I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ESTABILIDADE DE CONJUNTOS ASSINTOTICAMENTE AUTO-INVARIANTES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS NEUTRAS.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

36e

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

ESTABILIDADE DE CONJUNTOS ASSINTOTICAMENTE AUTO-INVARIANTES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS NEUTRAS.

PEDRO LUIZ APARECIDO MALAGUTTI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
DE SÃO CARLOS DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE
EM MATEMÁTICA

Class. - T
Cutt. - M236e
e.2
Tombo -

ORIENTADOR:

PROF. DR. NATALINO ADELMO DE MOLFETTA

SÃO CARLOS

1983

ESTABILIDADE DE CONJUNTOS ASSINTOTICAMENTE AUTO-INVARIANTES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS NEUTRAS.

PEDRO LUIZ APARECIDO MALAGUTTI
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. NATALINO ADELMO DE MOLFETTA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO CARLOS

AGRADECIMENTOS

Agradeço profundamente ao Prof. Natalino Adelmo de Molfetta pela dedicação e incentivo que sempre dedicou-me, dos tempos de graduação ao término deste trabalho, como orientador e amigo. Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos, pelo ambiente de amizade e compreensão, facilitando o desenvolvimento de todo o trabalho, particularmente ao Prof. Paulo Adão Monteiro pelo companheirismo e ao Prof. João Batista Peneireiro pela clareza e dignidade de suas posições.

Agradeço aos professores e amigos do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, principalmente aos Professores Plácido Zoéga Táboas e Luiz Augusto da Costa Ladeira, pelos exemplos de integridade profissional.

Este trabalho foi patrocinado parcialmente pelas instituições: CAPES, CNPq, FINEP e FAPESP.

A meus pais

Pedro e Ilva.

ABSTRACT

The main purpose of this work is the study of stability of solutions for a certain class of Functional Differential Equations of Neutral Type by perturbation effects.

We suppose that the variational equations at the origin, with respect to the class of non perturbed equations are uniformly stable (asymptotically uniformly stable). Using Lyapunov functionals for the class of nonperturbed equations, we get conclusions about the uniform stability (asymptotical uniform stability)of the asymptotically self-invariant sets relatively to the perturbed equations.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 03

CAPÍTULO 0

0.1 - *O Teorema de Representação de Riesz* 05
0.2 - *Desigualdades Diferenciais* 08

CAPÍTULO 1

1.1 - *Definição de Equações Diferenciais Funcionais* 10
1.2 - *Equações Diferenciais Funcionais do Tipo Neutro* 12
1.3 - *A Equação Variacional* 20

CAPÍTULO 2

2.1 - *Estabilidade de Conjuntos Assintoticamente Auto-Invariantes* 26
2.2 - *Estabilidade em Variação* 34
2.3 - *Construção de Funcionais de Lyapunov* 39

CAPÍTULO 3

3.1 - *A Equação Perturbada* 53
3.2 - *Exemplo* 64

ESTABILIDADE DE CONJUNTOS ASSINTOTICAMENTE AUTO-INVARIANTES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS FUNCIONAIS NEUTRAS.

INTRODUÇÃO

Pretendemos neste trabalho estudar sistemas de controle que possam ser descritos por Equações Diferenciais Funcionais Neutras. Nosso principal objetivo é o estudo da estabilidade de soluções de Equações Funcionais Neutras, sob o efeito de perturbações. Para tanto, nos apoiamos no trabalho de Leela [7] sobre estabilidade em variação de Equações Diferenciais Ordinárias. Este trabalho baseia-se na construção de funcionais de Lyapunov supondo que a solução nula de uma Equação Funcional Neutra seja uniformemente estável (assintoticamente uniformemente estável) em variação; isto nos permite tirar conclusões sobre a estabilidade uniforme(assintótica uniforme) de conjuntos assintoticamente auto-invariantes com relação a Equações Diferenciais Funcionais Neutras, sob o efeito de perturbações. Um trabalho neste sentido foi desenvolvido por Monteiro [9] relativamente a Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento e por Vila [11] relativamente a uma classe de Equações Funcionais Neutras, baseando-se no conceito de equiestabilidade.

Este trabalho é apresentado em quatro capítulos.

No capítulo zero estudamos os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento da teoria básica sobre Equa-

ções Diferenciais Funcionais Neutras.

No primeiro capítulo apresentamos a definição de Equação Diferencial Funcional Neutra e alguns resultados sobre existência, unicidade e dependência contínua de soluções, em relação aos dados iniciais. Estudamos, também, neste capítulo, a Equação Variacional associada a uma Equação Funcional Neutra e um resultado sobre diferenciabilidade de soluções, devido a Molfetta e Monteiro [8].

O segundo capítulo é dedicado ao estudo de estabilidade pelo segundo método de Lyapunov para Equações Funcionais Neutras. A definição de conjunto assintoticamente auto-invariante e as noções de estabilidade para tais conjuntos aparecem também neste capítulo.

Por último, no terceiro capítulo, utilizamos os funcionais de Lyapunov obtidos no capítulo anterior no estudo de estabilidade de conjuntos assintoticamente auto-invariantes relativamente a Equações Diferenciais Neutras perturbadas e exemplificamos os resultados obtidos.

CAPÍTULO 0

Apresentamos neste capítulo alguns resultados que serão usados no decorrer do trabalho. As demonstrações foram omitidas, pois se referem a resultados bastante conhecidos e podem ser encontradas na bibliografia indicada.

0.1 - *O Teorema de Representação de Riesz:*

0.1.1 - *A Integral de Stieltjes*

Seja μ uma função real não decrescente definida em $[a,b] \subset R$. Correspondendo a cada partição P de $[a,b]$,

$$P: a = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = b,$$

escrevemos $\Delta\mu_i = \mu(\theta_i) - \mu(\theta_{i-1}) \geq 0.$

Seja ψ uma função limitada em $[a,b]$.

Definimos:

$$U(P,\psi,\mu) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\mu_i, \quad \text{onde} \quad M_i = \sup_{\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i} \psi(\theta)$$

$$L(P,\psi,\mu) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\mu_i, \quad \text{onde} \quad m_i = \inf_{\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i} \psi(\theta)$$

A integral superior (inferior) de Stieltjes de ψ com respeito a μ em $[a,b]$ é definida como sendo:

$$\overline{\int_a^b} d\mu(\theta)\psi(\theta) = \inf\{U(P,\psi,\mu)\}$$

$$\left(\underline{\int_a^b} d\mu(\theta)\psi(\theta) = \sup\{L(P,\psi,\mu)\}\right)$$

onde o ínfimo (supremo) é tomado sobre todas as partições P de [a,b].

$$\text{Se} \quad \overline{\int_a^b} d\mu(\theta)\psi(\theta) = \underline{\int_a^b} d\mu(\theta)\psi(\theta),$$

o valor comum é chamado *integral de Stieltjes* de ψ com relação a μ em [a,b] e é denotado por

$$\int_a^b d\mu(\theta)\psi(\theta)$$

Exemplos:

1. Se $\mu(\theta) = \theta$, $\forall\ \theta \in [a,b]$, a integral de Stieltjes reduz-se à integral de Riemann.
2. Se μ é uma função de saltos, a integral $\int_a^b d\mu(\theta)\psi(\theta)$ é dada por $\sum_{i=1}^{n} \psi(\theta_i)h_i$, onde os θ_i são pontos de descontinuidade de μ e h_i os saltos de μ nos pontos θ_i, $i = 1, \ldots, n$.

0.1.2 - *Funções de Variação Limitada*

Sejam $\mu: [a,b] \to R$ e

$P: a = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = b,$

uma partição de [a,b]. Definimos

$$\Delta\mu_i = \mu(\theta_i) - \mu(\theta_{i-1})$$

A variação total de μ em [a,b] é definida como sendo

$$V(\mu,a,b) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\Delta\mu_i|,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as partições P de [a,b].

μ é dita de *Variação Limitada* em $[a,b]$ se $V(\mu,a,b) < +\infty$; indicamos este fato escrevendo $\mu \in BV[a,b]$.

O espaço $BV[a,b]$ com a norma $\|\mu\| = V(\mu,a,b)+|\mu(a)|$ é um espaço de Banach.

Pode-se demonstrar que $\mu \in BV[a,b]$ se, e somente se, μ é diferença de duas funções não decrescentes em $[a,b]$ (Veja Kolmogórov e Fomín [4]). Deste modo, se $\mu \in BV[a,b]$ então $\mu = \mu_1 - \mu_2$, onde μ_1 e μ_2 são não decrescentes em $[a,b]$, o que nos permite definir a *integral de Stieltjes* de uma função ψ limitada em $[a,b]$, relativamente à função μ, como sendo:

$$\int_a^b d\mu(\theta)\psi(\theta) = \int_a^b d\mu_1(\theta)\psi(\theta) - \int_a^b d\mu_2(\theta)\psi(\theta)$$

0.1.3 - *Representação de Funcionais Lineares Contínuos em* $C([a,b],R)$.

Consideremos $C([a,b],R)$ o espaço das funções reais contínuas munido com a norma da convergência uniforme. Se $\mu \in BV[a,b]$, é óbvio que o funcional

$$\psi \in C([a,b],R) \mapsto \int_a^b d\mu(\theta)\psi(\theta)$$

é linear e contínuo. O Teorema a seguir nos informa sobre a recíproca deste fato:

Teorema 0.1 (Teorema de Representação de Riesz)

Seja $D: C([a,b],R)\to R$ um funcional linear contí-

nuo. Então existe $\mu \in BV[a,b]$ tal que para todo $\psi \in C([a,b],R)$,

$$D(\psi) = \int_a^b d\mu(\theta)\psi(\theta)$$

Além disso, $\|D\| = V(\mu,a,b)$.

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em Kolmogórov e Fomín [4].

Observações:

1. A função μ dada no Teorema de Riesz não é única; por exemplo, $\mu + C$, C constante, também pode ser escolhida para representar D como uma integral de Stieltjes. Podemos ainda, alterar μ numa quantidade enumerável de pontos, sem alterarmos a representação. Se escolhermos μ na forma normalizada, isto é, $\mu(a) = 0$ e μ contínua à direita, então μ é única.

2. Se $D: C([a,b],R) \to R^n$ é contínua e linear, existe uma única matriz $n \times n$ (a menos de normalização) $[\mu(\theta)]$ cujos elementos são funções de variação limitada em $[a,b]$ tal que

$$D(\psi) = \int_a^b [d\mu(\theta)] \cdot \psi(\theta), \ \forall \ \psi \in C([a,b],R).$$

0.2 - *Desigualdades Diferenciais*

Afim de estudar a estabilidade de sistemas dife-

renciais, necessitamos muitas vezes estimar uma função que satisfaça uma desigualdade diferencial. Isto nos permite, através da análise de uma equação escalar da forma:

$$(0.1) \qquad \dot{u} = h(t,u)$$
$$u(t_0) = u_0,$$

$(t,u) \in \Omega$ aberto de R^2, onde $h: \Omega \to R$ é contínua, deduzir propriedades de estabilidade do sistema diferencial em estudo.

Definição 0.2

Seja $r(t)$ uma solução da equação escalar (0.1) definida em $[t_0,t_0+a)$. $r(t)$ é dita uma *solução maximal* de (0.1) se, para toda solução $u(t)$ de (0.1) existindo em $[t_0,t_0+a)$, tivermos que:

$$u(t) \leq r(t), \quad \forall\ t \in [t_0,t_0+a).$$

Lema 0.3

Seja $[t_0,t_0+a)$ o maior intervalo de existência da solução maximal $r(t)$ de (0.1). Se $m: (t_0,t_0+a) \to R$ é contínua, $(t,m(t)) \in \Omega$, $\forall\ t \in [t_0,t_0+a)$, $m(t_0) \leq u_0$ e para uma derivada fixa de Dini satisfazendo

$$Dm(t) \leq h(t,m(t)), \ \forall\ t \in [t_0,t_0+a), \text{ então}$$

$m(t) \leq r(t)$, $\forall\ t \in [t_0,t_0+a)$.

Uma demonstração deste lema pode ser encontrada em Lakshmikantham e Leela [6].

CAPÍTULO 1

1.1 - *Definição de Equações Diferenciais Funcionais*

Seja R^n o espaço vetorial real n-dimensional com uma norma fixa $|\ |$. Seja $[a,b]$ um intervalo da reta.

