I.C.M.S.C.

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS DE SÃO CARLOS

ICMSC-US
PÓS-GRADUAÇÃO

SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE
EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM NÃO
LINEARES E FORÇADAS

Monica Fürkötter

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

SÃO CARLOS - SÃO PAULO
BRASIL

SOLUÇÕES PERIÓDICAS DE
EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM NÃO
LINEARES E FORÇADAS

Monica Fürkötter

Orientador: PROF. DR. HILDEBRANDO MUNHOZ RODRIGUES

Dissertação apresentada no Instituto
de Ciências Matemáticas de São Car
los, da Universidade de São Paulo,
para obtenção do Título de "Mestre
em Matemática".

SÃO CARLOS - SP

1983

ABSTRACT

The author is concerned with the equation $\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$, where p , μ are small parameters, f is an even, continuous π -periodic function, g is an odd smooth function of u , such that $g(u, p) = O(|pu| + |u^3|)$, as p and u go to zero. The main results are that, under certain conditions, the small 2π -periodic solutions maintain some symmetry properties of the forcing function $f(t)$, when $\mu \neq 0$. Some other interesting results describe the variation of the number of such solutions as p and μ vary in a small neighbourhood of the origin. The author uses the approach of Alternative Problems.

AGRADECIMENTOS

- Ao orientador deste trabalho, Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues, do ICMSC-USP, pela inteligência, lucidez e capricho inestimáveis com que acompanhou a elaboração desta dissertação.
- Aos funcionários, colegas e professores do ICMSC-USP, pelo interesse que demonstraram em relação a minha pesquisa; em especial ao Prof. Dr. Luiz Augusto da Costa Ladeira, pelas sugerções e comentários relativos a este trabalho.
- Aos amigos do IPEA-PP-UNESP, pelo estímulo.
- Aos meus pais, pelas condições favoráveis de estudo que me propiciaram.
- Ao Rô, pela sua compreensão e seu apoio.
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro, através da Bolsa de Mestrado.
- À Denize Valério, pela rapidez e eficiência no trabalho de datilografia.

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FAPESP através da Bolsa de Pesquisa para o orientador, Prof. Dr. Hildebrando Munhoz Rodrigues, processo FAPESP 80/253-0.

Para Mutti, Papi e Rô.

ÍNDICE

	PÁG.
INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO 1	
O MÉTODO ALTERNATIVO	01
CAPÍTULO 2	
ANÁLISE DA EQUAÇÃO	05
2.1 CASO EM QUE O TERMO FORÇANTE É π - PERIÓDICO	09
2.2 EXEMPLO A	29
2.3 CASO EM QUE O TERMO FORÇANTE É π - PERIÓDICO E HARMÔNICO ÍMPAR	33
2.4 EXEMPLO B	57
BIBLIOGRAFIA	61

INTRODUÇÃO

Consideremos a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t) \quad (1)$$

onde f é uma função 2π - periódica e par, p e μ são pequenos parâmetros reais e g é tal que $g(u, p) = O(|u|)$ e $g(u, 0) = O(|u|^3)$ numa vizinhança da origem.

Neste trabalho nós discutimos a variação do número de soluções pequenas de período 2π , da equação (1), e o tipo de simetria que gozam estas soluções, à medida que impomos determinadas condições sobre as funções f e g .

O exemplo que motivou inicialmente este trabalho foi $\ddot{u} + u = \mu u + u^3 + \mu \cos 2t$, onde o termo forçante $f(t) = \cos 2t$ goza da simetria $f(t + \frac{\pi}{2}) = -f(t)$. Um outro exemplo interessante que apareceu depois foi o caso $f(t) = 1 + \cos 2t$ que não tem a simetria acima e que leva a resultados diferentes.

Hale e Rodrigues [3] estudaram a equação de Duffing $\ddot{u} + u = \mu u - u^3 + \mu \cos t$ e mostraram que para $\mu \neq 0$ essa equação somente admite soluções 2π - periódicas, pequenas, que são funções pares de t , e Rodrigues [11] estendeu este resultado para equações do tipo $\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$, onde f e g são de classe C^∞ , f é 2π - periódica e par, $\int_0^{2\pi} f(s) \cos s \, ds \neq 0$, p é um parâmetro n -dimensional e g é tal que $g(u, p) = O(|u|)$ e $g(u, 0) = O(|u|^2)$. Basicamente foram estes os trabalhos que nos motivaram. Observamos que os casos $f(t) = \cos 2t$ e $f(t) = 1 + \cos 2t$ não estão incluídos nestes dois últimos trabalhos.

Podemos apontar ainda Rodrigues e Vanderbauwhede [12], que generalizaram o resultado obtido por Hale e Rodrigues [3], para uma classe maior de equações não lineares tendo certas propriedades de simetria. Eles consideraram equações em espaços de Banach, da forma $Lx = N(x) + \mu f$ onde L é um operador linear não inversível, $N(x)$ é um operador não linear satisfazendo algumas condições de pequenez e μ é um pequeno parâmetro.

O trabalho de Bancroft [2] também está relacionado com os trabalhos acima. Ele discute o problema de determinar uma solução T - periódica $x^*(\cdot, \lambda)$ da equação diferencial $\dot{x} = A(t)x + f(t, x, \lambda) + b(t)$, onde λ é um vetor de $\mathbb{R}^k$, e usa certos métodos de perturbação para analisar a dependência de $x^*(\cdot, \lambda)$ em λ no caso particular em que $\lambda = \varepsilon \lambda_0$ e λ_0 é um vetor fixado em $\mathbb{R}^k$. O exemplo dado é a equação de Duffing não amortecida $\frac{d^2 u}{d\tau^2} + u + \beta u^3 = \mu \cos \omega \tau$ onde $\omega^2 = 1 + \varepsilon$, $\beta, \mu, \varepsilon \ll 1$. Ele faz a mudança de variáveis $t = \omega \tau$ e obtém a equação $\ddot{u} + u = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u - \frac{\beta}{1+\varepsilon} u^3 + \frac{\mu}{1+\varepsilon} \cos t$. No nosso caso, podemos considerar equações do tipo $\ddot{v} + \omega_0^2 (v + h(v)) = \mu f(\omega t)$, com $h(v) = O(|v|^2)$ e f par e 2π - periódica, que podem ser reduzidas a $\ddot{u} + u = pu + g(u, p) + \mu f(t)$.

A técnica que utilizamos é o Método Alternativo ou Método de Liapunov-Schmidt, que reduz o estudo de (1) ao estudo de uma equação, chamada equação de bifurcação. A análise desta é feita por meio do Teorema das Funções Implícitas.

Um procedimento que poderia ser usado seria procurar soluções com um certo tipo de simetria. Isto é muito adotado e traz muitas simplificações técnicas. Em $\ddot{u} + u = pu + u^3 + \mu \cos t$, por exemplo, poderíamos procurar soluções pares em t (ou equivalentemente, $x(0) = 0$), como é feito, por exemplo, em Stoker [14]. Este

procedimento também é usado em Schmidt & Mazzanti [13], para um problema diferente. No entanto, Hale e Rodrigues [3] mostraram que as únicas soluções 2π - periódicas, pequenas, para $\mu \neq 0$, são funções pares de t , o que é mais informativo.

A principal contribuição deste trabalho é mostrar que toda solução 2π - periódica pequena necessariamente deve ter um certo tipo de simetria. Por exemplo, em $\ddot{u} + u = \mu u + u^3 + \mu \cos 2t$, as únicas soluções pequenas, $u(t)$, de período 2π são tais que ou $u(t - \phi)$ é par ou é ímpar em t , conforme $\cos 2(t - \phi)$ o seja, onde $\phi \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{4}\right\}$.

As equações consideradas aqui podem ser encontradas, associadas a vários modelos da Física, como pode ser visto em Stoker [14], Andronov [1] e Minorsky [9].

Este trabalho é constituído de dois capítulos.

No Capítulo 1 apresentamos uma breve descrição do Método Alternativo.

O Capítulo 2 está dividido em quatro parágrafos. No primeiro parágrafo analisamos o caso em que f é contínua, par e π - periódica, e mostramos que, se $\mu \neq 0$, e se dermos uma condição, as únicas soluções $u(t)$ de (1), pequenas e de período 2π , são tais que ou $u(t)$ é par ou $u(t - \frac{\pi}{2})$ é par (em t). O parágrafo seguinte exemplifica este caso, fazendo $g(u, p) = \mu u + u^3$ e $f(t) = 1 + \cos 2t$. Temos $u(t - \phi)$ par em t e $f(t - \phi)$ par em t para $\phi = 0$ ou $\phi = \frac{\pi}{2}$.

No terceiro parágrafo supomos f contínua, par, π - periódica e harmônica - ímpar (isto é, $f(t + \frac{\pi}{2}) = -f(t)$, ou equivalentemente, a série de Fourier de f só tem possivelmente os harmônicos - ímpares). Demonstramos aí que, se $\mu \neq 0$, e se dermos uma condição, as únicas soluções de período 2π , pequenas, $u(t)$, são

tais que $u(t - \phi)$ é par ou é ímpar em t , conforme $f(t - \phi)$ o seja, onde $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$. O parágrafo de número quatro contém uma aplicação para o caso $f(t) = \cos 2t$ e $g(u,p) = pu + u^3$.

Os resultados centrais obtidos são os Teoremas 2.1 e 2.4, que podem ser encontrados nos parágrafos 1 e 3 do Capítulo 2, respectivamente.

Em muitas aplicações do Método Alternativo utilizam-se poucas informações sobre a solução da equação auxiliar. No problema tratado neste trabalho é necessário empregar muitas propriedades desta solução.

Outros trabalhos que estudam o efeito de simetrias são Vanderbauwhede [15] e [16].

CAPÍTULO 1

O MÉTODO ALTERNATIVO

Sejam X e Z espaços de Banach.

Se $B : X \rightarrow Z$ é uma transformação de X em Z , denotaremos a imagem, o domínio e o núcleo de B por $R(B)$, $\mathcal{D}(B)$ e $N(B)$, respectivamente.

Seja $P : X \rightarrow X$ uma projeção, isto é, um operador linear contínuo tal que $P^2 = P$. O símbolo X_P denotará a imagem $R(P)$ de P .

A transformação identidade será indicada por I .

É nosso interesse estudar a equação

$$Ax = N(x, \lambda, \phi) \quad (1.1)$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Z$ é um operador linear e $N : X \times \mathbb{R}^n \times J \rightarrow Z$, J intervalo da reta, um operador não necessariamente linear tal que $N(x, \lambda, \phi) = O(|x|^2 + |\lambda|)$.

Vamos supor satisfeita a hipótese a seguir:

(H) Existem projeções $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$ tais que $X_P = N(A)$ e $Z_{I-Q} = R(A)$.

Temos que a equação (1.1) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (I-Q) [Ax - N(x, \lambda, \phi)] = 0 \\ Q [Ax - N(x, \lambda, \phi)] = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Pela hipótese (H) temos, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, que $(I-Q)Ax = Ax$ e, conseqüentemente, $QAx = 0$.

