UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DE COMPUTAÇÃO

**Enumeração dos fibrados vetoriais sobre
superfícies fechadas**

THIAGO DE MELO

São Carlos – 2005

*“Nissuna umana investigazione si puo’ dimandare vera
scienza s’essa non passa per le matematiche dimostrazioni”*
(Leonardo da Vinci)

Aos meus pais...

AGRADECIMENTOS

Agradecimento é algo delicado de ser feito, pois sempre há o risco de esquecermos de citar alguém. Por isso, desde já peço desculpas por alguma falha ou esquecimento.

Primeiramente, agradeço aos meus pais, pelo apoio que me deram durante todos esses anos. Agradeço pela ótima educação que deles recebi, sempre seguindo e ouvindo os conselhos, às vezes repetitivos, mas nunca desnecessários. Agradeço por terem confiado e acreditado em mim, dando-me a oportunidade de continuar meus estudos. Muito obrigado. A educação que me deram não perco jamais.

Agradeço ao Prof. Dr. Mauro Flavio Spreafico, pela orientação e tempo dedicado a esse projeto. Agradeço também ao Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto, pela colaboração na conclusão do trabalho.

Agradeço a todos meus professores, desde o colégio até aos que conheci na universidade. Mais que professores, muitos deles foram meus amigos e alguns ainda permanecem presentes. Agradeço aos professores do Departamento de Matemática da Unesp de Rio Claro, em especial à Profa. Dra. Alice K.M. Libardi, por me iniciar no estudo da Topologia, me orientando durante a graduação por três anos. Mais que uma orientadora, ela é uma grande amiga.

Não posso deixar de agradecer aos professores e funcionários do ICMC que, de uma forma ou outra, também me ajudaram durante esses dois anos de vivência em São Carlos. Agradeço também ao CNPq, pelo apoio financeiro, importante para o desenvolvimento desse projeto.

Por fim, quero lembrar e agradecer aos meus amigos, todos eles. Aos que estiveram presentes tanto nos momentos difíceis como nos momentos alegres, enfim, àqueles que realmente se importaram comigo e que também receberam minha amizade. Obrigado aos amigos da Unesp, Andréa, Daniel, Erika, Ricardo, Camila, aos amigos do ICMC, aos amigos de Rio Claro, Marcelo, Gilson, Erica e à querida amiga Gabriela.

Aos citados acima, MUITO OBRIGADO!

ABSTRACT

The aim of this work is enumerate the plane bundles over some surfaces, for example the sphere S^2 and the g -torus gT . Among other tools we used cohomology of the surfaces with local coefficients and also the method developed by Larmore ([7]) to count homotopy classes of lifting of functions.

RESUMO

O objetivo desse trabalho é fazer uma enumeração dos fibrados planos reais sobre algumas superfícies, como por exemplo, a esfera S^2 e o g -toro gT . Entre outras ferramentas, utilizamos a co-homologia das superfícies, com coeficientes locais, e também o método desenvolvido por Larmore ([7]) para contar classes de homotopia de levantamento de funções.

INTRODUÇÃO

Sejam X um espaço topológico e G um grupo. Consideraremos os fibrados principais sobre X que têm G como grupo estrutural. Podemos classificar o conjunto de todos os fibrados principais sobre X com grupo estrutural G através das classes de homotopia de aplicações de X no espaço classificante BG . Dado que o tipo de homotopia de BG pode ser muito complicado, em geral é difícil a enumeração completa de todos esses fibrados. Quando o grupo fundamental de X não é trivial, necessitamos da utilização de coeficientes locais, por razões da teoria de homotopia. Em particular, a seqüência espectral de Larmore ([7]) nos dá uma técnica explícita para a enumeração dos fibrados em termos do grupo de co-homologia do espaço base, com coeficientes locais.

No capítulo I, colocamos alguns requisitos para o estudo dos fibrados e a ação do grupo fundamental na fibra. Isso será utilizado no cálculo dos grupos de homologia. As referências para esse capítulo são [1] e [4].

No capítulo II, iniciamos a teoria de coeficientes locais e apresentamos alguns exemplos, calculando os grupos do modo mais tradicional, ou seja, usando uma decomposição (simplicial ou celular) para o espaço de recobrimento universal e criamos então um complexo de cadeias. As referências para esse capítulo são [4], [5] e [11].

No capítulo III, novamente alguns grupos de homologia são calculados, porém de um modo mais sofisticado, usando o conceito de *resolução livre de um grupo*. Com o mesmo método, os grupos de co-homologia também foram calculados, tanto com coeficientes globais (sem torção), como com coeficientes locais (com torção). Tais grupos serão utilizados na enumeração dos fibrados. A referência para esse capítulo é [2].

No capítulo IV, abordamos a Teoria de Fibrados. Estudamos os prin-

cipais resultados e alguns exemplos, inclusive uma relação entre classes de homotopia e classes de fibrados, muito útil para a parte final do trabalho. As referências para esse capítulo são [6] e [13].

No capítulo V, provamos um teorema que relaciona a co-homologia de grau dois de uma superfície com a primeira classe de Stiefel-Whitney do fibrado tangente à superfície e do fibrado linha relacionado com os coeficientes locais utilizados. A seguir, descrevemos o processo de construção de uma *torre de Postnikov* para um espaço Y e utilizamos também o conceito de *seqüência espectral*, com ambos servindo de ferramentas para a enumeração dos fibrados planos. Concluimos com a técnica de Larmore para o caso das superfícies de nosso interesse, já citadas anteriormente. As principais referências para esse capítulo são [7] e [9].

Noções básicas de Topologia Algébrica são necessárias, tais como *grupos de homologia*, *grupos de homotopia*, *complexo de cadeias*, entre outros. Às vezes, utilizamos *homologia simplicial* e em outros casos, *homologia celular*. No entanto, o leitor que precisar consultar alguma referência, poderá buscá-la em qualquer livro básico de Topologia Algébrica, como por exemplo, [5] ou [11]. Para os conceitos de Álgebra, aconselhamos a consulta de [3] e [12], literaturas avançada e básica, respectivamente. Como referência geral, sugerimos [14], que contém praticamente todos os assuntos abordados aqui.

CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS	IV
ABSTRACT	VI
RESUMO	VII
INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	5
1 Espaços de recobrimento	5
2 Teorema do levantamento	8
3 A ação de π_1 na fibra	10
4 Transformações “deck”	12
5 Ações propriamente descontínuas	15
2 HOMOLOGIA COM COEFICIENTES LOCAIS	17
6 Complexo de cadeias	17
7 Homologia com coeficientes locais	19
8 Homologia da S^1	23
9 Homologia do toro T	26
10 Homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$	34
11 Homologia da garrafa de Klein K	36
3 HOMOLOGIA DE GRUPOS	41
12 Resoluções livres	41
13 Resoluções de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$	43
14 A homologia de um grupo	45
15 Homologia do toro T via resolução	49
16 Homologia do g -toro gT via resolução	51

17	Homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ via resolução	53
18	Homologia da garrafa de Klein K via resolução	55
19	Co-homologia do g -toro gT via resolução	56
20	Co-homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ via resolução	58
21	Co-homologia da garrafa de Klein K via resolução	58
4	TEORIA DE FIBRADOS	60
22	Grupos topológicos e ações de grupos	60
23	Fibrado, G -fibrado e fibrado principal	62
24	Fibrado com fibra F	65
25	Classificação homotópica de G -fibrados principais	69
5	ENUMERAÇÃO DOS FIBRADOS PLANOS SOBRE SUPERFÍCIES	73
26	Considerações iniciais	73
27	Enumeração dos 2-fibrados sobre superfícies fechadas orientáveis	74
	LISTA DE TABELAS E FIGURAS	79
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	80
	ÍNDICE REMISSIVO	82

Neste capítulo, colocaremos os conceitos básicos para o entendimento deste trabalho. Em todo o texto, utilizaremos o termo *aplicação* para nos referirmos a uma *função contínua*. O leitor necessitará de noções básicas sobre *grupo fundamental* e *espaços de recobrimento*. Para maiores detalhes sobre o conteúdo desse capítulo, ver [1].

1 Espaços de recobrimento

Os espaços que consideraremos nesta seção serão de Hausdorff, conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos. Dizemos que X é *localmente conexo por caminhos* se, dado $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que para todo $y \in U$ existe um caminho de x para y totalmente contido em U . Notemos que, em tais espaços, todo ponto possui uma vizinhança básica consistindo de conjuntos conexos por caminhos. Por fim, isto implica que as componentes conexas por caminhos de qualquer subconjunto aberto de um tal espaço são também abertas.

1.1 DEFINIÇÃO: Uma aplicação¹ $p : X \rightarrow Y$ é chamada de *aplicação de recobrimento* (e X é chamado um recobrimento de Y) se X e Y são de Hausdorff, conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos e se cada ponto $y \in Y$ possui uma vizinhança U conexa por caminhos tal que $p^{-1}(U)$ é uma união disjunta não vazia de conjuntos U_α (que são as componentes conexas por caminhos de $p^{-1}(U)$) nos quais $p|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Tais conjuntos U serão chamados de elementares ou vizinhanças distinguidas.

¹Convencionamos como sendo uma função contínua.

Notemos que uma aplicação de recobrimento deve ser sobrejetiva pois isso faz parte do “homeomorfismo”. Também não é suficiente a aplicação ser homeomorfismo local (significando que cada ponto de X possui uma vizinhança que é aplicada homeomorficamente sobre uma vizinhança do ponto da imagem). Considere por exemplo a aplicação $p : (0, 2) \rightarrow S^1$ definida por

$$p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$

que é um homeomorfismo local, mas para qualquer pequena vizinhança U de $1 \in S^1$, alguma componente de $p^{-1}(U)$ não se aplica sobre U .

É claro que o número de pontos da imagem inversa de um ponto, pela aplicação de recobrimento, é localmente constante e, constante caso o espaço base seja conexo. Este número é chamado *número de folhas da cobertura*. Seguem abaixo alguns exemplos de aplicações de recobrimento.

1. A aplicação $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ definida por $t \mapsto e^{2\pi it}$ é uma aplicação de recobrimento com infinitas folhas.
2. A aplicação $S^1 \rightarrow S^1$ definida por $z \mapsto z^n$, para um inteiro positivo fixado n , é uma cobertura com n folhas.
3. A aplicação canônica $S^2 \rightarrow P^2$, da esfera sobre o plano projetivo real, é uma cobertura com 2 folhas.
4. Considere a relação de equivalência no plano $\mathbb{R}^2$ que é *gerada* pelas equivalências $(x, y) \sim (x, y + 1)$ e $(x, y) \sim (x + 1, 1 - y)$. A aplicação canônica $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / \sim$ é uma cobertura com infinitas folhas, cujo espaço quociente é a *garrafa de Klein*.

1.2 TEOREMA (LEVANTAMENTO DE CAMINHOS): Sejam $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento e $f : I \rightarrow Y$ um caminho. Seja $x_0 \in X$ tal que $p(x_0) = f(0)$. Então existe um único caminho $h : I \rightarrow X$ tal que $p \circ h = f$ e $h(0) = x_0$. Podemos resumir isso dizendo que o diagrama abaixo pode ser

completado de modo único.

$$\begin{array}{ccc}
 \{0\} & \xrightarrow{\quad} & X \\
 \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 I & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y
 \end{array}$$

1.3 TEOREMA (COBERTURA DE HOMOTOPIA): Seja W um espaço localmente conexo e seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento. Sejam $F : W \times I \rightarrow Y$ uma homotopia e $f : W \times \{0\} \rightarrow X$ um levantamento da restrição de F a $W \times \{0\}$. Então existe uma única homotopia $h : W \times I \rightarrow X$ tornando o diagrama abaixo comutativo,

$$\begin{array}{ccc}
 W \times \{0\} & \xrightarrow{\quad f \quad} & X \\
 \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\
 W \times I & \xrightarrow{\quad F \quad} & Y
 \end{array}$$

e além disso, se F é uma homotopia relativa a W' , para algum $W' \subset W$, então h também é.

1.4 COROLÁRIO: Seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento. Sejam f_0, f_1 caminhos em Y com $f_0 \simeq f_1$ (rel ∂I). Sejam $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ levantamentos de f_0, f_1 tais que $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$. Então $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ e $\tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$ (rel ∂I).

1.5 COROLÁRIO: Sejam $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento e $f : (I, \partial I) \rightarrow (Y, y_0)$ um laço. Se f é homotópica a um laço constante rel ∂I então qualquer levantamento de f será um laço e homotópico a um laço constante rel ∂I .

1.6 COROLÁRIO: Seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento e $p(x_0) = y_0$. Então

$$p_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

é um monomorfismo cuja imagem consiste das classes de laços em Y baseados em y_0 que se levantam à laços em X baseados em x_0 .

1.7 COROLÁRIO: Seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento e $p(x_0) = y_0$. Se f é um laço em Y baseado em y_0 que se levanta a um laço em X baseado em x_0 , então qualquer laço homotópico a f (rel ∂I) também se levanta a um laço em X baseado em x_0 . Ou seja, levantamento de um laço é uma propriedade da classe $[f]$.

1.8 COROLÁRIO: Seja Y um espaço de Hausdorff, conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Se Y tem uma cobertura não trivial então $\pi_1(Y, y_0) \neq 1$.

Como consequência do corolário 1.8, podemos conhecer vários espaços com grupo fundamental não trivial: a circunferência, a garrafa de Klein e o plano projetivo.

2 Teorema do levantamento

O *problema de levantamento* na Topologia consiste em decidir quando se pode “levantar” uma aplicação $f : W \rightarrow Y$ a uma aplicação $g : W \rightarrow X$, ou seja, tal que $p \circ g = f$, onde $p : X \rightarrow Y$ é dada. Em outras palavras, sobre quais condições podemos completar o diagrama abaixo, tornando-o comutativo.

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ W & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Este é um importante problema em Topologia, visto que muitas questões topológicas podem ser feitas em termos da procura de tais levantamentos. Se adicionarmos algumas hipóteses sobre pontos base x_0, y_0, w_0 e se p for uma aplicação de recobrimento, então podemos responder tal questão agora, com o teorema abaixo.

2.1 TEOREMA (TEOREMA DO LEVANTAMENTO): Seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento com $p(x_0) = y_0$. Suponhamos que W seja conexo

por caminhos e localmente conexo por caminhos e que $f : W \rightarrow Y$ seja uma aplicação com $f(w_0) = y_0$. Então uma aplicação $g : (W, w_0) \rightarrow (X, x_0)$ tal que $p \circ g = f$ existe se, e somente se, $f_{\#}(\pi_1(W, w_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$. Além disso, g é única.

A hipótese de W ser localmente conexo por caminhos não pode ser retirada. Para um contra-exemplo, ver [1], 3.4.

2.2 COROLÁRIO: Seja W simplesmente conexo, conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos e seja $p : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação de recobrimento. Seja $f : (W, w_0) \rightarrow (Y, y_0)$ uma aplicação qualquer. Então sempre existe um levantamento g de f levando w_0 em qualquer ponto escolhido em $p^{-1}(y_0)$. O levantamento g é único se $g(w_0)$ for especificado.

2.3 LEMA: Seja W conexo e sejam $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento e $f : W \rightarrow Y$ uma aplicação qualquer. Se $g_1, g_2 : W \rightarrow X$ são levantamentos de f e $g_1(w) = g_2(w)$, para algum $w \in W$, então $g_1 = g_2$.

2.4 COROLÁRIO: Sejam $p_i : W_i \rightarrow Y, i = 1, 2$, aplicações de recobrimento, com W_1 simplesmente conexo, e sejam $w_i \in W_i$ e $y \in Y$ tais que $p_i(w_i) = y$. Então existe uma única aplicação $g : W_1 \rightarrow W_2$ tal que $g(w_1) = w_2$ e $p_2 \circ g = p_1$. Além disso, g é uma aplicação de recobrimento.

2.5 COROLÁRIO: Sejam $p_i : W_i \rightarrow Y, i = 1, 2$, aplicações de recobrimento, com W_1 e W_2 ambos simplesmente conexos. Se $w_i \in W_i$ são tais que $p_1(w_1) = p_2(w_2)$ então existe uma única aplicação $g : W_1 \rightarrow W_2$ tal que $g(w_1) = w_2$ e $p_2 \circ g = p_1$. Além disso, g é um homeomorfismo.

