SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 19 de Janeiro de 2010

Assinatura:_____

Existência e não existência de soluções globais para uma equação de onda do tipo p -Laplaciano

Fabio Antonio Araujo de Campos

Orientador: *Prof. Dr. Ma To Fu*

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

USP – São Carlos
Janeiro/2010

---

*A Deus por iluminar
minha vida. E a minha
querida Mãe in memo-
rian.*

Agradecimentos

À minha querida Mãe, que sonhou este sonho comigo.

Ao professor Ma To Fu, que com compreensão, dedicação e boa vontade aceitou orientar-me neste projeto.

À minha família, amigos e a Renata pela compreensão nas minhas ausências, apoio e estímulo.

Aos meus amigos de Mestrado, pelas discussões e convivência que me ajudaram muito nesta jornada.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a equação de ondas do tipo p -Laplaciano

$$u_{tt} - \Delta_p u + (-\Delta)^\alpha u_t = |u|^{q-2}u,$$

definida num domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, com $2 \leq p < q$ e $0 < \alpha < 1$. Utilizando o método de Faedo-Galerkin provamos a existência de soluções fracas globais para dados iniciais pequenos. Para essas soluções estudamos também o decaimento polinomial da energia associada. A questão da não existência de soluções globais é considerada para o caso em que a energia inicial do sistema é negativa.

Abstract

In this work we study the p -Laplacian wave equation

$$u_{tt} - \Delta_p u + (-\Delta)^\alpha u_t = |u|^{q-2}u,$$

defined in a bounded domain of $\mathbb{R}^n$, with $2 \leq p < q$ and $0 < \alpha < 1$. By using the Faedo-Galerkin method we prove the existence of weak global solutions for small initial data. We also study the polynomial decay of the associate energy. The blow-up of solutions in finite time is considered for negative initial energy.

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Topologias Fraca e Fraca Estrela	5
1.2 Espaços $L^p(\Omega)$	6
1.3 Distribuições	7
1.3.1 Convergência em $D(\Omega)$	8
1.3.2 Derivada de uma Distribuição	8
1.4 Espaços de Sobolev	9
1.4.1 Imersões de Sobolev	9
1.4.2 Operadores de Ordem Fracionária	10
1.5 Os Espaços $L^p(0, T; V)$	12
1.6 Operador p -Laplaciano	13
1.7 Resultados Gerais	14
2 Existência Global de Solução	17
2.1 Problema Aproximado	20
2.2 Estimativas a priori	21
2.3 Passagem ao limite	25
2.4 Condições Iniciais	28
3 Comportamento Assintótico	31
4 Não Existência de Solução Global	39
Referências Bibliográficas	46

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudamos a questão da existência global e o comportamento assintótico de soluções para uma equação de onda do tipo p -Laplaciano,

$$u_{tt} - \Delta_p u + Du_t = g(u), \quad (1)$$

onde Du_t é termo de dissipação (damping) e $g(u)$ é uma perturbação não linear.

O operador p -Laplaciano, também chamado pseudo Laplaciano, é definido por

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \quad \text{ou} \quad \Delta_p u = \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad p > 1.$$

Estas duas formas do pseudo Laplaciano correspondem às derivadas de Fréchet, em $W_0^{1,p}(\Omega)$, dos funcionais

$$\|u\|_A^p = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad \text{e} \quad \|u\|_B^p = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^p dx,$$

respectivamente, onde $\|\cdot\|_A$ e $\|\cdot\|_B$ são conhecidas normas equivalentes.

O pseudo Laplaciano é um operador não linear que se reduz ao Laplaciano usual no caso $p = 2$, e é de grande interesse teórico por ser protótipo para o estudo de diversas equações envolvendo operadores monótonos, hemi-contínuos e degenerados. (ver por exemplo Lions [11])

Muitos estudos sobre equações de ondas do tipo p -Laplaciano foram apresentados nos últimos trinta anos. Normalmente, para o estudo de soluções globais, consideram-se termos dissipativos fortes

$$Du_t = -\Delta u_t,$$

conforme por exemplo, Biazutti [2], Ma e Soriano [13], Messaoudi [16] e Webber [23]. Aparentemente, a existência de soluções globais desse tipo de problema com apenas dissipação “fraca”

$$Du_t = u_t,$$

é um problema em aberto.

Em 2007, Yaojun Ye [25] apresentou um resultado de existência global para a equação (1) com a dissipação fraca $Du_t = u_t$ acima observada, num contexto de dados pequenos tomados dentro de um conjunto de estabilidade (poço potencial). É um resultado do tipo Sattinger [7], Georgiev e Todorova [8] ou Messaoudi [16].

Dessa forma, pareceu-nos interessante apresentar uma dissertação unificando o artigo de Ye [25] e o artigo de Gao e Zhang [6], que trata da não existência do tipo “blow-up” de soluções do problema (1) com energia inicial negativa.

Entretanto, descobrimos mais tarde que o artigo [25] contém um erro na aplicação do conhecido Teorema de Aubin-Lions [11], invalidando um argumento essencial sobre a compacidade do problema.

Para recuperar a nossa proposta inicial, resolvemos estudar a equação (1) com uma dissipação intermediária, considerada anteriormente por Gao e Ma [7]. Mais precisamente, consideramos

$$Du_t = (-\Delta)^\alpha u_t, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Podemos observar que $\alpha = 0$ corresponde a dissipação fraca $Du_t = u_t$ e $\alpha = 1$ corresponde a dissipação forte $Du_t = -\Delta u_t$.

No presente trabalho consideramos o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_p u + (-\Delta)^\alpha u_t = |u|^{q-2}u, & \text{em } \Omega \times (0, T) \\ u(x, t) = 0, & \text{em } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2)$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $2 \leq p < q$ e $0 < \alpha < 1$. Os dados iniciais deverão satisfazer

$$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad e \quad u_1 \in L^2(\Omega). \quad (3)$$

Basicamente, reunimos os resultados de três artigos (Ye [25], Gao-Ma [7] e Gao-Zhang [6]), reescrevendo-os dentro de um mesmo contexto e linguagem.

No Capítulo 2, provamos a existência de soluções globais para o problema (2) com dados pequenos, seguindo os passos de Ye [25], mas com dissipação tipo fracionário apresentado em Gao e Ma [7]. O método utilizado é de aproximação de Faedo-Galerkin, combinado com argumentos de monotonia, como apresentados em Lions [11]. O resultado principal é o Teorema 2.4.

No Capítulo 3, provamos que a energia do sistema associada às soluções obtidas no Teorema 2.4,

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p - \frac{1}{q} \|u(t)\|_q^q,$$

decai para zero a uma taxa polinomial. Como veremos,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}u(t)\|_2^2,$$

o que mostra que a energia é decrescente. O resultado segue as linhas de Gao e Ma [7] e Biazutti [2]. A análise é feita utilizando o método de Nakao [18]. O resultado principal é o Teorema 3.1.

No Capítulo 4, apresentamos um resultado de não existência global para o problema (2) no caso da energia inicial ser negativa. O resultado é apresentado em Gao e Zhang [6] e segue os passos de Messaoudi-Belkacem [17].

Reunimos alguns resultados e definições de Análise Funcional e Espaços de Sobolev no Capítulo 1, para conveniência dos leitores.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Daremos aqui algumas definições e resultados que serão importantes como pré-requisitos para uma melhor compreensão do que será tratado a seguir.

1.1 Topologias Fraca e Fraca Estrela

Seja X um espaço de Banach e X^* seu dual topológico. A topologia Fraca $\sigma(X, X^*)$ em X é a topologia menos fina que torna contínua todos os funcionais $(\varphi_f)_{f \in X^*}$ tal que $\varphi_f : X \rightarrow K$ e $\varphi_f(x) = f(x) = \langle f, x \rangle$ para f percorrendo X^* .

Definição 1.1. Dizemos que uma sequência $\{x_n\} \subset X$ é fracamente convergente em X , se é convergente no sentido de $\sigma(X, X^*)$. Neste caso escrevemos $x_n \rightharpoonup x$. Em particular, uma sequência $\{x_n\}$ converge fracamente se e só se, $|f(x_n) - f(x)| \rightarrow 0$ para $\forall f \in X^*$.

Proposição 1.2. *Seja X um espaço de Banach e $\{x_n\}$ uma sequência em X . Temos que:*

- $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow f(x), \forall f \in X^*$
- Se $x_n \rightarrow x$, então $x_n \rightharpoonup x$.
- Se $x_n \rightharpoonup x$, então $\{\|x_n\|\}$ é limitado e $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.
- Se $x_n \rightharpoonup x$ e se $f_n \rightarrow f$ em X^* ($\|f_n - f\|_{X^*} \rightarrow 0$), então $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Demonstração: Ver [3].

Definição 1.3. A topologia Fraca Estrela, denotada por $\sigma(X^*, X)$, é a topologia menos fina de X^* induzida por $\{\varphi_x\}_{x \in X}$. Ou seja, $f_n \rightarrow f$ em $(X^*, \sigma(X^*, X))$, escrevemos $f_n \xrightarrow{*} f$, e diremos que f_n converge para f na topologia Fraca Estrela.

Proposição 1.4. *Seja X um espaço de Banach. Se $\{f_n\} \subset X^*$ temos:*

- $f_n \xrightarrow{*} f \Leftrightarrow \langle f_n, x \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in X$
- Se $\|f_n - f\|_{X^*} \longrightarrow 0$, então $f_n \xrightarrow{*} f$ em X^* . Se $f_n \rightharpoonup f$ em X^* , então $f_n \xrightarrow{*} f$ em X^* .
- Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em X^* , então $\|f_n\|$ é limitado e $\|f\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|$.
- Se $f_n \xrightarrow{*} f$ em X^* e $x_n \longrightarrow x$ em X , então $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.5. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que a sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seja limitada em X . Então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca.*

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.6. *Sejam X um espaço de Banach separável e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada em X^* . Então existe uma subsequência $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Ver [3]

1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $1 \leq p < \infty$. Então $L^p(\Omega)$ denota o conjunto das classes de equivalência das funções mensuráveis $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$, onde identificamos as funções cujos valores são iguais q.s. em Ω . A norma em $L^p(\Omega)$ é dada por:

$$\|u\|_p = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{1/p} \quad (1.1)$$

Para o caso em que $p = \infty$, definimos $L^\infty(\Omega)$ o conjunto consistindo de todas as funções mensuráveis que são essencialmente limitadas. A norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por:

$$\|u\|_\infty = \inf\{c; |u(x)| \leq c, \text{ q.s. em } \Omega\} \quad (1.2)$$

Proposição 1.7. $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach para todo $1 \leq p \leq \infty$.

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.8. (Hölder). Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ então $uv \in L^1(\Omega)$ e tem-se a desigualdade,

$$\int_{\Omega} |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q, \quad (1.3)$$

onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.9. (Fatou). *Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geq 0$ q.s. em Ω .*

$$\int_{\Omega} \liminf_n f_n(x) dx \leq \liminf_n \int_{\Omega} f_n(x) dx. \quad (1.4)$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.10. (Convergência dominada). *Seja f_n uma sequência de funções integráveis em $L^p(\Omega)$. Suponha que:*

1 f_n converge q.s. para uma função f em $L^p(\Omega)$.

2 Existe uma função integrável g em $L^p(\Omega)$, tal que $|f_n| \leq g$. Então, $f \in L^p(\Omega)$ e

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_n \int_{\Omega} f_n(x) dx. \quad (1.5)$$

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.11. (Representação de Riez). *Sejam $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então existe uma única $u \in L^q(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_q = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}. \quad (1.6)$$

Demonstração: Ver [3].

