SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 8 de abril de 2010

Assinatura: _____

Atratores para uma classe de equações de vigas extensíveis fracamente dissipativas

Vando Narciso

Orientador: Prof. Dr. Ma To Fu

Tese apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos

Abril/2010

*A minha esposa Léia, as minhas filhas
Emanuele e Gabriela, e aos meus pais
Orlando e Guiomar (in memoriam).*

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade que me concedeu para concluir mais esta etapa da minha vida.

À minha esposa Léia que confiou em mim e sempre esteve ao meu lado.

Às minhas filhas Emanuele e Gabriela.

Aos meus pais Orlando e Guiomar (in memoriam).

Ao prof. Dr. Ma To Fu, meu orientador e amigo, por seus sábios conselhos e orientação.

Aos professores do ICMC - USP que contribuíram para o meu crescimento profissional.

Finalmente, agradeço à UEMS e à FUNDECT pelo apoio financeiro para realização deste trabalho.

Resumo

Este trabalho contém resultados sobre a existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções para uma equação de viga não linear do tipo Kirchhoff,

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + f(u_t) + g(u) = h \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular Γ . Essa equação é um modelo matemático para pequenas vibrações transversais de vigas ou placas extensíveis. O termo não local $M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u$ está relacionado à variação de tensão na viga devida à sua extensibilidade. O termo $f(u_t)$ representa uma dissipação para o sistema e $g(u)$ representa a força exercida pelo meio. A função h representa uma força externa adicional. Consideramos o problema com as condições de fronteira $u|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} = 0$, que corresponde ao modelo de vigas fixadas pelo bordo Γ . Discutiremos o caso em que a dissipação é linear e o caso em que é não linear. Mostraremos que em ambos os casos o sistema dinâmico associado ao problema possui um atrator global. Entretanto, para o caso em que a dissipação é linear, obtemos num espaço de fase mais regular, a existência de um conjunto inércia de dimensão finita, que atrai exponencialmente todos os limitados deste espaço.

Abstract

This work contains some results on the existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions for a nonlinear beam equation of Kirchhoff type,

$$u_{tt} + \Delta^2 u + M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + g(u_t) + f(u) = h,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary Γ . This equation is a model for small vibrations of extensible beams. The nonlocal term $M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u$ is related to the variation of tensions in the beam due to its extensibility. The term $f(u_t)$ represents a damping mechanism for the system and $g(u)$ represents the force exerted by the foundation. The function h represents an additional external force. We consider the problem with boundary condition $u|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} = 0$, which corresponds to the model of clamped beams. We discuss the cases where the dissipation is linear and the case nonlinear. We show that in both cases, the dynamical system associated to the problem has a global attractor. However, when the dissipation is linear, we obtain, in a more regular space, the existence of an inertial set of finite dimension, which attracts exponentially all bounded sets of this space.

Índice

Introdução	xii
1 Preliminares	5
1.1 Espaços de Sobolev	5
1.1.1 Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	6
1.1.2 Espaços $L^p((a,b),X)$	8
1.1.3 Espaços de interpolação	9
1.1.4 Desigualdades elementares	10
1.2 Aspectos Básicos da Teoria de Semigrupos	12
1.2.1 Semigrupos de operadores lineares de classe C_0	12
1.2.2 Teoremas de Hille-Yosida e de Lumer-Phillips	14
1.2.3 Problema de valor inicial não homogêneo	15
1.3 Atrator Global e Atrator Exponencial	17
1.3.1 Definição de atrator global	17
1.3.2 Dimensão fractal e dimensão de Hausdorff	20
1.3.3 Atrator exponencial (conjunto inércia)	21
2 Solução Global para o Problema com Dissipação Linear	23
2.1 Existência de Solução Global	24
2.1.1 Existência de solução forte	24
2.1.2 Existência de solução fraca	34

3	Atrator Exponencial para o Problema com Dissipação Linear	37
3.1	Existência de um Conjunto Absorvente em E_0	38
3.2	Atrator Global em E_0	42
3.3	Existência de um Conjunto Absorvente em E_1	47
3.4	Atrator Exponencial (Conjunto Inércia)	51
4	Atrator Global para o Problema com Dissipação Não Linear	59
4.1	Existência de Solução Global	61
4.2	Existência de Atrator Global	63
4.2.1	Conjunto absorvente em E_0	64
4.2.2	Compacidade assintótica em E_0	68
	Referências Bibliográficas	75

Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado com fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$. Neste trabalho investigaremos a existência, unicidade e comportamento assintótico de soluções do modelo não linear para vibrações de vigas do tipo Berger-Kirchhoff

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u + f(u_t) + g(u) = h \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (0.1)$$

satisfazendo as condições iniciais

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{e} \quad u_t|_{t=0} = u_1 \quad \text{em } \Omega, \quad (0.2)$$

e condições de fronteira

$$u|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma \times \mathbb{R}^+} = 0. \quad (0.3)$$

O termo não local $M \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right) \Delta u$ está relacionado à variação de tensão na viga devida à sua extensibilidade. O termo $f(u_t)$ representa uma dissipação para o sistema e $g(u)$ representa a força exercida pelo meio. A função h representa uma força externa adicional. As condições de fronteira acima modelam o caso em que a viga é fixada pelo bordo Γ .

A equação (0.1) é uma generalização do modelo introduzido por Woinowsky-Krieger,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left(\frac{H}{\rho} + \frac{EA}{2\rho L} \int_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h, \quad (0.4)$$

que descreve as vibrações transversais de uma viga extensível, de comprimento L , fixa nas extremidades e sujeita a uma força externa h . A quantidade H representa uma força axial, E o módulo de Young, I a seção transversal do momento de inércia, ρ a densidade de massa, e A a seção transversal de área. Aspectos de modelagem deste problema também foram discutidos e estendidos por Berger [8], Easley [23] e mais recentemente, por Arosio [1].

No caso em que o termo de quarta ordem não aparece em (0.1) ou (0.4), obtemos a equação da onda de Kirchhoff [26], que foi bem estudada por vários autores. Veja por exemplo, [2, 13, 17, 30, 32, 37, 44] e suas referências.

Voltando ao problema (0.1), os primeiros resultados de análise matemática rigorosa apareceram já nos anos 1970. Podemos citar, por exemplo, os artigos de Ball [4, 5], onde são considerados a existência global, via método de Galerkin, e a estabilidade assintótica na presença de termos de dissipação (dampings). Também é importante mencionarmos o trabalho de Dickey [19] que usa série Fourier. Para dimensões maiores, um dos primeiros resultados foi obtido por Medeiros [34], usando método de Galerkin e estabelecendo hipóteses apropriadas sobre a função M .

Mais tarde, vários resultados interessantes foram publicados focalizando as diversas propriedades qualitativas do problema. Por exemplo, dissipações fracas, dissipações localizadas, soluções com dados iniciais pequenos, problemas com termos de memória, sistemas de termoelasticidade, entre outros. Citamos, por exemplo, os trabalhos [10, 11, 15, 16, 27, 31, 36, 43] e suas referências.

Entretanto, na presença simultânea de três termos não lineares

$$f(u_t) = |u_t|^r u_t, \quad g(u) = |u|^\rho u, \quad \text{e} \quad M(\|\nabla u\|_2^2),$$

o problema da estabilidade assintótica foi considerado com sucesso, apenas recentemente, em Cavalcanti et al [14]. Discutiremos esse caso no Capítulo 4.

Nosso trabalho é dedicado à existência de atratores para o problema (0.1)-(0.3). A existência de atrator global para o modelo (0.4) foi primeiramente investigada por Hale [24]. Depois Eden and Milani [21] estudaram (0.1) no caso em que $g = 0$, $f(u_t) = u_t$, M linear, e com condições de fronteira $u = \Delta u = 0$ sobre $\Gamma \times \mathbb{R}^+$. Quando $g = 0$ e com um termo de dissipação forte $f(u_t) = (-\Delta)^\beta u_t$, com $0 < \beta \leq 1$, Biazutti e Crippa [10] provaram a existência de um atrator exponencial para o problema (0.1). Alguns resultados relacionados podem ser encontrados em [25, 45].

Neste trabalho propomos analisar o problema (0.1)-(0.3) sob dois aspectos. O primeiro, quando a dissipação $f(u_t)$ é linear, e o segundo, quando $f(u_t)$ é não linear. Os resultados obtidos foram divididos nos capítulos 2, 3 e 4, sendo os dois primeiros para o caso linear e o último para o caso não linear.

No Capítulo 2, primeiramente, obtemos a existência e unicidade de solução local forte para o problema (0.1)-(0.3) no espaço energia $E_1 = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$, via teoria de semigrupos e, em seguida, usando estimativas uniformes obtemos uma solução global em E_1 . Finalizando o capítulo, através de argumentos de densidade, obtemos a existência e unicidade de solução global fraca no espaço energia $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

No Capítulo 3, mostramos a existência de conjuntos absorventes para o problema (0.1) em E_0 e E_1 , e a existência de um atrator global em E_0 . Na última seção provamos a existência de um conjunto inércia para o sistema dinâmico associado ao problema (0.1)-(0.3), que atrai exponencialmente todos os conjuntos limitados de E_1 com respeito à norma de E_0 , usando a teoria presente em Eden et al. [22]. O resultado principal do capítulo é o Teorema 3.4.1.

No caso do problema com dissipação não linear, Capítulo 4, enunciamos os resultados de existência e unicidade de solução, cujas provas podem ser deduzidas de Cavalcanti et al. [14]. Mostramos a existência de um conjunto absorvente e a existência de global atrator em E_0 , explorando os mesmos argumentos do caso linear. Entretanto, um resultado que ainda fica em aberto é a prova da existência de um conjunto inércia para o problema (0.1) com dissipação não linear. O resultado principal do capítulo é o Teorema 4.2.1.

Preliminares

1.1 Espaços de Sobolev

Nesta seção faremos uma breve recordação de alguns resultados importantes sobre os espaços de Sobolev que utilizaremos nos capítulos seguintes.

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^N$. Para $p \geq 1$, denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções Lebesgue mensuráveis u , para as quais $|u|^p$ é uma função integrável sobre Ω . Em $L^p(\Omega)$ definimos a norma usual

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Assim $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach. No caso $p = \infty$, $L^p(\Omega)$ é o espaço formado por todas as funções u , essencialmente limitadas sobre Ω . Em $L^\infty(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|.$$

Também neste caso $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach. Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de

Hilbert com produto interno e norma dados, respectivamente, por

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \text{ e } \|u\|_2 = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Propriedades básicas sobre os espaços $L^p(\Omega)$ podem ser encontradas em, por exemplo, Brezis [12].

1.1.1 Espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Dados um multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ e $z = (z_1, z_2, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N$ define-se

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N, \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_N^{\alpha_N}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_N!.$$

Denota-se por D^α o operador de derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}, \quad |\alpha| \neq 0,$$

e para $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ define-se $D^0 u = u$ para toda função u . Por D_i para $i = 1, 2, \dots, N$ representa-se a derivação parcial $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Seja Ω um conjunto limitado ou ilimitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave Γ . Para $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como o espaço das funções u em $L^p(\Omega)$ tais que para todo $|\alpha| \leq m$, as derivadas $D^\alpha u$ no sentido das distribuições, pertencem a L^p . Então, é bem conhecido que $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 2$, usualmente denotamos $W^{m,p}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e este é um espaço de Hilbert com o correspondente produto interno.

Seja $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$ o espaço das funções k continuamente diferenciáveis sobre Ω , e $C_0^m(\Omega)$ a totalidade das funções pertencentes a $C^m(\Omega)$ com suporte compacto em Ω . O fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$ é denotado por $W_0^{m,p}(\Omega)$ que é um subespaço de $W^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.1.1 (Teorema de Densidade) Se Ω é de classe C^m , $m \geq 1$, então $C^m(\overline{\Omega})$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Observação 1.1.1 $C^m(\overline{\Omega})$ modula a eleição de um representante contínuo.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Imersão Compacta) Suponha que Ω é um aberto limitado de classe C^m . Então temos,

(i) Se $mp < N$, então $W^{m,p}(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^{q^*}(\Omega)$ com $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{q^*}(\Omega).$$

Além disso, a imersão é compacta para qualquer q , $1 \leq q < q^*$.

(ii) Se $mp = N$, então $W^{m,p}(\Omega)$ esta continuamente imerso em L^q , para todo q , $1 \leq q < \infty$:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Além disso, a imersão é compacta, para todo q , $1 \leq q < \infty$. Se $p = 1$, $m = N$, então a imersão é válida para $q = \infty$.

(iii) Se $k+1 > m - \frac{N}{p} > k$, $k \in \mathbb{N}$, então escrevendo $m - \frac{N}{p} = k + \alpha$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$, $W^{m,p}(\Omega)$ está continuamente imerso em $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

onde $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ é o espaço das funções em $C^k(\overline{\Omega})$ cujas derivadas de ordem k são Holder contínua com expoente α . Além disso, se $N = m - k - 1$, e $\alpha = 1$, $p = 1$, então a imersão também é válida para $\alpha = 1$, e o operador imersão é compacto de $W^{m,p}(\Omega)$ em $C^{k,\beta}(\overline{\Omega})$, para todo $0 \leq \beta < \alpha$.

As propriedades de imersão (i) – (iii) são válidas para domínios ilimitados ou $\mathbb{R}^N$ e mostram que $L^q(\Omega)$ em (ii) e $C^{k,\alpha}(\Omega)$ em (iii) pode ser substituído por $L_{loc}^q(\Omega)$ e $C^{k,\alpha}(\mathcal{B})$ para qualquer domínio $\mathcal{B} \subset \Omega$, respectivamente.

Seja Ω um aberto limitado de classe C^m e $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Então podemos definir o traço de u sobre Γ que coincide com os valores de u sobre Γ quando u é uma função suave de $C^m(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.1.3 (Teorema do Traço) Seja $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)$ o vetor normal unitário exterior sobre Γ e

$$\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \mathbf{v}^j} \Big|_{\Gamma}, \quad \forall u \in C^m(\overline{\Omega}), \quad j = 1, \dots, m-1.$$

Então o operador traço $\gamma = \{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}\}$ pode ser estendido unicamente a um operador contínuo de $W^{m,p}(\Omega)$ em $\Pi_{j=1}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \gamma: W^{m,p}(\Omega) &\rightarrow \Pi_{j=1}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}. \end{aligned}$$

Além disso, é uma aplicação sobrejetiva.

Note que $W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\Gamma)$ são espaços com derivadas de ordem fracionária. Indicamos livro de Lions e Magenes [28] para definição e outras propriedades.

Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira Γ de classe C^1 . Então para qualquer função $u \in H^1(\Omega)$, vale a seguinte estimativa

$$\|u\|_{2,\Gamma} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|u\|_2^{\frac{1}{2}}$$

onde C é uma constante positiva independente de u .

1.1.2 Espaços $L^p((a,b),X)$

Seja X um espaço de Banach e seja $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Então $L^p((a,b);X)$, $1 \leq p < \infty$, denota o espaço de funções vetoriais L^p de (a,b) sobre X . Este espaço é um espaço de Banach munido da norma

$$\|f\|_{L^p((a,b);X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde o integral é entendido no sentido Bochner.

Para $p = \infty$, $L^\infty((a,b);X)$ é o espaço das funções mensuráveis de (a,b) em X essencialmente limitadas. É também um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{L^\infty((a,b);X)} = \sup_{t \in (a,b)} \|f(t)\|_X.$$

Similarmente, quando $-\infty < a < b < \infty$, podemos definir o espaço de Banach $C^k([a,b];X)$ com a norma

$$\|f\|_{C^k([a,b];X)} = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a,b]} \left\| \frac{d^i f}{dt^i}(t) \right\|_X.$$

1.1.3 Espaços de interpolação

Relembremos alguns fatos sobre operadores lineares associados com uma forma bilinear e espaços de interpolação associados a um operador positivo definido em espaços de Hilbert.

Seja V e H espaços de Hilbert separáveis tal que V é denso em H e a imersão $V \hookrightarrow H$ é contínua e compacta. Assim, pelo Teorema de representação de Riesz podemos escrever

$$V \subset H \equiv H' \subset V'.$$

Denotaremos o produto dual entre V e V' por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e o produto interno em H por $(\cdot, \cdot)$.

Seja A um operador linear contínuo de V em V' . Podemos associá-lo com uma forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ sobre V de maneira que

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad \forall u, v \in V.$$

Supondo que a é simétrico:

$$a(u, v) = a(v, u)$$

e também supondo que a é coercivo, isto é, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

Seja

$$D(A) = \{u : u \in V, Au \in H\}.$$

Então pelo teorema de Lax-Milgran, $a(u, v)$ pode ser considerado um produto interno equivalente. Além disso, A é um operador auto-adjunto estritamente positivo em H e o teorema espectral nos permite definir as potências A^s de A para $s \in \mathbb{R}$. Como assumimos que a imersão $V \hookrightarrow H$ é compacta, existe (ver Yosida [50]) uma base ortonormal completa $\{w_j\}$ de H e uma sequência $\{\lambda_j\}$ tal que $w_j \in D(A)$ e

$$\begin{cases} Aw_j = \lambda_j w_j, & j = 1, 2, \dots, \\ 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, & \lambda_j \rightarrow \infty, \text{ com } j \rightarrow \infty, \\ a(w_i, w_j) = \lambda_i \delta_{ij}, & \forall i, j \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Assim, para $s > 0$, definimos

$$D(A^s) = \left\{ u \in H; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u, w_j)|^2 < \infty \right\},$$

e

$$\|u\|_{D(A^s)} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u, w_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para s negativo, $D(A^s)$ é o complemento de H para a norma $\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2s} |(u, w_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Em particular, temos $V = D(A^{\frac{1}{2}})$.

Sejam X e Y espaços de Banach, com $X \subset Y$, X denso em Y , e a imersão de $X \hookrightarrow Y$ contínua. Em geral existem várias maneiras de definir os espaços intermediários entre X e Y . O que foi descrito acima dá uma espécie de definição de espaço intermediário, ou seja, os espaços de interpolação.

Seja $X := V = D(A^{\frac{1}{2}})$, $Y := H = D(A^0)$, e $a(u, v) = (u, v)_X$.