No corolário anterior, tal g é chamada *equivalência* de espaços de recobrimento. Assim, todos espaços de recobrimento simplesmente conexos de um dado espaço são equivalentes. Também são chamados de *espaços de recobrimento universal* ou *cobertura universal*.

3 A ação de π_1 na fibra

As próximas seções ainda tratam de coberturas de um espaço dado. Nessa seção, definiremos e estudaremos uma ação do grupo fundamental do espaço base de uma cobertura, ação sobre a fibra, que é a imagem inversa de um ponto do espaço base, previamente escolhido.

De agora em diante, $p : X \rightarrow Y$ será uma aplicação de recobrimento e $y_0 \in Y$ um ponto base fixado. Por simplicidade de notação, definiremos

$$J = \pi_1(Y, y_0) \quad \text{e} \quad F = p^{-1}(y_0).$$

O conjunto discreto F é chamado de *fibra* de p . Descreveremos uma ação do grupo J em F como um grupo de permutações. Por conveniência, a ação será à direita.

Sejam $x \in F$ e $\alpha \in J$. Representamos α por um laço $f : I \rightarrow Y$ e levantamos f para obtermos um caminho g em X com $g(0) = x$. Definimos então

$$x \cdot \alpha = g(1)$$

que não depende da escolha de f , pelo corolário 1.4, e assim temos uma função bem definida

$$F \times J \rightarrow F.$$

Colocaremos agora algumas propriedades desta função.

1. $x \cdot 1 = x$. A prova é direta.
2. $(x \cdot \alpha) \cdot \beta = x \cdot (\alpha\beta)$. Isto nos diz que J atua como um grupo de permutações de F . Para provarmos (2), levantamos um laço que representa α a um caminho f começando em x . Tal caminho vai de x até $x \cdot \alpha$. Então, levantamos um laço representando β a um caminho g começando em $x \cdot \alpha$, que por sua vez vai de $x \cdot \alpha$ até $(x \cdot \alpha) \cdot \beta$. Assim, $f * g$ (justaposição de caminhos) é um levantamento de um laço representando $\alpha\beta$, começando em x e portanto terminando em $x \cdot (\alpha\beta)$.
3. Tal ação é transitiva, isto é, dados $x, x_0 \in F$, existe $\alpha \in J$ tal que $x = x_0 \cdot \alpha$. Para isso, simplesmente escolhemos um caminho em X de

x_0 até x , que é projetado em um laço f em Y . Então, basta tomarmos $\alpha = [f]$.

4. Definimos o *subgrupo de isotropia* de J em x_0 por

$$J_{x_0} = \{\alpha \in J; x_0 \cdot \alpha = x_0\}.$$

Então, $J_{x_0} = \text{Im}(p_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow J = \pi_1(Y, y_0))$. Para isso, notemos que $\alpha \in J_{x_0}$ se, e somente se, $\alpha = [f]$, onde f é levantada a um laço em x_0 , ou seja, se, e somente se, $\alpha \in \text{Im}(p_{\#})$, como mostrado no corolário 1.6.

5. A aplicação $\phi : J/J_{x_0} \rightarrow F$, que leva a classe lateral $J_{x_0}\alpha$ em $x_0 \cdot (J_{x_0}\alpha) = x_0 \cdot \alpha$, é uma bijeção.
- (a) Mostremos que ϕ está bem definida. Suponhamos que $J_{x_0} \cdot \alpha = J_{x_0} \cdot \beta$, e portanto, $\alpha\beta^{-1} \in J_{x_0}$. Pela definição temos $x_0 \cdot \alpha = g_1(1)$ e $x_0 \cdot \beta = g_2(1)$, onde g_1, g_2 são levantamentos de f_1, f_2 , representantes de α, β . Como $\alpha\beta^{-1} \in J_{x_0}$, seu levantamento será um laço em x_0 e tal levantamento é $g_1 * g_2^{-1}$. Logo $g_1(1) = g_2^{-1}(0) = g_2(1)$ e então ϕ é bem definida.
 - (b) Mostremos que ϕ é injetora. Se $x_0 \cdot \alpha = x_0 \cdot \beta$ então $g_1(1) = g_2(1)$, onde g_1, g_2 são levantamentos de f_1, f_2 , começando em x_0 . Portanto, $g_1 * g_2^{-1}$ é um laço em x_0 e é um levantamento de $f_1 * f_2^{-1}$, representante de $\alpha\beta^{-1}$ que pertence a $p_{\#}(\pi_1(X, x_0)) = J_{x_0}$ e assim $J_{x_0} \cdot \alpha = J_{x_0} \cdot \beta$.
 - (c) Como a ação é transitiva, ϕ é sobrejetora, pois dado $x \in F$ existe $\alpha \in J$ tal que $x = x_0 \cdot \alpha = \phi(J_{x_0}\alpha)$.

Resumindo, temos o seguinte resultado:

3.1 TEOREMA: Seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento com $p(x_0) = y_0$. Existe uma bijeção entre o conjunto $\pi_1(Y, y_0)/p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$ das classes laterais à direita e a fibra $p^{-1}(y_0)$.

Vale lembrar que $p_{\#}(\pi_1(X, x_0)) \approx \pi_1(X, x_0)$, desde que $p_{\#}$ é um monomorfismo, pelo corolário 1.6.

3.2 COROLÁRIO: O número de folhas de uma aplicação de recobrimento é igual ao índice de $p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$ em $\pi_1(Y, y_0)$.

3.3 COROLÁRIO: Se $p : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento com X simplesmente conexo então o número de folhas é igual à ordem de $\pi_1(Y, y_0)$, já que $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Por exemplo, desde que S^n é simplesmente conexo para $n > 1$ e S^n é uma cobertura dupla para o plano projetivo real P^n , segue que $\pi_1(P^n) \approx \mathbb{Z}_2$.

4 Transformações “deck”

Continuaremos usando uma aplicação de recobrimento $p : X \rightarrow Y$ fixada e as notações da seção anterior.

4.1 DEFINIÇÃO: Seja $p : X \rightarrow Y$ uma aplicação de recobrimento. Um homeomorfismo $D : X \rightarrow X$ que cobre a aplicação identidade em Y , isto é, $p \circ D = p$, é chamada de *transformação “deck”* ou *automorfismo da cobertura*.

Se D é uma transformação “deck” então D^{-1} também é uma transformação “deck”. O mesmo vale para a composição de duas transformações “deck” da mesma cobertura. Assim, tais transformações formam um grupo $\Delta = \Delta(p)$, com a operação de composição.

Pelo lema 2.3, se $D \in \Delta$ e $D(x) = x$ para algum $x \in X$ então $D = \text{Id}$.

4.2 PROPOSIÇÃO: Se $D \in \Delta$, $\alpha \in \pi_1(Y, y_0)$ e $x \in p^{-1}(y_0)$ então $D(x) \cdot \alpha = D(x \cdot \alpha)$. Podemos dizer então que uma transformação “deck” comuta com a ação do grupo na fibra.

PROVA: Sejam f um laço baseado em y_0 , representando α , e g um levantamento de f começando em x . Então $g(1) = x \cdot \alpha$, por definição. Assim, o caminho $D \circ g$ é um levantamento de f começando em $D(x)$ e terminando em $D(x) \cdot \alpha$. Porém, seu extremo final é a imagem por D do extremo final de g , isto é, $D(x \cdot \alpha)$, de onde segue a igualdade. ■

Lembramos que o *normalizador* de um subgrupo H de um grupo G é

$$N(H) = \{n \in G; nHn^{-1} = H\}.$$

4.3 TEOREMA: Seja $x_0 \in X$, com $p(x_0) = y_0$, e seja $x \in p^{-1}(y_0)$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

- i. existe $D \in \Delta$ tal que $D(x_0) = x$.
- ii. existe $\alpha \in N(p_{\#}(\pi_1(X, x_0)))$ tal que $x = x_0 \cdot \alpha$.
- iii. $p_{\#}(\pi_1(X, x_0)) = p_{\#}(\pi_1(X, x))$.

PROVA: Pelo teorema 2.1, uma aplicação D cobrindo a identidade e enviando x_0 em x existe se, e somente se, $p_{\#}(\pi_1(X, x_0)) \subset p_{\#}(\pi_1(X, x))$. Analogamente, uma aplicação D' cobrindo a identidade e enviando x em x_0 existe se, e somente se, valer a inclusão oposta. Assumindo (i), temos então a existência de D e D' e portanto vale (iii). Reciprocamente, assumindo (iii) teremos D, D' e então $D \circ D'$ cobre a identidade e tem um ponto em comum com a identidade. Logo, pelo lema 2.3, temos $D \circ D' = \text{Id}$. Isto prova a equivalência de (i) e (iii).

Notemos as igualdades de conjuntos

$$\begin{aligned} J_{x_0 \cdot \alpha} &= \{\beta; (x_0 \cdot \alpha) \cdot \beta = x_0 \cdot \alpha\} \\ &= \{\beta; x_0 \cdot \alpha \beta \alpha^{-1} = x_0\} \\ &= \{\beta; \alpha \beta \alpha^{-1} \in J_{x_0}\} \end{aligned}$$

e assim

$$J_{x_0 \cdot \alpha} = \alpha^{-1} J_{x_0} \alpha.$$

Provemos agora que (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), lembrando que $J_{x_0} = p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$. Suponhamos (iii), isto é, que $J_{x_0} = J_x$ e que $x = x_0 \cdot \alpha$ (tal α existe desde que J é transitivo em F). Então

$$J_{x_0} = J_x = J_{x_0 \cdot \alpha} = \alpha^{-1} J_{x_0} \alpha$$

nos mostra que $\alpha \in N(J_{x_0})$, ou seja, vale (ii). Reciprocamente, se $x = x_0 \cdot \alpha$ e $\alpha \in N(J_{x_0})$ então

$$J_x = J_{x_0 \cdot \alpha} = \alpha^{-1} J_{x_0} \alpha = J_{x_0}$$

e assim vale (iii). ■

4.4 COROLÁRIO: O subgrupo $p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$ é normal em $\pi_1(Y, y_0)$ se, e somente se, Δ é (simplesmente) transitivo em $p^{-1}(y_0)$.

4.5 COROLÁRIO: Se x varia em $p^{-1}(y_0)$ e x_0 é um tal ponto como no teorema, então $p_{\#}(\pi_1(X, x))$ varia sobre todos os conjugados de $p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$.

4.6 DEFINIÇÃO: Dizemos que uma aplicação de recobrimento p é *regular* se Δ é transitivo na fibra $p^{-1}(y_0)$, isto é, se $p_{\#}(\pi_1(X, x_0))$ é normal em $\pi_1(Y, y_0)$.

Os exemplos (1-4) da seção 1 são todos regulares.

4.7 DEFINIÇÃO: Definimos uma função $\Theta : N(J_{x_0}) \rightarrow \Delta$ por $\Theta(\alpha) = D_{\alpha}$, onde D_{α} é a única transformação “deck” tal que $D_{\alpha}(x_0) = x_0 \cdot \alpha$.

4.8 TEOREMA (CLASSIFICAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES “DECK”): A aplicação $\Theta : N(J_{x_0}) \rightarrow \Delta$ é um epimorfismo com núcleo J_{x_0} . Consequentemente,

$$\Delta \approx \frac{N(p_{\#}(\pi_1(X, x_0)))}{p_{\#}(\pi_1(X, x_0))}.$$

PROVA: Notemos que Θ é um homomorfismo, pois

$$D_{\beta}D_{\alpha}(x_0) = D_{\beta}(x_0 \cdot \alpha) = (D_{\beta}(x_0)) \cdot \alpha = (x_0 \cdot \beta) \cdot \alpha = x_0 \cdot (\beta\alpha) = D_{\beta\alpha}(x_0).$$

Em seguida, notemos que se $D \in \Delta$ e se $D(x_0) = x$, pelo teorema 4.3, existe $\alpha \in N(J_{x_0})$ tal que $D(x_0) = x = x_0 \cdot \alpha = D_{\alpha}(x_0)$, ou seja, $D = D_{\alpha}$. Logo, Θ é sobrejetiva. Finalmente, calculemos o núcleo de Θ . Observemos que $D_{\alpha} = \text{Id}$ se, e somente se, $x_0 \cdot \alpha = x_0$, ou ainda, se, e somente se, $\alpha \in J_{x_0}$. Daí, segue o resultado. ■

4.9 COROLÁRIO: Se a aplicação de recobrimento $p : X \rightarrow Y$ é regular então

$$\Delta \approx \pi_1(Y, y_0)/p_{\#}(\pi_1(X, x_0)).$$

4.10 COROLÁRIO: Se $p : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento com X simplesmente conexo então

$$\Delta \approx \pi_1(Y, y_0).$$

Discutiremos agora alguns exemplos. A cobertura $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ tem como transformações “deck” as translações inteiras de $\mathbb{R}$, ou seja, translações por quantidades inteiras. Como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo, pelo corolário 4.10, temos $\pi_1(S^1) \approx \Delta \approx \mathbb{Z}$, como já sabíamos.

Analogamente, a cobertura do toro pelo plano tem como transformações “deck” as translações inteiras em ambas as coordenadas, de modo que o grupo fundamental do toro $S^1 \times S^1$ é $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Qualquer cobertura dupla por um espaço simplesmente conexo tem exatamente duas transformações “deck”, a identidade e uma outra que “torce as folhas”. Assim, o grupo fundamental do espaço base deve ser $\mathbb{Z}_2$. Por exemplo, $\pi_1(P^n) \approx \mathbb{Z}_2$, para $n \geq 2$.

5 Ações propriamente descontínuas

Lembramos que uma *ação* de um grupo G sobre um espaço X é uma aplicação (função contínua) $G \times X \rightarrow X$, onde a imagem de (g, x) será denotada por $g \cdot x$, tal que $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ e $1 \cdot x = x$. Para $x \in X$, a *órbita* de x é o conjunto $G \cdot x = \{g \cdot x; g \in G\}$, de modo que duas órbitas ou são disjuntas ou são idênticas e assim particionam o espaço X . O conjunto de todas as órbitas é denotado por X/G , com a topologia quociente da aplicação $X \rightarrow X/G$ que envia x em $G \cdot x$, e é chamado de *espaço órbita*. O subgrupo $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ é chamado *grupo de isotropia* de x (ou estabilizador). A ação é *transitiva* se existe somente uma órbita e é *efetiva* se o único elemento que fixa todo x é o elemento neutro $1 \in G$.

Notemos que a aplicação canônica $p : X \rightarrow X/G$ é aberta desde que, para $U \subset X$ aberto e $U^* = p(U)$, temos

$$p^{-1}(U^*) = \bigcup \{g \cdot U; g \in G\}$$

que é uma união de conjuntos abertos, e portanto é aberto. Por definição da topologia quociente, temos então que U^* é um conjunto aberto.

5.1 DEFINIÇÃO: Uma ação de um grupo G sobre um espaço X é dita ser *propriamente descontínua* se cada ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U tal que se $g \cdot U \cap U \neq \emptyset$ então $g = 1$.

Por exemplo, se $p : X \rightarrow Y$ é uma aplicação de recobrimento então a ação do grupo Δ (das transformações “deck”) é propriamente descontínua. Além disso, se p é regular então $X/\Delta \approx Y$.

5.2 PROPOSIÇÃO: Seja X um espaço de Hausdorff, conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos, com uma ação propriamente descontínua de G sobre X . Então, $p : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação de recobrimento regular com grupo de transformações “deck” $\Delta = G$.

PROVA: Seja $U \subset X$ um aberto conexo por caminhos, como na definição 5.1, e seja $U^* = p(U)$, que é aberto. Desde que $U \rightarrow U^*$ é contínua, U^* é conexo por caminhos. Também, os conjuntos $g \cdot U$ são as componentes de $p^{-1}(U^*)$ e como as aplicações $g \cdot U \rightarrow U^*$ são contínuas, abertas e bijetivas, então são homeomorfismos. Assim, p é uma aplicação de recobrimento. Os elementos de G são transformações “deck” e agem transitivamente sobre uma fibra. Pelo lema 2.3 não existem outras. ■

5.3 COROLÁRIO: Seja X simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos com uma ação de G em X propriamente descontínua. Então $\pi_1(X/G) \approx G$.