1.3 Distribuições

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Por um multi-índice entendemos os $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ com ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Definimos o operador de derivada parcial D^α , de ordem $|\alpha|$, por:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \quad (1.7)$$

onde a função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suficientemente derivável.

Definição 1.12. Seja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. O suporte de u é definido por:

$$\text{supp}(u) := \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega. \quad (1.8)$$

Definição 1.13. O subespaço vetorial de $C^\infty(\Omega)$ definido por todas as funções com suporte compacto contidos em Ω , será denotado por $C_0^\infty(\Omega)$, isto é,

$$C_0^\infty(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega); \text{supp}(u) \subset\subset \Omega\} \quad (1.9)$$

onde o símbolo $\subset\subset$ denota compactamente contido, ou seja, $V \subset\subset W$ se $\bar{V} \subset W$ e $\bar{V}$ é compacto. O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ será chamado o espaço das funções testes.

Definição 1.14. Dizemos que uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω , se for Lebesgue-integrável em todo compacto $K \subset \Omega$. Denotamos este espaço por,

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{u \in L^1(K); K \subset\subset \Omega\} \quad (1.10)$$

Lema 1.15. (Du Bois-Raymond). Seja $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ e tal que,

$$\int_{\Omega} u \varphi dx = 0 \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.11)$$

então $u = 0$ quase sempre em Ω .

Demonstração: Ver [15].

1.3.1 Convergência em $D(\Omega)$

Definição 1.16. (O Espaço $D(\Omega)$). Sobre o espaço $C_0^\infty(\Omega)$, definiremos a seguinte noção de convergência. Diremos que $\{\varphi_n\}$ em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero em $C_0^\infty(\Omega)$, quando:

1. Existe $K \subset \mathbb{R}^n$, com $K \subset\subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
2. Para $\alpha \in \mathbb{N}^k, \forall k \in \mathbb{N}^*$, temos que $D^\alpha \varphi_n \rightarrow 0$ uniformemente em Ω .

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ com esta noção de convergência é denotado por $D(\Omega)$ e denominado *espaço das funções testes* em Ω .

Definição 1.17. Uma distribuição em $D(\Omega)$ é um funcional linear $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada $\varphi \in D(\Omega)$ associa o número real $\langle T, \varphi \rangle$. Além disso T deve ser contínua no seguinte sentido: se $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge para φ em $D(\Omega)$, então $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$. O espaço de todas as distribuições será denotado por $D'(\Omega)$.

Diremos que $\{T_n\}$ converge para zero em $D'(\Omega)$, se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow 0$ para todo $\varphi \in D(\Omega)$.

1.3.2 Derivada de uma Distribuição

Definição 1.18. Seja T uma distribuição e $\alpha \in \mathbb{N}^k$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. A derivada de ordem α de T é definida por:

$$\begin{aligned} D^\alpha T : D(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle. \end{aligned}$$

1.4 Espaços de Sobolev

Sja $\alpha \in \mathbb{N}^k$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Sabemos que se $u \in L^p(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ nem sempre ocorre $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Exemplo desse fato é a função de Heaviside.

Definição 1.19. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tal que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ para todo multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de inteiros não negativos. Com as correspondentes normas dadas por,

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{se} \quad 1 \leq p < \infty \quad (1.12)$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \quad \text{se} \quad p = \infty \quad (1.13)$$

são chamados Espaços de Sobolev de ordem m em $L^p(\Omega)$.

Quando $m = 0$ temos $W^{m,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ e quando $p = 2$ temos $W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Definição 1.20. Definimos para $1 \leq p < \infty$ o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $D(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$, escrevemos $H_0^m(\Omega)$ em lugar de $W_0^{m,2}(\Omega)$. Além disso, a norma $\|\nabla u\|_p$ é uma norma de $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a norma definida em (1.12).

Teorema 1.21. O espaço $(W^{m,p}(\Omega), \|\cdot\|_{m,p})$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Ver [15].

O espaço $H^m(\Omega)$ com $m \in \mathbb{N}$ é um espaço de Hilbert, no qual o produto interno, é definido por

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_2,$$

onde $(\cdot, \cdot)_2$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$, que é também um espaço de Hilbert.

Notação: Denota-se por $W^{-1,p'}(\Omega)$ o espaço dual topológico de $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Por $H^{-1}(\Omega)$ denotamos o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$.

Indentificamos o dual de $L^2(\Omega)$ consigo mesmo, porém não fazemos isso com $H_0^1(\Omega)$.

1.4.1 Imersões de Sobolev

Proposição 1.22. Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 onde $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são contínuas.

i Se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $1 \leq q \leq \frac{np}{n-p} = p^*$.

ii Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ onde $1 \leq q < \infty$.

iii Se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.23. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, tem-se as seguintes imersões,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,p}(\Omega) \quad \text{se} \quad \frac{2N}{N+2} \leq p < \infty \quad (1.14)$$

contínuas e densas.

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.24. (Rellich-Kondrachov). *Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então as seguintes imersões são compactas:*

i Se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ onde $1 \leq q < \frac{np}{n-p} = p^*$.

ii Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ onde $1 \leq q < \infty$.

iii Se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$.

Demonstração: Ver [3].

1.4.2 Operadores de Ordem Fracionária

Considere espaços de Hilbert V e H com os respectivos produtos internos $((\cdot, \cdot))$ e $(\cdot, \cdot)$. Suponha $V \hookrightarrow H$ densamente e $V \hookrightarrow H$ compactamente. Seja $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica, contínua e coerciva. Pelo teorema da representação de Riez, para cada $u \in V$ existe um único $\mathcal{A}u \in H$ tal que $a(u, v) = ((\mathcal{A}u, v))$, para $\forall v \in V$. Desta forma o operador $\mathcal{A}$ fica bem definido pela terna $\{V, H, ((\cdot, \cdot))\}$. O domínio de $\mathcal{A}$, representado por $D(\mathcal{A})$, é o conjunto dos $u \in V$ tal que a forma linear $v \mapsto ((u, v))$ é contínua em V com a topologia induzida de H . Ou seja:

$$D(\mathcal{A}) = \{u \in V; v \mapsto ((u, v)) \text{ é contínua, para } \forall v \in V\} \quad (1.15)$$

Além disso, $\mathcal{A}$ é um operador limitado, positivo e auto-adjunto.

Considerações sobre Operadores Auto-Adjuntos: Seja H um espaço de Hilbert e a notação $A \subseteq B$ indicando que A é um subconjunto denso de B . Dizemos que $T : \text{dom}T \subset H \rightarrow H$ é simétrico se

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle, \quad \forall u, v \in \text{dom}T. \quad (1.16)$$

Dizemos que T é Hermetiano se T é simétrico e $\text{dom}T$ é subconjunto denso em H . Então o operador T^* é uma extensão de toda extensão auto-adjunta de T . Esses resultados podem ser visto em [26].

Teorema 1.25. *Seja V um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita e $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ uma aplicação linear, simétrica e estritamente positiva em V . Então:*

(i) *Existe um sistema ortonormal completo $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de H constituído por autovetores de $\mathcal{A}$.*

(ii) *Se $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ são os autovalores de $\mathcal{A}$ correspondentes aos autovetores $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ então,*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_\nu \leq \dots,$$

com $\lambda_\nu \longrightarrow \infty$ quando $\nu \longrightarrow \infty$.

(iii) $\mathcal{A}(w_\nu) = \lambda_\nu w_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [9].

Observação 1.26. O operador $\mathcal{A}$, pode ser visto como o "inverso" de um operador compacto.

Definição 1.27. Definimos então $D(\mathcal{A}^\alpha) = \{u \in H; \sum_{\nu}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} |(u, w_\nu)|^2 < +\infty\}$ e para cada $u \in D(\mathcal{A}^\alpha)$ definimos:

$$\mathcal{A}^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu.$$

Para $\alpha > 0$, a potência $\mathcal{A}^{-\alpha}$ é definida por:

$$\mathcal{A}^{-\alpha} u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} (u, w_\nu) w_\nu.$$

Observação 1.28. : Como λ_1 é o menor dos autovalores de $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ temos,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}^\alpha u\| &= \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu \right\| \geq \lambda_1^\alpha \left\| \sum_{\nu=1}^{\infty} (u, w_\nu) w_\nu \right\| \\ &= \lambda_1^\alpha \|u\|. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Proposição 1.29. *Seja $\alpha > 0$, a imersão $D(\mathcal{A}^\alpha) \hookrightarrow H$ é compacta.*

Demonstração: Ver [14].

Proposição 1.30. *Se $\rho \geq 0, \alpha > 0$, então a imersão $D(\mathcal{A}^{\alpha+\rho}) \hookrightarrow D(\mathcal{A}^\alpha)$ é compacta.*

Demonstração: Ver [14].

1.5 Os Espaços $L^p(0, T; V)$

Definição 1.31. Seja V um espaço de Banach. Uma função $u : (0, T) \rightarrow V$ é mensurável quando para toda função $f \in V^*$ a função numérica $t \mapsto \langle f, u(t) \rangle_{V^*, V}$ for mensurável a Lebesgue em $(0, T)$.

Definição 1.32. Dizemos que $u : (0, T) \rightarrow V$ é integrável no sentido de Bochner em $(0, T)$ se u mensurável e a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|_V$ for integrável a Lebesgue em $(0, T)$. Neste caso, a integral de Bochner de u é o vetor de V , denotado por $\int_0^T u(t)dt$ e caracterizado por,

$$\left\langle f, \int_0^T u(t)dt \right\rangle_{V^*, V} = \int_0^T \langle f, u(t) \rangle_{V^*, V} dt, \forall f \in V^*. \quad (1.18)$$

Definição 1.33. Seja $1 \leq p < \infty$, denotamos $L^p(0, T; V)$ o espaço vetorial das funções vetoriais $u : (0, T) \rightarrow V$, que a cada $t \in (0, T)$ faz corresponder o vetor $u(t) \in V$, tal que $t \mapsto u(t)$ é mensurável e $t \mapsto \|u(t)\|_V^p$ é integrável a Lebesgue em $(0, T)$.

Em $L^p(0, T; V)$ define-se a norma

$$\|u\|_{L^p(0, T; V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p dt \right)^{1/p}$$

em relação a qual $L^p(0, T; V)$ é um espaço de Banach.

Por $L^\infty(0, T; V)$ denotamos o espaço vetorial das funções mensuráveis $u : (0, T) \rightarrow V$ tais que

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_V < \infty. \quad (1.19)$$

Em $L^\infty(0, T; V)$ definimos a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; V)} = \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_V \quad (1.20)$$

em relação a qual $L^\infty(0, T; V)$ é um espaço de Banach.

Se $1 \leq p < \infty$, então o dual topológico de $L^p(0, T; V)$ se identifica com o espaço $L^{p'}(0, T; V^*)$ onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Demonstra-se também que se V é um espaço reflexivo (resp. separável) e $1 < p < \infty$ (resp. $1 \leq p < \infty$), então $L^p(0, T; V)$ é reflexivo (resp. separável).

Dado $u \in L^p(0, T; V)$, $1 \leq p \leq \infty$, definimos a aplicação linear,

$$T_u(\varphi) = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_0^T u(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T) \quad (1.21)$$

onde a integral é entendida como a integral de Bochner em V .

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0, T)$ em V é denominado espaço das distribuições vetoriais sobre $(0, T)$ com valores em V , o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(0, T; V)$.