Então os espaços de interpolação $[X, Y]_{\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$ são dados por

$$[X, Y]_{\theta} = D\left(A^{\frac{1-\theta}{2}}\right), \quad \forall \theta \in [0, 1].$$

e segue a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{[X, Y]_{\theta}} \leq C(\theta) \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^{\theta}, \quad \forall u \in X, \theta \in [0, 1].$$

Um exemplo típico do quadro acima é

$$V = D(A^{1/2}) = H_0^2(\Omega), \quad H = D(A^0) = L^2(\Omega), \quad A = \Delta^2.$$

1.1.4 Desigualdades elementares

A seguir apresentamos uma coleção de resultados elementares, mas fundamentais, sobre desigualdades que utilizamos com frequência nos capítulos seguintes.

Teorema 1.1.4 (Desigualdade de Young) Seja $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (a, b > 0).$$

Corolário 1.1.1 (Desigualdade de Young com ε) Seja $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q, \quad (a, b > 0),$$

para $C(\varepsilon) = (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1}$.

Teorema 1.1.5 (Desigualdade de Poincaré) Seja $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo da medida de Ω e de p) tal que

$$\|u\|_p \leq C \|\nabla u\|_p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lema 1.1.1 (Desigualdade de Gronwall). Sejam $\phi \in L^\infty(t_0, T)$ e $\beta \in L^1(t_0, T)$ tais que $\beta > 0$, $\phi \geq 0$ e $\alpha \geq 0$ uma constante. Se

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^t \beta(s) \phi(s) ds, \quad \text{para } t_0 \leq t \leq T$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^t \beta(s) ds}, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Lema 1.1.2 (Desigualdade de Gronwall Generalizada) Se $\phi, \alpha \in L^\infty(t_0, T)$ e $\beta \in L^1(t_0, T)$, $\beta(t) \geq 0$ e

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s) \phi(s) ds, \quad \text{para } t_0 \leq t \leq T$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s) \alpha(s) e^{\int_s^t \beta(u) du} ds, \quad \text{para } t_0 \leq t \leq T.$$

Teorema 1.1.6 (Desigualdade de Hölder) Sejam $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 1.1.7 (*Desigualdade de Hölder Generalizada*) Sejam $1 \leq p_1, p_2, \dots, p_m \leq \infty$, com $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$. Se $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ para $i = 1, \dots, m$. Então

$$\int_{\Omega} |f_1 \cdots f_m| ds \leq \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}.$$

Teorema 1.1.8 (*Desigualdade de Interpolação Para Normas em L^p*) Suponha que $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ e $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{1-\theta}{t}$. Suponha também que $f \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega)$. Então $f \in L^r(\Omega)$, e

$$\|f\|_r \leq \|f\|_s^\theta \|f\|_t^{1-\theta}.$$

1.2 Aspectos Básicos da Teoria de Semigrupos

Nesta seção, recordaremos alguns resultados básicos sobre a teoria de C_0 -semigrupos de operadores lineares. As demonstrações podem ser encontradas em Pazy [42] e mais condensadamente em Zheng [51]. Estes resultados serão utilizados no Capítulo 2.

1.2.1 Semigrupos de operadores lineares de classe C_0

Assumiremos que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Definição 1.2.1 Uma família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, de operadores lineares limitados de X em X diz-se um semigrupo de operadores lineares limitados sobre X se:

(i) $S(0) = I$, (I é o operador identidade sobre X)

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$ para todo $t, s \geq 0$. (a propriedade de semigrupo)

O operador linear definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ S(t)x}{dt} \right|_t = 0 \text{ para } x \in D(A),$$

é chamado gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $D(A)$ é chamado domínio de A .

Definição 1.2.2 Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados sobre X é um semigrupo de operadores lineares limitados fortemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x \text{ para todo } x \in X,$$

isto é,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)x - x\| = 0 \text{ para cada } x \in X.$$

Um semigrupo de operadores lineares limitados fortemente contínuos sobre X é chamado de semigrupos de classe C_0 ou simplesmente C_0 -semigrupo.

Teorema 1.2.1 Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo. Então existe uma constante $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \text{ para } 0 \leq t < \infty.$$

O proximo Teorema é um a caracterização para um C_0 -semigrupo, que desempenha um papel crucial no estudo das equações diferenciais parciais (ver, por exemplo, [42]).

Teorema 1.2.2 Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo e seja A seu gerador infinitesimal. Então

- (i) Para $x \in X$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)x ds = S(t)x$.
- (ii) Para $x \in X$, $\int_0^t S(s)x ds \in D(A)$ e $A \left(\int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x$.
- (iii) Para $x \in D(A)$, $S(t)x \in D(A)$ e $\frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$.
- (iv) Para $x \in D(A)$, $S(t)x - S(s)x = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AS(\tau)x d\tau$.

Corolário 1.2.1 Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.

Definição 1.2.3 Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é chamado um semigrupo de contrações se existe uma constante $\alpha \in (0, 1]$ tal que

$$\|S(t)x - S(t)y\| \leq \alpha \|x - y\| \text{ para todo } x, y \in X.$$

Definição 1.2.4 *Seja A um operador linear sobre X , não necessariamente limitado, o conjunto resolvente $\rho(A)$ de A é o conjunto de todos os números complexos λ tal que $\lambda I - A$ é invertível e $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado sobre X . A família $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$ de operadores lineares limitados é chamada resolvente de A . O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é chamado espectro de A .*

1.2.2 Teoremas de Hille-Yosida e de Lumer-Phillips

O próximo teorema dá uma condição necessária e suficiente para um operador densamente definido ser o gerador infinitesimal de um semigrupo linear de contrações em um espaço de Banach.

Teorema 1.2.3 (Hille-Yosida) *Um operador (ilimitado) A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ se, e somente se,*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para todo $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

A seguir, apresentamos outra caracterização dos geradores infinitesimais dos C_0 -semigrupos de contrações, o teorema de Lumer-Phillips, que é muito útil na teoria dos semigrupos lineares. Para estabelecer tal teorema, recordemos o conceito de dissipatividade. Assumamos que X^* é o espaço dual de X . Denotemos os valores de $x^* \in X^*$ em $x \in X$ por $\langle x^*, x \rangle$ ou $\langle x, x^* \rangle$.

Para cada $x \in X$, definimos a aplicação dualidade $J : X \rightarrow 2^{X^*}$,

$$J(x) = \{x^* \in X^* : \operatorname{Re} \langle x, x^* \rangle = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2\}.$$

Do teorema de Hahn-Banach segue que $J(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$.

Definição 1.2.5 *Dizemos que o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo, quando*

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x^* \rangle \leq 0, \quad \text{para todo } x \in D(A). \quad (1.2)$$

Uma caracterização muito útil dos operadores dissipativos é dado pelo próximo resultado.

Teorema 1.2.4 *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow R(A) \subseteq X$ é dissipativo se, e somente se,*

$$\|(\lambda I - A)x\| \leq \lambda \|x\| \quad \text{para todo } x \in D(A), \lambda > 0.$$

Observação 1.2.1 *A motivação para o uso da palavra "dissipativo" vem do caso onde X é um espaço de Hilbert. Então, para um operador linear A , a condição (1.2) é equivalente à condição*

$$\operatorname{Re}(x, Ax) \leq 0 \quad \text{para todo } x \in D(A)$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto escalar interno em X .

Definição 1.2.6 *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow R(A) \subseteq X$ é m -dissipativo se A é dissipativo e*

$$R(\lambda I - A) = X \quad \text{para todo } \lambda > 0$$

isto é, para qualquer $g \in X$, existe $f \in D(A)$ tal que $(\lambda I - A)f = g$.

Em virtude desta definição, podemos concluir

Corolário 1.2.2 *Todo operador m -dissipativo é um operador dissipativo.*

Agora podemos estabelecer o teorema de Lumer-Phillips.

Teorema 1.2.5 (Lumer-Phillips) *Um operador linear A gera um C_0 -semigrupo de contrações sobre X se, e somente se,*

(i) $D(A)$ é denso em X , e

(ii) A é m -dissipativo.

1.2.3 Problema de valor inicial não homogêneo

Consideremos agora o problema de valor inicial não homogêneo

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au(t) = f(t, u(t)), t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X e $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ é contínua em t e satisfaz a condição de Lipschitz em u .

Definição 1.2.7 (Solução forte) Uma função u que é diferenciável sobre quase todo $[0, T]$ tal que $u' \in L^1(0, T; X)$ é chamada uma "solução forte" do problema de valor inicial (1.3) se $u(0) = u_0$ e

$$u'(t) = AU(t) + f(t, u(t)) \quad \text{quase sempre sobre } [0, T].$$

Definição 1.2.8 (Mild solution) Uma função $u \in C([0, T]; X)$ dada por

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

é chamada de "mild solution" do problema (1.3) sobre $[0, T]$.

O resultado clássico, a seguir, assegura a existência e unicidade de "mild solutions" de (1.3) para uma função Lipschitz contínua f .

Teorema 1.2.6 Seja $f : [0, \infty) \times X \rightarrow X$ contínua em t para $t \geq 0$ e localmente Lipschitz contínua em u , uniformemente em t sobre intervalos limitados. Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre X , então para todo $u_0 \in X$ existe $t_{\max} \leq \infty$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_t - Au(t) = f(t, u(t)), & t \geq 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

possui uma única mild solution u definida em $[0, t_{\max})$. Além disso, se $t_{\max} < \infty$ então

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty.$$

Em geral se $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ é apenas Lipschitz contínua em ambas as variáveis, a mild solution não é uma solução forte para o problema de valor inicial. Entretanto, se X é reflexivo, a continuidade Lipschitz de f assegura que a mild solution u com dado inicial $u_0 \in D(A)$ é uma solução forte. Este resultado é garantido pelo próximo teorema.

Teorema 1.2.7 Seja A o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}$ sobre um espaço de Banach reflexivo X . Se $f : [0, T] \times X \rightarrow X$ é Lipschitz contínua em ambas as variáveis, $u_0 \in D(A)$

e u é uma mild solution do problema de valor inicial (1.3), então u é uma solução forte deste problema de valor inicial.

Ball em [6] define solução fraca da equação (1.3) onde A é um operador linear fechado sobre X e $f \in L^1(0, T; X)$ como segue:

Definição 1.2.9 (Solução fraca) Uma função $u \in C([0, T]; X)$ é uma solução fraca de (1.3) sobre $[0, T]$ se para todo $v^* \in D(A^*)$ a função $\langle u(t), v^* \rangle$ é absolutamente contínua sobre $[0, T]$ e

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v^* \rangle = \langle u(t), A^* v^* \rangle + \langle f(t), u(t), v^* \rangle \quad q.s. \text{ sobre } [0, T].$$

Da definição acima, segue o seguinte resultado.

Teorema 1.2.8 Existe para cada $u_0 \in X$ uma única solução fraca u de (1.3) sobre $[0, T]$ satisfazendo $u(0) = u_0$ se, e somente se, A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de operadores lineares limitados $\{S(t)\}$ sobre X , e neste caso u é dada por

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s, u(s))ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Estes resultados podem ser encontrados em Pazy [42] e Ball [6].

1.3 Atrator Global e Atrator Exponencial

Nesta seção definimos atrator global e apresentamos seus resultados básicos. As demonstrações podem ser encontradas em [16], [48] e [51]. Terminamos esta seção definindo conjunto inércia e suas principais propriedades. As demonstrações dos resultados sobre conjunto inércia podem ser encontradas em [22].

1.3.1 Definição de atrator global

Definição 1.3.1 Suponha que E é um espaço métrico completo, e $S(t)$ é um C_0 -semigrupo de operadores não lineares definidos sobre E . Um conjunto $\mathcal{A} \subset E$ diz-se um atrator global se as seguintes propriedades são satisfeitas:

(i) $\mathcal{A}$ é um conjunto positivamente invariante, isto é,

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad \forall t \geq 0.$$

(ii) $\mathcal{A}$ é compacto em E .

(iii) $\mathcal{A}$ atrai uniformemente todo limitado de E , isto é, para qualquer limitado $B \subset E$

$$\text{dist}(S(t)B, \mathcal{A}) = \sup_{x \in S(t)B} \inf_{y \in \mathcal{A}} d(x, y) \rightarrow 0 \text{ com } t \rightarrow \infty.$$

Para estabelecer a existência de um atrator global, um passo crucial é mostrar a existência de um conjunto absorvente que definimos a seguir.

Definição 1.3.2 Um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um conjunto absorvente B_0 em um espaço métrico E , se para qualquer conjunto limitado $B \subset E$, existe $t_0 = t_0(B) \geq 0$ tal que

$$S(t)B \subset B_0 \quad \forall t \geq t_0.$$

Definição 1.3.3 Seja $A \subset E$. Definimos o conjunto ω -limite $\omega(A)$ por

$$\omega(A) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)A}$$

onde o fecho tomado em E . Equivalentemente, $\omega(A)$ pode ser definido como

$$\omega(A) = \{\phi : \exists t_n \rightarrow \infty \text{ e uma sequência } \phi_n \in A \text{ tal que } S(t_n)\phi_n \rightarrow \phi \text{ com } n \rightarrow \infty\}$$

Podemos ver das definições de atrator global e conjunto absorvente para um C_0 -semigrupo não linear $S(t)$, que a existência de um atrator global implica a existência de um conjunto absorvente. A recíproca nem sempre é válida, pois um conjunto absorvente não necessariamente é um conjunto invariante. Entretanto, temos o seguinte resultado que será fortemente usado nos próximos capítulos para provar a existência de atrator global.

Teorema 1.3.1 ([3], [48]) Suponha que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um não linear C_0 -semigrupo definido sobre um espaço de Banach E satisfazendo as seguintes condições:

- (i) *Conjunto Absorvente:* Existe um conjunto absorvente limitado B_0 .
- (ii) *Compacidade Assintótica:* Para qualquer sequência limitada $\{y_n\} \subset E$ e uma sequência numérica $t_n \rightarrow \infty$, existe uma subsequência $\{S(t_{n_k})(y_{n_k})\}$ de $\{S(t_n)(y_n)\}$ que é convergente em E .

Então $S(t)$ Possui um atrator global $\mathcal{A} \subset E$, que é precisamente o conjunto ω -limite de B_0 .

Nos modelos que vamos estudar, para provarmos a propriedade (i) do Teorema 1.3.1, isto é, a existência de um conjunto absorvente, utilizaremos o lema de Nakao ([37], Lema 2.1).

Lema 1.3.1 (Nakao) *Seja ϕ uma função contínua não negativa sobre $[0, T)$, $T > 1$, possivelmente $T = \infty$, satisfazendo*

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \phi(s)^{1+\gamma} \leq k_0 (\phi(t) - \phi(t+1)) + k_1, \quad 0 \leq t \leq T-1, \quad (1.4)$$

para algum $k_0 > 0$, $k_1 > 0$ e $\gamma > 0$. Então temos

$$\phi(t) \leq \left(k_0^{-1} \gamma(t-1)^+ + \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} \phi(s) \right)^{-\gamma} \right)^{\frac{-1}{\gamma}} + k_1^{\frac{1}{\gamma+1}}, \quad 0 \leq t < T \quad (1.5)$$

Se (1.4) vale com $\gamma = 0$ temos, em vez de (1.5),

$$\phi(t) \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \phi(s) \left(\frac{1+k_0}{k_0} \right) e^{-\theta t} + k_1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.6)$$

onde $\theta = \ln \left(\frac{1+k_0}{k_0} \right)$.

Por outro lado, para verificarmos a propriedade (ii) de Teorema 1.3.1, também conhecida como compacidade assintótica, utilizaremos uma abordagem mais recente, que pode ser encontradas em Khanmamedov [25] ou Lasiecka-Chueshov ([16], Capítulo 2, Proposição 2.10).

Lema 1.3.2 *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo sobre um espaço métrico (E, d) que possui um conjunto absorvente B_0 . Além disso, assuma que para qualquer $\varepsilon \geq 0$ existe $T = T(B_0, \varepsilon)$ tal que*

$$d(S(T)y_1, S(T)y_2) \leq \varepsilon + \phi_T(y_1, y_2), \quad \text{para todo } y_1, y_2 \in B_0$$

onde $\phi_T(y_1, y_2)$ é uma função contrativa sobre $B_0 \times B_0$, no seguinte sentido, para qualquer sequência $\{y_n\} \subset B_0$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \limsup_{m \rightarrow \infty} \phi_T(y_n, y_m) = 0.$$

Então, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é compactamente assintótico em E , isto é, para qualquer sequência limitada $(y_n) \subset E$ e $t_n \rightarrow \infty$, $S(t_n)y_n$ é precompacto em E .

1.3.2 Dimensão fractal e dimensão de Hausdorff

Seja Y um subconjunto de um espaço métrico E . Dado $d \in \mathbb{R}_+$ e $\varepsilon > 0$, definimos

$$\mu_H(Y, d, \varepsilon) = \inf \sum_{i \in I} r_i^d,$$

o ínfimo de todas as coberturas de Y por uma família $(B_i)_{i \in I}$ de bolas de E de raio $r_i \leq \varepsilon$.

Vê-se claramente que $\mu_H(Y, d, \varepsilon)$ é uma função não crescente de ε e o número $\mu_H(Y, d) \in [0, \infty]$ definido por

$$\mu_H(Y, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_H(Y, d, \varepsilon) = \sup_{\varepsilon > 0} \mu_H(Y, d, \varepsilon)$$

é a medida d -dimensional de Hausdorff de Y . Claramente vê-se que, se $\mu_H(Y, d') < \infty$ para algum d' , então $\mu_H(Y, d) = 0$ para todo $d > d'$. Assim podemos afirmar que existe $d_0 \in [0, \infty]$ tal que $\mu_H(Y, d) = 0$ para $d > d_0$ e $\mu_H(Y, d) = \infty$ para $d < d_0$, enquanto $\mu_H(Y, d_0)$ pode ser qualquer número em $[0, \infty]$. Este número d_0 é chamado a *dimensão de Hausdorff de Y* e é denotado por $d_H(Y)$.