Consideremos $C([a,b],R^n)$ o espaço de Banach das funções $\phi: [a,b] \to R^n$ contínuas, munido da seguinte norma:

$$\|\phi\| = \sup_{\theta\varepsilon[a,b]} |\phi(\theta)|.$$

Seja $r > 0$ um número real fixo. Se $x \varepsilon C([a-r,b],R^n)$, definimos para cada $t \varepsilon [a,b]$ a função $x_t \varepsilon C([a,b],R^n)$ dada por

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \ -r \leq \theta \leq 0.$$

(o gráfico de x_t é o transladado ao longo do eixo t sobre $[-r,0]$, do gráfico de x, restrito ao intervalo $[t-r,t]$).

Denotemos $C = C([-r,0],R^n)$ e para $\rho > 0$ $C\rho = \{\phi \varepsilon C \ / \ \|\phi\| < \rho\}$. Pode-se demonstrar facilmente que a aplicação:

$$(t,x) \varepsilon [a,b] \times C([a-r,b],R^n) \mapsto x_t \varepsilon C$$

é contínua.

Seja Λ um aberto de $R \times C$ e sejam $D, f:\Lambda \to R^n$ funções contínuas. A seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \tag{1.1}$$

é chamada uma *Equação Diferencial Funcional*.

É evidente que a equação (1.1) inclui como casos particulares as Equações Diferenciais Retardadas ($D(t,\phi) = \phi(0)$), portanto também as Equações Ordinárias ($r = 0$).

Definição 1.1

Diz-se que uma função x é *solução* da equação(1.1) se existirem $\sigma \in R$ e $A > 0$ tal que:

i) $x \in C([\sigma-r,\sigma+A],R^n)$, para $(t,x_t) \in \Lambda$ e $\forall\, t \in [\sigma,\sigma+A]$

ii) $D(t,x_t)$ é continuamente diferenciável e satisfaz a equação (1.1) para todo $t \in [\sigma,\sigma+A]$.

Dado $(t_0,C) \in \Lambda$ dizemos que $x(t_0,\phi)$ é uma solução da equação (1.1) através de (t_0,ϕ) se existir $A > 0$ tal que $x(t_0,\phi)$ é uma solução de (1.1) em $[t_0-r,\ t_0+A]$ e $x_{t_0}(t_0,\phi) = \phi$. O Problema de Valor Inicial para a equação(1.1) consiste em procurar soluções de (1.1) passando por (t_0,ϕ).

Observemos que na definição(1.1) exigimos apenas a diferenciabilidade de $D(t,x_t)$, mas a solução $x(t)$ não precisa, a priori, ser diferenciável.

Notemos também que o Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \\ x_{t_0} = \phi \end{cases}$$

é equivalente à equação integral:

$$D(t,x_t) = D(t_0,\phi) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds, \quad t \geq t_0.$$

Um espaço de fase natural para a equação (1.1) é o espaço C, isto é, uma solução x de (1.1) pode ser representada por uma trajetória neste espaço cujos pontos são as funções x_t.

Uma Equação Diferencial Funcional nem sempre admite solução; isto pode ser visto tomando-se $D(t,\phi) = c$, c constante e $f(t,\phi) \neq 0$ em $R \times C$. Devido a este fato, nos restringiremos a uma classe de Equações Diferenciais Funcionais onde podemos garantir, sob certas condições, a existência, unicidade e dependência contínua relativamente às condições iniciais, de soluções.

1.2 - *Equações Diferenciais Funcionais do Tipo Neutro*

Uma Equação Diferencial Funcional do Tipo Neutro é uma Equação Diferencial Funcional

$$(1.2) \qquad \frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t)$$

que satisfaz as seguintes condições:

i) $D: \Lambda \to R^n$ possui derivada de Frèchet em relação à segunda variável D_ϕ, contínua em Λ aberto de $R \times C$, que pode ser escrita na forma:

$$D_\phi(t,\phi).\psi = A(t,\phi).\psi(0) - B(t,\phi,\psi),$$

para todo $\psi \in C$, $(t,\phi) \in \Lambda$, onde $A(t,\phi)$ é uma matriz

$n \times n$ contínua e inversível em Λ e $B(t,\phi,\psi)$ é contínua em relação a $(t,\phi) \in \Lambda$ e linear em relação a terceira variável.

ii) Dado $(t,\phi) \in \Lambda$ existem constantes $a > 0$, $b > 0$ e $c < 1$ tal que:

$|A^{-1}(t+s,\tilde{\phi}_s).B(t+s,\tilde{\phi}_s,x_s)| \leq c.\|x_s\|$, para todo $s \in [0,a)$ e qualquer $x \in B(a,b) = \{\phi \in C([-r,a],R^n) : \phi_0 = 0 \text{ e } \|\phi\| \leq b\}$.

onde $\tilde{\phi}$ é dada por

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t), & t \in [-r,0] \\ \phi(0), & t \in [0,a] \end{cases}$$

Uma outra definição encontrada na literatura, que adotaremos neste trabalho, é a seguinte:

Definição 1.2

Dizemos que a *Equação Diferencial Funcional* (1.2) é *do Tipo Neutro* se D for *atômica em zero* sobre Λ, ou seja,

1) $D: \Lambda \to R^n$ possui derivada de Frèchet contínua em relação a segunda variável.

2) Como $D_\phi(t,\phi): C \to R^n$ é linear, contínua na segunda variável, pelo Teorema de Representação de Riesz, existe uma função matricial $n \times n$ $\mu(t,\phi,\cdot) \in BV[-r,0]$, $\forall\, t \in R$, $\forall\, \phi \in C$ (que pode ser escolhida na forma normalizada) tal que:

$$D_\phi(t,\phi).\psi = A(t,\phi)\psi(0) - B(t,\phi,\psi), \quad \forall\, \psi \in C,$$

$\forall(t,\phi) \in \Lambda$, onde

$$A(t,\phi) = \mu(t,\phi,0) - \mu(t,\phi,0^-)$$

$$B(t,\phi,\psi) = -\int_{-r}^{0-} [d_\theta \mu(t,\phi,\theta)]\psi(\theta)$$

A condição de atomicidade em zero sobre Λ exige que:

a) $A(t,\phi)$ seja contínua e não singular $\forall(t,\phi) \in \Lambda$

b) Exista uma função escalar $\gamma(t,\phi,s)$ contínua para $(t,\phi) \in \Lambda$ e $s > 0$, com $\gamma(t,\phi,0) = 0$ tal que:

$$\left|\int_{-s}^{0} [d_\theta \mu(t,\phi,\theta)]\psi(\theta) - A(t,\phi)\psi(0)\right| \leq \gamma(t,\phi,s) . \sup_{-s\leq\theta\leq 0} |\psi(\theta)|$$

para todo $\psi \in C$.

Verifica-se que se a definição 1.2 estiver satisfeita, i) e ii) da definição de Equação Funcional Neutra também estão. De fato, a aplicação

$$(t,\phi) \in \Lambda \mapsto A^{-1}(t,\phi)$$

é contínua nos seus dois argumentos. Assim se s for suficientemente pequeno, $(t+s,\tilde{\phi}_s)$ estará arbitrariamente próximo de (t,ϕ). Logo $|A^{-1}(t+s,\tilde{\phi}_s)| \leq k$, k constante, se s for suficientemente pequeno.

Tomemos $x \in B(a,b) = \{\phi \in C([-r,a],R^n)/\phi_0=0, \|\phi\| \leq b\}$

É claro que $x_s \to 0$ quando $s \to 0$. Assim

$$|A^{-1}(t+s,\tilde{\phi}s).B(t+s,\tilde{\phi}s,x_s)| \leq |A^{-1}(t+s,\tilde{\phi}_s)|.|B(t+s,\tilde{\phi}_s,x_s)| \leq$$

$$\leq k\left|\int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t+s,\tilde{\phi}_s,\theta)].x_s(\theta) - A(t+s,\tilde{\phi}_s).x_s(0)\right| =$$

$$= k\left|\int_{-s}^{0} [d_\theta \mu(t+s,\tilde{\phi}_s,\theta)]x_s(\theta) - A(t+s,\tilde{\phi}_s)x_s(0)\right| \leq$$

$$\leq k.\gamma(t+s,\tilde{\phi}_s,s).\sup_{-s\leq\theta\leq 0}|x_s(\theta)| \leq c.\|x_s\|$$

onde $c < 1$, para s suficientemente pequeno, pois $\gamma(t,\phi,s) \to 0$ quando $s \to 0$.

Para uso posterior vamos estabelecer a seguinte definição:

Definição 1.3

Sejam $\Lambda \subset R \times C$ um aberto e $\Omega \subset \Lambda$. Suponhamos que D seja atômica em zero sobre Λ.

Dizemos que D é *uniformemente atômica em zero* sobre Ω se:

i) Existe $k > 0$ tal que $|A^{-1}(t,\phi)| \leq k$ e $|D_\phi(t,\phi)| \leq k$, $\forall (t,\phi) \in \Omega$.

ii) $\gamma(t,\phi,s) \to 0$ quando $s \to 0$ uniformemente para $(t,\phi) \in \Omega$.

Exemplos:

1. As Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento

$$\dot{x}(t) = f(t,x_t)$$

onde $f: \Lambda \underset{ab}{\subset} R \times C \to R^n$ é contínua, são Equações Diferenciais Funcionais do Tipo Neutro. Neste caso

$$D(t,\phi) = \phi(0) \quad e$$

$$D_\phi(t,\phi).\psi = D(t,\psi) = \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]\psi(\theta), \forall (t,\phi) \in \Lambda,$$

$\forall \psi \in C$, onde

$$\mu(t,\theta) = \begin{cases} 0, & -r \leq \theta < 0 \\ I, & \theta = 0 \end{cases}$$

Logo $A(t) = \mu(t,0) - \mu(t,0^-) = I$ (contínua e inversível $\forall\, t \in R$) e

$$\left|\int_{-s}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]\psi(\theta) - I\psi(0)\right| = |\psi(0)-\psi(0)| \leq$$

$$\leq \gamma(t,s).\ \sup_{-s\leq\theta\leq 0} |\psi(\theta)|,$$

qualquer que seja a função $\gamma(t,s)$ contínua e positiva para $t \in R$ e $s \in [-r,0]$, com $\gamma(t,0) = 0$.

2. Consideremos a seguinte Equação Diferencial Funcional:

$$(1.3) \qquad \frac{d}{dt}(Ax(t) + x(t-r)) = f(t,x_t),$$

onde $r > 0$, A é uma matriz $n\times n$ constante e $f: \Lambda_{ab} \subset R \times C \to R^n$ é contínua. Neste exemplo,

$$D(t,\phi) = A\phi(0) + \phi(-r) \quad e$$

$$D_\phi(t,\phi).\psi = D(t,\psi) = \int_{-r}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta)]\psi(\theta),$$

$\forall\, (t,\phi) \in \Lambda$, $\forall\, \psi \in C$, onde

$$\mu(t,\theta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \theta = -r \\ I & \text{se } -r < \theta < 0 \\ A+I & \text{se } \theta = 0 \end{cases}$$

Assim $A(t) = \mu(t,0) - \mu(t,0^-) = A$ e

$$\left|\int_{-s}^{0} [d_\theta \mu(t,\theta).\psi(\theta) - A(t).\psi(0)\right| = |A\psi(0) - A(t)\psi(0)| = 0$$

Se A for inversível, a equação (1.3) nos fornece um exemplo que uma Equação Diferencial Funcional do Tipo Neutro que não é retardada. Se A não for inversível, a equação (1.3) não é do Tipo Neutro.

Apresentaremos agora alguns resultados sobre existência, unicidade, continuação e dependência contínua em relação aos dados iniciais, de soluções da equação (1.2). As demonstrações de tais fatos podem ser encontradas em Ladeira [5].

Teorema 1.4 (Existência e Unicidade)

Seja $\Lambda \subset R \times C$ um aberto e consideremos a Equação Diferencial Funcional do Tipo Neutro

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \qquad (1.2)$$

onde f é localmente lipschitziana em relação a segunda variável em subconjuntos compactos de Λ. Então, para cada $(t_0,\phi) \in \Lambda$, existe uma única solução da equação (1.2) passando por (t_0,ϕ) e definida em $[t_0,t_0+A]$, $A > 0$.