Definição 1.34. Seja $T \in \mathcal{D}'(0, T; V)$. A derivada de T de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0, T)$ com valores em V dado por:

$$\left\langle \frac{d^n T}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle T, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, T). \quad (1.22)$$

Teorema 1.35 (Aubin-Lions). *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1 , e W o espaço:*

$$W = \{u \in L^2(0, T; B_0); u' \in L^2(0, T; B_1)\}$$

munido da norma $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0, T; B_0)} + \|u'\|_{L^2(0, T; B_1)}$. Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^2(0, T; B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [11].

Lema 1.36 (Lema de Lions). *Seja $\mathcal{O}$ um aberto do $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, e sejam g_k e g funções de $L^q(\mathcal{O})$, $1 < q < \infty$, tais que:*

$$\|g_k\|_{L^q(\mathcal{O})} \leq C$$

$$e \quad g_k \longrightarrow g \text{ quase sempre em } \mathcal{O}.$$

Então $g_k \longrightarrow g$ na topologia fraca de $L^q(\mathcal{O})$.

Demonstração: Ver [11].

1.6 Operador p -Laplaciano

Definição 1.37. Seja V um espaço de Banach reflexivo; considere a função $\mathcal{A} : V \longrightarrow V'$. Nós dizemos que $\mathcal{A}$ é monótona se $\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(v), u - v \rangle \geq 0$, para $\forall u, v \in V$. E dizemos que $\mathcal{A}$ é hemicontínua se para cada $u, v \in V$ a função de valores reais $t \longmapsto \mathcal{A}(u + tv)(v)$ é contínua.

Exemplo 1.38. *Considere $p \geq 2$, definimos o operador $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$, que aplica $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $W^{-1,q}(\Omega)$, onde $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Este operador é chamado p -Laplaciano e denotado por Δ_p , além disso é fácil ver que Δ_p é monótono, hemicontínuo e limitado.*

Definição 1.39. Dizemos que $\mathcal{A}$ é do tipo M se :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \rightharpoonup u \\ \mathcal{A}(u_n) \rightharpoonup f, \\ \limsup \mathcal{A}u_n(u_n) \leq f(u) \end{array} \right. \implies \mathcal{A}u = f.$$

Proposição 1.40. *Se $\mathcal{A}$ é hemicontínua e monótona, então é do tipo M .*

Demonstração: Seja $\{u_n\}$ uma sequência em V tal que $u_n \rightharpoonup u$, $\mathcal{A}(u_n) \rightharpoonup f$ e $\limsup \mathcal{A}u_n(u_n) \leq f(u)$. Pela monotonicidade temos que $\langle \mathcal{A}(u_n) - \mathcal{A}(v), u_n - v \rangle \geq 0$ para $\forall v \in V$ e então obtemos que $\langle f - \mathcal{A}(v), u - v \rangle \geq 0$ para todo $v \in V$. Para qualquer $w \in V$, tome $v = u - tw$ com $t > 0$, então $t\langle f - \mathcal{A}(u - tw), w \rangle \geq 0$ donde $\langle f - \mathcal{A}(u - tw), w \rangle \geq 0$. Pela hemicontinuidade de $\mathcal{A}$, quando $t \rightarrow 0$ temos que $\langle f - \mathcal{A}(u), w \rangle \geq 0$ para todo $w \in V$, então $\langle f - \mathcal{A}(u), w \rangle = 0$, para $\forall w \in V$, logo $f = \mathcal{A}(u)$. ■

1.7 Resultados Gerais

Definição 1.41. Seja $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Dizemos que f satisfaz as condições de Caratheodory sobre D se:

- $f(t, x)$ é mensurável em t , para cada x fixo;
- $f(t, x)$ é contínua em x , para cada t fixo;
- Para cada compacto C em D , existe uma função real integrável $m_C(t)$ tal que

$$|f(t, x)| \leq m_C(t), \quad \text{para } \forall (t, x) \in C. \quad (1.23)$$

Considere o retângulo $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}; |t - t_0| < a, |x - x_0| < b\}$, com $a, b > 0$.

Teorema 1.42 (Carathéodory). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre $\mathbb{R}$. Então em algum intervalo $|t - t_0| < \beta$, com $\beta > 0$, existe uma solução do problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.43. (Prolongamento de solução). *Seja $D = [0, w] \times B$, com $0 < w < \infty$ e $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < b\}$, $b > 0$ e f nas condições de Carathéodory. Seja $\varphi(t)$ uma solução de:*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, |x_0| \leq b. \end{cases}$$

Suponhamos que em qualquer intervalo $I \subset \mathbb{R}$, onde $\varphi(t)$ está definida tenha-se $|\varphi(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de t e $M < b$. Então, φ tem um prolongamento até $[0, w]$.

Demonstração: Ver [4].

Agora apresentamos um lema que é devido a Nakao. Este será utilizado no Capítulo 3.

Lema 1.44 (Nakao). *Seja E uma função não negativa e limitada, definida em $\mathbb{R}^+$ e satisfazendo a desigualdade*

$$\sup_{t \leq s \leq t+1} E(s)^{\gamma+1} \leq C_0[E(t) - E(t+1)], \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.24)$$

onde C_0 é uma constante positiva e γ é uma constante não negativa.

1. *Se $\gamma > 0$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$E(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.25)$$

2. *Se $\gamma = 0$, então existem constantes positivas K e ρ tal que*

$$E(t) \leq K \exp^{-\rho t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.26)$$

Demonstração: Ver [18]

CAPÍTULO 2

EXISTÊNCIA GLOBAL DE SOLUÇÃO

Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, com fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ suficientemente regular, $T > 0$ um número real e $Q = \Omega \times (0, T)$ cuja fronteira lateral é dada por $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Considere o seguinte problema,

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_p u + (-\Delta)^\alpha u_t = |u|^{q-2}u, & \text{em } Q \\ u(x, t) = 0, & \text{em } \Sigma \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

com

$$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{e} \quad u_1 \in L^2(\Omega), \quad (2.2)$$

onde $q \geq 2$ é um número real não-negativo e Δ_p é o operador p -Laplaciano com $p \geq 2$.

Definição 2.1. Uma função $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{e} \quad u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.3)$$

é chamada solução fraca do problema (2.1), se para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se

$$\frac{d}{dt}(u_t, v) - \langle \Delta_p u, v \rangle + ((-\Delta)^\alpha u_t, v) = (|u|^{q-2}u, v) \quad (2.4)$$

em $D'(0, T)$, e ainda

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{e} \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.5)$$

Definiremos alguns funcionais,

$$J(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{q} \|u\|_q^q, \quad K(u) = \|\nabla u\|_p^p - \|u\|_q^q, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.6)$$

e de acordo com [25] definimos

$$d = \inf_u \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \right\} \quad (2.7)$$

e o seguinte conjunto,

$$W = \{u : u \in W_0^{1,p}(\Omega), K(u) > 0, J(u) < d\} \cup \{0\}. \quad (2.8)$$

Denotaremos a energia total por,

$$E(t) = E(u(t)) = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p - \frac{1}{q} \|u(t)\|_q^q = \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + J(u(t)) \quad (2.9)$$

onde $t \geq 0$ e $E(0) = \frac{1}{2} \|u_1\|_2^2 + J(u_0)$ é a energia total dos dados iniciais.

Agora vamos mostrar a validade de alguns lemas que nos auxiliarão a mostrar a existência de solução para (2.1).

Lema 2.2. *Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e que $p < q < np/(n-p)$ para $2 \leq p < n$ e $p < q < \infty$ para $n \leq p$. Então d é um número real positivo.*

Demonstração: Pela Proposição 1.22, temos que existe $C_q > 0$ tal que $\|u\|_q \leq C_q \|\nabla u\|_p$. Queremos achar o ponto de máximo da função $J(\lambda u)$ para u fixado. Assim de,

$$J(\lambda u) = \frac{\lambda^p}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\lambda^q}{q} \|u\|_q^q \quad (2.10)$$

temos,

$$\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) = \lambda^{p-1} \|\nabla u\|_p^p - \lambda^{q-1} \|u\|_q^q. \quad (2.11)$$

Igualando a expressão anterior a zero temos,

$$\frac{d}{d\lambda} J(\lambda u) = 0 \Rightarrow \lambda^{q-1} \|u\|_q^q = \lambda^{p-1} \|\nabla u\|_p^p \Rightarrow \frac{\lambda^{q-1}}{\lambda^{p-1}} = \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} = \lambda^{q-p}.$$

Assim

$$\lambda_* = \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} \right)^{1/(q-p)}, \quad (2.12)$$

é ponto crítico de $J(\lambda u)$. Derivando (2.11) novamente temos:

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} J(\lambda u) \Big|_{\lambda=\lambda_*} = (p-1) \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} \right)^{\frac{p-2}{q-p}} \|\nabla u\|_p^p - (q-1) \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} \right)^{\frac{q-2}{q-p}} \|u\|_q^q, \quad (2.13)$$

como $p < q$ e

$$\left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} \right)^{\frac{p-2}{q-p}} \|\nabla u\|_p^p = \frac{(\|\nabla u\|_p^p)^{\frac{p-2}{q-p}+1}}{(\|u\|_q^q)^{\frac{p-2}{q-p}}} = \frac{(\|\nabla u\|_p^p)^{\frac{q-2}{q-p}}}{(\|u\|_q^q)^{\frac{q-2}{q-p}-1}} = \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} \right)^{\frac{q-2}{q-p}} \|u\|_q^q, \quad (2.14)$$

por (2.13) e (2.14) temos

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} J(\lambda u) \Big|_{\lambda=\lambda_*} < 0. \quad (2.15)$$

Logo λ_* é ponto de máximo global de $J(\lambda u)$. Então,

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) &= J(\lambda_* u) = \frac{\lambda_*^p}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{\lambda_*^q}{q} \|u\|_q^q \\ &= \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} \right)^{\frac{p}{q-p}} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{p} - \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} \right)^{\frac{q}{q-p}} \frac{\|u\|_q^q}{q} \\ &= \frac{1}{p} \frac{(\|\nabla u\|_p^p)^{\frac{q}{q-p}}}{(\|u\|_q^q)^{\frac{p}{q-p}}} - \frac{1}{q} \frac{(\|\nabla u\|_p^p)^{\frac{q}{q-p}}}{(\|u\|_q^q)^{\frac{p}{q-p}}} = \left(\frac{q-p}{qp} \right) \left(\frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_q^q} \right)^{\frac{qp}{q-p}} \\ &\geq C_q^{\frac{qp}{q-p}} \left(\frac{q-p}{qp} \right) > 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Logo de (2.7) e (2.16) obtemos,

$$d = \inf_u \{ \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) : u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\} \} \geq C_q^{\frac{qp}{q-p}} \left(\frac{q-p}{qp} \right) > 0 \quad (2.17)$$

o que prova o lema. ■

Lema 2.3. *Suponha que $p < q < np/(n-p)$ para $2 \leq p < n$ e $p < q < \infty$ para $n \leq p$. Então d é um número real finito e o conjunto W é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstração: Do Lema 2.2 e de (2.7), temos que

$$d \leq \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u) = J(\lambda_* u) = \left(\frac{q-p}{qp} \right) \lambda_*^p \|\nabla u\|_p^p, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}. \quad (2.18)$$

Assim d é finito.

Se $u \in W$, então $K(u) > 0$, i.e., $\|\nabla u\|_p^p - \|u\|_q^q > 0$. Consequentemente,

$$d > J(u) = \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{q} \|u\|_q^q \geq \left(\frac{q-p}{qp} \right) \|\nabla u\|_p^p$$

e então

$$\|\nabla u\|_p^p \leq \left(\frac{qp}{q-p} \right) d. \quad (2.19)$$

Logo $W \subset \{u \in W_0^{1,p}(\Omega); \|\nabla u\|_p^p \leq \left(\frac{qp}{q-p} \right) d\}$ e portanto W é limitado em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

■

Agora estamos munidos de ferramentas para mostrar a existência de solução de (2.1).

