SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 22/01/2010

Assinatura: _____

Linearização suave de pontos fixos hiperbólicos. ¹

José Humberto Bravo Vidarte

Orientador: *Prof. Dr. Daniel Smania Brandão*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática.

USP - São Carlos
março do 2010

¹Este trabalho teve suporte financeiro da FAPESP-2008/02321-0

*Matemática, de
modo algum, são
fórmulas, assim
como a música não
são notas.*

Agradecimentos

Gostaria de manifestar aqui a minha mais completa gratidão para com Deus pelo Don da vida e por estar sempre a meu lado, gostaria agradecer a minha mae María por dar-me todo o apoio moral e incentivo para continuar estudando, a meus Tios Urias e Elvira por todo el apoio prestado durante todo o tempo e pelo apoio prestado para estudar no Brasil, agradecer a mi Prima Fiorella por estar sempre a meu lado, a Mabelita pela alegria trazido para Mim, a meu Amor Nancy por todo o apoio que sempre me Brinda, a todos meus amigos Napoleón, Luís, Manuel, Fernando, Carlos, Carmen, Olga, Hayde, Eulogio, Shermila que foram bons amigos em importantes e todas etapas da minha vida, gostaria dar meu agradecimento a meu orientador Daniel Smania por todo seu apoio prestado durante à dissertação. Gostaria dar meu agradecimento a Fapesp pelo apoio financeiro durante o Mestrado.

A Maria pela, dedicação e pelo o apóio que sempre me brindou e me brinda.

Resumo

Neste trabalho tem por objetivo a construção de conjugações suaves de pontos fixos hiperbólicos com condições de não ressonância. Por tanto, inicialmente são apresentados alguns conceitos básicos sobre espaços de Banach e alguns resultados de equações diferenciais ordinárias em espaços de Banach e sistemas dinâmicos, apresentamos o teorema de Hartman Grobman como motivação inicial de Linearização. Apresentamos também vários exemplos como motivação para estudar o Teorema de Sternberg para contrações hiperbólicas, o principal resultado estudado nesta dissertação para contrações hiperbólicas.

Abstract

This work has the objective of building smooth conjugations of hyperbolic fixed points with non-resonance conditions. So, first we present some basics of Banach spaces and some results of ordinary differential equations in Banach spaces and dynamical systems, we present the theorem of Hartman Grobman as original motivation for linearization . We also present several examples as motivation to study the Sternberg theorem for hyperbolic contractions, as main result studied in this dissertation.

Introdução

Neste capítulo introdutório seguimos de maneira próxima a excelente exposição de mestrado de [8] e o artigo de George Sell [13].

O comportamento caótico de sistemas dinâmicos não-lineares é observado em experimentos e modelos computacionais nos mais diversos campos da ciência. Muitos dados experimentais irregulares, que antes foram atribuídos a erros ou ruídos, são agora reavaliados para uma explicação em termos de novos conceitos (teoria de sistemas dinâmicos) (Alligood et al., 1996). A maior parte dos processos naturais (vento, mar e sol) e não-naturais, ou seja, os realizados pelo homem, são sistemas considerados complexos, muito difíceis de se prever detalhadamente devido a seu comportamento típico. Dinâmicas no mundo real podem ser analisadas através de modelos dinâmicos os quais, muitas vezes capturam as principais aspectos do fenômeno físico a ser estudado. Os modelos resultam em sistemas dinâmicos no espaço de fase das variáveis físicas (Jackson, 1989). Os tipos de modelos dinâmicos mais comuns são:

- Equações Diferenciais Ordinárias (EDO);
- Equações Diferenciais Parciais (EDP);
- Equações Diferenciais ou Sistemas Dinâmicos discretos.

Como exemplo de sistemas dinâmicos temos.

- **Sistemas de equações diferenciais de "Lorenz"**. Foi introduzido em 1963 como um modelo simples do movimento convectivo nas camadas superiores da atmosfera (Lorenz, 1963).

Lorenz percebeu que para certos valores de parâmetros, o sistema nunca tende para um comportamento previsível a longo prazo, apresentando sensibilidade a condições iniciais, e por isso, não é possível que previsões de longo prazo sejam feitas a partir

de dados obtidos através de medidas com sensores reais. As equações que modelam este sistema são:

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= \rho x - y - xz \\ z' &= xy - \beta z \end{cases} \quad (1)$$

As equações diferenciais (4) foram obtidas por uma simplificação do desenvolvimento em série de potência da equação de Navier-Stokes para a previsão do tempo. Este sistema apresenta algum significado físico para ρ próximo de 1, porém, Lorenz encontrou comportamentos dinâmicos incomuns para $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = \frac{8}{3}$.

- **Transformações de "Ikeda".** A Transformação de Ikeda (Ikeda, 1980) descreve a dinâmica de uma cavidade óptica em forma de anel que contém um meio não linear e que é excitada por uma fonte externa de radiação coerente intensa, um laser.

Esta lei dinâmica, usada em Óptica Não-Linear, é definida por:

$$f(x, y) = ((A + B(x \cos \omega) - y \sin(\omega)), B(x \sin(\omega) + y \cos(\omega))),$$

Onde $\omega = K - \frac{E}{1+x^2+y^2}$. Para $A = 1, 0, B = 0, 9, K = 0, 9, K = 0, 4$ e $E = 6, 0$, Ikeda percebeu que com esses parâmetros o mapa é caótico.

- **Ilustração a mecânica celeste.** Uma interessante problema em mecânica celeste é o problema dos três corpos. Um caso particular interessante é por exemplo no caso e que três corpos se deslocam num plano; dois corpos com massa finita e um com massa desprezível e condição inicial favorável para os corpos de massa não desprezível se deslocarem em um movimento circular uniforme em torno do centro de massa do sistema. O associado sistema não linear descrito acima e dado pela seguinte sistema.

$$\begin{cases} r' &= vr \cos \phi \\ v' &= U(\phi) \cos \phi - \frac{1}{2}v^2 \cos \phi + 2rh \cos \phi \\ \phi &= w \\ w' &= U'(\phi) \cos^2(\phi) - \frac{1}{2}vw \cos \phi - (2U(\phi) + 2rh - v^2) \sin \phi \cos \phi \end{cases} \quad (2)$$

Com a relação de energia

$$\frac{1}{2}(v^2 \cos^2 \phi + w^2 + \omega^2 r^{-1}) - U(\phi) \cos^2(\phi) = rh \cos^2 \phi, \quad (3)$$

onde $h < 0$ é a energia, ω é o momentum,

$$U(\phi) = \frac{1}{2}m^{\frac{3}{2}}m_3[\alpha \sec \phi + 4(1 + 2\alpha \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}}]$$

e $\alpha = \frac{m}{m_3}$ é a massa raio. A derivação destas equações, o qual são reais analíticas em $\mathbb{R}^4$ e as descrições dos sistemas de coordenadas (r, v, ϕ, w) são dadas em Moeckel(1983). A variável r é a medida do tamanho do triângulo isósceles.

Como observamos nos exemplos anteriores tanto as equações diferenciais e os mapas que governam o movimento de sistemas dinâmicos freqüentemente são muito complicadas em geral não é possível encontrar soluções exatas explícitas, principalmente quando as equações são não lineares. O estudo de equações diferenciáveis não lineares, em geral, muito mais delicado que o estudo de equações diferenciais lineares. Em certas circunstâncias, é possível usar métodos da teoria linear no estudo dos sistemas não lineares examinando o comportamento na vizinhança de movimentos conhecidos, um processo conhecido como linearização. Por isso teoria da linearização constitui uma ferramenta de sistemas dinâmicos que surge no estudo de campos de vetores e difeomorfismos em um ponto fixo hiperbólico. Tal método foi investigado por muitos autores. Nesta teoria começa com um campo vetorial não-linear definida perto de uma singularidade, e procuramos condições suficientes para existência de um bom sistema de coordenadas curvilíneas com a propriedade que o campo vetorial é linear escrevendo em termos de um novo sistema de coordenadas. Dado a teoria de linearização é natural a questão de determinar a suavidade do novo sistema de coordenada. Além disso, se os novos sistemas de coordenadas não tem suavidade, pode-se tentar determinar os obstáculos ao bom linearização. Seguimos aqui de maneira próxima a excelente exposição histórica encontrada em [8].

Em 1889, Henri Poincaré submeteu um brilhante trabalho ao concurso de pesquisa em mecânica celeste com, relevantes contribuições à questão da estabilidade do sistema solar e da soluções do problema dos n -corpos, promovido pelo Rei Oscar II da Suécia (Poincaré, 1897). Em seu trabalho, Poincaré introduziu três hipóteses simplificadoras: apenas três corpos se deslocam num plano; dois corpos com massa finita e um com massa desprezível e condição inicial favorável para os corpos de massa não desprezível se desloquem em um movimento circular uniforme em torno do centro de massa do sistema. O método inovador de análise, introduzido e aplicado por Poincaré (transformação de Poincaré), baseia-se em uma transformação de duas dimensões que relaciona o cruzamento da trajetória num plano adequadamente definido com o cruzamento subsequente no mesmo sentido relativo. Poincaré analisou o problema através de métodos qualitativos, verificando a existência de possíveis movimentos e estabilidades associadas. Além disso, Poincaré introduziu o conceito de variedades instável e estável, isto é, curvas especiais cujo entendimento permite caracterizar movimentos associados a diferentes trajetórias. Poincaré determinou

que variedades de diferentes tipos (estável e instável) podem cruzar entre si, gerando os pontos homoclínicos que implicam a existência de movimentos estáveis altamente complexos, movimentos estes hoje conhecidos como caóticos. A conclusão final de Poincaré foi a existência de movimentos possíveis, tão complexos, que seria impraticável e mesmo impossível de serem analisados com os instrumentos disponíveis naquela época. Uma compreensão destas formas dinâmicas de evolução só foi possível nos dias de hoje com o advento do computador. Métodos numéricos implementados em computadores permitiram explorar as técnicas introduzidas por Poincaré relacionadas ao problema planar restrito dos três corpos.

Em 1963, o meteorologista Edward Lorenz defrontou-se com o mesmo movimento caótico descrito anteriormente por Poincaré quase cem anos antes, e vislumbrou a existência de uma importante propriedade associada a evolução caótica, que é a extrema sensibilidade a variações das condições iniciais. A manifestação deste efeito, denominado por Lorenz de Efeito Borboleta, num modelo para sistemas atmosféricos permitiu a Lorenz compreender as profundas implicações em relação ao objetivo perseguido pelos meteorologistas de se conseguir com o uso de computadores fazer previsões meteorológicas de longa duração (Lorenz, 1963).

No final dos anos 60, o matemático americano Stephen Smale explicou matematicamente o movimento caótico através de seu modelo de ferradura aplicado às intersecções homoclínicas; o movimento caótico foi constatado experimentalmente em laboratório (Moon e Holmes, 1979); em 1976 o físico americano Mitchell Feigenbaum identificou teoricamente a primeira rota que conduz do movimento regular ao movimento caótico (Feigenbaum, 1978) (Feigenbaum, 1979), que foi constatado experimentalmente em laboratório pelo físico francês Albert Libchaber (Libchaber, 1982). Nos dias de hoje é fato que o comportamento caótico é observado na natureza, sendo o responsável por importantes fenômenos que ocorrem nas mais diversas áreas. A presença de não-linearidade pode levar o sistema ao caos. O movimento caótico é tão comum na natureza que inúmeros experimentos até então considerados como irregulares devido à presença de ruídos estão sendo reavaliados para verificar a presença de caos. Sistemas caóticos são identificados em inúmeros campos da ciência, incluindo engenharia elétrica, química e engenharia mecânica (Kandel e Langholz, 1994). Inúmeras aplicações surgem a cada dia, envolvendo sistemas baseados em evoluções caóticas, tais como, redes neurais, sistemas de comunicação, controles de caos, entre outros (Macau, 1. sem. de 1999). A questão da linearização suave de difeomorfismos ou fluxos pode ser linearizado em uma vizinhança de um ponto fixo hiperbólico

tem uma historia ampla para estudar os problemas dos três corpos no trabalho de sternberg [22] e no trabalho [20]. Também a linearização serve para estudar os atratores de Lorenz entre outros temas.

0.1 Resultados

Neste trabalho apresentamos o Teorema de Hartman-Grobman para campos e difeomorfismos seguindo o livro de Nitecki [26] para pontos fixos hiperbólicos, oferecemos alguns exemplos de motivação para estudos posteriores sobre Linearizações. Faremos uso das notas de Nelson [12] para provar o teorema de Sternberg, também damos alguns exemplos para mostrar que a condição de Sternberg é suficiente mais não é necessaria.

0.2 Idéias e Métodos

Para provar o Teorema de Hartman Grobman para ponto fixos hiperbólicos utilizamos o método das contrações. Para mostrar o Teorema de Sternberg utilizaremos algumas idéias que bem da mecânica quântica, a idéia é seguinte se consideramos $U_0(t)$ e $U(t)$ dois grupos uniparamétricos de transformações sobre um mesmo espaço (por exemplo, grupos unitários sobre espaço de Hilbert ou fluxos sobre uma variedade).

Se supomos que o limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t) = W \quad (4)$$

existe. Em mecânica quântica este operador é chamado de operador de onda de Moller. Existe um análogo operador $W_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)U_0(-t)$ e scattering operadores ,o s -matriz, de Wheeler and Heinenberg é construído em termos destes operadores.

Se (4) existe então $U(s)WU_0(-s) = W$, o que nos da uma idéia de como encontrar conjugações de campos, perto de um ponto fixo hiperbólico.

0.3 Questões

Uma questão natural relativa ao processo de linearização é quão suave é a linearização. O Teorema de Hartman apenas nos garante que a linearização é um homeomorfismo local. Assim podemos nos perguntar que condições sobre a regularidade nos podem garantir uma linearização suave. O Teorema de Sternberg oferece condições(denominadas condições de não ressonância) que garantem uma linearização suave.

Sumário

0.1	Resultados	xv
0.2	Idéias e Métodos	xv
0.3	Questões	xv
1	Preliminares	1
1.1	Revisão do cálculo diferencial em espaços de Banach	1
1.1.1	Espaços métricos	1
1.1.2	Derivadas Parciais	6
1.1.3	Auto-espaços Generalizados	16
1.1.4	Aplicações Multilineares	29
1.1.5	Aplicações Multilineares Simétricas	30
1.1.6	Polinômios Homogêneos	35
1.1.7	Variedades Diferenciais	37
1.1.8	Germes e Jatos	39
2	Definições e Teoremas de Equações Diferenciais Ordinárias	41
2.1	Estrutura Local de campos de vetores	47
2.1.1	Problema de valor inicial, ou problema de Cauchy	47
2.1.2	Dependência Diferenciável	51
2.1.3	Equivalência e conjugação de campos vetoriais	60
3	Dinâmica Topológica e O Teorema de Hartman Grobman(H.G)	63
3.0.4	introdução	63
3.0.5	Equivalência Dinâmica	67
3.1	Teoremas de Hartman-Grobman para Difeomorfismos e Campos	67
3.1.1	Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos	67
3.2	Teorema de Hartamn para Campos	87

3.3	Aplicação do teorema do Hartman Grobman para a dinâmica Populacional	98
4	Linearização Suave	101
4.0.1	Transformação de Campos Vetoriais	101
4.0.2	Fluxo Tubular	107
5	Outros Resultados de Linearização	127
5.1	Teorema de Sternberg	127
5.1.1	Um trabalho de George Sell	136
5.1.2	Um trabalho de Carmen and Richard Swanson	142

Preliminares

1.1 Revisão do cálculo diferencial em espaços de Banach

Seguiremos aqui de maneira próxima os excelentes livros de Castro[3], Chicone[4], Rosa [21] e Elon lages [6].

1.1.1 Espaços métricos

Definição 1.1. (*Métrica e espaço métrico*). Uma métrica em um conjunto Y é uma função $d : Y \times Y \rightarrow [0; \infty)$ tal que, dados quaisquer $x; y; z \in Y$, valem:

- d1) $d(x; y) = 0, x = y$,
- d2) $d(x; y) = d(y, x)$,
- d3) $d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$ (desigualdade triangular). O par ordenado $(Y; d)$ é chamado de espaço métrico. Em geral, por um abuso de linguagem, diz-se que Y é um espaço métrico, subentendendo-se uma métrica d a ele associada.

Definição 1.2. (*Bola aberta e conjuntos abertos de um espaço métrico.*) Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $x \in X$ e $r \in \mathbb{R}^+$ qualquer definimos a bola aberta centrada em x e raio r como o conjunto $B(x; r) := \{y \in X; d(x; y) < r\}$. Dizemos que $A \subset X$ é um conjunto aberto de X se A pode ser escrito como união qualquer (inclusive não enumerável) de bolas abertas de X . Dizemos que um conjunto $F \subset X$ é fechado em X se $F^c := X - F$ é aberto.

Observação 1.3. Seja T a coleção de abertos de um espaço métrico (X, d) , então se cumpre as seguintes propriedades:

1. X e $\emptyset$, pertencem a T .
2. T é fechada para uniões arbitrárias de seus elementos. Em outras palavras, dada uma família arbitrária (possivelmente não enumerável) $(A_i)_{i \in J}$ de abertos $A_i \in T$, a união $[\bigcup_{i \in J} A_i]$ também é um conjunto aberto.
3. T é fechada para intersecções finitas de seus elementos. Isto é, dados abertos $A_1; \dots; A_q \in T$, $q \in \mathbb{N}$, a intersecção $\bigcap_{i=1}^q$ também é um conjunto aberto.

As três propriedades acima fazem de T uma topologia, e do par (X, T) um exemplo de espaço topológico.

Definição 1.4. (Norma). Seja $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ um espaço vetorial real. Uma norma em E é uma aplicação $\|\cdot\| : E \rightarrow [0; +\infty)$ com as seguintes propriedades:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$;
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$;
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. (desigualdade triangular).

O exemplo mais comum de espaço métrico é dado pelos espaços vetoriais normados. Se E é um tal espaço, dotado de uma norma $\|\cdot\|$, então a aplicação $d : E \times E \rightarrow [0; +\infty)$ dada por $d(v; w) := \|v - w\|$; $v \in E; w \in E$; define uma distância em E . Outra classe importante de exemplos de espaços métricos é dada quando tomamos um subconjunto $Y \subset X$ de um espaço métrico $(X; d)$. Nesse caso, a restrição $d_{Y \times Y}$ define uma métrica em Y .

Definição 1.5. (Seqüência e subsequência). Seja X um conjunto qualquer. Uma seqüência em X é uma aplicação $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Denota-se $x_j := x(j)$ e $(x_j) := x$. Dada uma seqüência $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, uma subsequência (x_{j_k}) de (x_j) é qualquer restrição de (x_j) a um subconjunto infinito $\widehat{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$, $\widehat{\mathbb{N}} = \{j_1, j_2 : j_1 < j_2 < \dots\}$.

Definição 1.6. (Seqüência convergente). Uma seqüência (x_j) em um espaço métrico $(Y; d)$ é dita convergente para $y \in Y$ se para toda bola aberta B tal que $y \in B$, tem-se um número finito de índices j tais que $x_j \notin B$. Em outras palavras, dado uma bola aberta $B \subset Y$ com $y \in B$, existe n_B tal que $x_j \in B$; $j > n_B$. Escrevemos $x_j \rightarrow y$ quando $j \rightarrow +\infty$, ou simplesmente $x_j \rightarrow y$ para denotar que a seqüência (x_j) converge a $y \in Y$. Dizemos que uma subsequência (x_{j_k}) é convergente se a seqüência $y : \mathbb{N} \rightarrow Y$ definida por $y_k := x_{j_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ for convergente.

Definição 1.7. (Seqüência de Cauchy.) Seja (Y, d) um espaço métrico. Uma seqüência (y_n) , com $y_n \in Y$; $n \in \mathbb{N}$ é dita seqüência de Cauchy se dado um real $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, j \in \mathbb{N}$, com $m \geq n_0$ e $j \geq n_0$ temos $d(y_m; y_j) < \epsilon$. Intuitivamente, dizer que (y_n) é uma seqüência de Cauchy significa dizer que seus termos vão ficando mais e mais próximos para índices n suficientemente grandes.

Definição 1.8. (Aplicação contínua.) Sejam $(X; d), (\hat{X}; \hat{d})$ espaços métricos. Uma aplicação $f : X \rightarrow \hat{X}$ é dita contínua em um ponto $x \in X$ se dado $\epsilon > 0$ existe $\alpha > 0$ tal que $y \in X$, $d(x; y) < \alpha$ implica $\hat{d}(f(x); f(y)) < \epsilon$. A aplicação $f : X \rightarrow \hat{X}$ é dita contínua se é contínua em cada ponto $x \in X$.

É imediato da definição acima que uma aplicação $f : X \rightarrow \hat{X}$ é contínua, se, e só se, a pre-imagem de qualquer aberto de $\hat{X}$ é sempre um subconjunto aberto de X .

Observação 1.9. Ainda em contextos métricos, é possível provar que uma aplicação $f : X \rightarrow \hat{X}$ é contínua em $x \in X$ se e só se f é seqüencialmente contínua em $x \in X$. Por definição, f é dita seqüencialmente contínua em $x \in X$ se dada uma seqüência (x_n) , $x_n \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$ então a seqüência $(f(x_n))$ converge a $f(x)$.

Definição 1.10. (Espaço métrico completo). Um espaço métrico (X, d) é dito completo se toda seqüência de Cauchy (x_n) , com $x_n \in X$, converge para um ponto $x \in X$.

Definição 1.11. (Espaço de Banach). Um espaço vetorial normado cuja métrica oriunda da norma é completa é chamado de espaço de Banach.

Exemplo 1.12. Seja $X = \mathbb{R}^k$, e $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \rightarrow [0; \infty)$ uma norma qualquer. Então é possível provar que X com a métrica dada por $d(v, w) := \|v - w\|$, $v, w \in \mathbb{R}^k$ é um espaço métrico completo, e portanto, um espaço de Banach. Tal fato segue-se de que toda seqüência limitada em $\mathbb{R}^k$ possui uma subseqüência convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass).

Definição 1.13. Seja X um conjunto qualquer, e seja (Y, d) um espaço métrico. Defina o conjunto $F(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y; f \text{ é limitada}\}$: Então a aplicação $d_\infty : F(X, Y) \times F(X, Y) \rightarrow [0; \infty)$ dada por $d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x); g(x)); x \in X\}$ é uma métrica de $F(X, Y)$, chamada de distância da convergência uniforme.

É possível mostrar que quando Y é um espaço métrico completo, $F(X, Y)$ é ele mesmo um espaço métrico completo.

Exemplo 1.14. Seja X um conjunto qualquer, e seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach. Defina o conjunto $F = F(X, E) := \{f : X \rightarrow E, f \text{ limitada}\}$. Então a aplicação $\|\cdot\|_\infty : F \rightarrow [0; \infty)$ dada por $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$ é uma norma de F , chamada de norma da convergência uniforme, ou norma do sup. É possível mostrar que F é um espaço de Banach.

Definição 1.15. (*Aplicação lipschitziana*). Sejam (X, d) e $(\widehat{X}, \widehat{d})$ espaços métricos. Uma aplicação $F : X \rightarrow \widehat{X}$ é dita ser lipschitziana ou simplesmente Lipschitz se existe $K \geq 0$, tal que $\widehat{d}(F(x); F(y)) \leq Kd(x, y)$, $x, y \in X$. Dizemos que K é uma constante de Lipschitz de F . Denotamos o ínfimo das constantes de Lipschitz de F por $Lip(F)$, o qual é, ele mesmo, uma constante de Lipschitz.

Observação 1.16. Notamos que as aplicações lipschitzianas são contínuas: Se F é uma tal aplicação, supondo sem perda $K > 0$, dados $x \in X$, $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{K}$, temos $d(x, y) < \delta$ implica $d(F(x); F(y)) < \epsilon$.

Observação 1.17. Se X, Y e Z são espaços métricos, com $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ ambas lipschitzianas, então a composta $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ também é Lipschitz com $Lip(g \circ f) \leq Lip(g) \cdot Lip(f)$.

Uma sub-classe relevante de aplicações Lipschitz é constituída pelas contrações de um espaço métrico nele mesmo.

Definição 1.18. (*Contração*). Seja (X, d) um espaço métrico. Uma aplicação $F : X \rightarrow X$ é dita ser uma contração se existe $0 \leq K < 1$ tal que $d(F(x); F(y)) \leq Kd(x, y)$, $x, y \in X$.

Sejam E, F espaços de Banach sobre o mesmo corpo K onde $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Indiquemos com U um subconjunto aberto de E e $\|\cdot\|$ denota a norma em ambos espaços.

Definição 1.19. A aplicação $f : U \rightarrow F$ é chamada (*Fréchet*) diferenciável em $a \in U$ se existe um função linear continua $Df(a) : E \rightarrow F$, chamado a derivada de f em a tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\| = 0.$$

Observação 1.20. Alguns autores incluem a continuidade de f em a , na definição de sua diferenciabilidade em a , supondo apenas que $Df(a)$ seja linear, para concluir daí que $Df(a)$ é contínua. É outro ponto de vista equivalente.

Proposição 1.21. Seja $f : U \rightarrow F$ uma função diferenciável em $a \in U$, $v \in E$ e $V := V_{a,v} = \{t \in K \mid a + tv \in U\}$. Então V é aberto em K , $0 \in V$ e a função:

$$\begin{aligned} g_{a,v} : V &\rightarrow F \\ t &\rightarrow g_{a,v}(t) = f(a + tv) \end{aligned}$$

é diferenciável em 0
e satisfaz

$$\frac{d}{dt} f(a + tv)|_{t=0} = Df(a)v.$$

Demonstração:

Se $v = 0$ é fácil ver que $V_{a,0}$ é aberto e $Df(a)0 = 0$.

Suponhamos que $v \neq 0$ e definamos

$$\alpha : V \rightarrow K$$

tal que

$$\begin{aligned}\alpha(t) &:= \left\| \frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a)) - Df(a)v \right\| \\ &= \frac{1}{|t|} \|f(a+tv) - f(a) - Df(a)tv\|\end{aligned}$$

Para $t \neq 0$ suficiente mostrar que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0.$$

Seja $\epsilon > 0$ e definamos $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\|v\|} > 0$, então como f é diferenciável em a então $\exists \delta_1$ tal que

$$\frac{1}{\|h\|} \|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\| < \epsilon_1.$$

Onde $0 < \|h\| < \delta_1$.

Se definimos $\delta = \frac{\delta_1}{\|v\|}$, então se $|t| < \delta$, então $\|tv\| < \delta_1$ e

$$\frac{1}{|t|\|v\|} \|f(a+tv) - f(a) - Df(a)tv\| < \epsilon_1.$$

Daí obtemos que $\alpha(t) \leq \epsilon$ sempre que $|t| < \delta$ ■

Corolário 1.22. *Se $f : U \subset E \rightarrow F$ é diferenciável em U então*

$$\begin{array}{ccc} Df & : & U \rightarrow F \\ & & x \rightarrow Df(x) \end{array}$$

é uma função.

Definição 1.23. *A função $f : U \subset E \rightarrow F$ é diferenciável em U se f for diferenciável*

em todos os pontos de U . Nesse caso, a aplicação

$$\begin{aligned} Df &: U \rightarrow F \\ x &\rightarrow Df(x) \end{aligned}$$

é chamada a diferencial de f em U e representada por Df .

Sejam X, Y, X_i, Y_i Espaços de Banach, então se cumprem a seguintes propriedades:

1. Se $f : X \rightarrow Y$ é diferenciável em $a \in X$, então f é contínua em a .
2. Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ diferenciáveis, então $h = g \circ f$ é diferenciável, e sua derivada é dada pela regra da cadeia

$$Dh(x) = Dg(f(x))Df(x).$$

3. Sejam $f_1 : X \rightarrow Y_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y_n$, funções e $f : X \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$ dada por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, então f é contínua se, e só se, $f_1, \dots, f_n$ são contínuas.
4. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma transformação linear contínua, então $Df(x) = f, \forall x \in X$.

A C^r - norma de uma função r -vezes continuamente diferenciável $f : U \rightarrow Y$, definida sobre um aberto $U \subset X$, é definida por

$$\|f\|_r = \|f\|_0 + \|Df\|_0 + \dots + \|D^r f\|_0,$$

Onde $\|\cdot\|_0$ denota a norma usual do supremo, por exemplo,

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in U} \{f(x)\}$$

e

$$\sup_{u \in U} \left(\sup_{\|x\|=1} \|Df(u)x\| \right).$$

Se $L(E, F)$ denota o espaço de Banach das transformações lineares contínuas de E em F .

1.1.2 Derivadas Parciais

Suponhamos que E_1, E_2 , e F são espaços de Banach e seja $E = E_1 \oplus E_2$ $U \subset E$ e U aberto em E , e $f : U \rightarrow F$, as derivadas parciais de f num ponto $(a, b) \in U$ são aplicações

lineares $\partial_1 f(a, b) : E_1 \rightarrow F$, $\partial_2(a, b) : E_2 \rightarrow F$, definidas pelas seguintes relações:

$$f(a + h, b) = f(a, b) + \partial_1(a, b)h + r_1(h), \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{|h|} = 0,$$

$$f(a, b + k) = f(a, b) + \partial_2 f(a, b)k + r_2(k), \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_2(k)}{|k|} = 0.$$

f pode possuir uma, ambas, ou nenhuma das derivadas parciais $\partial_1 f(a, b)$, $\partial_2 f(a, b)$ num ponto $(a, b) \in U$.

Muitas vezes usam-se as notações $D_1 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \in L(E_1, F)$ e $D_2 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \in L(E_2, F)$ para as derivadas parciais.

A derivada parcial $D_1 f(a, b)$, caso exista, é a derivada da "função parcial" $g : E_1 \cap U \rightarrow F$, $g(x) = f(x, b)$ no ponto $a \in E_1$, analogamente para $D_2 f(a, b)$ caso exista é a derivada da "função parcial" $h : E_2 \cap U \rightarrow F$ $h(x) = f(a, x)$.

Se a aplicação $f : U \rightarrow F$ é diferenciável no ponto $c \in U$ então, qualquer que seja a decomposição em soma direta $E = E_1 \oplus E_2$, com $c = (a, b)$, $a \in E_1$, $b \in E_2$, as derivadas parciais $\partial_1 f(c)$, $\partial_2 f(c)$ existem, e $f'(c).(h, k) = \partial_1 f(c).h + \partial_2 f(c).k$. Em outras palavras, $\partial_1 f(c) = f'(c) | E_1$, $\partial_2 f(c) = f'(c) | E_2$.

A recíproca é falsa. Se consideramos a decomposição em soma direta usual $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$, onde $E =$ eixo dos x e $F =$ eixo dos y , a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Possui na origem $c = (0, 0)$ derivadas parciais $\partial_1 f(c) = 0$ e $\partial_2 f(c) = 0$, mas f não é derivável na origem.

Observe que as derivadas parciais aqui introduzidas diferem ligeiramente das usuais $\frac{\partial f}{\partial x^i}$. A diferença é a seguinte. Dada a decomposição em soma direta $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$, sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável. Então num ponto $c = (a, b) \in U$, $\partial_1 f(c) : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\partial_2 f(c) : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ são transformações lineares tais que $\partial_1 f(c).e_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}(c)$ e $\partial_2 f(c).e_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}(c)$. Nestes casos, identificamos a transformação $\partial_i f(c)$ com o vetor $\frac{\partial f}{\partial x^i}(c)$.

Dados um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e um conjunto arbitrário Y , pode-se falar da derivada parcial $\partial_1(a, b) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ de uma aplicação $f : U \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ela é definida como a derivada ordinária da aplicação parcial $x \mapsto f(x, b)$, de U em $\mathbb{R}^n$, no ponto a .

O teorema abaixo dá uma condição suficiente para derivabilidade em termos de derivadas parciais. Na prática, ele fornece uma maneira muito útil de reconhecer se a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k .

Lema 1.24. *Sejam F um espaço de Banach $f : [a, b] \rightarrow F$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis,*

com $|f'(t)| \leq g'(t)$ para todo $t \in [0, 1]$ e $g'(t) > 0 \forall t \in (a, b)$ então $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Demonstração:

Consideremos $X = \{t \in [a, b]; |f(t) - f(a)| \leq g(b) - g(a) + \epsilon t + \epsilon\}$. Nós temos que $0 \in X$, então $X \neq \emptyset$, ademais pela continuidade de g e f então existe um $c > a$ tal que $[a, c]$, daí obtemos que o $\sup > a$.

Afirmção: $\sup X = b$, com efeito.

Nós temos que $a < \sup X \leq b$, também tem-se que X é fechado e como o $\sup X \in \overline{X} = X$, então $\sup \in X$. Suponhamos que o $0 \leq s = \sup < 1$, afirmação $a + \delta \in X$.

Como f é diferenciável em a então para $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $0 < h < \delta$ então

$$\left| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} - f'(s) \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

então

$$\left| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right| - \frac{\epsilon}{2} < f'(s). \quad (1.1)$$

Do mesmo modo obtemos

$$-\frac{g(s+h) - g(a)}{h} + g'(s) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (1.2)$$

De (1.1) e (1.2) obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(s+h) - f(a)}{h} \right| &< \frac{\epsilon h + g(s+h) - g(s)}{h} \\ \left| f(s+h) - f(s) \right| &< \epsilon h + g(s+h) - g(s). \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} |f(s+h) - f(0) + f(a) - f(0)| &\leq |f(s+h) - f(s)| + |f(s) - f(0)| \\ &< \epsilon h + g(s+h) - g(s) + |f(s) - f(a)| \\ &< \epsilon h + g(s+h) - g(s) + g(s) - g(a) + \epsilon s + \epsilon \\ &< \epsilon(s+h) + g(s+h) - g(s) + \epsilon. \end{aligned}$$

O que contradiz a definição de supremo.

Então $b \in X$, obtemos o resultado desejado. ■

Teorema 1.25. (*Desigualdade do valor médio I*) *Seja F um espaço de Banach e $f : [0, 1] \rightarrow F$ um caminho contínuo, diferenciável no aberto (a, b) . Se $|f'(t)| \leq M \forall t \in (a, b)$, então $|f(a) - f(b)| \leq M(b - a)$.*

Demonstração:

O teorema segue-se do lema anterior, tomando $g(t) = Mt$. ■

Teorema 1.26. (*Desigualdade do valor Médio II*) *Seja E, F espaços de Banach, U um aberto de E , seja $f : U \rightarrow F$. Se o segmento de reta fechado $[a, a + h] \subset U$ e f diferenciável em todos os pontos do segmento aberto $(a, a + h)$, então*

$$|f(a + h) - f(a)| \leq |h| \cdot \sup_{0 < t < 1} |f'|.$$

Demonstração:

Definamos o caminho $g : [0, 1] \rightarrow F$, $g(t) = f(a + t(h))$, tem-se que g é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $(0, 1)$, com $g(0) = f(a)$, $g(1) = f(a + h)$, e pela regra da cadeia, $g'(t) = f'(a + th) \cdot h$ tomando norma obtemos $|g'(t)| \leq |f'(a + th)| |h| \leq \sup_{0 < t < 1} |f'(a + th)| |h|$, pelo o teorema do valor médio para caminhos obtemos que $|g(1) - g(0)| \leq \sup_{0 < t < 1} |f'(a + th)| |h|$. ■

Corolário 1.27. *Seja $U \subset F$ aberto e conexo. Se $f : U \rightarrow F$ é diferenciável, com $|f'(x)| \leq M$ para todo $x \in U$ então f é lipschitziana, com $|f(y) - f(x)| \leq M|x - y|$ para quaisquer $x, y \in U$.*

Demonstração:

Com efeito, f é contínua em U e $x, y \in U$ então $[x, y] \subset U$, pela convexidade. Logo pela desigualdade do valor médio obtemos o resultado desejado. ■

Teorema 1.28. (*Teorema Fundamental do cálculo*) *Seja E, F espaços de Banach, e seja U um aberto tal que $U \subset E$, seja $f : U \rightarrow F$ uma função de classe C^1 , e suponhamos que $[x, y] \subset U$. Então*

$$f(x + y) = f(x) + \int_0^1 Df(x + ty) dt.$$

Demonstração:

Definamos $\phi(t) : [0, 1] \rightarrow F$, por $\phi(t) = f(t + ty)$, então pela regra da cadeia temos que $\phi'(t) = Df(x + ty)y$.

Agora definimos $\psi : [0, 1] \rightarrow F$ por

$$\psi(t) = f(x) + \int_0^t f(x + sy)ds.$$

Então para $0 < t < 1$ se tem que $\psi'(t) = Df(x + ty).y$ pela continuidade de Df e pelo o corolário acima obtém-se que $\psi - \phi$ é constante pois ϕ, ψ são contínuas sobre $[0, 1]$ então $\psi - \phi$ é constante sobre $[0, 1]$, como $\phi = \psi = 0$, então $\phi(1) = \psi(1)$. ■

O próximo resultado corresponde à principal ferramenta para construir objetos em dimensão infinita, onde, ao contrario do que ocorre no $\mathbb{R}^n$, argumentos de compacidade são quase sempre inviáveis.

Teorema 1.29. (Ponto Fixo de Banach-Cacciopoli). *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma contração. Então, existe um único ponto fixo $x_0 \in X$, i.e, $x_0 = T(x_0)$, e além disso, $\forall x_1 \in X$, $T^n(x_1) \rightarrow x_0$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração:

Seja $y \in X$ e considere a seqüência $x_n = T^n(y) = T(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \theta d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \theta^n d(T(y), y).$$

Logo,

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{j=n}^{n+m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{n+m} \theta^j d(T(y), y) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(T(y), y).$$

Por tanto x_n é uma seqüência de Cauchy em X e converge para um certo x_0 pois M é completo.

Pela continuidade de T , passando ao limite na relação $x_n = T(x_{n-1})$ obtemos $x_0 = T(x_0)$. Se $z \in M$ é tal que $y = T(y)$, então $d(x_0, z) = d(T(x_0), T(z)) \leq \theta d(x_0, z)$, logo $x_0 = z$ pois $\theta \neq 1$. Como y é arbitrário e x_0 é único as contas acima mostram que $T^n(x_1) \rightarrow x_0, \forall x_1 \in X$. ■

Corolário 1.30. *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ um operador contínuo tal que T^k seja uma contração para algum $k \in \mathbb{N}$. Então existe um único ponto fixo $x_0 \in X$ de T e para qualquer $x_1 \in X$, temos $T^n(x_0) \rightarrow x_0$.*

Demonstração:

Aplicando o teorema anterior a T^k para achar um ponto fixo $x_0 \in X$ de T^k . Temos $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{nk}(T(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^{n-1}k(x)) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} T^{n-1}k(x)) = T(x_0)$; o que mostra que x_0 é um ponto fixo de T . A unicidade, agora, é fácil e a convergência segue do fato de que qualquer subsequência da forma $T^{nk+l}(x_0) = T^{nk}(T^l(x_0))$ converge para x_0 , quando $n \rightarrow \infty$, onde $l = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. ■

Teorema 1.31. (Princípio da Contração Uniforme.) *Sejam X e Y espaços de Banach $U \subset X$, $V \subset Y$ abertos e $T : \bar{U} \times V \rightarrow \bar{U}$ uma contração uniforme em $\bar{U}$, i.e., existe $\theta \in [0, 1)$ tal que $|T(x_1, y) - T(x_2, y)| \leq \theta|x_1 - x_2|$, $\forall x_1, x_2 \in \bar{U}$, $\forall y \in V$. Seja $g(y)$ o único ponto fixo de $T(\cdot, y)$ em $\bar{U}$, $g : V \rightarrow \bar{U}$. Se $T \in C^k(\bar{U} \times V, X)$ $k \in \mathbb{N}$, então $g \in C^k(V, X)$. (Se T é analítico então g é também analítico.)*

Demonstração:

(Continuidade)

$$g(y_1) - g(y_2) = T(g(y_1), y_1) - T(g(y_2), y_2),$$

então

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq |T(g(y_1), y_1) - T(g(y_1), y_2)| + \theta|g(y_1) - g(y_2)|.$$

Como $0 \leq \theta < 1$ e T é contínua,

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq \frac{\theta}{1 - \theta} |T(g(y_1), y_1) - T(g(y_1), y_2)| \rightarrow 0, \quad (1.3)$$

quando $y_2 \rightarrow y_1$, o que prova a continuidade de $g = g(y)$.