Segue que o sistema (1.2) é equivalente a

$$\begin{cases} Ax = (I-Q) N(x, \lambda, \phi) \\ QN(x, \lambda, \phi) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

A hipótese (H) ainda nos garante que $\tilde{A} = A|_{\mathcal{D}(A) \cap X_{I-P}}$

é um isomorfismo algébrico entre $\mathcal{D}(A) \cap X_{I-P}$ e $R(A)$.

Logo, existe um operador linear $K = \tilde{A}^{-1}$ definido em $R(A)$ tal que

$$\begin{aligned} AK &= I \quad \text{em } R(A) \\ KA &= I - P \quad \text{em } \mathcal{D}(A) \end{aligned}$$

As relações acima garantem que o sistema (1.3) é equivalente a

$$\begin{cases} (a) & x - Px = K(I-Q) N(x, \lambda, \phi) \\ (b) & Q N(x, \lambda, \phi) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Fazendo $y = x - a$, com $a = Px$, segue

$$\begin{cases} (a) & y = K(I-Q) N(a+y, \lambda, \phi) \\ (b) & Q N(a+y, \lambda, \phi) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Provamos assim o seguinte teorema:

TEOREMA 1.1.: *Suponhamos satisfeita a hipótese (H). Então existe um operador linear $K : R(A) \rightarrow X$ tal que $AK = I$ em $R(A)$, $KA = I - P$ em $\mathcal{D}(A)$ e a equação (1.1) é equivalente ao sistema (1.5).*

OBSERVAÇÕES:

(i) As equações (a) e (b) de (1.5) são ditas, respecti

vamente, equação auxiliar e equação de bifurcação. A equação (1.1) foi portanto transformada num sistema de equações.

(ii) Se $\mathcal{D}(A)$ for um subespaço fechado de X e se A for um operador linear contínuo, então $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \cap X_{I-P}$ é fechado e $\tilde{A}$ é contínuo. Segue que K é contínuo. Este fato decorre do Teorema da Aplicação Aberta [7, pág. 245] .

(iii) Se N for de classe C^1 em alguma vizinhança da origem, com $N(0, 0, \phi) = 0$ e $\frac{\partial N}{\partial x}(0, 0, \phi) = 0$, então a função

$$g : X_{I-P} \times N(A) \times \mathbb{R}^n \times J \rightarrow X_{I-P}$$

$$g(y, a, \lambda, \phi) = y - K(I-Q) N(a+y, \lambda, \phi)$$

tem as seguintes propriedades:

$$g(0, 0, 0, \phi) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0, 0, \phi) = I, \text{ identidade de } X_{I-P}$$

Segue, pelo Teorema das Funções Implícitas, que a equação $g(y, a, \lambda, \phi) = 0$ pode ser resolvida numa vizinhança de $(y, a, \lambda, \phi) = (0, 0, 0, \phi)$ fornecendo uma única solução $y^* = y^*(a, \lambda, \phi)$.

Logo, o problema de encontrar soluções para a equação (1.1) fica reduzido ao de encontrar soluções (a, λ, ϕ) para a equação (1.5(b)), com y substituído por $y^*(a, \lambda, \phi)$, ou seja, o problema é encontrar as soluções da equação

$$Q N(a + y^*(a, \lambda, \phi), \lambda, \phi) = 0 \quad (1.6)$$

A existência de uma solução (a, λ, ϕ) para a equação

(1.6) é equivalente a existência de uma solução de (1.1). É por isso que se diz que a equação (1.6) constitui um problema alternativo para a equação (1.1).

CAPÍTULO 2

ANÁLISE DA EQUAÇÃO

Consideremos a equação

$$\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t) \quad (2.1)$$

onde g é de classe C^∞ , $g(u, p) = O(|u|)$ e $g(u, 0) = O(|u|^3)$ numa vizinhança da origem, f é uma função 2π - periódica contínua e par e p, μ são pequenos parâmetros. Na verdade, bastaria supor g de classe suficientemente alta, como será comentado posteriormente.

Nosso objetivo é discutir a variação do número de soluções de período 2π da equação (2.1) e o tipo de simetria que gozam estas soluções à medida que impomos determinadas condições sobre g e f e p, μ variam numa vizinhança da origem.

Quando $\mu = 0$ a equação é autônoma e estuda-se as soluções de período 2π usando técnicas próprias de sistemas autônomos. Ver, por exemplo, Hale [5, pág. 178].

Seja $u(t)$ uma solução 2π - periódica de (2.1). Logo, $u(t) = r \cos(t - \phi) + x(t)$ para alguma constante r , $-\frac{\pi}{2} < \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e $x(t)$ uma função tal que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \cos s \, ds + \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \sin s \, ds = 0 \quad (2.2)$$

Se $\tau = t - \phi$, $w(\tau) \stackrel{\text{def.}}{=} u(\tau + \phi)$ e $v(\tau) \stackrel{\text{def.}}{=} x(\tau + \phi)$ então $u(t)$ é solução de (2.1) se, e somente se, $w(\tau) = r \cos \tau + v(\tau)$, com $v(\tau)$ satisfazendo a condição (2.2), é solução de

$$\ddot{w} + w = g(w, p) + \mu f(\cdot + \phi) \quad (2.3)$$

Sejam P e $P^{(2)}$ os espaços de Banach definidos por

$$P = \{w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; w \text{ contínua e } 2\pi - \text{periódica}\}$$

$$\text{munido da norma } \|w\|_0 = \sup_{0 \leq t \leq 2\pi} |w(t)| \quad e$$

$$P^{(2)} = \{w \in P; w \text{ é de classe } C^2\}$$

$$\text{com a norma } \|w\|_2 = \sup \{|w^{(j)}(t)|, 0 \leq t \leq 2\pi, j = 0, 1, 2\}$$

Indiquemos por Λ uma vizinhança aberta da origem de $\mathbb{R}^2$ e tomemos os operadores $A : P^{(2)} \rightarrow P$ e $N : P \times \Lambda \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow P$ definidos por

$$Aw = \ddot{w} + w$$

$$N(w, (p, \mu), \phi) = g(w, p) + \mu f(\cdot + \phi)$$

Definimos em $P^{(2)}$ e em P a projeção

$$(Pw)(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} w(s) \cos s \, ds + \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} w(s) \sin s \, ds \quad (2.4)$$

Pelo Teorema 1.1, existe um operador linear $K : R(A) \rightarrow P^{(2)}$ tal que (2.3) é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (a) & v = K(I-P) [g(r \cos(\cdot) + v, p) + \mu f(\cdot + \phi)] \\ (b) & P [g(r \cos(\cdot) + v, p) + \mu f(\cdot + \phi)] = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

O operador K definido por

$$(Ku)(t) \stackrel{\text{def.}}{=} (I-P) \left[-\cos(\cdot) \int_0^{(\cdot)} u(s) \sin s \, ds + \sin(\cdot) \int_0^{(\cdot)} u(s) \cos s \, ds \right](t) \quad (2.6)$$

satisfaz as afirmações do Teorema 1.1.

Segue do Teorema das Funções Implícitas que, se p e μ são pequenos, existe uma única solução pequena de (2.5(a)) em $p^{(2)}$. Para verificar isto basta tomar

$$M(r, \phi, p, \mu, v) \stackrel{\text{def.}}{=} v - K(I-P) [g(r \cos(.)) + v, p) + \mu f(. + \phi)]$$

e notar que

$$M(0, \phi, 0, 0, 0) \equiv 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial v}(0, \phi, 0, 0, 0) \equiv I$$

onde I é a identidade de $(I-P) p^{(2)}$.

Denotemos essa solução por $v^*(\tau) = v^*(r, \phi, p, \mu)(\tau)$.

Substituindo v^* na equação (2.5(b)) obteremos

$$P[g(r \cos(.)) + v^*, p) + \mu f(. + \phi)] = 0$$

Usando a definição de P segue que

$$(b.1) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r \cos s + v^*(s), p) + \mu f(s + \phi)] \cos s \, ds = 0 \quad (2.7)$$

$$(b.2) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |g(r \cos s + v^*(s), p) + \mu f(s + \phi)| \sin s \, ds = 0$$

Façamos

$$(b.1) \quad F(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r \cos s + v^*(s), p) + \mu f(s + \phi)] \cos s \, ds = 0 \quad (2.8)$$

$$(b.2) \quad G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r \cos s + v^*(s), p) + f(s + \phi)] \sin s \, ds = 0$$

2.1. CASO EM QUE O TERMO FORÇANTE É π - PERIÓDICO

Consideremos a equação (2.1),

$$\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$$

Rodrigues [12] demonstrou que se $\mu \neq 0$, g e f são de classe C^∞ , $g(u, p) = O(|u|)$ e $g(u, 0) = O(|u|^2)$, numa vizinhança da origem e f é uma função par 2π - periódica satisfazendo $\int_0^{2\pi} f(s) \cos s \, ds \neq 0$, então as únicas soluções $u(t)$, pequenas e 2π - periódicas de (2.1) são pares em t .

Analisaremos um caso não incluído no acima, em que $\mu \neq 0$, g é de classe C^∞ , ímpar em u e f é contínua, par e π - periódica.

Como um exemplo podemos pensar na equação

$$\ddot{u} + u = \mu u + u^3 + \mu(1 + \cos 2t)$$

Através do estudo da segunda equação de bifurcação concluiremos que, dentro de certas condições, as únicas soluções $u(t)$ pequenas, de período 2π da equação (2.1), caso existam, são tais que ou $u(t)$ é par ou $u(t - \frac{\pi}{2})$ é par, e estudaremos então a primeira equação de bifurcação.

Vamos então proceder a análise da segunda equação de bifurcação no caso acima,

$$G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds = 0 \quad (2.9)$$

Com esse objetivo, enunciaremos e demonstraremos os seguintes lemas:

LEMA 1: Suponhamos que f e g satisfazem as hipóteses mencionadas anteriormente. A solução da equação auxiliar

$$v = K(I-P) [g(r \cos(.)) + v, p) + \mu f(. + \phi)]$$

denotada por $v^*(t) = v^*(r, \phi, p, \mu)(t)$, satisfaz as seguintes condições:

$$(i) \quad v^*(r, \phi, p, \mu)(t) = v^*(-r, \phi, p, \mu)(t - \pi) \quad (2.10)$$

$$(ii) \quad v^*(r, \phi, p, \mu)(t) = v^*(r, \phi, p, -\mu)(t - \pi) \quad (2.11)$$

$$(iii) \quad v^*(0, \phi, p, \mu)(t + \pi) = v^*(0, \phi, p, \mu)(t) \quad (2.12)$$

$$(iv) \quad v^*(0, \phi, p, \mu)(t - \phi) \text{ independe de } \phi \text{ e } \bar{e} \text{ par em } t \quad (2.13)$$

$$(v) \quad v^*(r, 0, p, \mu)(-t) = v^*(r, 0, p, \mu)(t) \quad (2.14)$$

$$(vi) \quad v^*(r, \phi, p, 0)(-t) = v^*(r, \phi, p, 0)(t) \quad (2.15)$$

DEMONSTRAÇÃO: Provemos que (i) está satisfeita.

Sejam $y(r, t) = v^*(r, \phi, p, \mu)(t)$ e $z(r, t) = y(-r, t - \pi)$.