Seja $\eta_Y(\varepsilon)$ o número mínimo de bolas de H de raio ε que é necessário para cobrir Y . Chamamos de *dimensão fractal de Y* ou *compacidade de Y* o número

$$d_F(Y) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \eta_Y(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}.$$

Uma expressão alternativa para $d_F(Y)$ é dada por

$$d_F(Y) = \inf\{d > 0, \mu_F(Y, d) = 0\},$$

onde $\mu_F(Y, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \varepsilon^d \eta_Y(\varepsilon)$.

A diferença entre a dimensão de Hausdorff e a dimensão fractal está no fato de que consid-

eramos, em um caso, as coberturas de Y por bolas de raio $\leq \varepsilon$, e no outro caso, a cobertura de Y é dada por bolas de raio ε .

Para mais resultados a respeito de dimensão de Hausdorff e fractal ver Chueshov e Lasiecka [16] e Temam [48].

1.3.3 Atrator exponencial (conjunto inércia)

Para sistemas de equações diferenciais cujas soluções existem para todo $t \geq 0$, Eden et al. [22] introduziu a noção de atrator exponencial ou conjunto inércia, que é um conjunto de dimensão finita que contém o atrator global e, ao mesmo tempo, atrai exponencialmente todas as soluções do sistema.

Seja E um espaço de Hilbert separável e $\mathcal{X}$ um subconjunto compacto de E . Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo não linear que deixa $\mathcal{X}$ invariante e seja $\mathcal{A} = \bigcap \{S(t)\mathcal{X}\}_{t \geq 0}$, isto é, $\mathcal{A}$ é o atrator global para $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ sobre $\mathcal{X}$.

Definição 1.3.4 Um conjunto compacto $\mathcal{M}$ é chamado de atrator exponencial ou conjunto inércia para o C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ se satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{X}$, onde $\mathcal{A}$ é o atrator global associado a $\{S(t)\}_{t \geq 0}$,
- (ii) $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, para todo $t \geq 0$,
- (iii) para u_0 em $\mathcal{X}$, $\text{dist}(S(t)u_0, \mathcal{M}) \leq c_1 e^{-c_2 t}$ para todo $t \geq 0$, onde c_1 e c_2 são independentes de u_0 ,
- (iv) $\mathcal{M}$ possui dimensão fractal finita, $d_{\mathcal{M}}$.

Uma condição suficiente para a existência de um atrator exponencial é baseada num princípio de dicotomia chamado de *propriedade de compressão* (squeezing property) que é definido como segue.

Definição 1.3.5 Um semigrupo contínuo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz a propriedade de compressão (squeezing property) sobre $\mathcal{X}$ se existe $t_* > 0$ tal que $S_* = S(t_*)$ satisfaz: existe uma projeção ortogonal P de posto N_0 tal que para todo u e v em $\mathcal{X}$, ou

$$\|(I - P)(S_* u - S_* v)\|_E \leq \|P(S_* u - S_* v)\|_E \quad (1.7)$$

ou então

$$\|S_*u - S_*v\|_E \leq \frac{1}{8}\|u - v\|_E. \quad (1.8)$$

A existência de um atrator exponencial segue então do próximo teorema. (cf. Eden et al [22], Teorema 3.1).

Teorema 1.3.2 (*Existência de Atrator Exponencial*) *Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ satisfaz a propriedade de compressão sobre $\mathcal{X}$ e $S_* = S(t_*)$ é Lipschitz sobre $\mathcal{X}$ com constante de Lipschitz L , então existe um atrator exponencial $\mathcal{M}$ para $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tal que*

$$d_{\mathcal{M}} \leq N_0 \max\{1, \ln(16L + 1)/\ln 2\}$$

e

$$\text{dist}_E(S(t)u_0, \mathcal{M}) \leq c_1 e^{(-c_2/t_*)t}.$$

Note que, precisamos apenas encontrar o tempo t_* e a projeção P de posto n_0 a fim de avaliar o lado direito das desigualdades do teorema.

Solução Global para o Problema com Dissipação Linear

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, um aberto e limitado com fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$. Consideremos em $\Omega \times \mathbb{R}^+$ a equação da viga não linear do tipo Kirchhoff dada pela seguinte equação

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + \beta u_t + |u|^\rho u = h(x, t), \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{sobre } \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

onde M é uma função real não negativa de classe C^1 , $\beta > 0$,

$$0 < \rho \leq \frac{2}{N-2} \text{ se } N \geq 3 \text{ e } \rho > 0 \text{ se } N = 1, 2, \quad (2.2)$$

e h é uma força externa.

Para obtermos os resultados de existência de solução global assumiremos que a função M satisfaz as seguintes hipóteses:

(i) M é uma função de classe $C^1([0, +\infty))$ tal que

$$M(s) \geq 0 \text{ para todo } s \in \mathbb{R}^+, \quad (2.3)$$

(ii) M é monótona crescente, o que implica que

$$M(s)s \geq \widehat{M}(s), \text{ onde } \widehat{M}(\lambda) = \int_0^\lambda M(s)ds. \quad (2.4)$$

2.1 Existência de Solução Global

Nesta seção investigaremos a existência e unicidade de soluções para o problema (2.1). A existência de solução forte será analisada no espaço de fase $E_1 = (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$ e a existência de solução fraca no espaço de fase $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

2.1.1 Existência de solução forte

Consideremos o espaço de Hilbert

$$E_1 = (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$$

munido da norma

$$\|(u, v)\|_{E_1}^2 = \|\Delta^2 u\|_2^2 + \|\Delta u\|_2^2 + \|\Delta v\|_2^2.$$

O resultado que garante a existência de solução forte é dado pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1.1 *Suponha que a função M satisfaz as condições (2.3) e (2.4). Então, se*

$$h \in C^1([0, \infty), L^2(\Omega)) \quad e \quad (u_0, u_1) \in E_1,$$

o problema (2.1) admite uma única solução global u nas seguintes classes

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, \infty; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), \\ u_t &\in L^\infty(0, \infty; H_0^2(\Omega)), \\ u_{tt} &\in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Demonstração:

Primeiramente, mostraremos a existência e unicidade de solução local para o problema (2.1) usando resultados da teoria de semigrupos que pode ser encontrada em [42]. Em seguida, obte-

mos solução global através de estimativas uniformes sobre a solução do problema no espaço energia $E_1 = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$.

Com efeito, fazendo $v = u_t$ a equação de (2.1) pode ser transformada no seguinte sistema de primeira ordem:

$$\begin{cases} u_t - v = 0 \\ v_t + \Delta^2 u - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + \beta v + |u|^\rho u = h \end{cases} \quad (2.6)$$

Introduzindo o vetor $U = (u, v)$, o sistema (2.6) pode ainda ser reescrito da seguinte forma

$$U_t = AU + F(U), \text{ onde } AU = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Delta^2 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

e

$$F(U) = (0, \psi(u)), \text{ com } \psi(u) = M(\|\nabla u\|_2^2)\Delta u - |u|^\rho u + h.$$

Assim, a equação (2.1) fica expressa pelo sistema de primeira ordem dado por

$$U_t - AU = F(U), \quad (2.7)$$

com condições de fronteira

$$U|_\Gamma = (u, v)|_\Gamma = 0 \quad (2.8)$$

e condições iniciais

$$U(0) = U_0 = (u_0, u_1). \quad (2.9)$$

Prosseguindo, definamos o espaço de Hilbert

$$E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

equipado com o seguinte produto interno

$$(U, V)_{E_0} = \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right)_{E_0} = \int_{\Omega} \Delta u \Delta w dx + \int_{\Omega} v z dx$$

e norma

$$\|(u, v)\|_{E_0}^2 = \|\Delta u\|_2^2 + \|v\|_2^2.$$

Para o operador matriz $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$, temos

$$D(A) = E_1 = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega).$$

Observe que encontrar uma solução de (2.1) é equivalente a encontrar uma solução para (2.7)-(2.9).

Lema 2.1.1 *A parte linear de (2.7) gera um C_0 -semigrupo de operadores $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.*

Demonstração:

Para mostrar que a parte linear do sistema (2.7) gera um C_0 -semigrupo devemos mostrar que o operador $A : D(A) \subset E_0 \rightarrow E_0$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $D(A)$ é denso em E_0 .
- (ii) A é m -dissipativo (A dissipativo e $R(I - A) = E_0$).

Claramente, $D(A)$ é denso em E_0 . Resta provar que A é m -dissipativo.

A propriedade de dissipatividade pode ser vista pela seguinte desigualdade,

$$(AU, U)_{E_0} = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v dx + \int_{\Omega} (-\Delta^2 u - \beta v) v dx = -\beta \|v\|_2^2 \leq 0. \quad (2.10)$$

Agora, para mostrar que $R(I - A) = E_0$, considere a equação

$$(I - A) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F} \\ \mathcal{G} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

onde $\mathcal{F} \in H_0^2(\Omega)$ e $\mathcal{G} \in L^2(\Omega)$. Podemos reescrever (2.11) como

$$\begin{cases} u - v = \mathcal{F}, \\ \Delta^2 u + (\beta + 1)v = \mathcal{G}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Substituindo v obtido pela primeira equação na segunda equação encontramos

$$\Delta^2 u + (\beta + 1)u = (\beta + 1)\mathcal{F} + \mathcal{G} \in L^2(\Omega). \quad (2.13)$$

Multiplicando (2.13) por $w \in H_0^2(\Omega)$ e integrando sobre Ω , obtemos

$$\int_{\Omega} (\Delta u \Delta w + (\beta + 1)uw) dx = \int_{\Omega} ((\beta + 1)\mathcal{F} + \mathcal{G}) w dx. \quad (2.14)$$

Agora, definindo $a : H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$a(u, w) = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta w + (\beta + 1)uw) dx,$$

temos que $a(u, w)$ é uma forma bilinear, contínua e coerciva. Logo, pelo teorema de Lax-Milgram [12], para $\varphi = ((\beta + 1)\mathcal{F} + \mathcal{G}) \in L^2(\Omega) \hookrightarrow (H_0^2(\Omega))'$ existe uma única $u \in H_0^2(\Omega)$ tal que

$$a(u, w) = \int_{\Omega} ((\beta + 1)\mathcal{F} + \mathcal{G}) w dx, \quad \forall w \in H_0^2(\Omega).$$

Pela regularidade de problemas elípticos podemos concluir que o problema (2.13) admite uma única solução u tal que

$$u \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega).$$

Então deduzimos da primeira equação de (2.12) que $v - u = \mathcal{F} \in H_0^2(\Omega)$. Assim

$$R(I - A) = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

e portanto, A é m -dissipativo.

Assim, pelo teorema de Lumer-Phillips, a parte linear do sistema (2.7) gera um C_0 -semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ e isto conclue a prova do Lema 2.1.1. ■

Agora, para mostrar existência local de solução para (2.7)-(2.8) é suficiente mostrar que o lado direito de (2.7) é uma função localmente Lipschitz. Isto é garantido pelo seguinte lema.

Lema 2.1.2 *Suponha que M satisfaz as condições (2.3) e (2.4), com $0 \leq t \leq T_0$. Então o operador $F(U)$ é localmente Lipschitz em E_0 .*

Demonstração:

Sejam $u, \tilde{u} \in H_0^2(\Omega)$, $w \in L^2(\Omega)$ e $R = R(T_0) > 0$ com $\|u\|_{H_0^2} \leq R$ e $\|\tilde{u}\|_{H_0^2} \leq R$. Note que

$$\begin{aligned} |(\psi(u) - \psi(\tilde{u}), w)| &\leq |M(\|\nabla u\|^2)(\Delta u, w) - M(\|\nabla \tilde{u}\|^2)(\Delta \tilde{u}, w)| \\ &\quad + \left| \int_{\Omega} (|u|^\rho u - |\tilde{u}|^\rho \tilde{u}) w dx \right|. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como a função $g(s) = |s|^\rho s$ é de classe C^1 e $g'(s) = (\rho + 1)|s|^\rho$, dados $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\xi = \xi_1 + \theta(\xi_2 - \xi_1)$, $\theta \in]0, 1[$ tal que

$$\begin{aligned} |g(\xi_2) - g(\xi_1)| &\leq |g'(\xi)| |\xi_2 - \xi_1| \\ \Rightarrow ||\xi_2|^\rho \xi_2 - |\xi_1|^\rho \xi_1| &\leq (\rho + 1) |\xi|^\rho |\xi_2 - \xi_1| \\ \Rightarrow ||\xi_2|^\rho \xi_2 - |\xi_1|^\rho \xi_1| &\leq (\rho + 1) |\xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)\theta|^\rho |\xi_2 - \xi_1|. \end{aligned}$$

Em particular, se $\xi_1 = u$ e $\xi_2 = \tilde{u}$, temos

$$\begin{aligned} ||u|^\rho u - |\tilde{u}|^\rho \tilde{u}| &\leq (\rho + 1) |u + (\tilde{u} - u)\theta|^\rho |\tilde{u} - u| \\ &\leq (\rho + 1) \{|u| + |\tilde{u}| + |u|\}^\rho |u - \tilde{u}| \\ &\leq (\rho + 1) \{2|u| + 2|\tilde{u}|\}^\rho |u - \tilde{u}| \\ &\leq (\rho + 1) 2^\rho \{|u| + |\tilde{u}|\}^\rho |u - \tilde{u}| \\ &\leq (\rho + 1) 2^\rho 2^\rho \{|u|^\rho + |\tilde{u}|^\rho\} |u - \tilde{u}|. \end{aligned}$$

Logo

$$|g(u) - g(\tilde{u})| \leq 2^{2\rho} (\rho + 1) \{|u|^\rho + |\tilde{u}|^\rho\} |u - \tilde{u}|.$$

Assim, usando a desigualdade de Holder $\frac{1}{2(\rho+1)} + \frac{\rho}{2(\rho+1)} + \frac{\rho}{2(\rho+1)} = 1$ e observando que $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, deduzimos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (|u|^\rho u - |\tilde{u}|^\rho \tilde{u}) w dx \right| \\ & \leq 2^{2\rho} (\rho+1) \{ \|u\|_{2(\rho+1)}^\rho + \|\tilde{u}\|_{2(\rho+1)}^\rho \} \|u - \tilde{u}\|_{2(\rho+1)} \|w\|_2 \\ & \leq 2^{2\rho} (\rho+1) C_1 \{ \|u\|_{H_0^2}^\rho + \|\tilde{u}\|_{H_0^2}^\rho \} \|u - \tilde{u}\|_{H_0^2(\Omega)} \|w\|_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Por outro lado, como M satisfaz (2.3) e (2.4) então, a desigualdade triangular e o Teorema do Valor Médio implica

$$\begin{aligned} & |M(\|\nabla u\|_2^2)(\Delta u, w) - M(\|\nabla \tilde{u}\|_2^2)(\Delta \tilde{u}, w)| \\ & \leq |M(\|\nabla u\|_2^2)(\Delta(u - \tilde{u}), w)| + |[M(\|\nabla u\|_2^2) - M(\|\nabla \tilde{u}\|_2^2)](\Delta \tilde{u}, w)| \\ & \leq \max_{0 \leq s \leq R} M(s) \|u - \tilde{u}\|_{H_0^2} \|w\|_2 \\ & \quad + \max_{0 \leq s \leq R} |M'(s)| |\|\nabla u\|_2^2 - \|\nabla \tilde{u}\|_2^2| \|\tilde{u}\|_{H_0^2} \|w\|_2 \\ & \leq \max_{0 \leq s \leq R} M(s) \|u - \tilde{u}\|_{H_0^2} \|w\|_2 \\ & \quad + \max_{0 \leq s \leq R} |M'(s)| |\|\nabla u\|_2 + \|\nabla \tilde{u}\|_2| |\|\nabla u\|_2 - \|\nabla \tilde{u}\|_2| \|\tilde{u}\|_{H_0^2} \|w\|_2 \\ & \leq \max_{0 \leq s \leq R} M(s) \|u - \tilde{u}\|_{H_0^2} \|w\|_2 \\ & \quad + \max_{0 \leq s \leq R} |M'(s)| C_2 \left[(\|u\|_{H_0^2} + \|\tilde{u}\|_{H_0^2}) \|\tilde{u}\|_{H_0^2} \right] \|u - \tilde{u}\|_{H_0^2} \|w\|_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Assim, substituindo (2.16) e (2.17) em (2.15), temos

$$\frac{|(\psi(u) - \psi(\tilde{u}), w)|}{\|w\|_2} \leq C(T_0, \|u\|_{H_0^2}, \|\tilde{u}\|_{H_0^2}) \|u - \tilde{u}\|_{H_0^2}.$$

ou

$$\|\psi(u) - \psi(\tilde{u})\|_{(L^2(\Omega))'} \leq C(T_0, \|u\|_{H_0^2}, \|\tilde{u}\|_{H_0^2}) \|u - \tilde{u}\|_{H_0^2}. \quad (2.18)$$

com $C(T_0, \|u\|_{H_0^2}, \|\tilde{u}\|_{H_0^2}) > 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|F(U) - F(\tilde{U})\|_{E_0} &= \|\psi(u) - \psi(\tilde{u})\|_2 \\
&= \|\psi(u) - \psi(\tilde{u})\|_{2'} \\
&\leq C(T_0, \|u\|_{H_0^2}, \|\tilde{u}\|_{H_0^2}) \|u - \tilde{u}\|_{H_0^2} \\
&\leq C(T_0, \|U\|_{E_0}, \|\tilde{U}\|_{E_0}) \|U - \tilde{U}\|_{E_0}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

que prova que F é localmente Lipschitz em E_0 . E portanto concluímos a prova do Lema 2.1.2 ■

Do Lema 2.1.1 e Lema 2.1.2 segue que o problema (2.7) e consequentemente (2.1) possui uma solução local $U = (u, u_t)$ nas seguintes classes

$$(u, u_t) \in L^\infty(0, T_{max}; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)).$$

Resta mostrar a existência global. Para isto é suficiente provar que a $U = (u, u_t)$ é uniformemente limitada.