Teorema 2.4. *Suponha que $p < q < np/(n - p)$ para $2 \leq p < n$ e $p < q < \infty$ para $n \leq p$. Se $u_0 \in W$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ e a energia inicial $E(0) < d$, então o problema (2.1) admite solução global fraca $u(x, t)$ tal que $u(\cdot, t) \in W$,*

$$u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad e \quad u_t \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.20)$$

Para provar a existência de solução fraca para o problema (2.1), utilizaremos o método de Faedo-Galerkin que consiste das seguintes etapas:

(i) Aproximações de Galerkin, que consiste em projetar o problema em subespaços de dimensão finita obtendo o problema aproximado. Este por sua vez é um sistema de equações diferenciais ordinárias com valores iniciais, cuja existência de solução local será garantida pelo teorema de Carathéodory (Teorema 1.42).

(ii) Estimativas a priori, que consiste em através da equação aproximada achar limitantes para a solução e suas derivadas. Com isso, utilizando o teorema de prolongamento de soluções (Teorema 1.43), podemos estender a solução local para o intervalo $[0, T]$.

(iii) Passagem ao limite, que consiste em mostrar que as soluções aproximadas convergem para a solução do problema original. Aqui o teorema de compacidade de Aubin-Lions (Teorema 1.35) e o lema de Lions (Lema 1.36) serão essenciais.

(iv) Verificação dos dados iniciais, que consiste em verificar que a solução obtida na etapa anterior satisfaz os dados iniciais.

2.1 Problema Aproximado

Seja r um inteiro tal que $r > n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + 1$. Dessa forma, $H_0^r(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ compactamente. Então o conjunto de autofunções $-\Delta^r w_j = \alpha_j w_j$ em $H_0^r(\Omega)$ será uma base de "Galerkin" para ambos os espaços $H_0^r(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$ o espaço gerado pelos primeiros m vetores w_m . Nós procuramos por uma função

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m K_{jm}(t) w_j, \quad (2.21)$$

onde as funções $K_{jm}(t)$ são escolhidas de modo que cada u_m seja solução do seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$(u_m''(t), w_j) - \langle \Delta_p u_m(t), w_j \rangle + ((-\Delta_p)^\alpha u_m'(t), w_j) = \int_\Omega |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) w_j dx, \quad (2.22)$$

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad u_m'(0) = u_{1m}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (2.23)$$

onde $(u(t), v(t)) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ e u_{0m}, u_{1m} são escolhidos em V_m tais que:

$$u_{0m} \longrightarrow u_0 \quad em \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad , \quad u_{1m} \longrightarrow u_1 \quad em \quad L^2(\Omega) \quad (2.24)$$

Assim, em particular, existem sequências ξ_{jm} e η_{jm} tais que

$$u_{0m} = \sum_{j=1}^m \xi_{jm} w_j \quad e \quad u_{1m} = \sum_{j=1}^m \eta_{jm} w_j.$$

Em vista de (2.22) e (2.23), para cada m fixo, as funções $K_{jm}(t)$, $1 \leq j \leq m$, satisfazem um sistema de equações diferenciais do tipo

$$\begin{cases} K_{jm}''(t) = \mathcal{F}_j(t, K_{jm}(t)), & 1 \leq j \leq m, \\ K_{jm}(0) = \xi_{jm}, & 1 \leq j \leq m, \\ K_{jm}'(0) = \eta_{jm}, & 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Este sistema pode ser reescrito na forma de um sistema de primeira ordem nas condições de Carathéodory.

Ou seja, o problema aproximado (2.22)-(2.23) se reescreve como um sistema de equações diferenciais ordinárias na variável t . Pelo teorema de Carathéodory, este sistema possui solução local $u_m(t)$ num intervalo $[0, t_m)$ (para algum $t_m > 0$). Agora vamos obter estimativas para a solução $u_m(t)$ tal que possamos estendê-la para o intervalo $[0, T]$.

2.2 Estimativas a priori

Multiplicando (2.22) por $K_{jm}'(t)$ e somando sobre j de 1 a m , obtemos:

$$(u_m''(t), u_m'(t)) - \langle \Delta_p u_m(t), u_m'(t) \rangle + ((-\Delta)^\alpha u_m'(t), u_m'(t)) = \int_{\Omega} |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) u_m'(t) dx \quad (2.25)$$

Integrando de 0 a t cada parcela temos,

$$\begin{aligned} \int_0^t ((-\Delta)^\alpha u_m'(s), u_m'(s)) ds &= \int_0^t ((-\Delta)^{\alpha/2} u_m'(s), (-\Delta)^{\alpha/2} u_m'(s)) ds \\ &= \int_0^t \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m'(s)\|_2^2 ds \end{aligned} \quad (2.26)$$

e

$$- \int_0^t \int_{\Omega} \Delta_p u_m(s) u_m'(s) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla u_m(s)|^{p-2} \nabla u_m(s) \nabla u_m'(s) dx ds. \quad (2.27)$$

Como

$$\int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^{p-2} \nabla u_m(t) \nabla u'_m(t) dx = \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^p dx, \quad (2.28)$$

obtemos

$$\int_0^t \int_{\Omega} \Delta_p u_m(s) u'_m(s) dx ds = \frac{1}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p - \frac{1}{p} \|\nabla u_m(0)\|_p^p. \quad (2.29)$$

Agora vamos mostrar que $|u_m(t)|^{q-2} u_m(t) \in L^{q'}(\Omega)$ onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. De fato, como $q' = \frac{q}{q-1}$ e pela proposição 1.22 temos,

$$\| |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) \|_{q'}^{q'} = \int_{\Omega} |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) |^{\frac{q}{q-1}} dx = \int_{\Omega} |u_m(t)|^q dx = \|u_m(t)\|_q^q < \infty \quad (2.30)$$

Utilizando a desigualdade de Hölder, (2.21) e (2.30) temos

$$\int_{\Omega} |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) u'_m(t) dx \leq \| |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) \|_{q'} \|u'_m(t)\|_q < +\infty, \quad (2.31)$$

logo integrando de 0 a t_m a expressão acima temos

$$\int_{\Omega} |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) u'_m(t) dx \in L^1(0, t_m). \quad (2.32)$$

Além disso como,

$$\langle -\Delta_p u_m(t), u'_m(t) \rangle = \int_{\Omega} |\nabla u_m(t)|^{p-2} \nabla u_m(t) \nabla u'_m(t) dx,$$

analogamente ao caso anterior é fácil mostrar que

$$|\nabla u_m(t)|^{p-2} \nabla u_m(t) \in L^{p'}(\Omega). \quad (2.33)$$

Usando Hölder, (2.21) e (2.33) temos

$$\langle -\Delta_p u_m(t), u'_m(t) \rangle \in L^1(0, t_m). \quad (2.34)$$

De (2.26) e como

$$D((-\Delta)^{\alpha/2}) \hookrightarrow L^2(\Omega), \quad (2.35)$$

temos,

$$((-\Delta)^{\alpha} u'_m(t), u'_m(t)) \in L^1(0, t_m) \quad (2.36)$$

de (2.25), (2.32), (2.34) e (2.36) segue que

$$(u_m''(t), u_m'(t)) \in L^1(0, t_m). \quad (2.37)$$

Agora vamos mostrar que

$$(u_m''(t), u_m'(t)) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'(t)|^2 \quad (2.38)$$

onde $\frac{d}{dt}$ é a derivada distribucional em $D'(0, t_m)$. Com efeito, para cada $\theta \in D(0, t_m)$, de (2.37) temos

$$\begin{aligned} \langle (u_m'', u_m'), \theta \rangle &= \int_0^{t_m} (u_m'', u_m') \theta dt \\ &= \int_0^{t_m} \int_{\Omega} u_m'' u_m' dx \theta(t) dt = \int_{\Omega} \int_0^{t_m} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m'|^2 \theta(t) dt dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ |u_m'|^2 \theta(t) \Big|_{t=0}^{t=t_m} - \int_0^{t_m} |u_m'|^2 \theta'(t) dt \right\} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{t_m} \int_{\Omega} |u_m'|^2 \theta'(t) dt = \frac{1}{2} \left\langle \frac{d}{dt} |u_m'|^2, \theta \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Logo de (2.25), (2.26), (2.29) e (2.38) segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u_m(t)\|_p^p + \int_0^t \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m'(s)\|_2^2 ds - \frac{1}{q} \|u_m(t)\|_q^q \\ = \frac{1}{2} \|u_{1m}\|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u_{0m}\|_p^p - \frac{1}{q} \|u_{0m}\|_q^q \end{aligned} \quad (2.40)$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \|u_m'(t)\|_2^2 + J(u_m(t)) + \int_0^t \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m'(s)\|_2^2 ds = \frac{1}{2} \|u_{1m}\|_2^2 + J(u_{0m}). \quad (2.41)$$

Note que usando (2.9) junto com (2.41) temos

$$E_m(t) + \int_0^t \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m'(s)\|_2^2 ds = E_m(0) \quad (2.42)$$

então derivando a expressão acima temos,

$$E_m'(t) = -\|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m'(t)\|_2^2. \quad (2.43)$$

Logo vemos que a energia decresce com o tempo.

Usando (2.41) vamos mostrar que

$$u_m(t) \in W, \quad \text{para } \forall t \in [0, t_m]. \quad (2.44)$$

Suponha que (2.44) não ocorra, então existem valores de $t \in [0, t_m)$ tal que $u_m(t) \notin W$. Então por meio da continuidade de $u_m(t)$, existirá $t_1 \in [0, t_m)$ tal que $u_m(t_1) \in \partial W$. Da definição de W e a continuidade de $J(u(t))$ e $K(u(t))$ em t_1 , temos que

$$J(u_m(t_1)) = d \quad (2.45)$$

ou

$$K(u_m(t_1)) = 0. \quad (2.46)$$

Por (2.41) junto com a condição $E(u(0)) < d$, temos

$$J(u_m(t_1)) \leq \frac{1}{2} \|u_{1m}\|_2^2 + J(u_{0m}) = E(u_m(0)) < d. \quad (2.47)$$

Logo (2.45) é impossível. Assuma que (2.46) se verifica, então nós temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} J(\lambda u_m(t_1)) &= \lambda^{p-1} \|\nabla u_m(t_1)\|_p^p - \lambda^{q-1} \|u_m(t_1)\|_q^q \\ &= \lambda^{p-1} (1 - \lambda^{q-p}) \|\nabla u_m(t_1)\|_p^p. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Por (2.12) e (2.15) temos que $\lambda_* = 1$ é candidato a extremante local e

$$\frac{d^2}{d\lambda^2} J(\lambda u_m(t_1))|_{\lambda=1} < 0. \quad (2.49)$$

Então

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda u_m(t_1)) = J(\lambda u_m(t_1)) \Big|_{\lambda=1} = J(u_m(t_1)) < d, \quad (2.50)$$

o que contradiz (2.7). Assim (2.46) não ocorre, logo $u_m(t) \in W$, ou seja, os dados iniciais são tomados convenientemente em um conjunto limitado, ou ainda podemos pensar que estes dados são tomados pequenos como em [7].