Então $y(r, t)$ satisfaz:

$$\ddot{y}(r, t) + y(r, t) = (I-P) [g(r \cos(.)) + y(r, .), p) + \mu f(. + \phi)](t)$$

Assim,

$$\ddot{y}(-r, t - \pi) + y(-r, t - \pi) = (I-P) [g(-r \cos(.)) + y(-r, .), p) + \mu f(. + \phi)](t - \pi)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \ddot{z}(r, t) + z(r, t) &= g(r \cos t + z(r, t), p) + \mu f(t + \phi) + \\ &+ \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(-r \cos s + y(-r, s), p) + \mu f(s + \phi)] \cos s \, ds + \\ &+ \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(-r \cos s + y(-r, s), p) + \mu f(s + \phi)] \sin s \, ds \end{aligned}$$

Fazendo $s = \tau - \pi$ temos

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} [g(-r \cos s + y(-r, s), p) + \mu f(s + \phi)] \cos s \, ds = \\ &= - \int_0^{2\pi} [g(r \cos \tau + z(r, \tau), p) + \mu f(\tau + \phi)] \cos \tau \, d\tau \\ &\int_0^{2\pi} [g(-r \cos s + y(-r, s), p) + \mu f(s + \phi)] \sin s \, ds = \\ &= - \int_0^{2\pi} [g(r \cos \tau + z(r, \tau), p) + \mu f(\tau + \phi)] \sin \tau \, d\tau \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ddot{z}(r, t) + z(r, t) &= g(r \cos t + z(r, t), p) + \mu f(t + \phi) - \\ &- \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r \cos \tau + z(r, \tau), p) + \mu f(\tau + \phi)] \cos \tau \, d\tau - \\ &- \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} [g(r \cos \tau + z(r, \tau), p) + \mu f(\tau + \phi)] \sin \tau \, d\tau \end{aligned}$$

Temos então

$$\ddot{z}(r, \cdot) + z(r, \cdot) = (I-P) [g(r \cos(\cdot) + z(r, \cdot), p) + \mu f(\cdot + \phi)]$$

e daí,

$$z(r, \cdot) = K(I-P) [g(r \cos(\cdot) + z(r, \cdot), p) + \mu f(\cdot + \phi)]$$

Logo, y e z são soluções de (2.5(a)). Como a solução é única devemos ter $y = z$, o que implica $y(r, t) = y(-r, t - \pi)$.

Consequentemente,

$$v^*(r, \phi, p, \mu)(t) = v^*(-r, \phi, p, \mu)(t - \pi)$$

como queríamos.

As demonstrações de (ii), (iii), (v) e (vi) são análogas à demonstração de (i) e dependem fortemente do fato de a equação

$$\ddot{v} + v = (I-P) [g(r \cos(\cdot) + v, p) + \mu f(\cdot + \phi)]$$

não se alterar quando fazemos certas transformações.

Para provar (iv), basta observar que $v^*(0, \phi, p, \mu)(t - \phi)$ é solução da equação

$$v = K(I-P) [g(v, p) + \mu f(.)]$$

que independe de ϕ e não se altera quando fazemos a transformação $t \rightarrow -t$ □

LEMA 2: Com as hipóteses sobre g e f anteriormente mencionadas, a função G dada em (2.9),

$$G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds$$

satisfaz as seguintes propriedades:

$$G \text{ é ímpar em } r \tag{2.16}$$

$$G \text{ é par em } \mu, \quad G(r, \phi, p, 0) \equiv 0 \tag{2.17}$$

$$G(r, \phi, p, \mu) = \mu^2 r \sin 2\phi \, H(r, \phi, p, \mu) \tag{2.18}$$

DEMONSTRAÇÃO: A propriedade (2.16) segue da condição (i) do Lema 1.

Para provar (2.17) usamos itens (ii) e (vi) do Lema 1 e o fato de g ser ímpar em u .

Façamos $G(\phi) = G(r, \phi, p, \mu)$ para demonstrar (2.18).

Se $\phi = 0$ ou $\phi = \frac{\pi}{2}$, a equação (2.5(a)) tem uma única solução em $P^{(2)}$, a saber, $v^*(r, 0, p, \mu)(t)$ ou $v^*(r, \frac{\pi}{2}, p, \mu)(t)$, res

pectivamente. Seguindo o mesmo procedimento do Lema 1, demonstra-se que estas soluções são pares em t .

Decorre do fato de v^* ser par para $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, respectivamente, que

$$G(r, 0, p, \mu) \equiv 0 \quad (2.19)$$

$$G(r, \frac{\pi}{2}, p, \mu) \equiv 0 \quad (2.20)$$

Segue por (2.16), (2.17), (2.19) e (2.20) que

$$G(r, \phi, p, \mu) = r \mu^2 \sin 2\phi H(r, \phi, p, \mu) \quad \text{com} \quad \square$$

$H(r, \phi, p, \mu)$ diferenciável.

Suponhamos agora que

$$g(u, p) = pu + \alpha u^3 + O(|p||u^3| + |u^5|) \quad (2.21)$$

onde α é um número real não nulo.

Substituindo esta expressão em (2.9) obtemos

$$G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \left\{ p \int_0^{2\pi} (r \cos s + v^*(s)) \sin s \, ds + \right. \\ \left. + \alpha \int_0^{2\pi} (r \cos s + v^*(s))^3 \sin s \, ds + \int_0^{2\pi} O(|p||u^3| + |u^5|) \sin s \, ds \right\} = 0$$

onde $u = r \cos(.) + v$

Utilizando (2.21) temos por (2.5(a))

que

$$v^* = O(|r^3| + |p|). \quad \text{Logo,}$$

$$\begin{aligned}
G(r, \phi, p, \mu) = & \frac{1}{\pi} \left\{ 3\alpha r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s v^*(s) \sin s \, ds + \right. \\
& + 3\alpha r \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^2 \sin s \, ds + \alpha \int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 \sin s \, ds + \\
& + O(|pr^3| + |pr^2 \mu| + |pr \mu^2| + |p \mu^3| + |r^5| + |r^4 \mu| + \\
& \left. + |r^3 \mu^2| + |r^2 \mu^3| + |r \mu^4| + |\mu^5| \right\} = 0
\end{aligned}$$

Fazendo $r = 0$, $\mu = 0$, $p = 0$ e observando que $v^*(0, \phi, 0, 0) \equiv 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 G}{\partial \mu^2 \partial r} (0, \phi, 0, 0) = & \frac{1}{\pi} \left\{ 6\alpha \int_0^{2\pi} \cos s \left[\frac{\partial v^*}{\partial \mu} (0, \phi, 0, 0)(s) \right]^2 \sin s \, ds + \right. \\
& \left. + 6\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial v^*}{\partial r} (0, \phi, 0, 0)(s) \left[\frac{\partial v^*}{\partial \mu} (0, \phi, 0, 0)(s) \right]^2 \sin s \, ds \right\}
\end{aligned}$$

Prova-se que $\frac{\partial v^*}{\partial r} (0, \phi, 0, 0) \equiv 0$

Logo,

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \mu^2 \partial r} (0, \phi, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \left\{ 6\alpha \int_0^{2\pi} \cos s \left[\frac{\partial v^*}{\partial \mu} (0, \phi, 0, 0)(s) \right]^2 \sin s \, ds \right\}$$

Como $\frac{\partial v^*}{\partial \mu} (0, \phi, 0, 0) \equiv Kf(. + \phi)$, segue que

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \mu^2 \partial r} (0, \phi, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \left\{ 6\alpha \int_0^{2\pi} \cos s [Kf(. + \phi)(s)]^2 \sin s \, ds \right\}$$

Mas, fazendo $s = \tau - \phi$,

$$\int_0^{2\pi} \cos s [Kf(. + \phi)(s)]^2 \sin s \, ds = \frac{\cos 2\phi}{2} \int_0^{2\pi} \sin 2\tau \left\{ [Kf(. + \phi)](\tau - \phi) \right\}^2 d\tau -$$

$$- \frac{\sin 2\phi}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\tau \left\{ [Kf(. + \phi)](\tau - \phi) \right\}^2 d\tau$$

Temos $[Kf(. + \phi)](\tau - \phi) = [Kf](\tau)$ e Kf é par, pois f o é.

Portanto,

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \mu^2 \partial r}(0, \phi, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \left\{ -3\alpha \sin 2\phi \int_0^{2\pi} \cos 2\tau [Kf(\tau)]^2 d\tau \right\}$$

Seja

$$\rho = -\frac{1}{2\pi} \left\{ 3\alpha \int_0^{2\pi} \cos 2\tau [Kf(\tau)]^2 d\tau \right\}$$

Se $\rho \neq 0$ temos, pelo Lema 2, que

$$G(r, \phi, p, \mu) = r \mu^2 \sin 2\phi [\rho + t.o.s.] \quad (2.22)$$

O caso $r = 0$ nos dá solução π -periódica.

Se $\mu = 0$ temos o caso autônomo.

Analisemos então $\sin 2\phi [\rho + t.o.s.] = 0$.

Segue que $\phi = 0$ ou $\phi = \frac{\pi}{2}$, pois $-\frac{\pi}{2} < \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Uma consequência do que foi provado acima é que se existir solução 2π -periódica pequena de (2.1), esta solução pode não ser par em t .

Recordemos que

$$u(t) = r \cos(t - \phi) + v^*(r, \phi, p, \mu)(t - \phi)$$

Se $\phi = 0$ obtemos $v^*(r, 0, p, \mu)(t)$ par em t e, con-
sequentemente, $u(t)$ é par em t .

Se $\phi = \frac{\pi}{2}$ temos

$$u(s - \frac{\pi}{2}) = -r \cos s + v^*(-r, \frac{\pi}{2}, p, \mu)(s)$$

e $u(s - \frac{\pi}{2})$ é par em s pois $v^*(-r, \frac{\pi}{2}, p, \mu)(s)$ é par em s .

Provamos assim o seguinte teorema.

TEOREMA 2.1: Se f é contínua, par e π -periódica, g é de clas-

se C^∞ e ímpar em u , $\frac{\partial^3 g}{\partial u^3}(0, 0) \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\tau [(Kf)(\tau)]^2 d\tau \neq 0, \text{ onde } Kf \text{ é a única solução}$$

π -periódica de $\ddot{u} + u = f(t)$, então as únicas soluções
pequenas $u(t)$, de período 2π , da equação $\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$,
caso existam, são tais que ou $u(t)$ é par ou $u(t - \frac{\pi}{2})$ é par, para
 $\mu \neq 0$ e p, μ suficientemente pequenos.

A fim de verificar a existência de solução precisamos anali-
sar a primeira equação de bifurcação. Usaremos os valores de ϕ de-
terminados, a saber, $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, para efetuar a análise.

Como f é π -periódica, (2.8(b.1)) é equivalente a

$$F(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + v^*(s), p) \cos s ds \quad (2.23)$$

Temos por (2.21) que

$$g(u, p) = pu + \alpha u^3 + O(|p||u^3| + |u^5|)$$

Logo, podemos escrever

$$g(u, p) = pu + \alpha u^3 + pu^3 h(u, p) + u^5 \bar{h}(u, p) \quad (2.24)$$

com $h, \bar{h}$ limitadas.