PROVA: Pela proposição 5.2, $p : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação de recobrimento regular e $\Delta = G$. Pelo corolário 4.10, $G \approx \pi_1(X/G)$. ■

5.4 EXEMPLO (GARRAFA DE KLEIN): Seja G o grupo de transformações do plano gerado por f e g , onde $f(x, y) = (x, y + 1)$ e $g(x, y) = (x + 1, 1 - y)$. Uma observação mais geométrica desta ação nos mostra que o espaço órbita $\mathbb{R}^2/G$ é a garrafa de Klein. O grupo G é gerado pelos elementos f e g , com a relação $fg = gf^{-1}$. Assim, G é não-abeliano e possui um subgrupo normal cíclico infinito $H = \langle f \rangle$, gerado por f . Portanto, G/H também é cíclico infinito, gerado pela classe lateral gH . Pelo corolário 5.3, G é o *grupo fundamental da garrafa de Klein*.

O estudo de homologia com coeficientes locais será importante para a finalização do trabalho, pois teremos que saber quem são os grupos de co-homologia de dimensão dois das superfícies sobre as quais classificaremos os 2-fibrados. Ressaltamos que esse conceito não é muito explorado na literatura. Começamos o capítulo com uma revisão sobre complexo de cadeias e terminamos com o cálculo das homologias de alguns espaços. A referência principal para esse capítulo é [4].

6 Complexo de cadeias

Colocamos aqui algumas terminologias e resultados sobre complexos de cadeias. Omitiremos algumas provas, que podem ser encontradas em [2].

Seja R um anel arbitrário. Um R -módulo graduado é uma seqüência $C = (C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de R -módulos. Se $x \in C_n$, dizemos que x tem grau n e escrevemos $\deg(x) = n$. Uma aplicação de grau p de um R -módulo graduado C para um R -módulo graduado C' é uma família $f = (f_n : C_n \rightarrow C'_{n+p})_{n \in \mathbb{Z}}$ de homomorfismos de R -módulos.

6.1 DEFINIÇÃO (COMPLEXO DE CADEIAS): Um *complexo de cadeias* sobre R é um par (C, d) onde C é um R -módulo graduado e $d : C \rightarrow C$ é uma aplicação de grau -1 tal que $d^2 = 0$. A aplicação d é chamada *diferencial* ou *operador bordo* de C . Às vezes, omitimos d da notação e simplesmente dizemos que C é um complexo de cadeias.

6.2 DEFINIÇÃO (HOMOLOGIA): Definimos os *ciclos* $Z(C)$, os *bordos* $B(C)$ e a *homologia* $H(C)$ por

$$Z(C) = \text{Ker}(d), \quad B(C) = \text{Im}(d), \quad H(C) = Z(C)/B(C).$$

Se (C, d) e (C', d') são complexos de cadeias então uma *aplicação de cadeias* de C para C' é um homomorfismo de módulos graduados $f : C \rightarrow C'$ de grau 0 tal que $d'f = fd$. Uma *homotopia* h de uma aplicação de cadeias f a uma aplicação de cadeias g é um homomorfismo de módulos graduados $h : C \rightarrow C'$ de grau 1 tal que $d'h + hd = f - g$. Escrevemos $f \simeq g$ e dizemos que f é homotópica a g se existe uma homotopia de f a g .

6.3 PROPOSIÇÃO: Uma aplicação de cadeias $f : C \rightarrow C'$ induz uma aplicação $f^* : H(C) \rightarrow H(C')$ e $f^* = g^*$ se $f \simeq g$.

Uma aplicação de cadeias $f : C \rightarrow C'$ é chamada *equivalência de homotopia* se existe uma aplicação de cadeias $f' : C' \rightarrow C$ tal que $ff' \simeq \text{Id}_{C'}$ e $f'f \simeq \text{Id}_C$. É chamada *equivalência fraca* se $f^* : H(C) \rightarrow H(C')$ é um isomorfismo. Lembramos que qualquer equivalência de homotopia é uma equivalência fraca.

Um complexo de cadeias C é chamado *contrátil* se é homotopicamente equivalente ao complexo nulo, ou equivalentemente, se $\text{Id}_C \simeq 0$.

6.4 PROPOSIÇÃO: Uma seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \longrightarrow 0$$

de complexos de cadeias dá origem à uma seqüência exata longa em homologia

$$\cdots \rightarrow H_n(C') \xrightarrow{i^*} H_n(C) \xrightarrow{j^*} H_n(C'') \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C') \rightarrow \cdots$$

Além do mais, se o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

é comutativo e as linhas são exatas então o quadrado abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} H_n(C'') & \longrightarrow & H_{n-1}(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(E'') & \longrightarrow & H_{n-1}(E') \end{array}$$

7 Homologia com coeficientes locais

Quando estudamos teoria de homotopia de espaços não-simplesmente conexos, devemos considerar uma ação do grupo fundamental sobre algum grupo abeliano. Sistemas de coeficientes locais são uma ferramenta para organizarmos essa informação. A teoria torna-se mais complicada pelo fato de termos que considerar anéis não-comutativos.

Existem duas abordagens para a construção do complexo que nos dá a homologia e co-homologia com coeficientes locais de um espaço. A primeira é mais algébrica e tem como ponto de vista que o complexo de cadeias que será associado a um espaço X é um complexo singular (ou celular) da cobertura universal $\tilde{X}$, visto como um complexo de cadeias sobre o anel de grupos $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$. Deste ponto de vista, coeficientes locais nada mais são que módulos sobre o anel de grupos $\mathbb{Z}[\pi_1(X)]$.

A segunda abordagem é mais topológica; consideramos um sistema de coeficientes locais sobre X (ou seja, um fibrado sobre X cujas fibras são grupos abelianos e cujas funções transição tomam valores nos automorfismos do grupo estrutural do fibrado - ver capítulo IV) e definimos um complexo de cadeias considerando as cadeias como somas formais de simplexes singulares (ou celulares), com os coeficientes de um simplexo sendo um elemento da fibra sobre aquele simplexo (por isso a terminologia *coeficientes locais*). Porém, não abordaremos tal construção e sim apenas a primeira.

Neste capítulo trabalharemos com $\mathbb{Z}$ -módulos (módulos sobre o anel $\mathbb{Z}$) e módulos sobre o anel de grupos $\mathbb{Z}[\pi]$, que por facilidade de notação, denotaremos por $\mathbb{Z}\pi$.

Começamos então com a definição de anel de grupos.

7.1 DEFINIÇÃO: O anel de grupos $\mathbb{Z}\pi$ é um anel associado ao grupo π . Aditivamente é o grupo livre abeliano sobre π , ou seja, os elementos são combinações lineares finitas dos elementos do grupo

$$m_1g_1 + \cdots + m_kg_k \quad m_i \in \mathbb{Z}, g_i \in \pi.$$

A multiplicação é dada pela lei distributiva e pela multiplicação em π por

$$\left(\sum_i m_i g_i\right) \left(\sum_j n_j h_j\right) = \sum_{i,j} (m_i n_j) (g_i h_j).$$

Quando lidamos com anel de grupos, usamos a notação multiplicativa para o grupo π e seu elemento neutro passa a ser denotado por 1, que é também o elemento unidade no anel $\mathbb{Z}\pi$.

Um exemplo de anel de grupos (com a notação padrão) é

$$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] = \{a_{-j}t^{-j} + \cdots + a_0 + \cdots + a_k t^k; a_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Trabalharemos com módulos sobre $\mathbb{Z}\pi$, ou equivalentemente, $\mathbb{Z}\pi$ -módulos (ou π -módulos). Se π não é abeliano o anel $\mathbb{Z}\pi$ não é necessariamente comutativo e assim devemos distinguir entre módulos à direita e módulos à esquerda.

Seja A um grupo abeliano e seja

$$\rho : \pi \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$$

um homomorfismo. Neste caso dizemos que ou ρ ou A é uma *representação de π* . A representação ρ induz em A uma estrutura de $\mathbb{Z}\pi$ -módulo à esquerda, onde a ação é dada por

$$\left(\sum_{g \in \pi} m_g g\right) \cdot a = \sum_{g \in \pi} m_g \rho(g)(a).$$

Reciprocamente, se A é um módulo à esquerda sobre o anel de grupos $\mathbb{Z}\pi$, existe um homomorfismo

$$\rho : \pi \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{Z}}(A)$$

dado por $g \mapsto (a \mapsto ga)$, onde ga é a multiplicação de $a \in A$ por $g \in \mathbb{Z}\pi$. Assim, *uma representação de um grupo π sobre um grupo abeliano é o mesmo que um $\mathbb{Z}\pi$ -módulo*.

Rapidamente, colocaremos a definição do produto tensorial no caso não-comutativo.

7.2 DEFINIÇÃO (PRODUTO TENSORIAL): Sejam R um anel (possivelmente não-comutativo), M um R -módulo à direita e N um R -módulo à esquerda. Então o *produto tensorial* $M \otimes_R N$ é um grupo abeliano satisfazendo a propriedade

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, A) \approx \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, A))$$

para qualquer grupo abeliano A .

Construímos tal produto tomando o *grupo abeliano livre* em $M \times N$ e ajustando as relações desejadas. Elementos de $M \otimes_R N$ são denotados por

$$\sum m_i \otimes n_i.$$

A relação $mr \otimes n = m \otimes rn$ vale (e este é o motivo de tomarmos um módulo à direita tensorializado com um módulo à esquerda).

O primeiro ponto na construção algébrica de homologia com coeficientes locais é observarmos que o complexo de cadeias singulares da cobertura universal de um espaço é um $\mathbb{Z}\pi$ -módulo à direita, ou seja, $\mathbb{Z}\pi$ age em tal complexo.

Para isso, seja X um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos, com ponto base escolhido, que admite uma cobertura universal. Para facilidade de notação, seja $\pi = \pi_1(X)$. Seja $\tilde{X} \rightarrow X$ a cobertura universal de X , com a ação à direita usual de π , pela identificação de π com o grupo das transformações “deck” (ver I.4). Então o complexo singular $S_*(\tilde{X})$ da cobertura universal (com coeficientes inteiros) é um $\mathbb{Z}\pi$ -módulo à direita; a ação de $g \in \pi$ em um simplexo singular $\sigma : \Delta^k \rightarrow \tilde{X}$ é o simplexo singular $\sigma \cdot g$ definido como a composição de σ e da transformação “deck” $g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$. Esta se estende de π para $\mathbb{Z}\pi$ por linearidade.

Podemos agora introduzir a definição de homologia com coeficientes locais.

7.3 DEFINIÇÃO: Dado um $\mathbb{Z}\pi$ -módulo A , formamos o produto tensorial

$$S_*(X; A) = S_*(\tilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}\pi} A.$$

Este é um complexo de cadeias cuja homologia é chamada a *homologia de X com coeficientes locais em A* , denotada por $H_*(X; A)$.

Notemos que, desde que o anel $\mathbb{Z}\pi$ é não-comutativo (exceto se π for abeliano), o complexo de cadeias tensorializado tem somente a estrutura de um complexo de cadeias sobre $\mathbb{Z}$, não sobre $\mathbb{Z}\pi$. Assim, o grupo de homologia $H_*(X; A)$ é somente um $\mathbb{Z}$ -módulo. Tal informação será importante para justificar alguns fatos que ocorrerão durante o cálculo das homologias.

Se o $\mathbb{Z}\pi$ -módulo A é especificado por $\rho : \pi_1(X) \rightarrow \text{Aut}(A)$, e se quisermos enfatizar tal representação, escreveremos então $H_*(X; A_\rho)$. Às vezes, é comum chamarmos $H_*(X; A_\rho)$ de *homologia de X torcida por ρ* .

Há também a definição correspondente de co-homologia. Porém, há um pequeno detalhe. Desde que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\pi}(-, -)$ está definido na categoria de pares de R -módulos à direita ou R -módulos à esquerda, precisamos mudar $S_*(\tilde{X})$ para um $\mathbb{Z}\pi$ -módulo à esquerda ou considerar coeficientes em $\mathbb{Z}\pi$ -módulos à direita. Optaremos pela primeira opção.

Assim, transformamos $S_*(\tilde{X})$ em um $\mathbb{Z}\pi$ -módulo à esquerda pelo processo padrão: definimos a ação por

$$g \cdot z = z \cdot g^{-1}.$$

7.4 DEFINIÇÃO: Dado um $\mathbb{Z}\pi$ -módulo à esquerda A , formamos o complexo de cadeias

$$S^*(X; A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}\pi}(S_*(\tilde{X}), A),$$

o conjunto dos homomorfismos de grupos $f : S_*(\tilde{X}) \rightarrow A$, que satisfazem $f(rz) = rf(z)$, para todo $r \in \mathbb{Z}\pi$ e $z \in S_*(\tilde{X})$. A co-homologia deste complexo é chamada a *co-homologia de X com coeficientes locais em A* , denotada por $H^*(X; A)$.

Faremos agora alguns exemplos, para ilustrarmos como o processo funciona e como calculamos os grupos de homologia com coeficientes torcidos. Usaremos sempre o anel $\mathbb{Z}$ e portanto teremos $\text{Aut}(\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_2$ e sempre denotaremos $\pi = \pi_1(X)$. Em alguns exemplos, usaremos uma decomposição simplicial para o espaço de recobrimento e em outros, usaremos uma decomposição celular. Mas o importante é que sempre construiremos uma seqüência semi-exata de grupos livres, na verdade, de $\mathbb{Z}\pi$ -módulos livres, bastando assim calcularmos a diferencial apenas em seus geradores.

8 Homologia da S^1

Nesta seção, calcularemos os grupos de homologia da S^1 usando as duas possíveis representações $\rho : \pi \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z})$. Como π possui um gerador t , ρ fica bem determinada se a definirmos em t , que poderá ser enviado em ± 1 .

Um fato importante aqui é que usaremos a decomposição simplicial de $\widetilde{S}^1$, representada abaixo (figura 2.1), como sendo a cobertura para S^1 , que também será decomposta usando os simplexos abaixo. A figura 2.1 mostra a cobertura e o espaço base.

Figura 2.1: Decomposição simplicial de $\widetilde{S}^1$.

A ação de π em $\widetilde{S}^1$ é via translações e assim o grupo dos 0-simplexos de $\widetilde{S}^1$ é gerado por três elementos, que são v_0^0, v_1^0, v_2^0 (por facilidade de notação, denotaremos apenas por v_0, v_1, v_2). Analogamente temos os geradores $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ para o grupo dos 1-simplexos de $\widetilde{S}^1$. Resumidamente, podemos então escrever

$$S_2(\widetilde{S}^1) = 0, \quad S_1(\widetilde{S}^1) = \mathbb{Z}\pi[\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2] \quad \text{e} \quad S_0(\widetilde{S}^1) = \mathbb{Z}\pi[v_0, v_1, v_2],$$

dando origem à seqüência

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}\pi[\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\pi[v_0, v_1, v_2] \longrightarrow 0.$$

Montamos a matriz $M_1 = [\partial_1]$, onde

$$\partial_1(\sigma_0) = v_1 - v_0, \quad \partial_1(\sigma_1) = v_2 - v_1, \quad \partial_1(\sigma_2) = v_0^1 - v_2 = t \cdot v_0 - v_2$$

e transpondo nas colunas temos

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & t \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lembramos que, para calcularmos a homologia com coeficientes locais, precisamos tensorializar a seqüência e daí passamos a trabalhar com $\mathbb{Z}$ -módulos. Isto será feito escolhendo uma representação ρ . Faremos agora os dois casos.

