m$, a esfera S_r centrada na origem de $\mathbb{C}^n$ e de raio r é transversal a todos os estratos da estratificação $\{W_i\}$.

A seguir, mostraremos como construir um campo de vetores radial-no-infinito em $Y \cap (\mathbb{C}^n \setminus B_r)$. Seja $\text{grad } d$ o campo de vetores gradiente da função $d = \text{distância a } 0$. Considere, em cada ponto $y \in Y$, a projeção ortogonal (com respeito à estrutura Euclideana usual) de $\text{grad } d(p)$ no espaço tangente $T_y W_i$, onde W_i é o estrato ao qual y pertence.

Isto resulta em um campo de vetores w em $Y \cap (\mathbb{C}^n \setminus B_r)$ que é tangente aos estratos, suave em cada estrato, sem zeros, transversal às esferas S'_r , para $r' \geq r$, e apontando para fora (pelo lema 3.4.2). Em cada estrato W_i , isto é apenas o campo de vetores w_i definido como o gradiente da restrição de d a W_i .

Entretanto, o campo de vetores w pode não ser contínuo em $Y \cap (\mathbb{C}^n \setminus B_r)$. Todavia, podemos "colar" os campos de vetores w_i como na construção de Schwartz [24]. Assim, obtemos um campo de vetores estratificado (contínuo) em Y , definido fora da bola grande B_r , que é radial-no-infinito.

Tal campo nos motiva à seguinte definição:

Definição 3.4.3. Seja $\tilde{v}$ o levantamento a uma seção do fibrado de Nash $\tilde{T}$ de um campo de vetores v sobre $Y \setminus B_r$, estratificado e radial-no-infinito (que existe, pela discussão acima). Chamamos de obstrução global de Euler de Y , e denotamos por $\text{Eu}(Y)$, a obstrução para estender $\tilde{v}$ como uma seção nunca-nula de $\tilde{T}$ dentro de $\nu^{-1}(Y \cap B_r)$ (veja a definição 3.1.5).

Números de Milnor e obstrução local de Euler

4.1 Obstrução local de Euler e morsificação de funções

Exemplo 4.1.1. Seja (X, x_0) um germe não-singular; então a modificação de Nash do representante X pode ser identificada com o próprio X , o fibrado de Nash é o fibrado tangente usual de X e $Eu_f(X, x_0)$ é, por definição, o índice de Poincaré-Hopf de $grad_X f$ em x_0 . Da observação 3.3.11, deduzimos que $Eu_f(X, x_0) = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} X} \mu$, onde μ é o número de Milnor de f . Também vimos em 3.3.8 que se (X, x_0) é um espaço singular qualquer mas f é um germe de função geral em x_0 , então a obstrução $Eu_f(X, x_0)$ é zero.

Abaixo, provaremos um lema que será necessário mais adiante:

Lema 4.1.2. *Seja l uma função holomorfa definida num germe (Y, y) , com uma singularidade de Morse estratificada em $y \in W_0$. Então a obstrução local de Euler de l em y é zero se $\dim W_0 < \dim Y$.*

Prova: Considere uma pequena bola $\mathbb{B}_\epsilon$ em $Y \subset \mathbb{C}^n$, centrada em y e de raio $\epsilon > 0$. Seja v o campo de vetores gradiente $\bar{\nabla}_Y l$ restrito a $Y \cap \partial \mathbb{B}_\epsilon$ e considere o levantamento tautológico $\tilde{v}$ na modificação de Nash $\tilde{Y}$. Como y é singular, sabemos que $\text{grad}(l|_{W_0})$ é zero em y , e portanto $v(y) = 0$. Entretanto, pela definição de função de Morse, temos que a forma linear $dl(y)$ (considerando agora $l : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$) não zera em nenhum limite de espaços tangentes em pontos do estrato regular Y_{reg} , isto é, $\ker(dl(y))$ não contém $T_{x_i} Y_{reg}$, para qualquer sequência

de pontos $x_i \in Y_{reg}$ convergindo para y . Assim, se T_y é um tal limite, temos que a projeção do vetor $\overline{\nabla}_Y l$ em T_y é diferente de zero (pois o vetor gradiente é perpendicular ao hiperplano $\ker(d\ell(y))$).