De (2.19), (2.41) e (2.44) temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u'_m(t)\|_2^2 + \left(\frac{q-p}{qp}\right) \|\nabla u_m(t)\|_p^p + \int_0^t \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s)\|_2^2 ds \\ \leq \frac{1}{2} \|u_{1m}\|_2^2 + d \leq C \quad \forall t \in [0, t_m], \end{aligned} \quad (2.51)$$

para algum $C > 0$.

Pelo Corolário de prolongamento de solução, podemos estender a solução aproximada $u_m(t)$ para o intervalo $[0, T]$. Além disso, de (2.51) temos

$$\{u_m\} \quad \text{é limitada} \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.52)$$

$$\{u'_m\} \quad \text{é limitado} \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.53)$$

$$\{u'_m\} \quad \text{é limitado} \quad \text{em} \quad L^2(0, T; D((-\Delta)^{\alpha/2})). \quad (2.54)$$

Como o operador Δ_p é limitado, então

$$\{\Delta_p u_m\} \quad \text{limitado} \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; W^{-1,p/p-1}(\Omega)) \quad (2.55)$$

$$\{|u_m|^{q-2}u_m\} \quad \text{limitado} \quad \text{em} \quad L^\infty(0, T; L^{q'}(\Omega)). \quad (2.56)$$

Finalmente, precisamos de uma estimativa para $u''(t)$. Como a nossa base de "Galerkin" foi tomada no espaço de Hilbert $H_0^r(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, vamos usar o argumento da projeção [11]. Definimos o operador projeção $P_m : H_0^r(\Omega) \rightarrow H_0^r(\Omega)$ que projeta $H_0^r(\Omega)$ sobre V_m e é definido por,

$$P_m(h) = \sum_{j=1}^m ((h, w_j)) w_j \quad h \in H_0^r(\Omega) \quad (2.57)$$

onde $((\cdot, \cdot))$ denota o produto interno em $H_0^r(\Omega)$. Como $\{w_j\}$ é uma base ortonormal de um espaço de Hilbert, temos que P_m assim definido é um projetor ortogonal, logo é um operador autoadjunto. Além disso $H_0^r(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ possuem a mesma base e $H_0^r(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ densamente, então $H_0^r(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ densamente. Então P_m possui uma extensão $P_m^* : H^{-r}(\Omega) \rightarrow H^{-r}(\Omega)$ que será linear e limitada, veja [9]. É fácil mostrar que P_m^* é auto-adjunta. Logo $P_m^*(h) = P_m(h) = h$ para todo $h \in V_m$. Agora aplicamos a projeção em (2.22) temos que

$$(u_m''(t), v) = (P_m^* (|u_m(t)|^{q-2}u_m(t)), v) - \langle P_m^* (\Delta_p u_m(t)), v \rangle - (P_m^* ((-\Delta)^\alpha u'_m(t)), v) \quad (2.58)$$

para todo $v \in V_m$. Pelo argumento de densidade e lembrando que a projeção é uma transformação linear que leva sequências limitadas em sequências limitadas, temos de (2.52), (2.54) e (2.55) que

$$(u_m''(t)) \quad \text{limitado} \quad \text{em} \quad L^2(0, T; H^{-r}(\Omega)). \quad (2.59)$$

2.3 Passagem ao limite

Nós agora passaremos o limite sobre o problema aproximado (2.1). Primeiro observamos que das expressões (2.52), (2.54), (2.55) e (2.56), passando a uma subsequência se necessário, temos

$$u_m \xrightarrow{*} u \quad em \quad L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.60)$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad em \quad L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.61)$$

e de (2.55) existe $\chi_1 \in L^\infty(0, T; H^{-r}(\Omega))$ tal que

$$\Delta_p u_m \xrightarrow{*} \chi_1 \quad em \quad L^\infty(0, T; H^{-r}(\Omega)) \quad (2.62)$$

e de (2.56) existe $\chi_2 \in L^\infty(0, T; L^{q'}(\Omega))$

$$|u_m|^{q-2} u_m \xrightarrow{*} \chi_2 \quad em \quad L^\infty(0, T; L^{q'}(\Omega)) \quad (2.63)$$

Como a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ é compacta e por (2.52) e (2.53), podemos usar Teorema de Aubin-Lions[11]. Logo a sequência

$$u_m \longrightarrow u \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.64)$$

Por (2.54), (2.59) e como $D((-\Delta)^{\alpha/2}) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ compactamente, podemos aplicar novamente o teorema de Aubin-Lions obtendo

$$u'_m \longrightarrow u' \text{ forte em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (2.65)$$

Usando (2.52) e (2.64), nós temos que

$$\begin{aligned} |||u_m|^{q-2} u_m|||_{L^{q'}(0, T; L^{q'}(\Omega))} &= \int_0^T \int_\Omega ||u_m(t)|^{q-2} u_m(t)|^{q'} dx dt \\ &= \int_0^T ||u_m(t)||_q^q dt \leq C \int_0^T ||\nabla u_m(t)||_p^q dt \leq C \end{aligned} \quad (2.66)$$

além disso $|u_m|^{q-2} u_m \longrightarrow |u|^{q-2} u$ quase sempre em $(0, T) \times \Omega$. Assim pelo Lema de Lions, nós concluímos que

$$|u_m|^{q-2} u_m \xrightarrow{*} |u|^{q-2} u \quad em \quad L^{q'}(0, T; L^{q'}(\Omega)). \quad (2.67)$$

Logo de (2.63), (2.67) e pela unicidade da convergência fraca estrela, temos que $\chi_2 = |u|^{q-2} u$.

Agora vamos mostrar que $\chi_1 = \Delta_p u$ usando o argumento da monotonicidade que pode ser encontrado em [11]. Considere a equação

$$(u_m''(t), v) + \langle -\Delta_p u_m(t), v \rangle + ((-\Delta)^\alpha u_m'(t), v) = \int_\Omega |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) v dx, \quad \forall v \in V_m \quad (2.68)$$

pela densidade fazemos $v = u_m(t)$ e integramos de 0 a T para obter,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle -\Delta_p u_m(t), u_m(t) \rangle dt &= - \int_0^T (u_m''(t), u_m(t)) dt - \int_0^T ((-\Delta)^\alpha u_m'(t), u_m(t)) dt \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega |u_m(t)|^q dx dt, \end{aligned} \quad (2.69)$$

agora calculamos cada parcela de (2.69),

$$\begin{aligned} \int_0^T ((-\Delta)^\alpha u_m'(t), u_m(t)) dt &= \int_0^T ((-\Delta)^{\alpha/2} u_m'(t), (-\Delta)^{\alpha/2} u_m(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m(T)\|_2^2 - \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m(0)\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

e

$$\int_0^T (u_m''(t), u_m(t)) dt = (u_m'(T), u_m(T)) - (u_m'(0), u_m(0)) - \int_0^T \|u_m'(s)\|_2^2 ds \quad (2.71)$$

Logo por (2.69), (2.70) e (2.71) temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle -\Delta_p u_m(t), u_m(t) \rangle dt &= -(u_m'(T), u_m(T)) + (u_m'(0), u_m(0)) + \int_0^T \|u_m'(s)\|_2^2 ds \\ &\quad - \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m(T)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m(0)\|_2^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|_q^q dt. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Estamos interessados em passar o limite superior na equação (2.72), para isto utilizaremos o Lema de Fatou, ou mais precisamente sua versão invertida e como

$$\limsup \int_0^T \|u_m(t)\|_q^q dt \leq \int_0^T \|u(t)\|_q^q dt, \quad (2.73)$$

usando as convergências (2.60), (2.64) e (2.65) temos

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \int_0^T \langle -\Delta_p u_m(t), u_m(t) \rangle dt &\leq (u'(0), u(0)) - (u'(T), u(T)) + \int_0^T \|u'(t)\|_2^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_0\|_2^2 - \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u(T)\|_2^2 + \int_0^T \|u(t)\|_q^q dt \end{aligned} \quad (2.74)$$

Por outro lado, passando o limite em (2.68), integrando de 0 a T e usando o argumento de densidade temos,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \chi_1(t), u(t) \rangle dt &= -(u'(0), u(0)) + (u'(T), u(T)) - \int_0^T \|u'(t)\|_2^2 dt - \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_0\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u(T)\|_2^2 - \int_0^T \|u_m(t)\|_q^q dt. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Então por (2.74) e (2.75) temos que

$$\limsup \int_0^T \langle -\Delta_p u_m(t), u_m(t) \rangle dt \leq - \int_0^T \langle \chi_1(t), u(t) \rangle dt. \quad (2.76)$$

Logo pela Proposição 1.13, temos que

$$\chi_1(t) = \Delta_p u(t) \quad (2.77)$$

Agora passando o limite na equação aproximada temos

$$(u''(t), v) + \langle -\Delta_p u(t), v \rangle + ((-\Delta)^\alpha u'(t), v) = \int_\Omega |u(t)|^{q-2} u(t) v dx \quad (2.78)$$

para $\forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ no sentido das distribuições.

2.4 Condições Iniciais

Devido as convergências (2.59), (2.60) e (2.61) segue do Lema 8.1 (capítulo 3) [12] que

$$u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C_s(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad (2.79)$$

$$u' \in C([0, T]; H^{-r}(\Omega)) \cap C_s(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.80)$$

onde $C_s(0, T; X)$ é o espaço das funções fracamente contínuas.

Primeiramente vamos mostrar que

$$u(0) = u_0. \quad (2.81)$$

Seja $\theta \in C^1([0, T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e $m > j$ de (2.65) temos

$$\int_0^T (u'_m(t), w_j) \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), w_j) \theta(t) dt. \quad (2.82)$$

Integrando por partes temos

$$-(u_m(x, 0), w_j) - \int_0^T (u_m(t), w_j) \theta'(t) dt \longrightarrow -(u(x, 0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt. \quad (2.83)$$

Mas de (2.64) temos

$$\int_0^T (u_m(t), w_j) \theta'(t) dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w_j) \theta'(t) dt \quad (2.84)$$

então

$$(u_m(0), w_j) \longrightarrow (u(0), w_j). \quad (2.85)$$

Logo

$$u_m(0) \rightharpoonup u(0) \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2.86)$$

Entretanto de (2.24) temos

$$u_m(0) \rightharpoonup u_0 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2.87)$$

Pela unicidade do limite temos que

$$u(0) = u_0. \quad (2.88)$$

Agora provaremos que

$$u'(0) = u_1. \quad (2.89)$$

Tomando θ nas condições anteriores, vamos multiplicar a equação (2.22) por θ e integrando de 0 a T, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m''(t), w_j) \theta(t) dt - \int_0^T \langle \Delta_p u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt + \int_0^T ((-\Delta)^\alpha u_m(t), w_j) \theta(t) dt \\ = \int_0^T \int_\Omega |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) w_j \theta(t) dx dt \end{aligned} \quad (2.90)$$

Integrando por partes temos:

$$\begin{aligned} -(u_m'(x, 0), w_j) - \int_0^T (u_m'(t), w_j) \theta'(t) dt - \int_0^T \langle \Delta_p u_m(t), w_j \rangle \theta(t) dt \\ + \int_0^T ((-\Delta)^\alpha u_m(t), w_j) \theta(t) dt = \int_0^T \int_\Omega |u_m(t)|^{q-2} u_m(t) w_j \theta(t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, usando a densidade de $\{w_j\}_{j=1}^\infty$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e (2.91) temos:

$$\begin{aligned} - \int_0^T (u'(t), v) \theta'(t) dt - \int_0^T \langle \Delta_p u(t), w_j \rangle \theta(t) dt + \int_0^T ((-\Delta)^\alpha u(t), w_j) \theta(t) dt \\ = \int_0^T \int_\Omega |u(t)|^{q-2} u(t) w_j \theta(t) dx dt + (u_1(t), v) \quad \text{para } \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned} \quad (2.92)$$

Integrando novamente por partes temos:

$$\begin{aligned} (u'(x, 0), v) + \int_0^T \frac{d}{dt} (u'(t), v) \theta(t) dt - \int_0^T \langle \Delta_p u(t), w_j \rangle \theta(t) dt \\ + \int_0^T ((-\Delta)^\alpha u(t), w_j) \theta(t) dt = \int_0^T \int_\Omega |u(t)|^{q-2} u(t) w_j \theta(t) dx dt + (u_1(t), v). \end{aligned} \quad (2.93)$$

Então de (2.90) e (2.93) segue que,

$$(u'(0), v) = (u_1, v) \quad \text{para} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (2.94)$$

Logo

$$u'(0) = u_1 \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.95)$$

O que prova o Teorema 2.4.