Lema 2.1.3 *Seja $U = (u, v)$ uma solução de (2.7) em seu intervalo maximal $[0, T_{max})$. Então*

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} \{\|\Delta^2 u(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2\} < \infty.$$

Demonstração:

Multiplicando a equação em (2.1) por u_t , então integrando em Ω encontramos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u(t)\|_2^2 + \widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \frac{2}{\rho+2} \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \right\} + \beta \|u_t(t)\|_2^2 \\
&= \int_{\Omega} h u_t dx.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Integrando de 0 até $t \leq T_{max}$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\|u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u(t)\|_2^2 + \widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \frac{2}{\rho+2} \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \beta \int_0^t \|u_t(s)\|_2^2 ds \\
&\leq \frac{1}{\beta} \int_0^t \|h(s)\|_2^2 ds + \|u_1\|_2^2 + \|\Delta u_0\|_2^2 + \widehat{M}(\|\nabla u_0\|_2^2) + \frac{2}{\rho+2} \|u_0\|_{\rho+2}^{\rho+2}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Usando que $(u_0, u_1) \in D(A) \subset E_0$ e $h \in C^1([0, \infty), L^2(\Omega))$, existe uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\frac{1}{\beta} \int_0^t \|h(s)\|_2^2 ds + \|u_1\|_2^2 + \|\Delta u_0\|_2^2 + \widehat{M}(\|\nabla u_0\|_2^2) + \frac{2}{\rho+2} \|u_0\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq C_3.$$

Como $\widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) \geq 0$, segue que

$$\|U(t)\|_{E_0}^2 = \|(u(t), u_t(t))\|_{E_0}^2 \leq C_3, \quad \forall t \in [0, T_{max}).$$

No que segue, para obter estimativas de ordens maiores diferenciamos a equação (2.1) com respeito a t e multiplicando o resultado por u_{tt} , e integrando sobre Ω , vemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 \} \\ &= \int_{\Omega} h' u_{tt} dx + M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) 2(\nabla u_t, \nabla u)(\Delta u, u_{tt}) \\ & \quad + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u_t, u_{tt}) - (\rho+1) \int_{\Omega} |u|^\rho u_t u_{tt} dx \end{aligned} \quad (2.22)$$

Usando que M é de classe C^1 , temos

$$\begin{aligned} & M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) 2(\nabla u_t, \nabla u)(\Delta u, u_{tt}) \\ & \leq C_4 \{ \|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 \} \end{aligned} \quad (2.23)$$

e

$$M(\|\nabla u(t)\|_2^2)(\Delta u_t, u_{tt}) \leq C_5 \{ \|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 \}. \quad (2.24)$$

Novamente, usando a imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned} (\rho+1) \int_{\Omega} |u|^\rho u_t u_{tt} dx & \leq (\rho+1) \|u(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho \|u_t(t)\|_{2(\rho+1)} \|u_{tt}(t)\|_2 \\ & \leq C_6 \{ \|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 \}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Substituindo (2.23)-(2.25) in (2.22), encontramos

$$\frac{d}{dt} \{ \|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 \} \leq \|h'(t)\|_2^2 + C_7 \{ \|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 \}. \quad (2.26)$$

Integrando de 0 até $t \leq T_{max}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 &\leq \int_0^t \|h'(s)\|_2^2 ds \\ &+ \|u_{tt}(0)\|_2^2 + \|\Delta u_t(0)\|_2^2 + C_7 \int_0^t \{\|u_{tt}(s)\|_2^2 + \|\Delta u_t(s)\|_2^2\} ds. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Usando que $(u_0, u_1) \in D(A)$ e $h \in C^1([0, \infty); L^2(\Omega))$ existe uma constante $C_8 > 0$ tal que

$$\int_0^t \|h'(s)\|_2^2 ds + \|u_{tt}(0)\|_2^2 + \|\Delta u_t(0)\|_2^2 \leq C_8, \quad \forall t \in [0, T_{max}).$$

Do lema de Gronwall, obtemos

$$\|u_{tt}(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 \leq C_9, \quad \forall t \in [0, t_{max}). \quad (2.28)$$

Agora, como

$$u_{tt}, M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u, |u|^p u, u_t \in L^\infty(0, T_{max}; L^2(\Omega))$$

e

$$\Delta^2 u = u_{tt} - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + |u|^p u + \beta u_t,$$

deduzimos que

$$\|\Delta^2 u\|_2 = \|u_{tt} - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + |u|^p u + \beta u_t\|_2 \leq C_{10}, \quad (2.29)$$

para todo $t \in [0, T_{max})$.

Logo, de (2.28) e (2.29), resulta que

$$\lim_{t \rightarrow T_{max}} \{\|\Delta^2 u(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2\} < \infty.$$

Isto prova o Lema 2.1.3. ■

Do Lema 2.1.3 segue que $T_{max} = +\infty$ e conseqüentemente $U = (u, u_t)$ existe globalmente.

Finalizando, mostraremos a unicidade: Suponhamos que (2.1) possui duas soluções, digamos u e v , com mesmo dados iniciais em $t = 0$. Então a diferença das duas soluções $w = u - v$

satisfaz

$$\begin{aligned} w_{tt} + \Delta^2 w - [M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u - M(\|\nabla v\|_2^2)\Delta v] \\ + [|u|^p u - |v|^p v] + \beta w_t = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Multiplicando (2.30) por w_t e integrando sobre Ω , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{ \|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla w(t)\|_2^2 \} \\ + \beta \|w_t(t)\|_2^2 + \int_{\Omega} (|u|^p u - |v|^p v)(u - v) dx \\ = M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) (\nabla u_t, \nabla u) \|\Delta w(t)\|_2^2 \\ + [M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)] \int_{\Omega} \Delta v w dx. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Usando que M é de classe C^1 , temos

$$M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) (\nabla u_t, \nabla u) \|\Delta w(t)\|_2^2 \leq C_{11} \|\Delta w(t)\|_2^2. \quad (2.32)$$

Pelo Teorema do Valor Médio e da imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$, obtemos

$$[M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)] \int_{\Omega} \Delta v w dx \leq C_{12} \|\Delta w(t)\|_2^2. \quad (2.33)$$

Substituindo (2.32) e (2.33) em (2.31) e integrando de 0 até t , resulta que

$$\begin{aligned} \|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla w(t)\|_2^2 \\ + \beta \int_0^t \|w_t(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \int_{\Omega} (|u|^p u - |v|^p v)(u - v) dx ds \\ \leq \int_0^t (\|w_t(s)\|_2^2 + \|\Delta w(s)\|_2^2 + M(\|\nabla u(s)\|_2^2) \|\nabla w(s)\|_2^2) ds. \end{aligned}$$

Usando que

$$\beta \int_0^t \|w_t(s)\|_2^2 ds + \int_0^t \int_{\Omega} (|u|^p u - |v|^p v)(u - v) dx ds \geq 0,$$

segue do lema de Gronwall que

$$\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 \leq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.34)$$

Portanto

$$\|w_t(t)\|_2 = \|\Delta w(t)\|_2 = 0.$$

Isto prova a unicidade e completa a prova do Teorema 2.1.1. ■

2.1.2 Existência de solução fraca

A prova da existência de solução fraca em $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é realizada via argumentos de densidade.

Teorema 2.1.2 *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 2.1.1 são válidas. Então, para qualquer*

$$(u_0, u_1) \in E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

o problema (2.1) admite uma única solução fraca u na seguinte classe

$$u \in C^0([0, \infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Demonstração:

Seja $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Então, como

$$H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

é densamente imerso, existe uma sequência

$$\{(u_0^k, u_1^k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$$

tal que

$$(u_0^k, u_1^k) \longrightarrow (u_0, u_1) \text{ em } H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega). \quad (2.35)$$

Do Teorema 2.1.1, para cada $(u_0^k, u_1^k) \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$ existe uma única solução global $U^k = (u^k, u_t^k)$ com

$$u^k \in L^\infty(0, T; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)),$$

$$u_t^k \in L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)),$$

$$u_{tt}^k \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

para todo $T > 0$ verificando

$$\begin{cases} u_{tt}^k + \Delta^2 u^k - M(\|\nabla u^k\|_2^2) \Delta u^k + \beta u_t^k + |u^k|^\rho u^k = h \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ (u^k(0), u_t^k(0)) = (u_0^k, u_1^k). \end{cases} \quad (2.36)$$

Multiplicando a equação de (2.36) por u_t^k , integrando sobre Ω e considerando argumentos análogos anteriormente usados, podemos deduzir que

$$\begin{aligned} & \|u_t^k(t)\|_2^2 + \|\Delta u^k(t)\|_2^2 + \widehat{M}(\|\nabla u^k(t)\|_2^2) + \frac{2}{\rho+2} \|u^k(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ & + \beta \int_0^t \|u_t^k(s)\|_2^2 ds = \int_0^t \|h(s)\|_2^2 ds \\ & + \|u_1^k\|_2^2 + \|\Delta u_0^k\|_2^2 + \widehat{M}(\|\nabla u_0^k\|_2^2) + \frac{2}{\rho+2} \|u_0^k\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq C_{13}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde C_{13} uma constante positiva independente de $t \in [0, T]$ e $k \in \mathbb{N}$.

Agora, tomando u^k e u^μ soluções de (2.36), temos

$$\begin{aligned} & \|(u_t^k - u_t^\mu)(t)\|_2^2 + \|\Delta(u^k - u^\mu)(t)\|_2^2 \\ & \leq C_{13} \left(\|(u_t^k - u_t^\mu)(0)\|_2^2 + \|\Delta(u^k - u^\mu)(0)\|_2^2 \right). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Portanto, da estimativa (2.37) e (2.38), e considerando as convergências dadas em (2.35), obtemos uma função u tal que

$$\begin{aligned} u_t^k & \xrightarrow{*} u_t \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ u^k & \xrightarrow{*} u \text{ em } L^\infty(0, T; H_0^2(\Omega)), \\ u_t^k & \longrightarrow u_t \text{ em } C^0(0, T; L^2(\Omega)), \\ u^k & \longrightarrow u \text{ em } C^0(0, T; H_0^2(\Omega)), \\ |u^k|^\rho u^k & \xrightarrow{*} |u|^\rho u \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Assim, podemos passar o limite em (2.36) obtendo

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u + \beta u_t + |u|^\rho u = h \text{ em } L_{loc}^2(0, \infty; H^{-2}(\Omega)). \quad (2.39)$$

A unicidade de solução fraca requer um procedimento de regularização e pode ser obtida pelo método padrão de Visik-Ladyzhenskaya, cf. Lions e Magenes [28], Capítulo 3, Seção 8.2.2.

Portanto, a prova do Teorema 2.1.2 fica completa. ■

Atrator Exponencial para o Problema com Dissipação Linear

Neste capítulo mostraremos a existência de conjuntos absorventes para o problema (2.1) nos espaços de Hilbert

$$E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

e

$$E_1 = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega),$$

e a existência de um atrator global em E_0 . O resultado principal é o Teorema 3.4.1, onde provamos a existência de um conjunto inércia que atrai exponencialmente todos os limitados de E_1 com respeito a norma de E_0 .

Vamos assumir que a função h é independente do tempo, isto é, consideramos apenas o caso autônomo

$$h(t, x) \equiv h(x) \in L^2(\Omega), \quad \forall t \geq 0.$$

Definimos para todo $t \geq 0$, a aplicação

$$\begin{aligned} S(t) : E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega) &\longrightarrow E_0 \\ (u_0, u_1) &\longmapsto S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t)), \end{aligned}$$

onde $u(t)$ é a única solução de (2.1) obtida pelo Teorema 2.1.2. Este operador não linear aplica E_0 nele mesmo e define um C_0 -semigrupo não linear sobre E_0 .

3.1 Existência de um Conjunto Absorvente em E_0

A existência de um conjunto absorvente em $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ é assegurada pelo seguinte Lema.

Lema 3.1.1 *Sobre as hipóteses do Teorema 2.1.2, o semigrupo não linear $S(t) : E_0 \rightarrow E_0$ dado por*

$$S(t)(u_0, u_1) = (u(t), u_t(t))$$

possui um conjunto absorvente B_0 em E_0 .

Demonstração:

Fixemos um conjunto limitado arbitrário $B \subset E_0$ e consideremos as soluções do problema (2.1) dadas por $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$ com $(u_0, u_1) \in B$.

A energia do problema é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u(t)\|_2^2 + \widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \frac{2}{\rho+2} \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \right) - \int_{\Omega} h u dx,$$

que pode não majorar a norma de E_0 . Definimos então o seguinte funcional energia modificado

$$\widetilde{E}(t) = E(t) + \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2, \quad (3.1)$$

onde λ_1 denota o primeiro autovalor do operador bi-harmônico Δ^2 em $H_0^2(\Omega)$. Sabemos que

$$\|u\|_2^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\Delta u\|_2^2, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega), \quad (3.2)$$

e então

$$\int_{\Omega} h(x) u(x, t) dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2 + \frac{1}{4} \|\Delta u(t)\|_2^2,$$

o que mostra que

$$\widetilde{E}(t) \geq \frac{1}{4} (\|u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u(t)\|_2^2). \quad (3.3)$$

Multiplicando (2.1) por u_t e integrando sobre Ω obtemos a seguinte identidade

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\beta \|u_t(t)\|_2^2,$$

e então, integrando de t até $t+1$ resulta que

$$0 \leq \beta \int_t^{t+1} \int_{\Omega} |u_t(x,s)|^2 dx ds = E(t) - E(t+1) \equiv D(t)^2, \quad (3.4)$$

onde também fica definida a diferença $D(t)$.

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existem $t_1 \in [t, t + \frac{1}{4}]$ e $t_2 \in [t + \frac{3}{4}, t+1]$ tais que

$$\|u_t(t_i)\|_2^2 \leq 4 \int_t^{t+1} \|u_t(s)\|_2^2 ds = \frac{4}{\beta} D(t)^2, \quad i = 1, 2. \quad (3.5)$$

Prosseguindo, multiplicando a equação (2.1) por u e integrando sobre $[t_1, t_2] \times \Omega$, temos

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left(\|\Delta u(s)\|_2^2 + M(\|\nabla u(s)\|_2^2) \|\nabla u(s)\|_2^2 + \|u(s)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \right) ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|u_t(s)\|_2^2 ds - \left(\int_{\Omega} u_t(t_1)u(t_1)dx - \int_{\Omega} u_t(t_2)u(t_2)dx \right) \\ &+ \beta \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u_t u dx ds + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} h u dx ds. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Somando $\int_{t_1}^{t_2} (\|u_t(s)\|_2^2 - 2 \int_{\Omega} h u dx) ds + \frac{2}{\lambda_1} \|h\|_2^2$ em ambos os lados da igualdade (3.6) e usando a definição de $\tilde{E}(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \tilde{E}(s) ds &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|u_t(s)\|_2^2 ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} u_t(t_1)u(t_1)dx - \int_{\Omega} u_t(t_2)u(t_2)dx \right) \\ &+ \frac{\beta}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u_t u dx ds - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} h u dx ds + \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vamos estimar o lado direito de (3.7).

De (3.4) temos

$$\int_t^{t+1} \|u_t(s)\|_2^2 ds \leq \frac{1}{\beta} D(t)^2. \quad (3.8)$$

De (3.2), (3.4) e (3.5),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} u_t(t_1)u(t_1) - u_t(t_2)u(t_2) dx \right) &\leq \max_{i=1,2} \{ \|u_t(t_i)\|_2 \|u(t_i)\|_2 \} \\ &\leq \frac{2}{\beta^{1/2}} D(t) \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta u(s)\|_2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u_t u dx ds &\leq \frac{\beta}{2} \sup_{t \leq s \leq t+1} \|u(t)\|_2 \int_t^{t+1} \|u_t(s)\|_2 ds \\ &\leq \frac{\beta^{1/2}}{2\lambda_1^{1/2}} D(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta u(s)\|_2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

e

$$-\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} h u dx ds \leq \frac{1}{2\lambda_1^{1/2}} \|h\|_2 \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta u(s)\|_2 \quad (3.11)$$

Portanto, em vista de (3.8)-(3.11), temos de (3.7),

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \tilde{E}(s) ds &\leq \frac{1}{\beta} D(t)^2 + \left(\frac{2}{\beta^{1/2} \lambda_1^{1/2}} + \frac{\beta^{1/2}}{2\lambda_1^{1/2}} \right) D(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta u(s)\|_2 \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} \|h\|_2 \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta u(s)\|_2 + \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aplicando a desigualdade de Young com ε e notando que $\|\Delta u(t)\|_2^2 \leq \tilde{E}(t)$, podemos obter

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{E}(s) ds \leq \varepsilon \sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s) + C_1(\varepsilon) D(t)^2 + C_2(\varepsilon) \|h\|_2^2, \quad (3.13)$$

onde $C_i(\varepsilon) > 0$, $i = 1, 2$ são constantes que dependem apenas de β, h, ε .

Novamente, usando o Teorema do Valor Médio para integrais existe $t^* \in (t_1, t_2)$ tal que

$$\tilde{E}(t^*) \leq 2\varepsilon \sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s) + 2C_1(\varepsilon) D(t)^2 + 2C_2(\varepsilon) \|h\|_2^2. \quad (3.14)$$

Como $E(t) - E(t+1) = \tilde{E}(t) - \tilde{E}(t+1)$ e E é decrescente, de (3.4) vemos que

$$\tilde{E}(t+1) \leq \tilde{E}(t^*) \quad \text{e} \quad \tilde{E}(t) = \tilde{E}(t+1) + D(t)^2.$$

Portanto obtemos

$$\tilde{E}(t) \leq \tilde{E}(t^*) + D(t)^2. \quad (3.15)$$

Combinando (3.14) e (3.15) resulta que

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s) \leq 2\varepsilon \sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s) + C_3(\varepsilon)D^2(t) + 2C_2(\varepsilon)\|h\|_2^2. \quad (3.16)$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{4}$ obtemos de (3.16) que

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s) \leq 2C_3(\varepsilon)D(t)^2 + 4C_2(\varepsilon)\|h\|_2^2. \quad (3.17)$$

Pela definição de $D(t)^2$ obtemos de (3.17)

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s) \leq 2C_3(\varepsilon) \left(\tilde{E}(t) - \tilde{E}(t+1) \right) + 4C_2(\varepsilon)\|h\|_2^2. \quad (3.18)$$

Aplicando Lema de Nakao (Lema 1.3.1) em (3.18) com $k_0 = 2C_3(\varepsilon)$, $k_1 = 4C_2(\varepsilon)\|h\|_2^2$ e $\phi(s) = \tilde{E}(s)$, resulta

$$\tilde{E}(s) \leq \sup_{0 \leq s \leq 1} \tilde{E}(s) \left(\frac{1+2C_3(\varepsilon)}{2C_3(\varepsilon)} \right) e^{-\theta t} + 4C_2(\varepsilon)\|h\|_2^2, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.19)$$

onde $\theta = \ln \left(\frac{1+2C_3(\varepsilon)}{2C_3(\varepsilon)} \right)$.