8.1 ρ não-trivial

Aqui, usaremos a representação ρ que envia t em -1 , isto é, $\rho(t) = -1$. Deste modo, $t \cdot v_0 = \rho(t)v_0 = -v_0$ e então temos a matriz M_1 de ∂_1 sendo

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que possui determinante não nulo e portanto $\text{Ker}(\partial_1) = 0$. Sendo assim,

$$H_1(S^1; \mathbb{Z}_\rho) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = 0.$$

Analisando sua imagem temos que, para uma 1-cadeia σ escrita na base como (a, b, c) ,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a - c \\ a - b \\ b - c \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\partial_1(\sigma) = a(v_1 - v_0) + b(v_2 - v_1) + c(-v_2 - v_0)$$

e assim

$$\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[v_1 - v_0, v_2 - v_1, -v_2 - v_0].$$

Como $\partial_0 \equiv 0$ temos que $\text{Ker}(\partial_0) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2]$. Porém,

$$v_1 = (v_1 - v_0) + v_0 \quad \text{e} \quad v_2 = -v_0 - (-v_0 - v_2),$$

que pode ser visto como uma mudança de coordenadas através da matriz de determinante -1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$\text{Ker}(\partial_0) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2] = \mathbb{Z}[v_0, v_1 - v_0, -v_0 - v_2].$$

Notemos que, se mudarmos a base $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$ para $\{\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2, \sigma_0, \sigma_2\}$, teremos

$$\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[-2v_0, v_1 - v_0, -v_0 - v_2]$$

e então podemos concluir que

$$H_0(S^1; \mathbb{Z}_\rho) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[v_0, v_1 - v_0, -v_0 - v_2]}{\mathbb{Z}[-2v_0, v_1 - v_0, -v_0 - v_2]} \approx \frac{\mathbb{Z}[v_0]}{\mathbb{Z}[-2v_0]} \approx \mathbb{Z}_2.$$

8.2 ρ trivial

Por fim, faremos agora o cálculo dos grupos de homologia da S^1 usando a representação trivial, ou seja $\rho(t) = 1$. Tal homologia deve coincidir com a tradicionalmente conhecida. Neste caso, a matriz M_1 torna-se

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

que possui determinante nulo. Então, se σ é uma 1-cadeia representada por (a, b, c) temos

$$\partial_1(\sigma) = (c - a)v_0 + (a - b)v_1 + (b - c)v_2$$

e assim $\sigma \in \text{Ker}(\partial_1)$ se, e somente se, $a = b = c$, isto é, $\sigma = a(\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2)$. Portanto

$$\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2] \approx \mathbb{Z}$$

e como $\partial_2 \equiv 0$ temos

$$H_1(S^1) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} \approx \mathbb{Z}.$$

Como $\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[v_1 - v_0, v_2 - v_1, v_0 - v_2]$ e $v_0 - v_2 = -(v_1 - v_0) - (v_2 - v_1)$ então

$$\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[v_1 - v_0, v_2 - v_1].$$

Também, como $\partial_0 \equiv 0$ temos

$$\text{Ker}(\partial_0) = \mathbb{Z}[v_0, v_1, v_2] = \mathbb{Z}[v_1 - v_0, v_2 - v_1, v_2]$$

e assim

$$H_0(S^1) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[v_1 - v_0, v_2 - v_1, v_2]}{\mathbb{Z}[v_1 - v_0, v_2 - v_1]} \approx \mathbb{Z}[v_2] \approx \mathbb{Z}.$$

Resumindo, podemos então construir a seguinte tabela, mostrando os grupos de homologia da S^1 segundo às duas representações ρ .

$\rho(t)$	$H_0(S^1)$	$H_1(S^1)$	$H_n(S^1), n \geq 2$
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
-1	$\mathbb{Z}_2$	0	0

Tabela 2.1: Homologia da S^1 .

9 Homologia do toro T

Para o cálculo dos grupos de homologia do toro T , usaremos a decomposição simplicial dada pela figura 2.2 abaixo, composta por um 0-simplexo v , três 1-simplexos $\sigma_0, \delta_0, \gamma_0$ e dois 2-simplexos α, β . Tal número é resultado das identificações feitas no quadrado, todas representadas na figura.

Temos que $\pi = \pi_1(T) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ age no plano por translações horizontais e/ou verticais e com isso podemos usar $\tilde{T} = \mathbb{R}^2$ como cobertura para o toro T , decompondo-o como mostrado na figura 2.3 abaixo e tendo os seguintes grupos de cadeias

$$S_2(\tilde{T}) = \mathbb{Z}\pi[\alpha, \beta], \quad S_1(\tilde{T}) = \mathbb{Z}\pi[\sigma_0, \delta_0, \gamma_0] \quad \text{e} \quad S_0(\tilde{T}) = \mathbb{Z}\pi[v_{00}],$$

com a seguinte seqüência associada

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}\pi[\alpha, \beta] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\pi[\sigma_0, \delta_0, \gamma_0] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\pi[v_{00}] \longrightarrow 0.$$

Figura 2.2: Decomposição simplicial do toro T . Figura 2.3: Decomposição simplicial de $\tilde{T}$.

Escrevamos algumas linhas para explicarmos a notação utilizada. Como π possui dois geradores, estes serão denotados por $(x, 1)$ e $(1, y)$. Assim, a ação de um elemento $(x^m, y^n) \in \pi$ consiste em transladar horizontalmente m unidades e verticalmente n unidades. Com isto em mente, temos que

$$v_{10} = (x, 1) \cdot v_{00}, \quad v_{01} = (1, y) \cdot v_{00}, \quad v_{11} = (x, y) \cdot v_{00}$$

e também

$$\delta_1 = (x, 1) \cdot \delta_0 \quad \text{e} \quad \sigma_1 = (1, y) \cdot \sigma_0,$$

justificando os geradores dos grupos de cadeias colocados acima.

Em relação às representações ρ , como dito acima temos dois geradores para π e novamente usamos $A = \mathbb{Z}$, de modo que $\text{Aut}(A) \approx \mathbb{Z}_2$. Logo há quatro possíveis representações, sendo três delas não triviais, todas especificadas na tabela abaixo.

	$(1,1)$	$(x,1)$	$(1,y)$	(x,y)
$\rho_1 = \text{Id}$	1	1	1	1
ρ_x	1	-1	1	-1
ρ_y	1	1	-1	-1
ρ_{xy}	1	-1	-1	1

Pelo mesmo processo feito no cálculo da homologia da S^1 , calcularemos a homologia do toro T utilizando as quatro representações acima. Mas antes, vejamos como ficam as matrizes $M_1 = [\partial_1]$ e $M_2 = [\partial_2]$. Calculando ∂_2 na base $\{\alpha, \beta\}$ temos:

$$\partial_2(\alpha) = \sigma_0 + \delta_1 + \gamma_0 = \sigma_0 + (x,1) \cdot \delta_0 + \gamma_0$$

$$\partial_2(\beta) = \delta_0 + \sigma_1 + \gamma_0 = \delta_0 + (1,y) \cdot \sigma_0 + \gamma_0$$

e transpondo nas colunas obtemos a matriz

$$M_2 = [\partial_2] = \begin{bmatrix} 1 & (1,y) \\ (x,1) & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculando ∂_1 na base $\{\sigma_0, \delta_0, \gamma_0\}$ temos:

$$\partial_1(\sigma_0) = v_{10} - v_{00} = (x,1) \cdot v_{00} - (1,1) \cdot v_{00} = ((x,1) - (1,1)) \cdot v_{00}$$

$$\partial_1(\delta_0) = v_{01} - v_{00} = (1,y) \cdot v_{00} - (1,1) \cdot v_{00} = ((1,y) - (1,1)) \cdot v_{00}$$

$$\partial_1(\gamma_0) = v_{00} - v_{11} = (1,1) \cdot v_{00} - (x,y) \cdot v_{00} = ((1,1) - (x,y)) \cdot v_{00}$$

que nos fornece a matriz

$$M_1 = [\partial_1] = \begin{bmatrix} (x,1) - (1,1) & (1,y) - (1,1) & (1,1) - (x,y) \end{bmatrix}.$$

Escolheremos agora uma representação e faremos as contas.

9.1 ρ_x não trivial

Utilizando ρ_x temos

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $\Lambda = a\alpha + b\beta$ é uma 2-cadeia então

$$\partial_2(\Lambda) = a(\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0) + b(\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0)$$

e assim $\partial_2(\Lambda) = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$, isto é, $\text{Ker}(\partial_2) = 0$. Logo, já temos que

$$H_2(T; \mathbb{Z}_{\rho_x}) = \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} = 0.$$

Por fim, $\text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, \sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]$.

Seja $\Gamma = a\sigma_0 + b\delta_0 + c\gamma_0$ de onde temos

$$\partial_1(\Gamma) = (-2a + 2c)v_{00} = (c - a)2v_{00}$$

e portanto $\partial_1(\Gamma) = 0$ se, e somente se, $c = a$, ou seja, $\Gamma = a(\sigma_0 + \gamma_0) + b\delta_0$. Concluimos então que

$$\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_0 + \gamma_0, \delta_0]$$

e também que

$$\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[2v_{00}].$$

Portanto

$$\begin{aligned} H_1(T; \mathbb{Z}_{\rho_x}) &= \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \gamma_0, \delta_0]}{\mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, \sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \gamma_0 - \delta_0, \delta_0]}{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \gamma_0 - \delta_0, 2\delta_0]} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\delta_0]}{\mathbb{Z}[2\delta_0]} \approx \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Vale observar que ao mudarmos a base $\{\sigma_0 + \gamma_0, \delta_0\}$ para $\{\sigma_0 + \gamma_0 - \delta_0, \delta_0\}$ e a base $\{\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, \sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0\}$ para $\{\sigma_0 + \gamma_0 - \delta_0, 2\delta_0\}$, sempre utilizamos matrizes inteiras de determinante 1, respectivamente as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por último, como $\partial_0 \equiv 0$ temos

$$H_0(T; \mathbb{Z}_{\rho_x}) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[v_{00}]}{\mathbb{Z}[2v_{00}]} \approx \mathbb{Z}_2,$$

encerrando assim o cálculo dos grupos de homologia do toro T utilizando a representação ρ_x .

9.2 ρ_y não trivial

Utilizando ρ_y temos

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Se $\Lambda = a\alpha + b\beta$ é uma 2-cadeia então

$$\partial_2(\Lambda) = a(\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0) + b(-\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0)$$

e assim $\partial_2(\Lambda) = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$, isto é, $\text{Ker}(\partial_2) = 0$. Logo, já temos que

$$H_2(T; \mathbb{Z}_{\rho_y}) = \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} = 0.$$

Por fim, $\text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]$.

Seja $\Gamma = a\sigma_0 + b\delta_0 + c\gamma_0$ uma 1-cadeia de modo que

$$\partial_1(\Gamma) = (-2b + 2c)v_{00} = (c - b)2v_{00}$$

e portanto $\partial_1(\Gamma) = 0$ se, e somente se, $c = b$, ou seja, $\Gamma = a\sigma_0 + b(\delta_0 + \gamma_0)$. Concluimos então que

$$\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_0, \delta_0 + \gamma_0] \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[2v_{00}].$$

Portanto

$$\begin{aligned} H_1(T; \mathbb{Z}_{\rho_y}) &= \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0, \delta_0 + \gamma_0]}{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, \sigma_0]}{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, 2\sigma_0]} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0]}{\mathbb{Z}[2\sigma_0]} \approx \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Vale observar que ao mudarmos a base $\{\sigma_0, \delta_0 + \gamma_0\}$ para $\{\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, \sigma_0\}$ e a base $\{\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0\}$ para $\{\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, 2\sigma_0\}$, sempre utilizamos matrizes inteiras de determinante -1 , respectivamente as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por último, como $\partial_0 \equiv 0$ temos novamente

$$H_0(T; \mathbb{Z}_{\rho_y}) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[v_{00}]}{\mathbb{Z}[2v_{00}]} \approx \mathbb{Z}_2,$$

e isto conclui o cálculo dos grupos de homologia do toro T , sobre a representação ρ_y .

9.3 ρ_{xy} não trivial

Esta é a última representação não-trivial. Neste caso, temos

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_1 = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\Lambda = a\alpha + b\beta$ é uma 2-cadeia então

$$\partial_2(\Lambda) = a(\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0) + b(-\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0)$$

e assim $\partial_2(\Lambda) = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$, isto é, $\text{Ker}(\partial_2) = 0$. Logo, como nos casos anteriores, temos que

$$H_2(T; \mathbb{Z}_{\rho_{xy}}) = \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} = 0.$$

Por fim, $\text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]$.

Se $\Gamma = a\sigma_0 + b\delta_0 + c\gamma_0$ é uma 1-cadeia, segue que

$$\partial_1(\Gamma) = (-2a - 2b)v_{00} = (-a - b)2v_{00}$$

e portanto $\partial_1(\Gamma) = 0$ se, e somente se, $b = -a$, ou seja, $\Gamma = a(\sigma_0 - \delta_0) + c\gamma_0$.

Concluimos então que

$$\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0, \gamma_0]$$

e também que

$$\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[2v_{00}].$$

Portanto

$$\begin{aligned} H_1(T; \mathbb{Z}_{\rho_{xy}}) &= \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0, \gamma_0]}{\mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, \gamma_0]}{\mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, 2\gamma_0]} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\gamma_0]}{\mathbb{Z}[2\gamma_0]} \approx \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Vale observar que ao mudarmos a base $\{\sigma_0 - \delta_0, \gamma_0\}$ para $\{\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, \gamma_0\}$ e a base $\{\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0\}$ para $\{\sigma_0 - \delta_0 + \gamma_0, 2\gamma_0\}$, acabamos utilizando as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por último, como $\partial_0 \equiv 0$ temos novamente

$$H_0(T; \mathbb{Z}_{\rho_{xy}}) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[v_{00}]}{\mathbb{Z}[2v_{00}]} \approx \mathbb{Z}_2,$$

finalizando então os grupos de homologia do toro T , na representação ρ_{xy} .

9.4 ρ_1 trivial

Utilizando ρ_1 temos

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\Lambda = a\alpha + b\beta$ é uma 2-cadeia então

$$\partial_2(\Lambda) = (a+b)\sigma_0 + (a+b)\delta_0 + (a+b)\gamma_0 = (a+b)(\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0)$$

e assim $\partial_2(\Lambda) = 0$ se, e somente se, $b = -a$, isto é, $\text{Ker}(\partial_2) = \mathbb{Z}[\alpha - \beta] \approx \mathbb{Z}$.

Logo, já temos que

$$H_2(T) = \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} \approx \mathbb{Z}.$$

Por fim, $\text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]$.

Como $\partial_1 \equiv 0$ temos

$$\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_0, \delta_0, \gamma_0]$$

e obviamente $\text{Im}(\partial_1) = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} H_1(T) &= \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0, \delta_0, \gamma_0]}{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, \delta_0, \gamma_0]}{\mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0]} \\ &= \mathbb{Z}[\delta_0, \gamma_0] \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vale observar que ao mudarmos a base $\{\sigma_0, \delta_0, \gamma_0\}$ para $\{\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, \delta_0, \gamma_0\}$ utilizamos uma matriz inteira de determinante 1, mais especificamente a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por último, como $\partial_0 \equiv \partial_1 \equiv 0$ temos

$$H_0(T) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \mathbb{Z}[v_{00}] \approx \mathbb{Z},$$

finalizando nossos cálculos com a representação ρ_1 .

Do exposto acima, temos os seguintes grupos de homologia do toro T , nas quatro representações, mostrados na tabela abaixo.

	$H_0(T)$	$H_1(T)$	$H_2(T)$	$H_n(T), n \geq 3$
$\rho_1 = \text{Id}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
ρ_x	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0
ρ_y	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0
ρ_{xy}	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0

Tabela 2.2: Homologia do toro T .

10 Homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$

Nesta seção, usaremos nossa técnica para o cálculo dos grupos de homologia do $P^2 = \mathbb{R}P^2$, o *plano projetivo real*. Para isso, faremos uso de sua cobertura universal $p : S^2 \rightarrow P^2$, na qual usaremos a decomposição celular da S^2 , mostrada na figura 2.4 abaixo, contendo duas 2-células α, β (os hemisférios superior e inferior, respectivamente), duas 1-células γ, δ e duas 0-células v, w , dando origem à sequência abaixo

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}\pi[\alpha] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\pi[\gamma] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\pi[v] \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Figura 2.4: Decomposição celular da S^2 .

Lembramos que $\pi = \pi_1(P^2) \approx \mathbb{Z}_2$ age em S^2 via aplicação antipodal, isto é, $t \cdot x = -x$, onde $t \in \pi, t \neq 1$. Sendo assim, temos que $\beta = t \cdot \alpha$, $\delta = t \cdot \gamma$ e $w = t \cdot v$.

Calculando o operador bordo ∂_2 nos elementos da base temos

$$\partial_2(\alpha) = \gamma + \delta = \gamma + t \cdot \gamma = (1 + t) \cdot \gamma$$

e assim a matriz $[\partial_2]$ é $M_2 = [1 + t]$. Para o operador ∂_1 temos

$$\partial_1(\gamma) = w - v = t \cdot v - v = (t - 1) \cdot v,$$

com matriz $M_1 = [t - 1]$.

Como $\pi \approx \mathbb{Z}_2 \approx \text{Aut}(\mathbb{Z})$, temos apenas duas representações $\rho : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$, a trivial com $\rho_1 : t \mapsto 1$ e a não-trivial com $\rho_t : t \mapsto -1$. Para cada uma delas, faremos o cálculo dos grupos de homologia.