Como $\tilde{Y}$ é obtido pelo acréscimo em TY_{reg} de todos os limites de espaços tangentes de pontos em Y_{reg} , temos que se $y \notin Y_{reg}$, então a seção $\tilde{v}$ de $\tilde{T}$ pode ser estendida em $\nu^{-1}(Y \cap \mathbb{B}_\epsilon)$ sem zeros, da seguinte forma:

Em cada ponto $(x, H) \in (\tilde{Y} \cap \mathbb{B}_\epsilon)$, tome a soma de $\tilde{v}$ com o levantamento tautológico do vetor

$$\gamma(\|x\|) \cdot \text{proj}_H(\overline{\nabla}_Y l),$$

onde proj_H denota a projeção em H e $\gamma : [0, \epsilon] \rightarrow [0, 1]$ denota uma função real contínua não-degenerada tal que $\gamma(\epsilon) = 0$ e $\gamma(0) = 1$ (por exemplo, γ pode ser escolhida linear). ■

Afirmamos que uma maneira natural de estudar Eu_f é fatorá-lo de acordo com a Morsificação de f . Provamos a seguinte fórmula geral para germes holomorfos com singularidade isolada:

Proposição 4.1.3. *Seja $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função holomorfa com singularidade isolada em x_0 . Então*

$$Eu_f(X, x_0) = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} X} \alpha_q,$$

onde α_q é o número de pontos de Morse em $V_q = X_{reg}$ em uma deformação genérica de f .

Prova: Morsificamos a função f , isto é, consideramos uma pequena deformação analítica f_λ de f tal que todas as singularidades de f_λ são pontos de Morse estratificados e estão todas dentro de uma bola $\mathbb{B}$; e f_λ é geral em uma pequena vizinhança de x_0 (Veja, por exemplo, o Teorema de Morsificação 2.2 em [13]). Como f_λ é uma deformação de f , segue que $\text{grad}_X f$ é homotópico a $\text{grad}_X f_\lambda$ sobre a esfera $X \cap \partial\mathbb{B}$, e portanto as obstruções em se estender seus levantamentos a $\nu^{-1}(X \cap \mathbb{B})$ sem zeros são iguais.

Por outro lado, a obstrução correspondente a $\text{grad}_X f_\lambda$ também é igual à soma de obstruções locais devidas aos pontos de Morse de f_λ . Mas pelo lema 4.1.2, a obstrução local em um ponto de Morse estratificado é zero se o ponto está em um estrato de dimensão menor. Então os únicos pontos que contam são os pontos de Morse no estrato X_{reg} , digamos $a_1, \dots, a_{\alpha_q}$.

Mas, em cada a_i , o número de Milnor é 1 (pois se trata de um ponto de Morse). Então, como (X_{reg}, a_i) é não-singular, segue do exemplo 4.1.1 que a obstrução em tal ponto é $(-1)^{\dim_{\mathbb{C}} X}$. Logo, $Eu_f(X, x_0) = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} X} \alpha_q$. ■

Observação 4.1.4. A obstrução de Euler é definida por meio da modificação de Nash e portanto leva em consideração apenas o fecho do fibrado tangente sobre a parte regular X_{reg} . Como os outros estratos não são considerados na modificação de Nash, é natural que eles também não sejam considerados em $Eu_f(X, x_0)$.

4.2 Números de Milnor

4.2.1 Número de Milnor de Lê

Definição 4.2.1. *Espaços (X, x) onde toda função f tem homotopia da fibra de Milnor equivalente a um bouquet de esferas de iguais dimensões $n - 1$ são ditos espaços com a propriedade de Milnor.*

Lê D.T. [14] provou que para uma função f com uma singularidade isolada em $x_0 \in X$ (no sentido de estratificação) existe uma fibração de Milnor. Ele mostrou que, sob certas condições, o espaço X tem a *propriedade de Milnor em homologia* (o que significa que a homologia reduzida da fibra de Milnor de f está concentrada em dimensão $X - 1$). Então o *número de Milnor* $\mu(f)$ está bem definido como sendo o posto deste grupo de homologia.