Em vista de (3.3)

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{E_0}^2 \leq C_0 e^{-\theta t} + C_0 \|h\|_2^2, \quad t \geq 0,$$

onde C_0 é uma constante que não depende de t . Então existe $t_B > 0$ tal que

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{E_0}^2 \leq 2C_0 \|h\|_2^2, \quad t \geq t_B.$$

Portanto, escrevendo $r_0 = 2C_0 \|h\|_2^2$, segue que, a bola fechada $B_0 = \bar{B}(0, r_0)$ de E_0 é um conjunto absorvente para $S(t)$. Isto completa a prova do Lema 3.1.1. ■

Assim, para provar que o problema (2.1) admite um atrator global, resta provar a propriedade de compacidade assintótica.

3.2 Atrator Global em E_0

Prosseguindo, mostraremos que $S(t)$ possui a propriedade de compacidade assintótica (ii) do Teorema 1.3.1. Para isto aplicaremos o Lema 1.3.2, com auxílio do Lema de Nakao.

Lema 3.2.1 *Sobre as hipóteses do Teorema 2.1.1, o C_0 -semigrupo não linear $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associado a problema (2.1) é compactamente assintótico em $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.*

Demonstração:

Dados $(u_0, u_1), (v_0, v_1)$ pertencentes a um subconjunto B limitado de E_0 , sejam u, v as correspondentes soluções do problema (2.1). Então do Teorema 2.1.2, $w = u - v$ é solução fraca para o seguinte problema

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + \beta w_t = M(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u - M(\|\nabla v\|_2^2) \Delta v + (|u|^\rho u - |v|^\rho v) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ w(\cdot, 0) = u_0 - v_0, \quad w_t(\cdot, 0) = u_1 - v_1 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (3.20)$$

Definimos o funcional

$$E_w(t) = \|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla w(t)\|_2^2,$$

Multiplicando a equação (3.20) por w_t e integrando sobre Ω , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E_w(t) + \beta \|w_t(t)\|_2^2 &= M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} u_t(t) \Delta u(t) dx \|\nabla w(t)\|_2^2 \\ &+ (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(t) w_t(t) dx \\ &- \int_{\Omega} (f(u(t)) - f(v(t))) w_t(t) dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Agora vamos estimar o lado direito de (3.21). Nas desigualdades a seguir, usaremos o fato de que as soluções $u(t), v(t)$, com dados iniciais em B , são uniformemente limitadas na norma de E_0 por uma constante dependente de B , conforme as estimativas no Capítulo 2.

Pela continuidade de M' temos

$$M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} u_t(t) \Delta u(t) dx \|\nabla w(t)\|_2^2 \leq C_0(B) \|\nabla w(t)\|_2^2. \quad (3.22)$$

Por outro lado, como $M(a^2) - M(b^2) \leq M'(\sup\{a^2, b^2\})(|a| + |b|)|a - b|$, e usando a desigualdade de Young com ε vemos que

$$\begin{aligned} (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(t) w_t(t) dx \\ \leq C_1(B) \|\nabla w(t)\|_2 \|w_t(t)\|_2 \\ \leq C_2(B, \varepsilon) \|\nabla w(t)\|_2^2 + \varepsilon \|w_t(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Aplicando a desigualdade de Hölder com $\frac{\rho}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2} = 1$, inferimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f(u(t)) - f(v(t))) w_t(t) dx &\leq (\rho + 1) \int_{\Omega} \sup\{|u|^\rho, |v|^\rho\} w(t) w_t(t) dx \\ &\leq C_3(B) \left(\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho + \|v(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho \right) \|w(t)\|_{2(\rho+1)} \|w_t(t)\|_2 \\ &\leq C_4(B) \|\nabla w(t)\|_2 \|w_t(t)\|_2 \\ &\leq C_5(B, \varepsilon) \|\nabla w(t)\|_2^2 + \varepsilon \|w_t(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{\beta}{4}$ e substituindo (3.22)-(3.24) em (3.21) obtemos

$$\frac{d}{dt} E_w(t) + \beta \|w_t(t)\|_2^2 \leq C_B \|\nabla w(t)\|_2^2 \quad (3.25)$$

onde C_B é uma constante que depende de B mas não de t . No que segue, para simplificar usaremos C_B para indicar todas as constantes que dependem de B .

Então integrando (3.25) de t até $t + 1$, obtemos

$$\beta \int_t^{t+1} \|w_t(s)\|_2^2 ds \leq E_w(t) - E_w(t+1) + C_B \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds \equiv F(t)^2. \quad (3.26)$$

A função $F(t)$ irá desempenhar um papel semelhante ao que desempenhou a função $D(t)$ definida em (3.4).

De (3.26) resulta que

$$\int_t^{t+1} \|w_t(s)\|_2^2 ds \leq \frac{1}{\beta} F(t)^2. \quad (3.27)$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais existem $t_1 \in [t, t + \frac{1}{4}]$ e $t_2 \in [t + \frac{3}{4}, t + 1]$ tal que

$$\|w_t(t_i)\|_2^2 \leq \frac{4}{\beta} F^2(t), \quad i = 1, 2. \quad (3.28)$$

Agora, multiplicando a equação em (3.20) por w e integrando sobre Ω , obtemos

$$\begin{aligned} & \|\Delta w(t)\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla w(t)\|_2^2 + \int_{\Omega} (f(u(t)) - f(v(t))) w(t) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t(t) w(t) dx + \|w_t(t)\|_2^2 + \beta \int_{\Omega} w_t(t) w(t) dx \\ &+ (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(t) w(t) dx. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Integrando (3.29) de t_1 até t_2 e então usando (3.27), (3.28) e a monotocidade de $f(s) = |s|^\rho s$, concluímos que

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (\|\Delta w(s)\|_2^2 + M(\|\nabla u(s)\|_2^2) \|\nabla w(s)\|_2^2) ds \\ & \leq \frac{1}{\beta} F(t)^2 + \frac{4}{\lambda_1^{1/2} \beta^{1/2}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta w(s)\|_2 \\ & + \frac{\beta}{\lambda_1^{1/2}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta w(s)\|_2 + \int_{t_1}^{t_2} (M(\|\nabla u(s)\|_2^2) - M(\|\nabla v(s)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(s) w(s) dx ds. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Novamente, usando que M é de classe C^1 obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} (M(\|\nabla u(s)\|_2^2) - M(\|\nabla v(s)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(s) w(s) dx ds \leq C_6 \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) em (3.30) resulta que

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (\|\Delta w(s)\|_2^2 + M(\|\nabla u(s)\|_2^2) \|\nabla w(s)\|_2^2) ds \\ & \leq \frac{1}{\beta} F(t)^2 + \frac{4}{\lambda_1^{1/2} \beta^{1/2}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta w(s)\|_2 \\ & \quad + \frac{\beta}{\lambda_1^{1/2}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta w(s)\|_2 + C_6 \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Somando $\int_{t_1}^{t_2} \|w_t(s)\|^2 ds$ em ambos os lados de (3.32), usando (3.27) e a definição de E_w encontramos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} E_w(s) ds & \leq \frac{2}{\beta} F(t)^2 + \frac{4}{\lambda_1^{1/2} \beta^{1/2}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w^{1/2}(s) \\ & \quad + \frac{\beta}{\lambda_1^{1/2}} F(t) \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w^{1/2}(s) + C_6 \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Usando a desigualdade de Young com ε obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} E_w(s) ds \leq C_7(\varepsilon) F^2(t) + \varepsilon \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) + C_6 \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \quad (3.34)$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que

$$E_w(t^*) \leq 2C_7(\varepsilon) F^2(t) + 2\varepsilon \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) + 2C_6 \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \quad (3.35)$$

Por outro lado, de (3.26),

$$E_w(t) \leq E_w(t+1) + F(t)^2,$$

e assim

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) \leq E_w(t^*) + F^2(t) + C_B \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \quad (3.36)$$

Assim, tomando $\varepsilon = \frac{1}{4}$ e substituindo (3.35) em (3.36) obtemos

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) \leq C_8 F^2(t) + C_B \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds, \quad (3.37)$$

Substituindo (3.26) em (3.37) temos

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) \leq C_9 (E_w(t) - E_w(t+1)) + C_B \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_\sigma^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds, \quad (3.38)$$

Usando o Lema 1.3.1 (Nakao) obtemos

$$E_w(t) \leq C_{10} e^{-\theta t} + C_B \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_\sigma^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

e da definição de E_w ,

$$\|w(t)\|_{E_0} \leq C_{10} e^{-\frac{\theta}{2}t} + C_B \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \left(\int_\sigma^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.39)$$

Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher T suficientemente grande tal que

$$C_{10} e^{-\frac{\theta}{2}T} < \varepsilon. \quad (3.40)$$

Fixado este T , definimos $\phi_T : B_0 \times B_0 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi_T((u_0, u_1), (v_0, v_1)) = C_B \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \left(\int_\sigma^{\sigma+1} \|\nabla u(s) - \nabla v(s)\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.41)$$

Assim, de (3.39), (3.40) e (3.41) encontramos

$$\|S(T)(u_0, u_1) - S(T)(v_0, v_1)\|_{E_0} \leq \varepsilon + \phi_T((u_0, u_1), (v_0, v_1)), \quad (3.42)$$

para todo $(u_0, u_1), (v_0, v_1) \in B_0$.

Para aplicar o Lema 1.3.2 resta mostrar que ϕ é uma função contrativa, isto é, para qualquer sequência $\{(u_0^n, u_1^n)\}$ de B_0 , existe uma subsequência $\{(u_0^{n_k}, u_1^{n_k})\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \phi_T((u_0^{n_k}, u_1^{n_k}), (u_0^{n_l}, u_1^{n_l})) = 0. \quad (3.43)$$

De fato, como B_0 é limitado e invariante sob $S(t)$, as soluções $\{(u^n(t), u_t^n(t))\}$ são uniformemente limitados em E_0 . Portanto

$$u^n \text{ é limitado em } C([0, \infty), H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Por outro lado, a imersão compacta de $H_0^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$ implica que a imersão

$$C([0, T], H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0, T]; H_0^1(\Omega))$$

é compacta para cada $T > 0$. (Simon [46]).

Assim u^n possui uma subsequência u^{n_k} que converge forte em $C([0, T]; H_0^1(\Omega))$, e portanto temos que o limite (3.43) é satisfeito. ■

Vimos que, do Lema 3.1.1 e Lema 3.2.1 que o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um conjunto absorvente em E_0 e $S(t)$ é compactamente assintótico em E_0 , respectivamente. Então segue do Teorema 1.3.1 o seguinte resultado.

Teorema 3.2.1 *Sob as hipóteses do Teorema 2.1.1, o C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ correspondente ao problema (2.1) possui um atrator global $\mathcal{A}$ em $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.*

3.3 Existência de um Conjunto Absorvente em E_1

Nesta seção provaremos que o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ também possui um conjunto absorvente em $E_1 = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$. Utilizaremos a técnica de multiplicadores, com argumentos semelhantes aos usados por Biazutti e Crippa [10]. O resultado de existência de um conjunto absorvente em E_1 é o seguinte.

Lema 3.3.1 *Sobre as hipóteses do Teorema 2.1.1, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associado com o problema 2.1 possui um conjunto absorvente em $E_1 = H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega)$.*

Demonstração:

Suponhamos que os dados iniciais (u_0, u_1) pertencentes a um subconjunto limitado B de E_1 e $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$. Seja $v = u_t + \varepsilon u$ com $\varepsilon \leq \frac{2\beta}{5}$. Então podemos reescrever a equação (2.1) da seguinte forma

$$v_t + \Delta^2 u + (\beta - \varepsilon)v - \varepsilon(\beta - \varepsilon)u - M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\Delta u + |u|^\rho u = h(x). \quad (3.44)$$

Consideremos o funcional E_v associado a equação (3.44)

$$E_v(t) = \|\Delta v(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u(t) - h\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2)\|\nabla(\Delta u(t))\|_2^2. \quad (3.45)$$

Sabemos que para mostrar que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um conjunto absorvente em E_1 precisamos mostrar que existe $t_1(B)$ tal que

$$\|\Delta^2 u(t)\|_2^2 + \|\Delta u(t)\|_2^2 + \|\Delta u_t(t)\|_2^2 \leq C \quad \text{para todo } t \geq t_1(B),$$

onde C é uma constante que não depende dos dados iniciais. É fácil ver que isto fica provado se mostrarmos que o funcional E_v satisfaz a seguinte desigualdade

$$\frac{d}{dt} E_v(t) + C_0 E_v(t) \leq C_1 \quad (3.46)$$

onde C_0 e C_1 são constantes que não dependem dos dados iniciais. Assim, no que segue, nosso objetivo é mostrar que E_v satisfaz a desigualdade (3.46). Em ordem, pela regularidade (2.5) e usando argumentos de densidade, multiplicando (3.44) por $\Delta^2 v$ e integrando sobre Ω obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \|\Delta v(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u(t)\|_2^2 - 2 \int_{\Omega} h \Delta^2 u dx \right\} + (\beta - \varepsilon) \|\Delta v(t)\|_2^2 \\ + \varepsilon \|\Delta^2 u(t)\|_2^2 - \varepsilon \int_{\Omega} h \Delta^2 u dx = \varepsilon(\beta - \varepsilon) \int_{\Omega} u \Delta^2 v dx \\ - M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 v dx - \int_{\Omega} |u|^\rho u \Delta^2 v dx. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Considerando que

$$\begin{aligned}
-M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 v dx &= -M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 (u_t + \varepsilon u) dx \\
&= -M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 u_t dx - \varepsilon M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 u dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla(\Delta u(t))\|_2^2) - M' \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 u dx \\
&\quad + \varepsilon M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla(\Delta u(t))\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.48}$$

e, além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\Delta^2 u(t) - h\|_2^2 &= \frac{d}{dt} \left(\|\Delta^2 u(t)\|_2^2 - 2 \int_{\Omega} h \Delta^2 u dx + \|h\|_2^2 \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\|\Delta^2 u(t)\|_2^2 - 2 \int_{\Omega} h \Delta^2 u dx \right),
\end{aligned} \tag{3.49}$$

pois $h = h(x)$ é independente de t .

Assim, substituindo (3.48) e (3.49) em (3.47) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} E_v(t) + (\beta - \varepsilon) \|\Delta v(t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta^2 u(t) - h\|_2^2 + \varepsilon M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla(\Delta u(t))\|_2^2 \\
+ \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta^2 u(t)\|_2^2 = \frac{\varepsilon}{2} \|h\|_2^2 + \varepsilon(\beta - \varepsilon) \int_{\Omega} u \Delta^2 v dx \\
+ M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} (-\Delta u) u_t dx \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 u dx - \int_{\Omega} |u|^p u \Delta^2 v dx.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Pela desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\beta - \varepsilon) \int_{\Omega} u \Delta^2 v dx &= -\varepsilon(\beta - \varepsilon) \int_{\Omega} \Delta^2 u v dx \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta^2 u(t)\|_2^2 + \varepsilon(\beta - \varepsilon)^2 \|v(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Usando a continuidade de M' e a desigualdade de Young com ε obtemos

$$\begin{aligned}
M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} (-\Delta u) u_t dx \int_{\Omega} \Delta u \Delta^2 u dx \\
\leq (M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\Delta u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \|\Delta u(t)\|_2) \|\Delta^2 u(t)\|_2 \\
\leq \frac{1}{\varepsilon} (M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\Delta u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \|\Delta u(t)\|_2)^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta^2 u(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Também pela desigualdade de Young com ε vemos que

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} |u|^{\rho} u \Delta^2 v dx &= - \int_{\Omega} \Delta(|u|^{\rho} u) \Delta v dx \\ &\leq \frac{1}{4\varepsilon} \|\Delta(|u|^{\rho} u)\|_2^2 + \varepsilon \|\Delta v(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Substituindo (3.51) - (3.53) em (3.50) e usando que $\varepsilon \leq \frac{2\beta}{5}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E_v(t) + \frac{\varepsilon}{2} E_v(t) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \|h\|_2^2 + \varepsilon(\beta - \varepsilon)^2 \|v(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v(t)\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\Delta u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \|\Delta u(t)\|_2 \right)^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Como (u_0, u_1) pertencente a subconjunto limitado B de E_1 , então B é também limitado em $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Assim, do Lema 3.1.1 existe $t_0(B)$ tal que para todo $t \geq t_0(B)$

$$\varepsilon(\beta - \varepsilon)^2 \|v(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|v(t)\|_2^2 + \frac{1}{\varepsilon} \left(M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\Delta u(t)\|_2 \|u_t(t)\|_2 \|\Delta u(t)\|_2 \right)^2 \leq \frac{C_{\mu_0}}{2}$$

onde C_{μ_0} é uma constante positiva que depende do raio μ_0 da bola absorvente em E_0 . Retornando a (3.54) resulta que

$$\frac{d}{dt} E_v(t) + \varepsilon E_v(t) \leq \varepsilon \|h\|_2^2 + C_{\mu_0} \quad \text{para todo } t \geq t_0(B). \quad (3.55)$$

Assim, multiplicando (3.55) por $e^{\varepsilon t}$ e, em seguida, integrando de $t_0(B)$ até t obtemos

$$E_v(t) \leq E_v(t_0(B)) e^{-\varepsilon(t-t_0(B))} + (\varepsilon \|h\|_2^2 + C_{\mu_0}) \left(1 - e^{-\varepsilon(t-t_0(B))} \right). \quad (3.56)$$

Considerando o limite em (3.56) com $t \rightarrow \infty$, existe $t_1(B)$ tal que

$$\|(u(t), u_t(t))\|_{E_1}^2 = \|\Delta u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u(t)\|_2^2 + \|\Delta^2 u(t)\|_2^2 \leq \mu_1^2 \quad \text{para todo } t \geq t_1(B),$$

onde $\mu_1^2 = (\varepsilon \|h\|_2^2 + C_{\mu_0})$. Portanto, a bola fechada $B_1 = \overline{B}(0, \mu_1)$ de E_1 é um conjunto absorvente para o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Isto conclui a prova do Lema 3.3.1. ■

3.4 Atrator Exponencial (Conjunto Inércia)

O objetivo principal desta seção é provar que o sistema dinâmico associado com o problema (2.1) possui um atrator exponencial sobre um subconjunto compacto invariante X de E_1 com respeito a norma de E_0 .