■

CAPÍTULO 3

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Neste capítulo estudaremos o comportamento assintótico das soluções globais de (2.1) obtidas no Teorema 2.4.

Mostraremos que a energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|_2^2 + \frac{1}{p} \|\nabla u\|_p^p - \frac{1}{q} \|u\|_q^q, \quad (3.1)$$

decai a zero satisfazendo uma taxa polinomial, que é típico para equações de onda do tipo p -Laplaciano com $p > 2$ (cf. [13, 7]). A análise é baseada na técnica de Nakao [18].

A demonstração do comportamento assintótico do problema (2.1) apresentada em Ye [25] é de difícil verificação. Aparenta faltar alguma hipótese adicional. Uma abordagem alternativa seria aquela apresentada em Messaoudi [16]. Mas aquela abordagem assume certa regularidade na solução, que não é de fato demonstrada. Além disso, o resultado dele é também contestado no Mathematical Review [22]. Dessa forma, seguiremos as linhas gerais de Gao e Ma [7], onde os dados iniciais (pequenos) são escolhidos segundo um argumento devido a L. Tartar [21].

Seja

$$Q(z) = \frac{1}{2p} z^p - \frac{1}{q} C_q^q z^q,$$

onde C_q é a constante de Sobolev da imersão $\|u\|_q \leq C_q \|\nabla u\|_p$. Como $q > p$, Q é estritamente crescente numa vizinhança à direita da origem. Além disso

$$Q'(z) = \frac{1}{2} z^{p-1} - C_q^q z^{q-1}.$$

Então Q possui um único máximo local em

$$z_0 = C_q^{\frac{-q}{q-p}} \left(\frac{1}{2}\right)^{q-p}. \quad (3.2)$$

Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre os dados iniciais (u_0, u_1) .

$$\|\nabla u_0\|_p < z_0. \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2}\|u_1\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u_0\|_p^p - \frac{1}{q}\|u_0\|_q^q < Q(z_0). \quad (3.4)$$

Teorema 3.1. *Suponha válida as hipóteses do Teorema 2.4. Além disso, suponha que os dados iniciais (u_0, u_1) satisfazem as condições (3.3) e (3.4). Então a energia correspondente ao problema (2.1), obtida pelo Teorema 2.4, decai segundo a taxa polinomial*

$$E(t) \leq C(t+1)^{-\frac{2}{p-2}}.$$

Comparado ao Teorema 2.4 anterior, as hipóteses (3.3) e (3.4) garantem soluções globais um pouco menores.

Lema 3.2. *Sob as condições adicionais (3.3) e (3.4), a solução fraca dada pelo Teorema 2.4 satisfaz*

$$\|\nabla u(t)\|_p < z_0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.5)$$

Demonstração: Sabemos que o problema aproximado satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u_m(t)\|_p^p - \frac{1}{q}\|u_m(t)\|_q^q + \int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u'_m(s)\|_2^2 ds \\ = \frac{1}{2}\|u_{1m}\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u_{0m}\|_p^p - \frac{1}{q}\|u_{0m}\|_q^q. \end{aligned}$$

Usando imersão de Sobolev, o lado esquerdo da identidade satisfaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u_m(t)\|_p^p - \frac{1}{q}\|u_m(t)\|_q^q + \int_0^t \|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u'_m(s)\|_2^2 ds \\ \geq \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u_m(t)\|_p^p - \frac{1}{q}C_q^q \|\nabla u_m(t)\|_p^q \\ = \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2p}\|\nabla u_m(t)\|_p^p + Q(\|\nabla u_m(t)\|_p), \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2p}\|\nabla u_m(t)\|_p^p + Q(\|\nabla u_m(t)\|_p) \\ \leq \frac{1}{2}\|u_{1m}\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u_{0m}\|_p^p - \frac{1}{q}\|\nabla u_{0m}\|_q^q. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Agora suponha que (3.5) é falsa. Então para cada m grande, existe $t \in [0, t_m)$ tal que

$$\|\nabla u_m(t)\|_p \geq z_0. \quad (3.7)$$

Como $u_{0m} \rightarrow u_0$ fortemente em $W_0^{1,p}(\Omega)$, de (3.3) temos a existência de $N_0 > 0$ tal que

$$\|\nabla u_{0m}\|_p = \|\nabla u_m(0)\|_p < z_0. \quad (3.8)$$

Por continuidade, segue de (3.7) e (3.8) a existência de um primeiro $t_m^* \in (0, t_m)$ tal que

$$\|\nabla u_m(t_m^*)\|_p = z_0. \quad (3.9)$$

Por outro lado, de (3.4), existe $N_1 > N_0$ e $\beta \in (0, z_0)$ tais que

$$\frac{1}{2}\|u_{1m}\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u_{0m}\|_p^p - \frac{1}{q}\|u_{0m}\|_q^q \leq Q(\beta), \quad m > N_1,$$

e então de (3.6),

$$0 \leq Q(\|\nabla u_m(t)\|_p) \leq Q(\beta) \quad \forall t \in [0, t_m^*], \quad m > N_1.$$

Da monotonia de Q em $[0, t_m^*]$ segue que

$$0 \leq \|\nabla u_m(t)\|_p \leq \beta < z_0 \quad \forall t \in [0, t_m^*], \quad m > N_1,$$

o que contradiz (3.9). ■

Lema 3.3. *Existe $k > 0$ tal que*

$$kE(t) \leq \frac{k}{2}\|u'(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_p^p - \|u(t)\|_q^q.$$

Demonstração: Fixado $\delta > 0$, e em vista de (3.5) e (3.2),

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_p^p - \|u\|_q^q &= \delta J(u) + \left(1 - \frac{\delta}{p}\right) \|\nabla u\|_p^p - \left(1 - \frac{\delta}{q}\right) \|u\|_q^q \\ &\geq \delta J(u) + \left[\left(1 - \frac{\delta}{p}\right) - \left(1 - \frac{\delta}{q}\right) C_q^q \|\nabla u\|_p^{q-p} \right] \|\nabla u\|_p^p \\ &\geq \delta J(u) + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{q-p} - \frac{\delta}{p}\right) \|\nabla u\|_p^p \\ &> \delta J(u), \end{aligned}$$

se $\delta > 0$ for suficientemente pequeno. Tomemos então $k = \delta$. ■

Lema 3.4. *Para todo $t > 0$,*

$$E(t) \geq \frac{1}{2}\|u'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2p}\|\nabla u(t)\|_p^p.$$

Isto é, $E(t)$ domina a norma $\|(u(t), u'(t))\|_{W^{1,p} \times L^2}$.

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2}\|u'\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u\|_p^p - C_q^q \frac{1}{q}\|u\|_q^q \\ &= \frac{1}{2}\|u'\|_2^2 + \frac{1}{2p}\|\nabla u\|_p^p + Q(\|\nabla u\|_p). \end{aligned}$$

Como $Q(\|\nabla u\|_p) \geq 0$, o resultado segue. ■

Demonstração do Teorema 3.1: Fazendo $w_j = u'_m(t)$ na equação aproximada (2.22) e integrando sobre $[t, t+1] \times \Omega$ para $t > 0$, temos:

$$\frac{1}{2}\|u'_m(t+1)\|_2^2 + J(u_m(t+1)) + \int_t^{t+1} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s)\|_2^2 ds = \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2^2 + J(u_m(t))$$

ou equivalentemente

$$E_m(t+1) + \int_t^{t+1} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s)\|_2^2 ds = E_m(t) \quad (3.10)$$

Definimos então

$$D_m^2(t) = E_m(t) - E_m(t+1) \quad (3.11)$$

e de (1.17) temos

$$D_m^2(t) = E_m(t) - E_m(t+1) = \int_t^{t+1} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s)\|_2^2 ds \quad (3.12)$$

$$\geq \lambda_1^\alpha \int_t^{t+1} \|u'_m(s)\|_2^2 ds. \quad (3.13)$$

Dividindo o intervalo $[t, t+1]$ em 4 partes iguais o teorema do valor médio para integrais nos garante que, existem $t_1 \in [t, t+1/4]$ e $t_2 \in [t+3/4, t+1]$, tais que:

$$\frac{\|u'_m(t_1)\|_2^2}{4} = \int_t^{t+1} \|u'_m(s)\|_2^2 ds \quad e \quad \frac{\|u'_m(t_2)\|_2^2}{4} = \int_{t+3/4}^{t+1} \|u'_m(s)\|_2^2 ds.$$

Logo

$$\lambda_1^\alpha \int_t^{t+1} \|u'_m(s)\|_2^2 ds \geq \lambda_1^\alpha \int_t^{t+1/4} \|u'_m(s)\|_2^2 ds = \frac{\lambda_1^\alpha}{4} \|u'_m(t_1)\|_2^2. \quad (3.14)$$

E por (3.12) e (3.14) temos,

$$\begin{aligned} \|u'_m(t_1)\|_2^2 &= 4 \int_t^{t+1/4} \|u'_m(s)\|_2^2 ds \leq 4 \int_t^{t+1} \|u'_m(s)\|_2^2 ds \\ &\leq 4\lambda^{-\alpha} \int_t^{t+1} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u(s)\|_2^2 ds \leq 4\lambda^{-\alpha} D_m^2(t). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Portanto

$$\|u'_m(t_1)\|_2 \leq 2\lambda^{-\alpha/2} D_m(t), \quad (3.16)$$

e analogamente,

$$\|u'_m(t_2)\|_2 \leq 2\lambda_1^{-\alpha/2} D_m(t). \quad (3.17)$$

Agora, fazendo $w_j = u_m(t)$ na equação aproximada e integrando sobre $[t_1, t_2] \times \Omega$, temos:

$$\begin{aligned} (u'_m(t_2), u_m(t_2)) - (u'_m(t_1), u_m(t_1)) - \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(s)\|_2^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u_m(s)\|_p^p ds \\ + \int_{t_1}^{t_2} ((-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s), (-\Delta)^{\alpha/2} u_m(s)) ds = \int_{t_1}^{t_2} \|u_m(s)\|_q^q ds, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} (k\|u'_m(s)\|_2^2 + \|\nabla u_m(s)\|_p^p - \|u_m(s)\|_q^q) ds = (u'_m(t_1), u_m(t_1)) - (u'_m(t_2), u_m(t_2)) \\ + (k+1) \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(s)\|_2^2 ds - \int_{t_1}^{t_2} ((-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s), (-\Delta)^{\alpha/2} u_m(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Pelo Lema 3.2 temos que