(Diferenciabilidade) Da relação $g(y) = T(g(y), y)$, temos formalmente

$$D_y g(y) = D_x T(g(y), y) D_y g(y) + D_y T(g(y), y).$$

Se definimos o operador $\phi : L(Y, X) \times Y \rightarrow L(Y, X)$ definido por $\phi(M, y) = D_x T(g(y), y) D_y g(y) + D_y T(g(y), y)$, por tanto se $D_y g(y) \in L(Y, X)$, se existir, é ponto fixo do operador $\phi(\cdot, y)$:

$L(Y, X) \rightarrow L(Y, X)$ que é contínuo quando T é C^1 .

Afirmamos que $\|D_x T(g(y), y)\| \leq \theta, \forall y \in V$. De fato, como

$$D_x T(x, y)h = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x + ty, y) - T(x, y)}{t}.$$

Vamos a estimar $|T(x + ty, y) - T(x, y)|$. Pela hipótese temos que $|T(x + ty, y) - T(x, y)| \leq \theta|t||h|$.

Desta última desigualdade segue que $D_x T(x, y) \leq \theta|h|$.

Logo,

$$\|D_x T(x, y)\| \leq \theta.$$

Da afirmação anterior obtemos

$$\|\phi(M_1, y) - \phi(M_2, y)\| \leq \theta\|M_1 - M_2\|.$$

Sendo $\phi(\cdot, y)$ uma contração uniforme, temos que para cada $y \in V$ existe um ponto fixo $M(y)$, precisamos mostrar que $M(y)$ é de fato diferencial de $g(y)$.

$$\begin{aligned} |g(y + h) - g(y) - M(y)h| &= \\ &|T(g(y + h), y + h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)M(y)h - D_y T(g(y), y)| \\ &\leq |T(g(y + h), y + h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)(g(y + h) - g(y)) - D_y T(g(y), y)h| \\ &\quad + |D_x T(g(y), y)(g(y + h) - g(y) - M(y)h)| \\ &\leq |T(g(y + h), y + h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)M(y)h - D_y T(g(y), y)| \\ &\quad + \theta|(g(y + h) - g(y) - M(y)h)|. \end{aligned}$$

Daí segue-se que

$$\begin{aligned} &\frac{|g(y + h) - g(y) - M(y)h|}{|h|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \theta} \frac{|T(g(y + h), y + h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)M(y)h - D_y T(g(y), y)|}{|h|} \\ &\leq \frac{1}{1 - \theta} \frac{|T(g(y + h), y + h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)M(y)h - D_y T(g(y), y)|}{|g(y + h) - g(y)| + |h|} \frac{|g(y + h) - g(y)| + |h|}{|h|} \end{aligned}$$

Mas T é C^1 de modo que por continuidade existe uma constante $K \geq 0$ tal que para $|h|$ suficientemente pequeno temos

$$|g(y+h) - g(y)| \underbrace{\leq}_{\text{por 1.3}} \frac{1}{1-\theta} |T(g(y), y+h) - T(g(y), y)| \leq \frac{1}{1-\theta} K|h|.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} & \frac{|g(y+h) - g(y) - M(y)h|}{|h|} \\ & \leq \frac{1}{1-\theta} \frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)M(y)h - D_y T(g(y), y)|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \left(1 + \frac{K}{1+\theta}\right). \end{aligned}$$

Quando $|h| \rightarrow 0$, temos $|g(y+h) - g(y)| \rightarrow 0$ pela estimativa acima, de modo que o quociente

$$\frac{1}{1-\theta} \frac{|T(g(y+h), y+h) - T(g(y), y) - D_x T(g(y), y)M(y)h - D_y T(g(y), y)|}{|g(y+h) - g(y)| + |h|} \rightarrow 0.$$

Pela definição de $T(x, y)$ ser diferenciável com $D_y g(y) = M(y)$.

(Continuidade C^k) Prosseguimos por indução. Assim, sendo T de classe C^k , temos que ϕ definido acima é de classe C^{k-1} , de forma que seu ponto fixo $D_y g(y)$ é C^{k-1} em y pela hipótese de indução, o que implica em $g = g(y)$ ser de classe C^k .

■

Com o princípio da contração uniforme, podemos facilmente provar o teorema da função implícita e, conseqüentemente, o da função inversa, como mostramos a seguir.

Teorema 1.32. (Teorema da Função Implícita) *Sejam X, Y e Z espaços de Banach, $U \subset X$ e $V \subset Y$ abertos e $(x_0, y_0) \in U \times V \rightarrow Z$ de classe $C^k, k \geq 1$, com $F(x_0, y_0) = 0$ e $D_x f(x_0, y_0)$ inversível com inversa limitada. Então existem $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ vizinhança aberta de x_0, y_0 e $\varphi : V_0 \rightarrow U_0$ de classe C^k tais que $F(\varphi(y), y) = 0, \forall y \in V_0$. Mais precisamente, temos que $F(x, y) = 0$, com $(x, y) \in U_0 \times V_0$, se e somente se $x = \varphi(y)$ (e se F é analítica, então φ é analítica.)*

Demonstração:

Temos

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow D \Leftrightarrow D_x F(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow x = x - [D_x F(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y).$$

Definamos $\phi : U \times V \rightarrow Z$ por $\phi(x, y) = x - [D_x F(x_0, y_0)]^{-1} F(x, y)$. Além disso pela regra da cadeia segue

$$D_x \phi(x, y) = I - [D_x F(x_0, y_0)]^{-1} D_x F(x, y).$$

Onde I é o operador identidade em X . Como ϕ é de classe $C^k, k \geq 1$ temos, fixando um $\theta \in (0, 1)$, temos

$$\|D_x \phi(x, y)\| \leq \theta < 1, \forall (x, y) \in U_1 \times V_1,$$

em uma certa vizinhança $U_1 \times V_1 \subset U \times V$ de (x_0, y_0) . Logo pelo o teorema de valor intermédio temos.

$$|\phi(x_1, y) - \phi(x_2, y)| \leq \theta |x_1 - x_2|, \forall (x_1, y), (x_2, y) \in U_1 \times V_1.$$

Podemos, também, assumir, graças à continuidade de $D_y F$, que nessa mesma vizinhança $U_1 \times V_1$ de (x_0, y_0) , temos $\|D_y F(x, y)\| \leq K$, para algum $K > 0$.

Seja agora $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $\overline{U_0} \subset U_1$, onde

$$U_0 = \{x \in U : |x - x_0| < \epsilon\}.$$

Seja também $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $V_0 = \{y \in V : |y - y_0| < \delta\}$ tal que $V_0 \subset V_1$ e $\delta < \frac{(1-\theta)\epsilon}{K}$. Então,

$$\begin{aligned} |\phi(x, y) - x_0| &= |\phi(x, y) - \phi(x_0, y_0)| \\ &\leq \theta |x - y_0| + K |y - y_0| \leq \theta \epsilon + K \delta < \epsilon, \end{aligned}$$

$$\forall (x, y) \in \overline{U_0} \times V_0.$$

Logo, se tem $\phi : \overline{U_0} \times V_0$. Logo, $\phi : \overline{U_0} \times V_0 \rightarrow U_0$ é de classe C^k e é uma contração uniforme. Portanto, o ponto fixo $g(y) = \phi(g(y), y)$ é de classe C^k , e é a função procurada tal que $F(g(y), y) = 0$. Como o ponto fixo $g(y)$ é único em U_0 segue que $F(x, y) = 0$, $(x, y) \in U_0 \times V_0$ se e somente se $x = g(y)$. ■

Observação 1.33. A função $\phi = \phi(x, y)$ que aparece na demonstração do teorema da função Implícita está associada ao método de Newton para achar zero de funções. De fato, sendo $\phi(., y)$ uma contração, a seqüência $x_n = \phi(x_{n-1}, y)$ converge para o zero $g(y)$ de $\phi(., y)$. Nessa forma, esse método é apropriado para achar zero de funções por continuação, i.e., conhecendo-se o zero x_0 de $F(., y_0)$ pode-se achar o zero de $F(., y)$ para

y próximo de y_0 . (Note que precisamos de $D_x F^{-1}$ no ponto (x_0, y_0) .) Isso tem aplicações em teoria das bifurcações.

Teorema 1.34. (Teorema da Função Inversa). *Sejam X e Y espaços de Banach, $U \subset X$ aberto, $x_0 \in U$ e $f : U \rightarrow Y$ de classe C^k , $k \in \mathbb{N}$, com $Df(x_0)$ inversível e com inversa limitada. Então existem $U_0 \subset U$ e $V_0 \subset Y$, vizinhanças abertas de x_0 e $f(x_0)$, respectivamente, e uma função $g : V_0 \rightarrow U_0$ de classe C^k tal que $g(f(x)) = x$; $x \in U_0$, e $f(g(y)) = y$; $y \in V_0$. (f analítica $\rightarrow g$ analítica.) de*

Demonstração:

Aplicamos o teorema da função implícita à função $(x, y) \rightarrow f(x) - y : U \subset Y \rightarrow X \subset Y$. Com isso, obtemos $g : V_0 \rightarrow U_1$ de classe C^k , com U_1 e V_0 vizinhanças abertas de x_0 e $f(x_0)$, respectivamente, e tal que $f(x) = y$, com $(x, y) \in U_1 \subset V_0$, se, e somente se, $x = g(y)$. Seja, então, $U_0 = f^{-1}(V_0) \cap U_1$, de modo que $U_0 \subset U_1$ também é uma vizinhança aberta de x_0 . Além disso, é fácil ver que $f(g(y)) = y, \forall y \in V_0$ e $g(f(x)) = x, x \in U_0$. ■

Observação 1.35. *É fácil ver que os teoremas da função implícita e da função inversa são de fato equivalentes. Para provar o teorema da função implícita a partir do da função inversa, note que a hipótese de $D_x F(x_0, y_0)$ ser inversível com inversa limitada implica em X ser isomorfo a Z e que podemos construir uma função $\phi : U \times V \rightarrow X \times Y$ definida por $\phi(x, y) = (D_x F(x_0, y_0)^{-1} F(x, y), y)$ que é inversível com inversa limitada em (x_0, y_0) , pois $D\phi(x_0, y_0)$ tem a forma*

$$D\phi(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} I_X & * \\ 0 & Y_Y \end{pmatrix}$$

Onde I_X e I_Y são operadores identidade em X e Y , respectivamente. O teorema da função inversa garante, então, a existência da inversa ϕ^{-1} de classe C^k em uma vizinhança de (x_0, y_0) . Pela forma de $\phi(x, y)$, é fácil ver que $\phi^{-1}(x, y) = (\psi(x, y), y)$. Temos, então, que $x = D_x F(x_0, y_0)^{-1} F(\psi(x, y), y)$.

Fazendo $x = 0$, obtemos $0 = D_x F(x_0, y_0)^{-1} F(\psi(0, y), y)$, logo $F(\psi(0, y), y) = 0$, de modo que $g(y) = \psi(0, y)$ é a função procurada.

1.1.3 Auto-espços Generalizados

Definição 1.36. (*Espectro de um operador linear*) Seja E um espaço vetorial normado complexo e seja $A : E \rightarrow E$ um operador linear. O espectro de A é o conjunto

$$\text{Spec}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (I - \lambda A) \text{ não é invertível.}\}$$

Note que a definição do espectro de A não depende de qualquer métrica ou norma da qual E seja munido, mas apenas de A , se $(A - \lambda I)$ é ou não sobrejetiva e injetiva. Quando um operador linear A atuar em um espaço vetorial real E , consideraremos o espectro de A como sendo o espectro de seu complexificado $\tilde{A}$. Do mesmo modo que em dimensão finita, o complexificado de A é o operador $\tilde{A} : E \times E \rightarrow E \times E$ definido por: $\tilde{A}(v, w) = (Av, Aw)$. Ademais, enxergamos $E \times E$ como um espaço complexo, em que $(v; 0)i = (0; v)$. Note que identificamos A com $\tilde{A}|_{E \times 0}$. Em alguns momentos do trabalho, quando não houver possibilidade de confusão, designaremos A e seu complexificado pela mesma letra.

Definição 1.37. (*Ponto fixo hiperbólico*) Seja E um espaço de Banach.

Um isomorfismo $A \in L(E)$ é dito hiperbólico se o

$$\text{spec}(A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset.$$

Dado um difeomorfismo $f : U \subset E \rightarrow E$, um ponto fixo é dito hiperbólico se $Df(p)$ é um difeomorfismo hiperbólico.

No texto abaixo $\mathcal{M}$ designa uma variedade diferenciável (incluindo a possibilidade de ser um espaço de Banach de dimensão qualquer).

O mapa linear

$$Df(x_0) : T_{x_0}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{x_0}(\mathcal{M})$$

é representado por uma matrix $[A]_{m \times m}$.

Em geral, os auto-espços de A não é todo $\mathbb{R}^m \simeq T_{x_0}$ gostaríamos de obter uma decomposição natural do $\mathbb{R}^m$ em sub-espços invariantes por A .

Por esta razão, nós consideramos auto-espços generalizados de A .

Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ os autovalores de A e $m_1, \dots, m_k$ sua multiplicidades, onde $m_1 + \dots + m_k = m$.

Para cada autovalor real λ_i de multiplicidade m_i , as raízes de $(A - \lambda_i I)^{m_i} v = 0$ são chamados autovalores generalizadas.

Elos formam um subespaço E_{λ_i} de dimensão m_i em $\mathbb{R}^m$. Uma base para estes subespaços pode-se obtidos resolvendo sucessivamente o sistema .

$$(A - \lambda_i I)v_1 = 0, (A - \lambda_i I)v_2 = v_1, \dots, (A - \lambda_i I)^{m_i-1}v_{m_i} = v_{m_i-1}$$

Para cada par de autovalores complexos $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ e $\bar{\lambda}_j = \alpha_j - i\beta_j$, nós consideramos a solução $v \in \mathbb{C}^m$ da equação

$$(A - \lambda_i I)^{m_i}v = 0.$$

A parte $re(v)$ e $im(v)$ de estes vetores formam um subespaço vetorial $E_{\lambda_i, \bar{\lambda}_i}$ de dimensão $2m_i$ em $\mathbb{R}^m$.

Uma base para este subespaço pode ser obtido sucessivamente resolvendo a equação matricial.

$$(A - \lambda_i I)v_1 = 0, (A - \lambda_i I)v_2 = v_1, \dots, (A - \lambda_i I)^{m_i-1}v_{m_i} = v_{m_i-1}$$

Nós tomamos a parte real $Re(v_j)$ e a parte imaginário $Im(v_j)$ dos vetores $v_1, \dots, v_m$. Nós obtemos a decomposição de $\mathbb{R}^m$ em subespaços invariantes sob A :

$$\mathbb{R}^m = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{R}} E_{\lambda} \oplus \bigoplus_{\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}} E_{\lambda, \bar{\lambda}}$$

Nós agrupamos os autovalores generalizados de acordo ao modulo dos autovalores.

$$E_p^s = \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_{\lambda} \oplus \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_{\lambda, \bar{\lambda}}.$$

e

$$E_p^u = \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_{\lambda} \oplus \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_{\lambda, \bar{\lambda}}.$$

Então temos que

$$\mathbb{R}^m = E_p^s \oplus E_p^u.$$

O subespaço E_p^s é chamado o subespaço estável, a restrição de A para este subespaço tem só autovalores de modulo menores que uno.

O subespaço E_p^u é chamado o subespaço instável; a restrição de A para este subespaço tem só autovalores de modulo maior que uno.

Transformações Lineares

Teorema 1.38. (Dirichlet). *Seja $\sum a_n$ uma série (não necessariamente convergente) cujas*

reduzidas $s_n = a_1 + \dots + a_n$ formam uma seqüência limitada. Seja (b_n) uma seqüência não-crescente de números positivos com $\lim b_n = 0$. Então a série $\sum a_n b_n$ é convergente.

Corolário 1.39. (*Abel*) Se $\sum a_n$ é convergente e (b_n) é uma seqüência não-crescente de números positivos (não necessariamente tende para zero) então a série $\sum a_n b_n$ é convergente.

Teorema 1.40. Existe uma norma $\|\cdot\|_*$ sobre $T_p M$, equivalente a norma euclidiana $\|\cdot\|$, tal que $A|_{E_p^s}$ é uma transformação linear contração e que $A|_{E_p^u}$ é uma transformação linear expansão relativa a esta nova norma.

Demonstração:

Seja

$$\alpha = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in sp(A|_{E_p^s})\}$$

e

$$\beta = \sup\left\{\frac{1}{|\lambda|} \mid \lambda \in Spec(A|_{E_p^u})\right\}.$$

Então definamos

$$\rho = \max\{\alpha, \beta\}.$$

Tem-se que ρ é menor que um e ademais tem-se que $\lambda \in sp(A|_{E_p^s})$ é menor que ρ e os $\lambda \in sp(A|_{E_p^u})$ são maiores que ρ^{-1} .

Pela teoria espectral tem-se que

$$\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in sp(L)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Nós temos que

$$\|L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L(v)\|$$

Nós temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n|_{E_s^p}\|^{\frac{1}{n}} < \rho,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{-n}|_{E_u^p}\|^{\frac{1}{n}} < \rho.$$

Definamos a norma $\|\cdot\|_s$ em E_p^s e $\|\cdot\|_u$ em E_p^u , por

$$\|x\|_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \|A^n|_{E_s^p} x\|,$$

$$\|y\|_u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \|A^{-n} |_{E_u^p} x\|.$$

Para $x \in E_s^p$ e $y \in E_u^p$, tem-se que $\|x\|_s, \|y\|_u$ esta bem definidas pois as series são convergentes pelo o corolário do critério de convergência de Direchlet e ademais se prova que é uma norma.

Nós temos

$$\mathbb{R}^m = E_s^p \oplus E_u^p.$$

Tem-se que $v \in \mathbb{R}^m$ pode ser escrito como $v = x + y$, onde $x \in E_s^p, y \in E_u^p$, defina-se $\|v\|_*$ por

$$\|v\|_* = \max\{\|x\|_s, \|y\|_u\}.$$

Estas normas tem as propriedades requeridas.

$$\begin{aligned} \|x\|_s &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \|A^n |_{E_s^p} x\| \\ &= \rho \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \|A^n |_{E_s^p} x\| \right) \\ &\leq \rho(\|x\| + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} \|A^n |_{E_s^p} x\|) \\ &\quad \rho \|x\|_s \end{aligned}$$

Para qualquer $x \in E_s^p$. Da mesma maneira se obtém $\|A^{-1}y\|_u \leq \rho\|y\|_u$ para qualquer $y \in E_u^p$. Os resultado obtidos implicam que E_u^p e E_s^p são caracterizados unicamente por :

$$E_s^p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = 0\},$$

$$E_u^p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} A^{-n} x = 0\}.$$

■

Definição 1.41. *Seja $r(\lambda) = \min\{m : \text{Nuc}((A - \lambda I)^m) = \text{Nuc}((A - \lambda I)^{m+1})\}$, se λ é um autovalor de A , definimos o auto-espaço Generalizado $M_\lambda(A)$, como sendo $\text{Nuc}(A - \lambda I)^{r(\lambda)}$.*

1. Dizemos que $v \neq 0$ é um vetor generalizado se $(A - \lambda I)^{r(\lambda)} v = 0$.

2. Dizemos que o autovalor λ tem divisores elementares simples se $(r(\lambda)) = 1$.
3. A dimensão que o autovalor λ tem divisores elementares simples se $r(\lambda) = 1$.
4. A dimensão de $M_\lambda(A)$ é igual à multiplicidade algébrica de λ , isto é, multiplicidade de λ como zero do polinômio característico, $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
5. Define-se a multiplicidade geométrica, como sendo a dimensão do subespaço $N(A - \lambda I)$.

Seja $\mathbb{C}^n$ o conjunto das n -uplas de números complexos com a estrutura de espaço vetorial usual. Um elemento pode ser escrito na forma $a + ib$ onde $a, b \in \mathbb{R}^n$. Se $u + iv, a + ib \in \mathbb{C}$ então $(a + ib)(c + id) = (au - bv) + i(av + bu)$. Denotemos por $L(\mathbb{C}^n)$ o espaço vetorial complexo das aplicações lineares de $\mathbb{C}^n$ em $\mathbb{C}^n$ com a norma usual: $\|L\| = \sup\{\|Lv\| : v \in \mathbb{C}^n, \|v\| = 1\}$, podemos definir uma aplicação $\tilde{L}(u + iv) = L(u) + iL(v)$. É fácil ver que $\tilde{L}$ é $\mathbb{C}$ -linear, isto é, $\tilde{L} \in L(\mathbb{C}^n)$.

Seja $\exp : L(\mathbb{C}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$ a aplicação exponencial que é definida do mesmo que no caso real. Seja $\xi : L(\mathbb{R}^n) \rightarrow L(\mathbb{C}^n)$ a aplicação que associa a cada operador L o seu complexificado $\tilde{L}$ definida acima. A proposição abaixo segue diretamente das definições.

Proposição 1.42. *A aplicação $\xi : L(\mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{C}^n))$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. $\xi(\alpha L + T) = \alpha \xi(L) + \xi(T)$;
2. $\xi(LT) = \xi(L)\xi(T)$;
3. $\xi(\exp L) = \exp(\xi(L))$;
4. $\|\xi(L)\| = \|L\|$, Para quaisquer $L, T \in L(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.43. *Se $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R})^n$ e λ é um autovalor de $\tilde{L}$, então e^λ é um autovalor de e^L de mesma multiplicidade.*

Demonstração:

Consideremos uma matriz $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde $\lambda \in \mathbb{C}$. Temos $A = D + N$, onde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

e

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

é fácil ver que $N^m = 0$ e que $ND = DN$. Como N e D comutam então temos $e^A = e^D e^N$. Ora, $e^N = I + N + N^2/2! + \dots + N^{m-1}/(m-1)!$, pois $N^k = 0$ se $k \geq m$. Logo,

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ 1 & 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{1}{(m-1)!} & \dots & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^D = \begin{pmatrix} e^\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Logo :

$$e^A = e^D e^N = e^\lambda e^N = \begin{pmatrix} e^\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ B & & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Por tanto e^A é uma matriz triangular com todos os elementos da diagonal iguais a e^λ .

Logo, e^λ é um autovalor de e^A de multiplicidade m .

Seja agora $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Pelo teorema da forma canônica de Jordan a matriz de $\tilde{L}$, em uma base β de $\mathbb{C}^n$, tem a forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix},$$

com

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que

$$A^k = \begin{pmatrix} A_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ & & A_r^k \end{pmatrix},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e, por tanto,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_r} \end{pmatrix}.$$

Isso mostra que os autovalores de e^A são exatamente $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}$ onde $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são os autovalores de A . Ora, $e^{\tilde{L}} = (\tilde{e}^L)$ se expressa na base β de $\mathbb{C}^n$ como e^A , o que mostra que $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}$ são os autovalores do operador complexificado de e^L . ■

Lema 1.44. *Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe uma matriz $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{R})$ tal que todos os autovalores são diferentes e $\|A - \tilde{A}\| < \epsilon$, onde $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer.*

Demonstração:

Nós temos que $M_n(n)$ é isomorfo com $\mathbb{R}^{n^2}$, nós temos que todas as normas sobre $M_n(\mathbb{R})$ são equivalentes, então é suficiente definir uma norma para $M_n(\mathbb{R})$, nós tomaremos a norma

$$\|D\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|D(x)|\} \quad \forall D \in M_n(\mathbb{R}),$$

onde $|\cdot|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$. Pela fórmula canônica de Jordan temos que existe uma matriz invertível C tal que

$$B = CAC^{-1}.$$

Perturbando a diagonal do Bloco de Jordan para para uma matriz $\tilde{B}$ tal que $\|B - \tilde{B}\| < \epsilon(\|C^{-1}\| \|C\|)^{-1}$.

A matriz $\tilde{A} = C^{-1}\tilde{B}C$ tem os mesmos autovalores que $\tilde{B}$ e temos que

$$\|A - \tilde{A}\| = \|C^{-1}(B - \tilde{B})C\| \leq \|B - \tilde{B}\| \|C^{-1}\| \|C\| < \epsilon.$$

■

Teorema 1.45. *Seja $L(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$Re\lambda < -a \quad \forall \lambda \in Spec(A),$$

Onde $a \in \mathbb{R}$. Então existe $K \geq 1$ tal que

$$\|e^{tA}\| \leq K e^{-ta}, \quad \forall t \geq 0$$

Demonstração:

Basta obter o resultado para bloco do Jordan real do operador A . Seja $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a forma canônica de Jordan real do operador A e seja $|\cdot|_\gamma$ uma norma qualquer em $\mathbb{R}^m$. Seja $B_j \in \mathbb{R}^{m_j \times m_j}$ um bloco de Jordan real $m_j \times m_j$ de $\mathbb{R}^m$ e por $\|\cdot\|_\gamma$ a norma de operadores correspondente. Se $B_j = [\lambda_j]$, é óbvio que $\lambda_j < -a$

$$\|e^{tB_j}\|_\gamma = e^{\lambda_j t} \leq e^{-at}, \quad t \geq 0.$$

Se

$$B_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}$$

então $\alpha_j < -a$ e

$$e^{tB_j} = e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} \cos \beta_j t & -\sin \beta_j t \\ \sin \beta_j t & \cos \beta_j t \end{pmatrix},$$

logo

$$\|e^{tB_j}\|_\gamma \leq C_1 e^{\alpha_j t} \leq C_1 e^{-at}, \quad \forall t \geq 0$$

Se

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & & & \\ 1 & \lambda_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_j \end{bmatrix},$$

então $\lambda_j < -a$ e

$$e^{tB_j} = e^{\lambda_j t} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & t & & 1 \\ & \vdots & & \\ & \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} & \dots & t & 1 \end{bmatrix},$$

logo $\|e^{tB_j}\|_\gamma \leq C_2(1 + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!})e^{\lambda_j t} \leq C_2(1 + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!})e^{(\lambda_j+a)t}e^{-at} \leq C_3e^{-at}, \forall t \geq 0$.

■

O caso de um bloco de Jordan com uma parte nilpotente associada a um autovalor complexo é uma combinação dos últimos casos e a estimativa é similar a esse último. A combinação de todos esses resultados completa a demonstração do teorema.

Nosso interesse maior está no caso em que todos os autovalores têm parte real negativa, nesse caso podemos tomar a negativo no teorema acima e obter o decaimento exponencial das soluções. Apenas para explicar esse decaimento é que tomamos $-a$ como cota superior para cada parte real dos autovalores de A . É por esse mesmo motivo enunciaremos o seguinte corolário.

Corolário 1.46. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que todos seus autovalores têm parte real negativa. Então as soluções de $x' = Ax$ convergem exponencialmente para o origem. Mais precisamente,*

$$\|e^{tA}\| \leq K_a e^{-at}, \forall t \geq 0.$$

Onde $a > 0$ é tal que $\operatorname{Re} \lambda < -a < 0 \forall \lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ e $K_a \leq 1$ depende de a .

É possível modificar a norma em $\mathbb{R}^m$ para obtermos o resultado do Teorema acima com $K = 1$, o que é útil, por exemplo, na demonstração do Teorema de Hartman Grobman e o Teorema de Linearização suave que veremos posteriormente.

Teorema 1.47. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{Re} \lambda < -a \forall \lambda \in \operatorname{Spec}(A)$, onde $a \in \mathbb{R}$. Então, existe uma norma $|\cdot|_v$ em $\mathbb{R}^m$ cuja norma de operadores correspondente é tal que*

$$\|e^{tA}\|_v \leq e^{-at}, \quad \forall t \geq 0$$

Demonstração:

Dada uma norma $|\cdot|$ em $\mathbb{R}^m$ arbitrária, defina

$$|x|_v = \sup_{\tau \geq 0} e^{a\tau} |e^{\tau A} x|.$$

Pelo o teorema acima, $|\cdot|_v$ está definido e é uma norma em $\mathbb{R}^m$. Além disso,

$$\begin{aligned} |e^{tA}x|_v &= \sup_{\tau \geq 0} e^{a\tau} |e^{\tau A} e^{tA}x| = \sup_{\tau \geq 0} e^{a(t+\tau)} e^{-at} |e^{\tau+tA}x| \\ &= e^{-at} \sup_{\tau \geq 0} e^{a(\tau+t)} |e^{(\tau+t)A}x| = e^{-at} \sup_{s \geq t} e^{as} |e^{sA}x| \\ &\leq e^{-at} \sup_{s \geq 0} e^{as} |e^{sA}x| = e^{-at} |x|_v, \end{aligned}$$

Para todo $t \geq 0$.

O que demonstra o Teorema. ■

No resultado do Teorema acima, a nova norma ainda pode ser tomada como sendo proveniente de um produto interno.

Proposição 1.48. *Seja $|\cdot|$ uma norma em $\mathbb{R}^m$ proveniente de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $A \in L(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$\langle Ax, x \rangle \leq -a|x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Então

$$\|e^{tA}\| \leq e^{-at}, \forall t \geq 0,$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma de operadores associada a $|\cdot|$.

Demonstração:

Derivando obtemos

$$\frac{d}{dt}|e^{tA}x|^2 = 2 \langle \frac{d}{dt}e^{tA}x, e^{tA}x \rangle = 2 \langle Ae^{tA}x, e^{tA}x \rangle \leq -2a|e^{tA}x|^2.$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}|e^{tA}x|^2 + 2a|e^{tA}x|^2 \leq 0.$$

Daí obtemos

$$e^{2at} \left(\frac{d}{dt}|e^{tA}x|^2 + 2a|e^{tA}x|^2 \right) \leq 0.$$

Então obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{2at}|e^{tA}x|^2) \leq 0.$$

Integrando obtemos,

$$|e^{tA}x|^2 \leq e^{-2at}|x|^2, \forall t \geq 0,$$

o que implica em

$$\|e^{tA}\| \leq e^{-at}, \forall t \geq 0$$

■

Proposição 1.49. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^m)$ tal que*

$$\operatorname{Re} \lambda < -a \quad \forall \lambda \in \operatorname{Spec}(A),$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Então existe um norma $|\cdot|_u$ em $\mathbb{R}^m$ associada ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que

$$\langle Ax, x \rangle \leq -a|x|^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

e cuja norma de operadores correspondente é tal que

$$\|e^{tA}\|_u \leq e^{-at}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração:

Seja B a forma canônica de Jordan real de A associada a uma base γ . Seja $\epsilon > 0$. A cada bloco de Jordan $B_j \in \mathbb{R}^{m_j \times m_j}$ da forma

$$B_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & & & \\ & 1 & \ddots & \lambda_j \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Considere a matriz inversível

$$P_{j,\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon^{m_j-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \epsilon & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

e para cada bloco de Jordan $B'_j \in \mathbb{R}^{2m_j \times 2m_j}$ da forma

$$B_j = \begin{bmatrix} C_j & & & \\ I_2 & C_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I_2 & C_j \end{bmatrix}.$$

Onde

$$C_j = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \quad e \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere a matriz inversível

$$P'_{j,\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon^{m_j-1} I_2 & & & \\ & I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & \epsilon I_2 & \\ & & & I_2 \end{bmatrix}.$$

Temos que :

$$P_{j,\epsilon}^{-1} B_j P_{j,\epsilon} = \begin{bmatrix} \lambda_j & & & \\ \epsilon & \lambda_j & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \epsilon & \lambda_j \end{bmatrix},$$

e que

$$P_{j,\epsilon}'^{-1} = \begin{bmatrix} C_j & & & \\ \epsilon I_2 & C_j & & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \epsilon I_2 & C_j \end{bmatrix}.$$

O produto direto dos $P_{j,\epsilon}$ e $P_{j,\epsilon}'$ na ordem apropriada leva a base γ em uma nova base $\gamma_\epsilon = \{\gamma_{1,\epsilon}, \dots, \gamma_{m,\epsilon}\}$. Considere o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\epsilon$ definido por sua ação nos elementos da base γ_ϵ :

$$\langle \gamma_{i,\epsilon}, \gamma_{k,\epsilon} \rangle_\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Se $\{\gamma_{1,\epsilon}^j, \dots, \gamma_{m_j,\epsilon}^j\}$ são os elementos dessa base associados ao bloco ao bloco $P_{j,\epsilon}^{-1}B_jP_{j,\epsilon}$, então é fácil ver que

$$\begin{aligned} A\gamma_{m_j,\epsilon}^j &= \lambda_j \gamma_{m_j,\epsilon}^j, \\ A\gamma_{i,\epsilon}^j &= \lambda_j \gamma_{i,\epsilon}^j + \epsilon B_{i+1,\epsilon}^j, \quad i = 1, \dots, m_j - 1. \end{aligned}$$

Logo, se $y = \sum c_i \gamma_{i,\epsilon}^j$, então

$$\begin{aligned} \langle Ay, y \rangle_\epsilon &= \lambda_j \sum_{i=1}^{m_j} c_i^2 + \sum_{i=1}^{m_j-1} c_i c_{i+1} \\ &\leq \lambda_j |y|_\epsilon^2 + \epsilon |y|_\epsilon^2 = (\lambda_j + \epsilon) |y|_\epsilon^2 \end{aligned}$$

Analogamente, podemos obter a mesma estimativa para o bloco proveniente de B'_j , de forma para ϵ suficientemente pequeno, temos.

$$\langle Ax, x \rangle_\epsilon \leq -a |x|_\epsilon^2,$$

Para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Isso prova a primeira parte do teorema, a segunda parte decorre da proposição 1.48.

■

Podemos inverter o tempo e obter o seguinte resultado:

Teorema 1.50. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^m)$ tal que:*

$$\operatorname{Re} \lambda > b, \quad \forall \lambda \in \operatorname{Spec}(A),$$

Onde $b \in \mathbb{R}$. Então, existe $K \geq 1$ tal que

$$|e^{tA}x| \geq K^{-1} e^{bt} |x|, \quad \forall t \geq 0.$$

Além disso, existe uma norma $|\cdot|_u$ em $\mathbb{R}^m$ proveniente de um produto interno tal que

$$|e^{tA}x|_u \geq |x|_u, \quad \forall t \geq 0$$

Demonstração:

Como $\operatorname{Spec}(A) = -\operatorname{Spec}(A)$, temos

$$\operatorname{Re} \lambda < -b, \quad \forall \lambda \in \operatorname{Spec}(-A)$$

Logo, para $t \geq 0$, temos

$$|x| = |e^{-tA}e^{tA}x| \leq |e^{t(-A)}e^{tA}x| \leq Ke^{-bt}|e^{tA}x|,$$

de modo que

$$|e^{tA}| \geq K^{-1}e^{bt}|x|, \forall t \geq 0.$$

Analogamente para existência do produto interno.

Corolário 1.51. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^m)$ tal que todos seus autovalores têm parte real positiva. Então as soluções de $x' = Ax$ se afastam exponencialmente do origem. Mais precisamente,*

$$||e^{tA}x|| \geq K_b^{-1}e^{bt}|x|, \forall t \geq 0.$$

Onde $b > 0$ é tal que $\operatorname{Re}\lambda > b > 0$ para todo $\lambda \in \operatorname{Spec}(A)$ e $K_b \geq 1$ depende de b .

Definição 1.52. *Um operador $A \in L(\mathbb{R}^m)$ é dito hiperbólico se nenhum autovalor de A tem parte real nula.*

O próximo resultado segue-se dos resultados acima.

Teorema 1.53. *Seja $A \in L(\mathbb{R}^m)$ hiperbólico com autovalor com parte real positiva e com parte real negativa. Então existem sub-espços E^s e E^u invariantes por A e normas $|\cdot|_s$, $|\cdot|_u$ proveniente de um produto interno, tal que*

$$|e^{tA}|_s \leq e^{-at}|x|_s, \forall t \geq 0, \forall x \in E^s,$$

$$|e^{tA}x|_u \geq e^{bt}|x|_u, \forall t \geq 0, \forall x \in E^u.$$

Onde $a, b > 0$

■

Definição 1.54. *O subespaço E^s do teorema acima é chamado de variedade linear estável e o subespaço, E^u , de variedade linear instável.*

1.1.4 Aplicações Multilineares

Esta subseção de aplicações multilineares, utilizamos como ferramenta na linearização de polinômios, seguimos de maneira próxima o trabalho de mestrado de Adriano Thiago [1].

Definição 1.55. *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1; E_2; \dots; E_m$ e F espaços vetoriais sobre K . Dizemos que uma aplicação $A : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é m -linear (multilinear) se é linear em cada variável. Mais precisamente, $A : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é m -linear (multilinear) se para todos $x_1 \in E_1; \dots; x_m \in E_m$ e $i = 1; \dots; m$; os operadores $A_{(x_1; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_m)} : E_i \rightarrow F$ $A_{(x_1; \dots; x_{i-1}; x_{i+1}; \dots; x_m)}(y) = A(x_1; \dots; x_{i-1}; y; x_{i+1}; \dots; x_m)$ são lineares.*

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos o conjunto de todas as aplicações multilineares de $E_1 \times \dots \times E_m$ em F por $L(E_1; \dots; E_m; F)$. Quando $F = K$ denotamos $L(E_1; \dots; E_m; F)$ por $L(E_1; \dots; E_m)$ e quando $E_1 = E_2 = \dots = E_m = E$; escrevemos $L^m(E; F)$. Vamos, por convenção, considerar $L^0(E; F) = F$. Se $m = 1$, denotamos $L^1(E; F)$ por $L(E; F)$. É fácil ver que o conjunto $L(E_1; \dots; E_m; F)$ é um espaço vetorial munido com as operações usuais de espaços de funções.

1.1.5 Aplicações Multilineares Simétricas

Para cada $n \in \mathbb{N}$, nós denotamos por S_m o conjunto de todas as permutações de $\{1, \dots, n\}$, isto é, o conjunto de todas as bijeções $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

Definição 1.56. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre K e $m \in \mathbb{N}$. Dizemos que uma aplicação m -linear $A : E_1 \times \dots \times E_m \rightarrow F$ é simétrica se, para quaisquer $x_1, \dots, x_m \in E$, tivermos $A(x_1, \dots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)})$ para toda permutação $\sigma \in S_m$. Para cada $m \in \mathbb{N}$*

Denotamos por $L_s^m(E, F)$ o espaço vetorial (sub-espaço de $L^m(E, F)$) formado por todas aplicações m -lineares de E_m em F que são simétricas. Analogamente, denotamos por $L_s^m(E; F)$ o subespaço formado por todas as aplicações multilineares contínuas de E em F que são simétricas: Quando $F = K$, nós escrevemos $L_s^m(E, F) = L_s^m(E)$, $L_s^m(E, F) = L_s^m(E)$ e, se $m = 0$, escrevemos $L_s^0(E, F) = L^0(E, F) = F$:

Definição 1.57. *Para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada multi-índice $\gamma = (n_1; \dots; n_k) \in \mathbb{N}_0^k$, definimos*

$$\begin{cases} \|\gamma\| &= n_1 + \dots + n_k \\ \gamma! &= \prod_{j=1}^k n_j! \end{cases}$$

Definição 1.58. *Sejam $A \in L^m(E, F)$ e $k \leq m$. Para cada $(x_1, \dots, x_k)$ in E^k , e para cada $\gamma = (n_1; \dots; n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ com $\|\gamma\| = m$, definimos $A(x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}) = A(\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{n_1\text{-vezes}}, \dots, \overbrace{x_k, \dots, x_k}^{n_k\text{-vezes}})$. A seguir se $A \in L_s^m(E, F)$ e se $x \in E$, usaremos a notação $A(x)$ para denotar a aplicação $(m-1)$ -linear $A(x)(x_2; \dots; x_m) = A(x; x_2; \dots; x_m)$:*

Teorema 1.59. (Fórmula de Leibniz) Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $A \in L_s^n(E, F)$.