Pelos resultados de Lê [14], a propriedade de Milnor é satisfeita, por exemplo, se (X, x_0) é uma interseção completa (não necessariamente isolada!).

Para comparar $\mu(f)$ com $Eu_f(X, x_0)$, usamos o teorema do bouquet geral para a fibra de Milnor na versão homológica. Antes, precisamos de um teorema-definição provado em [14] (teorema-definição 4.2):

Teorema 4.2.2. *Seja X um espaço analítico complexo e x um ponto de X . Considere um mergulho local de X no ponto x em $\mathbb{C}^n$. Existe um conjunto aberto de Zariski (denso) Ω no espaço das formas lineares complexas em $\mathbb{C}^n$ tal que, para qualquer $l \in \Omega$, existe um $\epsilon_l > 0$ tal que, para qualquer ϵ com $0 < \epsilon < \epsilon_l$, existe um $\tau_{\epsilon, l} > 0$ tal que, para qualquer t com $0 < |t| < \tau_{\epsilon, l}$, o tipo de homotopia do espaço*

$$\mathbb{L} := B_\epsilon(x) \cap X \cap l^{-1}(l(x) + t)$$

é um invariante analítico do germe (X, x) . Tal espaço $\mathbb{L}$ é chamado de link complexo de X em x .

Sejam M_f a fibra de Milnor de f e M_l a fibra de uma função geral l satisfazendo o teorema 4.2.2 (veja a proposição 3.3.7). Seja $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ uma função com singularidade isolada estratificada e tome Λ o conjunto de pontos de Morse estratificados em alguma Morsificação escolhida de f (por convenção, $x_0 \notin \Lambda$). Em [30], Mihai Tibar mostra que:

$$\tilde{H}_*(M_f) \approx \tilde{H}_*(M_l) \oplus \bigoplus_{i \in \Lambda} H_{*-k_i+1}(C(F_i), F_i), \quad (4.1)$$

onde para $a_i \in \Lambda$, F_i denota o link complexo do estrato ao qual a_i pertence, K_i é a dimensão deste estrato e $C(F_i)$ denota o cone sobre F_i .

Em particular, se o germe (X, x_0) é uma interseção completa (singular), então:

$$\mu(f) = \mu(l) + \sum_{a_i \in \Lambda} \mu_i,$$

onde $\mu_i := \text{posto}(H_{\dim X - k_i}(C(F_i), F_i))$.

Este resultado mostra que o número de Milnor $\mu(f)$ coleta informações de todos os pontos de Morse estratificados, enquanto $Eu_f(X, x_0)$ é, a menos de sinal, o número $\alpha_q = \text{cardinalidade}(\Lambda_0)$, onde Λ_0 denota o conjunto de pontos de Morse que ocorrem em X_{reg} (veja Proposição 4.1.3).

Note que $\Lambda_0 \subset \Lambda$, $\mu(l) \geq 0$, $\mu_i = 1$ se $i \in \Lambda_0$ e $\mu_i \geq 0$ se $i \in \Lambda \setminus \Lambda_0$.

Claramente,

$$\sum_{a_i \in \Lambda} \mu_i = \sum_{a_i \in \Lambda_0} \mu_i + \sum_{a_i \in \Lambda \setminus \Lambda_0} \mu_i = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} X} Eu_f(X, x_0) + \sum_{a_i \in \Lambda \setminus \Lambda_0} \mu_i.$$

Portanto, temos a inequação geral 4.2 abaixo sempre que o espaço X tem a propriedade de Milnor (por exemplo, quando (X, x_0) é uma interseção completa, não necessariamente com singularidade isolada), e portanto o número de Milnor-Lê de f é bem definido:

$$\mu(f) \geq (-1)^{\dim X} Eu_f(X, x_0). \quad (4.2)$$

Caso (X, x_0) seja uma interseção completa com singularidade isolada (ICSI), temos que $a_i \in X_{reg}$ (pois convencionamos $x_0 \notin \Lambda$). Então

$$\sum_{a_i \in \Lambda} \mu_i = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} X} Eu_f(X, x_0)$$

e, portanto, da discussão acima, obtemos a igualdade:

$$Eu_f(X, x_0) = (-1)^{\dim X} [\mu(f) - \mu(l)]. \quad (4.3)$$

4.2.2 Outro número de Milnor

Uma outra generalização do número de Milnor, que denotaremos aqui por $\mu_G(f)$, foi obtida por V. Goryunov [9] e por D. Mond and D. e Straten [22], originalmente definida para funções em curvas singulares $X \subset \mathbb{C}^n$. Defini-la aqui tomaria demasiado esforço e fugiria dos propósitos deste trabalho e portanto nos referimos a [22], p. 178, para a definição precisa.