Teorema 1.5 (Dependência contínua)

Consideremos uma sequência de Equações Diferenciais Funcionais Neutras:

$$(1.2_k) \quad \frac{d}{dt} D_k(t,x_t) = f_k(t,x_t),$$

com $D_k, f_k : \Lambda \underset{ab}{\subset} R \times C \to R^n$, $n = 1,2,\ldots$.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
BIBLIOTECA

Consideremos, também, uma sequência $\{(t_k,\phi_k)\}$ em Λ. Com relação à equação (1.2) suponhamos que:

a) $D_k \to D$ e $(D_k)_\phi \to D_\phi$ $(A_n \to A$ e $B_k \to B)$ quando $k \to +\infty$, uniformemente em subconjuntos fechados e limitados de Λ.

b) Para cada $(t,\psi) \in \Lambda$ existem constantes $a > 0$, $b > 0$ e $c < 1$ e uma vizinhança U de (t,ψ) tal que:

$$|A_k^{-1}(t+s,\tilde{\phi}_s)B_k(t+s,\tilde{\phi}_s,x_s)| \leq c\|x_s\| \ , \ \forall\ x \in B(a,b)$$

$\forall (t,\phi) \in U$ e $\forall\ s \in [0,a]$, $k = 1,2,...$

c) Para cada $(t,\psi) \in \Lambda$ existem uma constante $M>0$ e uma vizinhança V do ponto (t,ψ) tal que:

$$|f_k(s,\phi)| \leq M, \quad \forall\ (s,\phi) \in V$$

d) $f_k(t,\psi) \to f(s,\phi)$ quando $k \to +\infty$ e $(t,\psi)\to(s,\phi)$

e) $(t_k,\phi_k) \to (t_0,\phi_0) \in \Lambda$ quando $k \to +\infty$.

f) A solução x de (1.2) passando por (t_0,ϕ_0) é única e está definida em $[t_0-r,A]$, $A > t_0$.

Então, existe $k_0 \in N$ tal que $\forall\ k \geq k_0$, existe uma solução de (1.2_k) passando por (t_k,ϕ_k), definida em $[t_k-r,A]$ e $x_k \to x$ uniformemente no seguinte sentido: dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < A - t_0+r$, existe $K'(\varepsilon) \in N$ tal que para $k \geq k'(\varepsilon)$, x_k está definida em $[t_0-r+\varepsilon,A]$ e

$$|x_k(s) - x(s)| < \varepsilon, \ \forall\ s \in [t-r+\varepsilon,A]$$

Veremos agora condições para existência de soluções

de Equações Funcionais Neutras, no futuro.

Definição 1.6

Se $x(t,t_0,\phi)$ e $\bar{x}(t,t_0,\phi)$ são soluções da equação (1.2) passando por (t_0,ϕ) definidas em $[t_0-r,a)$ e $[t_0-r,b)$ respectivamente, dizemos que $\bar{x}(t_0,\phi)$ é uma continuação de $x(t,t_0,\phi)$ se $b > a$ e

$$\bar{x}(t,t_0,\phi) = x(t,t_0,\phi), \ \forall\ t \in [t_0-r,a).$$

Uma solução x de (1.2) é dita *não continuável* se ela não admite continuação e neste caso, seu intervalo de definição é chamado *intervalo maximal* de existência da solução x.

Lema 1.7

Consideremos a Equação Funcional Neutra (1.2). Suponhamos que f leve qualquer subconjunto fechado e limitado $\Omega \subset \Lambda$ com uma δ-vizinhança também em Λ em um subconjunto limitado de R^n.

Se $D(t,\phi)$ e $D_\phi(t,\phi)$ são uniformemente contínuas em Ω e D é uniformemente atômica em zero sobre Ω, então para toda solução não continuável $x(t,t_0,\phi)$ em $[t_0-r,a)$ existe $t^* \in [t_0,a)$ tal que $(t^*,x_{t^*}) \notin \Omega$.

Este lema permite demonstrar o seguinte fato, muito útil mas aplicações:

Teorema 1.8

Consideremos a Equação Funcional Neutra (1.2). Suponhamos que f leve conjuntos limitados de $R \times C$ em conjuntos limitados de R^n, então toda solução não continuável e limitada está definida num intervalo da forma $[t_0, +\infty)$.

Vamos supor de agora em diante, que f na equação (1.2) é contínua, possui derivada em relação a segunda variável contínua em Λ e leva conjuntos limitados em conjuntos limitados, para garantirmos a existência, unicidade e dependência contínua da solução $x(t,t_0,\phi)$ em relação à condição inicial (t_0,ϕ).

Nos preocuparemos a seguir não mais com a continuidade, mas com a diferenciabilidade de soluções relativamente aos dados iniciais.

1.3 - *A Equação Variacional*

Seja $x_t(t_0,\phi)$ a única solução através de (t_0,ϕ) da equação (1.2).

A esta solução vamos associar uma nova Equação Diferencial Funcional Neutra:

$$\frac{d}{dt} D_\phi(t,x_t(t_0,\phi)).z_t = f_\phi(t,x_t(t_0,\phi)).z_t \tag{1.4}$$

chamada *Equação Variacional* de (1.2) associada à solução $x_t(t_0,\phi)$.

Como a Equação Variacional (1.4) é linear, temos a

existência e unicidade de soluções $z_t(t_0,\psi)$ qualquer que seja $(t_0,\psi) \in \Lambda$, definidas em $[t_0-r,\infty)$. Além disso a solução $z_t(t_0,\psi)$ é contínua em seus três argumentos.

Notemos que devido à linearidade da equação (1.4), para $t \geq t_0$

$$z(t,t_0,\cdot): C \to R^n$$

é um operador linear contínuo. Deste modo, podemos associar à Equação Variacional (1.4) uma família de operadores lineares contínuos definidos por:

$$T(t,t_0:\phi) : C \to C$$

$$\psi \to T(t,t_0:\phi).\psi = Z_{t+t_0}(t_0,\psi)$$

A família $\{T(t,t_0:\phi), t \geq 0\}$ constitui um semigrupo de operadores lineares fortemente contínuos, isto é, satisfaz as seguintes condições:

i) $T(t+s,t_0:\phi) = T(t,t_0:\phi).T(s,t_0:\phi)$, $\forall\ t, s \geq 0$ (devido à unicidade de soluções).

ii) $\lim_{s\to t} \|T(t,t_0:\phi).\psi - T(s,t_0:\phi).\psi\| = 0$, $\forall\ t, s \geq 0$ (devido à continuidade de soluções)

iii) $T(0,t_0:\phi) = I$ (pois $z_{t_0}(t_0,\psi) = \psi$, $\forall\ \psi \in C$)

O gerador infinitesimal A é dado por

$$A\psi = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t,t_0:\phi)\psi-\psi}{t}$$

e seu domínio é o conjunto das funções $\psi \in C$ tais que o limite acima exista.

Vamos apresentar a seguir um resultado devido a Molfetta e Monteiro [8] que nos informa sobre a diferenciabilidade de soluções com relação aos dados iniciais. Veremos que a solução $x_t(t_0,\phi)$ de (1.2) é derivável em relação à ϕ e, além disso,

$$\frac{\partial}{\partial\phi} x_t(t_0,\phi) = T(t-t_0,t_0:\phi)$$

(a derivada de uma solução $x_t(t_0,\phi)$ de (1.2) com relação a ϕ coincide com a solução da Equação Variacional de (1.2) associada a $x_t(t_0,\phi)$). Para tanto faremos uso de um teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Sejam $\tau \geq 0$ e $t_0 \geq \tau$ fixados. Consideremos os conjuntos:

$\mathbb{D} = \{D:[\tau,\infty)\times C \to R^n / D$ é de classe C^1 e atômica em zero$\}$

$\mathbb{F} = \{f:[\tau,\infty) \times C \to R^n \ / \ f$ é de classe $C^1\}$

O conjunto $\mathbb{D} \times \mathbb{F} \times C$ define uma classe de Problemas de Valor Inicial para a equação (1.2). Fixemos um elemento desta classe:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\bar{D}(t,x_t) = \bar{f}(t,x_t) \\ x_{t_0} = \bar{\phi} \end{cases}$$

e suponhamos que $\bar{x} = x(\bar{\phi},\bar{D},\bar{f})$ seja solução deste Problema de Valor Inicial definida em $[t-r,\bar{A}]$. Fixemos $M \in R$, $0 < M < \bar{A}$.

Teorema 1.9

Nas condições acima descritas, existe $\rho > 0$ tal que qualquer que seja a Equação Diferencial Funcional Neutra (D,f) e qualquer que seja a condição inicial $\phi \in C$ tais que $\|D-\bar{D}\| < \rho$, $\|f-\bar{f}\| < \rho$ e $\|\phi-\bar{\phi}\| < \rho$, a solução da Equação Neutra (D,f) está definida em $[t_0-r,M]$ e a aplicação

$$(\phi,D,f) \to x(\phi,D,f)$$

definida no produto cartesiano dos conjuntos $\|D-\bar{D}\| < \rho$ $\|f-\bar{f}\| < \rho$ e $\|\phi-\bar{\phi}\| < \rho$ com valores em $C([t_0-r,M],R^n)$ é de classe C^1 nestes conjuntos.

Em particular $\frac{\partial}{\partial\phi}x(\bar{\phi},\bar{D},\bar{f}).\Delta x$ para cada $\Delta x \in C$ é restrição ao intervalo $[t_0-r,M]$ da solução da Equação Variacional:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\,\bar{D}\phi(t,x_t(\bar{\phi},\bar{D},\bar{f})).(\Delta x)_t = \bar{f}_\phi(t,x_t(\bar{\phi},\bar{D},\bar{f}).(\Delta x)_t \\ (\Delta x)_{t_0} = \Delta\phi \end{cases}$$

Assim, se $x_t(t_0,\phi)$ é uma solução do Problema de Valor Inicial:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \\ x_{t_0} = \phi \end{cases}$$

então para cada $t \geq t_0$ e $\phi \in C$ temos que

$$\frac{\partial}{\partial \phi} x_t(t_0,\phi)\Delta\phi = (\Delta x)_t(t_0,\Delta\phi),$$

onde Δx é solução do Problema de Valor Inicial para a Equação Variacional:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} D_\phi(t,x_t(t_0,\phi))(\Delta x)_t = f_\phi(t,x_t(t_0,\phi))(\Delta x)_t \\ (\Delta x)_{t_0} = \Delta\phi \end{cases}$$

Como o operador solução da Equação Variacional $T(t,t_0:\phi) : C \to C$, é definido por $T(t,t_0,\phi).\Delta\phi = (\Delta x)_{t+t_0}(t_0,\Delta\phi)$, então

$$T(t-t_0,t_0:\phi).\Delta\phi = \frac{\partial}{\partial\phi} x_t(t_0,\phi).\Delta\phi, \quad \forall\ \Delta\phi \in C$$

Logo $\frac{\partial}{\partial\phi} x_t(t_0,\phi) = T(t-t_0,t_0:\phi)$.

Demonstraremos agora um lema que estabelece uma relação entre as soluções da Equação Funcional Neutra (1.2) e as soluções da Equação Variacional (1.4).

Lema 1.10

Seja $f: [\tau,\infty) \times C \to R^n$, $\tau \geq 0$, de classe C^1 e seja U um subconjunto convexo de C. Assumamos que $x_t(t_0,\phi_1)$ e $x_t(t_0,\phi_2)$ são soluções de (1.2) com $t_0 \in [\tau,\infty)$ e $\phi_1,\phi_2 \in U$. Então

$$\|x_t(t_0,\phi_1)-x_t(t_0,\phi_2)\| \leq \sup_{\xi\in U} \|T(t-t_0,t_0:\xi)\| \cdot \|\phi_1-\phi_2\|$$

Demonstração:

Seja $\xi(\lambda) = \lambda\phi_1+(1-\lambda)\phi_2, 0 \leq \lambda \leq 1$, o "segmento" que une ϕ_1 à ϕ_2. Como U é conexo $\xi(\lambda) \in U$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Seja $x_t(t_0,\xi(\lambda))$ a solução da equação (1.2) através de $(t_0,\xi(\lambda))$. Derivando-a em relação à λ, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} x_t(t_0,\xi(\lambda)) = \frac{\partial}{\partial\xi} x_t(t_0,\xi(\lambda)) \frac{d\xi}{d\lambda}$$

Logo $\frac{\partial}{\partial\lambda} x_t(t_0,\xi(\lambda)) = T(t-t_0,t_0,\xi(\lambda)) (\phi_2-\phi_1)$

Integrando agora em relação à λ, segue que:

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\lambda} x_t(t_0,\xi(\lambda))d\lambda = \int_0^1 T(t-t_0,t_0,\xi(\lambda))(\phi_2-\phi_1)d\lambda$$

Portanto,

$$\|x_t(t_0,\xi(1))-x_t(t_0,\xi(0))\| =$$

$$= \left\|\int_0^1 T(t-t_0,t_0,\xi(\lambda))(\phi_2-\phi_1)d\lambda\right\|$$

Logo,

$$\|x_t(t_0,\phi_2)-x_t(t_0,\phi_1)\| \leq \sup_{\xi\in U} \|T(t-t_0,t_0:\xi(\lambda)\|.\|\phi_2-\phi_1\|$$

CAPÍTULO 2

O objetivo deste capítulo é a construção de funcionais de Lyapunov para o estudo da estabilidade do conjunto assintoticamente auto-invariante $x = 0$ relativamente a Equações do Tipo Neutro. Para isto, apresentamos primeiro as noções de estabilidade de soluções; a definição de conjunto assintoticamente auto-invariante e os conceitos de estabilidade para tais conjuntos.