Substituindo em (2.23) obtemos

$$\begin{aligned} F(r, \phi, p, \mu) = & pr + \frac{3}{4} \alpha r^3 + \frac{1}{\pi} \left\{ 3\alpha r^2 \int_0^{2\pi} \cos^3 s v^*(s) ds + \right. \\ & + 3\alpha r \int_0^{2\pi} \cos^2 s (v^*(s))^2 ds + \alpha \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^3 ds + \\ & + p \int_0^{2\pi} (r \cos s + v^*(s))^3 h(r \cos s + v^*(s), p) \cos s ds + \\ & + \int_0^{2\pi} (r \cos s + v^*(s))^5 \bar{h}(r \cos s + v^*(s), p) \cos s ds \end{aligned}$$

Daremos mais algumas informações sobre v^* , a fim de estimar as integrais acima.

LEMA 3: Com as hipóteses acima mencionadas sobre f e g , temos que $v^* = v^*(r, \phi, p, \mu)$, solução da equação auxiliar

$$v = K(I-P) [g(r \cos(\cdot) + v, p) + \mu f(\cdot + \phi)]$$

pode ser escrita na forma

$$v^*(r, \phi, p, \mu) = v^*(0, \phi, p, \mu) + r S(r, \phi, p, \mu) \quad (2.25)$$

onde $v^*(0, \phi, p, \mu) = \mu Kf(\cdot + \phi) + O(|p\mu| + |\mu^3|)$ é π -periódica e $S(r, \phi, p, \mu) = O(|r|^2 + |\mu|)$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja

$$S(r, \phi, p, \mu) \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} \frac{v^*(r, \phi, p, \mu) - v^*(0, \phi, p, \mu)}{r}, & r \neq 0 \\ \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu), & r = 0 \end{cases}$$

Desenvolvendo S em torno de $\mu = 0$ obtemos

$$S(r, \phi, p, \mu) = S(r, \phi, p, 0) + O(|\mu|)$$

Usando a definição de S , e como já vimos que

$$v^* = O(|r^3| + |\mu|), \text{ temos } S(r, \phi, p, 0) = O(|r|^2)$$

Logo,

$$S(r, \phi, p, \mu) = O(|r|^2 + |\mu|)$$

Temos, pela condição (iii) do Lema 1, que $v^*(0, \phi, p, \mu)(t)$ é π - periódica. Computemos $v^*(0, \phi, p, \mu)$ que deverá ser solução de

$$v = \mu Kf(. + \phi) + K(I-P) [pv + \alpha v^3 + pv^3 h(v, p) + v^5 \bar{h}(v, p)]$$

Impondo que $v^*(0, \phi, p, \mu)$ é solução desta equação, segue pelo Teorema das Funções Implícitas que

$$v^*(0, \phi, p, 0) \equiv 0$$

$$\frac{\partial v^*(0, \phi, 0, 0)}{\partial \mu} \equiv Kf(. + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 v^*(0, \phi, 0, 0)}{\partial \mu^2} \equiv 0$$

$$\frac{\partial v^*(0, \phi, 0, 0)}{\partial p} \equiv 0$$

Portanto, usando a equação acima e observando que $v^*(0, \phi, p, \mu) = O(|\mu|)$, obtemos

$$v^*(0, \phi, p, \mu) = \mu Kf(. + \phi) + O(|p\mu| + |\mu^3|) \quad \square$$

Usaremos esta expressão encontrada para v^* para estimar as integrais de $F(r, \phi, p, \mu)$.

Observamos que $\int_0^{2\pi} \cos^2 s (v^*(s))^2 ds$ desempenha um papel importante na expressão de F pois, como mostraremos, contém um termo em μ^2 .

Das propriedades de v^* segue que

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 s \, v^*(s) \, ds = r \, O(|r|^2 + |\mu|)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 s \, (v^*(s))^2 \, ds = \mu^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s \, (Kf(\cdot + \phi)(s))^2 \, ds +$$

$$+ O(|p\mu|^2 + |\mu|^4 + |r\mu| (|r|^2 + |\mu|) + |r|^2 (|r|^2 + |\mu|)^2)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos s \, (v^*(s))^3 \, ds = r \, O(|\mu|^2 (|r|^2 + |\mu|) +$$

$$+ |r\mu| (|r|^2 + |\mu|)^2 + |r|^2 (|r|^2 + |\mu|)^3)$$

Desenvolvendo h e $\bar{h}$ em torno de $r = 0$ segue que

$$h(r \cos(\cdot) + v^*, p) = h_1 + T_1(r)$$

$$\bar{h}(r \cos(\cdot) + v^*, p) = h_2 + T_2(r)$$

onde $h_1 = h(v_1, p)$ e $h_2 = h(v_1, p)$, $v_1 = v^*(0, \phi, p, \mu)$, são

π - periódicas, independem de r e $T_1(r) = O(|r|)$, $T_2(r) = O(|r|)$.

Decorre destas duas últimas afirmações e do Lema 3 que

$$\int_0^{2\pi} (r \cos s + v^*(s))^3 h(r \cos s + v^*(s), p) \cos s \, ds =$$

$$= r O(|r|^2 + |rv| + |v|^2)$$

$$\int_0^{2\pi} (r \cos s + v^*(s))^5 \bar{h}(r \cos s + v^*(s), p) \cos s \, ds =$$

$$= r O(|r|^4 + |r^3 v| + |r^2 v^2| + |rv^3| + |v|^4)$$

$$\text{Seja } \lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 s [Kf(\cdot + \phi)(s)]^2 \, ds$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} F(r, \phi, p, \mu) &= r \left[p + \frac{3}{4} \alpha r^2 + 3\alpha \lambda \mu^2 + \right. \\ &\left. + O(|r|^4 + |r^2 \mu| + |r \mu^2| + |\mu^3| + |pr^2| + |pr \mu| + |p \mu^2|) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{def.} \\ &= r J(r, \phi, p, \mu) \end{aligned}$$

Temos que $r = 0$ é solução de

$$F(r, \phi, p, \mu) \equiv 0$$

Para obter os pontos onde a equação $J(r, \phi, p, \mu) \equiv 0$ tem raízes múltiplas devemos resolver o sistema

$$J(r, \phi, p, \mu) = p + \frac{3}{4} \alpha r^2 + 3\alpha \lambda \mu^2 + \text{t.o.s.} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial r}(r, \phi, p, \mu) = \frac{3}{2} \alpha r + \text{t.o.s.} = 0$$

onde t.o.s. indica termos de ordem superior.

Mas, em $(r, \phi, p, \mu) = (0, \phi, 0, 0)$ com $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, temos

$$\frac{\partial(J, \frac{\partial J}{\partial r})}{\partial(p, r)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

Segue pelo Teorema das Funções Implícitas que p e r podem ser obtidos como função de μ , numa vizinhança da origem, para $\phi = 0$ e para $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Temos, pela condição (ii) do Lema 1, que F é par em μ . Este fato implica que p e r são funções pares em μ .

$$\text{Obtemos } p = -3\alpha \lambda \mu^2 + O(\mu^4)$$

Mas,

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(\tau)]^2 d\tau + \frac{\cos 2\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\tau [(Kf)(\tau)]^2 d\tau$$

e assim, fazendo $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$ obtemos, respectivamente,

$$\lambda_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(\tau)]^2 d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\tau [(Kf)(\tau)]^2 d\tau$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(\tau)]^2 d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\tau [(Kf)(\tau)]^2 d\tau$$

Supondo, como foi feito no Teorema 2.1, que

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\tau [(Kf)(\tau)]^2 d\tau \neq 0 \quad \text{concluimos que } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Observemos que se $f \neq 0$ então $Kf \neq 0$ e obtemos λ_1 e λ_2 diferentes de zero.

Temos então duas curvas de bifurcação, Γ_1 e Γ_2 , para $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, respectivamente, dadas por

$$\Gamma_1 : \{p = -3\alpha \lambda_1 \mu^2 + O(\mu^4)\}$$

$$\Gamma_2 : \{p = -3\alpha \lambda_2 \mu^2 + O(\mu^4)\}$$

A Figura 1 mostra o traço da curva Γ_1 .

Analisaremos agora a variação do número de soluções da equação $J(r, 0, p, \mu) \equiv 0$.

Mais precisamente, mostraremos a seguir que quando se cruza a curva no sentido indicado

na Figura 1 o número de soluções da equação passa de dois para zero.

A curva Γ_1 divide uma vizinhança da origem em duas re

Figura 1

giões A_1 e A_2 .

Consideremos o ponto $P_0 = (\mu_0, p_0)$ sobre a curva Γ_1 e $r_0 > 0$ tal que $J(r_0, 0, p_0, \mu_0) = 0$.

Como $J(r_0, 0, p_0, \mu_0) = 0$ e $J(r_0, 0, p, \mu_0)$ é crescente em p pois $\frac{\partial J}{\partial p}(0, 0, 0, 0) = 1$, temos

$$p < p_0 \Rightarrow J(r_0, 0, p, \mu_0) < 0$$

$$p = p_0 \Rightarrow J(r_0, 0, p_0, \mu_0) = 0$$

$$p > p_0 \Rightarrow J(r_0, 0, p, \mu_0) > 0$$

Temos também que $\frac{\partial J}{\partial r}(r_0, 0, p_0, \mu_0) = 0$ e

$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(r, 0, p, \mu) > 0$ numa vizinhança da origem.

Logo, quando se cruza a curva Γ_1 no sentido indicado na Figura 1, o gráfico de $J(r, 0, p, \mu)$ varia de acordo com as figuras abaixo.

Figura 2

Figura 3

Figura 4

Portanto, se $(\mu, p) \in A_1$ a equação $J(r, 0, p, \mu) \equiv 0$ tem duas soluções e se $(\mu, p) \in A_2$, nenhuma.

A análise da variação do número de soluções da equação

$J(r, \frac{\pi}{2}, p, \mu) \equiv 0$ é análoga.

A Figura 5 mostra a curva Γ_2 , que divide uma vizinhança da origem em duas regiões A_3 e A_4 .

Figura 5

Na região A_3 temos duas soluções da equação $J(r, \frac{\pi}{2}, p, \mu) \equiv 0$ e em A_4 , nenhuma.

Esboçamos o traço das curvas Γ_1 e Γ_2 , quando λ_1, λ_2 e α são positivos, conforme pode ser visto na Figura 6, abaixo.

Figura 6

Logo, temos três e cinco soluções de período 2π em A_2 e A_1 , respectivamente, e uma única solução, π - periódica, em A_3 .

Procuramos sintetizar os resultados acima no próximo teorema.