Porém, no parágrafo seguinte daremos uma interpretação desse número $\mu_G(f)$, que será suficiente para os nossos objetivos:

Em [22] (observação 2.3), é mostrado que, se a curva singular (X, x_0) é uma interseção completa com singularidade isolada (ICSI) definida por alguma aplicação $g : (\mathbb{C}^{p+1}, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ em um conjunto aberto de $\mathbb{C}^{p+1}$ (isto é, $X = g^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{p+1}$) e se F é uma extensão de $f : (X, x_0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ao espaço ambiente, então $\mu_G(f)$ é a quantidade de pontos críticos (com suas multiplicidades) da restrição de F a uma fibra de Milnor de g , digamos, $X_t := g^{-1}(t)$, para algum valor regular $t \in \mathbb{C}^p$ de g . Isto também faz sentido para ICSI de dimensões maiores.

Então, como observado em [25], segue que $\mu_G(f)$ é o índice de Poincaré-Hopf do campo gradiente (no sentido usual) da restrição $F|_{X_t}$. Em outras palavras, isto diz que $\mu_G(f)$ é o índice GSV do campo gradiente de F em X (o gradiente genuíno, não o conjugado dele, como utilizamos até agora).

Relembramos que o índice GSV de um campo de vetores v em uma ICSI (X, x_0) é o índice de Poincaré-Hopf de uma extensão de v à fibra de Milnor X_t .

Podemos encontrar a relação entre $\mu_G(f)$ e $\mu(f)$ no caso em que (X, x_0) é uma ICSI, usando o Lema de Greuel [10], como segue:

Seja $\mu(X, x_0)$ o número de Milnor da ICSI (X, x_0) (cuja definição pode ser encontrada em [16], capítulo 5, onde também se encontra uma fórmula para seu cálculo). Considere f uma função com singularidade isolada em (X, x_0) . Então:

$$\mu_G(f) = \mu(f) + \mu((X, x_0)).$$

Assim, temos que

$$\mu(f) - \mu(l) = \mu_G(f) - \mu_G(l).$$

Usando a igualdade 4.3, obtemos:

$$Eu_f(X, x_0) = (-1)^{\dim X} [\mu_G(f) - \mu_G(l)]. \quad (4.4)$$

As equações 4.2, 4.3 e 4.4 explicam completamente a relação entre $Eu_f(X, x_0)$, o índice GSV e o número de Milnor de f , em termos do número de Milnor da ICSI (X, x_0) .

4.3 Exemplo

Pela proposição 3.3.10, temos que:

$$Eu_f(X, x_0) = \sum_i [\chi(V_i \cap M_{l,X}) - \chi(V_i \cap M_{f,X})] \cdot Eu_{V_i}(X), \quad (4.5)$$

onde $M(f, X)$ e $M(l, X)$ denotam representantes das fibras de Milnor de f e da função linear genérica l , respectivamente. Combinando essas relações com a proposição 4.1.3, obtemos:

$$\sum_i [\chi(V_i \cap M_{l,X}) - \chi(V_i \cap M_{f,X})] \cdot Eu_{V_i}(X) = (-1)^{\dim_{\mathbb{C}} X} \alpha_q.$$

Exemplo 4.3.1. Seja $X = \{x^2 - y^2 = 0\} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^3$ e considere f a restrição a X da função $(x, y, z) \mapsto x + 2y + z^2$. Tome $x_0 := (0, 0, 0)$. Então X possui dois estratos: $W_0 = \text{eixo } z$ e $W_1 = X \setminus \{x = y = 0\}$. Tome como função linear geral l a restrição a X da projeção $(x, y, z) \mapsto z$. Computaremos $Eu_f(X, x_0)$ pela relação 4.5:

Podemos ver que $M(l, x_0) \cap W_0$ é um ponto e que $M(f, x_0) \cap W_0$ é constituído de dois pontos. Além disso, $M(l, x_0) \cap W_1$ é a união disjunta de duas cópias de $\mathbb{C}^*$ e $M(f, x_0) \cap W_1$ é a união disjunta de duas cópias de $\mathbb{C}^{**}$, onde $\mathbb{C}^*$ é $\mathbb{C}$ menos um ponto e $\mathbb{C}^{**}$ é $\mathbb{C}$ menos dois pontos.