10.1 ρ_t não-trivial

Neste caso, as matrizes tornam-se $M_2 = [0]$ e $M_1 = [-2]$ e portanto $\partial_2 \equiv 0$ nos dá

$$H_2(P^2; \mathbb{Z}_{\rho_t}) = \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} = \mathbb{Z}[\alpha] \approx \mathbb{Z}.$$

Como $\partial_1(a\gamma) = -a2v$ então $\text{Ker}(\partial_1) = 0$ e $\text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[2v]$. Logo

$$H_1(P^2; \mathbb{Z}_{\rho_t}) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = 0 \quad \text{e} \quad H_0(P^2; \mathbb{Z}_{\rho_t}) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\mathbb{Z}[2v]} \approx \mathbb{Z}_2.$$

10.2 ρ_1 trivial

Por fim, para ρ_1 temos as matrizes $M_2 = [2]$ e $M_1 = [0]$ e assim $\partial_2(a\alpha) = a2\gamma$. Portanto, $\text{Ker}(\partial_2) = 0$ e $\text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}[2\gamma]$ de onde segue que

$$H_2(P^2) = \frac{\text{Ker}(\partial_2)}{\text{Im}(\partial_3)} = 0$$

e como $\partial_1 \equiv 0$ concluímos que

$$H_1(P^2) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}[\gamma]}{\mathbb{Z}[2\gamma]} \approx \mathbb{Z}_2.$$

Finalizando, temos que

$$H_0(P^2) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \mathbb{Z}[v] \approx \mathbb{Z}.$$

Fazendo então a tabela da homologia do P^2 , obtemos

$\rho(t)$	$H_0(P^2)$	$H_1(P^2)$	$H_2(P^2)$	$H_n(P^2), n \geq 3$
1	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0	0
-1	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0

Tabela 2.3: Homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$.

11 Homologia da garrafa de Klein K

Como um último exemplo e aplicação da técnica de cálculo de homologias, trabalharemos agora com a *garrafa de Klein*. Usualmente, tal espaço pode ser obtido usando o quadrado com as devidas identificações, como mostra a figura 2.5 abaixo.

Figura 2.5: Decomposição simplicial da garrafa de Klein K .

Descreveremos a seguir um meio de obtermos a garrafa de Klein como um espaço quociente de $\mathbb{R}^2$ por uma ação de um grupo π .

Seja então π o grupo gerado pelos homeomorfismos $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dados por

$$f(x, y) = (x, y + 1) \quad \text{e} \quad g(x, y) = (x + 1, 1 - y).$$

Tais funções satisfazem a relação $fg = gf^{-1}$ e então os elementos de π podem ser escritos na forma $f^m g^n$, para $m, n \in \mathbb{Z}$, pois ao comutarmos duas potências de f, g apenas mudamos o sinal da potência, não importando no final, já que trabalhamos com potências em $\mathbb{Z}$. Sendo assim, temos as igualdades

$$f^m g^n(x, y) = \begin{cases} (x + n, y + m) & \text{se } n \text{ é par} \\ (x + n, 1 - y - m) & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

que se verificam com cálculos diretos. Segue que π é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ e assim o espaço quociente $\mathbb{R}^2/\pi = K$

é a *garrafa de Klein* (convença-se geometricamente disso através da figura 2.6 abaixo) e a aplicação quociente $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$ exhibe o plano como recobrimento universal de K , isto é, $\tilde{K} = \mathbb{R}^2$. Portanto o grupo fundamental de K é isomorfo ao grupo π , dos automorfismos desse recobrimento, possuindo dois geradores f, g com a relação $fg = gf^{-1}$.

Figura 2.6: Decomposição simplicial de $\tilde{K}$.

A figura 2.6 mostra uma decomposição simplicial do plano, sobre o qual existe a ação do grupo π . Vale observar que $\delta_1 = g \cdot \delta_0$, $\sigma_1 = f \cdot \sigma_0$, $\gamma_1 = g \cdot \gamma_0$ e que α e β estão orientados no sentido horário. Podemos então construir a seqüência de complexos de cadeias

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial_3} \mathbb{Z}\pi[\alpha, \beta] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\pi[\sigma_0, \delta_0, \gamma_0] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\pi[v] \xrightarrow{\partial_0} 0$$

para montarmos as matrizes $M_2 = [\partial_2]$ e $M_1 = [\partial_1]$.

Aplicando o operador bordo ∂_2 nos elementos da base temos

$$\partial_2(\alpha) = \delta_0 + f \cdot \sigma_0 + \gamma_0 \quad \text{e} \quad \partial_2(\beta) = -\sigma_0 + g \cdot \delta_0 - \gamma_0$$

cujas matrizes tornam-se

$$M_2 = [\partial_2] = \begin{bmatrix} f & -1 \\ 1 & g \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e calculando o operador ∂_1 nos elementos da base temos

$$\partial_1(\sigma_0) = v_{10} - v_{00} = gf \cdot v_{00} - v_{00} = (gf - 1) \cdot v_{00}$$

$$\partial_1(\delta_0) = v_{01} - v_{00} = f \cdot v_{00} - v_{00} = (f - 1) \cdot v_{00}$$

$$\partial_1(\gamma_0) = v_{00} - v_{11} = v_{00} - g \cdot v_{00} = (1 - g) \cdot v_{00}$$

cujas matrizes tornam-se

$$M_1 = [\partial_1] = \begin{bmatrix} gf - 1 & f - 1 & 1 - g \end{bmatrix}.$$

Estamos agora no ponto de fazermos a escolha da representação ρ a ser utilizada. Como nosso grupo π possui dois geradores, novamente temos quatro possíveis representações, mostradas na tabela abaixo.

	1	f	g	fg
$\rho_1 = \text{Id}$	1	1	1	1
ρ_f	1	-1	1	-1
ρ_g	1	1	-1	-1
ρ_{gf}	1	-1	-1	1

11.1 ρ_1 trivial

Utilizando a representação ρ_1 trivial temos

$$M_2 = [\partial_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_1 = [\partial_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$H_0(K) = \frac{\text{Ker}(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \mathbb{Z}[v_{00}] \approx \mathbb{Z}$$

e aplicando ∂_2 em uma 2-cadeia qualquer temos

$$\partial_2(a\alpha + b\beta) = a(\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0) + b(-\sigma_0 + \delta_0 - \gamma_0).$$

Sendo assim,

$$\text{Ker}(\partial_2) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}[\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 - \gamma_0],$$

de onde segue que

$$H_2(K) = 0.$$

Utilizando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de determinante 1, mudamos a base $\{\sigma_0, \delta_0, \gamma_0\}$ para $\{\sigma_0, \delta_0, \sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0\}$ e utilizando a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mudamos $\{a, b\}$ para $\{a, a + b\}$, onde $a = \sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0$ e $b = -\sigma_0 + \delta_0 - \gamma_0$, resultando em

$$\begin{aligned} H_1(K) &= \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0, \delta_0, \gamma_0]}{\mathbb{Z}[a, b]} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0, \delta_0, a]}{\mathbb{Z}[a, a + b]} \\ &= \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0, \delta_0]}{\mathbb{Z}[2\delta_0]} \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}[\sigma_0] \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

11.2 ρ_f não-trivial

Utilizando ρ_f temos as matrizes

$$M_2 = [\partial_2] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_1 = [\partial_1] = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e então

$$\partial_2(a\alpha + b\beta) = a(-\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0) + b(-\sigma_0 + \delta_0 - \gamma_0)$$

nos fornece $\partial_2(a\alpha + b\beta) = 0$ se, e somente se, $b = a = 0$. Portanto,

$$\text{Ker}(\partial_2) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_2) = \mathbb{Z}[-\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 - \gamma_0].$$

Analogamente,

$$\partial_1(a\sigma_0 + b\delta_0 + c\gamma_0) = (-2a - 2b)v_{00} = (a + b)(-2v_{00})$$

de onde segue que

$$\text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0, \gamma_0] \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[2v_{00}].$$

Calculando os grupos de homologia temos

$$\begin{aligned}
 H_2(K; \mathbb{Z}_{\rho_f}) &= 0, \\
 H_1(K; \mathbb{Z}_{\rho_f}) &= \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_2)} = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_0 - \delta_0, \gamma_0]}{\mathbb{Z}[-\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, -\sigma_0 + \delta_0 - \gamma_0]} \\
 &= \frac{\mathbb{Z}[-\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, \gamma_0]}{\mathbb{Z}[-\sigma_0 + \delta_0 + \gamma_0, 2\gamma_0]} \approx \mathbb{Z}_2, \\
 H_0(K; \mathbb{Z}_{\rho_f}) &\approx \mathbb{Z}_2.
 \end{aligned}$$

Utilizando os mesmos conceitos, podemos calcular os grupos de homologia para as outras duas representações, ρ_g e ρ_{gf} . Basta seguir o processo acima.

Obtemos então a tabela da homologia da *garrafa de Klein* K .

	$H_0(K)$	$H_1(K)$	$H_2(K)$	$H_n(K), n \geq 3$
$\rho_1 = \text{Id}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$	0	0
ρ_f	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0
ρ_g	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
ρ_{gf}	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0

Tabela 2.4: Homologia da garrafa de Klein K .

Neste capítulo, estudaremos a homologia de um grupo e faremos uma associação com a homologia de um espaço. Porém, utilizaremos uma classe particular, os chamados espaços $K(G, 1)$, e obteremos o resultado da proposição 14.4. Utilizaremos para isso o conceito de *resolução livre* e assim calcularemos novamente as homologias (e também as co-homologias) dos espaços do capítulo II, porém usando essa nova técnica. A referência para esse capítulo é [2].

12 Resoluções livres

12.1 DEFINIÇÃO: Sejam R um anel (associativo com identidade) e M um R -módulo à esquerda. Uma *resolução* de M é uma seqüência exata de R -módulos

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0.$$

Se cada F_i for livre, então chamamos de *resolução livre*.

Resoluções livres existem para qualquer módulo M e podem ser construídas por um procedimento óbvio, passo a passo: escolhemos uma sobrejeção $\varepsilon : F_0 \rightarrow M$, com F_0 livre; então, escolhemos uma sobrejeção $F_1 \rightarrow \text{Ker}(\varepsilon)$, com F_1 livre, etc.... Note que o segmento inicial

$$F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

de uma resolução livre é simplesmente uma *apresentação* de M por geradores e relações, ou seja, $M \approx F_0/\partial_1(F_1)$, com F_0, F_1 livres.

Há dois modos úteis de interpretarmos uma resolução em termos de complexo de cadeias. O primeiro é tratarmos a própria resolução como um complexo de cadeias acíclico, com M no nível -1 . Nos referiremos a este como

o *complexo de cadeias aumentado* associado à resolução. O segundo modo é considerarmos o complexo de cadeias não-negativo $F = (F_i, \partial_i)_{i \geq 0}$ e olharmos $\varepsilon : F \rightarrow M$ como uma aplicação de cadeias, onde M é tratado como um complexo de cadeias concentrado na dimensão 0. A hipótese de exatidão, deste ponto de vista, simplesmente diz que ε é uma *equivalência fraca*.

No caso de existir um inteiro n tal que $F_i = 0$ para $i > n$, dizemos que a resolução tem comprimento menor ou igual a n . Neste caso, simplesmente escrevemos

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

12.2 EXEMPLO: Um módulo livre F admite a resolução livre

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{Id} F \longrightarrow 0$$

de comprimento zero.

12.3 EXEMPLO: Se $R = \mathbb{Z}$ (ou qualquer domínio de ideais principais) então sub-módulos de um módulo livre são livres. Portanto, qualquer módulo M admite uma resolução livre

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de comprimento menor ou igual a 1. Por exemplo, o $\mathbb{Z}$ -módulo $\mathbb{Z}_2$ admite a resolução

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Em geral, dado um R -módulo M , existem várias resoluções livres de M sobre R , porém elas são homotopicamente equivalentes. Discutiremos um pouco esse fato a seguir. Para tanto, deveríamos utilizar *módulos projetivos*, mas como esses são também livres, não entraremos em detalhes e utilizaremos os resultados apenas para módulos livres.

Para provarmos a unicidade da resolução, necessitamos do seguinte lema, que apenas enunciaremos.

12.4 LEMA ([2], I.7.4): Sejam (C, ∂) e (C', ∂') complexos de cadeias e seja r um inteiro. Seja $(f_i : C_i \rightarrow C'_i)_{i \leq r}$ uma família de aplicações tais que $\partial'_i f_i = f_{i-1} \partial_i$, para $i \leq r$. Se C_i é livre para $i > r$ e $H_i(C') = 0$ para $i \geq r$,

então $(f_i)_{i \leq r}$ se estende a uma aplicação de cadeias $f : C \rightarrow C'$ e f é única, a menos de homotopia. Mais precisamente, quaisquer duas extensões são homotópicas por uma homotopia h tal que $h_i = 0$ para $i \leq r$.

Com este resultado, podemos enunciar e provar o teorema da unicidade.

12.5 TEOREMA: Dadas duas resoluções F e F' de um módulo M , existe uma aplicação de cadeias $f : F \rightarrow F'$, preservando aumentação, onde f é única a menos de homotopia e é uma equivalência de homotopia.

PROVA: Sejam $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ duas resoluções livres de um módulo M . Formamos então o complexo de cadeias aumentado com M na dimensão -1 e aplicamos 12.4 com $r = -1$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Id_M \\ \cdots & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & M \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Assim, concluímos que existe uma aplicação de cadeias $f : F \rightarrow F'$ que preserva a aumentação, isto é, satisfaz $\varepsilon' f = \varepsilon$. Além disso, f é única, a menos de homotopia. Analogamente, existe uma aplicação $f' : F' \rightarrow F$ que preserva a aumentação e $f' f \simeq \text{Id}_F$ e $f f' \simeq \text{Id}_{F'}$, provando o teorema. ■

13 Resoluções de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$

Relembrando, se X é um G -conjunto (isto é, um conjunto X com uma ação de G), podemos formar o grupo abeliano livre $\mathbb{Z}X$ gerado por X e estendermos a ação de G sobre X para uma ação $\mathbb{Z}$ -linear de G sobre $\mathbb{Z}X$. O G -módulo (ou $\mathbb{Z}G$ -módulo) resultante é chamado *módulo de permutação*. Em particular, temos um módulo de permutação $\mathbb{Z}[G/H]$ para todo subgrupo H de G , onde G/H é o conjunto das classes laterais gH e G age sobre G/H por translações à esquerda.

A operação de união disjunta na categoria dos G -conjuntos corresponde à operação de soma direta na categoria dos G -módulos:

$$\mathbb{Z}[\amalg X_i] = \oplus \mathbb{Z}X_i.$$

Segue que todo módulo de permutação $\mathbb{Z}X$ admite uma decomposição

$$\mathbb{Z}X \approx \oplus \mathbb{Z}[G/G_x],$$

onde x varia sobre um conjunto de representantes para as G -órbitas em X e G_x é o subgrupo de *isotropia* de G em x . Em particular, se X é um G -conjunto *livre* então $G/G_x = G$ e assim obtemos o seguinte:

13.1 PROPOSIÇÃO: Sejam X um G -conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Então, $\mathbb{Z}X$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base E .

A seguir, consideraremos $\mathbb{Z}$ como um G -módulo com a G -ação trivial e veremos que resoluções livres deste módulo surgem de *ações livres* de G nos complexos contráteis.

Chamamos de G -complexo um CW -complexo X juntamente com uma ação de G em X que permuta as células. Assim, temos para cada $g \in G$ um homeomorfismo $x \mapsto gx$ de X tal que a imagem $g\sigma$ de qualquer célula σ de X é novamente uma célula.

Se X é um G -complexo então a ação de G em X induz uma ação de G no complexo de cadeias celular $C_*(X)$, que portanto torna-se um complexo de cadeias de G -módulos. Além disso, a aumentação canônica $\varepsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ (definida por $\varepsilon(v) = 1$, para v uma 0-célula de X) é uma aplicação de G -módulos.

Diremos que X é um G -complexo livre se a ação de G permuta as células de X , livremente, isto é, $g\sigma \neq \sigma$ se $g \neq 1$. Neste caso, cada módulo de cadeias $C_n(X)$ tem uma $\mathbb{Z}$ -base que é livremente permutada por G e portanto, por 13.1, $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com um elemento base para cada G -órbita de células.