TEOREMA 2.2.: Se f é não nula, contínua, par e π - periódica, g é de classe C^∞ , ímpar em u , $\frac{\partial^3 g}{\partial u^3}(0, 0) \neq 0$, e

$\int_0^{2\pi} \cos 2\tau [(Kf)(\tau)]^2 d\tau \neq 0$, então o número de soluções 2π -periódicas pequenas de $\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$ varia de acordo com o descrito abaixo. Existem duas curvas Γ_1 e Γ_2 , no plano (μ, p) , dadas pelas equações

$$\Gamma_1 : p = -3\alpha \lambda_1 \mu^2 + O(\mu^4)$$

$$\Gamma_2 : p = -3\alpha \lambda_2 \mu^2 + O(\mu^4)$$

$$\text{com } \lambda_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(\tau)]^2 d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\tau [(Kf)(\tau)]^2 d\tau$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(Kf)(\tau)]^2 d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2\tau [(Kf)(\tau)]^2 d\tau ,$$

que dividem uma vizinhança da origem em três regiões A_1 , A_2 e A_3 , de acordo com a Figura 6. Se $(\mu, p) \in A_1$ e $\mu \neq 0$, a equação acima tem cinco soluções, se $(\mu, p) \in A_2$ três soluções e se $(\mu, p) \in A_3$, $\mu \neq 0$, uma. Se $(\mu, p) \in \Gamma_1$ ou $(\mu, p) \in \Gamma_2$, $(\mu, p) \neq (0, 0)$, temos quatro ou duas soluções, respectivamente.

OBSERVAÇÕES:

1) A Figura 6 aparece no Exemplo A, como será mostrado a seguir.

2) Na verdade, no enunciado dos Teoremas 2.1 e 2.2, poderíamos supor somente que g é de classe C^6 , pois nos cálculos acima utilizamos essencialmente esta hipótese.

Acreditamos que supondo g de classe C^4 os resultados ainda seriam válidos, mas algumas alterações deveriam ser feitas nas demonstrações. Isto será feito futuramente.

2.2. EXEMPLO A

Considerando $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1 + \cos 2t$ e $g(u, p) = pu + u^3$ estamos nas condições do parágrafo 2.1.

A equação obtida é

$$\ddot{u} + u = pu + u^3 + \mu(1 + \cos 2t) \quad (2.26)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (a) & v = K(I-P) [p(r \cos(.) + v) + (r \cos(.) + v)^3 + \mu(1 + \cos 2(. + \phi))] \\ (b) & P [p(r \cos(.) + v) + (r \cos(.) + v)^3 + \mu(1 + \cos 2(. + \phi))] = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Segue do Teorema das Funções Implícitas que existe uma única solução pequena de (2.27(a)) em $p^{(2)}$.

Seja $v^* = v^*(r, \phi, p, \mu)$ esta solução.

Substituindo v^* em (2.27(b)) e utilizando a definição de P obtemos

$$\begin{aligned} F(r, \phi, p, \mu) = pr + \frac{3}{4} r^3 + \frac{1}{\pi} \left\{ 3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^3 s v^*(s) ds + \right. \\ \left. + 3r \int_0^{2\pi} \cos^2 s (v^*(s))^2 ds + \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^3 ds \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \left\{ 3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s v^*(s) \sin s ds + \right. \\ \left. + 3 r \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^2 \sin s ds + \int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 \sin s ds \right\} = 0 \quad (2.29)$$

Estimamos $v^*(0, \phi, p, \mu)$ que deverá ser solução de

$$v = \mu K[1 + \cos 2(\cdot + \phi)] + K(I-P) [pv + v^3]$$

Segue que

$$v^*(0, \phi, p, \mu) = \mu \left[1 - \frac{1}{3} \cos 2(\cdot + \phi) \right] + O(|p\mu| + |\mu|^3)$$

Temos

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \mu^2 \partial r} (0, \phi, 0, 0) = \frac{1}{\pi} \left\{ -3 \sin 2\phi \int_0^{2\pi} \cos 2\tau [K(1 + \cos 2(\cdot))]^2 (\tau) d\tau \right\}$$

Como $K(1 + \cos 2(\cdot)) = 1 - \frac{1}{3} \cos 2(\cdot)$, obtemos

$$\int_0^{2\pi} \cos 2s [K(1 + \cos 2(\cdot))(s)]^2 ds = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Logo, } \frac{\partial^3 G}{\partial \mu^2 \partial r} (0, \phi, 0, 0) = 2 \sin 2\phi$$

Portanto, $\rho = 1 \neq 0$.

Decorre que a segunda equação de bifurcação é dada por

$$G(r, \phi, p, \mu) = \mu^2 r \sin 2\phi [1 + \text{t.o.s.}]$$

Analisaremos agora a primeira equação de bifurcação,

$$F(r, \phi, p, \mu) = pr + \frac{3}{4} r^3 + \frac{1}{\pi} \left\{ 3 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^3 s v^*(s) ds + \right. \\ \left. + 3r \int_0^{2\pi} \cos^2 s (v^*(s))^2 ds + \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^3 ds \right\} = 0$$

Utilizando a expressão encontrada para $v^*(0, \phi, p, \mu)$, obtemos, para $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 s (v^*(r, 0, p, \mu)(s))^2 ds = \frac{13\pi}{18} \mu^2 + \text{t.o.s.}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 s (v^*(r, \frac{\pi}{2}, p, \mu)(s))^2 ds = \frac{25\pi}{18} \mu^2 + \text{t.o.s.}$$

Consequentemente, $\lambda_1 = \frac{13}{18}$ e $\lambda_2 = \frac{25}{18}$.

Para $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$, respectivamente, encontramos as curvas de bifurcação

$$\Gamma_1 : p = -\frac{13}{6} \mu^2 + O(\mu^4)$$

$$\Gamma_2 : p = -\frac{25}{6} \mu^2 + O(\mu^4)$$

2.3. CASO EM QUE O TERMO FORÇANTE É π - PERIÓDICO E HARMÔNICO ÍMPAR

Suponhamos f contínua, par, π - periódica e tal que $f(t + \frac{\pi}{2}) = -f(t)$.

Como um exemplo podemos pensar na equação

$$\ddot{u} + u = pu + u^3 + \mu \cos 2t$$

Nestas condições a equação auxiliar é dada por

$$v = K(I-P) [g(r \cos(\cdot) + v, p) + \mu f(\cdot + \phi)]$$

e as equações de bifurcação são

$$F(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + v^*(s), p) \cos s \, ds = 0$$

$$G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds = 0$$

onde $u(t) = r \cos(t - \phi) + v^*(r, \phi, p, \mu)(t - \phi)$.

O nosso próximo objetivo é obter informações mais precisas sobre G . Mais especificamente, mostraremos que G pode ser escrita na forma

$$G(r, \phi, p, \mu) = r^3 \mu^2 \sin 4\phi \, T(r, \phi, p, \mu)$$

onde T é uma função suficientemente diferenciável.

Mostraremos, como consequência, que se $u(t)$ for uma solução pequena de

$$\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$$

com período 2π , então $u(t - \phi)$ será par ou ímpar para algum valor de $\phi \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{4}\right\}$. Observamos também que para $\phi \in \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{4}\right\}$, $f(t - \phi)$ é par ou ímpar em t .

Vamos então passar ao estudo da segunda equação bifurcação. Com este intuito, daremos os lemas seguintes.

LEMA 4: Sejam f uma função contínua, par e π -periódica, tal que $f(t + \frac{\pi}{2}) = -f(t)$ e g de classe C^∞ . Nestas condições, $v^* = v^*(r, \phi, p, \mu)$, solução da equação auxiliar

$$v = K(I-P) [g(r \cos(\cdot) + v, p) + \mu f(\cdot + \phi)]$$

satisfaz as seguintes propriedades:

$$v^*(0, \phi, p, \mu)(t + \frac{\pi}{2}) = -v^*(0, \phi, p, \mu)(t) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(t + \pi) = -\frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(t) \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2}(0, \phi, p, \mu)(t + \pi) = \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2}(0, \phi, p, \mu)(t) \quad (2.32)$$

DEMONSTRAÇÃO: Para $r = 0$ a equação auxiliar é dada por

$$\ddot{v} + v = \mu f(\cdot + \phi) + (I-P) [g(v, p)]$$

A demonstração de (2.30) depende fortemente do fato de

esta equação não se alterar quando fazemos as transformações
 $t \rightarrow t + \frac{\pi}{2}$ e $v \rightarrow -v$.

Para demonstrar (2.31) observamos que derivando a equação auxiliar em relação a r e fazendo $r = 0$ temos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(t) + \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(t) = \\ & = (I-P) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu), p)(\cos(.)) + \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) \right](t) \end{aligned}$$

Consideremos a equação

$$\ddot{y} + y = (I-P) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu), p)(\cos(.)) + y \right] \quad (2.33)$$

A propriedade em questão depende essencialmente do fato de a equação não se alterar quando fazemos as transformações
 $t \rightarrow t + \pi$ e $y \rightarrow -y$.

Para demonstrar (2.32) derivamos a equação auxiliar duas vezes em relação a r e fazemos $r = 0$. Obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2}(0, \phi, p, \mu)(t) + \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2}(0, \phi, p, \mu)(t) = \\ & = (I-P) \left[\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(v^*(0, \phi, p, \mu), p)(\cos(.)) + \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu))^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu), p) \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2}(0, \phi, p, \mu) \right](t) \quad (2.34) \end{aligned}$$

A única solução 2π - periódica pequena de (2.34) é

$\frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} (0, \phi, p, \mu)(t)$. A propriedade (2.32) é obtida de maneira análoga a (2.31). □

LEMA 5: Se f é contínua, par, π - periódica tal que $f(t + \frac{\pi}{2}) = -f(t)$ e g é de classe C^∞ e ímpar em u , a função G , dada em (2.9),

$$G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds$$

pode ser escrita como

$$G(r, \phi, p, \mu) = \mu^2 \sin 4\phi S(r, \phi, p, \mu)$$

com $S(r, \phi, p, \mu)$ diferenciável.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\phi = \frac{\pi}{4}$ na equação auxiliar então

$$\ddot{v}(\cdot - \frac{\pi}{2}) + v(\cdot - \frac{\pi}{2}) = (I-P) [g(r \sin(\cdot) + v(\cdot - \frac{\pi}{2}), p) + \mu f(\cdot - \frac{\pi}{4})] \quad (2.35)$$

Prova-se que a solução de (2.35), a saber, $v^*(t - \frac{\pi}{2}) = v^*(r, \frac{\pi}{4}, p, \mu)(t - \frac{\pi}{2})$ é ímpar em t , seguindo procedimentos análogos aos anteriores, ou mais precisamente, mostrando que $v^*(-t - \frac{\pi}{2})$ também é solução de (2.35).

O fato de $v^*(r, \frac{\pi}{4}, p, \mu)(\cdot - \frac{\pi}{2})$ ser ímpar garante que

$$G(r, \frac{\pi}{4}, p, \mu) \equiv 0 \quad (2.36)$$

Segue do Lema 2 e do fato de G se anular para $\phi = 0$,
 $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$ que

$$G(r, \phi, p, \mu) = \mu^2 \operatorname{sen} 4\phi S(r, \phi, p, \mu)$$

onde $S(r, \phi, p, \mu)$ é uma função suave. □

Verifiquemos que $G(r, \phi, p, \mu) = O(|r|^3)$.

Temos por (2.9) que

$$G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(r \cos s + v^*(s), p) \operatorname{sen} s \, ds$$

Mas, por (2.21), temos

$$g(u, p) = pu + \alpha u^3 + O(|p||u^3| + |u^5|)$$

Logo, podemos escrever

$$g(u, p) = pu + \alpha u^3 + u^3 k(u, p) \tag{2.37}$$

onde $k(u, p) = O(|p| + |u|^2)$.