Para o subconjunto compacto invariante de E_0 onde vamos trabalhar escolhamos

$$X = \overline{\bigcup_{t \geq t_2} S(t)(B_0 \cap B_1)}^{E_0}$$

onde B_0 e B_1 são, respectivamente, conjuntos absorventes em E_0 e E_1 , e t_2 é suficientemente grande. Assim X é invariante por $S(t)$ e compacto em E_0 .

O resultado principal desta seção pode ser enunciado da seguinte maneira.

Teorema 3.4.1 *Nas condições do Teorema 2.1.1, o sistema dinâmico associado ao problema (2.1) possui um atrator exponencial $\mathcal{M} \subset X$.*

Demonstração:

Seja $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ a sequência de autovalores do operador bi-harmônico $(-\Delta)^2$ em $H_0^2(\Omega)$, isto é, com condições de fronteira $u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega$, e seja $\{w_n\}_{n \geq 1}$ os correspondentes autofunções. Seja, para todo $n \geq 1$,

$$H_n = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}.$$

Definimos P_n e Q_n as projeções ortogonais dadas

$$P_n : L^2(\Omega) \rightarrow H_n \quad \text{e} \quad Q_n = I - P_n : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) - H_n.$$

Estas projeções são também ortogonais sobre $H_0^2(\Omega)$ e satisfazem

$$\|\phi\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}^{1/2}} \|\nabla \phi\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\Delta \phi\|_2^2, \quad \forall n \geq 1, \forall \phi \in Q_n(H_0^2(\Omega)).$$

Prosseguindo, definimos a correspondente projeção de E_0 sobre $H_n \times H_n$,

$$\mathcal{P}_n : E_0 \rightarrow P_n(H_0^2(\Omega)) \times P_n(L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_n = I - \mathcal{P}_n. \quad (3.57)$$

Sejam $(u(t), u_t(t))$ e $(v(t), v_t(t))$ duas soluções de (2.1) com respectivos dados iniciais $U_0 = (u_0, u_1)$ e $V_0 = (v_0, v_1)$, tomados em X . Definindo $w = u - v$ então w satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} w_{tt} + \Delta^2 w - M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \Delta w + \beta w_t &= (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)) \Delta v \\ &+ |u|^\rho u - |v|^\rho v \quad \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \quad (3.58)$$

com condições iniciais e de fronteira

$$w(., 0) = u_0 - v_0, \quad w_t(., 0) = u_1 - v_1 \quad \text{e} \quad w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R}^+.$$

Para deixar mais claro o nosso argumento, separamos parte da demonstração em um lema técnico (Lema 3.4.1), que estabelece a existência de $C = C(X) > 0$, independente de λ_{n+1} , tal que

$$\|S(t)U_0 - S(t)V_0\|_{E_0} \leq e^{Ct} \|U_0 - V_0\|_{E_0} \quad \text{para todo } t \geq 0, \quad U_0, V_0 \in X, \quad (3.59)$$

e

$$\|\mathcal{Q}_n S(t)U_0 - \mathcal{Q}_n S(t)V_0\|_{E_0}^2 \leq \left(3e^{-\varepsilon t} + \frac{2k_3 e^{Ct}}{(C + \varepsilon)\lambda_{n+1}^{1/4}} \right) \|U_0 - V_0\|_{E_0}^2. \quad (3.60)$$

Para ver a propriedade da compressão da Definição 1.3.5, suponhamos que (1.7) não se verifica, isto é,

$$\|\mathcal{P}_n(S(t)U_0 - S(t)V_0)\|_{E_0} \leq \|\mathcal{Q}_n(S(t)U_0 - S(t)V_0)\|_{E_0}.$$

Logo vemos que

$$\begin{aligned} \|S(t)U_0 - S(t)V_0\|_{E_0}^2 &\leq \|\mathcal{P}_n(S(t)U_0 - S(t)V_0)\|_{E_0}^2 + \|\mathcal{Q}_n(S(t)U_0 - S(t)V_0)\|_{E_0}^2 \\ &\leq 2\|\mathcal{Q}_n(S(t)U_0 - S(t)V_0)\|_{E_0}^2. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Assim, segue de (3.60) e (3.61) que

$$\|S(t)U_0 - S(t)V_0\|_{E_0}^2 \leq \left(6e^{-\varepsilon t} + \frac{4k_3 e^{Ct}}{(C + \varepsilon)\lambda_{n+1}^{1/4}} \right) \|U_0 - V_0\|_{E_0}^2. \quad (3.62)$$

Como $\lambda_j \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow +\infty$, podemos escolher $t = t_*$ e depois $n = n_0$, suficientemente grandes, tais que

$$\left(6e^{-\varepsilon t} + \frac{4k_3 e^{Ct}}{(C + \varepsilon)\lambda_{n+1}^{1/4}} \right) \leq \frac{1}{8}.$$

Assim, denotando $S_* = S(t_*)$, temos

$$\|S_* U - S_* V\|_{E_0}^2 \leq \frac{1}{8} \|U - V\|_{E_0}^2, \quad \forall U, V \in X,$$

ou seja, (1.8) é satisfeita. Portanto a propriedade de compressão está verificada.

Por outro lado, de (3.59), vemos que $S(t_*)$ é Lipschitz em X , isto é,

$$\|S_* U - S_* V\|_{E_0}^2 \leq L \|U - V\|_{E_0}^2, \quad \forall U, V \in X,$$

onde $L = e^{Ct_*}$.

O Teorema 3.4.1 segue então do Teorema 1.3.2 ■

Finalizamos esta seção com a demonstração do lema técnico utilizado no Teorema 3.4.1.

Lema 3.4.1 *Nas hipóteses do Teorema 3.4.1, existe uma contante $C = C(X)$, tal que*

$$\|S(t)U_0 - S(t)V_0\|_{E_0} \leq e^{Ct} \|U_0 - V_0\|_{E_0},$$

e

$$\|\mathcal{Q}_n S(t)U_0 - \mathcal{Q}_n S(t)V_0\|_{E_0}^2 \leq \left(3e^{-\varepsilon t} + \frac{2k_3 e^{Ct}}{(C + \varepsilon)\lambda_{n+1}^{1/4}} \right) \|U_0 - V_0\|_{E_0}^2,$$

$\forall t \geq 0$ e $U_0, V_0 \in X$.

Demonstração:

Multiplicando a equação de (3.58) por w_t , integrando sobre $\Omega \times [0, t]$, $t \leq T$ e repetindo argumentos similares aos usados na prova de unicidade de solução deduzimos que

$$\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 \leq C \int_0^t (\|w_t(s)\|_2^2 + \|\Delta w(s)\|_2^2) ds.$$

Do Lema de Gronwall obtemos

$$\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 \leq e^{Ct} \{ \|w_t(0)\|_2^2 + \|\Delta w(0)\|_2^2 \} \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

e portanto,

$$\|S(t)U_0 - S(t)V_0\|_{E_0} \leq e^{Ct} \|U_0 - V_0\|_{E_0} \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (3.63)$$

Vamos supor por hora que os dados iniciais são tomados em E_1 . Logo as soluções correspondentes possuem a regularidade (2.5). Apliquemos Q_n sobre a equação (3.58). Como Q_n comuta com $-\Delta$, $\phi = Q_n w$ satisfaz a seguinte equação

$$\begin{aligned} \phi_{tt} + \Delta^2 \phi - M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \Delta \phi + \beta \phi_t &= [M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)] \Delta(Q_n v) \\ &\quad - Q_n [|u|^\rho u - |v|^\rho v]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Consideremos o funcional associado a equação (3.64)

$$E_\varepsilon(t) = \|\phi_t(t)\|_2^2 + \|\Delta \phi(t)\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla \phi(t)\|_2^2 + \varepsilon \int_\Omega \phi_t \phi dx$$

onde ε é fixado

$$0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon = \min \{1, \beta\}$$

e $\lambda_{n+1} \geq 1$. Então, multiplicando (3.64) por $\phi_t + \frac{\varepsilon}{2} \phi$ e integrando sobre Ω obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E_\varepsilon(t) + \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2} \right) \|\phi_t(t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta \phi(t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2} M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla \phi(t)\|_2^2 \\ + \frac{\beta}{2} \left(\varepsilon \int_\Omega \phi \phi_t dx \right) + \frac{\varepsilon}{2} \int_\Omega Q_n (|u|^\rho u - |v|^\rho v) Q_n (u - v) dx \\ = - \int_\Omega Q_n (|u|^\rho u - |v|^\rho v) \phi_t dx + M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx \|\nabla \phi(t)\|_2^2 \\ + (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)) \int_\Omega \Delta(Q_n v) \left(\phi_t + \frac{\varepsilon}{2} \phi \right) dx. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Agora, vamos estimar os termos do lado direito de (3.65). A regularidade (2.5) será fundamental aqui. Novamente, usando a desigualdade de Hölder com $\frac{\rho}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2} = 1$, resultados de

imersão $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ e a desigualdade de Young, resulta que

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} Q_n (|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) \phi_t dx \\
& \leq k_0(\rho) \left(\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{\rho} + \|v(t)\|_{2(\rho+1)}^{\rho} \right) \|w(t)\|_{2(\rho+1)} \|\phi(t)\|_2 \\
& \leq \frac{k_1(\rho)}{\lambda_{n+1}^{1/4}} \|\Delta w(t)\|_2 \|\nabla \phi(t)\|_2.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Como estamos interessados em estimativas para t grande, segue que

$$\|\nabla \phi_t(t)\|_2 \leq \|\nabla u_t(t)\|_2 + \|\nabla v_t(t)\|_2 \leq k_2(r_1).$$

Retornando a (3.66), obtemos

$$- \int_{\Omega} Q_n (|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) \phi_t dx \leq \frac{k_3(\rho, r_1)}{\lambda_{n+1}^{1/4}} \|\Delta w(t)\|_2^2. \tag{3.67}$$

Os outros termos do lado direito de (3.65) são estimados a seguir. Em ordem, pela continuidade de M' obtemos

$$\begin{aligned}
& M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx \|\nabla \phi(t)\|_2^2 \\
& \leq \max_{0 \leq s \leq r_0 \lambda_1^{-1/2}} |M'(s)| \|\nabla u_t(t)\|_2 \|\nabla u(t)\|_2 \|\nabla \phi(t)\|_2^2 \leq \frac{k_4(r_0, r_1)}{\lambda_{n+1}^{1/4}} \|\Delta w(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Prosseguindo, pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$\begin{aligned}
& (M(\|\nabla u\|_2^2) - M(\|\nabla v\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta(Q_n v) \left(\frac{\varepsilon}{2} \phi \right) dx \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2} \max_{0 \leq s \leq r_0 \lambda_1^{-1/2}} |M'(s)| [\|\nabla u\|_2 + \|\nabla v\|_2] \|\nabla w(t)\|_2 \|\Delta v(t)\|_2 \|\phi(t)\|_2 \\
& \leq \frac{k_5(r_0)}{\lambda_{n+1}^{1/2}} \|\Delta w(t)\|_2 \|\Delta \phi(t)\|_2 \leq \frac{k_5(r_0)}{\lambda_{n+1}^{1/2}} \|\Delta w(t)\|_2^2
\end{aligned} \tag{3.69}$$

e

$$\begin{aligned}
& (M(\|\nabla u\|_2^2) - M(\|\nabla v\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta(Q_n v) \phi_t dx \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2} \max_{0 \leq s \leq r_0 \lambda_1^{-1/2}} |M'(s)| [\|\nabla u\|_2 + \|\nabla v\|_2] \|\nabla w(t)\|_2 \|\Delta Q_n v(t)\|_2 \|\phi_t(t)\|_2 \quad (3.70) \\
& \leq \frac{\varepsilon}{2} \max_{0 \leq s \leq r_0 \lambda_1^{-1/2}} |M'(s)| [\|\nabla u\|_2 + \|\nabla v\|_2] \|\nabla w(t)\|_2 \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\Delta^2 Q_n v(t)\|_2 \|\phi_t(t)\|_2 \\
& \leq \frac{k_6(r_0, r_1)}{\lambda_{n+1}} (\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2).
\end{aligned}$$

Portanto, usando as estimativas (3.67)-(3.70) e ε prviamente fixado, retornando a (3.65), obtemos

$$\frac{d}{dt} E_{\varepsilon}(t) + \varepsilon E_{\varepsilon}(t) \leq \frac{k_7}{\lambda_{n+1}^{1/4}} (\|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2).$$

Usando (3.63), resulta que

$$\frac{d}{dt} E_{\varepsilon}(t) + \varepsilon E_{\varepsilon}(t) \leq \frac{k_7 e^{Ct}}{\lambda_{n+1}^{1/4}} \|U_0 - V_0\|_{E_0}^2.$$

Multiplicando por $e^{\varepsilon t}$, obtemos

$$\frac{d}{dt} (E_{\varepsilon}(t) e^{\varepsilon t}) \leq \frac{k_7 e^{(C+\varepsilon)t}}{\lambda_{n+1}^{1/4}} \|U_0 - V_0\|_{E_0}^2.$$

Integrando de 0 at t resulta que

$$E_{\varepsilon}(t) \leq e^{-\varepsilon t} E_{\varepsilon}(0) + \frac{k_7 e^{Ct}}{(C+\varepsilon) \lambda_{n+1}^{1/4}} \|U_0 - V_0\|_{E_0}^2. \quad (3.71)$$

Por outro lado, como

$$\left| \varepsilon \int_{\Omega} \phi \phi_t dx \right| \leq \frac{\varepsilon^2}{2 \lambda_{n+1}^{1/4}} \|\Delta \phi(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\phi_t(t)\|_2^2.$$

Usando que $\lambda_{n+1} \geq 1$, encontramos

$$-\frac{1}{2} \{ \|\Delta\phi(t)\|_2^2 + \|\phi_t(t)\|_2^2 \} \leq \varepsilon \int_{\Omega} \phi \phi_t dx \leq \frac{1}{2} \{ \|\Delta\phi(t)\|_2^2 + \|\phi_t(t)\|_2^2 \}.$$

Isto implica que

$$\frac{1}{2} \{ \|\Delta\phi(t)\|_2^2 + \|\phi_t(t)\|_2^2 \} \leq E_{\varepsilon}(t) \leq \frac{3}{2} \{ \|\Delta\phi(t)\|_2^2 + \|\phi_t(t)\|_2^2 \}. \quad (3.72)$$

Portanto, segue de (3.71) e (3.72) que

$$\|\mathcal{Q}_n S(U_0) - \mathcal{Q}_n S(V_0)\|_{E_0}^2 \leq \left(3e^{-\varepsilon t} + \frac{2k_3 e^{Ct}}{(C + \varepsilon)\lambda_{n+1}^{1/4}} \right) \|U_0 - V_0\|_{E_0}^2,$$

para $U_0, V_0 \in B_1$.

Por densidade, a desigualdade vale para todos $U_0, V_0 \in X$

■

Atrator Global para o Problema com Dissipação Não Linear

Neste capítulo consideramos a equação de vigas extensíveis no caso em que a dissipação é não linear, do tipo $g(u_t) \approx |u_t|^r u_t$. Neste contexto, discutiremos sobre a existência de solução global e provamos que o semigrupo $S(t)$ associado ao problema possui um atrator global em $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

O problema estudado se escreve na forma

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u - M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \Delta u + g(u) + f(u_t) = h & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ e } u_t(\cdot, 0) = u_1 & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^N$ com fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$. Como antes, M é uma função satisfazendo (2.3) e (2.4).

No que segue para simplificar a compreensão das estimativas, vamos assumir que

$$g(u) \approx |u|^p u \text{ e } f(u_t) \approx |u_t|^r u_t$$

onde ρ e r são constantes positivas tais que

$$0 < r, \rho \leq \frac{2}{N-2} \text{ se } N \geq 3 \quad \text{e} \quad \rho, r > 0 \text{ se } N = 1, 2, \quad (4.2)$$

Observação 4.0.1 *Os resultados obtidos para $g(u) \approx |u|^\rho u$ e $f(u_t) \approx |u_t|^r u_t$ podem ser também obtidos assumindo g e f mais gerais, com as seguintes hipóteses:*

(i) *f e g são de classe C^1 , com $f(0) = g(0) = 0$, $|g'(u)| \leq k_0(1 + |u|^\rho)$ e $f'(v) \geq 0$, para todo $u, v \in \mathbb{R}$, onde ρ satisfaz (4.2).*

(ii) *Existem constantes $k_1, L_0, L_1 > 0$ tais que*

$$|g(u) - g(v)| \leq k_1(1 + |u|^\rho + |v|^\rho)|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

e

$$-L_0 \leq \widehat{g}(u) \leq \frac{1}{2}g(u)u + L_1, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

$$\text{onde } \widehat{g}(z) = \int_0^z g(s)ds.$$

(iii) *Existem também constantes $k_2, k_3 > 0$ tais que*

$$|f(u) - f(v)| \leq k_2(1 + |u|^r + |v|^r)|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}$$

e

$$(f(u) - f(v))(u - v) \geq k_3|u - v|^{r+2}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},$$

onde $r > 0$ satisfaz (4.2).

Os detalhes pode ser encontrados em [33].

O resultado principal do capítulo é o Teorema 4.2.1.

4.1 Existência de Solução Global

Nossa análise será realizada no espaço de Sobolev

$$E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad (4.3)$$

equipado com a norma

$$\|(u, v)\|_{E_0}^2 = \|\Delta u\|_2^2 + \|v\|_2^2.$$

Note que a hipótese (4.2) implica que $H_0^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(q+1)}(\Omega)$, onde $q = \rho$ ou $q = r$. A energia do sistema (4.1) é definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \frac{1}{\rho+2} \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \int_{\Omega} hu(t) dx. \quad (4.4)$$

Quando $h = 0$, o problema (4.1) foi estudado por Cavalcanti et al. [14], onde a existência global e o decaimento polinomial da energia foram obtidos. Para deixar o texto mais auto-suficiente, faremos um breve comentário sobre estes resultados.