2.1. Estabilidade de Conjuntos Assintoticamente Auto-Invariantes.

Consideremos a Equação Diferencial Funcional Neutra:

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \tag{2.1}$$

onde f satisfaz condições suficientes para garantirmos a existência, unicidade e dependência contínua de soluções.

Vamos supor, nas definições 2.1 a 2.5 a seguir, que $x = 0$ seja solução de (2.1) definida em $[\tau,\infty)$, $\tau \geq 0$.

Definição 2.1.

A solução $x = 0$ de (2.1) é *estável* se para todo

$t_0 \geq \tau$, existe $\rho = \rho(t_0)$ tal que para toda $\phi \in C\rho$, a solução $x_t(t_0,\phi)$ de (2.1) por (t_0,ϕ) existe em $[t_0,\infty)$, $x_t(t_0,\phi) \in C\rho$ e, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t_0,\varepsilon) >$ tal que

$$\text{se} \quad ||\phi|| < \delta, \quad \text{então} \quad ||x_t(t_0,\phi)|| < \varepsilon, \ \forall\ t \geq t_0.$$

Definição 2.2.

A solução $x = 0$ de (2.1) é *uniformemente estável* se for estável e se os números ρ e δ da definição anterior não dependerem de t_0.

Definição 2.3.

A solução $x = 0$ de (2.1) é *assintoticamente estável* se for estável e existir $\sigma > 0$ tal que

$$\text{se} \quad \phi \in C_\sigma, \quad \text{então} \quad \lim_{t\to\infty} ||x_t(t_0,\phi)|| = 0$$

Definição 2.4.

A solução $x = 0$ de (2.1) é *assintoticamente uniformemente estável* se for uniformemente estável e, dado $\eta > 0$ existir $T = T(\eta)$ e $\delta = \delta(\eta) > 0$ tal que

se $||\phi|| < \delta$ então $||x_t(t_0,\phi)|| < \eta$, $\forall t \geq t_0 + T$

Definição 2.5.

A solução $x = 0$ de (2.1) é *uniformemente limitada* se para todo $\rho > 0$, existir $t_0 \geq \tau$ e $\beta(\rho) > 0$ tal que

se $||\phi|| < \rho$ então $||x_t(t_0,\phi)|| < \beta(\rho)$

Vamos introduzir agora o conceito de conjunto assintoticamente auto-invariante.

Definição 2.6.

O conjunto $x = 0$ é dito *Assintoticamente Auto-Invariante* (A.A.I.) com relação à equação (2.1) se existir uma função decrescente e contínua $\lambda(t)$ com $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ tal que

$$||x_t(t_0,0)|| \leq \lambda(t_0), \quad \forall\ t \geq t_0.$$

Observemos que se $x = 0$ for solução da equação (2.1), a definição acima está trivialmente satisfeita.

Uma forma equivalente de dizer que o conjunto $x = 0$ é A.A.I. relativamente à equação (2.1), é a seguinte:

Dada uma sequência decrescente ε_p, $\varepsilon_p \to 0$ com

$p \to \infty$, existe uma sequência crescente $(t_p(\varepsilon))$, $t_p(\varepsilon) \to \infty$ com $p \to \infty$, tal que:

Se $t_0 > t_p(\varepsilon)$ então $||x_t(t_0,0)|| < \varepsilon_p, \forall t \geq t_0, p = 1,2..$

Exemplos simples em que $x = 0$ é um conjunto A.A.I. são dados pelas equações escalares $\dot{x} = e^{-t}$ e $x = -\dot{x} + e^{-t}$.

Veremos a seguir os conceitos de estabilidade para conjuntos assintoticamente auto-invariantes.

Definição 2.7.

Dizemos que o *conjunto* A.A.I. $x = 0$ com relação à equação (2.1) é:

a) *uniformemente estável* se dado $\varepsilon > 0$, existem números positivos $\tau = \tau(\varepsilon)$ e $\delta(\varepsilon)$ tal que

Se $||\phi|| < \delta$ então $||x_t(t_0,\phi)|| < \varepsilon$, para todo $t \geq t_0 \geq \tau$.

b) *assintoticamente uniformemente estável* se for uniformemente estável e, para todo $\varepsilon > 0$, existirem números positivos $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$ e $T = T(\varepsilon)$ tal que

Se $t_0 \geq \tau_0$ e $||\phi|| < \delta_0$ então $||x_t(t_0,\phi)|| < \varepsilon$, para todo $t > t_0 + T$.

Observemos que estes conceitos, no caso de $x = 0$

ser solução de (2.1), traduzem a noção de estabilidade num sentido mais fraco que o das definições (2.2) e (2.4) pois t_0 pode variar com ε. Se $x = 0$ for solução de (2.1), o conceito de estabilidade uniforme (ou assintoticamente uniforme) para conjuntos A.A.I. (definição 2.7) é também conhecido como *estabilidade eventual uniforme (ou estabilidade eventual assintoticamente uniforme)*.

Nosso próximo passo é estabelecer um método para investigar a estabilidade do conjunto A.A.I. $x = 0$, relativamente à equação (2.1). Este método é conhecido como o segundo método de Lyapunov e reduz o problema de estabilidade do conjunto A.A.I. $x = 0$ relativamente à Equação Neutra (2.1) ao estudo da estabilidade do conjunto A.A.I. $u = 0$, relativamente a uma Equação Escalar do tipo:

$$\dot{u} = h(t,u), \quad u(t_0) = u_0, \tag{2.2}$$

onde $h \in C(R_+ \times R_+, R)$.

Para esta equação podemos formular de maneira análoga as definições (2.6) e (2.7) feitas para Equações do Tipo Neutro. Vejamos então um teorema de comparação:

Teorema 2.8.

Suponhamos que existam funções $V \in C(R_+ \times C\rho, R_+)$, $\rho > 0$, e $h \in C(R_+ \times R_+, R)$ satisfazendo as seguintes condições:

a) V é localmente lipschitziana na segunda variável

b) $b(||\phi||) \leq V(t,\phi) \leq a(t,||\phi||), \forall (t,\phi) \varepsilon R_+ \times C_p$

onde $b: [0,\rho) \to R_+$ é contínua e crescente com $b(0) \neq 0$ e $a \varepsilon A$, onde

$A = \{a: R_+ \times [0,\rho) \to R_+ /$ a é contínua, decrescente em t para r fixo, crescente em r para t fixo e tal que $\lim_{t\to\infty r\to 0} a(t,r) = 0\}$

c) $D^+V(t,\phi)_{(2.1)} = \lim_{t\to 0^+} \sup \frac{1}{h} (V(t+h, x_{t+h}(t_0,\phi)) - V(t,\phi)) \leq$

$\leq h(t, V(t,\phi)), \forall (t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho.$

Então a estabilidade uniforme (assintótica uniforme) do conjunto A.A.I. u = 0 relativamente à Equação Escalar (2.2) implica que o conjunto x = 0 é A.A.I. relativamente à equação (2.1) e além disso x = 0 é uniformemente estável (assintoticamente uniformemente estável).

Demonstração:

Denotemos por $u(t,t_0,u_0)$ uma solução da Equação Escalar (2.2) passando por (t_0,u_0).

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Consideremos $b(\varepsilon)>0$. Como o conjunto u = 0 A.A.I. com relação à equação (2.2) é uniformemente estável, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)>0$ e $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon)>0$ tal que:

Se $|u_0| \leq \delta_1$ então $|u(t,t_0,u_0)| < b(\varepsilon)$, $\forall t \geq t_0 \geq \tau_1$.

Vamos mostrar que existem números positivos δ e τ tal que

Se $||\phi|| < \delta$ então $||x_t(t_0,\phi)|| < \varepsilon$, $\forall t \geq t_0 \geq \tau$.

Como $\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ r\to 0}} a(t,r) = 0$, existem $\delta > 0$ e $\tau_2 > 0$ tal que:

Se $||\phi|| < \delta$ e $t \geq \tau_2$ então $|a(t,||\phi||)| < \delta_1$.

Afirmamos que δ e $\tau = \text{máx}\{\tau_1,\tau_2\}$ satisfazem:

"$||\phi|| < \delta$, $t \geq t_0 \geq \tau$ implicam $||x_t(t_0,\phi)|| < \varepsilon$".

Suponhamos por absurdo que isto não ocorresse, então existiriam uma solução $x_t(\bar{t}_0,\bar{\phi})$ com $||\bar{\phi}|| < \delta$ e um $t_1 \geq \bar{t}_0 > \tau$ tal que:

$$||x_{t_1}(\bar{t}_0,\bar{\phi})|| = \varepsilon$$

$$||x_t(\bar{t}_0,\bar{\phi})|| \leq \varepsilon, \ \forall t \in [\bar{t}_0,t_1]$$

Tomemos $u_0 = a(\bar{t}_0,||\bar{\phi}||)$. Assim $V(\bar{t}_0,\bar{\phi}) \leq u_0$, devido a hipótese b). Pela hipótese c), temos:

$$D^+ V(t,x_t(\bar{t}_0,\phi)) \leq h(t,V(t,x_t(\bar{t}_0,\bar{\phi})))$$

Estamos agora nas hipóteses do Lema 0.3 e portanto podemos concluir que:

$$V(t,x_t(\bar{t}_0,\bar{\phi})) \leq r(t,\bar{t}_0,u_0), \quad \forall t \in [\bar{t}_0,t_1], \tag{2.3}$$

onde $r(t,\bar{t}_0,u_0)$ é a solução maximal da Equação Escalar (2.2) com $r(\bar{t}_0) = u_0 = a(\bar{t}_0,||\bar{\phi}||)$. Logo

$$b(\varepsilon) = b(||x_{t_1}(\bar{t}_0,\bar{\phi})||) \leq V(t_1,x_{t_1}(\bar{t}_0,\bar{x}_0)) \leq r(t_1,\bar{t}_0,u_0) < b(\varepsilon)$$

que é absurdo. Logo o conjunto $x = 0$ é A.A.I. com relação à equação (2.1) e além disso é uniformemente estável.

Mostremos, finalmente, que o conjunto $x = 0$ é A.A.I. relativamente à equação (2.1) e é assintoticamente uniformemente estável, se $u = 0$ o for relativamente à equação (2.2).

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Por hipótese existem $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon) > 0$ e $T = T(\varepsilon)$ tal que:

$$|u(t,t_0,u_0)| < b(\varepsilon), \ \forall t_0 \geq \tau_0, \quad \forall t \geq t_0 + T,$$

que $||\phi|| < \delta_0$.

Como $\lim\limits_{\substack{t\to\infty \\ r\to 0}} a(t,r) = 0$, existem $\tilde{\delta}_0$ e $\tilde{\tau}_0$ tal que

Se $||\phi|| < \tilde{\delta}_0$, $t > \tilde{\tau}_0$ então $|a(t,||\phi||)| < \tilde{\delta}_0$

Afirmamos que $\tilde{\delta}_0, \tau_0 = \max\{\tau_0,\tilde{\tau}_0\}$ e T satisfazem:

$$||x_t(t_0,\phi|| < \varepsilon, \ \forall t_0 \geq \tau_0, \ \forall t \geq t_0 + T,$$

desde que $||\phi|| < \tilde{\delta}_0$.