Utilizando (2.37) obtemos

$$\begin{aligned} G(r, \phi, p, \mu) &= \frac{1}{\pi} \left\{ 3\alpha r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s v^*(s) \operatorname{sen} s \, ds + 3\alpha r \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^2 \operatorname{sen} s \, ds \right. \\ &+ \alpha \int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 \operatorname{sen} s \, ds + r^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 s k(r \cos s + v^*(s), p) \operatorname{sen} s \, ds + \\ &+ 3r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s v^*(s) k(r \cos s + v^*(s), p) \operatorname{sen} s \, ds + \\ &\left. + 3r \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^2 k(r \cos s + v^*(s), p) \operatorname{sen} s \, ds + \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left. \int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds \right\}$$

Desenvolvendo v^* em torno de $r = 0$ temos

$$\begin{aligned} v^*(r, \phi, p, \mu) &= v^*(0, \phi, p, \mu) + r \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) + \\ &+ \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2}(0, \phi, p, \mu) + O(|r|^3) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Sejam

$$g_1(r, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos^2 s \, v^*(s) \sin s \, ds$$

$$g_2(r, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos s \, (v^*(s))^2 \sin s \, ds$$

$$g_3(r, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 \sin s \, ds$$

$$g_4(r, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos^3 s \, k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds$$

$$g_5(r, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos^2 s \, v^*(s) \, k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds$$

$$g_6(r, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos s \, (v^*(s))^2 \, k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds$$

$$g_7(r, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 \, k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds$$

A fim de provar que $G(r, \phi, p, \mu) = O(|r|^3)$ vamos procurar informações mais precisas sobre as funções g_i .

$$(i) \quad g_1(0, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos^2 s \, v^*(0, \phi, p, \mu)(s) \sin s \, ds$$

Pela condição (iii) do Lema 1 temos que $v^*(0, \phi, p, \mu)$ é π - periódica. Segue que $g_1(0, \phi, p, \mu) \equiv 0$.

Logo, $g_1(r, \phi, p, \mu) = O(|r|)$

Portanto, $r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s v^*(r, \phi, p, \mu)(s) \sin s \, ds = O(|r^3|)$

$$(ii) \quad g_2(0, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(0, \phi, p, \mu)(s))^2 \sin s \, ds$$

No Lema 4 vimos que $v^*(0, \phi, p, \mu)(t + \frac{\pi}{2}) = -v^*(0, \phi, p, \mu)(t)$.

Logo, $g_2(0, \phi, p, \mu) = 0$.

Verifica-se que g_2 é par em r observando para isto que $v^*(r, \phi, p, \mu)(t) = v^*(-r, \phi, p, \mu)(t + \pi)$, como foi visto no Lema 1.

Logo, $g_2(r, \phi, p, \mu) = O(|r|^2)$.

Portanto, $r \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(r, \phi, p, \mu)(s))^2 \sin s \, ds = O(|r^3|)$.

$$(iii) \quad g_3(0, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} (v^*(0, \phi, p, \mu)(s))^3 \sin s \, ds$$

Como $v^*(0, \phi, p, \mu)$ é π - periódica, segue que $g_3(0, \phi, p, \mu) = 0$.

Da mesma maneira que em (ii), verifica-se que g_3 é ímpar em r .

Provando que $\frac{\partial g_3}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) = 0$ e usando o fato de g_3 ser ímpar em r , obtemos $g_3(r, \phi, p, \mu) = O(|r^3|)$.

Mas,

$$\frac{\partial g_3}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) = 3 \int_0^{2\pi} (v^*(0, \phi, p, \mu)(s))^2 \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(s) \sin s \, ds$$

Para mostrar que $\frac{\partial g_3}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) = 0$ usaremos o resultado a seguir, obtido para $r = 0$.

TEOREMA 2.3.: A única solução pequena y com $P_y = 0$, de

$$\ddot{y} + y = (I-P) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu), p)(\cos(\cdot) + y) \right] \quad (2.39)$$

é da forma

$$\frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(\tau) = a(\tau + \phi) \cos \tau + b(\tau + \phi) \sin \tau \quad (2.40)$$

onde a e b são $\frac{\pi}{2}$ -periódicas, tem valor médio zero, isto é, $M_a = M_b = 0$, a é par, b é ímpar e a, b dependem de p, μ e não dependem de ϕ .

DEMONSTRAÇÃO: Fazendo $\tau = t - \phi$ em (2.40) obtemos

$$\frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(t - \phi) = a(t) \cos(t - \phi) + b(t) \sin(t - \phi)$$

Seja

$$M_\phi = \left\{ y \in P^{(2)} ; y(t, \phi) = a(t) \cos(t - \phi) + b(t) \sin(t - \phi), \right. \\ \left. M_a = M_b = 0, a, b \frac{\pi}{2} \text{-periódicas, } a \text{ par, } b \text{ ímpar e } a, b \text{ não dependem de } \phi \right\}.$$

Provaremos que M_ϕ é subespaço de Banach de $p^{(2)}$. A justificativa da colocação desta prova é que nem sempre a soma de subespaços fechados é um conjunto fechado, como pode ser visto em Halmos [6, pág. 28] .

Seja $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em M_ϕ , convergindo para $y \in p^{(2)}$.

Temos

$$y_n(t, \phi) = a_n(t) \cos(t - \phi) + b_n(t) \sin(t - \phi)$$

onde a_n, b_n são $\frac{\pi}{2}$ - periódicas, a_n é par, b_n é ímpar,

$Ma_n = Mb_n = 0$ e a_n, b_n não dependem de ϕ , para cada n .

Observemos que

$$y_n(t, \phi) \cos(t - \phi) - y_n(t + \frac{\pi}{2}, \phi) \sin(t - \phi) = a_n(t)$$

$$y_n(t, \phi) \sin(t - \phi) + y_n(t + \frac{\pi}{2}, \phi) \cos(t - \phi) = b_n(t)$$

Temos que a_n e b_n convergem em $p^{(2)}$, e os limites independem de ϕ . Sejam $a(t)$ e $b(t)$, respectivamente, esses limites.

Logo, $y(t, \phi) = a(t) \cos(t - \phi) + b(t) \sin(t - \phi)$ e a, b satisfazem as condições requeridas. Portanto, pertence a M_ϕ .

Assim, M_ϕ é fechado em $p^{(2)}$ e, conseqüentemente, é um subespaço de Banach de $p^{(2)}$.

Temos que $\frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)$ é solução de (2.39).

Assim, $\frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(. - \phi)$ é solução de

$$\ddot{x} + x = (I-P) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu)(\cdot - \phi), p)(\cos(\cdot - \phi) + x) \right]$$

Definimos $H : M_\phi \subset P^{(2)} \rightarrow P^{(2)}$ por

$$Hy(\cdot, \phi) = K(I-P) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu)(\cdot - \phi), p)(\cos(\cdot - \phi) + y(\cdot, \phi)) \right]$$

Suponhamos que $y(\cdot, \phi)$ pertence a M_ϕ .

Seja

$$z(t, \phi) = \frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu)(t - \phi), p)(\cos(t - \phi) + y(t, \phi))$$

Temos

$$\begin{aligned} z(t, \phi) &= \cos(t - \phi) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu)(t - \phi), p)(1 + a(t)) \right] + \\ &+ \sin(t - \phi) \left[\frac{\partial g}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu)(t - \phi), p) b(t) \right] \end{aligned}$$

Observe-se que o termo que acompanha $\cos(t - \phi)$ é par e $\frac{\pi}{2}$ -periódico mas pode não ter valor médio zero. Logo, pode não estar em M_ϕ . O procedimento a seguir mostra como contornar esta dificuldade.

Seja $y \in P^{(2)}$ tal que

$$y(t, \phi) = \alpha(t) \cos(t - \phi) + \beta(t) \sin(t - \phi)$$

onde α é par, β é ímpar, α, β são $\frac{\pi}{2}$ -periódicas, $M\beta = 0$ e $M\alpha$ não necessariamente igual a zero.

Segue que

$$\begin{aligned}
[Py(., \phi)](t) &= \frac{\cos t}{\pi} \int_0^{2\pi} y(s, \phi) \cos s \, ds + \frac{\sin t}{\pi} \int_0^{2\pi} y(s, \phi) \sin s \, ds = \\
&= \frac{\cos t \cos \phi}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(s) \cos^2 s \, ds + \frac{\sin t \sin \phi}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(s) \sin^2 s \, ds = \\
&= \frac{\cos(t - \phi)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(s) \, ds
\end{aligned}$$

Logo,

$$[(I-P)y(., \phi)](t) = \left[\alpha(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(s) \, ds \right] \cos(t - \phi) + \beta(t) \sin(t - \phi)$$

Portanto, $[(I-P)y(., \phi)] \in M_\phi$.

Segue que $(I-P)z(., \phi) \in M_\phi$.

Devemos provar que se $y(., \phi) \in M_\phi$ então $Ky(., \phi) \in M_\phi$.

Sejam $h(., \phi) = a(.) \cos(.-\phi)$ e $k(., \phi) = b(.) \sin(.-\phi)$.

Temos $y(., \phi) = h(., \phi) + k(., \phi)$.

Como K é operador linear, se mostrarmos que $Kh(., \phi)$ e $Kk(., \phi)$ pertencem a M_ϕ , teremos mostrado que $Ky(., \phi)$ pertence a M_ϕ .

Provemos então que $Kh(., \phi) \in M_\phi$.

Seja

$$S(t) = -\cos t \int_0^t h(s, \phi) \sin s \, ds + \sin t \int_0^t h(s, \phi) \cos s \, ds$$

Utilizando a definição de $h(., \phi)$ e efetuando algumas operações obtemos

$$\begin{aligned}
 S(t) = \frac{1}{2} & \left\{ \left[\int_0^t a(s) ds \right] \sin(t - \phi) - \left[\cos 2t \int_0^t a(s) \sin 2s ds \right] \cos(t - \phi) - \right. \\
 & - \left[\sin 2t \int_0^t a(s) \sin 2s ds \right] \sin(t - \phi) + \left[\sin 2t \int_0^t a(s) \cos 2s ds \right] \cos(t - \phi) - \\
 & \left. - \left[\cos 2t \int_0^t a(s) \cos 2s ds \right] \sin(t - \phi) \right\}
 \end{aligned}$$

Recordamos que $Kh(., \phi) = (I-P) S(.)$

Mas,

$$\begin{aligned}
 [PS(.)](t) = \frac{1}{4\pi} & \left\{ - \left[\int_0^{2\pi} \cos 2s ds \int_0^s a(u) \sin 2u du \right] \cos(t - \phi) - \right. \\
 & - \left[\int_0^{2\pi} ds \int_0^s a(u) \sin 2u du \right] \cos(t + \phi) + \\
 & \left. + \left[\int_0^{2\pi} \sin 2s ds \int_0^s a(u) \cos 2u du \right] \cos(t - \phi) \right\}
 \end{aligned}$$

Fazendo $t + \phi = 2t - (t - \phi)$ segue que

$$\begin{aligned}
[Kh(., \phi)](t) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\int_0^t a(s) ds \right] \sin(t - \phi) - \right. \\
&- \left[\cos 2t \int_0^t a(s) \sin 2s ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2s ds \int_0^s a(u) \sin 2u du - \right. \\
&- \left. \frac{\cos 2t}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_0^s a(u) \sin 2u du \right] \cos(t - \phi) + \\
&+ \left[\sin 2t \int_0^t a(s) \cos 2s ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2s ds \int_0^s a(u) \cos 2u du \right] \cos(t - \phi) - \\
&- \left[\sin 2t \int_0^t a(s) \sin 2s ds - \frac{\sin 2t}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_0^s a(u) \sin 2u du \right] \sin(t - \phi) - \\
&- \left[\cos 2t \int_0^t a(s) \cos 2s ds \right] \sin(t - \phi)
\end{aligned}$$

Sejam

$$F(t) = \int_0^t a(s) ds$$

$$G(t) = \cos 2t \int_0^t a(s) \sin 2s ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos 2s ds \int_0^s a(u) \sin 2u du -$$

$$- \frac{\cos 2t}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_0^s a(u) \sin 2u du$$

$$H(t) = \sin 2t \int_0^t a(s) \cos 2s \, ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2s \, ds \int_0^s a(u) \cos 2u \, du$$

$$J(t) = \sin 2t \int_0^t a(s) \sin 2s \, ds - \frac{\sin 2t}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_0^s a(u) \sin 2u \, du$$

$$L(t) = \cos 2t \int_0^t a(s) \cos 2s \, ds$$

Verifica-se que as funções G e H são pares e que as demais são ímpares.