Teorema 4.1.1 (Cavalcanti, Domingos Cavalcanti & Soriano) *Suponhamos que as condições (2.3)-(2.4) e (4.2) são válidas e que $h = 0$. Então, se os dados iniciais (u_0, u_1) são tomados em*

$$E_1 = (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega),$$

o problema (4.1) possui uma única solução regular $u = u(x, t)$ satisfazendo

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), \quad u_t \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^2(\Omega)), \quad u_{tt} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

Por outro lado, se os dados iniciais (u_0, u_1) são tomados em $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, o problema (4.1) possui uma única solução fraca u satisfazendo

$$u \in C^0([0, \infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)). \quad (4.5)$$

Em ambos os casos, a energia $E(t)$ possui a taxa de decaimento

$$E(t) \leq \left(\theta t + E(0)^{-\frac{r}{2}} \right)^{-\frac{2}{r}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.6)$$

onde $\theta > 0$ é uma constante positiva.

Para nosso propósito, vamos admitir que o resultado de existência de solução global do Teorema 4.1.1 é válido quando $h \in L^2(\Omega)$ não é necessariamente zero. Isto pode ser visto relembrando os principais argumentos da prova do Teorema 4.1.1, que é dada em várias etapas.

1 - Considera-se um problema simplificado, substituindo-se a equação principal em (4.1) por

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \mu(t)\Delta u + f(u) + g(u_t) = 0,$$

com dados em E_1 . Então a existência de uma única solução global regular é obtida usando o método de Faedo-Galerkin.

2 - Define-se um operador de ponto fixo

$$\mathcal{S} : v \mapsto z$$

em um subespaço conveniente de $L^\infty(0, T_0; H_0^2(\Omega))$, onde z é a única solução do problema simplificado acima com $\mu(t) = M(\|\nabla v(t)\|_2^2)$. Então a existência de uma única solução local de (4.1) é provada usando estimativas do problema simplificado e o teorema de ponto fixo para contrações.

3 - Seja u a única solução local obtida na etapa anterior. Então tomando $\mu(t) = M(\|\nabla u(t)\|_2^2)$, e tendo em vista a unicidade de ambos os problemas original e simplificado, a existência de uma global solução de (4.1) é finalmente obtida. Aqui, o principal argumento baseia-se no lema de Zorn.

4 - A existência de solução fraca em E_0 é obtida usando argumentos de densidade. Tomando os dados iniciais $(u_0, u_1) \in E_0$, então existe uma sequência $(u_0^v, u_1^v) \in E_1$ tal que

$$u_0^v \rightarrow u_0 \text{ em } H_0^2(\Omega) \quad \text{e} \quad u_1^v \rightarrow u_1 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (4.7)$$

Então estimativas uniformes sobre as correspondentes soluções regulares u^v mostram a existência de uma subsequência u^{v_k} que converge para a única solução fraca u do problema (4.1),

satisfazendo

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx) \Delta u + |u|^{\rho} u + |u_t|^r u_t = 0 \quad \text{em} \quad L_{loc}^2(\mathbb{R}^+; H^{-2}(\Omega) + L^{\frac{r+2}{r+1}}(\Omega)).$$

Observação 4.1.1 No Teorema 4.1.1, a taxa de decaimento (4.6) para as soluções regulares é obtida através de métodos de multiplicadores, onde a diferenciação de $E(t)$ é necessária. Quando consideramos soluções fracas, $E'(t) = -\|u_t(t)\|_{r+2}^{r+2}$ não é válida em geral, de modo que argumentos de densidade são necessários. Notamos que, das estimativas ou de (4.6), as soluções (regulares ou fracas) satisfazem

$$\|u_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq C, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.8)$$

onde $C > 0$ é uma constante dependente apenas dos dados iniciais.

Observação 4.1.2 Em vista do Teorema 4.1.1, com $h \in L^2(\Omega)$, podemos definir sobre E_0 um operador

$$S(t) : (u_0, u_1) \mapsto (u(t), u_t(t)), \quad t \geq 0,$$

onde $u(t)$ é a única solução de (4.1). Segue que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo não linear definido sobre o espaço de fase E_0 .

4.2 Existência de Atrator Global

Teorema 4.2.1 Suponhamos que as hipóteses (2.3)-(2.4) e (4.2) são satisfeitas, com $h \in L^2(\Omega)$. Então o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associado ao problema (4.1) possui um atrator global em E_0 .

Demonstração:

Primeiramente observamos que semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ possui um conjunto absorvente $B_0 \subset E_0$, que é provado no Lemma 4.2.1 abaixo. Em seguida, no Lemma 4.2.3 é provado que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é assintoticamente suave em E_0 . Assim pelo Lema 1.3.2, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é assintoticamente compacto. Portanto a existência de um atrator global para $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é garantida pelo Teorema 1.3.1. ■

O restante do capítulo é dedicado aos Lemas 4.2.1 e 4.2.3 .

4.2.1 Conjunto absorvente em E_0

A existência de um conjunto absorvente é assegurada pelo seguinte Lema.

Lema 4.2.1 *Sob as hipóteses do Teorema 4.2.1, o semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ associado ao problema (4.1) possui um conjunto absorvente $B_0 \subset E_0$.*

Demonstração:

Seja $B \subset E_0$ um subconjunto limitado arbitrário e consideremos as soluções do problema (4.1) dadas por $(u(t), u_t(t)) = S(t)(u_0, u_1)$ com $(u_0, u_1) \in B$.

Nossa análise é baseada na energia modificada

$$\begin{aligned} \tilde{E}(t) = & \frac{1}{2} \left(\|\Delta u(t)\|_2^2 + \widehat{M}(\|\nabla u(t)\|_2^2) + \frac{2}{\rho+2} \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 - \int_{\Omega} h u(t) dx + \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor do operador bi-harmônico Δ^2 em $H_0^2(\Omega)$. Assim, $\tilde{E}(t) = E(t) + \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2$ e $\tilde{E}(t)$ domina $\|(u(t), u_t(t))\|_{E_0}^2$. De fato, como λ_1 satisfaz

$$\|u\|_2^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\Delta u\|_2^2, \quad \forall u \in H_0^2(\Omega), \quad (4.10)$$

temos que

$$\int_{\Omega} h(x) u(x, t) dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2 + \frac{1}{4} \|\Delta u(t)\|_2^2,$$

e portanto

$$\tilde{E}(t) \geq \frac{1}{4} \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2. \quad (4.11)$$

Para lidar com esta energia modificada usamos argumentos de densidade como mencionado na Observação 4.1.1. Isto é, podemos assumir formalmente que u é uma solução regular do problema.

Multiplicando a primeira equação de (4.1) por u_t e integrando sobre Ω , obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\|u_t(t)\|_{r+2}^{r+2},$$

e então, integrando de t até $t + 1$, encontramos

$$E(t) - E(t + 1) = \int_t^{t+1} \int_{\Omega} |u_t(x, s)|^{r+2} dx ds \geq 0.$$

Assim, podemos definir um funcional auxiliar $F(t)$ por

$$F(t)^2 = \tilde{E}(t) - \tilde{E}(t + 1) = E(t) - E(t + 1). \quad (4.12)$$

No que segue, iremos comparar $\tilde{E}(t)^{1+\frac{r}{2}}$ com $F(t)^2$, visando aplicar o Lema de Nakao (Lema 1.3.1) com $\phi(t) = \tilde{E}(t)$ e $\gamma = \frac{r}{2}$.

Agora, multiplicando a primeira equação de (4.1) por u e integrando sobre Ω , podemos ver que

$$\begin{aligned} \|\Delta u(t)\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ = \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t(t) u(t) dx + \int_{\Omega} |u_t(t)|^r u_t(t) u(t) dx + \int_{\Omega} h u(t) dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Então, combinando (4.13) com (4.9) vemos

$$\begin{aligned} \tilde{E}(t) \leq \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_t(t) u(t) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} h u(t) dx \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t(t)|^r u_t(t) u(t) dx + \frac{1}{\lambda_1} \|h\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.14)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \tilde{E}(s) ds \leq \int_{t_1}^{t_2} \|u_t(s)\|_2^2 ds - \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} u_t(t_2) u(t_2) dx - \int_{\Omega} u_t(t_1) u(t_1) dx \right) \\ - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} h u(s) dx ds + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t(s)|^r u_t(s) u(s) dx ds \\ + \frac{1}{\lambda_1} \int_{t_1}^{t_2} \|h\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Agora, vamos estimar o lado direito de (4.15) em termos de $F(t)$. Usaremos C_0 como uma constante positiva genérica que não depende dos dados iniciais.

Em vista de (4.12) temos, como $\frac{r}{r+2} + \frac{2}{r+2} = 1$,

$$\int_t^{t+1} \|u_t(s)\|_2^2 ds \leq |\Omega|^{\frac{r}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} \int_{\Omega} |u_t(x,s)|^{r+2} dx ds \right)^{\frac{2}{r+2}} = |\Omega|^{\frac{r}{r+2}} F(t)^{\frac{4}{r+2}}. \quad (4.16)$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existem $t_1 \in [t, t + \frac{1}{4}]$ e $t_2 \in [t + \frac{3}{4}, t + 1]$ tais que

$$\|u_t(t_i)\|_2^2 \leq 4|\Omega|^{\frac{r}{r+2}} F(t)^{\frac{4}{r+2}}, \quad i = 1, 2. \quad (4.17)$$

Combinando (4.10) com (4.17) e então notando que $\|\Delta u(s)\|_2 \leq 2\tilde{E}(s)^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u_t(t_2)u(t_2)dx - \int_{\Omega} u_t(t_1)u(t_1)dx \right| &\leq \frac{4}{\lambda_1^{1/2}} |\Omega|^{\frac{r}{2(r+2)}} F(t)^{\frac{2}{r+2}} \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta u(s)\|_2 \\ &\leq C_0 F(t)^{\frac{4}{r+2}} + \frac{1}{8} \sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Analogamente, de $\frac{r+1}{r+2} + \frac{1}{r+2} = 1$ e (4.16), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t(s)|^{r+1} |u(s)| dx ds &\leq \left(\int_t^{t+1} \int_{\Omega} |u_t(s)|^{r+2} dx ds \right)^{\frac{r+1}{r+2}} \left(\int_t^{t+1} \int_{\Omega} |u(s)|^{r+2} dx ds \right)^{\frac{1}{r+2}} \\ &\leq F(t)^{\frac{2(r+1)}{r+2}} \sup_{t \leq s \leq t+1} \|u(s)\|_{r+2} \\ &\leq F(t)^{\frac{2(r+1)}{r+2}} \mu \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta u(s)\|_2, \end{aligned}$$

onde μ é a constante de imersão de $H_0^2(\Omega)$ em $L^{r+2}(\Omega)$. Assim, como antes,

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t(s)|^{r+1} |u(s)| dx ds \leq C_0 F(t)^{\frac{4(r+1)}{r+2}} + \frac{1}{8} \sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s). \quad (4.19)$$

Finalmente, observamos que

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} hu(s) dx ds &\leq \frac{1}{\lambda_1^{1/2}} \|h\|_2 \sup_{t \leq s \leq t+1} \|\Delta u(s)\|_2 \\ &\leq C_0 \|h\|_2^2 + \frac{1}{8} \sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Portanto, inserindo (4.16), (4.18), (4.19) e (4.20) em (4.15), obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{E}(s) ds \leq C_0 \left(F(t)^{\frac{4}{r+2}} + F(t)^{\frac{4(r+1)}{r+2}} \right) + C_0 \|h\|_2^2 + \frac{3}{8} \sup_{t \leq s \leq t+1} \tilde{E}(s). \quad (4.21)$$

Usando novamente o Teorema do Valor Médio para integrais, existe $\tau \in [t_1, t_2]$ tal que

$$\int_{t_1}^{t_2} \tilde{E}(s) ds = \tilde{E}(\tau)(t_2 - t_1) \geq \frac{1}{2} \tilde{E}(t+1),$$

pois $\tilde{E}(t)$ é decrescente como $E(t)$. Então, de $\tilde{E}(t+1) = \tilde{E}(t) - F(t)^2$, concluímos que

$$\tilde{E}(t) \leq F(t)^2 + 2 \int_{t_1}^{t_2} \tilde{E}(s) ds. \quad (4.22)$$

Combinado (4.21) e (4.22) vemos

$$\tilde{E}(t) \leq F(t)^2 + C_0 \left(F(t)^{\frac{4}{r+2}} + F(t)^{\frac{4(r+1)}{r+2}} \right) + C_0 \|h\|_2^2 + \frac{3}{4} \tilde{E}(t), \quad (4.23)$$

e como $\frac{4}{r+2} < 2 < \frac{4(r+1)}{r+2}$,

$$\tilde{E}(t) \leq C_0 F(t)^{\frac{4}{r+2}} \left(1 + F(t)^{\frac{2r}{r+2}} + F(t)^{\frac{4r}{r+2}} \right) + C_0 \|h\|_2^2. \quad (4.24)$$

Além disso, da definição de $F(t)$ e estimativa (4.8), inferimos que $(1 + F(t)^{\frac{24}{r+2}} + F(t)^{\frac{4r}{r+2}})$ é limitado por uma constante $C'_0 > 0$, que é dependente de B . Assim, podemos reescrever (4.24) como

$$\tilde{E}(t) \leq C_0 C'_0 F(t)^{\frac{4}{r+2}} + C_0 \|h\|_2^2, \quad (4.25)$$

que implica que

$$\tilde{E}(t)^{1+\frac{r}{2}} \leq C_B (\tilde{E}(t) - \tilde{E}(t+1)) + C_0 \|h\|_2^{r+2}, \quad (4.26)$$

onde $C_B > 0$ é uma constante dependente de B , mas $C_0 > 0$ não. Portanto podemos aplicar o Lema Nakao, com $\phi = \tilde{E}$ and $\gamma = \frac{r}{2}$, para concluir que

$$\tilde{E}(t) \leq \left(C_B^{-1} \frac{r}{2} (t-1)^+ + \tilde{E}(0)^{-\frac{r}{2}} \right)^{-\frac{2}{r}} + C_0^{\frac{2}{r+2}} \|h\|_2^2. \quad (4.27)$$

Como o primeiro termo do lado direito de (4.27) vai pra zero com $t \rightarrow \infty$, existe $t_B > 0$, dependente de B , tal que

$$\tilde{E}(t) \leq 2C_0^{\frac{2}{r+2}} \|h\|_2^2, \quad \forall t > t_B. \quad (4.28)$$

Portanto, usando (4.11) concluimos que

$$\|\Delta u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2 \leq 4\tilde{E}(t) \leq 8C_0^{\frac{2}{r+2}} \|h\|_2^2, \quad \forall t > t_B,$$

ou seja,

$$B_0 = \{(u, v) \in E_0 \mid \|\Delta u\|_2^2 + \|v\|_2^2 \leq r_0\},$$

onde $r_0 = 8C_0^{\frac{2}{r+2}} \|h\|_2^2$, é um conjunto absorvente para $S(t)$. ■

Observação 4.2.1 *A estimativa (4.27) mostra que, quando $h = 0$, a energia $E(t)$ possui a mesma taxa de decaimento polinomial obtida por Cavalcanti et al. no Teorema 4.1.1.*

4.2.2 Compacidade assintótica em E_0

Para provar a propriedade de compacidade assintótica requerida pelo do Teorema 1.3.1, aplicamos o Lema 1.3.2.

Dados dois pares de dados iniciais $(u_0, u_1), (v_0, v_1) \in E_0$, sejam u, v soluções correspondentes do problema (4.1). Então do Teorema 4.1.1, $w = u - v$ é solução fraca do seguinte problema

$$\begin{cases} w_{tt} + \Delta^2 w + (|u_t|^r u_t - |v_t|^r v_t) \\ \quad = M(\|\nabla u\|_2^2) \Delta u - M(\|\nabla v\|_2^2) \Delta v + (|u|^p u - |v|^p v) & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ w(\cdot, 0) = u_0 - v_0, \quad w_t(\cdot, 0) = u_1 - v_1 & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (4.29)$$

Definimos o funcional

$$E_w(t) = \|w_t(t)\|_2^2 + \|\Delta w(t)\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla w(t)\|_2^2.$$

Como $M \geq 0$, segue que E_w domina a norma de E_0 .

Usaremos o Lema de Nakao novamente para provar $E_w(t)$ satisfaz uma desigualdade preliminar.

Lema 4.2.2 *Seja $T > 0$ e suponha que os dados iniciais estão num conjunto limitado $B \subset E_0$. Então existem constantes positivas C_B e C_T , com C_B não dependente de T , tais que*

$$E_w(t) \leq C_B(t-1)^{-\frac{2}{r}} + C_T \left(\sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds \right)^{\frac{2}{r+2}}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.30)$$

Demonstração:

A prova é semelhante a do Lema 4.2.1. Para estimar $E_w(t)$, por argumentos de densidade, assumimos que $w = u - v$ é uma solução regular de (4.29).

Multiplicando a equação de (4.29) por w_t e integrando sobre Ω , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} E_w(t) + \int_{\Omega} (g(u_t(t)) - g(v_t(t))) w_t(t) dx \\ = M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} u_t(t) \Delta u(t) dx \|\nabla w(t)\|_2^2 \\ + (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(t) w_t(t) dx \\ - \int_{\Omega} (f(u(t)) - f(v(t))) w_t(t) dx. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Para estimar o lado direito de (4.31), usaremos $C_1 > 0$ como uma constante genérica dependente de B mas não de t .