De fato, se isto não ocorresse, existiriam uma solução $x_t(\bar{t}_0,\bar{\phi})$ com $||\bar{\phi}|| < \tilde{\delta}_0$ e um $t_1 \geq \bar{t}_0 + T$, com $\bar{t}_0 > \tau$ tal

que:

$$||x_{t_1}(\bar{t}_0,\bar{\phi})|| = \varepsilon$$

$$||x_t(\bar{t}_0,\bar{\phi})|| < \varepsilon, \quad \forall t\varepsilon\ [t_0+T,t_1]$$

Com procedimento análogo ao que foi feito para obtermos (2.3), podemos escrever que:

$$V(t,x_t(\bar{t}_0,\bar{\phi})) \leq r(t,\bar{t}_0,u_0), \quad \forall t\varepsilon\ [\bar{t}_0+T,t_1],$$

tomando-se $u_0 = a(\bar{t}_0,||\bar{\phi}||)$ onde $r(t,\bar{t}_0,u_0)$ é solução máxi mal da equação (2.2) por $(\bar{t}_0,u_0)$. Logo

$$b(\varepsilon) = b(||x_{t_1}(\bar{t}_0,\bar{\phi})||) \leq V(t_1,x_{t_1}(\bar{t}_0,\bar{\phi})) \leq r(t_1,t_0,u_0) < b(\varepsilon)$$

que é um absurdo.

O teorema fica assim demonstrado.

2.2. Estabilidade em Variação

Seja $x_t(t_0,\phi)$ a solução da Equação Funcional Neutra (2.1) passando por (t_0,ϕ). Consideremos a Equação Variacio nal de (2.1) associada a esta solução:

$$\frac{d}{dt}\ D_\phi(t,x_t(t_0,\phi)).\ z_t = f_\phi(t,x_t(t_0,\phi)).z_t. \tag{2.4}$$

Seja $T(t-t_0,t_0:\phi)$ o operador solução da Equação Variacional.

Vamos estudar propriedades de estabilidade sobre a Equação Variacional (2.4) que nos permitirão concluir propriedades de estabilidade sobre a equação (2.1) e, posteriormente, sobre Equações Neutras sob o efeito de perturbações.

Definição 2.9.

O conjunto A.A.I. $x = 0$ relativamente à equação (2.1) é dito *uniformemente estável em variação* se, dado $\varepsilon>0$, existir uma constante $M(\varepsilon) > 0$ tal que:

Se $||\phi|| \leq \varepsilon$ então $||T(t-t_0,t_0,\phi)|| \leq M(\varepsilon), \forall t \geq t_0$.

Lema 2.10.

Se $x = 0$ for solução de (2.1) uniformemente estável em variação então, dado $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon)>0$ tal que:

Se $||\phi|| \leq \varepsilon$, tem-se $||x_t(t_0,\phi)|| \leq M(\varepsilon)||\phi||, \forall t \geq t_0$.

Demonstração:

Por hipótese $x = 0$ é uniformemente estável em variação assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon)>0$ tal que se $||\phi||<\varepsilon$ en

tão

$$||T(t-t_0,t_0:\phi)|| \leq M(\varepsilon), \quad \forall t \geq t_0$$

Sabemos do Lema 1.10 que

$$||x_t(t_0,\phi)-x_t(t_0,\psi)|| \leq \sup_{0\leq\lambda\leq 1} ||T(t-t_0,t_0:\phi+\lambda(\phi-\psi)||.||\phi-\psi||$$

$\forall\phi,\psi \in \Lambda$ aberto e convexo de $R \times C$.

Tomando-se $\psi = 0$ tem-se

$$||x_t(t_0,\phi)|| \leq \sup_{0\leq\lambda\leq 1} ||T(t-t_0,t_0:\phi)||.||\phi||$$

Logo, se $||\phi|| \leq \varepsilon$, temos que $||x_t(t_0,\phi)|| \leq M(\varepsilon).||\phi||$, $\forall t \geq t_0$.

Este Lema permite demonstrar, imediatamente, a seguinte proposição:

Proposição 2.11.

Se $x = 0$ for solução de (2.1) uniformemente estável em variação então ela é uniformemente estável e uniformemente limitada.

Demonstração:

Pelo Lema anterior, dado $\varepsilon > 0$, existe $M(\varepsilon) > 0$ tal que

Se $||\phi|| \leq \varepsilon$ então $||x_t(t_0,\phi)|| \leq M(\varepsilon)||\phi||$, $\forall t \geq t_0$

Logo,

$$||x_t(t_0,\phi)|| \leq \varepsilon\, M(\varepsilon) \quad \text{se} \quad ||\phi|| \leq \varepsilon,$$

e portanto $x = 0$ é uniformemente limitada.

Dado $\xi > 0$, tomamos $\delta < \min\{\xi, \xi/_{M(\varepsilon)}\}$. Assim se $||\phi|| < \delta$, temos

$$||x_t(t_0,\phi)|| \leq M(\varepsilon).||\phi|| < M(\varepsilon).\delta < \xi,$$

e disto decorre que a solução $x = 0$ de (2.1) é uniformemente estável.

Definição 2.12.

O conjunto A.A.I. $x = 0$ relativamente à equação (2.1) é dito *assintoticamente uniformemente estável em variação* se, dado $\varepsilon > 0$, existir uma função contínua e decrescente λ_ε com $\lim_{t\to\infty} \lambda_\varepsilon(t) = 0$ tal que:

Se $||\phi|| < \varepsilon$, então $||T(t-t_0,t_0:\phi)|| \leq \lambda_\varepsilon(t-t_0)$, para todo $t \geq t_0$.

É óbvio que se o conjunto A.A.I. $x = 0$ relativamente à equação (2.1) for assintoticamente uniformemente estável em variação também é uniformemente estável em variação. Decorre ainda da definição acima que se $x = 0$ for solução de (2.1) uniformemente estável em variação então $T(t-t_0,t_0:\phi)$ é uniformemente limitado e além disso, dado $\varepsilon > 0$, se $||\phi|| \leq \varepsilon$ então

$$\lim_{t\to\infty} ||T(t-t_0,t_0:\phi)|| = 0$$

Proposição 2.13.

Se $x = 0$ for solução de (2.1) assintoticamente uniformemente estável em variação então ela é assintoticamente uniformemente estável.

Demonstração:

Se $x = 0$ for solução de (2.1) assintoticamente uniformemente estável em variação então ela é uniformemente estável devido à Proposição 2.11.

Agora, dado $\varepsilon > 0$, existe λ_ε decrescente e contínua com $\lim_{t\to\infty} \lambda_\varepsilon(t) = 0$ tal que $||\phi|| \leq \varepsilon$ implica

$$||T(t-t_0,t_0:\phi)|| \leq \lambda_\varepsilon(t-t_0)$$

para todo $t \geq t_0$.

Pelo Lema 1.10 podemos concluir que:

Se $||\phi|| \leq \varepsilon$ então

$||x_t(t_0,\phi)|| \leq \sup_{||\psi||\leq\varepsilon} ||T(t-t_0,t_0:\psi)||.||\phi||$ e portanto $||x_t(t_0,\phi)|| \leq \lambda_\varepsilon(t-t_0)||\phi||$.

Além disso, para cada $\eta > 0$ dado, existe $T = T(\eta)>0$ tal que se $t\geq t_0 + T$ então $\lambda_\varepsilon(t-t_0)< \eta$, devido às hipóteses sobre λ_ε. Logo

$||\phi|| < \eta$ implica que $||x_t(t_0,\phi)||< \eta$, $\forall t>t_0+T$, ou seja, $x = 0$ é solução assintoticamente uniformemente estável de (2.1).

2.3. Construção de Funcionais de Lyapunov

Nosso objetivo neste parágrafo é a construção de funcionais de Lyapunov supondo que a solução da equação(2.1) seja uniformemente estável em variação (ou assintoticamente uniformemente estável em variação). Os dois teoremas a seguir estabelecem uma forma recíproca do teorema de comparação 2.8.

Teorema 2.14.

Suponhamos que $x = 0$ seja solução da Equação Funcional do Tipo Neutro: $\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t)$ (2.1).

Fixemos $\rho > 0$. Se a solução $x = 0$ for uniformemente estável em variação, existe um funcional de Lyapunov $V(t,\phi)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $V(t,\phi)$ está definido e é contínuo para todo $(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$.

ii) $||\phi|| \leq V(t,\phi) \leq M(\rho).||\phi||$, qualquer que seja $(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$, onde $M(\rho) > 0$.

iii) $|V(t,\phi_1) - V(t,\phi_2)| \leq M(\rho)\ ||\phi_1 - \phi_2||$, para todo (t,ϕ_1), $(t,\phi_2) \varepsilon R_+ \times C\rho$.

iv) $D^+V(t,\phi)_{(2.1)} = \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h} (V(t+h, x_{t+h}(t,\phi)) - V(t,\phi)) \leq 0$ para qualquer que seja $(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$.

Demonstração:

Como a solução $x = 0$ de (2.1) é uniformemente estável em variação, existe $M(\rho) > 0$ tal que:

Se $||\phi|| < \rho$ então $||T(t-t_0, t_0:\phi)|| < M(\rho)$, $\forall t \geq t_0$.

$$||x_t(t_0,\phi)|| \leq \sup_{\xi \varepsilon C\rho} ||T(t-t_0, t_0:\xi)||.||\phi||$$

devido ao Lema 1.10. Logo

$$(2.5) \qquad ||x_t(t_0,\phi)|| \leq M(\rho)||\phi||, \quad \forall t \geq t_0, \quad ||\phi|| < \rho$$

Definimos o seguinte funcional:

$$V(t,\phi) = \sup_{s\geq 0} ||x_{t+s}(t,\phi))||$$

A unicidade de soluções, juntamente com (2.5), implica que $V(t,\phi)$ está bem definido, para todo $(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$.

Vamos mostrar, primeiramente, a propriedade de ii).

É obvio que $||\phi|| \leq V(t,\phi)$, para todo $(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$.

Além disso

$$V(t,\phi) = \sup_{s\geq 0}||x_{t+s}(t,\phi)|| \leq M(\rho)||\phi||,$$

devido a (2.5).

Logo a propriedade ii) está satisfeita.

Mostremos agora iii)

Se $\phi_1, \phi_2 \varepsilon C\rho$ e $t > 0$ então

$$|V(t,\phi_1)-V(t,\phi_2)| = \left|\sup_{s\geq 0} ||x_{t+s}(t,\phi_1))|| - \sup_{s\geq 0}||x_{t+s}(t,\phi_2)||\right|$$

$$\leq \sup_{s\geq 0}||x_{t+s}(t,\phi_1) - x_{t+s}(t,\phi_2)||$$

Portanto

$$|V(t,\phi_1)-V(t,\phi_2)| \leq \sup_{s\geq 0}||x_{t+s}(t,\phi_1) - x_{t+s}(t,\phi_2)|| \leq$$

$$\leq M(\rho)||\phi_1-\phi_2||,$$

devido ao Lema 1.10. Disto resulta iii).

Vamos, a seguir mostrar que $V(t,\phi)$ é contínua em $R_+ \times C\rho$.

Sejam ϕ_1, $\phi_2 \in C\rho$ e $h > 0$ quaisquer, tal que $x_{t+h}(t,\phi_1) \in C\rho$, $t > 0$.

$$|V(t+h,\phi_2)-V(t,\phi_1)| \leq |V(t+h,\phi_2)-V(t+h,\phi_1)| +$$

$$+|V(t+h,\phi_1)-V(t+h,x_{t+h}(t,\phi_1)))| + |V(t+h,x_{t+h}(t,\phi_1)-V(t,\phi_1)|$$

Observemos que

$$|I| = |V(t+h,\phi_2)-V(t+h,\phi_1)| \leq M(\rho)||\phi_2,\phi_1||, \quad \text{por (ii).}$$

$$|II| = |V(t+h,\phi_1)-V(t+h,x_{t+h}(t,\phi_1)| \leq M(\rho)||\phi_1-x_{t+h}(t,\phi_1)||,$$

devido (ii).

Portanto $|I|,|II| \to 0$ quando $h \to 0$ e $\phi_1 \to \phi_2$, pois $x_{t+h}(t,\phi)$ é uma função contínua em h.