Usamos a identidade

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi ds \int_0^s a(u) \sin 2u \, du = \int_0^{\pi/2} a(\tau) \sin 2\tau \, d\tau$$

para mostrar que G e J são $\frac{\pi}{2}$ - periódicas.

A demonstração de que as demais funções são $\frac{\pi}{2}$ - periódicas segue de maneira natural.

Todas as funções acima tem valor médio zero.

Fica assim provado que $Kh(., \phi) \in M_\phi$.

Analogamente, mostra-se que $Kk(., \phi) \in M_\phi$.

Portanto, $Ky(., \phi) \in M_\phi$.

Consequentemente, $H : M_\phi \subset P^{(2)} \rightarrow M_\phi$

Pode-se provar que H é uma contração uniforme, em relação a p, μ, ϕ . A demonstração depende essencialmente do fato que

$K(I-P) : P \rightarrow P^{(2)}$ é linear limitado, que $g(u, p) = O(|p||u| + |u|^3|)$

e que $v^*(0, \phi, 0, 0)(t - \phi) \equiv 0$.

O Teorema do Ponto Fixo nos garante que H possui um único ponto fixo, que é da forma desejada. Logo,

$$\frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(t - \phi) = a(t) \cos(t - \phi) + b(t) \sin(t - \phi)$$

e portanto,

$$\frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(\tau) = a(\tau + \phi) \cos \tau + b(\tau + \phi) \sin \tau$$

onde a, b satisfazem as condições determinadas anteriormente. $\square$

Segue pelos Lemas 1, 3 e pelo Teorema 2.3 que

$$\frac{\partial g_3}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) = 3 \int_0^{2\pi} (v^*(0, \phi, p, \mu)(s))^2 \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(s) \sin s \, ds =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} (v^*(0, \phi, p, \mu)(\tau - \phi))^2 a(\tau) \sin 2(\tau - \phi) \, d\tau +$$

$$+ 3 \int_0^{2\pi} (v^*(0, \phi, p, \mu)(\tau - \phi))^2 b(\tau) \sin^2(\tau - \phi) \, d\tau = 0$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 \sin s \, ds = O(|r^3|)$$

$$(iv) \quad r^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 s \, k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds = O(|r^3|)$$

$$(v) \quad g_5(0, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos^2 s \, v^*(0, \phi, p, \mu)(s) \, k(v^*(0, \phi, p, \mu)(s) \sin s \, ds$$

Segue pelo Lema 1 que $g_5(0, \phi, p, \mu) = 0$.

Logo, $g_5(r, \phi, p, \mu) = O(|r|)$.

Portanto,

$$r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s \, v^*(s) \, k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds = O(|r^3|)$$

$$(vi) \quad g_6(0, \phi, p, \mu) = \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(0, \phi, p, \mu)(s))^2 \, k(v^*(0, \phi, p, \mu)(s), p) \sin s \, ds$$

Decorre do Lema 4 e do fato de $k(u, p)$ ser par em u que $g_6(0, \phi, p, \mu) = 0$.

Temos também que g_6 é par em r .

Portanto,

$$r \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^2 \, k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds = O(|r^3|)$$

(vii) Utilizando o Lema 1 obtemos $g_7(0, \phi, p, \mu) = 0$.

Além disso,

$$\frac{\partial g_7}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) = 3 \int_0^{2\pi} (v^*(0, \phi, p, \mu)(s))^2 \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(s) k(v^*(0, \phi, p, \mu)(s), p) \sin s \, ds +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (v^*(0, \phi, p, \mu)(s))^3 \frac{\partial k}{\partial u}(v^*(0, \phi, p, \mu)(s), p) (\cos s + \frac{\partial v^*}{\partial r}(0, \phi, p, \mu)(s)) \sin s \, ds$$

Decorre dos Lemas 1, 3, do Teorema 2.3 e do fato de $\frac{\partial k}{\partial u}$ ser ímpar em u , que $\frac{\partial g_7}{\partial r}(0, \phi, p, \mu) = 0$.

Como g_7 é ímpar em r , temos $g_7(r, \phi, p, \mu) = O(|r^3|)$.

Logo,

$$\int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 k(r \cos s + v^*(s), p) \sin s \, ds = O(|r^3|)$$

Fica portanto provado que

$$G(r, \phi, p, \mu) = O(|r^3|) \quad (2.41)$$

Segue pelo Lema 5 e por (2.41) que

$$G(r, \phi, p, \mu) = r^3 \mu^2 \sin 4\phi \, T(r, \phi, p, \mu)$$

com $T(r, \phi, p, \mu)$ diferenciável.

Consideremos

$$g(u, p) = pu + \alpha u^3 + \nu u^5 + O(|p||u^3| + |u^7|)$$

Logo,

$$g(u, p) = pu + \alpha u^3 + vu^5 + pu^3 \bar{k}(u, p) + u^7 \bar{\bar{k}}(u, p), \text{ com } \bar{k} \text{ e } \bar{\bar{k}} \text{ limitadas.}$$

Para $p = 0$ obtemos

$$g(u, 0) = \alpha u^3 + vu^5 + u^7 \bar{\bar{k}}(u, p)$$

Usando esta expressão, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5}{\partial \mu^2 \partial r^3} G(0, \phi, 0, 0) &= \frac{1}{\pi} \left\{ 18\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial^3 v^*}{\partial \mu^2 \partial r} (0, \phi, 0, 0)(s) \cos^2 s \sin s \, ds + \right. \\ &+ 36\alpha \int_0^{2\pi} \frac{\partial v^*}{\partial \mu} (0, \phi, 0, 0)(s) \frac{\partial^3 v^*}{\partial \mu \partial r^2} (0, \phi, 0, 0)(s) \sin s \cos s \, ds + \\ &+ 6\alpha \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial v^*}{\partial \mu} (0, \phi, 0, 0)(s) \right]^2 \frac{\partial^3 v^*}{\partial r^3} (0, \phi, 0, 0)(s) \sin s \, ds + \\ &\left. + 120 v \int_0^{2\pi} \cos^3 s \left[\frac{\partial v^*}{\partial \mu} (0, \phi, 0, 0)(s) \right]^2 \sin s \, ds \right\} \end{aligned}$$

Temos

$$\frac{\partial^3 v^*}{\partial \mu^2 \partial r} (0, \phi, 0, 0) = 6\alpha \, K(I-P) \left[(Kf(\cdot + \phi))^2 \cos(\cdot) \right]$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \mu}(0, \phi, 0, 0) = Kf(. + \phi)$$

$$\frac{\partial^3 v^*}{\partial \mu \partial r^2}(0, \phi, 0, 0) = 6\alpha \quad K(I-P) \quad [Kf(. + \phi) \cos^2(.)]$$

$$\frac{\partial^3 v^*}{\partial r^3}(0, \phi, 0, 0) = 6\alpha \quad K(I-P) \quad [\cos^3(.)] = -\frac{3\alpha}{16} \cos 3(.)$$

$$\text{Mas,} \quad [K(I-P) f](s - \phi) = [K(I-P) f(. - \phi)](s)$$

Obtemos, portanto

$$\frac{\partial^5}{\partial \mu^2 \partial r^3} G(0, \phi, 0, 0) = \frac{\sin 4\phi}{\pi} \left\{ -27\alpha^2 \int_0^{2\pi} K(I-P) [(Kf(.))^2 \cos(.)](\tau) \cos 3\tau \, d\tau - \right.$$

$$- 27\alpha^2 \int_0^{2\pi} (Kf)(\tau) K [(Kf)(.) \cos 2(.)](\tau) \cos 2\tau \, d\tau +$$

$$+ 27\alpha^2 \int_0^{2\pi} (Kf)(\tau) K [(Kf)(.) \sin 2(.)](\tau) \sin 2\tau \, d\tau +$$

$$\left. + \left(\frac{9}{16} \alpha^2 - 15 v \right) \int_0^{2\pi} ((Kf)(\tau))^2 \cos 4\tau \, d\tau \right\}$$

Seja

$$\begin{aligned}
\eta \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{12\pi} \left\{ -27\alpha^2 \int_0^{2\pi} K(I-P) [((Kf)(\cdot))^2 \cos(\cdot)](\tau) \cos 3\tau d\tau - \right. \\
- 27\alpha^2 \int_0^{2\pi} (Kf)(\tau) K[(Kf)(\cdot) \cos 2(\cdot)](\tau) \cos 2\tau d\tau + \\
+ 27\alpha^2 \int_0^{2\pi} (Kf)(\tau) K[(Kf)(\cdot) \sin 2(\cdot)](\tau) \sin 2\tau d\tau + \\
\left. + \left(\frac{9}{16} \alpha^2 - 15 \nu \right) \int_0^{2\pi} ((Kf)(\tau))^2 \cos 4\tau d\tau \right\} \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Logo,

$$G(r, \phi, p, \mu) = r^3 \mu^2 \sin 4\phi [\eta + 0(|p| + |\mu| + |r|)]$$

Suponhamos $\eta \neq 0$.

Lembrando que $r = 0$ nos dá solução π -periódica e que se $\mu = 0$ temos o caso autônomo, analisaremos então $\sin 4\phi [\eta + \text{t.o.s.}] = 0$.

Segue que $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$.

Seja $u(t)$ solução pequena com período 2π . Então, $u(t) = r \cos(t - \phi) + v^*(r, \phi, p, \mu)(t - \phi)$.

No parágrafo 2.1 mostramos que se $\phi = 0$ ou $\phi = \frac{\pi}{2}$ temos $u(t - \phi)$ par em t . Observamos que para esse valores de ϕ temos $f(t - \phi)$ par em t .