Por fim, se X é contrátil, então $H_*(X) \approx H_*(\text{pt})$; em outras palavras, a seqüência abaixo é exata

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

13.2 PROPOSIÇÃO: Seja X um G -complexo livre, contrátil. Então o complexo de cadeias celular aumentado de X é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

PROVA: Utilizando as observações anteriores, a mesma seqüência acima é exata, pois X é contrátil. Também, cada $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre. Portanto, pela “primeira interpretação” de resolução, temos que o complexo de cadeias celular de X é uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. ■

Na teoria de espaços de recobrimento, temos muitos exemplos de G -complexos livres. De fato, suponha que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento regular, com G como grupo das *transformações “deck”* (ver I, 4.1). Se X é um CW -complexo então $\tilde{X}$ herda uma estrutura de CW -complexo tal que a G -ação permuta as células. Explicitamente, as células abertas de $\tilde{X}$ sobre uma célula aberta σ de X são simplesmente as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$. Tais células são livre e transitivamente permutadas por G e cada uma é aplicada homeomorficamente sobre σ por p . Assim, $\tilde{X}$ é um G -complexo livre e $C_*(\tilde{X})$ é um complexo de $\mathbb{Z}G$ -módulos livres, com um elemento base para cada célula de X .

Um tipo de espaço que utilizaremos a seguir é o chamado *espaço do tipo* $K(G, 1)$, ou seja, um espaço topológico X onde $\pi_n(X) = 0$ para $n \neq 1$ e $\pi_1(X) = G$. Tal definição se estende para os chamados *espaços do tipo* $K(G, n)$. Porém, nos interessam apenas os do primeiro tipo. Segue da teoria de homotopia que a condição $\pi_n(X) = 0$, $n \geq 2$, é equivalente a dizer que a cobertura universal $\tilde{X}$ de X é contrátil. Portanto, pelas observações acima e por 13.2, temos:

13.3 PROPOSIÇÃO: Se X é um $K(G, 1)$ então o complexo de cadeias celular aumentado da cobertura universal de X é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (ou seja, a seqüência abaixo é exata, onde $C_i(\tilde{X})$ são $\mathbb{Z}G$ -módulos).

$$\cdots \longrightarrow C_n(\tilde{X}) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(\tilde{X}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_0(\tilde{X}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

14 A homologia de um grupo

14.1 DEFINIÇÃO: Sejam G um grupo e M um G -módulo. O grupo de *co-invariantes* de M , denotado por M_G , é definido como o quociente de M pelo

subgrupo aditivo gerado pelos elementos da forma $gm - m$, $g \in G, m \in M$. Também pode ser visto como $M_G \approx \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$.

Temos então os dois seguintes resultados:

1. Dada uma seqüência exata $M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ de G -módulos, a seqüência induzida $M'_G \longrightarrow M_G \longrightarrow M''_G \longrightarrow 0$ é exata.
2. Se F é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base (e_i) então F_G é um $\mathbb{Z}$ -módulo livre com base $(\bar{e}_i)$.

14.2 PROPOSIÇÃO: Sejam X um G -complexo livre e $Y = X/G$ o complexo órbita. Então $C_*(Y) \approx C_*(X)_G$.

PROVA: A projeção $C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ induz, por passagem ao quociente, uma aplicação $\varphi : C_*(X)_G \rightarrow C_*(Y)$. Pelo item (2) acima, $C_*(X)_G$ tem uma $\mathbb{Z}$ -base com um elemento base para cada G -órbita de células de X . Mas $C_*(Y)$ também possui tal propriedade e φ aplica um elemento base de $C_*(X)_G$ no correspondente elemento base de $C_*(Y)$. Logo φ é um isomorfismo. ■

Definiremos agora a homologia de um grupo G , algebricamente.

14.3 DEFINIÇÃO: Sejam G um grupo e $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Definimos os *grupos de homologia* de G por

$$H_i(G) = H_i(F_G).$$

Pode-se provar que F_G independe da resolução escolhida, a menos de homotopia, e assim a definição vale para qualquer resolução.

Se Y é um $K(G, 1)$ -complexo com cobertura universal X , sabemos de 13.3 que $C_*(X)$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Desde que $C_*(X)_G \approx C_*(Y)$, por 14.2, obtemos o seguinte:

14.4 PROPOSIÇÃO: Se Y é um $K(G, 1)$ -complexo então $H_*(G) \approx H_*(Y)$.

Posteriormente usaremos tal resultado para o cálculo das homologias de determinadas superfícies. Faremos isso utilizando uma resolução para G ,

onde G será o grupo fundamental da superfície. Mais especificamente, trabalharemos com superfícies cujo grupo fundamental π_1 é obtido mediante um grupo livre com um número finito de relações. Expliquemos melhor tal conceito e para isso necessitamos das definições abaixo.

14.5 DEFINIÇÃO: Dado um grupo H , definimos o subgrupo *comutador* por

$$H' = \{[a, b]; a, b \in H\},$$

onde $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Tal subgrupo é normal em H e definimos então o quociente $H_{ab} = H/H'$, que é um grupo abeliano.

14.6 DEFINIÇÃO ([12], 10.1): Um grupo G tem geradores S e relações Δ se $G = F(S)/R(\Delta)$, onde $F(S)$ é o grupo livre com base S , Δ é um conjunto de combinações $\mathbb{Z}$ -lineares de elementos de S e $R(\Delta)$ é o subgrupo de $F(S)$ gerado por Δ . Se pudermos tomar S finito, G será *finitamente gerado*.

14.7 OBSERVAÇÃO: Para superfícies *orientáveis* M_g de genus g , sabemos que possuem uma estrutura celular com uma 0-célula, $2g$ 1-células e uma 2-célula. O 1-esqueleto é o “*wedge*” de $2g$ circunferências, com grupo fundamental livre com $2g$ geradores. A 2-célula é colada ao longo do laço dado pelo produto dos comutadores destes geradores, digamos $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g]$. Portanto

$$\pi_1(M_g) \approx \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle,$$

onde $\langle g_\alpha | \gamma_\beta \rangle$ denota o grupo com geradores g_α e relações γ_β , ou seja, o grupo livre com geradores g_α módulo o subgrupo normal gerado pelas *palavras* γ_β sobre estes geradores. Superfícies *não-orientáveis* podem ser tratadas do mesmo modo. Se colarmos uma 2-célula ao “*wedge*” de g circunferências, seguindo a palavra $a_1^2 \cdots a_g^2$, obtemos uma superfície não-orientável N_g . Por exemplo, N_1 é o *plano projetivo* $\mathbb{R}P^2$, obtido do disco D^2 identificando os pontos antípodas em ∂D^2 . Já N_2 é a *garrafa de Klein*, cuja representação mais usual é dada pelo quadrado com lados identificados pela palavra $abab^{-1}$. Se cortarmos o quadrado em uma diagonal e colocarmos os dois triângulos resultantes como na figura abaixo, obtemos outra representação, dada por um quadrado com lados identificados pela palavra b^2c^2 .

Com a notação da definição 14.6, enunciamos:

14.8 PROPOSIÇÃO: Se $G = F(S)/R$ então existe uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow R_{ab} \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}G^{(S)} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

de G -módulos, onde $\mathbb{Z}G^{(S)}$ é livre com base $(e_s)_{s \in S}$ e $\partial_1(e_s) = \bar{s} - 1$.

A aplicação θ citada acima está descrita explicitamente em [2], 2.5.3, porém apenas a utilizaremos mais à frente. Além disso, se $G = F(S)/R$, onde R é o fêcho normal em $F(S)$ de $r_1, r_2, \dots$ então R_{ab} é gerado (como G -módulo) pelas imagens de $r_1, r_2, \dots$.

14.9 DEFINIÇÃO (DERIVAÇÃO): Sejam G um grupo e M um G -módulo. Uma *derivação* de G em M é uma função $d : G \rightarrow M$ tal que $d(gh) = dg + gdh$, para todo $g, h \in G$.

Pode-se mostrar que, dado um grupo livre $F = F(S)$, existe um F -módulo Ω que admite uma derivação $d : F \rightarrow \Omega$, tal que Ω é um $\mathbb{Z}F$ -módulo com base $(ds)_{s \in S}$. Chamamos df de *derivação total (livre)* de f , para cada $f \in F$. Os coeficientes de df na base ds são chamados de *derivadas parciais de f em relação a s* , e denotados por $\partial f / \partial s$. Assim,

$$df = \sum_{s \in S} \frac{\partial f}{\partial s} ds,$$

onde $\partial f / \partial s \in \mathbb{Z}F$, pois Ω é um $\mathbb{Z}F$ -módulo.

Mostremos então que $\partial / \partial s : F \rightarrow \mathbb{Z}F$ é uma derivação e satisfaz $\partial t / \partial s = \delta_{s,t}$, para $t \in S$. Tal propriedade caracteriza completamente $\partial / \partial s$. Como

$$d(fg) = df + f dg = \sum_{s \in S} \frac{\partial f}{\partial s} ds + f \sum_{s \in S} \frac{\partial g}{\partial s} ds = \sum_{s \in S} \left(\frac{\partial f}{\partial s} + f \frac{\partial g}{\partial s} \right) ds$$

segue que $\partial(fg)/\partial s = \partial f/\partial s + f\partial g/\partial s$, que são os coeficientes na base ds . Obviamente, se $t \in S$ então $\partial t/\partial s = \delta_{s,t}$. Se $1 \in F$ é o elemento neutro, assumiremos que $\partial 1/\partial s = 0$ e com isso temos que $\partial f^{-1}/\partial s = -f^{-1}\partial f/\partial s$, pois basta usarmos que $1 = ff^{-1}$ e a hipótese acima.

Em relação à aplicação $\theta : R_{ab} \rightarrow \mathbb{Z}G^{(S)}$, como em 14.8, θ é induzida pela aplicação $R \rightarrow \mathbb{Z}G^{(S)}$, dada por $r \mapsto \sum_{s \in S} \overline{(\partial r/\partial s)}e_s$, onde $\overline{(\partial r/\partial s)}$ é a imagem de $\partial r/\partial s$ pela aplicação canônica $\mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}G$, induzida pela aplicação quociente $F \rightarrow F/R$.

Estamos agora em condições de utilizarmos todos os conceitos acima para algumas superfícies. Optamos primeiramente em trabalhar com superfícies orientáveis de genus g , como na observação 14.7. A seguir, lidaremos com as duas superfícies não-orientáveis, que são o *plano projetivo* e a *garrafa de Klein*. Como já observado, utilizaremos uma resolução para G e a proposição 14.4. Porém, não calcularemos a homologia reduzida e portanto a aumentação ε não será relevante, embora a mantenhamos na resolução.

15 Homologia do toro T via resolução

No caso do toro T , temos que $\pi_1(T) = F(S)/R(\Delta)$, onde $S = \{x, y\}$ e $\Delta = \{r = xyx^{-1}y^{-1}\}$. Pela proposição 14.8, existe uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow R_{ab} \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}G^{(S)} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

de G -módulos, onde $\mathbb{Z}G^{(S)}$ é livre com base $\{e_x, e_y\}$. Como $R = R(\Delta)$ é abeliano e possui um gerador r temos que $R_{ab} = R$ é livre. No caso em questão, a seqüência torna-se

$$0 \longrightarrow G[r] \xrightarrow{\theta} G[e_x, e_y] \xrightarrow{\partial_1} G[v] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde $\partial_1(e_x) = (\bar{x} - 1)v$ e $\partial_1(e_y) = (\bar{y} - 1)v$. Assim, montamos a matriz

$$M_1 = [\partial_1] = \begin{bmatrix} \bar{x} - 1 & \bar{y} - 1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, para θ temos

$$\theta(r) = \sum_{s \in S} \overline{(\partial_1 r/\partial s)}e_s = \overline{(\partial_1 r/\partial x)}e_x + \overline{(\partial_1 r/\partial y)}e_y.$$

Como $\partial_1 r / \partial x = 1 - xyx^{-1}$ e $\partial_1 r / \partial y = x(1 - yx^{-1}y^{-1})$, obtemos a matriz

$$M_2 = [\theta] = \begin{bmatrix} \overline{1 - xyx^{-1}} \\ \overline{x(1 - yx^{-1}y^{-1})} \end{bmatrix}.$$

Precisamos agora escolher uma representação ρ dentre aquelas definidas em II.9, lembrando que a seqüência passará a ser uma seqüência semi-exata de $\mathbb{Z}$ -módulos.

15.1 ρ_1 trivial

Neste caso temos $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é, $\partial_1 = \theta \equiv 0$. Portanto,

- $H_2(T) = \text{Ker}(\theta) = \mathbb{Z}[r] \approx \mathbb{Z}$.
- $H_1(T) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\theta)} = \mathbb{Z}[e_x, e_y] \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- $H_0(T) = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\text{Im}(\partial_1)} \approx \mathbb{Z}$.

Notemos que esta coincide com a homologia calculada no capítulo II.

15.2 ρ_x não-trivial

Para ρ_x temos $M_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$. Aplicando nos geradores, obtemos

$$\theta(\alpha r) = \alpha \theta(r) = \alpha(-2e_y) \quad \text{e} \quad \partial_1(\alpha e_x + \beta e_y) = -2\alpha v.$$

Sendo assim,

$$\text{Ker}(\theta) = 0, \quad \text{Im}(\theta) = \mathbb{Z}[-2e_y], \quad \text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[e_y] \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[-2v],$$

de onde segue que

- $H_2(T; \mathbb{Z}_{\rho_x}) = \text{Ker}(\theta) = 0$.
- $H_1(T; \mathbb{Z}_{\rho_x}) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\theta)} = \frac{\mathbb{Z}[e_y]}{\mathbb{Z}[-2e_y]} \approx \mathbb{Z}_2$.

$$\bullet \quad H_0(T; \mathbb{Z}_{\rho_x}) = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\mathbb{Z}[-2v]} \approx \mathbb{Z}_2.$$

Analogamente fazemos para ρ_y e ρ_{xy} obtendo assim o mesmo resultado para a homologia do toro T , apresentada na tabela 2.2.

16 Homologia do g -toro gT via resolução

Para finalizarmos o trabalho com superfícies orientáveis, faremos o caso geral, onde temos o toro de genus g , gT . Sendo assim, usaremos os conjuntos

$$S = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\} \quad \text{e} \quad \Delta = \{r = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}\},$$

de modo que $\pi_1(gT) = F(S)/R(\Delta)$, como em 14.7.

Usaremos a notação comum $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ e faremos alguns cálculos apenas para nos convencer da expressão geral para $\partial r / \partial a_i$ e $\partial r / \partial b_i$. Sendo assim, temos a resolução abaixo

$$0 \longrightarrow G[r] \xrightarrow{\theta} G[e_{a_1}, e_{b_1}, \dots, e_{a_g}, e_{b_g}] \xrightarrow{\partial_1} G[v] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

com o operador θ definido por

$$\theta(r) = \overline{(\partial r / \partial a_1)} e_{a_1} + \cdots + \overline{(\partial r / \partial b_g)} e_{b_g}$$

e o operador ∂_1 por

$$\partial_1(e_{a_1}) = (\overline{a_1} - 1)v, \dots, \partial_1(e_{b_g}) = (\overline{b_g} - 1)v.$$

As derivadas são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial a_1} &= \frac{\partial}{\partial a_1}(a_1 b_1 a_1^{-1})(b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) \\
&= \frac{\partial}{\partial a_1}(a_1 b_1 a_1^{-1}) + (a_1 b_1 a_1^{-1}) \frac{\partial}{\partial a_1}(b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) \\
&= \frac{\partial}{\partial a_1}(a_1 b_1 a_1^{-1}) = 1 + a_1 \frac{\partial}{\partial a_1}(b_1 a_1^{-1}) = 1 + a_1(0 + b_1 \frac{\partial a_1^{-1}}{\partial a_1}) \\
&= 1 + a_1(b_1(-a_1^{-1})) = 1 - a_1 b_1 a_1^{-1} \\
\\
\frac{\partial r}{\partial b_1} &= \frac{\partial}{\partial b_1}(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) \\
&= \frac{\partial}{\partial b_1}(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) + [a_1, b_1] \frac{\partial}{\partial b_1}(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}) \\
&= \frac{\partial}{\partial b_1}(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) = a_1 \frac{\partial}{\partial b_1}(b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) = a_1(1 + b_1 \frac{\partial}{\partial b_1}(a_1^{-1} b_1^{-1})) \\
&= a_1(1 + b_1(a_1^{-1}(-b_1^{-1}))) = a_1(1 - b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})
\end{aligned}$$

e de modo geral, observando o que ocorre com as expressões acima, podemos então expressar, para $i \geq 2$,

$$\frac{\partial r}{\partial a_i} = \prod_{k=1}^{i-1} [a_k, b_k] (1 - a_i b_i a_i^{-1}) \quad \text{e} \quad \frac{\partial r}{\partial b_i} = \prod_{k=1}^{i-1} [a_k, b_k] a_i (1 - b_i a_i^{-1} b_i^{-1}).$$

Vamos agora escolher duas representações, apenas para ilustrar o que ocorre nessa situação. Ressaltamos que $[a_k, b_k]$ tem valor 1, para qualquer representação utilizada, e portanto o valor de $\partial r / \partial a_i$ e $\partial r / \partial b_i$ será determinado apenas por $(1 - a_i b_i a_i^{-1})$ e $a_i(1 - b_i a_i^{-1} b_i^{-1})$ que, em particular para a representação ρ_{a_i} , valem 0 e -2 , respectivamente.