Resta estimar somente

$$|III| = |V(t+h,x_{t+h}(t,\phi_1))-V(t,\phi_1)||$$

$$|III| = \left|\sup_{s\geq 0}||x_{t+h+s}(t+h,x_{t+h}(t,\phi_1))||-\sup_{s\geq 0}||x_{t+s}(t,\phi_1)||\right| =$$

$$= \left|\sup_{s\geq 0}||x_{t+h+s}(t,\phi_1)||-\sup_{s\geq 0}||x_{t+s}(t,\phi_1))||\right|$$

devido à unicidade de soluções.

$$(\text{em } s = 0,\ x_{t+h+0}(t+h, x_{t+h}(t,\phi_1)) = x_{t+h+0}(t,\phi_1)).$$

Logo

$$|III| \leq \left| \sup_{s\geq h} ||x_{t+s}(t,\phi_1))|| - \sup_{s\geq 0} ||x_{t+s}(t,\phi_1)|| \right|.$$

Definimos, agora, $j(\theta) = \sup_{s>\theta} ||x_{t+s}(t,\phi_1))||$

Assim $|III| \leq |j(h)-j(0)|$:

Como $j(\theta)$ é uma função contínua para $\theta > 0$ (já que $||x_{t+s}(t,\phi_1)||$ é contínua e limitada em $s > 0$), segue que $|III| \to 0$ quando $h \to 0$.

Isto mostra que $V(t,\phi)$ é uma função contínua em $R_+ \times C\rho$.

Finalmente, vamos mostrar (iv).

$$D^+V(t,\phi) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(V(t+h, x_{t+h}(t,\phi)) - V(t,\phi)) =$$

$$= \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h} (\sup_{s\geq 0} ||x_{t+h+s}(t+h, x_{t+h}(t,\phi))|| -$$

$$- \sup_{s\geq 0} ||x_{t+s}(t,\phi)||)$$

Devido à unicidade de soluções concluimos que:

$$D^+V(t,\phi) \leq \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left(\sup_{s\geq h} ||x_{t+s}(t,\phi)|| - \sup_{s\geq 0} ||x_{t+s}(t,\phi)||\right) \leq$$

$$\leq \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \left[\sup_{s\geq 0} ||x_{t+s}(t,\phi)|| - \sup_{s\geq 0} ||x_{t+s}(t,\phi)||\right] \leq 0$$

O teorema fica, assim, demonstrado.

Observação: No teorema acima podemos supor que $x = 0$ seja A.A.I. relativamente à equação (2.1) (assim existe $\lambda(t)$ decrescente e contínua com $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ tal que $||x_t(t_0,0)|| \leq \lambda(t)$). Definindo como antes

$$V(t,\phi) = \sup_{s\geq 0} ||x_{t+s}(t,\phi)||,$$

as condições i), ii) iv) estão satisfeitas. A condição ii) apresenta-se na forma:

ii) $||\phi|| \leq V(t,\phi) \leq a(t,\phi)$, para todo $V(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$, onde $a(t,\phi) = M(\rho)||\phi|| + \lambda(t) \varepsilon A$.

A demonstração é inteiremante análoga à que fizemos no teorema anterior.

Para estabelecermos um teorema análogo a este último supondo estabilidade assintótica uniforme em variação, necessitamos do seguinte Lema (que é uma generalização de

um resultado obtido por Kato e Kurosaki [31]):

Lema 2.15.

Se a solução $x = 0$ da equação (2.1) for assintoticamente uniformemente estável em variação, para cada $\rho > 0$, existem constantes positivas $\bar{K}(\rho)$ e $\alpha(\rho)$ tal que

$$||T(t-t_0,t_0,\phi)|| \leq \bar{K}(\rho)\, e^{-\alpha(\rho)(t-t_0)} \text{ se } ||\phi|| < \rho \text{ e}$$

para todo $t \geq t_0$.

Demonstração:

Sendo $x = 0$ solução da equação (2.1), uniformemente assintoticamente estável em variação, para cada $\rho > 0$, existe uma função $\lambda\rho: R_+ \to R$, decrescente e contínua com

$$\lim_{t\to\infty} \lambda\rho(t) = 0,$$

tal que:

$||T(t-t_0,t_0,\phi)|| \leq \lambda\rho(t)$ para todo $t \geq t_0$, desde que $||\phi|| < \rho$.

Se $x_t(t_0,\phi)$ é solução de (2.1) por (t_0,ϕ), aplicando o Lema 1.10, para cada $\rho > 0$, existe uma constante $\beta(\rho) > 0$ tal que:

Se $||\phi|| < \rho$ então

$$||x_t(t_0,\phi)|| \leq \sup_{\xi \varepsilon C\rho} ||T(t-t_0,t_0:\xi)|| \; ||\phi|| \leq \beta(\rho),$$

conforme a proposição 2.11.

Escolhemos $T(\rho)$ tal que $\lambda_{\beta(\rho)}(T(\rho)) < \frac{1}{2}$.

Se $\phi \varepsilon C\rho$, tomamos $t_k = t_0 + k\,T(\alpha), k = 1,2,\ldots$

Se $t_{m+1} > t \geq t_m$, então:

$$||T(t-t_0,t_0,\phi)|| \leq$$

$$\leq ||T(t-t_m,t_0,\phi)|| \, ||T(t_m-t_{m-1},t_0,\phi)|| \ldots$$

$$\ldots ||T(t_1,t_0,\phi)||$$

$$\leq \lambda_{\beta(\rho)}(t-t_m).\lambda_{\beta(\rho)}(t_m-t_{m-1}) \ldots \lambda_{\beta(\rho)}(t_1-t_0)$$

$$\leq \lambda_{\beta(\rho)}(0).\lambda_{\beta(\rho)}(T(\rho)) \ldots \lambda_{\beta(\rho)}(T(\rho))$$

$$\leq \lambda_{\beta(\rho)}(0).(\tfrac{1}{2})^m \leq 2\lambda_{\beta(\rho)}(0).(\tfrac{1}{2})^{\frac{t-t_0}{T(\rho)}}$$

$$\leq \bar{K}(\rho)\, e^{-\alpha(\rho)(t-t_0)}$$

onde $\bar{K}(\rho) = 2\lambda_{\beta(\rho)}(0)$ e $\alpha(\rho) = T(\rho)^{-1}.\ln 2$.

O Lema fica assim demonstrado.

Teorema 2.16.

Suponhamos que $x = 0$ seja solução da Equação Funcional do Tipo Neutro.

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \qquad (2.1),$$

fixemos $\rho > 0$. Se $x = 0$ for assintóticamente uniformemente estável em variação, então existe um funcional de Lyapunov $W(t,\phi)$ satisfazendo as seguintes propriedades:

i) $W(t,\phi)$ está definido e é contínua em $R_+ \times C\rho$.

ii) $||\phi|| \leq W(t,\phi) < L(\rho)||\phi||$, para todo $V(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$, onde $L(\rho) > 0$.

iii) $|W(t,\phi_1) - W(t,\phi_2)| \leq L(\rho).||\phi_1 - \phi_2||$, quaisquer que sejam $(t,\phi_1),(t,\phi_2)$ em $R_+ \times C\rho$.

iv) $D^+W(t,\phi)_{(2.1)} \leq -c(\rho)W(t,\phi)$ para todo $(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$ e para algum $c(\rho) > 0$.

Demonstração:

Como $x = 0$ é solução da equação (2.1), segue do Lema 1.10 que

$$(2.6) \qquad ||x_t(t_0,\phi)|| \leq \sup_{\xi \varepsilon C\rho} ||T(t-t_0,t_0:\xi)|| \cdot ||\phi||, \quad t \geq t_0$$

Devido ao Lema 2.15, existem constantes positivas $\bar{K}(\rho)$ e $\alpha(\rho)$, tal que:

$$(2.7) \qquad ||T(t-t_0,t_0:\phi)|| \leq \bar{K}(\rho).e^{-\alpha(\rho)(t-t_0)}, \text{ se } ||\phi|| \leq \rho, \text{ para}$$

ra todo $t \geq t_0$, pois $x = 0$ é, por hipótese, assintóticamente uniformemente estável em variação.

Definimos o seguinte funcional

$$\omega(t,\phi) = \int_t^\infty ||x_s(t,\phi)||ds. \ , \ (t,\phi) \varepsilon \ R_+ \times C\rho$$

ω é bem definida, pois,

$$||x_t(t_0,\phi)|| \leq \bar{K}(\rho).e^{-\alpha(\rho)(t-t_0)}||\phi||, \text{se } ||\phi|| < \rho, \text{para}$$

ra todo $t \geq t_0$ devido a (2.6) e (2.7).

Vamos verificar algumas propriedades de $\omega(t,\phi)$:

a) Se $||\phi|| \leq \rho$ e $t \varepsilon R_+$ então:

$$\omega(t,\phi) = \int_t^\infty ||x_s(t,\phi)||ds \leq \int_t^\infty \bar{K}(\rho)e^{-\alpha(\rho)(s-t)}||\phi||ds$$

$$= \bar{K}(\rho)||\phi||. \int_t^\infty e^{-\alpha(\rho)(s-t)}ds$$

$$= \bar{K}(\rho)||\phi|| \int_0^\infty e^{-\alpha(\rho)s}ds = N(\rho).\bar{K}(\rho)||\phi||$$

$$= P(\rho)||\phi||$$

b) Se $t \in R_+$ e $\phi_1, \phi_2 \in C\rho$

$$|\omega(t,\phi_1)-\omega(t,\phi_2)| = \left|\int_t^\infty ||x_s(t,\phi_1)||ds - \int_t^\infty ||x_s(t,\phi_2)||ds\right|$$

$$\leq \int_t^\infty ||x_s(t,\phi_1)-x_s(t,\phi_2)||ds$$

$$\leq \int_t^\infty \sup_{\xi \in C\rho} ||T(s-t,t;\xi)||.||\phi_1-\phi_2||ds,$$

devido ao Lema 1.10. Portanto

$$|\omega(t,\phi_1)-\omega(t,\phi_2)| \leq \bar{K}(\rho)\left(\int_t^\infty e^{-\alpha(\rho)(s-t)}dt\right)||\phi_1-\phi_2||$$

$$\leq \bar{K}(\rho)\ N(\rho).||\phi_1-\phi_2|| = P(\rho)||\phi_1-\phi_2||$$

c) Vamos estimar a derivada $D^+\omega(t,\phi)$ (2.1).

$$D^+\omega(t,\phi)_{(2.1)} = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[\omega(t+h,x_{t+h}(t,\phi))-\omega(t,\phi)]$$

$$= \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\int_{t+h}^\infty ||x_s(t+h,x_{t+h}(t,\phi))||\right.$$

$$\left. - \int_t^\infty ||x_s(t,\phi))||ds\right) =$$

$$= \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(\int_{t+h}^\infty ||x_s(t,\phi)||ds\ -\right.$$

$$\left. - \int_t^\infty ||x_s(t,\phi)||ds\right),$$

devido à unicidade de soluções. Portanto

$$D^+\omega(t,\phi)_{(2.1)} = \lim_{h\to 0^+}\sup \frac{1}{h}\left(-\int_t^{t+h} ||x_s(t,\phi)||ds\right)$$

$$= - ||\phi||.$$

d) $\omega(t,\phi)$ é um funcional contínuo:

Sejam $t\varepsilon R^+$, $\phi_1,\phi_2 \varepsilon C\rho$ e $h>0$.

$$|\omega(t+h,\phi_2)-\omega(t,\phi_1)| \leq |\omega(t+h,\phi_2)-\omega(t+h,\phi_1)| +$$

$$+|\omega(t+h,\phi_1)-\omega(t+h,x_{t+h}(t,\phi_1))|+|\omega(t+h,x_{t+h}(t,\phi_1))-\omega(t,\phi_1)|$$

$$\leq P(\rho)||\phi_2-\phi_1||+P(\rho)||\phi_1-x_{t+h}(t,\phi_1)||$$

$$+ \left|\int_{t+h}^{\infty} ||x_s(t+h,x_{t+h}(t,\phi_1)||ds -\right.$$

$$\left.- \int_t^{\infty} ||x_s(t,\phi_1)||ds\right| =$$

$$= P(\rho)(||\phi_2-\phi_1||+||\phi_1-x_{t+h}(t,\phi_1)||)+$$

$$+ \int_t^{t+h} ||x_s(t,\phi_1)||ds,$$

devido à unicidade de soluções e à propriedade b).

Disto decorre a continuidade de $\omega(t,\phi)$ em $R^+\times C\rho$.

Definimos, agora, o seguinte funcional:

$$W(t,\phi) = \omega(t,\phi) + V(t,\phi),$$

onde $V(t,\phi)$ é o funcional construido no teorema 2.14. (Observemos que as hipóteses do Teorema 2.14 estão trivialmente verificadas).