$$\begin{aligned} k \int_{t_1}^{t_2} E_m(s) ds \leq (u'_m(t_1), u_m(t_1)) - (u'_m(t_2), u_m(t_2)) + (k+1) \int_{t_1}^{t_2} \|u'_m(s)\|_2^2 ds \\ - \int_{t_1}^{t_2} ((-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s), (-\Delta)^{\alpha/2} u_m(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Usando as desigualdades de Hölder e notando que

$$\|u\|_{D((-\Delta)^{\alpha/2})} = \|(-\Delta)^{\alpha/2} u\|_2,$$

e

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^{\alpha/2}) \hookrightarrow L^2(\Omega),$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} ((-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s), (-\Delta)^{\alpha/2} u_m(s)) ds &\leq \int_{t_1}^{t_2} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s)\|_2 \|(-\Delta)^{\alpha/2} u_m(s)\|_2 ds \\
&\leq \sup_{s \in [t, t+1]} \|u\|_{D((-\Delta)^{\alpha/2})} \int_t^{t+1} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'_m(s)\|_2 ds \\
&\leq C_1 \sup_{s \in [t, t+1]} \|u_m(s)\|_p D_m^2(t). \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
(u'_m(t_1), u_m(t_1)) - (u'_m(t_2), u_m(t_2)) &\leq \|u'_m(t_1)\|_2 \|u_m(t_1)\|_2 + \|u'_m(t_2)\|_2 \|u_m(t_2)\|_2 \\
&\leq 4\lambda_1^{\alpha/2} D_m(t) \sup_{s \in [t, t+1]} \|u_m(s)\|_2 \\
&\leq C_2 D_m(t) \sup_{s \in [t, t+1]} \|\nabla u_m(s)\|_p. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.3 temos

$$\|\nabla u_m(t)\|_p \leq (2p)^{1/p} E_m(t)^{1/p}. \tag{3.22}$$

Portanto de (3.20), (3.21) e (3.22), existirão constantes C_3 e C_4 tais que (3.19) implica em

$$\int_{t_1}^{t_2} E_m(s) ds \leq C_3 D_m^2(t) + C_4 D_m(t) E_m(t)^{1/p}. \tag{3.23}$$

Aplicando o TVM para integrais temos que existe $t_0 \in [t_1, t_2]$ tal que:

$$E_m(t_0) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E_m(s) ds. \tag{3.24}$$

Como $t_2 - t_1 > 1/2$ e $E_m(t)$ é um funcional decrescente, temos que

$$\frac{1}{2} E_m(t+1) \leq C_3 D_m^2(t) + C_4 D_m(t) E_m(t)^{1/p}. \tag{3.25}$$

Uma vez que $E_m(t+1) = E_m(t) - D_m^2(t)$, podemos concluir que

$$\frac{1}{2} E_m(t) \leq (C_3 + \frac{1}{2}) D_m^2(t) + C_4 D_m(t) E_m(t)^{1/p}. \tag{3.26}$$

Usando a desigualdade de Young, existe $C' > 0$ tal que

$$C_4 D_m(t) E_m(t)^{\frac{1}{p}} \leq C' D_m(t)^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{4} E_m(t).$$

Assim, existem constantes C_5 e C_6 tais que

$$E_m(t) \leq C_5 D_m^2(t) + C_6 D_m(t)^{\frac{p}{p-1}}. \quad (3.27)$$

Como $p > 2$, podemos escrever $D_m(t)^2 = D_m(t)^{\frac{p-2}{p-1}} D_m(t)^{\frac{p}{p-1}}$. Então, da desigualdade anterior temos

$$E_m(t) \leq (C_5 D_m(t)^{\frac{p-2}{p-1}} + C_6) D_m(t)^{\frac{p}{p-1}}. \quad (3.28)$$

Como $D_m(t)$ é limitado, existirá C_7 tal que

$$E_m(t) \leq C_7 D_m(t)^{\frac{p}{p-1}}, \quad (3.29)$$

ou ainda.

$$E_m(t)^{\frac{2(p-1)}{p}} \leq C_7^{\frac{2(p-1)}{p}} D_m(t)^2. \quad (3.30)$$

Portanto

$$E_m(t)^{1+\frac{p-2}{p}} \leq C_7^{\frac{2(p-1)}{p}} [E_m(t) - E_m(t+1)]. \quad (3.31)$$

Aplicando o Lema de Nakao, com $\gamma = \frac{p-2}{p}$, existirá uma contante C , independente de m , tal que

$$E_m(t) \leq C(1+t)^{\frac{-p}{p-2}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.32)$$

passando o limite em (3.32) a luz do Lema 3.1 a prova está completa.

CAPÍTULO 4

NÃO EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO GLOBAL

Nossa intenção aqui é estudar a não-existência global de solução para o problema (2.1). Considere p e l satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} 2 \leq p < q < \frac{np}{n-p} & \text{se } n > p \\ 2 \leq p < q & \text{se } n \leq p \end{cases} \quad (4.1)$$

Além disso, vamos supor a seguinte relação,

$$E(t) + \int_0^t \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2^2 dt \leq E(0) \quad e \quad t \in [0, T], \quad (4.2)$$

que é uma forma de Lei de Conservação Fraca.

Teorema 4.1. *Supondo válidas as condições (4.1) e (4.2), para qualquer dado inicial $(u_0, u_1) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, se $E(0) < 0$, então a solução de (2.1) "blows-up" em tempo finito T_0 na norma de $L^p(\Omega)$.*

Demonstração: Nossa intenção é achar uma função que seja limitada pela norma em $L^p(\Omega)$ da solução de (2.1), tal que a função cresça quando t se aproxima de T_0 , ou seja, fazendo com que a norma da solução em $L^p(\Omega)$ "blows-up" em tempo finito.

Usando $E(0) < 0$ e (4.2), nós temos que

$$E(t) \leq E(0) < 0 \quad (4.3)$$

Definimos uma função $H(t)$ em termos da energia

$$H(t) = p(-E(t)) + \left(\frac{p}{2} + 1\right) \|u'(t)\|_2^2 + \frac{q-p}{2q} \|u(t)\|_q^q \quad (4.4)$$

Agora, vamos introduzir $F(t) = \frac{1}{2} \|u(t)\|_2^2$ para qualquer solução $u(t)$, então a derivada de $F(t)$ com respeito a t será

$$F'(t) = \int_{\Omega} u(t) u'(t) dx \quad (4.5)$$

Uma vez que $u(t)$ é solução do problema (2.1), por (4.4) e (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} F''(t) &= \int_{\Omega} (u''(t)u(t) + u'(t)^2) dx = \int_{\Omega} (u'(t)^2 + [\Delta_p u(t) + |u(t)|^{q-2}u(t) - (-\Delta)^{\alpha} u'(t)]u(t)) dx \\ &= \int_{\Omega} u''(t)^2 dx + \int_{\Omega} (\Delta_p u(t))u(t) dx + \int_{\Omega} |u(t)|^{q-2}u(t)u(t) dx - \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t)u(t) dx \\ &= \|u'(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_p^p + \|u(t)\|_q^q - \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t)u(t) dx \\ &= \left(-\frac{p}{2} + \frac{p}{2} + 1\right) \|u'(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_p^p + \left(\frac{q+p}{2q} + \frac{q-p}{2q}\right) \|u(t)\|_q^q - \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t)u(t) dx \\ &= -\frac{p}{2} \|u'(t)\|_2^2 - \|\nabla u(t)\|_p^p + \frac{p}{q} \|u(t)\|_q^q + \left(\frac{p}{2} + 1\right) \|u'(t)\|_2^2 + \frac{q-p}{q} \|u(t)\|_q^q - \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t)u(t) dx \\ &= p(-E(t)) + \left(\frac{p}{2} + 1\right) \|u'(t)\|_2^2 + \frac{q-p}{2q} \|u(t)\|_q^q + \frac{q-p}{2q} \|u(t)\|_q^q - \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t)u(t) dx \\ &= H(t) + \frac{q-p}{2q} \|u(t)\|_q^q - \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t)u(t) dx. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pelas condições (4.1) e (4.3) temos

$$\frac{1}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p \leq \frac{1}{q} \|u(t)\|_q^q \quad (4.7)$$

e por (4.5) e (4.6) temos

$$F''(t) \geq H(t) + \frac{q-p}{2q} \|\nabla u(t)\|_p^p - \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t)u(t) dx. \quad (4.8)$$

Estamos interessados em achar uma estimativa para $\left| \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t)u(t) dx \right|$. Como $p \geq 2$ temos,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega). \quad (4.9)$$

Assim, uma vez que

$$H_0^1(\Omega) = D((-\Delta)^{1/2}),$$

temos pela Proposição 1.30,

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow D((-\Delta)^{1/2}) \hookrightarrow D((-\Delta)^{\alpha/2}), \quad (4.10)$$

$0 < \alpha \leq 1$. Então existe C_1 tal que

$$\|(-\Delta)^\alpha u(t)\|_2 = \|u(t)\|_{D((-\Delta)^{\alpha/2})} \leq C_1 \|\nabla u(t)\|_p. \quad (4.11)$$

Das condições de imersão dadas por (4.1) temos que $p < l \Rightarrow \frac{p}{l} < 1$ e de (4.3) temos que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \|u'(t)\|_2^2 - \frac{1}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p + \frac{1}{q} \|u(t)\|_q^q &\leq \frac{1}{q} \|u(t)\|_q^q \\ &\Rightarrow -E(t) \leq \frac{1}{q} \|u(t)\|_q^q \\ &\Rightarrow \|u(t)\|_q^q \geq q(-E(t)). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Como $p < q < \frac{np}{n-p}$, nós temos que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, então existe uma constante $C_3 > 0$ tal que:

$$\|u(t)\|_q \leq C_3 \|\nabla u(t)\|_p. \quad (4.13)$$

Por (4.12) e (4.13) temos que:

$$(C_3 \|\nabla u(t)\|_p)^q \geq \|u(t)\|_q^q \geq q(-E(t)). \quad (4.14)$$

E como

$$p \geq 2 \Rightarrow \frac{p}{2} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{q} \leq \frac{p}{2q} \Rightarrow \frac{2-p}{2q} \leq 0, \quad (4.15)$$

temos

$$C_3^{\frac{2-p}{2}} \|\nabla u(t)\|_p^{\frac{2-p}{2}} \leq (-E(t))^{\frac{2-p}{2q}}, \quad (4.16)$$

e tome $C_2 = C_3^{\frac{p-2}{2}}$, $\beta = 1 + \frac{2-p}{2q} = \frac{2q-p+2}{2q}$. Além disso $\beta < 1$ e

$$\beta = 1 + \frac{1}{q} - \frac{p}{2q} > 1 + \frac{1}{q} - \frac{q}{2q} > \frac{1}{2} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}, \quad (4.17)$$

logo $\frac{1}{2} < \beta < 1$, então podemos escrever

$$\|\nabla u(t)\|_p^{1-\frac{p}{2}} \leq C_2(-E(t))^{-(1-\beta)}$$

pois

$$-(1-\beta) = \frac{2-p}{2q}.$$

Então, nós temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t) u(t) dt \right| &\leq \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2 \|(-\Delta)^{\alpha/2} u(t)\|_2 \\ &\leq C_1 \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2 \|\nabla u(t)\|_p \\ &= C_1 \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2 \|\nabla u(t)\|_p^{1-\frac{p}{2}} \|\nabla u(t)\|_p^{\frac{p}{2}} \\ &\leq C_1 \left[\frac{1}{2\varepsilon} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2^2 + 2\varepsilon \|\nabla u(t)\|_p^p \right] \|\nabla u(t)\|_p^{1-\frac{p}{2}} \\ &\leq \frac{C_1 C_2}{2\varepsilon} (-E(t))^{-(1-\beta)} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2^2 \\ &\quad + 2\varepsilon C_1 C_2 \|\nabla u(t)\|_p^p (-E(0))^{-(1-\beta)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Agora, escolhemos ε tal que,

$$2\varepsilon C_1 C_2 (-E(0))^{-(1-\beta)} = \frac{q-p}{2p} \quad (4.19)$$

isto é,

$$\varepsilon = \frac{q-p}{4p C_1 C_2} (-E(0))^{(1-\beta)} > 0. \quad (4.20)$$

Tomando $\theta_1 = \frac{C_1 C_2}{2\varepsilon}$ e por (4.18) temos

$$\left| \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t) u(t) dt \right| \leq \theta_1 (-E(t))^{-(1-\beta)} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2^2 + \frac{q-p}{2p} \|\nabla u(t)\|_p^p \quad (4.21)$$