Observamos que se um espaço analítico A é união disjunta de dois espaços analíticos B e C , então

$$\chi(A) = \chi(B) + \chi(C).$$

Como $\mathbb{C}^*$ é homotópico a $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, segue que $\chi(\mathbb{C}^*) = 0$ e, portanto, $\chi(M(l, x_0) \cap W_1) = 0 + 0 = 0$.

Além disso, como $\mathbb{C}^{**}$ é homotópico à união de duas esferas (1-células) de $\mathbb{R}^2$ cuja interseção é um ponto (0-célula), temos que $\chi(\mathbb{C}^{**}) = 1 - 2 = -1$. Logo, $\chi(M(f, x_0) \cap W_1) = -1 - 1 = -2$.

Assim, a fórmula 4.5 fornece:

$$Eu_f(X, x_0) = (1 - 2) \cdot Eu(X, x_0) + (0 - (-2)) \cdot 1.$$

Por outro lado, temos que $Eu(X, x_0) = Eu(X \cap \{l = 0\}, x_0)$, pela observação 3.1.10. Para não carregar a notação, considere $Y := X \cap \{l = 0\}$ e considere a estratificação de Whitney de Y dada pelos estratos Y_{reg} e $\{x_0\}$. Aplicando a fórmula do teorema 3.1.9, obtemos:

$$Eu(X \cap \{l = 0\}, x_0) = \chi(Y_{reg} \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap s^{-1}(t_0)) \cdot Eu_{Y_{reg}}(Y) + \chi(\{x_0\} \cap \mathbb{B}_\epsilon \cap s^{-1}(t_0)) \cdot Eu_{\{x_0\}}(Y),$$

onde s é uma forma linear complexa genérica e t_0 é suficientemente próximo de $s(x_0)$, com $t_0 \neq s(x_0)$.

Mas como $Eu_{Y_{reg}}(Y) = 1$ e $\{x_0\} \cap s^{-1}(t_0)$ é vazio, temos que $Eu(X \cap \{l = 0\}, x_0)$ é apenas a característica de Euler do link complexo da fatia $X \cap \{l = 0\} = \{x^2 - y^2 = 0\}$. Este link complexo é constituído de dois pontos e portanto $Eu(X \cap \{l = 0\}, x_0) = 2$.

Logo, obtemos $Eu_f(X, x_0) = 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] J.-P. Brasselet, Lê D.T. e J. Seade, *Euler obstruction and indices of vector fields*, Topology 39, no. 6 (2000), 1193-1208.
- [2] J.-P. Brasselet, D.B. Massey, A.J. Parameswaran e J. Seade, *Euler obstruction and defects of functions on singular varieties*, J. London Math. Soc. (2) 70 (2004), no. 1, 59-76.
- [3] J.-P. Brasselet, *Poincaré-Hopf theorems on singular varieties characteristic classes*, Advanced School and Workshop on Singularities in Geometry and Topology, Trieste, 2005.
- [4] J.P. Brasselet e M.H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, Asterisque 82-83 (1981), 93-147.
- [5] Th. Bröcker e K. Jänich, *Introduction to differential topology*, Cambridge University Press, 1982.
- [6] M.J.D. Carneiro e M.G. Soares, *Introdução à topologia de singularidades complexas*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1985.
- [7] A. Dubson, *Formule pour l'indice des complexes constructibles et des D-modules holonomes*, C.R.Acad. Sci. Paris, Sér I Math. 298(6), 113-116, 1984.
- [8] M. Golubitsky e V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag New York Inc., 1973.
- [9] V. Goryunov, *Functions on space curves*, J. London Math. Soc. 61 (2000), 807-822.
- [10] G.-M. Greuel, *Der Gauss-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten*, Math. Ann. 214 (1975), 235-266.
- [11] N.G. Grulha Jr., *L'obstruction d'Euler locale d'une application*, Annales de la faculté de Sciences de Toulouse (a aparecer).