Vamos, finalmente, verificar as hipóteses i), ii), iii) e iv) do teorema. É claro que $W(t,\phi)$ está definido e é contínuo em $R_+ \times C\rho$. Além disso, devido à propriedade b) de $\omega(t,\phi)$, $W(t,\phi)$ é lipschitziana na segunda variável com

$$||W(t,\phi_1)-W(t,\phi_2)|| \leq (P(\rho)+M(\rho))||\phi_1-\phi_2|| = L(\rho)||\phi_1-\phi_2||$$

Vamos verificar a propriedade de ii)

$||\phi|| \leq V(t,\phi) \leq V(t,\phi) + \omega(t,\phi) = W(t,\phi)$, qualquer que seja $V(t,\phi) \varepsilon R_+ \times C\rho$.

Também:

$$W(t,\phi)=V(t,\phi)+\omega(t,\phi) \leq M(\rho)||\phi||+P(\rho)||\phi||=L(\rho)||\phi||$$

devido à propriedade a) de $\omega(t,\phi)$.

Por último, verifiquemos (iv):

$$D^+W(t,\phi)_{(2.1)} \leq D^+V(t,\phi)_{(2.1)}+D^+\omega(t,\phi)_{(2.1)}$$

$$\leq D^+\omega(t,\phi)_{(2.1)} \leq -||\phi||$$

pois $D^+V(t,\phi)_{(2.1)} \leq 0$ e pela propriedade c) de $\omega(t,\phi)$

Como $W(t,\phi) \leq (M(\rho)+P(\rho))||\phi|| = L(\rho)||\phi||$ então

$$D^+W(t,\phi)_{(2.1)} \leq -\frac{1}{L(\rho)} W(t,\phi) = -c(\rho)W(t,\phi)$$

A prova do Teorema está completa.

Observação:

Podemos supor, no teorema anterior, que $x = 0$ seja A.A.I. relativamente à equação (2.1) (ou seja, que exista $\lambda(t)$ decrescente e, contínua, com $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0$ tal que $|x_t(t_0,0)| < \lambda(t_0)$), mas devemos impor hipóteses mais fortes sobre o decaimento $\lambda(t)$. Por exemplo, se $\lambda(t) = c.e^{-\alpha t}$ ou com $c>0$ e $\alpha>0$ (ou seja $x = 0$ é exponencialmente auto-invariante), colocamos

$$W(t,\phi) = \sup_{s\geq 0}\left[||x_{t+s}(t,\phi)||.e^{-c(\rho)s}\right]$$

onde $c(\rho) < \alpha$ é dado pelo Lema 2.15. As propriedades i), ii), iii) e iv) podem ser verificadas de modo similar ao que fizemos no teorema 2.16.

CAPÍTULO 3

Os teoremas 2.14 e 2.16 são básicos para o estudo de estabilidade do conjunto A.A.I. $y = 0$ relativamente à Equação Perturbada:

$$\frac{d}{dt} D(t,y_t) = f(t,y_t) + g(t,y_t)$$

onde f e g são funções contínuas de um aberto Λ de $R_+ \times C_p$ em R^n. Vamos supor, para este estudo, que $x = 0$ seja solução de equação

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t)$$

(assintoticamente) uniformemente estável em variação e estudaremos condições sobre a perturbação $g(t,\phi)$ de modo a garantir a estabilidade do conjunto A.A.I. $y = 0$ relativamente a Equação Perturbada.

3.1.- *A Equação Perturbada*

Consideremos a Equação Diferencial Funcional Neutra

$$\frac{d}{dt} D(t,x_t) = f(t,x_t) \tag{3.1}$$

onde f possui derivada de Frèchet contínua em relação a segunda variável, satisfaz condições que possam garantir a existência, unicidade e dependência contínua de soluções com relação aos dados iniciais; e D é linear na segunda variável e u-

niformemente atômica em zero sobre $\Lambda = R_+ \times C$.

Seja $x_t(t_0,\phi)$ a solução de (3.1) que passa por (t_0,ϕ) e consideremos a Equação Variacional de (3.1) associada a esta solução:

$$(3.2) \qquad \frac{d}{dt} D_\phi(t,x_t(t_0,\phi)).z_t = f_\phi(t,x_t(t_0,\phi)).z_t$$

O objetivo deste capítulo é o estudo da estabilidade do conjunto A.A.I. $y = 0$ com relação à Equação Perturbada:

$$(3.3) \qquad \frac{d}{dt} D(t,y_t) = f(t,y_t) + g(t,y_t)$$

onde g tem as mesmas propriedades que f descritas acima.

Antes disto, porém, demonstraremos dois Lemas:

Lema 3.1

Seja $\lambda\rho(t)$ uma função contínua, decrescente com $\int_0^\infty \lambda\rho(s)ds < \infty$. O conjunto $u = 0$ é A.A.I. relativamente à equação

$$\dot{u} = c.\lambda\rho(t), \quad c > 0,$$

e além disso é uniformemente estável.

Demonstração

De fato, as soluções de $\dot{u} = c.\lambda\rho(t)$ são da forma:

$$u(t,t_0,u_0) = u_0 + c\int_{t_0}^{t} \lambda\rho(s)ds, \quad t > t_0$$

$$u(t_0,t_0,u_0) = u_0$$

Como $\int_0^{\infty} \lambda\rho(s)ds < \infty$, segue que a função que leva t_0 em $\int_{t_0}^{t} \lambda\rho(s)ds$ para $t > t_0$ é decrescente e tende a zero quando $t_0 \to \infty$. Isto acarreta que $u = 0$ é A.A.I. relativamente à equação $\dot{u} = c.\lambda\rho(t)$ e também é uniformemente estável.

Lema 3.2

Consideremos a seguinte equação escalar:

$$\dot{u} = -\delta u + c.\lambda\rho(t), \quad \delta > 0, \; c > 0$$

onde $\lambda\rho(t)$ é uma função contínua tal que $\int_t^{t+1} \lambda(s)ds \to 0$ quando $t \to \infty$. Então o conjunto $u = 0$ é A.A.I. com relação à equação acima e além disso, é assintoticamente uniformemente estável.

Demonstração

A solução geral da equação $\dot{u} = -\delta u + c\lambda\rho(t)$ é dada por:

$$u(t,t_0,u_0) = u_0\, e^{-\delta(t-t_0)} + c\int_{t_0}^{t} e^{-\delta(t-s)}\lambda\rho(s)ds, t \geq t_0$$

$$u_0 = u(t_0,t_0,u_0)$$

Devido a um lema de Strauss e Yorke ([11],pg 19)

$$c.\int_{t_0}^{t} e^{-\delta(t-s)}\ \lambda\rho(s)ds \leq e^{-\delta t}\int_{t_0-1}^{t} e^{\delta(s+1)}p(s)ds$$

onde $p(t) = c\int_{t}^{t+1}\lambda\rho(s)ds.$

Agora,

$$\sup_{t_0\geq 0}\ e^{-\delta t}c.\int_{t_0}^{t} e^{\delta s}\ \lambda\rho(s)ds \to 0, \text{ quando } t \to +\infty$$

utilizando-se a regra de L'Hospital.

Além disso,

$$\int_{t_0}^{t} e^{-\delta(t-s)}\lambda\rho(s)ds \leq e^{-\delta t+\delta}\int_{t_0-1}^{t} e^{\delta s}p(s)ds$$

$$\leq e^{-\delta t+\delta}\ \sup_{t\geq t_{0-1}} p(t).\ \frac{e^{\delta t}}{\delta} = \frac{e^{\delta}}{\delta}.\ \sup_{t\geq t_{0-1}} p(t) = \lambda(t_0)$$

Como $\int_{t}^{t+1}\lambda\rho(s)ds \to 0$ quando $t \to \infty$, segue $\lambda(t_0)$ é contínua, decrescente e $\lim_{t_0\to\infty}\lambda(t_0) = 0$. Então $u = 0$ é A.A.I. com relação à equação $\dot{u} = -\delta u+c\lambda\rho(t)$ e também é assintoticamente uniformemente estável.

Passemos agora ao estudo de sistemas perturbados.

Teorema 3.3

Suponhamos que $x = 0$ seja solução da equação (3.1) uniformemente estável em variação. Suponhamos, também, que a perturbação $g(t,\phi)$ na equação (3.3) satisfaça a seguinte condição:

$$\|g(t,\phi)\| \leq \lambda_\rho(t), \quad \forall\, t > 0, \quad \text{para todo} \quad \phi \in C_\rho.$$

onde ρ é um número positivo dado e $\lambda_\rho(t)$ é uma função contínua para $t > 0$, satisfazendo:

$$\int_0^\infty \lambda_\rho(s)ds < \infty$$

Então o conjunto $y = 0$ é A.A.I. com relação à Equação Perturbada (3.3) e é uniformemente estável.

Demonstração

Seja $V(t,\phi)$ o funcional de Lyapunov construído no Teorema 2.14. Tomemos $(t,\phi) \in R_+ \times C_\rho$. Então:

$$D^+V(t,\phi)_{(3.3)} = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\,[V(t+h,y_{t+h}(t,\phi))-V(t,\phi)]$$

onde $y_t(t_0,\phi)$ é a solução de (3.3) passando por (t_0,ϕ).

Assim

$$D^+V(t,\phi)_{(3.3)} = \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[V(t+h,y_{t+h}(t,\phi)) -$$

$$- V(t+h,x_{t+h}(t,\phi)) + V(t+h,x_{t+h}(t,\phi)) - V(t,\phi)]$$

$$\leq \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[V(t+h,x_{t+h}(t,\phi)) - V(t,\phi)] +$$

$$+ \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[V(t+h,y_{t+h}(t,\phi)) - V(t+h,x_{t+h}(t,\phi))] \leq$$

$$\leq D^+V(t,\phi)_{(3.1)} + \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}[V(t+h,y_{t+h}(t,\phi)) -$$

$$- V(t+h,x_{t+h}(t,\phi))] \leq$$

$$\leq \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h,y_{t+h}(t,\phi)) - V(t+h,x_{t+h}(t,\phi))],$$

pois $D^+V(t,\phi)_{(3.1)} \leq 0$.

Agora, como $V(t,\phi)$ é lipschitziana em ϕ, temos:

$$|V(t+h,y_{t+h}(t,\phi)) - V(t+h,x_{t+h}(t,\phi))| \leq M(\rho)\|\phi_1-\phi_2\|$$

Logo,

$$D^+V(t,\phi)_{(3.3)} \leq M(\rho) \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \|y_{t+h}(t,\phi)-x_{t+h}(t,\phi)\|$$

Como $x_{t+h}(t,\phi)$ e $y_{t+h}(t,\phi)$, $h \geq 0$ são soluções das equações (3.1) e (3.3), respectivamente, temos:

$$D(t+h,x_{t+h}(t,\phi)) = D(t,\phi) + \int_t^{t+h} f(s,x_s(t,\phi))ds, h\geq 0$$

e $D(t+h,y_{t+h}(t,\phi)) = D(t,\phi) + \int_t^{t+h} [f(s,y_s(t,\phi))+g(s,y_s(t,\phi))]ds$

Como D é linear na segunda variável,

$$D(t+h,y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi)) =$$

$$= \int_t^{t+h} [f(s,y_s(t,\phi)) + g(s,y_s(t,\phi))-f_s(s,x_s(t,\phi))]ds$$

De acordo com a definição 1.2, podemos escrever D na seguinte forma:

$$D(t+h,y_{t+h}(t,\phi)-x_{t+h}(t,\phi)) = A(t,\phi)(y(t+h,t,\phi) -$$

$$- x(t+h,t,\phi)) - B(t+h,y_{t+h}(t,\phi) -x_{t+h}(t,\phi))$$

Como D é uniformemente atômica em zero sobre Λ, existe $K > 0$ tal que $|A^{-1}(t,\phi)| \leq K$ e $|D(t,\phi)| \leq K$, $\forall\ (t,\phi) \in \Lambda$, além disso $\gamma(t,s) \to 0$, uniformemente quando $s \to 0$, e como $A(t,\phi)$ é inversível para todo $t > 0$, podemos escrever:

$$A^{-1}(t,\phi)D(t+h,y_{t+h}(t,\phi)-x_{t+h}(t,\phi)) =$$

$$= y(t+h,t,\phi) - x(t+h,t,\phi) -$$

$$- A^{-1}(t,\phi)B(t+h,y_{t+h}(t,\phi)-x_{t+h}(t,\phi))$$

Portanto

$$|y(t+h,t,\phi) - x(t+h,t,\phi)| \leq$$

$$\leq |A^{-1}(t,\phi)||D(t+h,y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi))| +$$

$$+ |A^{-1}(t,\phi)||B(t+h,y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi))|$$