Então para quaisquer $x_1, \dots, x_k \in E$, temos

$$A(x_1 + \dots x_k)^m = \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} A x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}.$$

Demonstração:

Por indução em m . Para $m = 1$, temos $n_j = 1$ para algum $j = 1 \dots k$, e os demais nulos. Logo

$$\sum_{\|\gamma\|=1} \frac{1!}{\gamma!} A x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} = A x_1 + \dots + A x_k = A(x_1 + \dots x_k).$$

Suponha a fórmula válida para um certo $m \geq 1$.

Seja $A \in L_s^{m+1}(E, F)$.

Por definição temos

$$A(x_1 + \dots x_k)^{m+1} = A(x_1 + \dots x_k)(x_1 + \dots x_k)^m.$$

Como $A(x_1, \dots, x_k) \in L_s^n(E, F)$.

Pela hipótese de indução temos:

$$\begin{aligned} A(x_1 + \dots + x_k)^{m+1} &= A(x_1 + \dots + x_k) A(x_1 + \dots x_k)^m \\ &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} A(x_1 + \dots + x_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k} \\ &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} A x_1^{n_1+1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k} + \dots + \\ &\quad + \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{\gamma!} A x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k+1}. \end{aligned}$$

Com $\gamma = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ e $\|\gamma\| = m$. Para cada $i = 1, \dots, k$, sejam $\beta^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_k^i) \in \mathbb{N}_0^k$, tais que

$$\begin{cases} \beta_j^i &= n_i + 1, & \text{se } j = i \\ \beta_j^i &= n_j, & \text{se } j \neq i, \end{cases}$$

para todo $j = 1, \dots, k$ e $\|\beta^i\| = \beta_1^i + \dots + \beta_k^i = m + 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} A(x_1 + \dots +)^{m+1} &= \sum_{\|\beta^1\|=m+1} \frac{m!}{(\beta_1^1 - 1)! \beta_2^1! \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1^1} \dots x_k^{\beta_k^1} + \dots \\ &+ \sum_{\|\beta^k\|=m+1} \frac{m!}{(\beta_1^1)! \beta_2^1! \dots (\beta_k^1 - 1)!} A x_1^{\beta_1^1} \dots x_k^{\beta_k^1} \end{aligned}$$

e se $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{N}_0^k$, então

$$\begin{aligned} A(x_1 + \dots +)^{m+1} &= \sum_{\substack{\|\beta^1\|=m+1 \\ \beta_1 \geq 1}} \frac{m!}{(\beta_1 - 1)! \beta_2^1! \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1^1} \dots x_k^{\beta_k^1} + \dots \\ &+ \sum_{\substack{\|\beta\|=m+1 \\ \beta_k \geq 1}} \frac{m!}{\beta_1! \beta_2! \dots (\beta_k - 1)!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} \quad (1.4) \\ &= \sum_{\substack{\|\beta^1\|=m+1 \\ \beta_1 \geq 1}} \frac{m! \beta_1}{(\beta_1)! \beta_2^1! \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} + \dots \\ &+ \sum_{\substack{\|\beta\|=m+1 \\ \beta_k \geq 1}} \frac{m! \beta_k}{\beta_1! \beta_2! \dots \beta_k!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

Nós temos que:

$$\sum_{\substack{\|\beta^1\|=m+1 \\ \beta_1=0}} \frac{m! \beta_1}{(\beta_1)! \beta_2^1! \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} = \dots = \sum_{\substack{\|\beta^1\|=m+1 \\ \beta_k=0}} \frac{m! \beta_1}{(\beta_1)! \beta_2^1! \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} = 0$$

Então na somas da equação (1.4) podemos incluir os casos $\beta_1 = \dots = \beta_k$. Então,...

$$\begin{aligned} A(x_1 + \dots + x_k)^{m+1} &= \sum_{\|\beta^1\|=m+1} \frac{m! \beta_1}{(\beta_1)! \beta_2^1! + \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} \dots + \sum_{\|\beta^1\|=m+1} \frac{m! \beta_1}{(\beta_1)! \beta_2^1! \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} \\ &= \sum_{\|\beta^1\|=m+1} \frac{m! (\beta_1 + \dots + \beta_k)}{(\beta_1)! \beta_2^1! \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k} \\ &= \sum_{\|\beta^1\|=m+1} \frac{(m+1)!}{(\beta_1)! \beta_2^1! \dots \beta_k^1!} A x_1^{\beta_1} \dots x_k^{\beta_k}. \end{aligned}$$

■

Corolário 1.60. (*Fórmula Binomial de Newton*) Sejam E, F espaços vetoriais sobre

$\mathbb{K}$. Se $A \in L_s^m(E, F)$ então para quaisquer $x, y \in E$ temos

$$A(x + y)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} Ax^{m-j}y^j.$$

O seguinte teorema nos permite uma relação entre aplicações multilineares simétricas e polinômios.

Teorema 1.61. (Fórmula de Polarização) Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $A \in L_s^m(E, F)$ então

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \dots \epsilon_m A(x_0 + \epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m,$$

para quaisquer $x_0, x_1, \dots, x_m \in E$

Demonstração:

Pela Fórmula de Leibniz temos

$$\begin{aligned} A(x_0 + \epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{n_0! \dots n_m!} \epsilon_1^{n_1} \dots \epsilon_m^{n_m} Ax_0^{n_0} (\epsilon_1 x_1)^{n_1} \dots (\epsilon_m x_m)^{n_m} \\ &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{n_0! \dots n_m!} Ax_0^{n_0} \dots x_m^{n_m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1}. \end{aligned}$$

Se $n_i = 0$ para algum i , temos $\epsilon_i^{n_i+1} = \epsilon_i = \pm 1$, e daí

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_j = \pm 1} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} &= \sum_{\epsilon_j = \pm 1, j \neq i} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_{i-1}^{n_{i-1}+1} (1) \dots \epsilon_{i+1}^{n_{i+1}+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} \\ &+ \sum_{\epsilon_j = \pm 1, j \neq i} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_{i-1}^{n_{i-1}+1} (-1) \dots \epsilon_{i+1}^{n_{i+1}+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} \end{aligned}$$

Então daí obtemos

$$\sum_{\epsilon_j = \pm 1} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} = 0.$$

Logo,

$$\sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} \neq 0 \rightarrow n_i \neq 0 \forall 1 \leq i \leq m.$$

Nós temos que se $n_i \neq 0 \forall i = \dots m$, então $n_i = 1 \forall i = 1 \dots m$ e $n_0 = 0$. Logo

$$\sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} = \sum_{\epsilon_i = \pm 1} 1 = 2^m,$$

e por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \dots \epsilon_m A(x_0 + \epsilon_1 x_1 + \dots + \epsilon_m x_m)^m &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{n_0! \dots n_m!} A x_0^{n_0} \dots x_m^{n_m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} \\ &= m! 2^m A(x_1 \dots x_m). \end{aligned}$$

■

Do teorema podemos obter o seguinte resultado importante de funções multilineares simétricas.

Teorema 1.62. *Se $A, B \in L_s^m(E, F)$ com $Ax^m = Bx^m \forall x \in E$, então $A = B$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_m) &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{n_0! \dots n_m!} \epsilon_1^{n_1} \dots \epsilon_m^{n_m} A x_0^{n_0} (\epsilon_1 x_1)^{n_1} \dots (\epsilon_m x_m)^{n_m} \\ &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{n_0! \dots n_m!} A x_0^{n_0} \dots x_m^{n_m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} \\ &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{n_0! \dots n_m!} \epsilon_1^{n_1} \dots \epsilon_m^{n_m} A x_0^{n_0} (\epsilon_1 x_1)^{n_1} \dots (\epsilon_m x_m)^{n_m} \\ &= \sum_{\|\gamma\|=m} \frac{m!}{n_0! \dots n_m!} B x_0^{n_0} \dots x_m^{n_m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1^{n_1+1} \dots \epsilon_m^{n_m+1} \\ &= B(x_1, \dots, x_m), \end{aligned}$$

ou seja, se A e B são aplicações simétricas que coincidem na diagonal então coincide em todo o domínio. ■

1.1.6 Polinômios Homogêneos

Definição 1.63. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $P : E \rightarrow F$ é um polinômio homogêneo de grau m (ou um polinômio m -homogêneo) se existir $A \in L^m(E, F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Dizemos que P é o polinômio m -homogêneo associado a A . Denotamos por $P^m(E, F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m -homogêneos de E em F . O conjunto das funções constantes de E em F é denotado por $P^0(E, F)$. Identificamos $P^0(E, F)$ com F através da associação*

$$\Psi : F \rightarrow \{f : \text{tal que } f : E \rightarrow F \text{ é constante}\}$$

$\Psi(a) = f$ dada por $f(x) = a$ para todo $x \in E$.

Definição 1.64. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que a função $P : E \rightarrow F$ é um polinômio se p puder ser representado como uma soma $P = P_0 + P_1 + \dots + P_m$, onde $P_j \in P^j(E, F)$ para cada $j = 0; \dots; m$. Se $P_m \neq 0$, dizemos que P é um polinômio de grau m .*

Exemplo 1.65. *A função $P : K \rightarrow \mathbb{K}$, definida por $P(x) = ax^m$ $a \in K$, é um polinômio homogêneo de grau m . Basta tomar $A \in L^m(K)$ dada por $A(x_1, \dots, x_n) = ax_1 \dots x_n$, e temos $P(x) = Ax^n$: Note que esses são os únicos polinômios m -homogêneos de K em K . De fato, se $A \in L^m(K)$ e $x_1, \dots, x_n \in K$, temos*

$$A(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n A(1, \dots, 1) = ax_1 \dots x_n$$

onde $a = A(1, \dots, 1)$.

Proposição 1.66. *Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $P \in P^m(E, F)$, então existe uma única aplicação linear simétrica $T \in L_s(E, F)$ tal que $P(x) = Tx^m$ $\forall x \in E$.*

Demonstração:

Pela definição de polinômio existe uma aplicação m -linear $A \in L^m(E, F)$ tal que $P(x) = Ax^m \forall x \in E$. Agora definamos uma aplicação m -linear A_s , simétrica, por:

$$A_s(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in s_m} A(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}).$$

Logo

$$A_s x^m = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in s_m} A(x, \dots, x) = \frac{1}{m!} m! A(x, \dots, x) = A x^m = P(x).$$

Se $B_s x^m = P(x)$, segue-se que A_s e B_s coincide na diagonal e, pela fórmula de polarização, coincidem em todo o domínio, assim A_s é única.

A_s é chamada de simetrização de A , e denotaremos por $\hat{A}$ o polinômio homogêneo associado a A e $\tilde{P}$ a multilinear simétrica associada a P . ■

Proposição 1.67. *A função*

$$\begin{array}{ccc} \omega & : & L_s^m(E, F) \rightarrow P^m(E, F) \\ & & A \rightarrow \hat{A} \end{array}$$

é um isomorfismo(algébrico) de espaços vetoriais.

Demonstração:

Pelo o teorema anterior, para todo $A \in P^m(E, F)$ existe uma única aplicação m -linear simétrica $\tilde{A} \in L_s^m(E, F)$ tal que $P(x) = \tilde{A}x^m$, e por tanto temos uma bijeção. Agora, tomemos A_1 e A_2 em $L_s^m(E, F)$ e $k \in \mathbb{K}$. Temos

$$\omega(kA_1 + A_2) = (k\widehat{A_1 + A_2}) = (kA_1 + A_2)x^m = kA_1x^m + A_2x^m = (k\omega(A_1) + \omega(A_2))(x).$$

■

Teorema 1.68. *Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. O espaço vetorial $P(E, F)$ é soma direta algébrica dos espaços $P^m(E, F)$, $m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração:

Nós temos pela definição que se $P \in P(E, F)$ então $P = P_1 + \dots + P_m$ com $m \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ e $P_j \in P^j(E, F) \forall j = 0, \dots, m$. Seja $P \in P(E, F)$ o polinômio identicamente nulo.

Afirmação: Se

$$0 = P(x) = P_0(x) + \dots + P_m(x) \quad \forall x \in E,$$

então

$$P_1(x) = \dots = P_n(x) = 0 \quad \forall x \in E.$$

Fazendo indução:

Para $m = 1$ nós temos que $P(x) = P_j(x) = 0$ então se cumpre.

Suponhamos que se cumpre pra $m - 1$.

Suponha

$$P = P_0 + \dots + P_m = 0.$$

Seja $r > 0$. Temos

$$P_0(rx) + \dots + P_m(rx) = 0.$$

Dividendo ambos os membros por r^m , obtemos

$$\frac{1}{r^m}P_0(x) + \dots + \frac{1}{r}P_m(x) = 0.$$

e, fazendo $r \rightarrow \infty$, teremos que $P_m(x) = 0 \forall x \in E$. Portanto

$$P(x) = P_0(x) + \dots + P_m(x) = 0 \quad \forall x \in E,$$

então pela hipótese de indução temos que $P_0 = \dots = P_m$.

Então temos provada a afirmação.

Logo, se

$$P_0 + \dots + P_m = Q_0 + \dots + Q_m.$$

com $P_j, Q_j \in P^j(E, F)$, $\forall j = 0, \dots, m$, temos $P_j = Q_j \forall j$, e soma é direta. ■

1.1.7 Variedades Diferenciais

Definição 1.69. *Definição de Variedades Diferenciáveis*

Seja M um espaço topológico de Hausdorff com base enumerável.

1. Uma carta local de dimensão m sobre M é um par $(U, \varphi(U))$ onde $U \subset M$ é um aberto de M y $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.
2. Dois cartas locais (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) sobre M são C^k -compatíveis (onde $k = 1, 2, \dots, \infty$) se, e só se, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ e $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ são difeomorfismos de classe C^k . Os difeomorfismos $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ são chamados mudanças de coordenadas.
3. Um atlas de classe C^k e dimensão m sobre M é uma coleção de cartas locais de dimensão m .

$$A = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$$

tais que

$$(a) M = \bigcup_{i \in I}^n U_i$$

(b) Se $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in A$ então (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) são C^k -compatíveis, $\forall i \neq j$.

4. Dois atlas de classe C^k e dimensão m A y A' sobre M são chamados C^k -equivalentes se, e só se, toda carta local de A é C^k -compatíveis com toda locais carta de A' .

Observação 1.70. Se (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) são duas cartas locais sobre M tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, então elas são C^k -compatíveis.

Observação 1.71. Sejam (U, φ) uma carta local de dimensão m sobre M e $U_1 \subset U$ um aberto então $\varphi|_{U_1} : U_1 \rightarrow \varphi(U_1)$ é uma local carta sobre M a qual é C^k -compatíveis com (U, φ) .

Observação 1.72. Denotemos por $A_M = \{A; A \text{ é um atlas de classe } C^k \text{ e dimensão } m \text{ sobre } M\}$. Dados A e $A' \in A_M$, definimos

$A \sim A' \iff A$ e A' são C^k equivalentes.

Tem-se que $\sim$ é uma relação de equivalência em A_M . Uma classe de equivalência $\sum \in A_M / \sim$ é chamada C^k -estrutura diferenciável (m -dimensional) sobre M .

Observação 1.73. Seja $A(M) = \bigcup_{A \in A_M} A$. $A(M)$ é chamado atlas maximal.

Definição 1.74. Uma variedade diferenciável de classe C^k e dimensão m é um par $(M, \sum)$ onde M é um Espaço topológico de Hausdorff com base enumerável e $\sum$ é uma C^k -estrutura diferenciável m -dimensional sobre M .

Observação 1.75. Se A é um atlas de classe C^k e dimensão m sobre M então existe uma única C^k -estrutura diferenciável m -dimensional $\sum$ tal que $A \in \sum$. Segue-se que para obter uma variedade diferenciável de classe C^k e dimensão m é suficiente fixar um atlas diferenciável A de classe C^k e dimensão m sobre um espaço topológico de Hausdorff M com base enumerável.

Definição 1.76. Seja (M, A) uma variedade diferenciável de classe C^k ($k \geq 1$) e dimensão m e seja $S \subset M$. Dizemos que S é uma sub-variedade de M de classe C^r ($r \leq k$) e dimensão s se, e só se, para todo $p \in S$, existe $(U, \varphi) \in A$ com $p \in U$ tal que $\varphi(U \cap S) \subset \mathbb{R}^s \times 0$.

Observação 1.77. Segue-se da definição que se S é uma sub-variedade de M , então S é uma variedade de classe C^k e dimensão s .

Observação 1.78. Nas condições da definição anterior, o número $m-s$ é dito codimensão de S .

1.1.8 Germes e Jatots

Sejam N e P variedades de dimensões n e p respectivamente, e $x \in N$. No conjunto das aplicações suaves numa vizinhança de x em N e com valores em P introduzimos a seguinte relação de equivalência($\sim$):

Definição 1.79. *Duas aplicações suaves $f_1 : U_1 \rightarrow P$ e $f_2 : U_2 \rightarrow P$ são equivalentes ($f_1 \sim f_2$) quando existir uma vizinhança $U \subset U_1 \cap U_2$ de x em N tal que as restrições $f_1|_U$ e $f_2|_U$ coincidem.*

As classes de equivalência dessa relação são chamadas de Germes de aplicações em x e um elemento da classe de equivalência é chamado de representante do germe.

Notação: $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$, $f(x) = y$ (chamamos N de fonte e P de meta). Para cada germe $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ temos a derivada $d_x f : T_x N \rightarrow T_y P$ que é definida como sendo a derivada em x de qualquer representante. Dizemos que $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ é um germe de difeomorfismo se, e somente se, um de seus representantes (e por tanto qualquer) é um difeomorfismo local, e portanto, segue do teorema da função Inversa que sua derivada é um isomorfismo. O posto de um germe é definido como o posto de sua derivada em x . Quando o posto é igual a dimensão de N o germe é imersível e quando o posto é igual a dimensão de P o germe é sub-mersível. Quando germe não é imersível e nem sub-mersível em x dizemos que x é ponto singular.

Definição 1.80. *Dois germes $f_1 : (N_1, x_1) \rightarrow (P_1, y_1)$ e $f_2 : (N_2, x_2) \rightarrow (P_2, y_2)$ são equivalentes quando existem germes de difeomorfismos $h : (N_2, x_2) \rightarrow (N_1, x_1)$ e $k : (P_2, y_2) \rightarrow (P_1, y_1)$ para os quais o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} (N_1, x_1) & \xrightarrow{f_1} & (P_1, y_1) \\ \uparrow h & & \uparrow k \\ (N_2, x_2) & \xrightarrow{f_2} & (P_2, y_2) \end{array}$$

isto é $f_1 = k \circ f_2 \circ h^{-1}$ (ou $f_1 \circ h = k \circ f_2$).

como qualquer germe $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ é equivalente a algum germe $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, consideramos apenas germes $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$.

Definição 1.81. *O espaço dos jatots $J_k(n, p)$ é o espaço vetorial real das aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ onde cada componente f_i de f é um polinômio de grau $\leq k$ nas coordenadas canônicas $x_1, x_2, \dots, x_n$ de $\mathbb{R}^n$ com termo constante nulo. Os elementos de $J_k(n, p)$ são chamados de k -jatots.*

Para cada aplicação de classe C^∞ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e cada $a \in \mathbb{R}^n$, definimos a aplicação $j^k f : \mathbb{R}^n \rightarrow J_k(n, p)$ por : $j^k f(a)$ é o polinômio de Taylor de $f(x + a) - f(a)$ de ordem k na origem. A aplicação $j^k f$ é de classe C^∞ e $j^k f(a)$ é chamado o k -jato de f em a .

Exemplo 1.82. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ então $j^k f(a) = f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k$.*

Definição 1.83. *Dois germes de aplicações f e g de classe C^∞ têm d -jatos A^d equivalentes se existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ e $k : (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ tais que*

$$j^d(f \circ h) = j^d(k \circ g).$$

Esta relação induz naturalmente uma relação de equivalência no espaço dos jatos $J^d(n, p)$.

Definições e Teoremas de Equações Diferenciais Ordinárias

Neste capítulo que segue os livros de Armando [3], Carmen Chicone [?], Hildebrando [10], Rosas [21].

Nosso objetivo é estudar o comportamento e as propriedades das soluções de equações diferenciais ordinárias. Equações desse tipo modelam uma ampla gama de fenômenos físicos, biológicos, químicos e econômicos, entre outros. Em aplicações, equações diferenciais expressam leis envolvendo variações de certas quantidades modeladas em relação a outras, estas que são encontradas muitas vezes na natureza, sejam a partir de princípios básicos de física e de química, ou a partir de modelagens mais simplificadas, heurísticas ou empíricas. O entendimento dessas equações é, portanto, fundamental em ciência e tecnologia, além de ser fascinante do ponto de vista matemático. Muitos conceitos desenvolvidos nesse estudo podem ser naturalmente estendidos ao estudo de equações a derivadas parciais, com uma gama de aplicações ainda maior. Estudaremos equações diferenciais da forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} &= f(x) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

Onde $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, e $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^m$. Essa é uma forma vetorial sucinta de escrever um sistema de m equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Sistemas de equações de ordem mais alta também podem ser escritas como sistemas de primeira ordem, fazendo uma mudança de variáveis .

Temos, no caso acima, um estado inicial x_0 de um certo "sistema", digamos temperatura ou posição do um objeto, ou de vários objetos, e uma lei, representada pelo sistema de

equações diferenciais, de como o estado do sistema varia como o tempo. A solução da equação acima é uma função $x = x(t) = x(t, x_0)$, que indica o estado do sistema no instante t , a partir do estado inicial x_0 no instante $t = 0$. Uma equação do tipo (2.5), com $f = f(x)$ não envolvendo a variável temporal t explicitamente, é dita *autônoma*. A idéia é que equações autônomas modelam fenômenos fechados, sem interferência externa no sistema. Pode até haver uma influência externa, como a gravidade, mas ela não pode variar com o tempo. A transformação $(t, x_0) \rightarrow x(t, x_0)$ é um exemplo de *Sistema dinâmico* ou *fluxo*. Um sistema dinâmico ou fluxo pode ser global ou local, dependendo se as soluções $x = x(t, x_0)$ estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$, ou apenas em um certo intervalo contendo $t = 0$.

Estudaremos, também, equações com f dependendo explicitamente da variável temporal t . Equações desse tipo modelam, por exemplo, fenômenos sob a influência externa de algum fator, como a radiação solar que varia com a época do ano e a hora do dia. Consideraremos, mais precisamente, $f : W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, definida em algum subconjunto W de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, e as equações tomam a forma

$$\frac{d}{dt} \begin{cases} x(t) \\ x(t_0) \end{cases} = \begin{cases} f(t, x) \\ x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

com $(t_0, u_0) \in W$. Uma equação da forma ??, com f dependente da variável temporal t , é dita não-autônoma. A solução da equação acima é uma função $x = x(t) = x(t, t_0, u_0)$, que indica o estado do sistema no instante t , a partir do estado inicial x_0 no instante $t = t_0$. A transformação $(t, t_0, u_0) \rightarrow u(t, t_0, x_0)$ é dito um processo, que também pode ser global ou local, como no caso de fluxos. Quanto à notação, é claro que ela não é rígida, podemos escrever, por exemplo,

$$F(x, y, dy, dx, \dots, d^n y d^n x) = 0,$$

onde x é a variável independente e $y = y(x)$, a função procurada. A notação apropriada depende do contexto; a variável independente pode denotar o instante de tempo t ou uma posição x , por exemplo, e a incógnita pode ser a posição x de um objeto, a temperatura T de um material, a concentração de alguma substância química, o valor p de um produto financeiro, etc. Para simplificar a notação, podemos usar x' , x'' , x''' , $x^{(iv)}$, $x^{(v)}$... para indicar as derivadas, quando a variável independente estiver clara no contexto. Assim, as equações acima podem ser escritas como

$$x' = \cos(tx), x^2 x'' + \cos t + t = 0, (x'' - 2x)^2 = x^2 + 1, \cos(x') = \sin(x).$$

No caso específico da variável independente ser uma variável temporal, é costume, principalmente em Mecânica Clássica, se utilizar as notações $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ para indicar as derivadas de primeira e segunda ordem, comuns nesses problemas graças à lei de Newton. Uma equação diferencial do tipo descrito acima é dita ordinária, pois envolve apenas derivadas em relação a uma única variável independente real. Veremos, também, sistemas envolvendo mais de uma equação diferencial ordinária, com uma mesma variável independente. Há, porém, vários outros tipos de equações diferenciais, como parciais, complexas, integro-diferenciais, funcionais, estocásticas, com retardamento, etc. Essas outras equações diferenciais modelam uma gama ainda maior de fenômenos e possuem, em geral, características mais complicadas que as das equações ordinárias, mas há muitas semelhanças e o entendimento destas fundamental para o das outras. Daremos alguns exemplos de equações diferenciais que bem da natureza.

1. **Corpo em queda livre.** Um objeto de massa m se encontra a uma distância $h(t)$ do solo. O seu peso é o produto mg , onde g é a aceleração da gravidade. A sua derivada $\frac{d}{dt}$, e a sua aceleração, $\frac{d^2h}{dt^2}$. Pela segunda lei de Newton (*força=variação de momento=massa vezes aceleração*, no caso de massa constante), temos

$$-mg = m \frac{d^2h}{dt^2}.$$

o que nos leva à seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -g.$$

2. **Decaimento radioativo.** Se considerarmos um certo material radioativo, uma lei para a evolução da quantidade de massa desse material diz que a taxa de variação dessa massa por unidade de tempo em um determinado instante é proporcional à quantidade de massa existente naquele instante. Assim, se $x = x(t)$ denota a quantidade de massa no instante t , a taxa de variação de massa por unidade de tempo é

$$\frac{dx(t)}{dt}$$

e essa lei diz que existe uma constante de proporcionalidade λ tal que

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda x(t).$$

O sinal foi escolhido por esperarmos um decaimento de massa, de modo que $\lambda > 0$.

3. **Crescimento populacional.** Um exemplo similar ao de decaimento radioativo é o de crescimento populacional. Um caso simples é o de crescimento de uma colônia de bactérias. As bactérias se reproduzem por divisão celular, com cada bactéria dando origem a duas. Em condições favoráveis, a população de bactérias se reproduz a uma taxa proporcional ao número total de bactérias: em um dado intervalo de tempo t , a população de bactérias cresce de um número x proporcional ao total x de bactérias e proporcional ao intervalo de tempo t (quanto mais bactérias e quanto maior o intervalo de tempo, maior o crescimento). Denotando por $\mu > 0$ a constante de proporcionalidade, temos

$$\Delta x = \mu x \Delta t.$$

Dividindo essa relação por Δt e tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = \mu x.$$

O termo μ , dado por

$$\mu = \frac{\frac{dx}{dt}}{x},$$

é chamado de taxa de crescimento específico.

Soluções gerais e particulares e resolução de equações separáveis Conforme visto acima, uma equação de ordem n pode ser escrita na forma

$$F(x, y, dy, dx, \dots, d^n y d^n x) = 0$$

, onde t é variável independente e $x = x(t)$ é a função que procuramos como solução da equação envolvendo as derivadas de $x = x(t)$ em função da variável independente. A solução geral é uma família parametrizada descrevendo o conjunto de todas as soluções da equação diferencial. Tipicamente (mas nem sempre), a solução geral de uma equação de ordem n é uma família de soluções com n parâmetros.

Uma solução particular é nada mais do que uma das infinitas soluções dessa família. Em diversos problemas, há maneiras naturais de selecionar uma solução particular, como através de condições iniciais ou de contorno, conforme veremos a seguir.

Soluções da equação de decaimento radioativo. A família de funções da forma

$$x(t) = Ce^{-\lambda t},$$

com um parâmetro real C , é a solução geral da equações

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x.$$

Conhecendo a massa x_0 do material radioativo em um instante t_0 , temos da solução geral que

$$x_0 = x(t_0) = Ce^{-\lambda t_0},$$

logo

$$C = x_0 e^{t_0 \lambda}$$

e a solução particular com a condição inicial $x(t_0) = x_0$ é

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Soluções da equação de um corpo em queda livre sem amortecimento. Um objeto de massa m se encontra a uma altura $h(t)$ da superfície. Desprezando a resistência do ar, chegamos à seguinte equação diferencial de segunda ordem para $h = h(t)$:

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -g.$$

Como g é uma constante, podemos integrar diretamente o lado direito, obtendo a solução geral

$$h(t) = C_1 + C_2 t + g \frac{t^2}{2},$$

que é uma família a dois parâmetros. Se o objeto for largado da altura h_0 no instante $t = 0$, então

$$h(0) = h_0 \quad \left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

onde a segunda condição significa que o objeto partiu com velocidade vertical nula. Assim, podemos achar as constantes C_1 e C_2 :

$$C_1 = h_0 \text{ e } C_2 = 0.$$

Logo, obtemos a solução particular

$$h(t) = h_0 - g \frac{t^2}{2},$$

corresponde às condições iniciais dadas.

Caso o objeto parta com velocidade inicial v_0 , então

$$\left. \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = v_0,$$

o que nos dá a solução

$$h(t) = h_0 + v_0 t - g \frac{t^2}{2}.$$

Soluções da equação da corda suspensa em repouso. No modelo simplificado, sem levar em consideração a variação vertical da corda no cálculo da massa, a equação da corda suspensa toma a forma

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \lambda.$$

onde $\lambda = g \frac{\rho_0}{T_0}$, g é a aceleração da gravidade, ρ_0 é a densidade de massa da corda (assumida uniforme), e T_0 é a tensão da corda.

A solução geral é similar a do corpo em queda livre:

$$y(x) = C_0 + C_1 x + \frac{\lambda}{2} x^2.$$

Soluções particulares podem ser obtidas a partir de condições de contorno da corda, que são as condições para os extremos da corda. Podemos considerar, por exemplo, o caso particular em que os extremos da corda estejam na mesma altura e com o eixo de tal forma que a origem esteja exatamente no meio entre os dois extremos. Se o comprimento da corda é, então as condições de contorno podem ser escritas como

$$y\left(-\frac{l}{2}\right) = 0 = y\left(\frac{l}{2}\right).$$

Assim,

$$C_0 - C_1 \frac{l}{2} + \frac{\lambda}{8} l^2 = 0 = C_0 + C_1 \frac{l}{2} + \frac{\lambda}{8} l^2,$$

logo

$$C_1 = 0, \quad C_0 = -\frac{\lambda}{8} l^2.$$

e a solução particular é

$$y(x) = -\frac{\lambda}{8} l^2 + \frac{\lambda}{2} x^2$$

ou

$$\frac{\lambda}{8} (4x^2 - l^2).$$

No caso em que os extremos estejam em alturas diferentes, podemos, para simplificar, colocar a origem do eixo no extremo esquerdo. Assim, as condições de contorno ficam sendo

$$y(0) = 0, y(l) = h,$$

onde l é a distância horizontal entre os extremos e h a diferença entre as alturas dos extremos. Impondo as condições de contorno na solução geral, obtemos

$$C_0 = 0, C_1 = \frac{h}{l} - \frac{\lambda}{2}.$$

logo, a solução particular se torna

$$y(x) = \left(\frac{h}{l} - \frac{\lambda}{2}\right)x + \frac{\lambda}{2}x^2.$$

2.1 Estrutura Local de campos de vetores

2.1.1 Problema de valor inicial, ou problema de Cauchy

. Obtivemos soluções explícitas em vários exemplos. Mas será que sempre há solução? É possível que certas equações não possuam soluções? Como podemos garantir a existência de soluções em geral? É possível que existam soluções além das obtidas por um certo método? As respostas a essas questões dependem da regularidade das funções envolvidas na equação diferencial. Vamos considerar as equações de primeira ordem.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x).$$

Se tomarmos $f(t, x) = f(t)$ descontínua, fica claro que não poderemos encontrar $x = x(t)$ continuamente diferenciável e satisfazendo a equação diferencial em um intervalo contendo o ponto de descontinuidade de $f(t)$. Isso mostra como a regularidade da f pode influenciar nessas questões. Também podemos considerar certas funções $f(t, x) = f(x)$ que não dependem de t mas são descontínuas em x e ainda assim não obter a existência de soluções. Um exemplo é a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Não há solução continuamente diferenciável com a condição inicial $x(0) = 0$. De fato, em $x = 0$, temos $f(0) = -1$, o que causaria o decréscimo da solução. Mas em $x < 0$, temos $f(x) > 1$, contrariando esse decréscimo.

Mas nem sempre as descontinuidades em x levam à não-existência de soluções. A função

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

possui soluções com qualquer condição inicial.

É possível considerar certas equações com funções descontínuas relaxando a regularidade das funções procurada e o sentido no qual a equação é satisfeita, mas não vamos partir nessa direção. O nosso interesse é em soluções "suaves", i.e. continuamente diferenciáveis. Assim, vamos assumir, no mínimo, que $f = f(t; x)$ seja contínua.

Seja U um aberto contido em $I \times E$, onde I é um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$ e E um espaço de Banach. Seja $f : U \rightarrow E$ uma aplicação pelo menos contínua. Fixando uma par $(t_0, x_0) \in U$, chamada de valor inicial para a equação diferencial ordinária dada por f , chamada de problema de Cauchy associado a f com valor inicial (t_0, x_0) ao problema definido formalmente por:

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.3)$$

Nós dizemos que $\phi : I \rightarrow E$ (Onde I é um intervalo não degenerado que contém t_0) é uma solução do problema de Cauchy se

$$\begin{cases} \phi'(t) &= f(t, \phi) \\ \phi(t_0) &= x_0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Seja E um espaço de Banach. Devido ao teorema fundamental do cálculo, qualquer equação da forma $x'(t) = f(t, x); x(t_0) = x_0$, com $f : U \rightarrow E$ contínua no aberto $U \subset \mathbb{R} \times E$, tem uma correspondente equação integral, isto é, ϕ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

definida em um certo intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, se e só se o gráfico de ϕ está contido no domínio de f e

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds, \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

A idéia é definir um espaço de funções $C^O = C^0[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] = \{\psi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \rightarrow E\}$, tal que $\|\psi\| = \sup_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} \{\|\psi(t)\|\}$.

Depois se define um operador $F(\psi) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \psi(s)) ds$ em um subconjunto fechado

de C^0 , se prova que F definida no espaço fechado é uma contração então pelo o teorema de ponto fixo para contrações se prova que existe um único ponto fixo que justamente é uma solução do problema do valor inicial.

Definição 2.1. (*Aplicação Lipschitz em relação a segunda variável*). Sejam E_1, E_2, E_3 espaços de Banach e $f : U \subset E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$ é Lipschitziana (ou Lipchitz) com relação à segunda variável se existe um $c > 0$ tal que $|f(a, x_1) - f(a, x_2)| \leq c|x_1 - x_2|, \forall (z, y_1), (z, y_2) \in U$.

A interação de Picard é um método que serve para provar a existência de solução de um PVI, e também te dá um método para encontrar uma aproximação da solução.

Teorema 2.2. (*Picard*). Seja E um espaço de Banach e $f : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B(x_0)} \subset \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, uma aplicação limitada, contínua, lipschitziana em relação a segunda variável (note que se E tem dimensão finita então a condição de limitada é redundante). Então, existe uma única solução do problema de Cauchy correspondente a f com valores iniciais $x(t_0) = x_0$ definida no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ e $M = \sup\{|f(t, x)|, (t, x) \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times \overline{B(X_0, b)}\}$.

Corolário 2.3. Seja $f : I \times E \rightarrow E$ (onde I é um intervalo não degenerado, E um espaço de Banach) uma função contínua, Lipschitziana em relação a segunda variável. Então existe uma única solução do problema de Cauchy correspondente a f com valores iniciais $x(t_0) = x_0$, definida no intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Teorema 2.4. (*Peano*). Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aberto, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua e $(t_0, x_0) \in D$. Então, o PVI

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

tem pelo menos uma solução.

Corolário 2.5. Seja f satisfazendo as condições do Teorema 2.4. Considere U compacto, onde $U \subset D$. Então, existe $\alpha = \alpha(U) > 0$, tal que para todo $(t_0, x_0) \in U$, o PVI

$$\begin{cases} x' &= f(t, x) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

tem pelo menos uma solução definida em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.

A próxima proposição nos dá uma condição suficiente para que uma aplicação seja lipschitziana com relação a segunda variável:

Proposição 2.6. *Seja E_1, E_2, E_3 espaços de Banach e $U \subset E_1 \times E_2$ um aberto convexo. Suponha que $f : U \rightarrow E_3$ seja uma aplicação tal que exista um $C > 0$ tal que $|D_2 f(x)| \leq C, \forall x \in U$. Então f é lipschitziana com relação a segunda variável.*

Definição 2.7. (solução maximal) *Dado uma EDO $x'(t) = f(t, x(t))$, uma solução $\phi : J \rightarrow E$ é dita maximal se para toda solução $\psi : J_1 \rightarrow E$ com $J \subset J_1$ e $\psi|_J$, tem-se $J_1 = J$. Nesse caso, J é dito o intervalo maximal de ψ .*

Proposição 2.8. *Seja E um espaço de Banach. Seja $f : U \subset \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ contínua tal que $\forall (t_0, x_0) \in U$, existe localmente uma solução a problema de Cauchy $x'(t) = f(t, x)$; $x(t_0) = x_0$, definida num intervalo maximal $\phi(t, t_0, x_0)$ do problema de cauchy acima indicado.*

Proposição 2.9. *Suponha E um espaço de Banach de dimensão finita.*

Seja $f : U \subset \mathbb{R} \times E \rightarrow E$, uma aplicação contínua tendo como domínio um conjunto aberto U e suponha que todo problema de Cauchy definido por f tenha solução local maximal única. Seja $\phi : I \rightarrow E$ uma solução maximal de um problema de cauchy da forma $x'(t) = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ com $(t_0, x_0) \in U$ e $I = (w_-, w_+) \subset \mathbb{R}$ seu intervalo (maximal) de definição. Então o gráfico $\varphi : I \rightarrow U$ dado por $t \rightarrow (t, \phi(t))$ a solução maximal satisfaz à seguinte propriedade de convergência: Para todo compacto $K \subset U$, existe uma vizinhança W dos extremos de I tal que $t \in W$ então $\varphi(t) \notin K$. Escrevemos esta condição como $\varphi(t) \rightarrow \partial U$ quando $t \rightarrow w_{\pm}$.

Corolário 2.10. *Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R} \times V$ uma aplicação contínua tal que para qualquer problema de Cauchy definido por f possua solução única tal que para qualquer problema de Cauchy definido por f possua solução única. Seja $\phi : I \rightarrow V$ a solução maximal do problema de Cauchy $x'(t) = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, com $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times V$. Se $\phi(I)$ está contido em um subconjunto compacto C de V , então $I = \mathbb{R}$.*

Demonstração:

Suponha que $I = (w_-, w_+)$ e sem perda de generalidade, que tivéssemos $w_+ < \infty$. Mas tal implicaria que $\{(t, \phi(t)), t \in (t_0, w_+)\}$ estaria contida no compacto $[t_0, w_+] \times C =: K \subset \mathbb{R} \times V$. Tal é absurdo, pois vimos na prova da proposição que existe um $t \in I$ tal que $(t, \phi(t)) \notin K$. ■

Teorema 2.11 (Dependência continua com respeito às condições iniciais e parâmetros.). *Seja $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto*

U . Suponhamos que $\forall (t_0, x_0, z) \in U$, o problema de cauchy correspondente admite uma única solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0, z)$, definida em um intervalo maximal denotado por (w_-, w_+) , onde $w_{\pm} = w_{\pm}(t_0, x_0, z)$. Então

1. O conjunto

$$D := \{(t, t_0, x_0, z); (t_0, x_0, z) \in U, t \in (w_-(t_0, x_0, z), w_+(t_0, x_0, z))\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times U$.