16.1 ρ_1 trivial

Aqui, claramente temos $M_2^t = M_1 \equiv 0$ e portanto

- $H_2(gT) = \text{Ker}(\theta) = \mathbb{Z}[r] \approx \mathbb{Z}$.
- $H_1(gT) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\theta)} = \mathbb{Z}[e_{a_1}, e_{b_1}, \dots, e_{a_g}, e_{b_g}] \approx \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{2g}$.

- $H_0(gT) = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\text{Im}(\partial_1)} \approx \mathbb{Z}.$

16.2 ρ_{a_1} não-trivial

Como observado acima, as matrizes M_1, M_2 possuem apenas uma entrada não-nula, que vale -2 , ou seja, temos para essa representação

$$M_2 = [\begin{smallmatrix} 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \end{smallmatrix}]^t \quad \text{e} \quad M_1 = [\begin{smallmatrix} -2 & 0 & \cdots & 0 \end{smallmatrix}].$$

Por fim, segue que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\theta) &= 0 & \text{Im}(\theta) &= \mathbb{Z}[-2e_{b_1}] \\ \text{Ker}(\partial_1) &= \mathbb{Z}[e_{b_1}, e_{a_2}, e_{b_2}, \dots, e_{a_g}, e_{b_g}] & \text{Im}(\partial_1) &= \mathbb{Z}[-2v] \end{aligned}$$

nos fornece

- $H_2(gT; \mathbb{Z}_{\rho_{a_1}}) = \text{Ker}(\theta) = 0.$
- $H_1(gT; \mathbb{Z}_{\rho_{a_1}}) = \frac{\text{Ker}(\partial_1)}{\text{Im}(\theta)} \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}^{2(g-1)}.$
- $H_0(gT; \mathbb{Z}_{\rho_{a_1}}) = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\mathbb{Z}[-2v]} \approx \mathbb{Z}_2.$

Neste caso, existem bem mais representações, mais precisamente, 2^{2g} . Claro que, para cada uma delas, utilizamos o mesmo princípio para o cálculo. Porém, o importante é que os elementos não-nulos nas matrizes serão sempre ± 2 e aparecerão nas entradas correspondentes aos elementos de S utilizados na representação.

17 Homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ via resolução

Agora iremos abordar superfícies não-orientáveis e faremos o mesmo tipo de cálculo, porém tomando o cuidado com as relações utilizadas para π_1 . Começamos então com o *plano projetivo real*.

Para essa superfície, precisamos contornar algumas dificuldades, uma vez que a mesma não é do tipo $K(G, 1)$. Porém, mesmo assim podemos representar $G = \pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ como $F(S)/R(\Delta)$, tomando $S = \{a\}$ e $\Delta = \{a^2\}$.

Como $\partial_1(e_a) = (\bar{a} - 1)v$ e como $a^2 = 1$, segue que $\text{Ker}(\partial_1) = G[(\bar{a} + 1)e_a]$. Construimos então a sequência

$$\cdots \longrightarrow G[e_a] \xrightarrow{\theta} G[e_a] \xrightarrow{\partial_1} G[v] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde $M_2 = [\theta] = [\bar{a} + 1]$ e $M_1 = [\partial_1] = [\bar{a} - 1]$, e agora podemos prosseguir como anteriormente.

Existem apenas duas representações, ρ_a e ρ_1 . Como antes, calcularemos os grupos de homologia para cada uma delas, de modo resumido.

17.1 ρ_1 trivial

As matrizes tornam-se $M_2 = [2]$ e $M_1 = [0]$, de modo que

$$\text{Ker}(\theta) = 0, \quad \text{Im}(\theta) = \mathbb{Z}[2e_a], \quad \text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[e_a] \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_1) = 0.$$

Portanto

$$H_2(\mathbb{R}P^2) = 0, \quad H_1(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad H_0(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{Z}.$$

17.2 ρ_a não-trivial

Por fim, para tal representação, temos $M_2 = [0]$ e $M_1 = [-2]$ de onde segue que

$$\text{Ker}(\theta) = \mathbb{Z}[e_a], \quad \text{Im}(\theta) = 0, \quad \text{Ker}(\partial_1) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[-2v].$$

Finalizando temos

- $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_{\rho_a}) = \mathbb{Z}[e_a] \approx \mathbb{Z}.$
- $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_{\rho_a}) = 0.$
- $H_0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_{\rho_a}) = \frac{\mathbb{Z}[v]}{\mathbb{Z}[-2v]} \approx \mathbb{Z}_2.$

Notemos que os grupos aqui calculados são os mesmos que os feitos anteriormente, no capítulo II (ver tabela 2.3).

18 Homologia da garrafa de Klein K via resolução

Na seção anterior, tínhamos uma superfície não orientável. No entanto, não era do tipo $K(G, 1)$ e por isso tivemos que tomar algum cuidado. Agora, trabalharemos com a *garrafa de Klein* K , que é uma superfície não-orientável, fechada, cujo grupo fundamental possui geradores $S = \{a, b\}$ com a relação $r = abab^{-1}$.

Sendo assim, podemos usar a resolução

$$0 \longrightarrow G[r] \xrightarrow{\theta} G[e_a, e_b] \xrightarrow{\partial_1} G[v] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde $M_2 = [\theta]$ e $M_1 = [\partial_1]$ são

$$M_2 = \begin{bmatrix} \overline{\partial r / \partial a} \\ \overline{\partial r / \partial b} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_1 = \begin{bmatrix} \bar{a} - 1 & \bar{b} - 1 \end{bmatrix}.$$

Com um simples cálculo, temos

$$\begin{aligned} \partial r / \partial a &= 1 + ab \\ \partial r / \partial b &= a(1 - bab^{-1}) \end{aligned}$$

e portanto basta escolhermos as representações para finalizarmos o cálculo. Vale ressaltar que as entradas não nulas da matriz M_2 serão sempre ± 2 , para qualquer representação utilizada.

18.1 ρ_1 trivial

Neste caso, $M_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}^t$ e $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, e portanto

$$\text{Ker}(\theta) = 0, \quad \text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[e_a, e_b], \quad \text{Im}(\theta) = \mathbb{Z}[2e_a] \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_1) = 0$$

nos fornece

- $H_2(K) = 0$.
- $H_1(K) = \frac{\mathbb{Z}[e_a, e_b]}{\mathbb{Z}[2e_a]} \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$.
- $H_0(K) = \mathbb{Z}[v] \approx \mathbb{Z}$.

18.2 ρ_a não-trivial

Faremos apenas mais esse cálculo e os outros dois são análogos, com os resultados mostrados na tabela 3.1 abaixo. Temos então as matrizes

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}^t \quad \text{e} \quad M_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim

$$\text{Ker}(\theta) = 0, \quad \text{Ker}(\partial_1) = \mathbb{Z}[e_b], \quad \text{Im}(\theta) = \mathbb{Z}[-2e_b] \quad \text{e} \quad \text{Im}(\partial_1) = \mathbb{Z}[-2v]$$

dá origem a

- $H_2(K; \mathbb{Z}_{\rho_a}) = 0.$
- $H_1(K; \mathbb{Z}_{\rho_a}) \approx \mathbb{Z}_2.$
- $H_0(K; \mathbb{Z}_{\rho_a}) \approx \mathbb{Z}_2.$

Segue a tabela com os resultados obtidos para K , usando o método de cálculo de homologia via resolução, com as quatro possíveis representações.

	$H_0(K)$	$H_1(K)$	$H_2(K)$	$H_n(K), n \geq 3$
$\rho_1 = \text{Id}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$	0	0
ρ_a	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0
ρ_b	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0
ρ_{ab}	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	0

Tabela 3.1: Homologia da garrafa de Klein K via resolução.

18.1 OBSERVAÇÃO: Os mesmos resultados são obtidos se utilizarmos a outra relação, descrita em 14.7. Porém, há uma troca entre os resultados obtidos com ρ_b e ρ_{ab} . Também, os resultados da tabela acima coincidem com os da tabela 2.4.

19 Co-homologia do g -toro gT via resolução

Faremos aqui um processo análogo ao utilizado no cálculo da homologia. Porém, apenas dualizamos a seqüência, que novamente será formada por

G -módulos livres. Temos então

$$0 \longleftarrow G[r] \xleftarrow{\theta^*} G[e_{a_1}, e_{b_1}, \dots, e_{a_g}, e_{b_g}] \xleftarrow{\partial_1^*} G[v] \xleftarrow{\varepsilon^*} \mathbb{Z} \longleftarrow 0$$

onde

$$\theta^*(x_1 e_{a_1} + y_1 e_{b_1} + \dots + x_g e_{a_g} + y_g e_{b_g}) = (x_1(\partial r / \partial a_1) + \dots + y_g(\partial r / \partial b_g))r$$

e

$$\partial_1^*(\alpha v) = \alpha((a_1 - 1)e_{a_1} + (b_1 - 1)e_{b_1} + \dots + (a_g - 1)e_{a_g} + (b_g - 1)e_{b_g}).$$

19.1 ρ_1 trivial

Neste caso temos $\theta^* = \partial_1^* \equiv 0$ e então

- $H^2(gT) = \mathbb{Z}[r] \approx \mathbb{Z}$.
- $H^1(gT) = \mathbb{Z}[e_{a_1}, e_{b_1}, \dots, e_{a_g}, e_{b_g}] \approx \mathbb{Z}^{2g}$.
- $H^0(gT) = \mathbb{Z}[v] \approx \mathbb{Z}$.

19.2 ρ não-trivial

Vale ressaltar que se ρ é não-trivial então *existe uma* entrada não nula, valendo ± 2 , na matriz $[\theta^*]$ e assim, se tomarmos um elemento não pertencente ao núcleo desta, teremos sua imagem em $\mathbb{Z}[2r]$. Portanto, podemos afirmar que

$$H^2(gT; \mathbb{Z}_\rho) \approx \mathbb{Z}_2$$

e como ∂_1^* é injetora, neste caso, temos também

$$H^0(gT; \mathbb{Z}_\rho) = 0.$$

No entanto, para a dimensão 1, fica difícil uma determinação, uma vez que $\text{Ker}(\theta^*)$ não possui uma caracterização geral, ou seja, depende fortemente da representação utilizada. Mas o importante nesse ponto é sabermos a dimensão 2, que será utilizado no capítulo V.

20 Co-homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ via resolução

Dualizando a resolução obtemos

$$0 \longleftarrow G[e_a] \xleftarrow{\theta^*} G[e_a] \xleftarrow{\partial_1^*} G[v] \longleftarrow 0$$

onde $M_2^* = [\theta^*] = [\bar{a} + 1]$ e $M_1^* = [\partial_1^*] = [\bar{a} - 1]$.

20.1 ρ_1 trivial

As matrizes tornam-se $M_2^* = [2]$ e $M_1^* = [0]$ de modo que

$$H^2(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{Z}_2, \quad H^1(\mathbb{R}P^2) = 0 \quad \text{e} \quad H^0(\mathbb{R}P^2) \approx \mathbb{Z}.$$

20.2 ρ_a não-trivial

Finalizando, temos $M_2^* = [0]$ e $M_1^* = [-2]$ e então

$$H^2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_{\rho_a}) \approx \mathbb{Z}, \quad H^1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_{\rho_a}) \approx \mathbb{Z}_2 \quad \text{e} \quad H^0(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_{\rho_a}) = 0.$$

Resumindo, temos a tabela

	$H^0(\mathbb{R}P^2)$	$H^1(\mathbb{R}P^2)$	$H^2(\mathbb{R}P^2)$	$H^n(\mathbb{R}P^2), n \geq 3$
$\rho_1 = \text{Id}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$	0
ρ_a	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0

Tabela 3.2: Co-homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ via resolução.

21 Co-homologia da garrafa de Klein K via resolução

Como o processo de cálculo é muito semelhante ao que fizemos nas seções anteriores, apenas colocaremos a tabela com os resultados finais, para as quatro representações ρ_1, ρ_a, ρ_b e ρ_{ab} , lembrando que $\pi_1(K)$ é gerado por $S = \{a, b\}$ com a relação $r = abab^{-1}$, ou a relação equivalente $r = b^2c^2$, onde $c = ab^{-1}$. Sendo assim, temos a tabela abaixo.

	$H^0(K)$	$H^1(K)$	$H^2(K)$	$H^n(K), n \geq 3$
$\rho_1 = \text{Id}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	0
ρ_a	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
ρ_b	0	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
ρ_{ab}	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0

Tabela 3.3: Co-homologia da garrafa de Klein K via resolução.

CAPÍTULO IV

TEORIA DE FIBRADOS

Neste capítulo, daremos alguns exemplos para ilustrar o conceito de *fibrados*. Faremos uma classificação dos fibrados, com grupo estrutural G , sobre um espaço X utilizando as classes de homotopia $[X, BG]$. As referências para esse capítulo são [6] e [13].

22 Grupos topológicos e ações de grupos

Nos capítulos anteriores, utilizamos a ação de um grupo G sobre um conjunto (ou espaço) X e tínhamos então a noção de G -conjunto (ou G -espaço). Agora, trabalharemos com grupos que possuem também uma topologia e ação sobre si próprios. São os chamados *grupos topológicos*. Mais precisamente, temos:

22.1 DEFINIÇÃO: Um *grupo topológico* é um conjunto G com uma estrutura de grupo e uma topologia sobre G sob a qual a função $(s, t) \mapsto st^{-1}$ é uma aplicação¹ $G \times G \rightarrow G$. A condição de continuidade acima é equivalente a afirmar que $(s, t) \mapsto st$ é uma aplicação de $G \times G \rightarrow G$ e que $s \mapsto s^{-1}$ é uma aplicação $G \rightarrow G$.

22.2 EXEMPLO: O conjunto $\mathbb{R}$ com a adição como operação do grupo; o conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ com a multiplicação como operação do grupo; o grupo linear das matrizes não-singulares $GL_n(\mathbb{R})$ e $GL_n(\mathbb{C})$, entre outros.

22.3 DEFINIÇÃO: Dado um grupo topológico G , um G -espaço à direita é um espaço X com uma aplicação $X \times G \rightarrow X$. A imagem de $(x, s) \in X \times G$

¹Função contínua.

por esta aplicação é denotada por $x \cdot s$. Assumimos também os seguintes axiomas:

1. Para cada $x \in X$ e $s, t \in G$, a relação $x \cdot (st) = (x \cdot s) \cdot t$ vale.
2. Para cada $x \in X$, a relação $x \cdot 1 = x$ vale, onde $1 \in G$ é o elemento neutro.

Analogamente, definimos um G -espaço X à esquerda. Se X é um tal G -espaço à esquerda, $x \cdot s = s^{-1} \cdot x$ define estrutura de G -espaço à direita e desde que existe tal bijeção entre G -espaços à direita e à esquerda, podemos estudar somente G -espaços do primeiro tipo.

22.4 EXEMPLO: O espaço $\mathbb{R}^n$ é um $GL_n(\mathbb{R})$ -espaço à esquerda, onde a ação é dada pela multiplicação de matrizes. O espaço $V_p(\mathbb{R}^n)$ dos p -frames² ortogonais em $\mathbb{R}^n$ é um $O(r)$ -espaço à direita, para cada $r \leq p$, onde a ação de $O(r)$ é permutar os r primeiros vetores do *frame*, via uma matriz ortogonal.

22.5 DEFINIÇÃO: Uma aplicação $h : X \rightarrow Y$ entre G -espaços é chamada G -morfismo (ou G -equivariante) se $h(x \cdot s) = h(x) \cdot s$, para todo $x \in X$ e $s \in G$.