- [12] T. Izawa e T. Suwa, *Multiplicity of functions on singular varieties*, Internat. J. Math. 14, 5 (2003), 541-558.
- [13] Lê D.T., *Le concept de singularité isolée de fonction analytique*, Adv. Stud. Pure Math. 8 (1986), 215-227, North Holland.
- [14] Lê D.T., *Complex analytic functions with isolated singularities*, J. Algebraic Geom. 1 (1992), 83-100.
- [15] E.L. Lima, *Variedades diferenciáveis*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1972.
- [16] E.J.N. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series 77, Cambridge 1984.
- [17] J.N. Mather, *Notes on topological stability*, Lecture Notes, Harvard University, 1970.
- [18] J.W. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton 1968.
- [19] J.W. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Studies 51, Princeton 1963.
- [20] J.W. Milnor e J.D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University, Princeton 1974.
- [21] J.W. Milnor, *Topology from the differentiable Viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.
- [22] D. Mond e D. Van Straten, *Milnor number equals tjurina number for functions on space curves*, J. London Math. Soc. 63 (2001), 177-187.
- [23] V.M. Nascimento, *A fibração de Milnor*, Dissertação, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos 1990.
- [24] M.-H. Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique complexe*, Travaux en cours 39, Hermann 1991.
- [25] J. Seade, M. Tibar e A. Verjovsky, *Milnor numbers and Euler obstruction*, Bull. Braz. Math. Soc. New Series 36(2) (2005), 275-283.
- [26] J. Seade, M. Tibar e A. Verjovsky, *Global Euler obstruction and polar invariants*, math.AG/0310431.
- [27] M. Sebastiani, *Introdução à geometria analítica complexa*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2004.
- [28] J. Schürmann, *A short proof of a formula of Brasselet, Lê and Seade*, math. AG/0201316.
- [29] N. Steenrod, *The topology of fiber bundles*, Princeton Univer. Press, 1951.
- [30] M. Tibar, *Bouquet decomposition of the milnor fiber*, Topology 35 (1996), no. 1, 227-241.

-
- [31] J.N. Tomazella, *O número de Milnor*, Dissertação, ICMC, Universidade de São Paulo, São Carlos 1992.

Índice Remissivo

anel de germes das funções, 21

campo de vetores

estratificado, 38

radial, 38

radial-no-infinito, 46

característica de Euler-Poincaré, 19

compomente irredutível, 22

condição de fronteira, 25

condições de Whitney, 25

dimensão

de um germe de variedade analítica, 23

pura, 23

estratificação, 25

estrato, 25

fibra , 24

de Milnor, 29

fibrado

de Nash, 37

em grassmannianas, 24

tautológico, 24

trivial, 24

vetorial, 23

forma

linear geral, 39

função

de Morse, 44

geral, 44

germe

de aplicações, 21

de espaço analítico, 22

de subvariedade analítica, 23

de variedade analítica, 22

equidimensional, 23

índice

de Morse, 33

de Poincaré-Hopf, 20, 41

GSV, 41, 51

interseção completa , 23

com singularidade isolada, 50

lema

da fibração de Ehresmann, 40

de seleção da curva, 32

link

complexo, 49

local, 20

modificação de Nash, 25

morsificação, 48

número de Milnor , 35

de Lê, 49

obstrução

global de Euler, 46

- local de Euler
 - de um germe analítico complexo, 38
 - de uma função, 42
- ponto
 - crítico, 42
 - geral, 44
 - regular, 23
 - singular, 23, 42
- propriedade de Milnor , 49
 - em homologia, 49
- seção de fibrado, 24
- singularidade isolada, 42
- teorema
 - de Bertini-Sard, 26
 - de Poincaré-Hopf, 20
- topologia de Zariski, 39
- triangularização, 19
- variedade
 - de Grassmann, 24
 - topológica, 20