2. $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

Observação 2.12. Se fazemos a mudança de variáveis $y = (x, z)$, o sistema

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x, z) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

fica:

$$\begin{cases} y'(t) &= (f(t, y), 0) \\ y(t_0) &= (x_0, z) = y_0 \end{cases}$$

As soluções do primeiro problema são a projeção das n primeiras coordenadas das soluções do segundo.

O teorema é consequência do seguinte teorema.

Teorema 2.13. (*Dependência contínua com respeito às condições iniciais*) Seja $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua no aberto U . Suponhamos que o problema de Cauchy correspondente admita uma única solução $\phi = \phi(t, t_0, x_0)$, definida num intervalo maximal denotado por (w_-, w_+) , onde $w_{\pm}(t_0, x_0)$. Então

1. O conjunto

$$D := \{(t, t_0, x_0); (t_0, x_0) \in U, t \in (w_-(t_0, x_0), w_+(t_0, x_0))\}$$

é aberto em $\mathbb{R} \times U$.

2. $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua.

2.1.2 Dependência Diferenciável

Lema 2.14. Sejam $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções num aberto $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $f_n \rightarrow f_0$, quando $n \rightarrow \infty$, uniformemente em subconjuntos compactos de D .

Considere, $(t_n, x_n) \in D$, $n \geq 0$ tal que $(t_n, x_n) \rightarrow \infty$. Para $n \geq 0$, tomamos o (PVI)

$$\begin{cases} x'(t) &= f_n(t, x(t)) \\ x(t_n) &= x_n. \end{cases} \quad (PVI_n)$$

Se $\phi_0 : (w_-, w_+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a única solução não continuável de (PVI_0) e $t_0 \in [a, b] \subset (w_-, w_+)$, então existe n_0 suficientemente grande, tal que para todo $n \geq n_0$ o (PVI_n) tem solução ϕ_n definida em $[a, b]$ e $\phi_n(t) \rightarrow \phi_0(t)$, uniformemente em $[a, b]$.

Demonstração:

Suponhamos que $t_0 \in (a, b)$, $G = \{(t, \phi_0(t)), t \in [a, b]\}$. Sejam $0 < \mu_1 < \mu_2$ suficientemente pequenos, de modo que se $U = B((t_0, x_0), \mu_1)$ e $V = B((t_0, x_0), \mu_2)$, então $U, V \subset G$ e $U \subset V \subset \bar{V} \subset D$, consideremos $M = \max_{(t,x) \in \bar{V}} |f_0(t, x)|$. Então, existe n_0 , tal que se $n \geq n_0$, então $\max_{(t,x) \in \bar{V}} |f_n(t, x)| < M$.

Do Corolário 2.5, vemos que podemos tomar $\alpha, \beta > 0$ tal que $M\alpha < \beta$, de modo que, o PVI_n , $n \geq n_0$ tenha solução definida no intervalo $[t_n - \alpha, t_n + \alpha]$, com $(t_n, x_n) \in U$.

Como, $t_n \rightarrow t_0$, temos que para n_0 suficientemente grande, todas as soluções estarão definidas em $[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}]$. Mostraremos, que $\phi_n(t)$ converge uniformemente para $\phi_0(t)$ em $[t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}]$, quando $n \rightarrow \infty$.

Aqui, fazemos uso do seguinte resultado de espaços métricos:

Seja M um espaço métrico e (x_n) uma seqüência de elementos de M . Então, $x_n \rightarrow x_0$ se, e somente se, toda subsequência convergente de (x_n) converge para x_0 .

Seja (ψ_n) uma subsequência de (ϕ_n) . Como, $|\psi'_n| \leq |f_n(t, \psi_n(t))| < M$, temos que $\{\psi : [t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ é equicontínuo e, além disso,

$$|\psi_n(t) - \psi_n(s)| \leq \max_{\theta \in [t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}] : |\psi'_n| \leq M} |\theta| |t - s| \leq M |t - s|.$$

Sendo, (ψ_n) uniformemente limitada, segue do Teorema de Áscoli, que (ψ_n) tem uma subsequência convergente.

Considere, ψ_{n_k} uma subsequência convergente de (ψ_n) , convergindo para $\psi_0(t)$ dada por

$$\psi_{n_k}(t) = x_{n_k} + \int_{t_{n_k}}^t f_{n_k}(s, \psi_{n_k}(s)) ds.$$

Fazendo, $k \rightarrow \infty$, temos que

$$\psi_0(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f_0(s, \psi_0(s)) ds, t \in [t_0 - \frac{\alpha}{2}, t_0 + \frac{\alpha}{2}].$$

Utilizando-se de um processo recursivo, pode-se recobrir o intervalo $[a, b]$ com intervalos de comprimento α e obter a informação para $[a, b]$. ■

Lema 2.15. *Seja $f : (a, b) \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$, contínua, onde A é um aberto convexo de $\mathbb{R}^n$. Se f admite D_2f , contínua em $(a, b) \times A$, existe uma função $g : (a, b) \times A \times A \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$, contínua, tal que*

$$g(t, x, x) = D_2f(t, x), \forall (t, x) \in (a, b) \times A,$$

e

$$f(t, x_2) - f(t, x_1) = g(t, x_1, x_2) \cdot (x_2 - x_1).$$

Demonstração:

Definamos $g(t, x_1, x_2) = \int_0^1 D_2f(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds$.

Pela definição se tem que g é contínua e

$$g(t, x, x) = \int_0^1 D_2f(t, x) ds = D_2f(t, x) \int_0^1 ds = D_2f(t, x), \forall (t, x) \in (a, b) \times A$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo a $h(s) := f(t, sx_2 + (1-s)x_1)$, temos que

$$h(1) - h(0) = f(t, x_2) - f(t, x_1) = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds.$$

Aplicando a regra da cadeia a h , obtemos

$$\frac{d}{ds} f(t, sx_2 + (1-s)x_1) = D_2f(t, sx_2 + (1-s)x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

Daí obtemos:

$$\begin{aligned} f(t, x_2) - f(t, x_1) &= \int_0^1 D_2f(t, sx_2 + (1-s)x_1) \cdot (x_2 - x_1) ds \\ &= \int_0^1 D_2f(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds \cdot (x_2 - x_1) \\ &= g(t, x_1, x_2) \cdot (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

■

Teorema 2.16. *(Dependência diferencial com respeito às condições iniciais I.)*

Seja $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua no aberto U , diferenciável com respeito

à variável x , sendo $\frac{\partial}{\partial x}$ contínua em U . Então como consequência do teorema de Picard temos que $\forall (t_0, x_0) \in U$, o problema de Cauchy correspondente admite uma única solução maximal $\phi = \phi(t, t_0, x_0)$, como t tomando valores em I_{t_0, x_0} . Seja D como no teorema anterior tal que $\phi : D \rightarrow U$. Então, existe e é contínua a derivada $\partial_{x_0} \phi(t, t_0, x_0)$, $\partial_{x_0} \phi : D \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$. Além disso, tal derivada é solução da seguinte equação diferencial ordinária matricial linear:

$$\begin{cases} Z'(t) &= D_2 f(t, \phi(t, t_0, x_0)) \cdot Z \\ Z(t_0) &= I_d. \end{cases}$$

Demonstração:

Seja $[a, b] \subset I_{t_0, x_0}$ como D é aberto em $\mathbb{R} \times U$ temos que existe vizinhança convexa $V_0 \subset U$ de (t_0, x_0) tal que $[a, b] \times \overline{V_0} \subset D$. Em particular, temos $(a, b) \times V_0 \subset D$, nós temos que $d([a, b] \times \overline{V_0}, \partial) > \delta_0$.

Restrinjamos então ϕ a $(a, b) \times V_0$. Nós temos que :

$$\phi(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s, t_0, x_0)) ds$$

Se a solução $\phi(t, t_0, x_0)$ é diferenciável com respeito as componentes $x_1, x_2, \dots, x_n$ de x_0 então podemos diferenciar ambos lados da equação acima com respeito a x_i e obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = I_i + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial}{\partial x} [s, \phi(s, t_0, x_0)] \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \right] ds,$$

onde

$$I_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

I_i tem 1 na i -ésima posição, e

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} [s, \phi(s, t_0, x_0)] \right]$$

é uma matriz $n \times n$ cujas entradas na posição (i, j) é

$$\partial f_i \partial x_j [s, \phi(s, t_0, x_0)]$$

As equações acima sugere que para obter a existência e continuidade de $\partial_{x_0}\phi(t, t_0, x_0)$, nada mais natural é considerar os quocientes de Newton

$$z_k = z_k(t) = \frac{\phi(t, t_0, x_0 + he_k) - \phi(t, t_0, x_0)}{h}, k = 1, \dots, n, 0 < |h| < \delta_0.$$

Fixemos $k \in \{1 \dots n\}$. Cada função z_k acima é contínua. Assim, pelo o Lema 2.14, se provamos que z_k converge uniformemente(em t) para uma aplicação z_0 , esta será contínua. Além disso, se $z_h(t)$ converge $z(t)$, quando $h \rightarrow 0$, como z_k é o quociente de Newton, $z(t)$ é k -ésima derivada parcial no espaço de x_0 .

Seja $g : (a, b) \times V_0 \times V_0 \rightarrow L(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(t, x_1, x_2).(x_2 - x_1) = f(t, x_2) - f(t, x_1)$, g é dado pelo o Lema 2.15 acima.

Note que z_h é solução(única) da equação $z'(t) = g(t, \phi(t, t_0, x_0), \phi(t, t_0, x_0 + he_k)).z$, com valor inicial $z(t_0) = e_k$. Fazendo $h \rightarrow 0$, temos da dependência contínua com relação as condições iniciais e parâmetros que as soluções z_h convergem uniformemente em $[a, b]$ para as soluções z_0 da equação limite

$$z'(t) = D_2f(t, \phi(t, t_0, x_0)).z, z(t_0) = I_d,$$

cuja solução é como mostramos acima, $\partial_{x_0}\phi(t, t_0, x_0)$, é contínua, devido à continuidade de $\partial_{x_0, k}\phi(t, t_0, x_0)$. Se tem que esta última equação matricial encontra-se sob as hipóteses do Corolário 2.3 o que implica que sua solução tem o mesmo intervalo de domínio de $\phi(., t_0, x_0)$. ■

Teorema 2.17. (*Dependência diferencial com respeito às condições iniciais II.*)

Sejam $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ e $\Lambda \subset \mathbb{R}^l$ abertos. Seja $f : W \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $C^k, k \in \mathbb{N}$. Seja $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ a solução de

$$\begin{cases} x' &= f(t, x, \lambda) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

que está definida em $D = \{(t, t_0, x_0, \lambda); (t_0; x_0; \lambda) \in W \times \Lambda, t \in (w_-, w_+), \text{ onde } (w_-, w_+) \text{ é o intervalo maximal de existência de cada solução. Então } D \text{ é aberto, } (t, t_0, x_0, \lambda) \rightarrow x(t, t_0, x_0, \lambda) \text{ é de classe } C^k \text{ em } D \text{ e } t \rightarrow x(t, x_0, t_0, \lambda) \text{ é de classe } C^{k+1} \text{ em } (w_-, w_+) \text{ com } \partial_t^{k+1}x(t; t_0, x_0, \lambda) \text{ contínua em } D.$

Demonstração:

Seja $V \subset W$ aberto incluído compactamente em W . Logo, para algum $\epsilon > 0$ suficientemente

pequeno, a vizinhança fechada $\overline{V}_\epsilon$ de raio ϵ do compacto $\overline{V}$ está contida em W . Seja M o máximo de f no compacto $\overline{V}_\epsilon$ e seja L a constante de Lipschitz de f em relação a x em $\overline{V}_\epsilon$. Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$, $\delta M \leq \frac{\epsilon}{2}$ e $\delta L \leq \frac{1}{2}$. Vamos mostrar, utilizando o Teorema do princípio de contração uniforme ??, que para qualquer $(t_0, x_0, \lambda) \in V \times \Lambda$, a solução $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ está definida no mesmo intervalo $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$ e é de classe C^k em (t, t_0, x_0, λ) .

Considere a mudança de variáveis $\tau = (t - t_0)$ e seja $y(\tau) = x(t_0 + \tau) - x_0$, de modo que $y = y(\tau; t_0, x_0, \lambda)$ satisfaz a equação

$$y'(\tau) = f(t_0 + \tau; y(\tau), \lambda), \quad y(0) = x_0. \quad (2.5)$$

Com isso, se $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ está definido para $t_0 - \delta \leq t \leq t_0 + \delta$ e é tal que $|x(t; t_0, x_0, \lambda) - x_0| \leq \frac{\epsilon}{2}$ nesse intervalo, então $y(\tau; t_0, x_0, \lambda)$ está definido em $[-\delta; \delta]$, é tal que $|y(\tau; t_0, x_0, \lambda) - x_0| \leq \frac{\epsilon}{2}$ e é ponto fixo de

$$\phi(y, x_0, \lambda)(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f(t_0 + s, y(s), \lambda) ds, \quad \forall \tau \in [-\delta, \delta].$$

O domínio de definição de ϕ é $\Sigma \times V \times \Delta$ onde

$$\Sigma = \{y \in C([-\delta, \delta]; R^m), |y(t) - x_0| \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall t \in [-\delta, \delta]\},$$

que é a bola fechada de raio $\frac{\epsilon}{2}$ e centro em x_0 do espaço de Banach das funções contínuas de $[-\delta; \delta]$ em R^m com a norma do máximo $\|y\| = \max_{t \in [-\delta, \delta]} \{|y(t)|\}$. Note que ϕ está bem definido nesse domínio pois no integrando na definição de ϕ , temos $(t_0 + s, y(s)) \in \overline{V}_\epsilon \subset W$ quando $y \in \Sigma$. De fato, $(t_0, x_0) \in V$ e $|(t_0 + s, y(s)) - (t_0, x_0)| \leq |s| + |y(s) - x_0| \leq \delta + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$. Sendo f de classe C^k , segue que ϕ também é de classe C^k . Temos, também, que

$$|\phi(y, t_0, x_0, \lambda)(\tau) - x_0| \leq M|\tau| \leq M\delta \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad \tau \in [-\delta; \delta].$$

Logo $\phi(y, t_0, x_0, \lambda) \in \Sigma$.

Além disso,

$$\begin{aligned} |\phi(y_1, t_0, x_0, \lambda)(\tau) - \phi(y_2, t_0, x_0, \lambda)| &\leq L \left| \sum_0^\tau |y_1(s) - y_2(s)| ds \right| \\ &\leq \delta L \|y_1 - y_2\|, \quad \forall \tau \in [-\delta, \delta], \\ &\leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\| \end{aligned}$$

pois $\delta < \frac{1}{2}$. Então,

$$\|\phi(y_1, t_0, x_0, \lambda) - \phi(y_2, t_0, x_0, \lambda)\| \leq \frac{1}{2} \|y_1 - y_2\|,$$

o que mostra que $\phi : \Sigma \times V \times \Lambda \rightarrow \Sigma$ é uma contração uniforme. Como f é de classe C^k , então ϕ também é de classe C^k . Portanto, pelo princípio da contração uniforme, existe $y = y(t_0, x_0; \lambda) : V \times \Lambda \rightarrow \Sigma$ de classe C^k que é ponto fixo de $\phi(\cdot, t_0, x_0; \lambda)$. Então, $y(\tau; t_0, x_0, \lambda)$ é solução de (2.5) e, com isso, temos $x(t; t_0, x_0, \lambda) = y(t - t_0, t_0, x_0, \lambda)$ de classe C^k em $(t_0, x_0, \lambda) \in V \times \Lambda$.

Quanto à regularidade em t , podemos deduzir por indução que x é de classe C^{k+1} em t , pelo menos localmente, i.e., em $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, e é C^k juntamente nas variáveis $(t; t_0, x_0, \lambda)$. De fato, como a norma em Σ é a norma do máximo e $y = y(t_0, x_0, \lambda)$ é contínua com valores em Σ , segue que $x = x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é contínua juntamente em (t, t_0, x_0, λ) . Da equação diferencial, segue, então, que $\partial_t x$ é contínua em $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Assumindo por indução que x é de classe C^j em (t, t_0, x_0, λ) , para $j < k$, temos, pela equação diferencial $x' = f(t, x)$, que x é de classe C^{j+1} em t como $\partial_t^{j+1} x$ dependendo continuamente em todas as variáveis $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Como $x(t; t_0, x_0, \lambda)$ é também de classe C^k , logo C^{j+1} , em (t_0, x_0, λ) , segue que x é C^{j+1} juntamente em $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Isso completa a indução, mostrando que x é C^k em $(t; t_0, x_0, \lambda)$. Da equação diferencial $x' = f(t, x, \lambda)$, concluímos, finalmente, que ∂_t^{k+1} existe e é contínua em $(t; t_0, x_0, \lambda)$.

Para estender essa regularidade para $t \in (w_-, w_+)$ longe de t_0 , note que, podemos dividir o intervalo $[t_0; t]$ em subintervalos de extremos $t_0 < t_0 + \delta < t_0 + 2\delta < \dots < t_0 + n\delta < t$ e escrever

$$\begin{aligned} x(t; t_0, x_0, \lambda) &= x(t; t_0 + n\delta; x(t_0 + n\delta; t_0; x_0, \lambda), \lambda) \\ &= x(t; t_0 + n\delta, x(t_0 + (n-1)\delta, \dots, x(t_0 + \delta, t_0, x_0, \lambda), \dots, \lambda, \lambda). \end{aligned}$$

Portanto, enquanto t para tal que a solução entre t_0 e t está toda contida em V , temos que $x(t; t_0, x_0, \delta)$ se escreve como uma composição finita de funções com a regularidade desejada, e, portanto, também tem essa regularidade. Como V é aberto arbitrário incluído compactamente no aberto W , podemos estender esse resultado para todo o W e para todo o intervalo aberto de definição das soluções, completando a demonstração. ■

Definição 2.18. *Um campo de vetores X num subconjunto $U \subset E$ é simplesmente uma aplicação $X : U \rightarrow E$. Tal campo define uma EDO autônoma*

$$\dot{x} = X(x).$$

Observação 2.19. *Qualquer equação do tipo*

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0.$$

Pode ser transformada em uma equação autônoma pela substituição

$$y = (t, x) \rightarrow \dot{y} = (1, f(y)), y(t_0) = (t_0, x_0).$$

Se U é um aberto tal que $U \subset E$, $X : U \rightarrow E$ continua, e $e \in U$, uma curva integral de X , começando em x é uma função $\xi : I \rightarrow U$, onde I é um intervalo aberto contendo 0, tal que $\xi(0) = x$ e

$$\xi'(t) = X(\xi(t)), t \in I \quad (2.6)$$

Nós temos que (2.6) é equivalente seguinte equação integral

$$\xi(t) = x + \int_0^t X(\xi(s)) ds$$

Definição 2.20. Seja $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função continua tal que $\beta(I) \subset U$. $T(\beta)$ denota a transformação da função β e definida $T(\beta) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$T(\beta)(t) = x + \int_0^t X(\beta(s)) ds.$$

Teorema 2.21 (Teorema do Fluxo Local). Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^k , $k \geq 1$ no aberto u . Então:

- (i) $\forall x_0 \in U$, existe a solução maximal $\varphi(\cdot, x_0)$ de $\dot{x} = X(x)$, $x(0) = x_0$, definida no intervalo maximal I_{x_0} .
- (ii) O conjunto $D = (t, x_0) \in \mathbb{R} \times U, t \in I_{x_0}$ é aberto.
- (iii) A aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $(t, x_0) \mapsto \varphi(t, x_0)$ é de classe C^K . Além disso, temos a relação

$$\frac{d(D_{x_0}\varphi(t, x_0))}{dt} = DX(\varphi(t, x_0))D_{x_0}\varphi(t, x_0), \text{ com } (D_{x_0}\varphi)|_{(0, x_0)} = I_n$$

- (iv) (**Propriedade do fluxo**). Se $y_0 = \varphi(t_0, x_0)$, com $t_0 \in I_{x_0}$, então $I_{y_0} = I_{x_0} - t_0$ e $\varphi(s, y_0) = \varphi(s, \varphi(t_0, x_0)) = \varphi(t_0 + s, x_0)$.

Demonstração:

Mostraremos (iii) Suponhamos que X é de classe C^1 , nós desejamos que $D_2\varphi(t, x)$ satisfaz a equação:

$$\frac{d}{dt}D_2\varphi(t, x) = DX(\varphi(t, x)).D_2$$

Seja $\psi(t, x)$ a solução de

$$\frac{d}{dt}\psi(t, x) = DX(\psi(t, x)).\psi(t, x), \psi(0, x) = I_d \quad (2.7)$$

Pelo o teorema da existência e unicidade $\psi(t, x)$ existe.

Nós afirmamos que ψ é continua. Para cada x , $\psi(t, x)$ é continua em t . Desde que X é de classe C^1 . ■

Observação 2.22. De (iii) e (iv) do teorema do Fluxo local implicam que se $(t_0, x_0) \in D$, existe uma vizinhança V de x_0 em U tal que $\varphi_{t|_V} : V \rightarrow \varphi_t(V) \subset U$ é um difeomorfismo. Com efeito, se $t \in I_{x_0}$, como D é aberto, temos que existe uma vizinhança V de x_0 em U tal que $t \in I_x, \forall x \in V$ de $x_0 \in U$ tal que $t \in I_x, \forall x \in V$. O item (iii) nos diz que φ_t é C^k , e o item (iv) nos diz que $\varphi_{-t|_{\varphi_t(V)}} : \varphi_t(V) \rightarrow V$ está definido, sendo a inversa de $\varphi_{t|_V}$.

Definição 2.23 (Fluxo local). O fluxo local ou grupo an um parâmetro gerada por X é a aplicação $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. O campo é dito completo se $I_x = \mathbb{R}; \forall x \in U$, ou seja, se $D = \mathbb{R} \times U$.

Observação 2.24. Dos teorema de intervalo maximal temos que se $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é limitado ($\exists M > 0$ tal que $X(x) \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^n$), então X é completo. Se o campo $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é globalmente lipschitz então X é completo.

Denotamos por $\text{Diff}^k(U)$ o grupo dos difeomorfismos de classe C^k do aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, dotado da operação de composição.

O próximo corolário justifica a terminologia de grupo a um parâmetro da última definição:

Corolário 2.25. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores completo de classe C^k , $k \geq 1$. Então o fluxo de X , $\varphi : \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ satisfaz:

(i) $\frac{\partial(\varphi(t, x))}{\partial t} = X(\varphi(t, x)); \varphi(0, x) = x$. Em particular, $X(x) = \frac{\partial(\varphi)}{\partial t}|_{(0, x)}$,

(ii) $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x)$,

(iii) Fixando t , a aplicação $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ define um difeomorfismo C^k .

Além disso, a aplicação $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}^k(U)$, dada por $\Phi(t) = \varphi_t$ define um homeomorfismo de grupos.

Proposição 2.26. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k , $k \geq 1$.

Dada uma solução máxima φ de X , definida em I , temos três alternativas:

- (i) φ é constante e $I = \mathbb{R}$;
- (ii) φ é injetora;
- (iii) $I = \mathbb{R}$ e φ é periódica.
Em particular, se $\gamma = \varphi(I)$ é a órbita correspondente, então as seguintes possibilidades para γ :
- (iv) $\gamma = P$;
- (v) γ é difeomorfa à reta.
- (vi) γ é difeomorfa a um círculo.

2.1.3 Equivalência e conjugação de campos vetoriais

Definição 2.27. (Equivalência de campos). Sejam X_1 e X_2 campos vetoriais de $\mathbb{R}^n$, $X_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $X_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diz-se que X_1 é topologicamente equivalente a X_2 (resp. C^K -equivalente) quando existe um homeomorfismo (resp., um difeomorfismo C^k) $h : U_1 \rightarrow U_2$ que leva órbita de X_1 em órbita de X_2 preservando orientação. Mais precisamente, se $p \in U_1$ e $\gamma_1(p)$ é a órbita orientada de X_1 passando por p , então $h(\gamma_1(p))$ é a órbita orientada $\gamma_2(h(p))$ de X_2 passando por $h(p)$.

Definição 2.28. (Conjugação de campos). Sejam X e Y campos vetoriais de $\mathbb{R}^n$, $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, e sejam $\varphi : D \rightarrow U$ e $\psi : \hat{D} \rightarrow V$ os fluxos gerados respectivamente por X e Y . Diz-se que X é topologicamente conjugado a Y (resp. C^k -conjugado) quando existe um homeomorfismo (resp., um difeomorfismo C^k) $h : U \rightarrow V$ tal que

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x)),$$

para todo $(t, x) \in D$.

Em particular $I^{\max} = I^{\max}(h(x))$. h é dita uma conjugação topológica (resp de classe C^k) entre X e Y .

Observação 2.29. Suponha que o campo X tenha uma órbita periódica γ , de período T . Seja $x \in \gamma$. Daí, temos:

$$h(x) = h(\varphi(0, x)) = h(\varphi(T, x)) = \psi(T, h(x)),$$

Portanto, $\widehat{\gamma}$. O conceito de campos é muito mais forte!. Em geral, só são obtidas conjugações locais entre campos por essa razão. Isso explica a existência do conceito (mais fraco) de equivalências de campos.

Observação 2.30. Tanto a equivalência de campos como a conjugação de campos são relações de equivalência.

Exemplo 2.31. Seja $X : U \rightarrow E$ um campo completo (ou seja o intervalo maximal é $\mathbb{R}$). Daí, fixando $t \in \mathbb{R}$, o difeomorfismo tempo t , dado por $h(\cdot) := \varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$ conjugua X com ele mesmo. De fato, pelo o teorema do Fluxo Local, vale

$$\begin{aligned} h(\varphi_s(x)) &= \varphi_t(\varphi_s(x)) \\ &= \varphi_{s+t}(x) \\ &= \varphi_s(\varphi_t(x)) \\ &= \varphi_s(h(x)), \forall s \in \mathbb{R}, \forall x \in U. \end{aligned}$$

No caso que X não é completo, tal difeomorfismo tempo t está definido somente em um subconjunto aberto $V_t \subset U$, conjugando então $X|_{V_t}$ e $X_{\varphi_t(V_t)}$.

Observação 2.32. Podemos usar o exemplo anterior como uma forma de estender conjugações em muitos casos. Suponhamos $X : U \rightarrow E$, $Y : V \rightarrow E$ dois campos de classe C^k , $k \geq 1$ e suponhamos que existam abertos $\widehat{U}$, $\widehat{V}$ tal que $\widehat{U} \subset U$, $\widehat{V} \subset V$ e um $h : \widehat{U} \rightarrow \widehat{V}$ uma C^r , $r \geq 0$ conjugação de $X|_{\widehat{U}}$ e $Y|_{\widehat{V}}$. Denote por (φ, ψ) o fluxo de X , e Y e suponhamos que existe um $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, \widehat{U}) \cap \widehat{U} = \emptyset$ e $\psi(t, \widehat{V}) \cap \widehat{V} = \emptyset$. Definamos $\widetilde{U} := \widehat{U} \cup \varphi(t, \widehat{U})$ e $\widetilde{V} := \widehat{V} \cup \psi(t, \widehat{V})$. Agora vamos a definir $\widetilde{h} : \widetilde{U} \rightarrow \widetilde{V}$ por

$$\widetilde{h} = \begin{cases} \widehat{h}(x), & \text{se } x \in \widehat{U} \\ \psi_t \circ \widehat{h} \circ \varphi(x), & \text{se } x \in \varphi(t, \widehat{U}). \end{cases}$$

Daí tem-se que $\widetilde{h}$ é uma conjugação entre $X|_{\widetilde{U}}$ e $Y|_{\widetilde{V}}$

Lema 2.33. Sejam $U \subset E$, $V \subset \widehat{E}$ abertos em espaços de Banach E e $\widehat{E}$ e sejam $X : U \rightarrow E$ e $Y : V \rightarrow \widehat{E}$ campos de classe C^k , $k \geq 1$ e $h : U \rightarrow V$ um homeomorfismo de classe C^1 (com a inversa h^{-1} não necessariamente diferenciável). Então, h é uma conjugação entre X e Y se e só se

$$Dh_p.X(p) = Y(h(p)), \quad \forall p \in U.$$

Em particular, se h for um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 1$, então h será uma C^k conjugação se e só se satisfizer a fórmula acima.

Demonstração:

($\Leftarrow$) Sejam φ e ψ os fluxos de X e Y . Dado um $x \in U$, definamos $\widehat{\psi}(t, x) = h(\varphi(t, x))$, mostraremos que $\widehat{\psi}$ é solução de $x' = Y(x)$, $Y(0) = h(p)$, com efeito

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(t)' &= Dh(\varphi(t, x)) \frac{d}{dt} \varphi(t, x) \\ &= Dh(\varphi(t, x)) X(\varphi(t, x)) \\ &= Y(\varphi(t, x)) = Y(\widehat{\psi}).\end{aligned}$$

Como o campo Y é de classe C^k , $k \geq 1$ então se cumpre unicidade de soluções, então

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(p)).$$

Então h é uma conjugação.

($\Rightarrow$) Se h é uma conjugação, dado um $x \in U$, tem-se

$$h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$$

Derivando com respeito a t , obtemos:

$$Dh(\varphi(t, x)) \varphi'(t, x) = Y(\psi(t, h(p))).$$

Avaliando-se em $t = 0$ obtemos :

$$Dh(p)X(p) = Y(h(p)).$$

■

Exemplo 2.34. Seja $U = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ e $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, X(x) = x - x^2$, $Y : U \rightarrow U, Y(y) = -\frac{1}{y} + 1$ dois campos de classe C^∞ definamos o difeomorfismo $h : U \rightarrow U$, $h(x) = \frac{1}{x}$. Então X e Y são C^∞ conjugados.

Dinâmica Topológica e O Teorema de Hartman Grobman(H.G)

Nesta seção que tem como referências as notas de Martin Sambarino na parte de definições de Sistemas dinâmicos [27], alguns Lemas para provar o Teorema de H.G foram tiradas do livro de Jacob Palis e Welinton [11], o Teorema de H.G foram tomadas do livro de Nitecki [26], as aplicações do Teorema de H.G são de Rosas [21].

Nesta seção daremos algumas definições e teoremas de dinâmica topológica e provaremos o teorema de H.G, que diz que em presença de hiperbolicidade podemos linearizar localmente campos e difeomorfismos, mediante um exemplo mostraremos que a hipótese de hiperbolicidade do teorema de Hartman Grobman não pode ser retirado.

O teorema de H.G nos ajuda ao estudo das órbitas, também nos fornece variedades topológicas estáveis e instáveis.

3.0.4 introdução

Para estudar o desenvolvimento dos processos que mudam com o tempo, o linguagem a ser utilizado é o sistemas dinâmicos.

Para realizar a descrição da evolução de estes processos, se introduz um espaço de estados M . A evolução de estes estados depois de um certo tempo fixo dada por uma aplicação $f : M \rightarrow M$, o pode ser dado por uma equação diferencial $x' = f(x)$. Passaremos a dar algumas definições e propriedades da dinâmica topológica, e ver como tais propriedades são preservadas pela conjugações topológicas.

Definição 3.1. *Seja M um espaço topológico. Um sistema dinâmico discreto em M é uma função $F : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ continua tal que:*

1. $F(0, x) = x$,
2. $F(m, F(n, x)) = F(m + n, x)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}, \forall x \in M$.

Observação 3.2. Se definimos para cada $m \in \mathbb{Z}$ o mapa $F_m : M \rightarrow M$ por $F_n(x) = F(n, x)$, temos que $F_n \circ F_m = F_{n+m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$. Em particular, $f = F_1$ é um homeomorfismo (sua inversa $f^{-1} = F_{-1}$) e se cumpre $F_n = f^n$. Por isso, um sistema dinâmico discreto esta gerada por um difeomorfismo $f : M \rightarrow M$.

Definição 3.3. Um sistema dinâmico contínuo o fluxo é um mapa $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ contínua tal que:

1. $\phi(0, x) = x$,
2. $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$, $\forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in M$.

Observação 3.4. Se para cada $t \in \mathbb{R}$ definimos $\phi_t : M \rightarrow M$ por $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ se têm que $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$, $\forall t, s \in \mathbb{R}$.

Definição 3.5. Seja $f : M \rightarrow M$ um homeomorfismo, a órbita de x é $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.

A órbita futura de x é $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$.

A órbita passada de x é $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x) : n \leq 0\}$.

1. Seja $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ fluxo, a órbita de x é $\mathcal{O}(x) = \{\phi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$.
A órbita futura de x é $\mathcal{O}^+(x) = \{\phi(t, x) : t \geq 0\}$.
A órbita passada de x é $\mathcal{O}^-(x) = \{\phi(t, x) : t \leq 0\}$.

Exemplo 3.6. 1. Seja $f_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a Transformação de Hénon dada por $f_{a,b}(x, y) = (1 + y - ax^2, bx)$ quando $b \neq 0$ o mapa possui inversa onde $f_{a,b}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}f_{a,b}^{-1}(x', y') = (\frac{y'}{b}, x' - 1 + \frac{ay'^2}{b^2})$, daí f gera um sistema dinâmico discreto, quando $b = 0$ $f_{a,b}$ é não inversível e colapsa todo o espaço $\mathbb{R}^2$ sobre o eixo x , e daí a dinâmica é como o sistema unidimensional $f_a(x) = 1 - ax^2$.

2. Seja $M = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \approx \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. A identificação é dada por $\exp : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$, com $\exp(t) = e^{2\pi it}$.

Definimos a relação do ângulo α dada por $R_\alpha = x + \alpha(\text{mod } 1)$, o equivalentemente $R_\alpha(e^{2\pi it}) = e^{2\pi i(t+\alpha)}$.

3. Seja M uma variedade compacta e $X : M \rightarrow TM$ um campo de vetores tangentes de classe C^1 . Fazendo uso das cartas locais, encontramos que para $x \in M$, $\exists!$ $\phi_x : \mathbb{R} \rightarrow M$ tal que $\phi_x(0) = x$ e $\frac{\partial \phi_x(t)}{\partial t} = X(\partial_x(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Se definimos $\phi(t, x) = \phi_x(t)$ temos o fluxo em M .

Definição 3.7. *Seja $f : M \rightarrow M$ um sistema dinâmico discreto.*

- Um ponto $p \in M$ se chama *fixo* se $f(p) = p$.
- Um ponto $p \in M$ se chama *periódico* se existe $k \geq 1$ tal que $f^k(p) = p$.
Se chama *período* de p ao $\min\{k \geq 1 : f^k(p) = p\}$.

Definição 3.8. *Seja $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um fluxo.*

- Um ponto se chama *ponto de equilíbrio* (ou *singularidade*) se $\phi_t(p) = p, \forall t \in \mathbb{R}$.
- A órbita por $p \in M$ se chama *periódica* se existe $t > 0$ tal que $\phi_t(p) = p$, para algum $t > 0$. Se chama *período* de p ao $\min\{t > 0 : \phi_t(p) = p\}$.

Definição 3.9. *Dado um sistema dinâmico $f : M \rightarrow M$ discreto e um ponto $x \in M$, definimos*

$$\omega_f(x) = \{y \in M : \exists n_{i_i} \in \mathbb{N}, n_i \rightarrow \infty \text{ t.q. } \lim_{i \rightarrow \infty} f^{n_i}(x) = y\},$$

$$\alpha_f(x) = \{y \in M : \exists n_{i_i} \in \mathbb{N}, n_i \rightarrow \infty \text{ t.q. } \lim_{i \rightarrow \infty} f^{-n_i}(x) = y\}.$$

As definições para fluxos são:

$$\omega(x) = \{y \in M : \exists t_k \rightarrow +\infty \text{ t.q. } \phi(t_k, x) = y\}.$$

e

$$\alpha(x) = \{y \in M : \exists t_k \rightarrow -\infty \text{ t.q. } \phi(t_k, x) = y\}.$$

Em geral omitimos o sub-índice f , denotando apenas por $\omega(x), \alpha(x)$ quando não houver dúvida sobre qual é a função estamos trabalhando. Chamamos também de conjunto ω -limite e α -limite. Definimos o conjunto **limite** $L(f)$ por

$$L(f) = L_+(f) \cup L_-(f), \text{ onde } L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega(x)}, L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha(x)}.$$

Se nada for dito assumiremos que X um espaço topológico, localmente compacto e Hausdorff.

Definição 3.10. *Dizemos que $x \in X$ é um ponto não-errante para $f : M \rightarrow M$ contínua, se: dada uma vizinhança U de x , existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Caso contrário, dizemos que x é errante. Denotamos o conjunto dos pontos não errantes de f por $\Omega = \Omega(f)$.*

Dizemos que $x \in M$ é não errante para $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ se dada uma vizinhança U de x , $\exists t \geq 1$ tal que $\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$.

Proposição 3.11. • ω é fechado e $f(\Omega) \subset \Omega$.

- Se f for um homeomorfismo $f(\Omega) = \Omega$. Um ponto é não-errante para f se, e somente se, for não errante para f^{-1} .
- Se $x \in M$, então $\Omega(x) \subset \omega(f)$ e $\alpha(x) \subset \omega(f)$.

Demonstração:

O conjunto dos pontos errantes é aberto. De fato, seja x um ponto errante, então existe uma vizinhança U tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$ se têm $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Pela definição temos que todos os pontos de U são errantes, então temos o conjunto dos pontos errantes é aberto, daí o conjunto dos pontos não-errantes é fechado. Para ver que $f(\omega) \subset \omega$ é simples.

Suponhamos agora que f seja um homeomorfismo. Seja $x \in \omega$, provando que $f^{-1}(x)$ é não-errante implica que $f(\omega) = \omega$. Dado U vizinhança de x , logo existe n tal que $f^n(f(U)) \cap f(U) \neq \emptyset \rightarrow f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. A última afirmação segue da observação: $f^n(U) \cap U \neq \emptyset \leftrightarrow U \cap f^{-n} \neq \emptyset$. ■

Proposição 3.12. $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são conjuntos fechados e invariantes.

Demonstração:

Para o caso $f : M \rightarrow M$, temos $\omega(x) = \bigcap_{k \geq 1} \overline{\{f^n(x) : n \geq k\}}$. Logo $\omega(x)$ é fechado.

Seja $y \in \omega(x) \rightarrow \exists n_k \rightarrow \infty$ tal que $f^{n_k}(x) \rightarrow y$. Seja $m \in \mathbb{Z}$. Então $f^{n_k+m}(x) \rightarrow f^m(y) \rightarrow f^m(y) \in \omega(x)$.

Para o caso do fluxo $\omega(x) = \bigcap_{k \geq 0} \overline{\phi(t, x) : t \geq k}$ ■

Proposição 3.13. $L(f) \subset \omega_f$.