A continuidade de M' e estimativa (4.8) mostram que

$$M'(\|\nabla u(t)\|_2^2) \int_{\Omega} u_t(t) \Delta u(t) dx \|\nabla w(t)\|_2^2 \leq C_1 \|\nabla w(t)\|_2^2. \quad (4.32)$$

Ainda, observando que $M(a^2) - M(b^2) \leq M'(\sup\{a^2, b^2\})(|a| + |b|)|a - b|$, vemos que

$$\begin{aligned} (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(t) w_t(t) dx \\ \leq C_1 \|\nabla w(t)\|_2 \|w_t(t)\|_2 \\ \leq C_1 \|\nabla w(t)\|_2^{\frac{r+2}{r+1}} + \frac{1}{4} \|w_t(t)\|_{r+2}^{r+2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aplicando adessigualdade de Hölder com $\frac{\rho}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2(\rho+1)} + \frac{1}{2} = 1$, inferimos que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (f(u(t)) - f(v(t))) w_t(t) dx &\leq (\rho + 1) \int_{\Omega} \sup\{|u|^\rho, |v|^\rho\} w(t) w_t(t) dx \\
&\leq C_1 \left(\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho + \|v(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho \right) \|w(t)\|_{2(\rho+1)} \|w_t(t)\|_2 \\
&\leq C_1 \|\nabla w(t)\|_2 \|w_t(t)\|_{r+2} \\
&\leq C_1 \|\nabla w(t)\|_2^{\frac{r+2}{r+1}} + \frac{1}{4} \|w_t(t)\|_{r+2}^{r+2}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Por outro lado, a monotocidade de $g(s) = |s|^r s$ implica que

$$\int_{\Omega} (g(u_t(t)) - g(v_t(t))) (u_t(t) - v_t(t)) dx \geq \|w_t(t)\|_{r+2}^{r+2}. \tag{4.35}$$

Assim, substituindo (4.32)-(4.35) em (4.31) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E_w(t) + \|w_t(t)\|_{r+2}^{r+2} &\leq C_1 \left(\|\nabla w(t)\|_2^2 + \|\nabla w(t)\|_2^{\frac{r+2}{r+1}} \right) \\
&= C_1 \|\nabla w(t)\|_2 \left(\|\nabla w(t)\|_2 + \|\nabla w(t)\|_2^{\frac{1}{r+1}} \right), \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Note que, como $w = u - v$, a estimativa (4.8) implica que $\|(w(t), w_t(t))\|_{E_0} \leq C_1, t \geq 0$. Assim, em (4.36), o último termo é também limitado. Então, integrando (4.36) de t até $t + 1$, obtemos

$$\int_t^{t+1} \|w_t(s)\|_{r+2}^{r+2} ds \leq E_w(t) - E_w(t+1) + C_D \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds \equiv D(t)^2, \tag{4.37}$$

onde $C_D > 0$ é uma constante derivada de C_1 . O funcional $D(t)$ irá desempenhar um papel semelhante àquele de $F(t)$ definido em (4.12).

Como em (4.16), (4.17) e (4.18), inferimos que

$$\int_t^{t+1} \|w_t(s)\|_2^2 ds \leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}}, \tag{4.38}$$

e a existência de $t_1 \in [t, t + \frac{1}{4}]$ e $t_2 \in [t + \frac{3}{4}, t + 1]$ tais que

$$\|w_t(t_i)\|_2^2 \leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}}, \quad i = 1, 2,$$

o que implica que

$$\left| \int_{\Omega} w_t(t_2)w(t_2)dx - \int_{\Omega} w_t(t_1)w(t_1)dx \right| \leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}} + \frac{1}{8} \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s). \quad (4.39)$$

Agora, multiplicando a equação em (4.29) por w e integrando em Ω , obtemos

$$\begin{aligned} & \|\Delta w(t)\|_2^2 + M(\|\nabla u(t)\|_2^2) \|\nabla w(t)\|_2^2 + \int_{\Omega} (f(u(t)) - f(v(t)))w(t)dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w_t(t)w(t)dx + \|w_t(t)\|_2^2 \\ &+ (M(\|\nabla u(t)\|_2^2) - M(\|\nabla v(t)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(t)w(t)dx \\ &+ \int_{\Omega} (g(u_t(t)) - g(v_t(t)))w(t)dx. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Integrando (4.40) de t_1 até t_2 e usando (4.38), (4.39) e a monotocidade de $f(s) = |s|^p s$, concluímos que

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (\|\Delta w(s)\|_2^2 + M(\|\nabla u(s)\|_2^2) \|\nabla w(s)\|_2^2) ds \\ & \leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}} + \frac{1}{8} \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} (M(\|\nabla u(s)\|_2^2) - M(\|\nabla v(s)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(s)w(s)dx ds \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (g(u_t(s)) - g(v_t(s)))w(s)dx ds. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Com um procedimento semelhante ao usado em (4.34), com $\frac{r}{r+2} + \frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+2} = 1$, inferimos que

$$\int_{\Omega} (g(u_t(t)) - g(v_t(t)))w(t)dx \leq C_1 \|w_t(t)\|_{r+2} \|\Delta w(t)\|_2.$$

Combinando isto com (4.37) vemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (g(u_t(s)) - g(v_t(s)))w(s)dx ds \leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}} + \frac{1}{8} \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s). \quad (4.42)$$

Também, a estimativa (4.8) implica que

$$\int_{t_1}^{t_2} (M(\|\nabla u(s)\|_2^2) - M(\|\nabla v(s)\|_2^2)) \int_{\Omega} \Delta v(s) w(s) dx ds \leq C_1 \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \quad (4.43)$$

Inserindo (4.42) e (4.43) em (4.41) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} (\|\Delta w(s)\|_2^2 + M(\|\nabla u(s)\|_2^2) \|\nabla w(s)\|_2^2) ds \\ & \leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}} + \frac{1}{4} \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) + C_1 \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Então, da definição de $E_w(t)$, (4.38) e (4.44) resulta que

$$\int_{t_1}^{t_2} E_w(s) ds \leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}} + \frac{1}{4} \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) + C_1 \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds.$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio, existe $t^* \in [t_1, t_2]$ tal que

$$E_w(t^*) \leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}} + \frac{1}{2} \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) + C_1 \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \quad (4.45)$$

Afirmamos que

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) \leq E_w(t^*) + D(t)^2 + 2C_D \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2^2 ds. \quad (4.46)$$

Com efeito, primeiramente notemos que de (4.37),

$$E_w(t) \leq E_w(t+1) + D(t)^2.$$

Prosseguindo, seja $\tau \in [t, t+1]$ tal que $E_w(\tau) = \sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s)$. Então integrando (4.36) sobre $[t, \tau]$ e sobre $[t^*, t+1]$, temos

$$\begin{aligned}
E_w(\tau) &\leq E_w(t) + C_D \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds \\
&\leq E_w(t+1) + D(t)^2 + C_D \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds \\
&\leq E_w(t^*) + D(t)^2 + 2C_D \int_t^{t+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds,
\end{aligned}$$

e portanto (4.46) vale. Assim, inserindo (4.45) em (4.46) obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s) &\leq C_1 D(t)^{\frac{2r}{r+2}} \left(1 + D(t)^{2 - \frac{4}{r+2}}\right) \\
&\quad + C_1 \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2 (1 + \|\nabla w(s)\|_2) ds \\
&\leq C_1 D(t)^{\frac{4}{r+2}} + C_1 \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds,
\end{aligned}$$

uma vez que os termos entre parênteses são limitados. Portanto vemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s)^{\frac{r+2}{2}} &\leq C_1 D(t)^2 + C_1 \left(\sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds \right)^{\frac{r+2}{2}} \\
&\leq C_1 D(t)^2 + C_2 \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds,
\end{aligned} \tag{4.47}$$

onde

$$C_2 = C_1 \left(\sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds \right)^{\frac{r}{2}}$$

é uma constante que depende de T . Portanto, combinando (4.37) com (4.47), segue que

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E_w(s)^{1+\frac{r}{2}} \leq C_1 (E_w(t) - E_w(t+1)) + (C_D + C_2) \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds.$$

Então, aplicando o Lema de Nakao obtemos

$$E_w(t) \leq \left(C_1^{-1} \frac{r}{2} (t-1)^+ + \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} E_w(s) \right)^{-\frac{r}{2}} \right)^{-\frac{2}{r}} + \left((C_D + C_2) \sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla w(s)\|_2 ds \right)^{\frac{2}{r+2}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Isto completa a prova do Lema 4.2.2. ■

Prosseguindo, usaremos o Lema 4.2.2 para provar a compacidade assintótica do semigrupo correspondente ao problema (4.1) em $E_0 = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Lema 4.2.3 *Sobre as hipóteses do Teorema 4.2.1, o semigrupo $S(t)$ é compactamente assintótico em E_0 .*

Demonstração:

Sejam $(u_0, u_1), (v_0, v_1)$ dados num conjunto limitado $B \subset E_0$. Sejam $u_n(t) = S(t)(u_0, u_1)$ e $v_n(t) = S(t)(v_0, v_1)$ as correspondentes soluções do problema (4.1). Então sabemos que

$$u, v \in C^0([0, \infty); H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)),$$

conforme Teorema 4.1.1.

Pelo lemma anterior, fixado $T > 0$, diferença $w(t) = u(t) - v(t)$ satisfaz

$$\begin{aligned} & \|u_t(t) - v_t(t)\|_2^2 + \|\Delta u(t) - \Delta v(t)\|_2^2 \\ & \leq C_B (T-1)^{-\frac{2}{r}} + C_T \left(\sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla u(s) - \nabla v(s)\|_2 ds \right)^{\frac{2}{r+2}}. \end{aligned}$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $T > 0$ suficientemente grande de forma que

$$\|S(T)(u_0, u_1) - S(T)(v_0, v_1)\|_{E_0} \leq \varepsilon + C_T \left(\sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_{\sigma}^{\sigma+1} \|\nabla u(s) - \nabla v(s)\|_2 ds \right)^{\frac{1}{r+2}}. \quad (4.48)$$

Seja B_0 o conjunto absorvente obtido no Lemma 4.2.1. Definimos $\phi_T : B_0 \times B_0 \rightarrow \mathbb{R}$ como

sendo o lado direito de (4.48), isto é,

$$\phi_T((u_0, u_1), (v_0, v_1)) = C_T \left(\sup_{0 \leq \sigma \leq T} \int_0^{\sigma+1} \|\nabla u(s) - \nabla v(s)\|_2 ds \right)^{\frac{1}{r+2}},$$

onde u, v são soluções do problema (4.1) correspondente aos dados $(u_0, u_1), (v_0, v_1)$. Para aplicar o Lemma 1.3.2, falta mostrar que para qualquer sequência $\{(u_0^n, u_1^n)\}$ de $B_0 \subset E_0$, existe uma subsequência $\{(u_0^{n_k}, u_1^{n_k})\}$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty} \phi_T((u_0^{n_k}, u_1^{n_k}), (u_0^{n_l}, u_1^{n_l})) = 0. \quad (4.49)$$

Observamos que como B_0 é limitado e invariante sob $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, as soluções $\{(u^n(t), u_t^n(t))\}$ são uniformemente limitadas em E_0 . Portanto

$$u^n \text{ é limitado em } C([0, \infty), H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)).$$

Por outro lado, a imersão compacta de $H_0^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$ implica que a imersão

$$C([0, \infty), H_0^2(\Omega)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0, T]; H_0^1(\Omega))$$

é compacta para cada $T > 0$. (Simon [46]).

Assim u^n possui uma subsequência u^{n_k} que converge forte em $C([0, T]; H_0^1(\Omega))$, e portanto temos que o limite (4.49) é verdadeiro. ■

Referências Bibliográficas

- [1] A. Arosio, *A geometrical nonlinear correction to the Timoshenko beam equation*, Nonlinear Analysis. **47** (2001) 729-740.
- [2] A. Arosio & S. Panizzi, *On the well-posedness of the Kirchhoff string*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996) 305-330.
- [3] A. V. Babin & M. I. Visik, *Atractors of Evolution Equations*, Nauka, Moscow, 1989; English translation, North-Holland, 1992.
- [4] J. M. Ball, *Initial-boundary value problems for an extensible beam*, J. Math. Anal. Appl. **42** (1973) 61-90.
- [5] J. M. Ball, *Stability theory for an extensible beam*, J. Differential Equations **14** (1973) 399-418.
- [6] J. M. Ball, *Strongly continuous semigroups, weak solutions and the variation of constants formula*, Proc. Amer. Math. Soc. **63** (1977) 370-373.
- [7] J. M. Ball, *Global attractor for damped semilinear wave equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **10** (2004) 31-52.
- [8] H. M. Berger, *A new approach to the analysis of large deflections of plates*, Journal of Applied Mechanics **22** (1955) 465-472.
- [9] S. Bernstein, *Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles*, Isv. SSSR, Serie Math. **4** (1940) 17-26.

- [10] A. C. Biazutti & H. R. Crippa, *Global attractor and inertial set for the beam equation*, Applicable Analysis **55** (1994) 61-78.
- [11] P. Biler, *Remark on the decay for damped string and beam equations*, Nonlinear Analysis **10** (1986) 839-842.
- [12] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.
- [13] E. H. Brito, *Decay estimates for the generalized damped extensible string and beam equations*, Nonlinear Analysis. **8** (1984) 1489-1496.
- [14] M. M. Cavalcanti, V. N. Cavalcanti & J. A. Soriano, *Global existence and asymptotic stability for the nonlinear and generalized damped extensible plate equation*, Communications in Contemporary Mathematics. **6** (2004) 705-731.
- [15] R. C. Charão, E. Bisognin, V. Bisognin & A. F. Pazoto, *Asymptotic behavior of a Bernoulli-Euler type equation with nonlinear localized damping*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, **66** (2005) 67-91.
- [16] I. Chueshov & I. Lasiecka, *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*. Mem. Amer. Math. Soc. 195, Number 912, Providence, 2008.
- [17] A. T. Cousin, C. L. Frota & N. A. Lar'kin, *Global solvability and decay of the energy for the nonhomogeneous Kirchhoff equation*, Differential and Integral Equations **15** (2002) 1219-1236.
- [18] R. W. Dickey, *Infinite system of nonlinear oscillation equations related to the string*, Proc. of the A.M.S. **23** (1969) 459-468.
- [19] R. W. Dickey, *Free vibrations and dynamic bucking of the extensible beam*, J. Math. Anal. Appl. **29** (1970) 443-454.
- [20] R. W. Dickey, *A quasilinear evolution equation and the method of Galerkin*, Proc. of the A.M.S. **37**(1) (1973) 149-156.
- [21] A. Eden & A. J. Milani, *Exponential attractor for extensible beam equations*, Nonlinearity. **6** (1993) 457 - 479.

- [22] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko & R. Temam, *Exponential Attractors for Dissipative Evolution Equations*, Wiley-Masson, Paris, 1994.
- [23] J. G. Eisley, *Nonlinear vibrations of beams and rectangular plates*, Z. Angew Math. Phys. **15** (1964) 167-175.
- [24] J. K. Hale, *Asymptotic Behavior of Dissipative Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.
- [25] A. Kh. Khanmamedov, *Global attractors for the plate equation with a localized damping and critical exponent in an unbounded domain*, J. Differential Equation **225** (2006), 528-548.
- [26] G. Kirchhoff, *Vorlesungen über Mathematiche Physik, Mechanik*, Teubner, Leipzig, 1876.
- [27] S. Kouémou Patcheu, *On a global solution and asymptotic behaviour for the generalized damped extensible beam equation*, J. Differential Equations **135** (1997) 299-314.
- [28] J. L. Lions & E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes et Applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [29] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [30] J. L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*, in: G.M. de La Penha and L.A. Medeiros (Eds.), *Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies 30, North-Holland, Amsterdam, (1978) 284-346.
- [31] T. F. Ma, *Boundary stabilization for a nonlinear beam on elastic bearings*, Math. Meth. Appl. Science **24** (2001) 583-594.
- [32] T. F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*, Nonlinear Analysis **63** (2005) 1967-1977.
- [33] T. F. Ma & V. Narciso, *Global attractor for a model of extensible beam with nonlinear damping and source terms*, Preprint (2010).

- [34] L. A. Medeiros, *On a new class of nonlinear wave equations*, J. Math. Anal. and Appl. **69** (1979) 252-262.
- [35] L. A. Medeiros, *Exact controllability for a Timoshenko model of vibrations of beams*, Adv. in Math. Sci. and Appl., Tokyo, **2**(1) (1993) 47 -61.
- [36] J. E. Muñoz Rivera, *Global solution and regularizing properties on a class of nonlinear evolution equation*, J. Differential Equations **128** (1996) 103-124.
- [37] M. Nakao, *Global attractors for wave equations with nonlinear dissipative terms*, J. Differential Equations **227** (2006) 204 - 229.
- [38] M. Nakao & T. Narazaki, *Existence and decay of solutions of some nonlinear wave equations in noncylindrical domains*, Math. Rep. XI **2** (1978) 117-125.
- [39] V. Narciso, *Global attractor for a plate equation with a nonlocal dissipation*, Preprint (2010).
- [40] A. Nayfeh & D. T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Willey 1979.
- [41] A. F. Pazoto & P. G. Menzala, *Uniform rates of decay of a nonlinear beam model with thermal effects and nonlinear boundary dissipation*, Funkcialaj Ekvacioj **43** (2000) 339-360.
- [42] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equation*, Appied Mathematical Sciences, **44**, Springer - Verlag, New York 1983.
- [43] G. Perla Menzala, A. F. Pazoto & E. Zuazua, *Stabilization of Berger-Timoshenko's equation as limit of the uniform stabilization of the von Kármán system of beams and plates*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **36** (2002) 657-691.
- [44] S. L. Pohozhaev, *On a class of quasilinear hyperbolic equations*, Math. Sb. **25** (1975) 145-158.
- [45] D. Ševčovič, *Existence and limiting behaviour for damped nonlinear evolution equations with nonlocal terms*, Comment. Math. Univ. Carolin. **31**(2) (1990) 283-293.
- [46] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$* , Ann. Mat. Pura Appl. **146** (1987), 65-96.

- [47] W. A. Straus, *On weak solutions of semilinear hyperbolic equations*, Anais Acad. Bras. Ciências, **42** (1970) 645-651.
- [48] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamic System in Mechanics and Physics*, Springer - Verlag, New York, 1988.
- [49] S. Woinowsky-Krieger, *The effect of axial force on the vibration of hinged bars*, Journal of Applied Mechanics **17** (1950) 35-36.
- [50] K. Yosida, *Functional Analysis*, 3rd ed., Springer, Berlin 1971.
- [51] Songmu Zheng, *Nonlinear Evolution Equations*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.