Da desigualdade anterior e de (4.8) temos

$$\begin{aligned}
F''(t) &\geq H(t) + \frac{q-p}{2p} \|\nabla u(t)\|_p^p - \int_{\Omega} (-\Delta)^{\alpha} u'(t) u(t) dx \\
&\geq H(t) + \frac{q-p}{2p} \|\nabla u(t)\|_p^p - \theta_1 (-E(t))^{-(1-\beta)} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2^2 - \frac{q-p}{2p} \|\nabla u(t)\|_p^p \\
&\geq H(t) - \theta_1 (-E(t))^{-(1-\beta)} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2^2.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Agora iremos definir a função $G(t)$ em termos da energia $E(t)$ e da derivada da norma da solução,

$$G(t) = (-E(t))^{\beta} + \beta \theta_1^{-1} F'(t) \tag{4.23}$$

então derivando (4.22) e (4.2) e por (4.23) temos,

$$\begin{aligned}
G'(t) &= \beta (-E(t))^{\beta-1} (-E'(t)) + \beta \theta_1^{-1} F''(t) \\
&\geq \beta (-E(t))^{\beta-1} (-E'(t)) + \beta \theta_1^{-1} [H(t) - \theta_1 (-E(t))^{-(1-\beta)} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u'(t)\|_2^2] \\
&\geq \beta \theta_1^{-1} H(t) \geq (2\theta_1)^{-1} H(t) > 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Logo $G(t)$ é uma função crescente. Então $G(t) \geq G(t_0)$, para $t \geq t_0$, onde podemos tomar $t_0 = 0$ se

$$G(0) \equiv (-E(0))^{-\beta} + \beta \theta_1^{-1} \int_{\Omega} u_0 u_1 dx > 0. \tag{4.25}$$

Como $\frac{q-1}{q} + \frac{1}{q} = 1$, usando a desigualdade de Hölder temos

$$\left| \int_{\Omega} u(t) u'(t) dx \right| \leq \|u'(t)\|_{q/(q-1)}^{(q-1)/q} \|u(t)\|_q \leq C_4 \|u'(t)\|_2 \|u(t)\|_q, \tag{4.26}$$

onde C_4 é a constante de imersão para $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{q/(q-1)}(\Omega)$ pois $2 < q \implies 2 < 2q - q \implies q < 2(q-1) \implies \frac{q}{q-1} < 2$. Pela desigualdade de Young para $\frac{1}{\frac{2\beta}{(2\beta-1)}} + \frac{1}{2\beta} = 1$ temos,

$$\begin{aligned}
G(t)^{1/\beta} &\leq 4\{(-E(t)) + (\theta_1^{-1} |F'(t)|^{1/\beta})\} \\
&\leq 4\{(-E(t)) + (C_4 \theta_1^{-1})^{1/\beta} \|u'(t)\|_2^{1/\beta} \|u(t)\|_q^{1/\beta}\} \\
&\leq 4\{(-E(t)) + \|u'(t)\|_2^2 + (C_4 \theta_1^{-1})^{2/(2\beta-1)} \|u(t)\|_q^{2/(2\beta-1)}\}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Logo

$$\left[(C_4 \theta_1^{-1})^{1/\beta} \|u'\|_2^{1/\beta} \|u\|_q^{1/\beta} \right] \leq \left[\|u'\|_2^{1/\beta} \right]^{2\beta} + \left[(C_4 \theta_1^{-1})^{1/\beta} \|u\|_q^{1/\beta} \right]^{\frac{2\beta}{2\beta-1}}. \quad (4.28)$$

Mostraremos que $\frac{2}{2\beta-1} < q$. Por (2.9) e (4.3) temos que

$$\|u\|_q^q \geq q(-E(t)) \geq q(-E(0)) > 0. \quad (4.29)$$

Assim

$$(-E(0))^{-1/q} \|u(t)\|_q \geq 1. \quad (4.30)$$

Por (4.27) e (4.30), nós temos

$$\begin{aligned} G(t)^{1/\beta} &\leq 4\{(-E(t)) + \|u'(t)\|_2^2 + (C_4 \theta_1^{-1})^{2/(2\beta-1)} [(-E(0))^{-1/q} \|u(t)\|_q]^{q-2/(2\beta-1)}\} \\ &\leq 4\{p(-E(t)) + (\frac{p}{2} + 1) \|u'(t)\|_2^2 \\ &\quad + (C_4 \theta_1^{-1})^{2/(2\beta-1)} (-E(0))^{\frac{p-q}{2-p+q}} \|u(t)\|_q^q\}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Usando (4.4) temos,

$$H(t) = p(-E(t)) + (\frac{p}{2} + 1) \|u'(t)\|_2^2 + \frac{q-p}{2q} \|u(t)\|_q^q \geq \frac{q-p}{2q} \|u(t)\|_q^q. \quad (4.32)$$

Tomando $\theta_2 = 4 \max \left\{ 1, \frac{2q}{q-p} (C_4 \theta_1^{-1})^{2/(2\beta-1)} (-E(0))^{\frac{p-q}{2-p+q}} \right\}$, temos,

$$G(t)^{1/\beta} \leq \theta_2 H(t). \quad (4.33)$$

Assim de (4.24), (4.33) temos:

$$\frac{d}{dt} \{G(t)^{1-1/\beta}\} = -(1-1/\beta) G(t)^{1/\beta} G'(t) \leq -(1-\beta)(2\beta\theta_1\theta_2)^{-1}. \quad (4.34)$$

E assumindo que (4.25) se verifica, teremos

$$G(t)^{1-1/\beta} - G(0)^{1-1/\beta} = \frac{d}{dt} \{G(t)^{1-1/\beta}\} t \quad (4.35)$$

Usando (4.35) resulta que

$$G(t)^{1-1/\beta} - G(0)^{1-1/\beta} \leq -(1-\beta)(2\theta_1\theta_2)^{-1} t$$

$$G(t)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \geq \{G(0)^{1-1/\beta} - (1-\beta)(2\theta_1\theta_2)^{-1}\}^{-1}$$

$$G(t) \geq \{G(0)^{1-1/\beta} - (1-\beta)(2\theta_1\theta_2)^{-1} t\}^{-\frac{\beta}{1-\beta}}. \quad (4.36)$$

Tomando $T > 0$ tal que

$$T \leq T_0 = 2\beta\theta_1\theta_2(1-\beta)^{-1}G(0)^{1-1/\beta}, \quad (4.37)$$

temos então

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} G(t) = +\infty. \quad (4.38)$$

Por sua vez, de (4.1) e (4.3) segue que

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{1}{2}\|u'(t)\|_2^2 - \frac{1}{q}\|u(t)\|_q^q \\ \implies \frac{1}{q}\|u(t)\|_q^q &\geq \frac{1}{2}\|u'(t)\|_2^2 - E(t), \end{aligned} \quad (4.39)$$

logo de (4.4), (4.34) e (4.39) existe uma constante C_5 tal que

$$G(t)^{1/\beta} \leq C_5\|u(t)\|_q^q. \quad (4.40)$$

Assim de (4.38) e (4.40)

$$\lim_{t \rightarrow T_0^-} \|u(t)\|_q^q = +\infty. \quad (4.41)$$

Observação. Na demonstração acima, a derivada segunda $F''(t)$ foi efetuada formalmente. Tal procedimento pode ser justificado rigorosamente através de argumentos de densidade como em H. A. Levine e J. Serrin [10].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Biazutti, A. C., *On a nonlinear evolution equation and its applications*, Nonlinear Anal. T. M. A. 24, (1995) 1221-1234.
- [3] Brezis, H., Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones, Alianza, Madrid, 1984.
- [4] Coddington, E. A. & Levinson, N., Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.
- [5] Evans, L. C., Partial Differential Equations, AMS, Providence, 2002.
- [6] Gao, H. & Zhang, H., *Global nonexistence of the solutions for a nonlinear wave equation with the p -Laplacian operator*, Journal Partiall Differential Equations 20 (2007) 71-79.
- [7] Gao, H. & Ma, T. F., *Global solutions for a nonlinear wave equation with the p -Laplacian operator*, Electronic Journal of Qualitative Differential Equations 11 (1999) 1-13.
- [8] Georgiev, V. & Todorova, G., *Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms*, J. Differential Equations 109 (1994) 295-308.
- [9] Kreyszig, E., Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley Classics Library, John Wiley and Sons, New York, 1989.
- [10] Levine H. A. & Serrin, J., *Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 137 (1997) 341-361.
- [11] Lions, J. L., Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires, Gauthier-Villars, Paris 1969.

- [12] Lions, J. L. & Magenes, E., *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [13] Ma, T. F. & Soriano, J.A., *On weak solutions for an evolution equation with exponential nonlinearities*, *Nonlinear Analysis* 37 (1999) 1029-1038.
- [14] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M., *Solutions for the equations of nonlinear vibrations in Sobolev Space of fractionary order*, *Computational and Applied Mathematics* 6 (1987), no3, 257-276.
- [15] Medeiros L. A., Milla Miranda M., *Espaços de Sobolev, Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos*, Instituto de Matemática, UFRJ, 2000.
- [16] Messaoudi, S. A., *On the decay of solutions for a class of quasilinear hyperbolic equations with non-linear damping and source terms*, *Math. Meth. Appl. Sci.* 28 (2005) 1819-1828.
- [17] Messaoudi, S. A. & Belkacem S. H., *Global non-existence of solutions of the wave equations with non-linear damping and source terms*, *Math. Meth. Appl. Sci.* 27 (2004) 1687-1696.
- [18] Nakao, M., *A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations*, *Journal Math. Soc. Japan* 30 (1978) 747-762.
- [19] Sattinger, D. H., *On global solution of nonlinear hyperbolic equations*, *Arch. Rational Mech. Anal.* 30 (1968) 148-172.
- [20] Showalter, R. E., *Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations*, *Mathematical Surveys and Monographs* vol. 49, 1992.
- [21] Tartar, L., *Topics in Nonlinear Analysis*, *Publications Mathématiques d'Orsay*, Université Paris-Sud, Orsay, 1978.
- [22] Vitillaro, E., *Mathematical Review MR2166613*, American Mathematical Society, 2006.
- [23] Webb, G. F., *Existence asymptotic for a strongly damped nonlinear wave equation*, *Canadian J. Math.* 32 (1980) 631-643.
- [24] Weidmann, J., *Linear Operators in Hilbert Space*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [25] Ye, Y., *Global existence and asymptotic behavior of solutions for a class of nonlinear degenerate wave equations*, *Differential Equations and Nonlinear Mechanics*, vol. 2007, Article ID 19685, 9 pages, 2007.
- [26] Zeidler, E., *Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics*, Springer Verlag, New York, 1995.