Demonstração:

Seja $y \in L_+$, o outro caso é análogo. Como Ω é fechado podemos supor que $y \in \omega(x)$. Seja U uma vizinhança de y , então existem inteiros $m > n$ tal que $f^n(x), f^m(x) \in U$. Logo como $f^{m-n}(f^n(x)) = f^m(x)$, então $f^{m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$. ■

Denotamos por $Per(f)$ o conjunto dos pontos periódicos de f . Temos que

$$Per(f) \subset L(f) \subset \Omega(f).$$

3.0.5 Equivalência Dinâmica

Definição 3.14. *Sejam $f, g : M \rightarrow M$ dois Sistemas Dinâmicos. Dizemos que são conjugados se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Teorema 3.15. *Seja M uma variedade Riemaniana compacta e sejam $f : M \rightarrow M$ e $g : M \rightarrow M$ dois homeomorfismos conjugados por um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$. Então:*

1. p é periódico por $f \leftrightarrow h(p)$ é periódico para g .
2. p é recorrente por $f \leftrightarrow h(p)$ é recorrente para g .
3. $h(\omega_f(x)) = \omega_g(h(x))$.
4. G é minimal por $f \leftrightarrow h(G)$ é minimal por g .
5. $h(\Omega) = \Omega(g)$.
6. f é topologicamente mixing $\leftrightarrow g$ é topologicamente mixing
7. Se define o conjunto estável de um ponto x como $W_f^s(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(y), f^n(x)) = 0\}$ e o instável $W_f^u(x) = W_{f^{-1}}^s(x)$. Se cumpre $h(W_f^s(x)) = W_g^s(h(x))$. Analogamente para a instável.

3.1 Teoremas de Hartman-Grobman para Difeomorfismos e Campos

Um ferramenta na teoria qualitativa de EDO é o teorema de Hartman Grobman que diz que em uma vizinhança de um ponto fixo hiperbólico o sistema é equivalente a sua parte linear, depois de provar o teorema mediante exemplo proposto em Burns[2], e outro dado por Rosas [21] mostramos que a condição de hiperbolicidade não pode ser retirado da hipótese do teorema de Hartman-Grobman

3.1.1 Teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos

Lema 3.16. *Seja E um espaço de Banach, $f : N \subset E \rightarrow E$ uma aplicação C^k , $k \geq 1$ de um aberto N tal que $0 \in E$, com $f(0) = 0$ e seja $A = Df_0$.*

Dado um $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança $U = U(0)$ existe uma extensão de f a uma função $(A + \phi)$, onde $\phi \in C_b^O(E)$ é lipschitziana com constante de lipschitz limitada por ϵ .

Demonstração:

Seja $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ uma função C^∞ com as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \beta(t) = 0 & \text{se } t \geq 1 \\ \beta(t) = 1 & \text{se } t \leq \frac{1}{2} \\ |\beta'(t)| \leq k \quad \forall t \in \mathbb{R} & K > 2. \end{cases}$$

Temos que $f = A + \varphi$, com $\varphi(0) = 0$ e $D\varphi_0 = 0$, considere uma bola B_r de centro 0 e radio $r > 0$ tal que $\|D\varphi_x\| < \frac{\epsilon}{2k}$, $\forall x \in B_r$ (Para tal fato utilizamos a continuidade de $D\varphi$ pois f é C^1).

Tomemos

$$\phi(x) = \begin{cases} \beta(\frac{|x|}{r})\varphi(x) & \text{se } |x| < r \\ 0 & \text{se } |x| \geq r. \end{cases}$$

O que implica que ϕ é limitada em E , visto que $|\phi| \leq |\varphi|$, e devido a desigualdade de valor médio, e constante de Lipchitz de $\varphi|_{B_r}$ é menor que $\frac{\epsilon}{2k}$.

Em resumo:

$$|\phi(x)| \leq |\varphi(x) - \varphi(0)| \leq \frac{\epsilon}{2k}r, \quad \forall x \in B_r.$$

Temos ainda que $\phi(x) = \varphi(x)$ se $|x| < \frac{r}{2}$, onde concluímos que $A + \phi$ é uma extensão $f|_{B_r}$.

Mostremos que ϕ é Lipschitziana e sua constante de Lipschitz pode ser tomado como menor ou igual a ϵ .

Caso 1: Se $x_1, x_2 \in B_r$, temos:

$$\begin{aligned} |\phi(x_1) - \phi(x_2)| &= \left| \beta\left(\frac{|x_1|}{r}\right)\varphi(x_1) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right)\varphi(x_2) \right| \\ &= \left| \left(\beta\left(\frac{|x_1|}{r}\right) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right)\right)\varphi(x_1) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right)(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right| \\ &\leq \left| \left(\beta\left(\frac{|x_1|}{r}\right) - \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right)\right)\varphi(x_1) \right| + \left| \beta\left(\frac{|x_2|}{r}\right)(\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right|. \end{aligned}$$

Como $|\beta'(t)| \leq k$ então

$$|\beta(|a|) - \beta(|b|)| \leq k |a - b|.$$

Então

$$\left| \beta\left(\frac{x_1}{r}\right) - \beta\left(\frac{x_2}{r}\right) \right| \leq k \left| \frac{x_1}{r} - \frac{x_2}{r} \right|.$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned} \left| \phi(x_1) - \phi(x_2) \right| &\leq k \left| \frac{x_1}{r} - \frac{x_2}{r} \right| \frac{\epsilon}{2k} r + \frac{\epsilon}{2} \left| x_1 - x_2 \right| \\ &= \epsilon \left| x_1 - x_2 \right|. \end{aligned}$$

Então

$$\left| \phi(x_1) - \phi(x_2) \right| \leq \epsilon \left| x_1 - x_2 \right|,$$

$\forall x_1, x_2 \in B_r$.

Caso 2): Se $x_1 \in B_r$ e $x_2 \notin B_r$, obtemos a partir das mesmas contas:

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1) - 0\| &= \|B\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)\phi(x_1) - B\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\phi(x_2) + B\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\phi(x_2)\| \\ &\leq (\|B\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) - B\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\|)\phi(x_1) + \|B\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\phi(x_2)\|, \end{aligned}$$

mas $B\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) = 0$ pois $\|x_2\|r \leq 1$

$$k \left\| \frac{\|x_1\|}{r} - \frac{\|x_2\|}{r} \right\| \frac{\epsilon \cdot r}{2k} = \frac{\epsilon \|x_1 - x_2\|}{2} \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Finalmente, se $x_1 \notin B_r$ e $x_2 \notin B_r$, temos que:

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = 0 \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|.$$

■

Observação 3.17. Nós observamos que no caso em que E é um espaço de Hilbert (isto é, um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno), a aplicação ϕ é de classe C^k . Em tal contexto, a norma é C^∞ , exceto na origem, mas em torno da origem B é constante, implicando que $B \circ \|\cdot\|$ é C^∞ e conseqüentemente ϕ tem a mesma classe de diferenciabilidade que f .

Teorema 3.18. (*Desigualdade de Gronwall*) Seja $\alpha, \phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ e suponhamos

que $\alpha'(t)$ exista para todo $t \in (a, b)$ e $\alpha' : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ seja continua. Se

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds, \forall t \in [a, b].$$

Então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \psi(s)ds}, \forall t \in [a, b].$$

Demonstração:

Primeiro suponhamos que $\alpha(a) > 0$. Neste caso $\alpha(t) \geq \alpha(a) > 0, \forall t \in [a, b]$. Tem-se que

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds > 0, \forall t \in [a, b].$$

Então pela hipóteses temos que:

$$\frac{\phi(t)}{\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds} \leq 1,$$

então

$$\frac{\phi(t)\psi(t)}{\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds} \leq \psi(t),$$

então

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} + \frac{\phi(t)\psi(t)}{\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds} \leq \psi(t) + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}.$$

Como

$$\alpha(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds \geq \alpha, \forall t \in [a, b].$$

Daí obtemos que

$$\frac{\alpha'(t) + \phi(t)\psi(t)}{\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds} \leq \psi(t) + \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}.$$

Integrando a ultima desigualdade sobre o intervalo $[a, b]$, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}
\int_a^t \frac{\alpha'(s) + \psi(s)\phi(s)}{\alpha s + \int_a^s \psi(u)\phi(u)du} ds &\leq \int_a^t \left(\frac{\alpha'(s)}{\alpha(s)} + \psi(s) \right) ds \\
\ln(\alpha'(s) + \int_a^s \psi(u)\phi(u)du)|_a^t &\leq \ln \alpha(t)|_a^t + \int_a^t \psi(s) ds \\
\ln(\alpha(t) + \int_a^t \psi(u)\phi(u)du) - \ln(\alpha(a)) &\leq \ln(\alpha(t) - \ln \alpha(a)) + \int_a^t \psi(s) ds \\
\ln(\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds) &\leq \ln(\alpha(t)) + \int_a^t \psi(s) ds \\
\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds &\leq e^{\ln(\alpha(t)) + \int_a^t \psi(s)ds} = \alpha(t)e^{\int_a^t \psi(s)ds}.
\end{aligned}$$

Daí obtemos

$$\alpha(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds \leq \alpha(t)e^{\int_a^t \psi(s)ds}, \forall t \in [a, b].$$

Agora suponhamos que $\alpha(a) = 0$, para $\epsilon > 0$ definimos

$$\alpha_1(t) = \alpha(t) + \epsilon.$$

Fazendo contas obtemos,

$$\phi(t) \leq \alpha_1(t) + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds, \forall t \in [a, b].$$

Daí obtemos que α_1, ϕ, ψ , cumprem as hipóteses do teorema com $\alpha_1 > 0$, então obtemos

$$\phi(t) \leq (\alpha(t) + \epsilon)e^{\int_a^t \psi(s)ds}, \forall \epsilon > 0$$

Então fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos

$$\phi(t) \leq (\alpha(t))e^{\int_a^t \psi(s)ds}, \forall t \in [a, b].$$

■

Lema 3.19. *Seja $X : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de vetores de classe C^k , ($k \geq 1$) com $X(0) = 0$. Seja $L = (DX)_0$. Dado $\epsilon > 0$ existe um campo $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ com as seguintes propriedades :*

1. *O campo Y tem constante de Lipschitz limitada por K e, por tanto, o fluxo induzido por Y está definido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$;*

2. $Y = L$ fora de uma bola $B(0, r)$;
3. Existe um aberto $U \subset V$ contendo zero tal que $Y = X$ em U ;
4. Escrevendo $Y_t = L_t + \phi_t$, existe $M > 0$ tal que $\|\phi_t\| \leq M$, $\forall t \in [-2, 2]$ e ϕ_1 tem constante de lipschitz menor o igual a ϵ .

Demonstração:

Como $L = (DX)_0$, temos que $X = L + \psi$, onde $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ é tal que: $\psi(0) = 0$ e $D\psi_0 = 0$. Seja $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ tal que $B(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $B(t) = 1$ se $t \leq \frac{r}{2}$ e $B(t) = 0$ se $t \geq r$.

Seja $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por:

$$\phi(x) = \begin{cases} B(\|x\|)\psi(x), & x \in V; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^m - V. \end{cases}$$

Dado $\delta > 0$, pelo Lema (3.16), podemos escolher $r > 0$ de tal forma que ϕ seja de classe C^k e seja δ -lipschitz.

Daí, pela definição de ϕ , temos, $\phi = \psi$ em $B(0, \frac{r}{2})$ e $\phi \equiv 0$ fora de $B(0, r)$.

Seja $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ o campo de vetores definida por $Y = L + \phi$. Daí, $Y = X$ em $B(0, \frac{r}{2})$, $Y = L$ fora de $B(0, \frac{r}{2})$ e Y satisfaz 1.

Só falta verificar 4. De fato, como consequência da desigualdade de Gronwall, temos que:

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{k|t|} \cdot |x - y| \underbrace{\leq}_{|t| \leq 2} e^{2K} \cdot |x - y|.$$

Seja $\phi_t(x) := Y_t(x) - L_t(x)$, $\phi_t(y) := Y_t(y) - L_t(y)$.

Então

$$\begin{aligned} \phi_t(x) - \phi_t(y) &= [Y_t(x) - Y_t(y)] + [L_t(x) - L_t(y)] \\ &= \int_0^t [\varphi(Y_s(x)) - \varphi(Y_s(y))] ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds \\ \|\phi_t(x) - \phi_t(y)\| &\leq \delta e^{2k} \|x - y\| 2 + \left| \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds \right| \leq \\ &= \underbrace{\delta e^{2K} |x - y| 2}_{:=\alpha} + \int_0^t \underbrace{\|L\|}_{:=v(s)} \underbrace{|\phi_s(x) - \phi_s(y)|}_{:=u(s)} ds. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Gronwal, obtemos

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \leq \delta e^{2K} |x - y| 2e^{\|L\| \int_0^t ds} \leq \delta e^{2K} |x - y| 2e^{\|L\|^2}.$$

Pelo o lema anterior, podemos tomar ψ de modo que sua constante de Lipschitz $\delta > 0$ seja menor o igual a $\frac{\epsilon}{(e^{2K+\|L\|2})}$ tal implica que ϕ_1 tem constante de Lipschitz $\leq \epsilon$. Finalmente ϕ_t é limitada para todo $t \in [-2, 2]$.

Se $x \notin B(O, r)$ então,

$$|\phi_t(x)| = |\phi_t(x) - \phi_t(0)| = \left| \int_0^t [\Psi(Y_s(x)) - \Psi(Y_s(0))] ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(0)) ds \right| \leq.$$

(Note que $\Psi(Y_s(x)) = 0$, se $Y_s(x) \notin B(0, r)$).

$$\int_0^t \epsilon r ds + \left| \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(0)) ds \right| \leq 2\epsilon r + \|L\| \cdot \int_0^t |\phi_s(x) - \phi_s(0)| ds.$$

O que implica novamente pela desigualdade de Gronwall que existe $M > 0$ tal que

$$|\phi_t(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

$\forall t \in [-2, 2]$. ■

Observação 3.20. *Pelo o Lema 3.19, temos que para um campo $X : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , $k \geq 1$, pode-se fazer localmente lipschitz, com qualquer constante $k > \rho(DX(0))$, onde $\rho(DX(0)) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(DX(0))\}$*

Começaremos a provar o Teorema de Hartman Grobman.

Sejam E_1 e E_2 espaços de Banach definimos

$$C_b^0(E_1, E_2) = \{v : E_1 \rightarrow E_2; \text{continuas e limitadas}\}.$$

Sobre $C_b^0(E_1, E_2)$ definimos uma norma

$$|v| = \sup_{x \in E_1} |v(x)|_{E_2}, \quad \forall v \in C_b^0(E_1, E_2).$$

Tem-se que $(C_b^0(E_1, E_2), |\cdot|)$ é um Espaço de Banach.

Lema 3.21. *Seja $L : E \rightarrow E$ uma transformação limitada inversível e $\phi : E \rightarrow E$ $Lip(\phi) < |L^{-1}|^{-1}$.*

Então

$$Lip(L + \phi)^{-1} \leq \frac{1}{-Lip(\phi) + |-1|^{-1}}.$$

Demonstração:

Afirmações:

1. $L + \phi$ é injetora. Sejam $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} |(L + \phi)(x) - (L + \phi)(y)| &= |L(x - y) - \phi(x) + \phi(y)| \\ &\geq \underbrace{|L(x - y)|}_{|L^{-1}|^{-1}|x-y|} - \underbrace{|\phi(x) - \phi(y)|}_{Lip(\phi)|x-y|} \\ &\geq (|L^{-1}|^{-1}|x - y| - Lip(\phi)|x - y|) \\ &\geq \underbrace{(|L^{-1}|^{-1} - Lip(\phi))}_{>0} |x - y|. \end{aligned}$$

Daí obtemos que

$$|(L + \phi)(x) - (L + \phi)(y)| > 0$$

, então, se $x \neq y$ então,

$$(L + \phi)(x) \neq (L + \phi)(y).$$

2. $L + \phi$ é sobrejetiva.

Seja $y \in E$

Nós precisamos encontrar um $x \in E$ tal que

$$(L + \phi)(x) = y.$$

Note que $\phi \equiv 0$ então

$$Lx_0 = y,$$

então $x_0 = L^{-1}y$

Encontraremos um $\delta \in E$ tal que

$$(L + \phi)(x_0 + \delta) = y.$$

Então

$$\begin{aligned} L(x_0) + L\delta + (\phi)(x_0 + \delta) &= y \\ L\delta &= -\phi(x_0 + \delta) \\ \delta &= L^{-1}(-\phi(x_0 + \delta)). \end{aligned}$$

Resolver a equação

$$(L + \phi)(x_0 + \delta) = y,$$

é equivalente a encontrar um delta δ tal que

$$\delta = L^{-1}(-\phi(x_0 + \delta)),$$

para nosso objetivo utilizaremos o teorema de contração de Banach para

$$\begin{aligned} A &: E \longrightarrow E \\ v &\mapsto -L^{-1}\phi(\phi)(x_0 + v). \end{aligned}$$

Provaremos que A tem um ponto fixo .

Com efeito.

Afirmação: $Lip(A) < 1$

$$\begin{aligned} |A(v) - A(w)| &= |L^{-1}\phi(x_0+v) - L^{-1}\phi(x_0+w)| \\ &\leq |L^{-1}|Lip(\phi)|(x_0+v) - (x_0+w)| \\ &= \underbrace{|L^{-1}||Lip(\phi)|}_{<1} |v - w|. \end{aligned}$$

Daí temos que A é uma contração e como E é um espaço de Banach então A tem um ponto fixo. Então existe um δ tal que

$$(L + \phi)(x_0 + \delta) = y.$$

Daí nós concluímos que $L + \phi$ é um função bijetiva com constante de

$$Lip(L + \phi) < | -Lip(\phi) + |L^{-1}|^{-1}|).$$

L hiperbólico inversível então

$$L : E \rightarrow E,$$

e existe uma decomposição invariante

$$E = E^s \oplus E^u,$$

e existe uma norma $||\cdot||$ adaptada tal que :

$$L : E^s \rightarrow E^s,$$

é uma contração $||L_{E^s}|| = \lambda < 1$, se $v \in E^s$ então $||L_v|| \leq \lambda|v|$, também

$$L : E^u \rightarrow E^u$$

é uma expansão $||L_{E^u}|| = \frac{1}{\lambda}$ e então se $w \in E^u$ $|Lw| \geq \frac{1}{\lambda}|w|$.

■

Teorema 3.22. *Seja $L : E \rightarrow E$ linear limitada hiperbólica. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\phi \in C_0^b(E, E)$ tal que $Lip(\phi) < \epsilon$ temos que existe uma única função $h_\phi \in C_0^b(E, E)$ tal que*

$$(I_d + h_\phi) \circ L = (L + \phi) \circ (I_d + h_\phi).$$

Além disso se ϵ é o suficiente pequeno então $I_d + h_\phi$ é um homeomorfismo de E em E .

Lema 3.23. *Seja $L : E \rightarrow E$ uma aplicação linear limitada, então existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \phi, \psi \in C_0^b(E, E)$ tal que $Lip(\phi), Lip(\psi) < \epsilon$, temos uma única $h_{\phi, \psi} \in C_0^b(E, E)$ tal que*

$$(I_d + h_{\phi, \psi}) \circ (L + \phi) = (L + \psi) \circ (I_d + h_{\phi, \psi}).$$

Demonstração:

Procuremos uma solução desta equação funcional

$$\begin{aligned} (I_d + h) \circ (L + \phi) &= (L + \psi) \circ (I_d + h) \\ L + \phi + h(L + \phi) &= L + L \circ h + \psi + \psi \circ h \\ \underbrace{L \circ h - h(L + \phi)}_{L_\phi(h)} &= \phi - \psi(I_d + h). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_\phi : C_0^b(E, E) &\rightarrow C_0^b(E, E) \\ v &\rightarrow L \circ v - v(L + \phi), \end{aligned}$$

é uma transformação linear.

Primeiro mostraremos que L_ϕ é inversível então

$$\begin{aligned} L_\phi(h) &= \phi - \psi(I_d + h) \\ h &= L_\phi^{-1}(\phi - \psi(I_d + h)). \end{aligned}$$

Se

$$Av = L_\phi^{-1}(\phi - \psi(I_d + h)).$$

Mostraremos que A é uma contração em $C_0^b(E, E)$, logo A tem um ponto fixo e então o Lema se cumpre.

Afirmção: L_ϕ é uma transformação invertível.

Com efeito, definamos

$$\begin{aligned} L_\phi^* : C_0^b(E, E) &\rightarrow C_0^b(E, E) \\ v &\rightarrow L \circ v \circ (L + \phi)^{-1}. \end{aligned}$$

Note que

$$L_\phi(v) = (L_\phi^* - I_d)(v \circ (L + \phi)).$$

De fato

$$\begin{aligned} (L_\phi^* - I_d)(v \circ (L + \phi)) &= (L \circ v \circ (L + \phi))(L + \phi)^{-1} - v(L + \phi) \\ &= L \circ v - v(L + \phi) \\ &= L_\phi(v). \end{aligned}$$

Sub afirmação: L_ϕ^* é um operador hiperbólico.

Com efeito.

Observemos que

$$C^s = C_0^b(E, E^s),$$

e

$$C^u = C_0^b(E, E^u).$$

São invariantes por L_ϕ^* . Daí, podemos escrever $L_\phi^* = L_\phi^{*s} + L_\phi^{*u}$, onde

$$\begin{aligned} L_\phi^{*s} &:= L_\phi^*|_{C_0^b(E, E^s)}, & L_\phi^{*s} : C_0^b(E, E^s) &\rightarrow C_0^b(E, E^s); \\ L_\phi^{*u} &:= L_\phi^*|_{C_0^b(E, E^u)}, & L_\phi^{*u} : C_0^b(E, E^u) &\rightarrow C_0^b(E, E^u). \end{aligned}$$

Nós temos que se $h : E \rightarrow E$ é um homeomorfismo e seja $v : E \rightarrow E$ então

$$\begin{aligned} |v \circ h|_\infty &= \sup_{x \in E} |(v \circ h)(x)| \\ &= \sup_{y \in E} |v(y)| \\ &= |v|_\infty. \end{aligned}$$

Seja $v : E \rightarrow E^s$ então

$$\begin{aligned} |L_\phi^* v|_\infty &= |L \circ v \circ (L + \phi)^{-1}|_\infty \\ &= |L \circ v|_\infty \\ &\leq \lambda |v|_\infty. \end{aligned}$$

Se $v : E \rightarrow E^u$, então

$$|L_\phi^*|_\infty = |L \circ v| \geq \frac{1}{|v|_\infty}.$$

Daí se obtém que $L_\phi^* : E \rightarrow E$ é hiperbólico. Então

$$L_\phi^* - I_d,$$

é inversível.

Então L_ϕ é inversível.

Pois $L_\phi^{-1}v = (L_\phi^* - I_d)^{-1}(v \circ (L + \phi)^{-1})$.

Afirmação :

$$\frac{1}{||L|| + 1} \leq ||L_\phi^{-1}|| \leq \frac{1}{\min\{1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\}}.$$

Vamos a mostrar:

$$|L_\phi(v)|_\infty \geq \min\{1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\}|v|_\infty.$$

Se $v \in C^s$, então $v \circ (L + \phi) \in C^s$.

$$\begin{aligned} |L_\phi(v)|_\infty &= |(L_\phi^* - I_d)(v \circ (L + \phi))|_{infy} \\ &\geq |v \circ (L + \phi)|_\infty - |L_\phi^*(v \circ (L + \phi))|_\infty \\ &\geq |v|_\infty - \lambda |v|_\infty \\ &\geq (1 - \lambda)|v|_\infty. \end{aligned}$$

Se $v \in C^u$, então

$$\begin{aligned} |L_\phi(v)|_\infty &\geq |L_\phi^*(v \circ (L + \phi))| - |v \circ (L + \phi)| \\ &\geq \frac{1}{\lambda} |v|_{infy} - |v|_\infty \\ &= \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) |v|_\infty. \end{aligned}$$

Daí nós obtemos que se $v \in C_b^0(E, E)$ então

$$|L_\phi(v)| \geq \min\{\lambda - 1, \frac{1}{\lambda} - 1\} |v|_\infty.$$

Definiremos

$$\begin{aligned} A : C_b^0(E, E) &\rightarrow C_b^0(E, E) \\ v &\rightarrow L_\phi^{-1}(\phi - \psi(I_d + v)). \end{aligned}$$

Afirmção A é uma contração $Lip < 1$.

$$\begin{aligned} |Av - Aw| &= |L_\phi^{-1}(\phi - \psi(I_d + v)) - L_\phi^{-1}(\phi - \psi(I_d + w))| \\ &= \frac{1}{\min\{\lambda - 1, \frac{1}{\lambda} - 1\}} |\psi(I_d + v) - \psi(I_d + w)| \\ &\leq \frac{1}{\min\{\lambda - 1, \frac{1}{\lambda} - 1\}} |Lip\psi| |v - w|. \end{aligned}$$

Assumindo que $Lip\psi < \min\{\lambda - 1, \frac{1}{\lambda} - 1\}$, segue que A é uma contração.

Logo se

$$Lip\phi < |L^{-1}|^{-1},$$

e

$$Lip\psi < \min\{\lambda - 1, \frac{1}{\lambda} - 1\},$$

então A é uma contração. Então se segue que A possui um único ponto fixo $h \in C_b^0$ tal que

$$Ah = h$$

O que é equivalente a que h satisfaz

$$(L + \psi)(I_d + h) = (I_d + h)(L + \phi).$$

■

Teorema 3.24. *Seja L uma transformação linear hiperbólica então existe ϵ tal que $\forall \phi \in C_b^0$ tal que $Lip(\phi) < \epsilon$.*

Então $\exists! h \in C_b^0(E)$ tal que

$$(I_d + h) \circ L = (L + \phi) \circ (I_d + h).$$

Além disso $I_d + h$ é um homeomorfismo de E em E .

Demonstração:

Pelo Lema anterior (3.21) temos que existem funções únicas $h_{\phi,0}, h_{0,\phi} \in C_b^0(E)$ tal se cumpre os seguintes diagramas comutativos .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E \\ I_d + h_{\phi,0} \downarrow & & \downarrow I_d + h_{\phi,0} \\ E & \xrightarrow{L+\phi} & E \\ I_d + h_{0,\phi} \downarrow & & \downarrow I_d + h_{0,\phi} \\ E & \xrightarrow{L} & E \end{array}$$

Então

$$(I_d + h_{0,\phi}) \circ (I_d + h_{\phi,0}) \circ L = L \circ (I_d + h_{0,\phi}) \circ (I_d + h_{\phi,0}).$$

Nós temos que

$$(I_d + h_{0,\phi}) \circ (I_d + h_{\phi,0}) = I_d + h_{\phi,0} + h_{0,\phi} + h_{0,\phi} \circ h_{\phi,0}.$$

Se denotamos por $\tilde{h} = h_{\phi,0} + h_{0,\phi} + h_{0,\phi} \circ h_{\phi,0}$, então obtemos

$$(I_d + \tilde{h}) \circ L = L \circ (I_d + \tilde{h}). \quad (3.1)$$

Pela definição temos que $\tilde{h} \in C_b^0(E)$, também temos

$$(I_d + 0) \circ L = L \circ (I_d + 0). \quad (3.2)$$

Então de 3.1, 3.2 e pela unicidade do Lema anterior temos que

$$\tilde{h} = 0.$$

Daí obtemos que

$$(I_d + h_{0,\phi}) \circ (I_d + h_{\phi,0}) = I_d.$$

Analogamente temos que:

$$(I_d + h_{\phi,0}) \circ (I_d + h_{0,\phi}) \circ (L + \phi) = (L + \phi) \circ (I_d + h_{\phi,0}) \circ (I_d + h_{0,\phi}).$$

Logo,

$$(I_d + h_{\phi,0}) \circ (I_d + h_{0,\phi}) = I_d.$$

Portanto,

$$(I_d + h_{\phi,0})^{-1} = (I_d + h_{0,\phi}).$$

■

Teorema 3.25. [Hartman-Grobman para difeomorfismos] Seja V uma vizinhança do 0 em E , e seja $f : V \rightarrow E$ tal que f seja um difeomorfismo de classe C^k , $k \geq 1$ onde 0 é um ponto fixo hiperbólico de f .

Então $\exists$ uma vizinhança U do 0 e um homeomorfismo $h : U \rightarrow h(U)$ onde $h(U)$ é uma vizinhança do 0 em E tal que $h(U) \subset V$, tal que

$$h \circ L(z) = f \circ h(z), \quad \forall z \in U.$$

Onde $L = Df(0)$.

Demonstração:

Definamos:

$$\phi(z) = f(z) - L(z).$$

Nós temos os seguintes fatos

- $\phi(0) = 0$
- $D\phi(0) = Df(0) - L = 0$.

Pelo o Lema 3.16 $\forall \epsilon > 0 \exists$ uma vizinhança $\tilde{U}$ de 0, e uma $\tilde{\phi}$ tal que

$$\tilde{\phi} : E \rightarrow E.$$

Tal que $Lip(\tilde{\phi}) < \epsilon$ tal que

$$\tilde{\phi}|_{\tilde{U}} = \phi|_{\tilde{U}}.$$

Consideremos a função

$$\tilde{f} = L + \tilde{\phi}.$$

Note que:

$$\tilde{f}|_{\tilde{U}} = f|_{\tilde{U}}.$$

Pelo o Teorema anterior 3.24 existe um $\tilde{h} : E \rightarrow E$ homeomorfismo tal que

$$\tilde{h} \circ L = \tilde{f} \circ \tilde{h}$$

Se definimos

$$h = \tilde{h}|_{\tilde{U}}$$

Dai nós obtemos:

$$h \circ L = f \circ h$$

■

Observação 3.26. Se no teorema de Hartman o ponto fixo de f pode ser um $a \neq 0$ e então nós podemos por no origem. Com efeito tomamos $T : E \rightarrow E$, $T(x) = x + a$ e consideramos $g = T^{-1}fT$, g satisfaz as condições do teorema.

Se k é tal que $kL = gk$, localmente, onde $L = f$.

Observação 3.27. Note que pelo teorema de Hartman-Grobman para difeomorfismos, obtemos como Corolário que todo ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo é isolado. Pois $Df(0)$ só tem como ponto fixo o zero isso segue do fato que $Df(0)$, e hiperbólica, então em $h(U)$ f tem um ponto fixo.

Teorema 3.28 (Estabilidade local de pontos fixos hiperbólicos). Seja $f : U \subset \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^r , $r \geq 1$ tal que $0 \in V$ e $Df(0)$ é invertível tal que 0 é um ponto fixo hiperbólico de f .

Então existe uma vizinhança $\mathcal{N}$ de f em $C^1(V, E)$ tal que toda função $g \in \mathcal{N}$ é localmente conjugada a f em 0 , isto é.

Existe um aberto $O \in U$ e um homeomorfismo $h : U \rightarrow E$ tal que

$$h \circ g(z) = f \circ h \quad \forall z \in U.$$

Além disso g possui um único ponto fixo hiperbólico proximo do 0 .

Demonstração:

Pelo Lema 3.16 temos que, $\forall \epsilon > 0 \exists \phi : E \rightarrow E, \text{Lip}(\phi) < \epsilon$ e uma vizinhança $0 \in U$ tal que

$$f(z) = (\underbrace{L_f}_{(Df)_0} + \phi)(z) \forall z \in U.$$

Seja $g \in C^1(V, E)$ tal que g é bem proxima de f em $C^1(V, E)$.

Como $g \in C^1(V, E)$ então $\forall \epsilon > 0 \exists \psi : E \rightarrow E, \text{Lip}(\psi) < \epsilon$, tal que

$$g(z) = (L_g + \psi)(z) \quad \forall z \in U.$$

Como g esta bem proxima de f então

$$|L_f - L_g| < \epsilon.$$

Logo

$$\begin{aligned} g &= L_g + \psi \\ &= L_f + \underbrace{(L_g - L_f)}_{\tilde{\psi}} + \psi. \end{aligned}$$

Onde $\text{Lip}(\tilde{\psi}) \leq \epsilon + \epsilon \leq 2\epsilon$.

Pelo o Teorema de H.G 3.25 existe um h_g homeomorfismo em uma vizinhança $0 \in U_g$ tal que

$$h_g \circ L_f = g \circ h_g$$

em U_g .

Mas pelo o teorema de Hartman $\exists$ homeomorfismo h_f tal que

$$h_f \circ L_f = f \circ h_f.$$

Então

$$L_f = h_g^{-1} \circ g \circ h_g.$$

Em uma vizinhança de 0

Então

$$h_f \circ h_g^{-1} \circ g \circ h_g = f \circ h_f.$$

Em uma vizinhança do 0. Então

$$\underbrace{h_f \circ h_g^{-1}}_h \circ g \circ \underbrace{h_g \circ h_f^{-1}}_{h^{-1}} = f.$$

Para uma vizinhança do 0 ■

Note que pelo Teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismos, obtemos como Corolário que todo ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo é isolado. A próxima proposição mostra que tal fato vale para pontos fixos um pouco mais gerais que os hiperbólicos.

Proposição 3.29. *Seja $f : U \subset E \rightarrow E$ uma aplicação de classe C^1 limitada e com derivada limitada no aberto U contido em um espaço de Banach E . Se $p = p_f \in U$ é um ponto fixo de f e $1 \notin Sp(Df_p)$, então toda g C^1 próxima a f possui um ponto fixo p_g . Além disso, existe uma vizinhança $V \subset U$ de p tal que p_g é o único ponto fixo de g em V .*

Demonstração:

Começamos por considerar o espaço vetorial $C_b^1(U, E)$ das aplicações de classe C^1 com domínio em U e imagem contida em E , limitadas e com respectivas derivadas limitadas. Tal espaço, dotado da norma $|\cdot|_1$ definida por

$$\max\{\sup_{x \in U}\{|f(x)|\}, \sup_{x \in U}\{\|Df(x)\|\}\}, \forall f \in C_b^1(U, E),$$

é um espaço de Banach. Duas aplicações em $C_b^1(U, E)$ estão próximas (na norma $|\cdot|_1$) se elas mesmas e suas derivadas são uniformemente próximas ponto a ponto. Seja $\delta > 0$. Definamos o operador

$$F : B(f, \delta) \times B(p, \delta) \rightarrow E,$$

dado por

$$F(g, x) := g(x) - x.$$

Denotaremos $B(f, \delta) \times B(p, \delta)$ da topologia produto. Nesta topologia, F é contínua. Com

efeito, dados $(g, x) \in B(f, \delta) \times B(p, \delta)$ e $(h, y) \in B(f, \delta) \times B(p, \delta)$ temos

$$\begin{aligned}
 |F(g, x) - F(h, y)| &= |g(x) - x - h(y) + y| \\
 &\leq |g(x) - g(y)| + |g(y) - h(y)| + |x - y| \\
 &\leq \sup_{z \in B(p, \delta)} \{ \|Dg(z)\| \} |x - y| + |g - h|_1 + |x - y| \\
 &\quad \text{Teorema do valor médio} \\
 &\leq \sup_{|g|_1 < |f|_1 + \delta} (1 + |f|_1 + \delta) |x - y| + |g - h|_1 \\
 &\leq (1 + |f|_1 + \delta) |x - y| + (1 + |f|_1 + \delta) |g - h|_1 \\
 &\quad \text{1 + |f|_1 + \delta > 1} \\
 &\leq (1 + |f|_1 + \delta) \max\{|g - h|_1, |x - y|\} \\
 &= (1 + |f|_1 + \delta) d((g, x), (h, y))
 \end{aligned}$$

implicando que F é lipschitziana e por tanto contínua.

Tem-se que

$$F(g + w, x) := (g + w)(x) - x = g(x) - x + w(x) = F(g, x) + w(x).$$

Portanto, dado $(g, x) \in B(f, \delta) \times B(p, \delta)$, F tem derivada parcial dada por $\partial_1 F(g, x)w = w(x)$. Ademais, essa aplicação derivada parcial $(g, x) \rightarrow \partial_1 F(g, x)$ é contínua.

Note que a aplicação $F : C_b^1(U, E) \rightarrow E$, definida por $F(w) = w(x)$ é linear contínua.

Realmente

$$\begin{aligned}
 \sup_{|w|_1=1} |(\partial_1 F(g, x) - \partial_1 F(\hat{g}, \hat{x})) \cdot w| &= |w(x) - w(\hat{x})| \\
 &\leq |w|_1 \cdot |x - \hat{x}| \\
 &\leq \max |g - \hat{g}|_1, |x - \hat{x}| \\
 &= d((g, x), (\hat{g}, \hat{x})).
 \end{aligned}$$

A derivada parcial em relação a x em cada par (g, x) é a aplicação linear contínua de E em E dada por

$$\partial_2 F(g, x) = Dg(x) - I.$$

Como função de g e x , tal derivada é claramente contínua. De fato, seja fixado $(g, x) \in B(f, \delta) \times B(p, \delta)$. Dado $\epsilon > 0$ seja $\hat{\delta} > 0$ tal que $\|Dg(x) - Dg(\hat{x})\| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo $\hat{x}$ com $|x - \hat{x}| < \hat{\delta}$. Daí,

$$\begin{aligned}
 \|Dg(x) - I - (D\hat{g}(\hat{x}) - I)\| &\leq \|Dg(x) - D\hat{g}(\hat{x})\| + \|Dg(\hat{x}) - D\hat{g}(\hat{x})\| \\
 &\leq \frac{\epsilon}{2} + \|g - \hat{g}\|_1 \\
 &< \epsilon,
 \end{aligned}$$

desde que tomemos $d((g, x), (\hat{g}, \hat{x})) < \min\{\hat{\delta}, \frac{\epsilon}{2}\}$. Isso mostra nossa afirmação de que $\partial_2 F(g, x)$ é contínua.

Como ambas derivadas parciais são contínuas, segue-se que F é de classe C^1 .

Temos que $F(f, p) = 0$ e $\partial_2 F(f, p) = Df_p - I : E \rightarrow E$ é invertível porque $1 \notin \text{Spec}(Df_p)$.

Pelo teorema da função implícita, para $0 < \delta_0 \leq \delta$ pequeno, 0 é valor regular de F , e dado $g \in B(f, \delta_0)$, existe um único $p = p_g \in B(p, \delta)$ tal que

$$F(g, p_g) \Rightarrow g(p_g) - p_g = 0 \Rightarrow g(p_g) = p_g.$$

Então p_g é ponto fixo de g . ■

3.2 Teorema de Hartamn para Campos

Definição 3.30. (*Singularidade hiperbólica*). Dado um campo de vetores $C^k X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, uma singularidade $p \in U$ de X é dita hiperbólica se a equação determinada pela sua parte linear $DX(p) \in L(\mathbb{R}^m)$ é hiperbólica (isto é, se os autovalores de $DX(p)$ têm parte real não nula).

Teorema 3.31 (Teorema de Hartman Grobman para campos). Seja $V \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $X : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe $C^k (k \geq 1)$ e p uma singularidade hiperbólica de X . Seja $L = DX_p$. Então X é localmente conjugado (topologicamente) conjugado (via um homomorfismo h) a L , em uma vizinhança de p e zero.

Demonstração:

Sem perda de generalidade supomos que $p = 0$.

Seja $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo C^k como no Lema 3.19. Como $Y = X$ em uma vizinhança U do zero, temos que a identidade conjuga localmente X , e Y . Nós temos que a conjugação é uma relação de equivalência, nos resta mostrar que os fluxos Y_t e L_t são conjugados, $\forall \in \mathbb{R}$. Como $(DY_1)_0 (DY)_0$ do difeomorfismo Y_1 no origem é $e^L = L_1$. De fato, escrevendo $\phi(t, x) = Y_t(x)$ temos que

$$(DY_t(x)) = \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}$$

é solução de

$$\begin{cases} \dot{\xi} = DY(\phi(t, x)).\xi \\ Z(0) = I_m \leftarrow \text{matriz identidade } m \times m \end{cases}$$

Como $Y(0) = 0$ então $\phi(t, 0) = 0$, e a equação acima fica :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = DY(0).\xi \\ Z(0) = I_m \leftarrow \text{matriz identidade } m \times m, \end{cases}$$

o que implica que $(DY_t)(0) = e^{tL}$ então $(DY_1)(0) = e^L = L_1$.

Logo, o difeomorfismo $Y_1 = L_1 + \phi_1$ têm ao origem como ponto fixo hiperbólico, pelo Teorema 3.24, existe um homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h \circ Y_1 = L_1 \circ h(x)$. Mostraremos que

$$h \circ Y_t = L_t \circ h, \forall t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

O que significa que Y e L são conjugados.