Indiquemos por um instante

$$u(t, \phi) = r \cos(t - \phi) + v^*(r, \phi, p, \mu)(t - \phi)$$

Se $\phi = \frac{\pi}{4}$ temos $f(t - \frac{\pi}{4})$ ímpar em t e

$$u(t - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) = r \sin t + v^*(r, \frac{\pi}{4}, p, \mu)(t - \frac{\pi}{2})$$

Temos $v^*(r, \frac{\pi}{4}, p, \mu)(t - \frac{\pi}{2})$ ímpar em t .

Logo, $u(t - \frac{\pi}{4})$ é ímpar em t .

Analogamente, verifica-se que $f(t + \frac{\pi}{4})$ e $u(t + \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ são funções ímpares de t .

Provamos assim o seguinte teorema.

TEOREMA 2.4.: Se f é contínua, par, π -periódica e tal que $f(t + \frac{\pi}{2}) = -f(t)$, p, μ são pequenos parâmetros, $\mu \neq 0$, g é ímpar em u , g de classe C^∞ , $g(u, p) = pu + \alpha u^3 + \nu u^5 + O(|p| |u^3| + |u^7|)$ com $\alpha \neq 0$ e η (dado em (2.42)) é não nulo, então as únicas soluções pequenas $u(t)$, de período 2π , da equação $\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu f(t)$, caso existam, são tais que ou $u(t - \phi)$ é par ou é ímpar em t , conforme $f(t - \phi)$ seja par ou ímpar em t , onde ϕ varia em $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{4}\right\}$.

OBSERVAÇÃO: De maneira geral, η pode ser obtido da expressão da da em (2.42). Para a equação $\ddot{u} + u = g(u, p) + \mu \cos 2t$ onde $g(u, p) = pu + \alpha u^3 + \nu u^5 + O(|p| |u^3| + |u^7|)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \eta &= -\frac{11}{96} \alpha^2 - \frac{5}{72} \nu = \\ &= -\frac{11}{3456} \left[\frac{\partial^3 g}{\partial u^3}(0, 0) \right]^2 - \frac{1}{1728} \frac{\partial^5 g}{\partial u^5}(0, 0) \end{aligned}$$

A análise da primeira equação de bifurcação apresenta agora mais dois casos, quando $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\phi = -\frac{\pi}{4}$ e é semelhante àquela feita no final do parágrafo 2.1.

O coeficiente $\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (Kf(\cdot + \phi)(s))^2 \cos^2 s \, ds$ independe de ϕ . De fato, como

$$[Kf(\cdot + \phi)](t - \phi) = [Kf](t)$$

$$[Kf](t + \frac{\pi}{2}) = -[Kf](t)$$

$$[Kf](-t) = [Kf](t)$$

segue que

$$\int_0^{2\pi} (Kf(\cdot + \phi)(s))^2 \cos^2 s \, ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ((Kf)(s))^2 \, ds$$

e, conseqüentemente, λ é o mesmo para $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ e $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$.

Temos que $v^*(r, \phi + \frac{\pi}{2}, p, -\mu) = v^*(r, \phi, p, \mu)$.

Decorre deste fato e do fato de F ser par em μ que

$$F(r, \phi + \frac{\pi}{2}, p, \mu) = F(r, \phi, p, \mu)$$

O valor de $F(r, \phi, p, \mu)$ coincide para $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$.
O valor de $F(r, \phi, p, \mu)$ coincide para $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\phi = -\frac{\pi}{4}$.

Supondo $f \neq 0$ temos $\lambda \neq 0$ e analisa-se a variação do número de soluções, r , de $F(r, \phi, p, \mu) = 0$ para $\phi = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$ de maneira semelhante à análise já feita anteriormente.

Por exemplo: para $\phi = 0$ mostra-se que existe uma curva Γ_1 , dada por

$$p = -3\alpha \lambda \mu^2 + O(\mu^4)$$

tal que o número de soluções r de $J(r, 0, p, \mu) \equiv 0$ varia de acordo com a Figura 7.

Figura 7

Análise semelhante pode ser feita para o caso $\phi = \frac{\pi}{4}$, encontrando-se uma curva Γ_2 dada por

$$p = -3\alpha \lambda \mu^2 + O(\mu^4)$$

Não conseguimos mostrar que as curvas Γ_1 e Γ_2 podem ser distintas. Como não temos esta informação e como não sabemos a posição de Γ_2 relativamente a Γ_1 , a única informação que

pode ser dada, dentro das hipóteses anteriores, é que dadas duas retas como as indicadas na Figura 8, existe uma vizinhança da origem de modo que, para $\mu \neq 0$, o número de soluções 2π - periódicas, da equação inicial, varia de acordo com a citada figura.

Figura 8

2.4. EXEMPLO B

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \cos 2t$ e
 $g(u, p) = pu + u^3$. Estamos nas condições do parágrafo 2.3.

Obtemos a equação

$$\ddot{u} + u = pu + u^3 + \mu \cos 2t \quad (2.43)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} (a) & v = K(I-P) [p(r \cos(.) + v) + (r \cos(.) + v)^3 + \mu \cos 2(. + \phi)] \\ (b) & P [p(r \cos(.) + v) + (r \cos(.) + v)^3 + \mu \cos 2(. + \phi)] = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Pelo Teorema das Funções Implícitas existe uma única so
 lução pequena de (2.44(a)) em $P^{(2)}$. Seja $v^* = v^*(r, \phi, p, \mu)$
 esta solução.

Substituindo em (2.44(b)) e utilizando a definição de
 P obtemos

$$\begin{aligned} F(r, \phi, p, \mu) = & pr + \frac{3}{4} r^3 + \frac{1}{\pi} \left\{ 3r^2 \int_0^{2\pi} v^*(s) \cos^3 s \, ds + \right. \\ & \left. + 3r \int_0^{2\pi} (v^*(s))^2 \cos^2 s \, ds + \int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 \cos s \, ds \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$G(r, \phi, p, \mu) = \frac{1}{\pi} \left\{ 3r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 s v^*(s) \sin s \, ds + \right. \\ \left. + 3r \int_0^{2\pi} \cos s (v^*(s))^2 \sin s \, ds + \int_0^{2\pi} (v^*(s))^3 \sin s \, ds \right\} = 0$$

(2.46)

Como $K[\cos 2(\cdot)] = -\frac{1}{3} \cos 2(\cdot)$, temos

$$\eta = \frac{1}{\pi} \left\{ -3 \int_0^{2\pi} K(I-P) [\cos(\cdot) \cos^2 2(\cdot)](\tau) \cos 3\tau \, d\tau - \right. \\ \left. - 3 \left[\int_0^{2\pi} K[\cos^2 2(\cdot)](\tau) \cos^2 2\tau \, d\tau - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} K[\sin 4(\cdot)](\tau) \sin 4\tau \, d\tau \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\tau \cos 4\tau \, d\tau \right\}$$

Mas,

$$K(I-P) [\cos(\cdot) \cos^2 2(\cdot)] = -\frac{\cos 5(\cdot)}{96} - \frac{\cos 3(\cdot)}{32}$$

$$K[\cos^2 2(\cdot)] = \frac{1}{2} - \frac{\cos 4(\cdot)}{30}$$

$$K[\sin 4(\cdot)] = -\frac{\sin 4(\cdot)}{15}$$

Segue que $\eta = -\frac{11}{8}$, não nulo.

Consequentemente,

$$G(r, \phi, p, \mu) = r^3 \mu^2 \sin 4\phi \left[-\frac{11}{96} + O(|p| + |\mu| + |r|) \right]$$

Fazendo $r = 0$ em (2.44(a)) estimamos $v^*(0, \phi, p, \mu)$ que deverá ser solução de

$$v = K(I-P) [pv + v^3 + \mu \cos 2(\cdot + \phi)]$$

Desenvolvendo e impondo que $v^*(0, \phi, p, \mu)$ é solução desta equação, segue pelo Teorema das Funções Implícitas que

$$v^*(0, \phi, 0, \mu) = -\frac{\mu}{3} \cos 2(\cdot + \phi) + O(|\mu|^3)$$

Segue daí que

$$\int_0^{2\pi} (v^*(r, \phi, p, \mu)(s))^2 \cos^2 s \, ds = \frac{\mu^2 \pi}{18} + t.o.s.$$

onde $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ ou $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$.

Obtemos duas curvas de bifurcação Γ_1 e Γ_2 , para $\phi = 0$ ou $\phi = \frac{\pi}{2}$, e para $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$, respectivamente, dadas por

$$\Gamma_1 : p = -\frac{\mu^2}{6} + O(\mu^4)$$

$$\Gamma_2 : p = -\frac{\mu^2}{6} + O(\mu^4)$$

Observamos que se $f(t) = \cos 2t$ e $g(u, p) = pu + \alpha u^3 + \nu u^5$

e para $\frac{11}{96} \alpha^2 + \frac{5}{72} \nu = 0$ tem-se $\eta = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] - ANDRONOV, A.A., KHAIKIN, S.E. & WITT, A.A. - *Theory of oscillators*. New York. Pergamon Press. 1966.
- [2] - BANCROFT, S. - Perturbations with several independent parameters. *J. Math. Anal. Appl.* 50:384-414, 1975.
- [3] - HALE, J.K. & RODRIGUES, H.M. - Bifurcation in the Duffing equation with independent parameters I. *Proc. Royal Soc. of Edinburgh*, 78 A:57-65, 1977.
- [4] - _____ - Bifurcation in the Duffing equation with independent parameters II. *Proc. Royal Soc. of Edinburgh*, 79 A:317-326, 1977.
- [5] - HALE, J.K. - *Ordinary differential equations*. 2. ed. New York, Krieger, 1980.
- [6] - HALMOS, P.R. - *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*. New York, Chelsea Publishing, 1951.
- [7] - HÖNIG, C.S. - *Análise funcional e aplicações*. São Paulo, IME-USP, 1970.
- [8] - LADEIRA, L.A. da Costa - *Bifurcação a partir de uma solução periódica de uma equação diferencial de segunda ordem*. Tese (Doutoramento). Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1981.

- [9] - MINORSKY, N. - *Nonlinear oscillations*. 2. ed. New York, Krieger, 1974.
- [10] - NIRENBERG, L. - *Functional analysis*. Lecture Notes, New York University, 1960-1961.
- [11] - RODRIGUES, H.M. - *Comportamento Assintótico de Equações Retardadas e Aplicações do Método Alternativo*. Tese(Livre-Docência) . Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos da Universidade de São Paulo, 1978.
- [12] - RODRIGUES, H.M. & VANDERBAUWHEDE, A.L. - Symmetric perturbations of nonlinear equations. Symmetry of small solutions. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 2(1):27-46. Pergamon Press, 1978.
- [13] - SCHMITT, B.V. & MAZZANTI, S. - Solutions periodiques de l'equation de Duffing sans dissipation. *J. Diff. Eq.*, 42:199-214, 1981.
- [14] - STOKER, J.J. - *Nonlinear vibrations*. New York, Interscience , 1950.
- [15] - VANDERBAUWHEDE, A.L. - *Local bifurcation and symmetry*. Gent, Instituut voor Theoretische Mechanica, 1980.
- [16] - VANDERBAUWHEDE, A. - *Local bifurcation and symmetry*. Boston, Pitman, 1982.