Logo

$$|y(t+h,t,\phi) - x(t+h,t,\phi)| \leq$$

$$\leq K\int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\phi)) + g(s,y_s(t,\phi))-f(s,x_s(t,\phi))|ds$$

$$+ K|B(t+h,y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi))|$$

Agora, para $h \in [0,r]$, temos que:

$$|B(t+h,y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi))| =$$

$$= \left|\int_{-r}^{0} [d_\theta\mu(t+h,\theta)](y(t+h+\theta,t,\phi) - x(t+h+\theta,t,\phi)\right|$$

$$= \left|\int_{-h}^{0} [d_\theta\mu(t+h,\theta)](y(t+h+\theta,t,\phi) - x(t+h+\theta,t,\phi))\right|$$

$$\leq \gamma(t+h,h) \sup_{-h\leq\theta\leq 0} \|y(t+h+\theta,t,\phi) - x(t+h+\theta,t,\phi)\|$$

$$\leq \gamma(t+h,h).\ \|y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi)\|$$

Deste modo

$$|y(t+h,t,\phi) - x(t+h,t,\phi)| \leq K\int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\phi)) +$$

$$+ g(s,y_s(t,\phi)) - f(s,x_s(t,\phi))|ds +$$

$$+ K.\gamma(t+h,h) \quad \|y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi)\| ,$$

e portanto

$$\|y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi)\| =$$

$$= \sup_{-r\leq\theta\leq 0} |y(t+h+\theta,t,\phi) - x(t+h+\theta,t,\phi)| =$$

$$= \sup_{0\leq\theta\leq h} |y(t+\theta,t,\phi) - x(t+\theta,t,\phi)| \leq$$

$$\leq K\int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\phi)) + g(s,y_s(t,\phi)) - f(s,x_s(t,\phi))|ds$$

$$+ K\gamma(t+h,h) \|y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+n}(t,\phi)\|$$

Como $\gamma(t+h,h) \to 0$ quando $h \to 0$, existe $h_0 \in (0,r)$ tal que $\gamma(t+h,h) < \frac{1}{2K}$, $0 \leq h \leq h_0$. Logo, para $0 \leq h \leq h_0$,

$$\|y_{t+h}(t,\phi) - x_{t+h}(t,\phi)\| \leq$$

$$\leq \frac{k}{1-k\,\gamma(t+h_0,h_0)}\int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\phi)) - g(s,y_s(t,\phi))$$

$$- f(s,x_s(t,\phi))|ds \leq 2K\int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\phi)+g(s,y_s(t,\phi))-$$

$$- f(s,x_s(t,\phi))|ds$$

Voltando na derivação de V em relação a (3.3), temos:

$$D^+V(t,\phi)_{(3.3)} \leq 2KM(\rho).\ \limsup_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\Big[\int_t^{t+h} |f(s,y_s(t,\phi)) -$$

$$- f(s,x_s(t,\phi))|ds + \int_t^{t+h} |g(s,y_s(t,\phi))|ds\Big] \leq$$

$$\leq 2KM(\rho)|g(t,\phi)|,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

Tomando-se $c = 2K\,M(\rho)$, obtem-se

$D^+V(t,\phi)_{(3.3)} \leq c.|g(t,\phi)| \leq c.\lambda\rho(t)$, para todo $(t,\phi) \in R_+ \times C_\rho$. Como $\int_0^\infty \lambda\rho(s)ds < \infty$, o Lema 3.1 implica que $u = 0$ é A.A.I. com respeito à equação $\dot{u} = c.\lambda\rho(t)$ e, além disso, é uniformemente estável.

Pelo Teorema 2.8 concluimos que o conjunto $y = 0$ é A.A.I. relativamente à Equação Perturbada (3.1) e é uniformemente estável, concluindo assim a demonstração do Teorema.

Observação:

Uma importante classe de operadores onde este teorema aplica-se é constituída pelos operadores da forma:

$D(t,\phi) = \phi(0) - B(t,\phi)$ com $|D(t,\phi)| \leq k.\|\phi\|$, qualquer que seja $(t,\phi) \in R_+ \times C\rho$, onde $B(t,\phi)$ é contínua, linear na segunda variável (portanto segundo o Teorema de Representação de Riesz $B(t,\phi) = \int_{-r}^0 [d\theta\mu(t,\theta)]\phi(\theta))$ e satisfaz:

$$\Big|\int_{-s}^0 [d\theta\mu(t,\theta)]\phi(\theta)\Big| \leq$$

$$\leq \gamma(s) \sup_{-s\leq\theta\leq 0} |\phi(\theta)|,\ \forall(t,\phi) \in R_+ \times C\rho,$$

onde, $\gamma(s)$ é contínua, não decrescente em s, com $\gamma(0) = 0$.

2) De acordo com a observação posterior ao teorema 2.14, o teorema anterior também é válido supondo que $x = 0$ seja A.A.I. com relação à equação (3.1).

O próximo teorema nos informa sobre o comportamento assintótico do conjunto A.A.I. $y = 0$ relativamente ao Sistema Perturbado (3.3).

Teorema 3.4

Suponhamos que $x = 0$ seja solução da equação(3.1) assintoticamente uniformemente estável em variação e que a perturbação $g(t,\phi)$ na equação (3.3) satisfaça a seguinte condição:

$$\|g(t,\phi)\| \leq \lambda\rho(t) \quad \text{quaisquer que sejam} \quad t \geq 0,$$

$\forall\ \phi \in C\rho$ onde ρ é um número positivo dado e $\lambda\rho(t)$ é contínua e satisfaz:

$$\int_t^{t+1} \lambda\rho(s)ds \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty.$$

Então o conjunto $y = 0$ é A.A.I. relativamente à Equação Perturbada (3.3) e, além disso, é assintoticamente uniformemente estável.

Demonstração

Seja $W(t,\phi)$ o funcional de Lyapunov construído no

teorema 2.16. De modo análogo ao que foi feito na demonstração do teorema anterior, podemos escrever:

$$D^+W(t,\phi)_{(3.3)} \leq D^+W(t,\phi)_{(3.1)} + 2KL(\rho)|g(t,\phi)| \text{ para}$$

todo $(t,\phi) \in R_+ \times C\rho$, pois $W(t,\phi)$ e $V(t,\phi)$ tem propriedades similares.

Pela propriedade iv) do teorema 2.16 temos que

$$D^+W(t,\phi)_{(3.3)} \leq -c(\rho)W(t,\phi) + 2KL(\rho)|g(t,\phi)|,$$

onde $c(\rho) > 0$.

Por hipótese, podemos escrever que:

$$D^+W(t,\phi)_{(3.3)} \leq -c(\rho)W(t,\phi) + 2KL(\rho)\lambda\rho(t)$$

Como $\int_t^{t+1} \lambda\rho(s)ds \to 0$ quando $t \to +\infty$, pelo Lema 3.2 sabemos que o conjunto $u = 0$ é A.A.I. relativamente à equação: $\dot{u} = -c(\rho)u + c.\lambda\rho(t)$, $c = 2KL(\rho)$, e é assintoticamente uniformemente estável. Aplicamos, agora, o teorema de comparação 2.8 para concluir que o conjunto $y = 0$ é A.A.I. relativamente à Equação Perturbada (3.3) e, além disso, é assintoticamente uniformemente estável.

Observação:

Se $x = 0$ for exponencialmente auto-invariante, o teorema anterior ainda continua válido. Para isto, usamos o funcional de Lyapunov dado na observação posterior ao teorema 2.16.

3.2. *Exemplo*

Consideremos a equação

(3.4) $\dot{x}(t) - k\,\dot{x}(t-1) = a\,\mathrm{sen}x(t)$,

onde $a \leq 0$ e $0 < |k| < 1$, e sua perturbada

(3.5) $\dot{y}(t) - k\,\dot{y}(t-1) = a\,\mathrm{sen}y(t) + t.e^{-t}y(t)$

Neste caso $D(\phi) = \phi(0) - k\phi(-1)$ (este operador é estável, segundo Cruz e Hale [1]).

Vamos linearizar o sistema (3.4) em relação à solução $x = 0$. Como

$f(\phi) = a\,\mathrm{sen}\phi(0)$

então $f_\phi(\phi)\psi = a\cos\phi(0).\psi(0)$, e, portanto, a equação variacional de (3.4) relativa à solução trivial é dada por:

(3.6) $\dot{z}(t) - k\dot{z}(t-1) = a.z(t)$

(a solução nula desta equação é assintoticamente uniformemente estável, de acordo com [1]).

A equação característica associada a (3.6) é

$$\lambda - k\lambda e^{-\lambda} = a,$$

nesta equação a parte real de λ, $\mathrm{Re}\lambda$, é negativa se $a \leq 0$. Então o operador solução de (3.6) é exponencialmente estável e, portanto, a solução $x = 0$ de (3.4) é assintoticamente uniformemente estável em variação. Agora, a perturbação

$$g(t,\phi) = t.e^{-t}\phi(0)$$

satisfaz a condição

$$|g(t,\phi)|_\infty \leq \lambda\rho(t) = t.e^{-t}.\rho \quad \text{se} \quad |\phi| \leq \rho$$

e como $\int_0^\infty \lambda\rho(t)dt = \rho < +\infty$, temos que $\int_t^{t+1} \lambda\rho(t)dt \to 0$ quando $t \to \infty$. Estamos, portanto, nas hipóteses tanto do teorema 3.3 como do teorema 3.4, o que nos permite concluir que o conjunto $y = 0$ é A.A.I. com relação à Equação Perturbada (3.5) e é assintoticamente uniformemente estável.

Notemos que sempre que $\int_0^\infty \lambda\rho(t)dt < +\infty$ também $\int_t^{t+1} \lambda\rho(t)dt \to 0$ quando $t \to +\infty$; se $x = 0$ for assintoticamente estável em variação e se as hipóteses do teorema 3.3 estão verificadas, também as hipóteses do teorema 3.4 estão, mas não vale a recíproca pois existem funções onde $\int_t^{t+1} \lambda\rho(t)dt \to 0$ quando $t \to +\infty$ e no entanto $\int_0^\infty \lambda\rho(t)dt = +\infty$.

Observemos que, no exemplo acima, podemos alterar a perturbação $g(t,\phi)$ de modo a ainda termos a estabilidade assintótica uniforme de $y = 0$ relativamente a (3.5).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CRUZ, M.A. and HALE, J.K. Stability of Functional Differential Equations of Neutral Type. Journal of Differential Equations 7(1970), 334-355.

[2] HALE, J.K. Theory of Functional Differential Equations Springer-Verlag, New York Inc. (1977).

[3] KATO, J. and KUROSAKI, S. Notes on the Stability in Variation. Tôhoku Math. Journal 32 (1980), 505-510.

[4] KOLMOGOROV, A.N. y FOMIN, S.V. Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional. Editorial Mir--Moscu (1972).

[5] LADEIRA, L.A.C - Teoremas sobre Existência, Unicidade e Continuidade com Relação às Condições Iniciais de Equações Diferenciais Funcionais Neutras - Dissertação de Mestrado apresentada ao ICMSC-USP (1976).

[6]a)LAKSHMIKANTHAN, V. and LEELA, S. Asymptotically Self Invariant Sets and Conditional Stability - Proc. Intern. Symp. Diff. Eqs. and Dyn Systems, Puerto Rico (1965), Academic Press, New York, 363-373.

[6]b) LAKSHMIKANTHAN, V. and LEELA, S. - Integral Inequalities, Vol. I e II - Academic Press, New York (1969).

[7] LEELA, S. - Asymptotically Self Invariant Sets and Perturbed Systems - An. di Matematica Pura ed Applicata (1972), 86-93.

[8] MOLFETTA, N.A. e MONTEIRO, P.A. - Diferenciabilidade de Soluções de uma Classe de Equações Diferenciais Neutras. 2ª Jornadas Científicas - UFSCar (1982).

[9] MONTEIRO, P.A. - Comportamento Assintótico e Estabilidade em Variação de Equações Diferenciais com Retardamento. Dissertação de Mestrado apresentada ao ICMSC--USP (1976).

[10] ONUCHIC, N. - Equações Diferenciais com Retardamento. 8º Colóquio Brasileiro de Matemática - Poços de Caldas (1971).

[11] STRAUSS, A. and YORKE, J. - Perturbations Theorems for Ordinary Diff. Equations. Journal of Diff.Eq. 3, 15--30 (1967).

[12] VILA, M. - Teoremas de Comparação e Aplicações à Estabilidade de Conjuntos Assintoticamente Auto-Invariantes. Dissertação de Mestrado apresentada ao ICMSC-USP(1976).