Com efeito. Definiremos para um $t \in \mathbb{R}$ fixo arbitrário um homeomorfismo $\tilde{h}$

$$\tilde{h} = Y_t(h(e^{-tL}x)).$$

Como $\tilde{h}$ é composição de homeomorfismo tem-se que $\tilde{h}$ é um homeomorfismo.

Afirmacão 1: $h = \tilde{h}$

Com efeito:

$$\begin{aligned} Y_1(\tilde{h}(x)) &= Y_1(Y_t(h(L_{-t}(x)))) \\ &= Y_t(h(Y_1(L_{-t}(x)))) \\ &= Y_t(h(L_1(L_{-t}(x)))) \\ &= L_t(h(L_{-t}(Y_1(x)))) = \tilde{h} \circ Y_1(x). \end{aligned}$$

Pelo unicidade do Teorema 3.24 temos que $h = \tilde{h}$

Afirmacão 2:

$$h \circ Y_t = L_t \circ h, \quad \forall t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Com efeito:

$$\begin{aligned} \tilde{h} \circ Y_t(x) &= Y_t \circ h(L_t \circ L_{-t}(x)) \\ &= Y_t(h(x)) \underbrace{=}_{h=\tilde{h}} Y_t(\tilde{h}(x)). \end{aligned}$$

Como $h = \tilde{h}$ se tem provada a afirmação, e como nós pegamos um $t \in \mathbb{R}$ arbitrário temos mostrado o teorema. ■

Observação 3.32. *Se x é um ponto fixo não-hiperbólico, então não podemos obter tanta informação apenas via linearização. Para tal observação mostramos dois exemplos, um tirado de Rosas [21], e outro de Burns [2].*

Exemplo 3.33. *Consideremos a seguinte equação diferencial*

$$x' = ax^2,$$

então a origem é um ponto fixo com $Df(0) = 0$, logo a origem é Lyapunov-estável segundo o sistema linear $y' = Df(0)y = 0$, mas para o sistema não-linear, ela pode ser tanto assintoticamente estável, se $a < 0$, quanto instável, se $a > 0$. Em geral, no caso em que x é um ponto fixo não-hiperbólico, procuramos simplificar o sistema aproximando-o

por um sistema de ordem maior, quadrática no caso acima. Isso nos leva a certas formas canônicas, chamadas de formas normais, para o estudo do sistema próximo a esses pontos fixos não-hiperbólicos.

Exemplo 3.34. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (x^2(y^2 + 1), y)$. Provaremos que $(0, 0)$ é um ponto fixo de f que não é hiperbólico. Provaremos que não existe uma função linear $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f \circ h = h \circ A$ para algum local homeomorfismo de $(0, 0)$. Em outras palavras, a hiperbolicidade no teorema de Hartman-Grobman é essencial.*

Demonstração:

1. Tem-se que $f(0, 0) = (0, 0)$, daí é um ponto fixo.

2. Tem-se que

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x(y^2 + 1) & x^2 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

daí nós obtemos que 0,1 são os autovalores de $Df(0, 0)$, então pela definição se tem que $(0, 0)$ não é hiperbólico.

3. Agora mostraremos que não existe a transformação linear A .

Suponhamos que exista uma transformação linear A tal que

$$f \circ h = A \circ h. \quad (3.3)$$

Seja $h = (h_1, h_2)$ de (3.3) obtemos

$$(h_1(x, y)^2(h_2(x, y)^2 + 1), h_2(x, y)) = (h_1(A(x, y)), h_2(A(x, y))). \quad (3.4)$$

de (3.4) obtemos:

$$h_1(x, y)^2(h_2(x, y)^2 + 1) = h_1(A(x, y)). \quad (3.5)$$

$$h_2(x, y) = h_2(A(x, y)). \quad (3.6)$$

Resolver-se (3.5) nós podemos ver como uma equação de segundo grau:

$$h_1(x, y)^2(h_2(x, y)^2 + 1) - h_1(A(x, y)) = 0, \quad (3.7)$$

fazendo mudança de variáveis $h_1(x, y) = z, h_2(x, y)^2 + 1 = a, -h_1(A(x, y)) = c$, obtemos:

$$az^2 + c = 0. \quad (3.8)$$

Como h_1 é função então $h_1(x, y)$ assume um valor daí (3.8) só tem uma solução então o discriminante é zero, então $4ac = 0$, então obtemos:

$$4(h_2(x, y)^2 + 1)h_1(A(x, y)) = 0. \quad (3.9)$$

Como $h_2(x, y)^2 + 1 > 0$, então

$$h_1(A(x, y)) = 0. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.24) nós obtemos $h_1(x, y)^2(h_2(x, y)^2 + 1) = 0$, daí $h_1(x, y) = 0$

Nós temos que f não é injetora pois $f(x, 0) = (x^2, 0)$, então f não é injetora em uma vizinhança do zero, daí temos que uma vizinhança do zero A não é injetora em uma vizinhança do zero, então existe um $(a, b) \neq (0, 0)$ tal que $A(a, b) = (0, 0)$.

Daí por (3.6) nós temos que $h(a, b) = h(A(a, b)) = h(0, 0)$, e como $h_1(a, b) = (0, 0)$, daí teríamos que $h(0, 0) = h(a, b)$, portanto h não é injetora o que contradiz o fato que h é um homeomorfismo em uma vizinhança do zero.

■

Observação 3.35. *Hartman fornece um exemplo onde mostra que h em geral não é de classe C^r , $r \geq 1$, ainda sendo f de classe C^∞ , nosso objetivo na próxima seção é encontrar condições para que a conjugação seja de classe C^r , $r \geq 1$. Na próxima seção que tem por objetivo principal é estudar condições para que a conjugação seja suave, principalmente estudaremos as condições de Sternberg. Nos seguintes exemplos apresentamos dois exemplos um fornecido por Hartman e outro por Sternberg que mostra o falado acima.*

Exemplo 3.36 (Sternberg). *Neste exemplo mostraremos um mapa que não cumpre a condição de Sternberg e que não admite uma conjugação de classe C^2*

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y + ax^2)$, não pode ser C^2 linearizável para qualquer $\lambda \in (0, 1)$ e $a \neq 0$ numa vizinhança do $(0, 0)$.

Demonstração:

Primeiramente temos que encontrar os pontos fixos, então temos que resolver a equação $f(x, y) = (x, y)$, o que é o mesmo resolver a equação $(x, y) = (\lambda x, \lambda^2 y + ax^2)$ então obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$x = \lambda x, \quad (3.11)$$

$$y = \lambda^2 y + ax^2. \quad (3.12)$$

Daí obtemos que $(0,0)$ é um ponto fixo.

Não é difícil ver que

$$f'(0,0) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

Daí temos que $\text{Spec}(f'(0,0)) = \{\lambda, \lambda^2\}$ então $\text{Spec}(f'(0,0)) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$.

Então $(0,0)$ é um ponto fixo hiperbólico de f .

Suponhamos que f seja C^2 linearizável numa vizinhança de $(0,0)$ então existe um $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ de classe C^2 tal que $(0,0) \in U$ e $(0,0) \in V$ e $h \circ f = f'(0,0) \circ h$. Como h é uma C^2 -conjugação então, :

$$h \circ f = f'(0,0) \circ h,$$

Se $h = (h_1, h_2)$, então

$$h \circ f(x, y) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(x, y) \\ h_2(x, y) \end{bmatrix},$$

daí obtém-se

$$(h_1, h_2) = (\lambda h_1(x, y), \lambda^2 h_2(x, y)), \quad (3.13)$$

então tem-se :

$$h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2) = \lambda^2 h_2(x, y). \quad (3.14)$$

Derivando (3.14) com respeito a x tem-se :

$$\lambda^2 \partial_x h_2(x, y) = \lambda \partial_x h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2) + 2ax \partial_y h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2). \quad (3.15)$$

Tomando $x = 0, y = 0$ tem-se que

$$\lambda \partial_x h_2(0, 0) = \lambda^2 \partial_x h_2(0, 0).$$

Resolvendo a equação:

$$0 = (\lambda^2 - \lambda)(\partial_x h_2(0, 0)).$$

Tem-se que

$$\lambda^2 - \lambda = 0$$

ou

$$\partial_x h_2(0, 0) = 0.$$

Se $\lambda^2 - \lambda = 0$ então $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$ isso não pode ser pois $0 < \lambda < 1$, então daí tem-se que

$$\partial_x h_2(0, 0) = 0. \quad (3.16)$$

Derivando (3.15) con respeito a x , tem-se que

$$\begin{aligned} \lambda^2 \partial_{xx} h_2(x, y) &= [\lambda^2 \partial_{xx} h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2) + 2ax \partial_{yx} h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2)] \\ &\quad + 2a \partial_y h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2) + 2ax [\partial_{xy} h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Tomando $x = 0, y = 0$ obtemos

$$2ax \partial_{yx} h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2) = 0$$

e

$$2ax [\partial_{xy} h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2)] = 0,$$

então de 3.17, obtém-se :

$$\lambda^2 \partial_{xx} h_2(x, y) = \lambda^2 \partial_{xx} h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2) + 2a \partial_y h_2(\lambda x, \lambda^2 y + ax^2). \quad (3.18)$$

De 3.18 obtém-se

$$2a \partial_y h_2(0, 0) = 0,$$

$$\partial_y h_2(0, 0) = 0. \quad (3.19)$$

Então de (3.16) e (3.19) obtém-se que $h'(0,0)$ não é invertível pois

$$h'(0,0) = \begin{bmatrix} \partial_x h_1(0,0) & \partial_y h_1(0,0) \\ \partial_x h_2(0,0) & \partial_y h_2(0,0) \end{bmatrix},$$

e como $\partial_x h_2(0,0) = 0$, $\partial_y h_2(0,0) = 0$, tem-se que o determinante do Jacobiano é igual a zero o que é uma contradição com o fato de que h é um difeomorfismo em uma vizinhança do zero, então f não pode ter uma conjugação de classe C^2 . ■

Exemplo 3.37 (Hartman). *Neste exemplo mostra-se uma função analítica f em particular de classe C^∞ , que tem como ponto fixo ao 0, mais não é C^1 conjugada por $Df(0)$ i.e não existe um difeomorfismo h de classe C^1 tal que $h \circ f = Df(0,0,0) \circ h$.*

Demonstração:

Seja :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto f(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3), \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= ax, \\ f_2(x,y,z) &= ac(y + \epsilon xz), \\ f_3(x,y,z) &= cz. \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $a = e^\alpha$ e $c = e^{-\gamma}$, a sim $a > 1 > c > 0$ e $ac > 1$.

Tem-se que:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ ac(y + \epsilon xz) & ac & \epsilon x \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Então

$$Df(0,0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ ac & & \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Nós olhamos que $Df(0,0,0)$ não cumpre a condição de sternberg, pois temos que os autovalores de $Df(0,0,0)$ são a , c , ac , e tem-se que $ac = a.c$.

Suponhamos pelo absurdo que f tenha uma conjugação de classe C^1 , então existe um difeomorfismo h tal que: $f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ Df(0,0,0)$, se $h^{-1} = (h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3^{-1})$, então mostraremos que ou a derivada parcial $h_2^{-1}{}_u(0,0,w)$ não existe para todo $w \neq 0$ ou $h_2^{-1}{}_w(u,0,0)$ não existe para todo $u \neq 0$.

As considerações abaixo são par $v = 0$, $(|u|, |w|)$ pequenos.

Nós denotaremos por $J(u, w) = J(u, 0, w)$ se $J = (h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3^{-1})$. Nós temos que $f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ Df(0,0,0)$ daí tem-se que

$$(ah_1^{-1}, ac(h_2^{-1} + \epsilon h_2^{-1}h_3^{-1}), ch_3^{-1}) = (h_1^{-1}(au, acv, cw), h_2^{-1}(au, acv, cw), h_3^{-1}(au, acv, cw)).$$

Então temos que para $v=0$ obtemos

$$ah_1^{-1} = h_1^{-1}(au, cw), ac(h_2^{-1} + \epsilon h_2^{-1}h_3^{-1}) = h_2^{-1}(au, cw), ch_3^{-1} = h_3^{-1}(au, cw)$$

Fazendo indução obtemos

$$a^n h_1^{-1} = h_1^{-1}(a^n u, c^n w). \quad (3.21)$$

$$a^n c^n (h_2^{-1} + n\epsilon h_1^{-1}h_3^{-1}) = h_2^{-1}(a^n u, c^n w). \quad (3.22)$$

$$ec^n h_3^{-1} = h_3^{-1}(a^n u, c^n w). \quad (3.23)$$

Para $|u|, |w|$ pequenos.

Por (3.21) obtemos que $h_1^{-1}(0, w) = a^{-n}h_1^{-1}(0, c^n w) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ daí obtemos $h_1^{-1}(0, w) \equiv 0$.

Por (3.23) obtemos $h_3^{-1}(u, 0) = 0$. Como $ac > 1$, obtemos que $h_2^{-1}(0, w) = 0$.

Multiplicando (3.23) por c^{-n} e fazendo a mudança de variável u por u/a^n para obter $a^n h_2^{-1}(u/a^n, w) + n\epsilon h_1^{-1}(u, c^n w)h_3^{-1}(u/a^n, w) = c^{-n}h_2^{-1}(u, c^n w)$.

Suponhamos que exista

$$h_2^{-1}{}_u(0, w) \text{ e } h_2^{-1}{}_w(u, 0). \quad (3.24)$$

Então

$$h_2^{-1}{}_u(0, w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2^{-1}((0, w) + t(u, 0)) - g(0, w)}{t},$$

tem-se que $h_2^{-1}(0, w) = 0$, então obtém-se

$$h_2^{-1}{}_u(0, w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2^{-1}((tu, w))}{t}.$$

Como $a > 1$, então $x_n = (\frac{1}{a})^n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, então pela caracterização do limite pela sucessões temos que:

$$h_2^{-1}{}_u(0, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_2^{-1}(\frac{u}{a^n}, w)}{\frac{1}{a^n}}.$$

$$h_2^{-1}{}_u(0, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, w\right).$$

Também temos que

$$a^n c^n (h_2^{-1} + n \epsilon h_1^{-1}(u, 0) h_3^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right)) = h_2^{-1}(a^n u, c^n w).$$

Para $w=0$, obtemos

$$a^n c^n (h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) + n \epsilon h_1^{-1}(u, 0) h_3^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right)) = h_2^{-1}(a^n u, 0).$$

Tem-se que

$$h_1^{-1}(u, 0) h_3^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) = 0,$$

daí obtém-se que

$$a^n (h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right)) = c^{-n} h_2^{-1}(a^n u, 0).$$

Como :

$$h_2^{-1}{}_u(0, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right).$$

Então

$$h_2^{-1}{}_u(0, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{-n} h_2^{-1}(u, 0).$$

Então

$$h_2^{-1}(u, 0) = h_2^{-1}(u, 0) c^{-n} c^n.$$

Logo tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_2^{-1}(u, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{-n} h_2^{-1}(u, 0) \lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0.$$

Daí tem-se $h_2^{-1}(u, 0) = 0$.

Como $h_2^{-1}(u, 0)_w$ existe então

$$h_2^{-1}(u, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2^{-1}((u, 0) + t(0, w)) - h_2^{-1}(u, 0)}{t}.$$

Como: $c < 1$, então $x_n = c^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Como $h_2^{-1}(u, 0) = 0$, então

$$h_2^{-1}{}_u(u, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_2^{-1}(u, c^n w)}{c^n}.$$

De (4.20) tem-se :

$$\frac{1}{n} a^n (h_2^{-1} + \epsilon h_1^{-1}(u, 0) h_3^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right)) = \frac{1}{n} c^{-1} h_2^{-1}(a^n u, c^n w)$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ obtemos

$$\epsilon h_1^{-1}(u, 0) h_3^{-1}(0, w) = 0,$$

o qual é impossível para $uw \neq 0$. Por exemplo se $h_1^{-1}(u, 0) = 0$ se $u \neq 0$, então por (3.22) obtemos $h_2^{-1}(u, 0) = 0$ e de (3.23) obtemos $h_3^{-1}(u, 0) = 0$, daí obtemos que

$$h_1^{-1} = h_2^{-1} = h_3^{-1} = 0,$$

quando (u, v, w) é o ponto $(u, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$ o que contradiz o fato que h^{-1} é injetora. Sem $h_3^{-1}(0, w) = 0$, pelo feito anteriormente tem-se que $h_1^{-1}(0, w) = 0, h_2^{-1}(0, w) = 0$, obtemos que

$$h_1^{-1} = h_2^{-1} = h_3^{-1} = 0$$

quando (u, v, w) é o ponto $(0, 0, w) \neq (0, 0, 0)$ o que contradiz o fato que h^{-1} é injetora. Então não existe uma C^1 conjugação que linearize f numa vizinhança do zero. ■

Exemplo 3.38 (Hartman II). *Neste exemplo mostramos uma equação diferencial que não cumpre a condição de Sternberg e que não admite uma C^1 conjugação com sua derivada.*

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x \\ \dot{y} &= (\alpha - \gamma)y + \epsilon xz \\ \dot{z} &= -\gamma z \end{cases}$$

Onde $\alpha > \gamma > 0$ e $\epsilon \neq 0$.

Fazendo as contas nós encontramos que a função $F(x = (x_1, x_2, x_3)) = \varphi(1, x)$ do sistema é dado por:

$$F(x_1, x_2, x_3) = (ax, ac(y + \epsilon xz), cz),$$

Onde $a = e^\alpha$ e $c = e^{-\gamma}$, daí tem-se que $a > ac > 1 > c > 0$

Temos que

$$L = DF(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Se supomos que existe uma C^1 linearização para o sistema, então existiria um

$H : U \rightarrow H(U)$ um difeomorfismo de classe C^1 tal que

$$H(\varphi(t, x)) = e^{tL} H(x).$$

Em particular se para $t = 1$:

$$H(\varphi(1, x)) = e^L H(x)$$

O que contradiz o exemplo anterior. ■

O proximo Lema relaciona as singularidades hiperbólicas de campos e pontos fixos hiperbólicos.

Lema 3.39. *Seja $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo de vetores, e ϕ_t o seu fluxo. Então p é singularidade Hiperbólica de X se, somente se p é o ponto fixo hiperbólico do difeomorfismo ϕ_1 , tempo 1 de X .*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Se p é um ponto fixo do tempo 1 de X e é Hiperbólico, em particular, pela estabilidade de pontos fixos hiperbólicos, é isolado. Note que p não pode pertencer a uma órbita periódica de período 1, pois em tal situação, os outros pontos da órbita periódica seriam pontos fixos para f , e p não seria ponto fixo isolado.

Logo, como $\phi(n, p) = p, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\phi(., p)$ não é periódica regular, segue-se da classificação das trajetórias de um campo que $\phi(t, p) = p, \forall p \in \mathbb{R} \Rightarrow p$ é singularidade(isolada) de X . Mostremos que p é S singularidade hiperbólica, ou seja, que os elementos de $\text{Spec}(DX(p))$ têm parte real não nula. Da dependência diferenciável em relação às condições iniciais temos que $\partial_x \phi$ é solução de $Z = DX(p).Z; Z_0 = I$. Por tanto, $\partial_x \phi(x, t) = e^{t \cdot DX(p)}$, o que nos dá

$$Df_p = \partial_x \phi(1, p) = e^{DX(p)},$$

e portanto, o espectro $S_p(Df_p) = e^{S_p(DX(p))}$, implicando que $|\lambda| \neq 1, \forall \lambda \in S_p(Df_p)$.

($\Rightarrow$) Se p é singularidade Hiperbólica de X , é imediato que p é ponto fixo de $f = \phi_1$. Como vimos acima, da dependência diferenciável em relação às condições iniciais, temos que $\partial_x \phi$ é solução de $Z = DX(p).Z; Z_0 = I$. Por tanto, $\partial_x \phi(x, t) = e^{t \cdot DX(p)}$, o que nos dá $Df_p = \partial_x \phi(1, p) = e^{DX(p)}$,

e portanto, o espectro $S_p(Df_p) = e^{S_p(DX(p))}$, implicando que $|\lambda| \neq 1, \forall \lambda \in S_p(Df_p)$, isto é, p é ponto fixo hiperbólico de f ■

3.3 Aplicação do teorema do Hartman Grobman para a dinâmica Populacional

Na maioria dos casos não podemos obter soluções explícitas de EDOs, o qual denominamos o método analítico das soluções. Um resultado muito utilizado nestes casos que o Teorema de Hartman-Grobman que garante a equivalência do comportamento das soluções do sistema não linear com o linearizado.

Consideraremos os modelos unidimensionais de Malthus e Verhulst.

1. Crescimento Exponencial ou Modelo de Malthus : Seja $y = y(t)$ a população da espécie dada no instante t . A hipótese mais simples sobre o crescimento populacional e que a taxa de variação de y é proporcional ao tamanho da população y , isto é,

$$\frac{dy}{dt} = ry \quad (3.25)$$

Onde r é a constante de proporcionalidade. Resolvendo a equação (3.25) com a condição inicial $y(0) = y_0$, obtemos $y = y_0 e^{rt}$. Biologicamente nos diz que haverá explosão ao demográfica, caso não haja controle.

2. Crescimento Logístico ou Verhulst : Aqui existe um fator limitante em (3.25) o qual pode ser representado por uma função $h(y)$ e assim obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y; \quad (3.26)$$

onde $h(y) > 0$ quando y for pequeno e $h(y) < 0$ quando y for grande . Uma função que tem essa propriedade é $h(y) = r - ay$, onde a é constante positiva. Substituindo essa função em (3.26), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y; \quad (3.27)$$

denominada Equação de Verhulst.

Nós temos o modelo de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' &= ax - \alpha xy \\ y' &= -by + \beta xy \end{cases}$$

Onde

- x : densidade de presas;
- y : densidade de predadores;
- a : taxa de crescimento de presas;
- b : taxa de mortalidade de predadores;
- α : taxa de mortalidade das presas devido a interação da presa com o predador;
- β : taxa de conversão de biomassa de presas capturadas em predadores.

Estudaremos o seguinte modelo de competição.

Exemplo 3.40. *Consideremos o sistema de competição.*

$$\begin{cases} x' &= x(1 - x - y) \\ y' &= y(0,75 - y - 0,5x) \end{cases}$$

Onde x e y são positivos e a constante 1 multiplicando a variável y na primeira e $0,5$ multiplicando a variável na segunda equação representam a interferência de uma espécie na outra.

- Vamos encontrar os pontos críticos (equilíbrio do sistema) resolvendo o sistema de equações algébricas.

$$x(1 - x - y) = 0$$

$$y(0,75 - y - 0,5x) = 0$$

Daí, obtemos que $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,0.75)$ e $P_4 = (0.5,0.5)$ são pontos de equilíbrio.

- Analisaremos os pontos críticos utilizando o teorema de Hartman-Grobman. Seja $P_i = (\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, a matriz jacobiana é dada por:

$$J(P_i) = \begin{pmatrix} 1 - 2\bar{x}_i - \bar{y}_i & -\bar{x}_i \\ -0.5\bar{y}_i & 0.75 - 2\bar{y}_i - 0.5\bar{x}_i \end{pmatrix}.$$

Assim:

- $J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix}$ Que nos dá os autovalores $C_1 = 1$ e $C_2 = 0.75$.

Logo os autovalores são reais distintos positivos daí $P_1 = (0,0)$ é um ponto instável.

- $J(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}$ Então os autovalores são negativos e positivos, daí $P_1 = (1,0)$ é ponto sela.
- $J(0,0.75) = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0.375 & -0.75 \end{pmatrix}$ Então os autovalores são negativos e positivos, daí $P_3 = (0,0.75)$ é um ponto sela.
- $J(0.5,0.5) = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 0.25 & -0.5 \end{pmatrix}$ Então os autovalores são negativos, daí P_4 é um ponto estável.

Linearização Suave

Nesta seção apresentamos o Teorema de Linearização suave para contrações seguindo o trabalho de Nelson [12]. Vimos na seção anterior que o sistema

$$\begin{cases} x' &= ax \\ y' &= (a-b)y + cxz \\ z' &= -bz \end{cases}$$

onde $a > b > 0$ e $c \neq 0$, não existe uma C^1 -linearização perto do origem. Nós também temos que o sistema

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -2y + x^2 \end{cases}$$

admite uma C^1 -linearização numa vizinhança do zero, mais não admite uma C^2 -linearização. De fato, para obter a linearização suave nós necessitamos algumas delicadas estimativas.

4.0.1 Transformação de Campos Vetoriais

Definição 4.1. *Sejam U, V abertos de um espaço de Banach E .*

1. *Se $R : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo de U então nós definimos a transformada de campo de vetores $Y = (R_*)X$ sobre V por, $Y : V \rightarrow E$ e, $Y(y) = DR(R^{-1}y)X(R^{-1}y)$.*
2. *Suponhamos que $X : U \rightarrow E$ e $Y : V \rightarrow E$ são dois campos vetoriais. Nós dizemos que o sistema $x' = X(x)$ e $y' = Y(y)$, são diferenciáveis equivalentes se existe um*

difeomorfismo $R : U \rightarrow V$, tal que

$$Y = R_*(X).$$

Nós também dizemos que os campos vetoriais X e Y são equivalentes diferenciáveis quando isso acontece.

Exemplo 4.2. Suponhamos que Q é uma matriz $n \times n$ invertível, e seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = Qx$, (tem-se que $f^{-1}(x) = Q^{-1}x$). Nós temos que $f'(x) = Q$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Se $X : U \rightarrow E$ é um campo vetorial qualquer, e seja $V = f(U)$, então o campo vetorial a transportado $f_*(X)(y) = QX(Q^{-1}(y)) \forall y \in V$. Um caso particular é quando estudamos um campo linear

$$X(x) = Ax.$$

Onde A é matriz $n \times n$. Então o campo vetorial transformado é

$$f_*(X)(y) = QAQ^{-1}y.$$

A razão da definição de transformação de campos vetoriais é dado no seguinte teorema.

Teorema 4.3 (Equivalência diferenciável). Seja E um espaço de Banach, U, V abertos de E e sejam $X : U \rightarrow E$, $Y : V \rightarrow E$ campos vetoriais, e suponhamos que $R : U \rightarrow V$ seja um difeomorfismo. Então São equivalentes as seguintes afirmações:

(a) $R_*(X) = Y$.

(b) se $\alpha : I \rightarrow U$ uma curva integral de X então a curva

$$\beta(t) = R(\alpha(t)),$$

é uma curva integral de Y .

Demonstração:

Assumindo (a). Suponhamos que $\alpha : I \rightarrow U$ seja uma curva integral de X . Para mostrar que $\beta(t) \equiv R(\alpha(t))$, nós faremos uso da regra da cadeia nós temos que

$$\alpha'(t) = X(\alpha(t)),$$

Além disso

$$\begin{aligned}
 \beta'(t) &= \frac{d}{dt}(R \circ \alpha)(t) \\
 &= R'(\alpha(t))\alpha'(t) \\
 &= R'(\alpha(t))X(\alpha(t)) \\
 &= R'(R^{-1}(\beta(t)))X(R^{-1}(\beta(t))) \\
 &= R_*(X)(\beta(t)) \\
 &= Y(\beta(t)).
 \end{aligned}$$

Então pelo feito acima obtemos $\beta'(t) = Y(\beta(t))$, daí fica provado (b).

Assumindo (b), necessitamos provar que se $y \in V$ então

$$Y(y) = R_*(X)(y) = R'(R^{-1}(y))X(R^{-1}(y)).$$

Para isso, seja $x = f^{-1}(y)$, então pelo o Teorema da existência e unicidade de equações diferenciais existe uma única curva integral $\alpha : I \rightarrow U$ de X com $0 \in I$ e $\alpha(0) = x$, nós temos que $\beta(t) \equiv R(\alpha(t))$ é uma cura integral de Y , ademais $\beta(0) = R(\alpha(0)) = R(x) = y$. Pela regra da cadeia e o fato que α e β são curvas integráveis, tem-se,

$$\begin{aligned}
 Y(y) &= Y(\beta(0)) = \beta'(0) = \frac{d}{dt}R(\alpha(t))|_{t=0} \\
 &= R'(\alpha(0))\alpha'(0) = R'(x)X(\alpha(0)) \\
 &= R'(x)X(x) = R'(R^{-1}(y))X(R^{-1}(y)),
 \end{aligned}$$

■

Nós conhecemos que dada uma equação $x' = X(x)$, onde X é um campo nem sempre podemos encontrar uma solução explícita. A pergunta natural é como estudar o comportamento das soluções da equação diferencial, para esse estudo temos a Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias (TQEDO), uma das ferramentas para este estudo é a conjugação de campos, que consiste em procurar mediante uma mudança de coordenadas um campo simples que descreva as propriedades do campo original. Temos que o problema está resolvido numa vizinhança de um ponto não singular, onde as trajetórias se "comportam como" as de um campo constante não nulo, isto é, "a menos de um difeomorfismo C^k " (ou seja podemos escolher uma mudança de coordenadas que tenha a mesma suavidade do campo tais que as trajetórias são como as do campo $Y = (1, \dots, 0)$). Para pontos não singulares hiperbólicos (pnsh) temos o Teorema de Hartman Grobman que diz que numa vizinhança pnsh podemos obter uma mudança de coordenadas contínua tal que as trajetórias comporta-se como as de seu linearizado. Nós temos dado um exemplo

onde a mudança de coordenadas dada no teorema de Hartman não pode ser suave. Então existira alguma condição onde a mudança de coordenadas seja suave, a resposta é sim, Sternberg deu uma condição chamada de não ressonância para que a mudança seja de alguma suavidade. Nós centraremos o estudo para contrações, para tal objetivo seguiremos as notas de Nelson [12]. As idéias que Nelson utiliza vem da mecânica quântica ao qual passamos a descrever. Sejam $U_0(t)$ e $U(t)$ dois grupos uniparamétricos de transformações sobre um mesmo espaço (por exemplo, grupos unitários sobre espaço de Hilbert ou fluxos sobre uma variedade).

Suponhamos que o limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t) = W. \quad (4.1)$$

exista. Em mecânica quântica este operador é chamado de operador de onda de Moller. Existe um operador análogo $W_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)U_0(-t)$ e scattering operadores, a s -matriz, de Wheeler and Heinenberg é construído em termos de estes operadores.

Se (4.1) existe então $U(s)WU_0(-s) = W$

De fato:

$$\begin{aligned} U(s)WU_0(-s)x &= U(s) \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t)U_0(-s)x \\ &= U(s) \lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t-s)x \\ &= U(s, \lim_{t \rightarrow \infty} U(t, U_0(-t-s)x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} U(s, U(t, U_0(-t-s)x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} U(s+t, U_0(-t-s)x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} U(s+t)U_0(-t-s)x, \end{aligned}$$

daí:

$$U(s)WU_0(-s)x = \lim_{t \rightarrow \infty} U(s+t)U_0(-t-s)x.$$

Fazendo a mudança de variáveis $s+t=v$, se $t \rightarrow \infty$, então $v \rightarrow \infty$. Daí obtemos que $\lim_{t \rightarrow \infty} U(s+t)U_0(-(s+t))x = \lim_{v \rightarrow \infty} U(v)U_0(-v)x = Wx$. Se W é invertível tem-se que:

$$W^{-1}U(s)W = U_0(s).$$

Daí os dois grupos de um parâmetro são conjugados.

Se eles são gerados por X e X_0 isso significa que:

$$(W^{-1})_*X = X_0.$$

De fato.

Se $W^{-1}U(s)W = U_0(s)$ então $W^{-1}U(s)Wx = U_0(s, x)$.

Daí.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W^{-1}U(s)Wx &= \frac{d}{dt}U_0(s, x) \\ \frac{d}{dt}W^{-1}U(s, Wx) &= \frac{d}{dt}U_0(s, x) \\ (W^{-1})'(U(s, Wx))U'(s, Wx) &= U_0'(s, x) \\ (W^{-1})'(U(s, Wx))X(U(s, Wx)) &= X(U_0(s, Wx)).\end{aligned}$$

Se, $s = 0$ então, $(W^{-1})'(U(s, Wx))X(U(0, Wx)) = X(U_0(0, x))$.

Como, $U_0(0, x) = x$ e $U(0, x) = x$

Daí obtemos

$$\begin{aligned}(W^{-1})'(Wx)X(Wx) &= X_0(x) \\ (W^{-1})_*X(x) &= X_0(x).\end{aligned}$$

Então $(W_*^{-1})X = X_0$.

Teorema 4.4. *Sejam $A_j \in L_{sym}^j(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s)$ para $j = 0, 1, 2, \dots$ então existe uma função $F : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ C^∞ , cuja serie de Taylor em 0 é $\sum_{j=0}^\infty A_j x^j$.*

Demonstração:

Nós só necessitamos definir F em uma vizinhança de 0.

Para isso, primeiramente construímos uma função α da seguinte maneira

$$\alpha_0(x) := \begin{cases} e^{2-(x+1)^{-2}-(x-1)^{-2}}, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Definamos

$$\alpha(x) := \frac{\int_{|x|}^\infty \alpha_0(t-2)dt}{\int_{-1}^1 \alpha_0(t)dt}$$

Fazendo mudança de variável $t-2 = u$ então α é

$$\alpha(x) := \frac{\int_{|x|-2}^\infty \alpha_0(t)dt}{\int_{-1}^1 \alpha_0(t)dt}$$

Se $x \in [-1, 1]$ então $|x| - 2 \leq -1$, então pela definição de α_0 tem-se que

$$\int_{|x|-2}^\infty \alpha_0(t)dt = \int_{-1}^1 \alpha_0(t)dt$$

Daí obtemos

$$\alpha(x) = 1, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Pela definição de α_0 tem-se

$$\int_{-1}^1 \alpha_0(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_0(t) dt.$$

Então

$$0 \leq \alpha(x) \leq 1.$$

Seja

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j x^j \alpha(\|A_j\| \|x\|^2),$$

onde $\|x\|$ é a norma euclidiana (assem $x \rightarrow \|x\|^2$ é C^∞).

O j -ésimo termo é 0 exceto quando $\|A_j\| \|x\|^2 \leq 1$, assim

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|A_j\| \|x\|^j \alpha(\|A_j\| \|x\|^2) \leq \|A_0\| + \|A_1\| \|x\| + \sum_{j=2}^{\infty} \|x\|^{j-2},$$

e a série converge absolutamente para $\|x\| < 1$.

Agora para provar que F é C^∞ temos que observar o seguinte fato.

Se $F \in L_{sym}^j(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s)$ e definimos $f : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ como $f(x) = F(x, \dots, x)$ então nós temos que

$$D^k f(x) = n(n-1) \dots (n-k+1) F(\underbrace{x, \dots, x}_{n-k}, h_1, \dots, h_k)$$

Daí obtemos que

$$\begin{aligned} D^j f(x)(h_1, \dots, h_j) &= n! F(h_1, \dots, h_j), \\ D^{j+k} f(x)(h_1, \dots, h_j) &= 0 \text{ para } k \in 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Então tem-se que $(A_j x^j \alpha(\|A_j\| \|x\|^2))' = A_j x^j \alpha'(\|A_j\| \|x\|^2) 2\|x\| \|A_j\| + j A_j x^{j-1} \alpha(\|A_j\| \|x\|^2)$.

Como

$$\alpha'(\|A_j\| \|x\|^2) = 0.$$

Temos que :

$$A_j x^j \alpha'(\|A_j\| \|x\|^2) 2\|x\| \|A_j\| = 0.$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (A_j x^j \alpha(\|A_j\| \|x\|^2))' = \sum_{j=0}^{\infty} j A_j x^{j-1} \alpha(\|A_j\| \|x\|^2).$$

Para mostrar que F é de classe C^∞ , segue-se por indução. ■

4.0.2 Fluxo Tubular

Definição 4.5. *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma campo e $p \in \Omega$. Uma seção transversal local em p num subconjunto $\Sigma \subset \Omega$ tal que $p \in \Sigma$, tal que exista $h : B^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável e injetiva, onde B^{n-1} é uma bola em $\mathbb{R}^{n-1}$ tal que $\sigma = h(B^{n-1})$ e tal que para todo $x \in B^{n-1}$ tem-se que*

$$\mathbb{R}^n = Dh(x)(\mathbb{R}^{n-1}) \oplus X(h(x)).$$

Da definição nós podemos ver que $X(p) \neq 0$.

Proposição 4.6. *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo tal que $X(p) \neq 0$ então existe uma seção transversal local em p .*

Demonstração:

Seja $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ uma base ortonormal de $X(p)^\perp$ e definimos $h : B^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $h(x_1, \dots, x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$. Existe $\delta > 0$ tal que se $\|q - p\| \leq \delta$ então $\langle X(p), X(q) \rangle > 0$. Logo $\sigma = h(B^{n-1}(0, \delta))$ é uma seção transversal local. ■

Teorema 4.7. (Fluxo Tubular I) *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma campo de classe C^k , ($k \geq 1$) e $p \in \Omega$ tal que $X(p) \neq 0$. Então existem $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, uma vizinhança $U(p)$ de p e um difeomorfismo de classe C^k $H : U(p) \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta)$ tal que se $q \in U(p)$ então*

$$DH(p)(X(p)) = (1, 0, \dots, 0).$$

Em particular H é uma C^k conjugação entre o fluxo de X em U e o fluxo do campo constante horizontal $Y = (1, 0, \dots, 0)$ em $(-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta)$.

Demonstração:

Seja $h : B^{n-1}(0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma seção transversal local em p com $h(0) = p$. Definimos

$F : \mathbb{R} \times B^{n-1}(0, \beta) \rightarrow \Omega$ por,

$$F(t, x) = \phi_t(h(x)),$$

onde ϕ_t é o fluxo de X . Agora, $\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \Big|_{(0,0)} = X(p)$ e $\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \Big|_{0,0} = Dh(0)$.

Portanto $DF(0, 0)$ é um isomorfismo e pelo o teorema da função inversa F é um difeomorfismo local de classe C^k em uma vizinhança de $(0, 0)$.

Logo existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que $F : (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta)$ em $U = F((-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta))$ um aberto que contem a $F(0, 0) = p$. Nós observamos que se $F(t, x) = q$.

$$DF(t, x)(0, 0) = \frac{d}{dt}F(t, x) = \frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x)) = X(q).$$

Logo $H : U \rightarrow (-\epsilon, \epsilon) \times B^{n-1}(0, \delta)$, $H = F^{-1}$ é o difeomorfismo procurado. ■

Proposição 4.8. (Fluxo Tubular II) *Suponhamos que $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, então existe conjuntos abertos U, V em $\mathbb{R}^n$ com $p \in U$ e um difeomorfismo $g : U \rightarrow V$ tal que a equação diferencial na novas coordenadas é dada por*

$$y' = Dg(g^{-1}(y))f(g^{-1}(y)),$$

onde

$$Dg(g^{-1}(y))f(g^{-1}(y)) = (1, 0, \dots, 0).$$

Demonstração:

Como $f(p) \neq 0$, então podemos completar com vetores $\{v_2, \dots, v_n\}$ tal que $\{f(p), v_1, v_2, \dots, v_n\}$ tornasse uma base para $\mathbb{R}^n$.

Definamos $v_1 = f(p)$.

Agora definimos uma isomorfismo natural $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $H(v_j) = e_j$, para $j = 1, \dots, n$.

Definamos $H_1(x) = H(x) - H(p)$, nós temos que H_1 é um difeomorfismo e satisfaz

$$H_1(p) = 0, DH_1f(p) = e_1.$$

Se pomos

$$f_1(z) = DH_1(H_1^{-1}(z))f(H_1^{-1}(z)).$$

Então a equação diferencial mudando as coordenadas fica

$$z' = f_1(z).$$

Pela definição de f_1 nós temos que $f_1(0) = e_1$.

Se definimos o fluxo ϕ_t da equação diferencial $z' = f_1(z)$, definamos $H_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$H_2(s, y_2, \dots, y_n) = \phi_s(0, y_2, \dots, y_n).$$

Nós temos que $H_2(0) = 0$.

$$\begin{aligned} DH_2(0, \dots, 0)e_1 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{H_2(0 + te_1) - H_2(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t(0) - \phi_0(0)}{t} \\ &= \frac{d}{dt} \phi_t|_{t=0} = e_1. \end{aligned}$$

Para $j = 2, \dots, n$ temos

$$\begin{aligned} DH_2(0, \dots, 0)e_j &= \frac{d}{dt} H_2(te_j)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} te_j|_{t=0} = e_j \end{aligned}$$

Daí obtemos

$$DH_2(0, \dots, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Pelo o teorema da função inversa, existem vizinhanças do origem U e V tal que $H_2 : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo.

A nova coordenada denotada por y , sobre U é relacionada com a coordenada anterior, denotada por z , sobre V pela relação $y = H_2^{-1}(z)$.

A equação diferencial na nova coordenada tem a forma:

$$y' = DH_2^{-1}(H_2(y))f_1(H_2(y)) := f_2(y).$$

Equivalentemente, em cada ponto $y \in U$, nós temos que

$$f_1(H_2(y)) = DH_2(y)f_2(y)$$

Suponhamos que $y = (s, y_2, \dots, y_n)$ e consideremos o vetor tangente

$$(y, e_1) \in T_y \mathbb{R}^n.$$

Temos, que (y, e_1) é um vetor tangente a curva $\gamma(t) = (s + t, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ para $t = 0$ e

$$\begin{aligned} DH_2(y)e_1 &= \frac{d}{dt}H_2(\gamma(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\phi_t(\phi_s(0, y_2, \dots, y_n))|_{t=0} \\ &= f_1(H_2(s, y_2, \dots, y_n)) = f_1(H_2(y)). \end{aligned}$$

Pois $DH_2(y)$ é inversível, e segue-se que $f_2(y) = e_1$.

Portanto a função $g := H_2^{-1} \circ H_1$ é a mudança de coordenadas desejadas. ■

Agora começaremos a provar o Teorema de Sternberg para contrações seguindo as notas de Nelson [12]. Para isso mostraremos alguns Teoremas prévios para logo mostrar O Teorema de Sternberg para contrações.

Teorema 4.9. *Seja T um polinômio de grau menor o igual a k , $k = 1, 2, \dots$, tal que $T(0) = 0$, com parte linear T_1 tal que $\text{Spec}(T_1) = \{\mu_1, \dots, \mu_s\}$, e para $i = 1, \dots, s$ suponhamos que*

$$\mu_i \neq \prod_{j=1}^s \mu_j^{m_j},$$

para $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq \sum_{j=1}^s m_j \leq k$.

Então existe um único polinômio R de grau k com parte linear $R_1 = I$ tal que $RTR^{-1} = T_1$.

Demonstração:

Suponhamos que T_1 é diagonalizável, e seja $T(x) = \sum_{j=1}^k T_j x^j$ e $R(x) = \sum_{j=1}^k R_j x^j$. Nós queremos encontrar o R tal que:

$$T_1 R = R T. \quad (4.2)$$

nós procuramos que $R_1 = I$, então $Rx = x + \sum_{j=2}^k R_j x^j$.

$$T_1 R = T_1 \left(x + \sum_{j=2}^k R_j x^j \right) = T_1 x + T_1 \sum_{j=2}^k R_j x^j = T_1 x + \sum_{j=2}^k R_j T_1 x^j \quad (4.3)$$

Agora a direita.

$$R T x = T x + \sum_{j=2}^k R_j x^j = T_1 x + \sum_{j=2}^k T_j x^j + \sum_{j=2}^k R_j (T x)^j \quad (4.4)$$

expandindo :

$$\sum_{j=2}^k R_j (T x)^j = R_2 (T x)^2 + R_3 (T x)^3 + R_4 (T x)^4 + \dots \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} R_2 (T x) &= R_2 ((T_1 x + \dots + T_k x^k), (T_1 x + \dots + T_k x^k)) = \sum_{i=1}^k R_2 (T x, T_i x^i) \\ &= R_2 (T_1, T_1) + \dots + R_2 (T_k x^k, T_1) + \dots + R_2 (T_k x^k, T_1 x^k) \\ &= \sum_{i=1}^k R_2 (T_i x^i, T_1 x) + \dots + \sum_{i=1}^k R_2 (T_i x^i, T_k x^k) \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k R_2 (T_i x^i, T_j x^j) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nós Utilizamos o Teorema 1.68 referente aos polinômios, para Comparar os coeficientes

de x^k , de (4.6), (4.4), (4.3) e obter:

$$T_1 R_2 x^2 = R_2 (T_1 x)^2. \quad (4.7)$$

Agora fazendo para $k = 3$

seja $a = T_1 x + \cdots + T_k x^k$, então

$$\begin{aligned} R_3(a)^k &= R_3(a, a, T_1 x) + \cdots + R_3(a, a, T_k x^k) \\ &= R_3(a, T_1 x, T_1 x) + R_3(a, T_2 x^2, T_1 x) \cdots + R_3(a, T_k x^k, T_1 x) \\ &\quad + \cdots + R_3(a, T_1 x, T_k x^k) + \cdots + R_3(a, T_k x^k, T_k x^k) \\ &= R_3(T_1 x, T_1 x, T_1 x^1) + R_3(T_2 x^2, T_1 x, T_1 x^1) + \cdots \\ &\quad R_3(T_1 x, T_1 x, T_1 x^1) + R_3(T_k x^k, T_1 x, T_1 x^1) + \cdots + \\ &\quad R_3(T_1 x, T_k x^k, T_k x^k) + \cdots \\ R_3(T_k x^k, T_k x^k, T_k x^k) &= R_3(T_3 x)^3 + \sum_{j=1, i=2}^k R_3(T_i x^i, T_j x^j, T_j x^j) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Comparando os coeficientes de x^3 , nós obtemos

$$T_1 R_3 x^3 = T_3 x^3 + R_3(T_1 x)^3 + R_2(T_2 x^2, T_1 x)$$

Pelo o procedimento anterior, nós encontramos R_2 .

Em geral comparando os coeficientes com termo x^j , obtemos

$$T_1 R_j x^j = T_j x^j + R_j(T_j x)^j + F((T_1, R_2, \cdots, R_{j-1}))$$

Agora nós mostremos a existência e unicidade do polinômio R . Para isso definiremos a seguinte função.

$L(T_1) : L_s^j(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s) \rightarrow L_s^j(\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^s)$, definida como $(L(T_1(B))x^j = T_1 B x^j - B(T_1)^j$.

Afirmção: $L(T_1)$ é bijetiva.

Com efeito, para provar a afirmação mostremos que

$$\text{spec}(L(T_1)) = \{\lambda_i - \prod_{k=1}^s \lambda_k^{m_k} / i = 1, \cdots, s \text{ e } \sum_{k=1}^s m_k = j\}.$$

Para mostrar isso procuraremos autovetores associados aos autovalores desejados.

Seja $B^i = (0, \cdots, B_i, \cdots, 0)$, agora definiremos B_i da seguinte maneira.

Nós denotaremos por $a_k \in \mathbb{R}^s$ como $a_k = (a_{1,k}, \cdots, a_{s,k})$, e P^j o grupo de permutações

de j elementos.

Definamos a seguinte transformação multilinear.

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_i(a_{k_1}, \dots, a_{k_j}) &= \lambda_i a_{1,k_1} a_{2,k_1} \cdots a_{m_1,k_1} \\ &\quad a_{m_1+1,k_2} a_{m_1+2,k_2} \cdots a_{m_1+m_2,k_2} \cdots \\ &\quad a_{m_1+m_2+\cdots+m_{s-1}+1,k_s} a_{m_1+m_2+\cdots+m_{s-1}+2,k_s} \cdots \\ &\quad a_{m_1+m_2+\cdots+m_s,k_j}.\end{aligned}$$

Com $\widetilde{B}$ definiremos uma transformação linear simétrica B_i da seguinte maneira.

$$B_i(a_1, \dots, a_j) = \frac{1}{j!} \sum_{\pi \in P^j} \widetilde{B}_i(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(j)}).$$

Daí se $x = (x_{k_1}, \dots, x_{k_s})$ então tem-se

$$B_i x^j = \lambda_i x_{k_1}^{m_1} \cdots x_{k_s}^{m_s}$$

Nós temos pelo o Teorema 1.62, que quando a forma multilinear é simétrica ela fica completamente definida pelos valores na diagonal, daí então é suficiente trabalhar na diagonal de B .

Afirmacão: $L(T_1)$ tem como autovetor B^i , com autovalor associado $\lambda_i - \prod_{k=1}^j \lambda_k^{m_k}$, onde

$$B^i x^j = (0, \dots, B_i x^j, \dots, 0)$$

Com efeito, Pela definição de $L(T_1)$ temos

$$L(T_1)B^i x^j = T_1 B^i x^j - B^i(T_1(x))^j$$

Pela definição de B^i e pelo fato de que T_1 é linearizáveis nós temos

$$L(T_1)B^i x^j = (0, \dots, \lambda_i \lambda_{k_1}^{m_{k_1}} \cdots \lambda_{k_s}^{m_{k_s}}, \dots, 0) - (0, \dots, \lambda_i \lambda_{k_1}^{m_{k_1}} x_{k_1}^{m_{k_1}} \cdots \lambda_{k_j}^{m_{k_j}} x_{k_s}^{m_{k_s}}, \dots, 0).$$

Daí obtemos

$$L(T_1)B^i x^j = (\lambda_i - \lambda_{k_1}^{m_1} \cdots \lambda_{k_s}^{m_s}) B^i x^j,$$

para todo $i = 1, \dots, s$ e $\sum_{l=1}^s m_l = j$. Por definição obtemos que $\lambda_i - \lambda_{k_1}^{m_1} \cdots \lambda_{k_s}^{m_s}$ são autovalores de $L(T_1)$.

Agora mostraremos o Lema para quando a transformação T_1 não é diagonal.

Pelo o Lema (1.44) temos que o conjunto das matriz diagonais são densas no conjunto

das matrizes, então podemos construir uma sucessão de matrizes T_m diagonais tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = T_1$ tal que A_n tenham autovalores distintos $\{\mu_1^n, \dots, \mu_s^n\}$, nós temos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{spec}(A_m) = \text{spec}(A)$, desde que $L(A)$ é continua e $\mu_i \neq \prod_{j=1}^s \mu_j^{m_j}$ é continua então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\mu_i^m - \prod_{j=1}^s (\mu_j^m)^{m_j}) = u_i - \prod_{j=1}^s \mu_j^{m_j}.$$

Daí obtemos que

$$\text{Spec}(A) = \{\mu_i - \prod_{k=1}^s \mu_k^{m_k} : i = 1, \dots, s, \sum_{j=1}^s m_j = j\}.$$

Não é difícil mostrar que os B^i formam uma base de espaço vetorial L_s^j , daí obtemos que $L(T_1)$ é invertível pelo tanto $L(T_1)$ é um isomorfismo linear. Então pela forma que foi definido o $L(T_1)$ e o fato que $L(T_1)$ é um isomorfismo tem-se que existe R e é único. Daí fica demonstrado o Teorema. ■

Teorema 4.10. *Seja X um campo vetorial de classe C^k $k = 1, \dots, \infty$, definido em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^s$, com $X(0) = 0$. Seja $\text{Spec}(DX(0)) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$, e suponhamos que para $i = 1, \dots, s$,*

$$\lambda_i \neq \sum_{j=1}^s m_j \lambda_j \quad (\text{Condição de Sternberg}),$$

onde $m_j \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq \sum_{j=1}^s m_j \leq k$. Então existe um difeomorfismo R em 0 com $R(0) = 0$, tal que $DR(0) = I$ tal que

$$(R_*X)x = DX(0)x + h(x),$$

$$\text{onde } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{\|x\|^k} = 0.$$

Demonstração:

Seja U o fluxo gerado por X , seja $X_0 x = DX(0)x$, se U_0 é o fluxo gerado pelo o campo X_0 então $U_0(t)x = e^{tX_0}x$, tem-se que $U_0 \in P(\mathbb{R}^s)$. Seja $\tilde{U}(t)x = \sum_{j=0}^k U^j(t)x$, nós temos que $DU(t)0 = e^{tDX(0)}$. De fato, escrevendo $\varphi(t, x) = Y_t(x)$ temos que $(DY_t)(x) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{\xi} = DX(\varphi(t, x)).\xi \\ Z(0) = I_m \end{cases}$$

Como $X(0) = 0$ então $\varphi(t, 0) = 0$, e a equação acima fica :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = DX(0).\xi \\ Z(0) = I_m \end{cases}$$

O que implica que $(DY_t)(0) = e^{tDX(0)} = U_0(t)$ nós temos pela proposição 1.43 que $\text{Spec}(U_0) = \{e^{t\lambda_i}; i = 1, \dots, s\}$ pelo o teorema anterior para cada t existe um $\tilde{R}$ em $P^k(\mathbb{R}^s)$ com $D\tilde{R}(0) = I$, tal que $\tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = U_0(t)$. Seja $\tilde{R} \in P^k(\mathbb{R}^s)$ com $D\tilde{R}(0) = I$ tal que

$$\tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = U_0(t). \quad (4.9)$$

Note que se $\tilde{R}$ satisfaz 4.9 então $\tilde{R}$ satisfaz uma equação análoga trocando t por $2t$ com efeito

$$U_0(2t) = U_0(t)U_0(t) = \tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1}\tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = \tilde{R}\tilde{U}(2t)\tilde{R}^{-1}$$

então pela unicidade do Teorema 4.9, $\tilde{R}$ também satisfaz para $2t$, do mesmo jeito para $n \in \mathbb{N}$. Também nós temos que o $\tilde{R}$, o qual satisfaz para t também satisfaz para $-t$.

Com efeito, se nós temos

$$\tilde{R}\tilde{U}(-t)\tilde{R} = U_0(-t).$$

Nós temos que

$$\tilde{U}(-t)\tilde{U}(t)x = x.$$

Então nós temos que

$$\tilde{R}U_0(-t)\tilde{R}\tilde{U}(t)x = x.$$

Daí obtemos

$$U_0(-t)\tilde{R}\tilde{U}(t)x = Rx$$

então

$$\tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = U_0(t)\tilde{R}x.$$

então

$$\tilde{R}\tilde{U}(t)\tilde{R}^{-1} = U_0(t).$$

Então com esses resultados nós temos para $r = \frac{p}{q}$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$ também tem o mesmo $\tilde{R}$, e pela densidade de $\mathbb{Q}$ e a continuidade de $\tilde{U}$ e U_0 nós temos que se cumpre para todo $t \in \mathbb{R}$.

De (4.9) nós obtemos

$$RU(t)R^{-1}x = U_0(t)x + o(x^k) \quad (4.10)$$

Com efeito, fixemos um t pequeno, como U é de classe C^k nós temos que

$$U(t)x = \tilde{U}(t) + h(t, x)$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(t, x)}{\|x\|^k} = 0$.

Então

$$RU(t)R^{-1}x = R(\tilde{U}(t)x + h(t, R^{-1}x)) = R(\tilde{U}(t)R^{-1}x) + E(t, x)$$

onde

$$E(t, x) = R(\tilde{U}(t)R^{-1}x + h(t, R^{-1}x)) - R(\tilde{U}(t)R^{-1}x).$$

Nós temos que R é de classe $\mathbb{C}^\infty$ em particular de classe C^1 então é localmente uma função lipchitziana então $|R(x) - R(y)| \leq c|x - y|$ para $|x|, |y| < \epsilon$, daí nós obtemos:

$$E(t, x) \leq |h(t, R^{-1}x)|c \leq o(|R^{-1}x|^k) \leq co(|x|^k),$$

daí obtemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{E(t, x)}{|x|^k} = 0$$

Seja $V(t) = RU(t)R^{-1}$ e $Y = R_*X$, assem que Y genera $V(t)$. Para concluir a prova nós vamos a provar que se X_0 e Y são dois campos vetoriais gerando os fluxos de classe C^k U_0 e $V(t)$ no ponto x_0 (aqui $x_0 = 0$) são iguais até o ordem k para todo t suficientemente pequeno, então a series de Taylor de X_0 e Y em x_0 concordam em ordem k . Para $k = 0$ então $U_0(t)x_0 = V(t)x_0$ para t suficientemente pequeno, então $X_0x_0 = Yx_0$. Suponhamos que é verdade para $k - 1$.

Se denotamos $Y_tx = U(t)x$ e $Z_tx = U_0(t)x$. Então por hipótese Y_tx , Z_t é de classe C^k então desenvolvendo na serie de Taylor temos que:

$$Y_tx = Y'_t(0) + \frac{1}{2}Y''_t(0) + \cdots + \frac{1}{k!}Y_t^k(0)x^k + G_t(x),$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G_t(x)}{\|x\|^k} = 0$

e

$$Z_tx = Z'_t(0) + \frac{1}{2}Z''_t(0) + \cdots + Z_t^k(0)x^k + H_t(x),$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{H_t(x)}{\|x\|^k} = 0$, pela hipótese temos que

$$Y'_t(0) + Y''_t(0) + \cdots + Y_t^k(0) + G_t(x) = Z'_t(0) + Z''_t(0) + \cdots + Z_t^k(0) + H_t(x).$$

Derivando $Y_t x$ e $Z_t x$ obtemos

$$DY_t x = Y'_t(0) + Y''_t(0)x + \frac{1}{2}Y'''_t x^2 \cdots + \frac{1}{(k-2)!}Y_t^{k-1}x^{k-2} + DG_t x,$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{DG_t(x)}{\|x\|^{k-1}} = 0$

$$DZ_t x = Z'_t(0) + Z''_t(0)x + \frac{1}{2}Z'''_t x^2 \cdots + \frac{1}{(k-2)!}Z_t^{k-1}x^{k-2} + DH_t x,$$

onde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{DH_t(x)}{\|x\|^{k-1}} = 0$ daí

$$Y'_t(0) + Y''_t(0)x + \frac{1}{2}Y'''_t x^2 \cdots + \frac{1}{(k-2)!}Y_t^{k-1}x^{k-2} = Z'_t(0) + Z''_t(0)x + \frac{1}{2}Z'''_t(0)x^2 \cdots + \frac{1}{(k-2)!}Z_t^{k-1}(0)x^{k-2}.$$

Daí obtemos que DY_t e DZ_t são iguais até o ordem $k-1$. Como X, Y é de classe C^k , k então Df e Dg são de classe C^{k-1} então do Teorema Taylor temos que

$$DX(t+ty)y = DX(x)y + D^2X(x)ty^2 + \cdots + \frac{D^k X(x)}{(k-1)!}t^{k-1}y^k + o(t^{k-1}y^k),$$

$$DY(t+ty)y = DY(x)y + D^2Y(x)ty^2 + \cdots + \frac{D^k Y(x)}{(k-1)!}t^{k-1}y^k + o(t^{k-1}y^k).$$

Pela hipótese de indução temos que

$$DX(x)y + D^2X(x)ty^2 + \cdots + \frac{D^k X(x)}{(k-1)!}t^{k-1}y^k = DY(x)y + D^2Y(x)ty^2 + \cdots + \frac{D^k Y(x)}{(k-1)!}t^{k-1}y^k.$$

Aplicando o teorema fundamental do cálculo obtemos:

$$X(x) = Y(x) + o(x^k).$$

■

Teorema 4.11. *Seja $X : U \subset E \rightarrow$ um campo, com $Lip(X) = k$ seja φ o fluxo local gerado por X , e seja $x, y \in U$, então*

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{kt}\|x - y\|, \quad \forall t \geq 0.$$

Se

$$X = X_0 + X_1,$$

onde X_0 e X_1 são localmente lipschitz, e seja φ_0 o fluxo gerado por X_0 . Então

$$\|\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x)\| \leq \int_0^t e^{k(t-s)} \|X_1(\varphi_0(s, y))\|, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.11)$$

e também

$$\|\varphi(-t, x) - \varphi_0(-t, x)\| \leq \int_0^t e^{k(t-s)} \|X_1(\varphi_0(-s, y))\| \quad \forall t \geq 0. \quad (4.12)$$

Demonstração:

Como φ é fluxo de X , então tem-se

$$\varphi(t, y) = y + \int_0^t X(\varphi(s, x)) ds,$$

$$\varphi(t, x) = x + \int_0^t X(\varphi(s, x)) ds.$$

Então, obtém-se

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t k \|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\| ds. \quad (4.13)$$

Definamos $f(t) = \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\|$ e

$$F(t) = \|x - y\| + \int_0^t k F(s) ds.$$

Derivando F , obtém-se

$$F' = kF, F(0) = \|x - y\|.$$

Afirmção:

$$f(t) \leq F(t).$$

Com efeito, definamos ϕ do mesmo modo do teorema de Picard o conjunto M , definido como

$M = \{\xi : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R} / \xi(0) = \|x - y\|\}$, temos que M é um espaço métrico completo, com métrica $d(\xi, \eta) = \sup_{|t| \leq a} \|\xi(t) - \eta(t)\|$.

Definamos portanto a aplicação $\phi : M \rightarrow M$ dada por

$$(\phi g)(t) = \|x - y\| + \int_0^t kg(s)ds.$$

Por indução, provaremos que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\phi^n f \leq \phi^n f$$

Realmente, para $m = 1$, temos:

Pelo definição de ϕ , temos:

$$(\phi f)(t) = \|x - y\| + \int_0^t kf(s)ds = \|x - y\| + \int_0^t k(\|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\|)ds. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.13) em (4.14) obtemos

$$f \leq \phi f.$$

Assumindo a hipótese de indução válida para um certo $n \in \mathbb{N}$, temos: Agora fazendo indução:

$$\phi^{n+1} f = \|x - y\| + \int_0^t k\phi^n f(s)ds. \quad (4.15)$$

Pela hipóteses de indução se tem que $\phi^n f(t) \leq \phi^{n-1} f(s)$, daí obtemos

$$\phi^{n+1} f \geq \|x - y\| + \int_0^t k\phi^{n-1} f(s)ds = \phi^n f.$$

o que conclui a indução.

Então a afirmação fica provada. Além disso como no teorema de Picard obtemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n f(t) = F(t). \quad (4.16)$$

Então obtemos que $f \leq F$, além disso

$$F(t) = e^{kt}\|x - y\|,$$

daí obtemos

$$f(t) \leq e^{kt}\|x - y\|.$$

Com isso fica provada a primeira parte do Teorema.

Agora provaremos segunda parte do teorema do mesma forma da primeira parte. Como φ, φ_0 são fluxos de X, X_0 , respectivamente, então

$$\varphi(t, x) = x + \int_0^t (X_0 + X_1)(\varphi(s, x)) ds,$$

$$\varphi_0(t, x) = x + \int_0^t X_0(\varphi_0(s, x)) ds.$$

Então

$$\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x) = \int_0^t [(X_0 + X_1)\varphi(s, x) - (X_0 + X_1)\varphi_0(s, x)] ds + \int_0^t (\varphi_0)(s, x) ds, \quad (4.17)$$

Daí obtemos

$$\|\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x)\| \leq \int_0^t k[\|\varphi(s, x) - \varphi_0(s, x)\|] ds + \int_0^t \|X_1\varphi_0(s, x)\| ds. \quad (4.18)$$

Definamos

$$F(t) = \int_0^t \|X_1\varphi(s, x) - \varphi_0(s, x)\| ds + \int_0^t kF(s), \quad f(t) = \|\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x)\|.$$

Pondo F na forma de equação diferencial, então

$$F'(t) = \|X_1\varphi_0(s, x)\| ds + kF(t).$$

Então

$$F'(t) - \|X_1\varphi_0(s, x)\| ds + kF(t) = 0.$$

Do mesma forma como foi provada a afirmação acima obtemos

$$f(t) \leq F(t).$$

Fazendo variação de parâmetros obtemos

$$\int_0^t (e^{-ks} F(s))' ds = \int_0^t e^{-ks} \|X_1(\varphi(s, x))\| ds.$$

Pelo o teorema fundamental do cálculo tem-se

$$e^{-kt} F(t) - e^{-k0} F(0) = \int_0^t e^{-ks} \|X_1(\varphi(s, x))\| ds.$$

Como $F(0) = 0$ obtemos

$$F(t) = \int_0^t e^{k(t-s)} \|X_1(\varphi(s, x))\| ds.$$

Como

$$f(t) = \|\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x)\|.$$

e

$$F(t) = \int_0^t e^{k(t-s)} \|X_1(\varphi(s, x))\| ds.$$

Como

$$f(t) \leq F(t),$$

então

$$\|\varphi(t, x) - \varphi_0(t, x)\| \leq \int_0^t e^{k(t-s)} \|X_1(\varphi(s, x))\| ds.$$

O que mostra a segunda parte do Teorema. ■

Teorema 4.12. *Seja X um campo vetorial de classe C^∞ definido em uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^s$. Seja $X_0 = DX(0)x$ e suponhamos que $\max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \operatorname{Spec}(X_0)\} < 0$, e que $Xx = X_0x + o(x^\infty)$. Seja $U_0(t)$ o fluxo gerado por X_0 e seja $U(t)$ o fluxo gerado por X . Então*

$$W_-(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} U(-t)U_0(t)x,$$

existe e é um difeomorfismo de classe C^∞ tal que

$$(W_-^{-1})_*X = X_0,$$

numa vizinhança de 0 .

Demonstração:

Sem perda de generalidade pelo o Lema 3.19 nós podemos assumir que X é globalmente definida, com constante de lipschitz global k , assim $U(t)$ é globalmente definida.

Como $\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \operatorname{Spec}(X_0)\} \subset \mathbb{R}^-$ pode-se mostrar que para $-c$, tal que $\max\{\operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \operatorname{Spec}(X_0)\} < -c < 0$, existe um $C \geq 1$ tal que :

$$\|U_0(t)\| \leq ce^{-ct}, \forall t \geq 0.$$

de EDO nós temos que

$$\|U_0(t)\| \leq ce^{-ct}, \forall t \geq 0$$

Definamos $X_1 = X - X_0$.

Afirmamos:

$$\|U(-t)U_0(t)x - x\| \leq \int_0^t e^{k(s)} \|X_1(U_0(s)x)\| ds. \quad (4.19)$$

Com efeito, seja $y = U_0(t)x$, assim temos $x = U_0(-t)y$. Pelo o Teorema anterior e fazendo mudança de variável obtemos seguinte

$$\begin{aligned} \|U(-t)y - U_0(t)y\| &\leq \int_0^t e^{k(t-s)} \|X_1(U_0(-s)y)\| ds \\ &= \int_0^t e^{k(r)} \|X_1(U_0(r-t)x)\| dr \\ &= \int_0^t e^{k(r)} \|X_1(U_0(r)x)\| dr. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O qual prova (4.19)

Agora mostraremos que $U(-t)U_0(t)_{t \in \mathbb{R}}$ é uma seqüência de Cauchy, para isto tomemos $t_1 \geq t_2 > 0$. Pelo o Teorema anterior e por (4.19), nós obtemos

$$\begin{aligned} \|U(-t_1)U_0(t_1)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| &= \|U(-t_2)U(-t)U_0(t_2)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| \\ &\leq e^{kt_2} \|U(-t)U_0(t)U_0(t_2)x - U_0(t_2)x\| \\ &\leq e^{kt_2} \|U(-t)U_0(t)U_0(t_2)x - U_0(t_2)x\| \\ &\leq e^{kt_2} \int_0^t e^{ks} \|X_1(U_0(s+t_2)x)\| ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pela definição de X_1 tem-se $X_1x = o(x^\infty)$ ou seja $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{X_1x^k}{\|x\|} = 0$, $\forall k > 0$. Daí para $k > 0$ obtém-se,

$$\|X_1(U_0(s+t_2)x)\| \|U_0(s+t_2)x\|^K \leq C^K e^{-ck(s+t_2)} \|x\|^K.$$

Assim (4.21) tem a forma,

$$\begin{aligned}
\|U(-t_1)U_0(t_1)x - U(-t_2)U_0(t_2)x\| &\leq e^{kt_2} \int_0^\infty e^{ks} C^K e^{-cK(s+t_2)} \{\|x\|\}^K ds \\
&\leq e^{Kt_2} C^k \|x\|^k e^{-cKt_2} \int_0^\infty e^{(k-Kc)s} ds. \quad (4.22) \\
&\leq \frac{e^{-(Kc-k)t_2}}{ck-k} C^K \|x\|^K.
\end{aligned}$$

Se $cK > k$, então $\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \frac{e^{-(k-ck)s}}{ck-k} C^k \|x\|^k = 0$ daí temos que W_- existe e para x num conjunto limitado $U(-t)U_0(t)x$ converge uniformemente. Então W_- é continua.

Fazendo indução no conjunto de todos os campos que satisfazem a hipóteses do Teorema, provaremos que W_- é de classe C^∞ . Mostraremos primeiro que W_- é de classe C^1 . Temos pela primeira equação variacional, se $\psi(t, x) = D_2\varphi(t, x)$ onde $\varphi(t, x) = U(t)x$, então φ, ψ satisfaz

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \varphi(t, x) \\ \psi(t, x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(\varphi(t, x)) \\ DX(\varphi(t, x))\psi(t, x) \end{pmatrix} = X' \begin{pmatrix} \varphi(t, x) \\ \psi(t, x) \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Agora definamos o campo $X' : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ definido como

$$X'(u, v) = \begin{pmatrix} X(u) \\ DX(u)v \end{pmatrix}.$$

Note que $X'(0, 0) = (0, 0)$, além disso.

$$D(X'(u, v))(h_u, h_v) = (DX(u)h_u, (D^2X(u)h_u) + DX(u)h_v),$$

então

$$D(X'(0, 0))(h_u, h_v) = (DX(0)h_u, DX(0)h_v).$$

Daí obtemos que X_0 e X'_0 têm os mesmos autovalores, e os autovalores de X'_0 tem maior multiplicidade que os autovalores de X_0 .

Temos que X' e X'_0 tem a mesma propriedade do teorema.

Com efeito,

$$X'(u, v) - X'_0(u, v) = \begin{pmatrix} X(u) - X_0(u) \\ DX(u)v - DX(0)v \end{pmatrix}$$

Temos que $X(u) - X_0(u) = o(u^\infty)$ e também $DX(u)v - DX(0)v = o(v^\infty)$, daí obtemos

$$X'(x) = X'_0(x) + o(x^\infty).$$

Então o campo X' e satisfaz as hipóteses do Teorema.

Agora observemos que os seguintes fluxos associados a X' e $X'_0 = DX'(0)$ respectivamente satisfazem a seguinte equação.

$$U'(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(t)x \\ DU(t)x.\xi \end{pmatrix},$$

$$U'_0(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0(t)x \\ DU_0(t)x.\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_o(t)x \\ U_0(t)\xi \end{pmatrix}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} U'(-t)U'_0(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U(-t)U_0(t)x \\ (DU(-t))(U_0(t)x).DU_0(t)x.\xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U(-t)U_0(t)x \\ D(U(-t)U_0(t))x.\xi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Já mostramos que $U'(-t)U_0(t)$ converge para uma função contínua. Logo $D(U(-t)U_0(t))$ converge para um função contínua, assim W_- é C^1 .

Assumindo a hipótese de indução válida para um certo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se definido o campo

$$X' : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$$

Nós temos que o Campo X' definido acima cumpre as hipótese do teorema 4.9 e ademais como $X \in C^{n+1}$ temos que $X' \in C^n$ então pela hipótese de indução temos que $U'(-t)U'_0(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$ converge uniformemente para uma função de classe C^n , além disso temos

$$\begin{aligned} U'(-t)U'_0(t) \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} U(-t)U_0(t)x \\ (DU(-t))(U_0(t)x).DU_0(t)x.\xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U(-t)U_0(t)x \\ D(U(-t)U_0(t))x.\xi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.25)$$

então daí obtemos $D(U(-t)U_0(t))$ converge para uniformemente para uma função de classe C^n , então por definição W_- é de classe C^{n+1} , o que conclui a indução. O mostra que $W_- \in C^\infty$.

Agora mostraremos que W_- é um difeomorfismo local. Com efeito.

Mostraremos que $DW_-(0) = I_d$.

Pela primeira formula fundamental temos que $DU(t, 0) = e^{tDX(0)}$, fazendo uso da regra

da cadeia obtemos

$$D(U(-t, U_0(t)x)) = DU(-t, U_0(t, x))DU_0(t, x) = DU(-t, U_0(t, x))e^{tA}$$

Então

$$DU(-t, U_0(t)0) = DU(-t, U_0(t, 0))e^{tA} = DU(-t, 0)e^{tA} = e^{-tA}e^{tA} = I_d$$

Daí obtemos que $DW_-(0) = I$, então pelo teorema da Função Inversa W_- é um difeomorfismo local de classe C^∞ numa vizinhança do zero. Então o Teorema fica demonstrado. ■

Teorema 4.13. Teorema de Sternberg para contrações. Caso C^∞ Seja X um campo vetorial C^∞ numa vizinhança do 0 em $\mathbb{R}^s$ com $X(0) = 0$ tal que $DX(0)$ satisfaz a condições de sternberg e

$\forall \lambda \in DX(0)$ tem-se que $\operatorname{re} \lambda < 0$.

Então existe um difeomorfismo local de classe C^∞ em 0 tal que $R_*X = DX(0)$ numa vizinhança de 0.

Demonstração:

Pelo o Teorema 4.10 tem-se que existe um difeomorfismo R numa vizinhança do zero tal que $(R_*)X(x) = DX(0)(x) + o(x^\infty)$, agora como $Y = (R_*)X$ satisfaz a hipótese do Teorema 4.12 tem-se que existe um difeomorfismo W de classe C^∞ tal que $(W_*^{-1})Y = X_0$, onde $DX(0) = X_0$, como a conjugação de campos é uma relação de equivalência tem-se que X e X_0 são C^∞ conjugados. Daí fica provado o Teorema de Sternberg para contrações. ■

Teorema 4.14. Teorema de Sternberg para contrações. Caso C^m Seja X um campo de classe C^m , $m \geq 2$ numa vizinhança U do zero em $\mathbb{R}^s$ como $X(0) = 0$ tal que $DX(0)$ satisfaz a condição de Sternberg até o order m . Suponhamos que $\operatorname{Spec}(DX(0)) \subset \mathbb{R}^-$ e exista um $k \geq 1$ tal que

$$k < \left(\frac{\min\{\lambda\}m}{\max\{\lambda\}} - 1 \right) - 1$$

Então existe uma aplicação local F de classe C^k em 0 tal que F_*X é linear em uma vizinhança do 0.

Demonstração:

Como $\{Re\lambda : \lambda \in Spec(X_0)\} \subset \mathbb{R}^-$ pode-se mostrar que para $-c$, tal que $\{Re\lambda : \lambda \in Spec(X_0)\} < -c < 0$, existe um $C \geq 1$ tal que :

$$\|U_0(t)\| \leq ce^{-ct}, \forall t \geq 0.$$

Pela a observação feita em 3.19 podemos tomar qualquer constante de lipschitz $k > \max\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}$ (fazendo uma mudança de coordenada como fizemos no Teorema de Hartman podemos pegar $R_*X(0) = 0$ Temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\} - \frac{1}{n}}{\min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\} + \frac{1}{n}} = \frac{\min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}}{\max\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}}$$

Então daí pela definição para

$$\epsilon = \frac{1}{2} \frac{\min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}}{\max\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}},$$

existe um n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ então

$$\frac{\min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}}{\max\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}} < 2 \frac{\min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\} - \frac{1}{n}}{\max\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\} + \frac{1}{n}}$$

daí em particular para n_0 tem-se

$$\frac{\min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}}{\max\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\}} < 2 \frac{\min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\} - \frac{1}{n_0}}{\max\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\} + \frac{1}{n_0}}$$

então para $c = \min\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\} - \frac{1}{n_0}$ e $k = \max\{\lambda : \lambda \in Spec(DX(0))\} + \frac{1}{n_0}$ nós obtemos $mc > k$ então pelo feito no teorema acima temos que $U(-t)U_0(t)$ converge e ademais pelo feito acima temos que $(m-j)c > k$ para $j = 1, \dots, k$ então daí obtemos a convergência de $D^j(U(-t)U_0(t))$ converge, se j satisfaz a desigualdade, existe um C^j difeomorfismo G tal que $(G^{-1})_*R_*X$ seja conjugado com $DX(0)$. ■

Outros Resultados de Linearização

5.1 Teorema de Sternberg

Nesta seção seguiremos a estratégia de [15], e tirando algumas idéias dadas em [25]. Encontramos os coeficientes da série de Taylor da aplicação que conjuga formalmente os jatos de f com sua parte linear. O segundo passo é mostrar que a série encontrada corresponde a uma aplicação C^∞ . Finalmente, mostramos que todas funções com mesma série de Taylor são conjugadas. Fixando coordenadas locais próximo ao ponto fixo p da aplicação f , os coeficientes do polinômio de Taylor de grau k de f formam o conjunto $J_p^k(f)$ que chamamos de k -ésimo jato de f em p . Duas aplicações C^∞ , f e g , são C^∞ tangentes em p se $J_p^k(f) = J_p^k(g)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, se as séries de Taylor de f e g coincidem neste ponto. Lembramos que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores complexos de Df_p . Uma relação da forma $\lambda_k = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}$, tal que é chamada relação de ressonância. Definimos o Cone Horizontal H_p^γ no ponto p , como o conjunto satisfazendo:

$$H_p^\gamma = \{(u, v) \in T_p\mathbb{R}^n : \|v\| \leq \gamma\|u\|\}$$

Analogamente, temos o Cone Vertical:

$$V_p^\gamma = \{(u, v) \in T_p\mathbb{R}^n : \|u\| \leq \gamma\|v\|\}$$

Seja $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$ nós definiremos o tamanho de k sendo $|k| = \sum_{i=1}^n k_i$ e se $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nós temos $x^k := \prod_{i=1}^n x_i^{k_i} = 1x_i^{k_i}$

Proposição 5.1. *Suponhamos $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tal que $\lambda_i \neq \lambda_k$ para todo i e para $k \in \mathbb{N}_0^n$. Considere a formal serie de potência f dado por*

$$f_i(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_{i,k} x^k$$

Com termo constante não nulo e cuja parte linear é $\text{diag } \lambda$ (que é a diagonal matriz com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$). Seja g a parte linear de f . Então existe uma formal serie resolvendo a equação $h \circ f = g \circ h$.

A relação da forma $\lambda_i = \lambda^k$ é chamado a ressonância e correspondente $\lambda_i \neq \lambda_k$ é chamado a não ressonância

Demonstração:

De acordo com a hipótese feita sobre g (parte linear de f), podemos reescrever:

$$f_i(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_{i,k} x^k = \lambda_i x_i + \sum_{|k| > 1} f_{i,k} x^k.$$

Afirmção: A parte linear de h comuta com f . Se l indica o termo linear, e o s indica os termos de ordem superior, temos:

$$\begin{aligned} h \circ f &= g \circ h \\ (h_l + h_s) \circ (f_l + f_s) &= g \circ (h_l + h_s) \\ h_l \circ (f_l + f_s) + h_s \circ (f_l + f_s) &= g \circ h_l + g \circ h_s \\ h_l \circ f_l + h_l \circ f_s + h_s \circ (f_l + f_s) &= g \circ h_l + g \circ h_s. \end{aligned}$$

Tomando os termos lineares

$$h_l \circ f = g \circ h_l,$$

temos demonstrada a afirmação. Assim, do fato se g ser diagonal, segue que h_l é diagonal e h pode ser escrita na forma: Com a parte linear mais termos de maior ordem.

$$h_i(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} h_{i,k} x^k = \alpha_i x_i + \sum_{|k| > 1} h_{i,k} x^k$$

a i -ésima coordenada da conjugação da equação $h \circ f(x) = g \circ h(x)$ passa a ser

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^n} h_{i,k} (f(x))^k = \lambda_i h_i(x),$$

ou

$$\alpha_i f_i(x) + \sum_{|k| > 1} h_{i,k} (\lambda_1 x_1 + \sum_{|j_1| > 1} f_{i,k} x^{j_1})^{k_1} \dots (\lambda_n x_n + \sum_{|j_n| > 1} f_{i,k} x^{j_n})^{k_n} = \lambda_i h_i(x).$$

Nós queremos Resolveremos a equação indutivamente em $m := |k|$ para os coeficientes $h_{i,k}$ de h em termos dos coeficientes $f_{i,k}$ e de λ_i . Em outras palavras, nós queremos construir uma conjugação de m -jets dado uma conjugação de $(m-1)$ -jets. Para $m=1$ as escolhas são arbitrárias, por exemplo, pode ter uma $Dh = Id$. Suponhamos $m \in \mathbb{N}$ e nós queremos determinar todos $h_{i,k}$ desejado, como pela hipóteses indutiva nós temos encontrado todos os h_k para todo $|k| < m$. Então para qualquer k tal que $|k| = m$ se considera os termos envolvidos x^k comparando os termos temos:

$$\alpha_i f_{i,k} + \lambda^k h_{i,k} = \lambda_{i,k} + C_{i,k}. \quad (5.1)$$

onde $C_{i,k}$ envolve só coeficientes com índices j tal $|j| < m$, além disso é inteiramente determinado por o anterior passo. Além disso encontramos $h_{i,k}$ como

$$h_{i,k} = \frac{\alpha_i f_{i,k} - C_{i,k}}{\lambda_i - \lambda^k}. \quad (5.2)$$

O qual esta bem definido pela não ressonância.

Agora suponhamos que ainda estamos na situação da proposição anterior, mas agora existe $k \in \mathbb{N}^n$ tal que $\lambda_i = \lambda^k$ para algum i , então os termos com coeficientes $h_{i,k}$ em (5.1) desaparece, e não podemos remover o termo envolvendo x^k para a i -ésima função. Esta observação leva a estudar formas normais, o qual são as generalização da parte linear do mapa. ■

Definição 5.2. *Seja $c.x^k$ um termo diferente de zero em a i -ésima coordenada proveniente da ressonância $\lambda_i = \lambda^k$ é chamado termo ressonante . Uma forma normal de uma aplicação é a aplicação pertencente a classe de equivalência suave de f cuja série de potência contém somente termos lineares e ressonantes*

O processo anterior pode ser generalizado para a situação onde g tem no linear termino, que é,

$$g_i(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} g_{i,k} x^k = \lambda_i x_i + \sum_{|k| > 1} g_{i,k} x^k,$$

então 5.1 se converte em

$$\alpha_i f_{i,k} + \lambda^k h_{i,k} = \lambda_i h_{i,k} + \alpha^k g_{i,k} + C_{i,k}. \quad (5.3)$$

Onde os $c_{i,k}$ são determinados pelo anterior passo, pode-se envolver menores termos de g . Suponhamos agora que g tem só termos ressoantes a parte linear de h fixada pode ser a identidade, então 3.26 ainda segue sendo válido para os termos de não ressonância e para

os termos de ressonância 3.27 implica $g_{i,k} = f_{i,k} - C_{i,k}$, que é, os termos ressonantes de g são unicamente definidos se existe uma formal conjugação.

Agora estudamos as possível ressonâncias em dois dimensões, para o caso hiperbólico, existe dois autovalores ao qual denotamos por λ_-, λ_+ tal que $|\lambda_-| < 1 < |\lambda_+|$.

As ressonâncias tem a forma $\lambda_- = \lambda_-^k \lambda_+^l$ o que implica $\lambda_-^{k-1} = \lambda_+^{-l}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$.

Ademais se $\varphi_-^+ = |\log |\lambda_+||$ a ressonância implica $\frac{\varphi_+}{\varphi_-} \in \mathbb{Q}$ pois se λ_- e λ_+ tem ressonância se tem: $\lambda_-^{k-1} = \lambda_+^{-l}$ o $\lambda_-^{-l} = \lambda_+^{k-1}$, suponhamos o primer casso, então se tem $|\lambda_-^{k-1}| = |\lambda_+^{-l}|$, então $|\lambda_+| = |\lambda_-^{\frac{k-1}{-l}}|$, daí temos:

$$\frac{\varphi_+}{\varphi_-} = \frac{|\log |\lambda_+||}{|\log |\lambda_-||} = \frac{|k-1|}{-l} \frac{|\log |\lambda_-||}{|\log |\lambda_-||} = \frac{k-1}{l}.$$

Inversamente se $\frac{\varphi_+}{\varphi_-} \in \mathbb{Q}$, então existe uma ressonância.

$\frac{\varphi_+}{\varphi_-} = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$ relativamente primo então dizemos que existe (p, q) -ressonância. Descreveremos para simplificar quando ambos são positivos. Suponhamos que existe uma (p, q) -ressonância então

$$\frac{|\log \lambda_+|}{|\log \lambda_-|} = \frac{p}{q}.$$

Como $\lambda_- < 1$ então $\log \lambda_- < 0$, daí

$$\frac{-\log \lambda_+}{\log \lambda_-} = \frac{p}{q},$$

daí se tem que:

$$\lambda_-^q \lambda_+^p = 1, \text{ se } \lambda_- = \lambda_-^k \lambda_+^l. \quad (5.4)$$

De (5.4) se tem

$$\lambda_+^{pm} = \lambda_-^{qm} \forall m \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

De (5.5) se tem

$$\lambda_-^{-k+1} = \lambda_+^l. \quad (5.6)$$

De (5.5) e (5.6) se tem:

$$\lambda_+^{pm-l} = \lambda_-^{-qm+k-1}$$

daí $pm = l$ e $k = qm + 1 \forall m \in \mathbb{N}$.

Similarmente $\lambda_+ = \lambda_+^k \lambda_-^l$ implica $k = mp + 1, l = mq$. Então pelo resultados anteriores

se tem que se f é uma forma normal tem a seguinte forma:

$$f(x, y) = (\lambda_- x(1 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (x^q y^p)^m), \lambda_+ y(1 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (x^q y^p)^m))$$

Proposição 5.3. *Para qualquer seqüência $a_k k \in \mathbb{N}_0^n \subset \mathbb{R}$ existe uma função $t.q$ os a_k são os coeficientes de Taylor de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

Demonstração:

Seja

$$b_1(x) := \begin{cases} e^{2-(x+1)^{-2}-(x-1)^{-2}}, & \text{se } |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Definamos:

$$b_2(x) := \frac{\int_{|x|}^{\infty} b_1(t-2)dt}{\int_{-1}^1 b_1(t)dt}.$$

Fazendo mudança de variável $t-2=u$ então b_2 é

$$b_2(x) := \frac{\int_{|x|-2}^{\infty} b_1(t)dt}{\int_{-1}^1 b_1(t)dt}.$$

Se $x \in [-1, 1]$ então $|x|-2 \leq -1$, então pela definição de b_1 se tem que

$$\int_{|x|-2}^{\infty} b_1(t)dt = \int_{-1}^1 b_1(t)dt.$$

Daí $b_2 = 1 \forall x \in [-1, 1]$, pela definição de b_1 se tem

$$\int_{-1}^1 b_1(t)dt = \int_{\infty}^1 b_{-\infty}(t)dt.$$

Então $0 \leq b_2(x)x \leq 1$.

Agora provaremos a proposição: Nós definiremos

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} a_k x^k b_2(|k|! C_{|k|} \|x\|^2),$$

onde $C_N := (\sum_{l=0}^N \sum_{|i|=l} |a_i|)^{\frac{N}{2}}$. Fixando $x \neq 0$ temos que $|k|! C_{|k|} \|x\|$ é ilimitada e estritamente crescente para $|k|$. Assim somente existe um número finito de termos diferentes

de zero e a série converge. observe que para $|k|!C_{|k|}\|x\| \leq 2$ então

$$|a_k x^k b_2(|k|!C_{|k|}\|x\|^2)| \leq |a_k| \|x\|^{|k|} \leq |a_k| \left(\frac{2}{C_{|k|}|k|!}\right)^{\frac{|k|}{2}} \leq \left(\frac{2}{|k|!}\right)^{\frac{|k|}{2}} \quad (5.7)$$

a última desigualdade vem do fato que $|a_k| \leq \sum_{l=0}^N \sum_{|i|=l} |a_i|$. Logo a soma converge uniformemente. ■

Lema 5.4. *Seja p um ponto periódico hiperbólico. Podemos tomar parametrizações de modo que $W_{loc}^s(p)$ e W_{loc}^u sejam $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ e $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ respectivamente.*

Demonstração:

Olhando em coordenadas, sabemos que as variedades são localmente gráficos de funções. A instável é o gráfico da função ϕ_u e a estável é o gráfico da ϕ_s . Definamos $\phi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ definida por $\phi(x_s, x_u) = (x_s - \phi_u(x_u), x_u - \phi_s(x_s))$.

A derivada de ϕ no zero é a identidade. Por tanto é um difeomorfismo local. Se $(x, y) \in W^u(p)$ então $\phi(x, y) = (x - \phi^s(y), 0) \in \mathbb{R}^k \times 0$. Se $(x, y) \in W^s(p)$ então $\phi(x, y) = (0, y - \phi^u(x)) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$. ■

Teorema 5.5. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ com um ponto fixo p e g qualquer $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tangente para f . Então existe uma vizinhança U de p e um C^∞ difeomorfismo h o qual é C^∞ tangente para a identidade tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Demonstração:

Primeiro, Pelo o Lema acima adaptamos coordenadas locais com p no origem tal que variedades estável e instável de p são os espaços $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^{n-k}$. Além disso, a Variedade Estável Local de f é uma vizinhança da origem em E^s enquanto que a Variedade Instável Local é uma vizinhança da origem em E^u . O mesmo vale para o difeomorfismo g . Para f nós podemos conjugar g por um difeomorfismo C^∞ tangente pra a identidade tal que resultando estável e instável variedade coincide com estes para f . Tomamos $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ tal que $\rho = 1$ em $B_{\frac{\beta}{2}}^s$ e $\rho = 0$ em $B_{\frac{\beta}{2}}^s(0)$. Defina $\tilde{f} = \rho f + (1 - \rho)Df(0)$. Então $\tilde{f}$ é um difeomorfismo que coincide com f em $B_{\frac{\beta}{2}}^s(0)$ e é igual a $Df(0)$ em $B_{\frac{\beta}{2}}^s(0)$. Portanto podemos construir $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ difeomorfismos tais que a Variedade Estável Local (resp. a Variedade instável Local) do ponto fixo hiperbólico 0 é uma vizinhança do ponto fixo no

subespaço Estável (resp. Instável) da parte linear de f e g e ainda fora de uma vizinhança os difeomorfismos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ coincidem com as partes lineares, $Df(0)$ e $Dg(0)$. Por abuso de notação, chamaremos estas aplicações de f e g . Seja $\alpha = f - g$. Esta aplicação tem jato nulo no ponto fixo 0 e fora de uma vizinhança de 0. Construiremos uma conjugação C^1 tangente a identidade entre f e $w = f + \alpha^+$. Após conjugarmos w e g . A aplicação α pode ser decomposta em:

$$\alpha = \alpha^+ + \alpha^- \quad (5.8)$$

onde α^+ e todo jet desaparece sobre $\mathbb{R}^k$ e α_- e todo jet desaparece sobre $\mathbb{R}^{n-k}$. Para construir a decomposição (5.8). Seja ρ uma função C^∞ definida na esfera unitária S tal que $\rho = 1$ na intersecção de S com o cone horizontal $H_{\frac{1}{2}}$, $S \cap H_{\frac{1}{2}}$, e $\rho = 0$ na intersecção de S com o cone vertical $V_{\frac{1}{2}}$, $S \cap V_{\frac{1}{2}}$. Defina

$$\alpha^-(x) = \begin{cases} \alpha(x)\rho(\frac{x}{\|x\|}), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Então defina $\alpha^+ = \alpha - \alpha^-$.

É evidente que estas são as funções desejadas, exceto que precisamos verificar que ambas são C^∞ no origem. Note que para $k \in \mathbb{N}_0$ $\|D^k \alpha(x)\| = o(\|x\|)$ e a derivada de ρ são limitadas.

Usando a regra da cadeia obtemos que a expressão para $D^k \alpha^-$ fora do origem é um polinômio nas derivadas de α , ρ , e $\|x\|^{-1}$ e que. Cada monômio contém α o alguma destas derivadas. Sabendo que a série de Taylor $T_{\alpha^-}^k$ de ordem k de α^- na origem é nula temos que uma vizinhança da origem é válido $\alpha^-(x) = T_{\alpha^-}^k + R(x)$. A função resto $R(x)$ satisfaz $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{\|x\|^k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

As derivadas de $\frac{x}{\|x\|}$ assumem a forma $\frac{p(x)}{\|x\|^l}$ onde $p(x)$ é um polinômio em x e $\|x\|$. Pela a regra do produto, os monômios da k -ésima derivada de α^- são da forma

$$\alpha^{(i)}(x)\rho^{(j)}(x)\frac{p(x)}{\|x\|^l} = \frac{\alpha^{(i)}(x)}{\|x\|^l}\rho^{(j)}(x)p(x)$$

Mas ρ e suas derivadas são limitadas. O polinômio p converge para zero quando x tende a zero. E conforme visto acima, o limite de $\frac{\alpha^{(i)}}{\|x\|^l}$ também é zero. Assim concluímos que α^- é C^∞ na origem. Definamos

$$\begin{array}{ccc} f & : & [0, 1] \times \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ x & \rightarrow & f(t, x) = f(x) + t\alpha^- \end{array}$$

Dado t_0 , denotamos f_{t_0} a função $f(t_0, x)$. Vamos a procurar uma família de C^∞ difeomor-

fismo h_t de classe C^∞ que satisfaça (Método do caminho).

$$f_0 = h_t^{-1} \circ f_t \circ h_t$$

Esta família é gerado pela família de campo vetoriais

$$v_t = \frac{d(h_s \circ h_t^{-1})}{ds} \Big|_{s=t}$$

Diferenciando a relação

$$h_s^{-1} \circ h_t^{-1} \circ f_t = f_s \circ h_s \circ f_t^{-1}$$

com respeito a s nós obtemos

$$v_t \circ f_t - Df_t(v_t) = \alpha^- \quad o \quad v_t - (f_t)_* v_t = \alpha^- \circ (f_t)^{-1}$$

Com efeito

$$\partial_s(h_s^{-1} \circ h_t^{-1} \circ f_t) = \partial_s(f_s \circ h_s \circ f_t^{-1}) \quad (5.9)$$

Primeiro derivaremos o primer membro, então derivaremos

$$\partial_s(h_s^{-1} \circ h_t^{-1} \circ f_t) \quad (5.10)$$

aplicando a regra da cadeia temos que (5.10) fica como

$$\partial_s f_s(h_s \circ h_t^{-1}) + \partial_{h_s \circ h_t^{-1}} f_s(h_s \circ h_t^{-1}) \partial_s(h_s \circ h_t^{-1}) \quad (5.11)$$

Agora derivando o segundo membro, então derivamos

$$\partial_s(f_s \circ h_s \circ f_t^{-1}) \quad (5.12)$$

aplicando a regra da cadeia temos que (5.11) fica

$$\partial_s[h_s \circ h_t^{-1}](f_t) + \partial_{f_t}[h_s \circ h_t^{-1}](f_t) \partial_s f_t \quad (5.13)$$

de (5.11) e (5.13) se tem que (5.9) fica

$$\partial_s f_s(h_s \circ h_t^{-1}) + \partial_{h_s \circ h_t^{-1}} f_s(h_s \circ h_t^{-1}) \partial_s(h_s \circ h_t^{-1}) = \partial_s[h_s \circ h_t^{-1}](f_t) + \partial_{f_t}[h_s \circ h_t^{-1}](f_t) \partial_s f_t \quad (5.14)$$

Agora em (5.14) remplazamos t em lugar de s obtemos

$$\partial_t f_t(h_t \circ h_t^{-1}) + \partial_{h_t \circ h_t^{-1}} f_t(h_s \circ h_t^{-1}) \partial_t(h_t \circ h_t^{-1}) = \partial_t[h_s \circ h_t^{-1}](f_t) + \partial_{f_t}[h_t \circ h_t^{-1}](f_t) \partial_t f_t$$

daí obtemos

$$v_t \circ f_t - Df_t(v_t) = \alpha^- \quad \text{ou} \quad v_t - (f_t)_* v_t = \alpha^- \circ (f_t)^{-1}$$

Observe que:

$$(I - (f_t)_*) \sum_{j=0}^{\infty} (f_t)_*^j = \sum_{j=0}^{\infty} (f_t)_*^j - \sum_{j=1}^{\infty} (f_t)_*^j = I.$$

Então a inversa de $I - f_t$ é $\sum_{j=0}^{\infty} (f_t)_*^j$. Podemos escrever

$$v_t = \sum_{m=0}^{\infty} (f_t)_*^m \alpha^- \circ f_t^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} Df_t^m \alpha^- \circ f_t^{-m-1}$$

Precisamos mostrar que v_t é um campo vetorial C^∞ , numa vizinhança da origem. Para isto, provaremos que a soma converge na topologia C^∞ , ou seja, que a soma da k -ésima derivada converge para todo $k \in \mathbb{N}$.

A k -ésima da composição m vezes de uma função f cresce à taxa de, no máximo $C^{mk} m^{k-1}$, com C uma cota máxima para as derivadas de até ordem k dos termos individuais. Para mostrar este fato, observamos que para a primeira derivada temos, se $\|Df\| < C_1$:

$$Df^m = Df|_{f^{m-1}} \circ Df|_{f^{m-2}} \circ \dots \circ Df|_x < C_1^m$$

Para a segunda derivada:

$$D^2 f^m = \sum_i Df|_{f^{m-1}} \dots D^2 f_{m-i} (Df)_{|f^{m-i-1}}^2 \dots Df|_x < m C_2^{2m}$$

Prosseguindo analogamente, verificamos que k -ésima derivada é cotada por $m^{k-1} C_k^{mk}$ onde C_k é uma cota superior para as derivadas de f até ordem k . Portanto, podemos cotar $D^k f_t^m$ por $m^{k-1} C_k^{mk}$ se $\|D^l f\| < C_k$ para $l \leq k$ e, da mesma forma, cotamos f_t^{-m-1} por $(m+1)^{k-1} D_k^{(m+1)k}$ se $D^l f^{-1} < D_k$ para $l \leq k$. Por Hartman-Grobman, a $(-m-1)$ -ésima iterada de f_t^{-m-1} está exponencialmente próxima de R^k (Variedade Estável) logo $\alpha^-(f_t^{-m-1}(x))$ e $D^k \alpha^-(f_t^{-m-1}(x))$ são arbitrariamente, pela construção de α^- . As derivadas de $\alpha^- \circ f_t^{-m-1}$ são polinômios em α^- e f_t^{-m-1} e suas derivadas. Consistem então, em termos que contém α ou uma de suas derivadas avaliadas em f^{-m-1} e as derivadas de f^{-m-1} já cotadas. Portanto cada termo é exponencialmente pequeno pois é formado pelo produto de um termo exponencialmente pequeno por um termo da forma $m^{k-1} C_k^{mk}$. Logo a série v_t e suas derivadas convergem. Conseguimos a família h_t e portanto a conjugação

entre f e w . A segunda conjugação (entre w e g) é feita similarmente usando iteradas positivas de f e α^+ no lugar de α^- . ■

Completamos a prova do Teorema da Linearização de Sternberg:

Teorema 5.6. *Seja f um difeomorfismo C^∞ com um ponto fixo hiperbólico p tal que a parte linear de f em p não tem ressonâncias. Então existe uma vizinhança de p onde f é conjugada com sua parte linear.*

Teorema 5.7. *Seja f um difeomorfismo C^∞ com um ponto fixo hiperbólico p tal que a parte linear de f é diagonal e a forma normal de f em p é uma série de potências convergente. Então f localmente C^∞ conjugada a forma normal.*

Demonstração:

Demonstraremos os Teoremas 5.6, 5.7: Após resolver a conjugação formal entre f e sua forma normal g , aplicamos a proposição 5.6 para obter uma C^∞ tangente a g . Finalmente pelo o Teorema 5.5 temos o resultado. ■

5.1.1 Um trabalho de George Sell

Neste artigo estuda a questão de uma C^k -conjugação entre

$$x'(t) = Ax + F(x) = f(x). \quad (5.15)$$

e a associada equação linear

$$y'(t) = Ay. \quad (5.16)$$

Onde $A = Df(0)$ e $D^p F(0) = 0$ para $p = 0, 1$.

Se a equação (5.15) e (5.16) são C^k conjugadas perto do $x = 0$, diz-se que 5.16 admite uma C^k -linearização.

Seja A uma matriz $n \times n$ com autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ com suas respectivas multiplicidades e seja $\text{Spec}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ o espectro de A . Seja $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ e definimos $\gamma(\lambda, m) = \lambda - (m_1 \lambda_1, \dots, m_n \lambda_n)$, onde λ é um número complexo. Seja $|m| = m_1 + \dots + m_n$. Diremos que A é hiperbólico se $\text{Re} \lambda \neq 0 \forall \lambda \in \text{Spec}(A)$. A é dito ser estável.

Diz-se que A satisfaz a condição de Sternberg de ordem k , $k \geq 2$, se $\gamma(\lambda, m) \neq 0 \forall \lambda \in \text{Spec}(A)$ para $\forall m$ tal que $2 \leq |m| \leq k$. Diz-se que A satisfaz a condição forte de Sternberg forte de ordem k , se A satisfaz a condição de Sternberg de ordem k e

$$\text{Re} \gamma(\lambda, m) \neq 0, \quad (5.17)$$

$\forall \lambda \in \text{Spec}(A)$ e $\forall m$ com $|m| = k$. Se A satisfaz a condição forte de Sternberg e $k \geq 2$ então A é hiperbólica, pois pela equação (5.17) temos que se $m = (k, 0, \dots, 0)$ então $\text{Re}(\lambda - k\lambda) \neq 0$, daí como $k \geq 2$ então $\text{Re}\lambda \neq 0 \forall \lambda \in \text{Spec}A$

Seja A uma matriz hiperbólica, então definamos o seguintes conjuntos:

$$\text{Spec}^+(A) = \{\lambda \in \text{Spec}(A) / \text{Re}\lambda > 0\},$$

$$\text{Spec}^-(A) = \{\lambda \in \text{Spec}(A) / \text{Re}\lambda < 0\}.$$

Diz-se que A é estritamente hiperbólica se A é hiperbólica e $\text{Spec}^+(A) \neq \emptyset$, $\text{Spec}^-(A) \neq \emptyset$. Se A é hiperbólico e $\text{Spec}^i(A) \neq \emptyset$, definimos a propagação espectral por

$$\rho^i = \frac{\max\{|\text{Re}\lambda| : \lambda \in \text{Spec}^i(A)\}}{\min\{|\text{Re}\lambda| : \lambda \in \text{Spec}^i(A)\}},$$

onde $i = \pm$.

Seja R um inteiro positivo e A uma matriz hiperbólica. Definimos uma R -Suavidade de A para o maior inteiro $K \geq 0$ tal que:

1. $R - K\rho^- \geq 0$, se $\text{Spec}^-(A) \neq \emptyset$,
2. $R - K\rho^+ \geq 0$, se $\text{Spec}^+(A) \neq \emptyset$.
3. Existem inteiros positivos M, N com $R = M + N$, com $M - K\rho^+ \geq 0$, $N - K\rho^- \geq 0$, com A estritamente hiperbólico.

No trabalho prova os seguintes resultados respeito a C^k -linearização :

Teorema 5.8. *Seja $R \geq 2$ um inteiro, e suponhamos que $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^{3R} com $0 \in U$ onde $D^p F(0) = 0$ para $p = 0, 1$. Seja A uma matriz estritamente hiperbólica, e consideremos uma das seguintes hipóteses:*

1. *Assumamos que A satisfaz a condição forte de Sternberg de ordem R .*
2. *Assumamos que A satisfaz que $D^p F(0) = 0$ para $0 \leq p \leq R - 1$ e que*

$$\text{Re}\gamma(\lambda, m) \neq 0.$$

Para todo $\lambda \in \text{Spec}(A)$ e para todo m com $|m| \neq R$.

Sob qualquer hipótese 1 ou 2, a equação (5.15) admite uma C^K -linearização, onde K é a R -suavidade de A

Demonstração:

:Ver [13] ■

Teorema 5.9. *Se A é estável, então o Teorema anterior é válido se F é de classe C^{2R} .*

Demonstração:

[13] ■

Sejam

$$\Gamma = \min\{|Re\gamma(\lambda, m)|\},$$

$$\Lambda^+ = \min\{Re\lambda : Re > 0, \lambda \in Spec(A)\}$$

$$\Lambda^- = \min\{-Re\lambda : Re < 0, \lambda \in Spec(A)\}.$$

Seja $K \geq 0$ o maior inteiro tal que existe inteiros positivos M e N tal que $Q = M + N$, $K \leq \min\{M, N\}$ e

$$\Lambda^+(M - K\rho^+) > -\Gamma$$

,

$$\Lambda^-(M - K\rho^-) > -\Gamma$$

Enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 5.10. *Suponhamos que se satisfaz as hipótese do primeiro teorema então a equação 5.15 tem uma C^K -linearização.*

Observamos que $K \leq Q$, então o Teorema primeiro implica o último Teorema. Também o método usado por Sell pode ser estendido para difeomorfismos encontrando condições suficientes para uma C^k -linearização numa vizinhança de um ponto fixo hiperbólico.

Seja U um subconjunto aberto de E onde E é um espaço de Banach de dimensão finita, com $0 \in U$. Seja $f : U \rightarrow E$, $g : U \rightarrow E$ dois C^n -difeomorfismos com $n \geq 2$ e com $f(0) = g(0) = 0$ uma C^m conjugação h entre f e g perto do $x = 0$ é uma C^m conjugação com $h(0) = 0$ e $f = h^{-1}gh$ perto do $x = 0$. Se f é C^m -conjugado com g onde $gy = Ay$ é linear e $A = DF(0)$, então se diz-se que f admite uma C^m -linearização perto do $x = 0$. Para um difeomorfismo diz-se que A é hiperbólica se $Spec(A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset$, diz-se que A é estável se $\forall \lambda \in Spec(A)$ se tem que $|\lambda| < 1$.

Para $m = (m_1, \dots, m_n)$ definimos $\mu(\lambda, m)$ por

$$\mu(\lambda, m) = \lambda(\lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n})^{-1}.$$

Diz-se que A satisfaz a condição de sternberg de order $k \geq 2$ quando $\mu(\lambda(\lambda, m)) \neq 1 \forall \lambda \in \text{Spec}(A)$ e $\forall m$ com $2 \leq |m| \leq k$. Se A satisfaz a condição de Sternberg de order $k \geq 2$ e $|\mu(\lambda, m)| \neq 1 \forall \lambda \in \text{Spec}(A)$ e $\forall |m| = k$.

Seja A uma matriz hiperbólica então definamos os seguintes conjuntos.

$$\text{Spec}^+(A) = \{\lambda \in \text{Spec}(A) / |\lambda| > 1\}.$$

$$\text{Spec}^-(A) = \{\lambda \in \text{Spec}(A) / |\lambda| < 1\}.$$

Uma matriz hiperbólica A diz-se estritamente hiperbólica se A é hiperbólica e $\text{Spec}^+(A), \text{Spec}^-(A)$ são diferentes do vazio. Se A é hiperbólico e $\text{Spec}^i(A) \neq \emptyset$ nós definimos a propagação espectral por

$$\rho^i = \frac{\max\{\log|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}^i(A)\}}{\min\{\log|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}^i(A)\}}.$$

Onde $i = +$ ou $-$

Seja Q um inteiro positivo e A uma matriz hiperbólica. Definimos uma R -Suavidade de A para o major inteiro $K \geq 0$ tal que:

1. $Q - K\rho^- \geq 0$, se $\text{Spec}^i(A) \neq \emptyset$.
2. $Q - K\rho^+ \geq 0$, se $\text{Spec}^i(A) \neq \emptyset$.
3. Existem inteiros positivos M, N com $Q = M + N$, com $M - K\rho^+ \geq 0$, $N - K\rho^- \geq 0$, com A estritamente hiperbólico.

No trabalho Sell [13] prova os seguintes resultados respeito a difeomorfismos:

Teorema 5.11. *Seja $Q \geq 2$ um inteiro e seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \mathbb{R}^n$ é um C^{3Q} -difeomorfismo de U com $0 \in U$ e $A = DF(0)$. Seja A uma matriz não singular e estritamente hiperbólica, e consideremos uma das seguintes hipóteses:*

1. *Assumamos que A satisfaz a condição forte de Sternberg de order R .*
2. *Assumamos que A satisfaz que $D^p F(0) = 0$ para $0 \leq p \leq Q - 1$ e que*

$$\text{Re}\gamma(\lambda, m) \neq 0,$$

para todo $\lambda \in \text{Spec}(A)$ e para todo m com $|m| \neq Q$.
sob qualquer hipótese 1 ou 2, a equação (5.15) admite uma C^K -linearização, onde K é a Q -suavidade de A

Demonstração:

:Ver [13] ■

Teorema 5.12. *Se A é estável, então o Teorema anterior é válido se F é de classe C^{2R}*

Como uma aplicação do Teorema de Sterberg, Sell apresenta um exemplo de aplicação a mecânica celeste, chamado o Teorema dos três corpos.

Um caso particular interessante do Teorema dos três corpos, é quando três corpos se deslocam num plano; dois corpos com massa finita e um com massa desprezível e condição inicial favorável para os corpos de massa não desprezível se deslocarem em um movimento circular uniforme em torno do centro de massa do sistema. O associado sistema não linear descrito acima, e dado pela seguinte sistema proposto por Moeley [20] e utilizado por Sell [13] [13] para dar uma aplicação do Teorema de Sternberg.

Exemplo 5.13.

$$\begin{cases} r' &= vr \cos \phi \\ v' &= U(\phi) \cos \phi - \frac{1}{2}v^2 \cos \phi + 2rh \cos \phi \\ \phi &= w \\ w' &= U'(\phi) \cos^2(\phi) - \frac{1}{2}vw \cos \phi - (2U(\phi) + 2rh - v^2) \sin \phi \cos \phi \end{cases} \quad (5.18)$$

Ou se definimos por $f(r, v, \phi, w) = (vr \cos \phi, U(\phi) \cos \phi - \frac{1}{2}v^2 \cos \phi + 2rh \cos \phi, w, U'(\phi) \cos^2(\phi) - \frac{1}{2}vw \cos \phi - (2U(\phi) + 2rh - v^2) \sin \phi \cos \phi)$ então a equação simplificada é

$$(r, v, \phi, w)' = f(r, v, \phi, w).$$

Com a relação de energia

$$\frac{1}{2}(v^2 \cos^2 \phi + w^2 + \omega^2 r^{-1}) - U(\phi) \cos^2(\phi) = rh \cos^2 \phi, \quad (5.19)$$

onde $h < 0$ é a energia, ω é o momentum,

$$U(\phi) = \frac{1}{2}m^{\frac{3}{2}}m_3[\alpha \sec \phi + 4(1 + 2\alpha \sin^2 \phi)^{-\frac{1}{2}}],$$

e $\alpha = \frac{m}{m_3}$ é a massa raio. A derivação destas equações, o qual são reis analíticas em $\mathbb{R}^4$ e as descrições dos sistemas de coordenadas (r, v, ϕ, w) são dadas em Moeckel(1983). A variável r é a medida do tamanho do triângulo isósceles.

Vamos estudar os pontos fixos de 5.18. Existem 6 pontos fixos. Primeiro observamos que a equação $U'(\omega) = 0$ tem três soluções $\{\phi_-, 0, \phi_+\}$ onde $\phi_- < 0 < \phi_+$. Seja ϕ_c denotamos qualquer destas soluções e definamos $v_c = (2U(\phi_c))^{\frac{1}{2}} > 0$. Então os seis pontos fixos são $(r, v, \phi, w) = (0, \pm v_c, \phi_c, 0)$ onde $\phi_c = \phi_+, 0, \phi_+$. Nós restringimos nossa atenção para o ponto fixo

$$P = (r, v, \phi, w) = (0, -v_0, 0, 0), \quad (5.20)$$

onde $v_0^2 = 2U(0) = \beta(\alpha + 4)$ e $\beta = m^{\frac{3}{2}}m_3$.

Se denotamos por $A = Df(P)$, então a equação associada ao campo A é:

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ \phi \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 2h & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & U''(0) & -\frac{v_0}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ v \\ \phi \\ w \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} -v_0 & 0 & 0 & 0 \\ 2h & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & U''(0) & -\frac{v_0}{2} \end{pmatrix},$$

então obtemos que os autovalores são $\lambda_1 = -v_0$, $\lambda_2 = +v_0$, $\lambda_3 = -\frac{1}{4} + J$, $\lambda_4 = -\frac{1}{4} - J$. Onde $J = \frac{1}{4}(v_0^2 + 16U''(0))^{\frac{1}{2}}$.

Pode-se mostrar que os autovalores $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ têm uma ressonância de order seis desde que $\lambda_2 = 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4$, $\lambda_3 = \lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4$, $\lambda_4 = \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4$ Pode-se mostrar que estes autovalores não tem ressonância de order < 6 . Daí os autovalores $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ cumprem a condição forte de Sternberg de order 5. A propagação spectral são dados por $\rho^+ = 1$ e

$$\rho^- = \rho = \frac{v_0 + 4J}{v_0 - 4J},$$

e para $0 < \alpha \leq \frac{4}{55}$, e $\rho^- = 1$ para $\alpha > 0$ então pelo o Teorema dado para fluxos obtém-se uma C^2 -linearização quando $\rho \leq \frac{3}{2}$, o Teorema (3.9) implica que se existe um $\alpha < \frac{3}{43}$ o qual existe uma C^2 -linearização para $\alpha > \alpha_0$.

5.1.2 Um trabalho de Carmen and Richard Swanson

Neste trabalho da uma prova direta do teorema de Hartman Grobman, também da uma condição mais fraca da que da Hartman em [16] que diz que um C^2 campo pode ser C^1 linearizável, quando temos um atrator ou um repulsor.

Teorema 5.14. Hartman *Seja X um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $X(0) = 0$. Se supormos que $\operatorname{Re} \lambda < 0, \forall \lambda \in \operatorname{Spec} DX(0)$, então X é localmente C^1 conjugado a $DX(0)$.*

Definição 5.15. Função Hölder *Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, se existe algum (expoente Hölder) $0 < \mu \leq 1$ e alguma constante $M > 0$ tal que*

$$|h(x) - h(y)| \leq M|x - y|^\mu, \forall x, y \in U.$$

No caso especial quando $\mu = 1$, a função h é chamada Lipschitz. Como uma conveniente notação, seja $C^{1,\mu}$ denotamos por as classes cujas derivadas parciais são todas hölder com expoente de hölder μ .

Definição 5.16. Expoente Spectral de Hölder *Seja $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma transformação linear, supormos que $\{-b_1, -b_2, \dots, -b_N\}$ é o conjunto da parte real dos autovalores da transformação A e*

$$-b_N < -b_{N-1} < \dots < -b_1 < 0.$$

O expoente Spectral de Hölder de A é

$$\frac{b_1(b_{j+1} - b_j)}{b_1(b_{j+1} - b_j) + b_{j+1}b_j}$$

Onde

$$\frac{b_{j+1} - b_j}{b_{j+1}b_j} = \min \left\{ \frac{b_{i+1} - b_i}{b_{i+1}b_i} \right\}, i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$$

quando $N > 1$ e é um quando $N = 1$. O expoente spectral Hölder cujos autovalores são todos reais positivos é o exponents spectral de $-B$.

Teorema 5.17. Hartman com hipótese mais fraca. *Seja X um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^n \in C^{1,1}$ tal que $X(0) = 0$ tal que $\forall \lambda \in \operatorname{Spec}(DX(0))$ se tem $\operatorname{Re} \lambda < 0$ e seja $\mu > 0$ o expoente spectral hölder então existe um difeomorfismo $h: U \rightarrow V \in C^{1,\mu}$ perto da identidade definida sobre alguma vizinhança U do origem que conjuga X com sua parte linear i.e*

$$h(e^{tA}x) = X_t(h(x)).$$

Referências Bibliográficas

- [1] Adriano Thiago Lopes Bernardino. Ideais de aplicações multilineares e polinômios entre Espaços de Banach.
- [2] Keith Burns and Marian Gidea. **Differential Geometry and topology** with a view to Dynamical Systems.
- [3] Augusto Armando de Castro Júnior. Curso de Equações Diferenciais Ordinárias.
- [4] Carmen Chicone. Ordinary Differential Equations with Applications.
- [5] Carmen Chicone and Richard Swanson. Linearization via Lie Derivative Electron. J. Diff. Eqns., Monograph 02, 2000
- [6] Elon Lages Lima. Análisis em $\mathbb{R}^n$
- [7] V. Baladi and D. Smania. Smooth deformations of piecewise expanding unimodal maps. ar- Xiv:0710.1845v1, 2007.
- [8] Bruno Aloís Forlin Roth. Determinação de pontos fixos e órbita periódicas em sistemas caóticos.
- [9] A. Banyaga, R. de la Llave, and C. E. Wayne. Cohomology equations near hyperbolic points and geometric versions of Sternberg linearization theorem. J. Geom. Anal., 6(4):613 649 (1997), 1996.
- [10] Hildebrando Munhoz Rodrigues Equações Diferenciais Ordinárias. Notas de Aula.
- [11] Jacob Palis e Welington de Melo. Introdução aos Sistemas dinâmicos.

-
- [12] Edward Nelson. Topics in Dynamics I: Flows Preliminary Informal Notes of University Courses and Seminars in Mathematics.
- [13] George R.Sell. Linearization Near a Fixed Point American Journal of mathematician, Vol.107, No.5 (Oct.1985), pp. 1035-1091
- [14] Hildebrando M. Rodrigues and J.Solà Morales. On the Hartman-Grobman theorem with parametros
- [15] A. Katok and B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems, volume 54 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [16] P.Hartman. On local homeomorphisms of Euclidean spaces. Bol Soc Mat Mex (2)5 220-241, 1960.
- [17] J. N. Mather. Characterization of Anosov diffeomorphisms. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 71 =Indag. Math., 30:479-483, 1968.
- [18] J. Moser. On a theorem of Anosov. J. Differential Equations, 5:41-440, 1969
- [19] M. J. Pacífico and A. Rovella. Unfolding contracting singular cycles. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 26(6):691-700, 1993.
- [20] R. Mocklel. Heteroclic phenomena in isosceles three-body problem. (Preprint).
- [21] Ricardo Rosa. Equações Diferenciais Ordinárias e Introdução aos Sistemas Dinâmicos.
- [22] S. Sternberg. Local contractions and a theorem of Poincaré. Amer. J. Math., 79:809 824, 1957.
- [23] S. Sternberg. On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space. II. Amer. J. Math., 80:623-631, 1958.
- [24] S. Sternberg. The structure of local homeomorphisms.III. Amer. J. Math., 80:623 631, 1958.
- [25] M.Viana What's new on Lorenz strange attractors? Math. Intelligencer, 22(3):6-19, 2000.

-
- [26] Zbigniew Nitecki. **Differentiable Dynamics** An Introduction to the orbit Structure of Diffeomorphisms.
- [27] Martín Sambarino. Introducción a los Sistemas Dinámicos.
- [28] Ivana de Vasconcellos Latosinski, Sônia Pinto de Carvalho e Sylvie Oliffson Kamphorst. Variedades Invariantes de Aplicações no Plano.