Seja $M_G(X, Y)$ o subespaço de G -morfismos $X \rightarrow Y$. Desde que a composição de G -morfismos é novamente um G -morfismo, a classe de G -espaços e G -morfismos forma uma categoria, denotada por $\mathbf{sp}_G$.

Dois elementos x, x' em um G -espaço X são equivalentes se existe $s \in G$ com $x \cdot s = x'$. Tal relação é de equivalência e o conjunto de todos $x \cdot s$, $s \in G$, denotado por $x \cdot G$, é a classe de equivalência determinada por $x \in X$, chamada de *órbita de x* . Assim X/G é o conjunto das classes de equivalência, com a topologia quociente, e lembramos que $\pi : X \rightarrow X/G$, $\pi(x) = x \cdot G$, é contínua.

Em um G -espaço X , são equivalentes

$$(x \cdot s = x) \Rightarrow (s = 1) \quad \text{e} \quad (x \cdot s = x \cdot t) \Rightarrow (s = t)$$

²Conjunto de p vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$.

e ainda, a *translação à direita* $R_g : X \rightarrow X$, definida por $R_g(x) = x \cdot g$, é um homeomorfismo de X com inverso $R_{g^{-1}}$. Sendo assim, definimos um homomorfismo $\phi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ por $\phi(g) = R_g$, o qual chamamos de *translação por g* .

22.6 DEFINIÇÃO (AÇÕES LIVRE, TRANSITIVA, EFETIVA): Um G -espaço X é chamado *livre* se ele tem a propriedade $(x \cdot s = x) \Rightarrow (s = 1)$ e neste caso dizemos que a ação de G em X é *livre*. Dizemos que a ação é *transitiva* se, dados $x, x' \in X$, existir $s \in G$ tal que $x' = x \cdot s$ e dizemos que é *efetiva* se $\text{Ker}(\phi)$ é trivial, para ϕ definida acima.

Seja X^* o subespaço de todos $(x, x \cdot s) \in X \times X$, onde $s \in G$ e X é um G -espaço livre. Existe uma função $\tau : X^* \rightarrow G$ tal que $x \cdot \tau(x, x') = x'$, para todo $(x, x') \in X^*$. Tal função é chamada *função translação*.

Seguem, da definição de τ , as seguintes propriedades, para $x, x', x'' \in X$:

1. $\tau(x, x) = 1$.
2. $\tau(x, x')\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$.
3. $\tau(x', x) = \tau(x, x')^{-1}$.

22.7 PROPOSIÇÃO: Para um G -espaço X , a aplicação $x \mapsto x \cdot s$ é um homeomorfismo e a projeção $\pi : X \rightarrow X/G$ é uma aplicação aberta.

PROVA: Observemos que a inversa de $x \mapsto x \cdot s$ é a aplicação $x \mapsto x \cdot s^{-1}$. Se W é um subconjunto aberto de X , então $\pi^{-1}\pi(W) = \cup_{s \in G} W \cdot s$ é aberto, sendo união de abertos $W \cdot s$. Portanto, $\pi(W)$ é aberto em X/G , pela definição da topologia quociente. ■

23 Fibrado, G -fibrado e fibrado principal

23.1 DEFINIÇÃO (FIBRADO): Um *fibrado* é uma tripla (E, p, B) , onde $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação. O espaço B é chamado de *espaço base*, o espaço E é o *espaço total* e a aplicação p é chamada de *projeção* do fibrado. Para cada $b \in B$, o espaço $p^{-1}(b)$ é chamado de *fibra* sobre $b \in B$.

Intuitivamente, pensamos um fibrado como uma união de fibras $p^{-1}(b)$, para $b \in B$, parametrizada por B e “coladas” pela topologia do espaço E . Geralmente usamos letras gregas $(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \dots)$ para denotarmos um fibrado e assim, $E(\xi)$ denota o espaço total e $B(\xi)$ denota o espaço base de ξ .

23.2 DEFINIÇÃO (SECÇÃO): Uma *secção* de um fibrado (E, p, B) é uma aplicação $s : B \rightarrow E$ tal que $ps = \text{Id}_B$. Em outras palavras, uma secção é uma aplicação $s : B \rightarrow E$ tal que $s(b) \in p^{-1}(b)$, a fibra sobre b , para cada $b \in B$.

23.3 DEFINIÇÃO: Sejam (E, p, B) e (E', p', B') dois fibrados. Um *morfismo de fibrados* $(u, f) : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B')$ é um par de aplicações $u : E \rightarrow E'$ e $f : B \rightarrow B'$ tal que $p'u = fp$. A equação anterior pode ser expressa pela relação $u(p^{-1}(b)) \subset (p')^{-1}(f(b))$, para cada $b \in B$, isto é, a fibra sobre $b \in B$ é levada por u na fibra sobre $f(b)$. No caso em que os dois fibrados têm o mesmo espaço base B , dizemos que $u : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B)$, tal que $p = p'u$, é um *B -morfismo*.

23.4 DEFINIÇÃO: A categoria de fibrados, denotada por **Bun** (Bundle), tem como objetos todos os fibrados (E, p, B) e como morfismos de (E, p, B) para (E', p', B') o conjunto de todos os morfismos de fibrados, definidos acima. Das propriedades gerais de categoria, um morfismo de fibrados $(u, f) : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B')$ é um isomorfismo se, e somente se, existe um morfismo $(u', f') : (E', p', B') \rightarrow (E, p, B)$ com

$$f'f = \text{Id}_B, \quad ff' = \text{Id}_{B'}, \quad u'u = \text{Id}_E \quad \text{e} \quad uu' = \text{Id}_{E'}.$$

Temos então a noção de *fibrados isomorfos*.

23.5 DEFINIÇÃO (FIBRADO INDUZIDO): Sejam $\xi = (E, p, B)$ um fibrado e $f : B_1 \rightarrow B$ uma aplicação. O *fibrado induzido* por f , denotado por $f^*(\xi)$, tem B_1 como espaço base, E_1 como espaço total, onde E_1 é o conjunto dos pares $(b_1, x) \in B_1 \times E$ com $f(b_1) = p(x)$, e a projeção p_1 é definida por $(b_1, x) \mapsto b_1$.

23.6 PROPOSIÇÃO: Sejam $g : B_2 \rightarrow B_1$ e $f : B_1 \rightarrow B$ duas aplicações e

seja ξ um fibrado sobre B . Então $\text{Id}^*(\xi)$ e ξ são B -isomorfos e $g^*(f^*(\xi))$ e $(fg)^*(\xi)$ são B_2 -isomorfos.

PROVA: Definimos $u : \xi \rightarrow \text{Id}^*(\xi)$ por $u(x) = (p(x), x)$ e assim u é um isomorfismo. Por fim, seja $v : (fg)^*(\xi) \rightarrow g^*(f^*(\xi))$ definida por $v(b_2, x) = (b_2, (g(b_2), x))$ e então v é um isomorfismo. ■

23.7 DEFINIÇÃO: Dois fibrados ξ e η sobre B são *localmente isomorfos* se, para cada $b \in B$, existe uma vizinhança aberta U de b tal que $\xi|_U$ e $\eta|_U$ são U -isomorfos. Claramente dois fibrados isomorfos são localmente isomorfos.

23.8 PROPOSIÇÃO: A relação de serem localmente isomorfos é uma relação de equivalência na classe de todos fibrados sobre B .

PROVA: A transitividade da relação é a parte não trivial. Sejam U e V duas vizinhanças abertas de $b \in B$ tais que $\xi|_U$ e $\eta|_U$ são U -isomorfos e tais que $\eta|_V$ e $\zeta|_V$ são V -isomorfos. Pela proposição 23.6, os fibrados $\xi|_{U \cap V}$, $\eta|_{U \cap V}$ e $\zeta|_{U \cap V}$ são $U \cap V$ -isomorfos. ■

Pelos argumentos da seção anterior, segue que todo G -espaço X determina um fibrado $\alpha(X) = (X, \pi, X/G)$. Se $h : X \rightarrow Y$ é um morfismo entre G -espaços, temos $h(x \cdot G) \subset h(x) \cdot G$, para cada $x \in X$. A aplicação quociente de h é a aplicação $f : X/G \rightarrow Y/G$, onde $f(x \cdot G) = h(x) \cdot G$. Denotemos o morfismo de fibrados $(h, f) : \alpha(X) \rightarrow \alpha(Y)$ por $\alpha(h)$.

23.9 PROPOSIÇÃO: A coleção de funções $\alpha : \mathbf{sp}_G \rightarrow \mathbf{Bun}$ é um funtor, onde $\mathbf{sp}_G$ foi definido acima e $\mathbf{Bun}$ é a categoria dos fibrados.

PROVA: Claramente, temos $\alpha(\text{Id}_X) = (\text{Id}_X, \text{Id}_{X/G})$ e se $h : X \rightarrow Y$ e $k : Y \rightarrow Z$ são dois G -morfismos então $\alpha(kh) = \alpha(k)\alpha(h)$. ■

Colocaremos agora definições, exemplos e resultados sobre G -fibrados e fibrados principais, que serão nossos objetos de estudo de agora em diante.

23.10 DEFINIÇÃO (G -FIBRADO): Um fibrado (E, p, B) é chamado G -fibrado se (E, p, B) e $\alpha(E)$ são isomorfos, para alguma estrutura de G -espaço sobre

E , via um isomorfismo $(1, f) : \alpha(E) \rightarrow (E, p, B)$, onde $f : E/G \rightarrow B$ é um homeomorfismo.

23.11 DEFINIÇÃO (FIBRADO PRINCIPAL): Um G -espaço E é chamado *principal* se E é um G -espaço livre com uma função translação contínua $\tau : E^* \rightarrow G$. Um G -fibrado *principal* é um G -fibrado (E, p, B) , onde E é um G -espaço principal.

23.12 EXEMPLO: Sejam $G = \{\pm 1\}$, o grupo com dois elementos, e S^n o G -espaço com a ação dada pela relação $x \cdot (\pm 1) = \pm x$. Então $(S^n)^*$ é o subespaço dos $(x, \pm x) \in S^n \times S^n$ e a translação é $\tau(x, \pm x) = \pm 1$, que é claramente contínua. Este $\mathbb{Z}_2$ -espaço principal define um $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal com espaço base $\mathbb{R}P^n$.

23.13 PROPOSIÇÃO: Seja $\xi = (E, p, B)$ um G -fibrado principal. Então ξ é um fibrado com fibra G .

PROVA: Para cada $x \in p^{-1}(b)$, definimos uma aplicação bijetora $u : G \rightarrow p^{-1}(b)$ por $u(s) = x \cdot s$. A função inversa de u é definida por $x' \mapsto \tau(x, x')$, que é contínua, e assim u é um homeomorfismo. ■

24 Fibrado com fibra F

Sejam $\xi = (E, p, B)$ um G -fibrado principal e F um G -espaço à esquerda. A relação $(x, y) \cdot s = (x \cdot s, s^{-1} \cdot y)$ define uma estrutura de G -espaço à direita em $E \times F$. Seja E_F o espaço quociente $(E \times F)/G$ e seja $p_F : E_F \rightarrow B$ a fatoração da composição

$$E \times F \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p} B$$

pela projeção $E \times F \rightarrow E_F$. Explicitamente, temos

$$p_F((x, y) \cdot G) = p(x)$$

para todo $(x, y) \in E \times F$.

24.1 DEFINIÇÃO (FIBRADO COM FIBRA F): Com a notação acima, o fibrado (E_F, p_F, B) , denotado por $\xi[F]$, é chamado *fibrado sobre B com fibra F* (F visto como um G -espaço) e *fibrado principal associado ξ* . O grupo G é chamado *grupo estrutural* do fibrado $\xi[F]$.

Também podemos representar por $(E \times_G F, p_F, B, G, F)$. No caso onde a fibra F é tomada como sendo $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, temos então um *fibrado vetorial real* ou *complexo*. Quando $n = 1$, chamamos de *fibrado linha*.

Grosseiramente falando, um G -fibrado principal $\xi = (E, p, B)$ consiste de uma cópia de G para cada ponto $b \in B$, todos “colados” pela topologia de E . O fibrado associado $\xi[F]$ consiste de uma cópia de F para cada ponto $b \in B$, todos “colados” de uma maneira descrita pela topologia do espaço total E , da ação de G em E e da ação de G em F . Tal colagem é feita usando o espaço quociente $(E \times F)/G$.

24.2 EXEMPLO: Seja ξ o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal $S^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1 = S^1$ e seja $F = [-1, 1]$ o $\mathbb{Z}_2$ -espaço com ação $(\pm 1) \cdot t = \pm t$. Então $\xi[F]$ é o fibrado possuindo a faixa de Möbius como espaço total.

24.3 PROPOSIÇÃO: Seja $\xi[F] = (E_F, p_F, B)$ o fibrado com G -fibrado principal associado $\xi = (E, p, B)$ e fibra F . Para cada $b \in B$, a fibra F é homeomorfa a $p_F^{-1}(b)$.

PROVA: Seja $p(x_0) = b$, para algum $x_0 \in E$, e seja $f(y) = (x_0, y) \cdot G$ uma aplicação $f : F \rightarrow E_F$. Desde que $p_F((x_0, y) \cdot G) = p(x_0) = b$, podemos restringir o contra-domínio de f de E_F para $p_F^{-1}(b)$, ou seja, $f : F \rightarrow p_F^{-1}(b)$. Provemos que f tem uma inversa contínua considerando a aplicação $g_1 : p^{-1}(b) \times F \rightarrow F$ dada por $g_1(x, y) = \tau(x_0, x) \cdot y$, onde $\tau : E^* \rightarrow G$ é a função translação do G -espaço principal E . Temos então $g_1(x \cdot s, s^{-1} \cdot y) = g_1(x, y)$ e fatorando através da restrição da aplicação quociente $E \times F \rightarrow E_F$, temos uma aplicação $g : p_F^{-1}(b) \rightarrow F$. Assim, f e g são inversas uma da outra. ■

Seja $(u, f) : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B')$ um morfismo de fibrados principais e seja F um G -espaço à esquerda. O morfismo (u, f) define um G -morfismo $u \times 1_F : E \times F \rightarrow E' \times F$ e tomando o quociente temos uma aplicação $u_F :$

$E_F \rightarrow E'_F$ tal que $(u_F, f) : \xi[F] \rightarrow \xi'[F]$, onde $\xi = (E, p, B)$ e $\xi' = (E', p', B')$.

24.4 DEFINIÇÃO: Um morfismo entre os fibrados $\xi[F]$ e $\xi'[F]$ é um morfismo de fibrados da forma $(u_F, f) : \xi[F] \rightarrow \xi'[F]$, onde $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$ é um morfismo de fibrados principais. Se $B = B'$ e $f = \text{Id}_B$, então u_F é um morfismo de fibrados sobre B .

Tal morfismo $(u_F, f) : \xi[F] \rightarrow \xi'[F]$ é um isomorfismo de fibrados se, e somente se, $(u, f) : \xi \rightarrow \xi'$ é um isomorfismo de fibrados principais.

24.5 OBSERVAÇÃO: Vale ressaltar que as funções $\xi \mapsto \xi[F]$ e $(u, f) \mapsto (u_F, f)$ definem um funtor da categoria dos G -fibrados principais para a categoria dos fibrados com fibra F e grupo estrutural G . Mais ainda, se ξ' é um fibrado com fibra F e grupo estrutural G , existe um G -fibrado principal ξ tal que $\xi' = \xi[F]$. Portanto existe uma bijeção entre as classes dos G -fibrados principais e as classes dos fibrados com fibra F e grupo G , onde G age sobre F efetivamente. Para maiores detalhes, ver [10], 2.2.10.

A definição dada acima, para um G -fibrado principal, é global. O espaço total possui uma ação expressa por uma função definida globalmente e as translações também são definidas em todo o espaço. Porém, existe uma definição equivalente de um G -fibrado principal, por um outro ponto de vista, baseada na introdução de um conjunto de funções locais. Esta é uma definição muito útil em várias situações, tanto abstrata quanto aplicada, e em particular quando uma expressão explícita para tais funções locais está disponível. Eis a definição.

24.6 DEFINIÇÃO: Um *fibrado com fibra F* é uma 5-upla (E, p, B, F, G) satisfazendo:

- i. E, B, F são espaços topológicos, $p : E \rightarrow B$ é uma aplicação e G é um grupo topológico agindo efetivamente à esquerda em F , isto é, $G \subset \text{Homeo}(F)$.
- ii. B é coberto por uma coleção de conjuntos abertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in J}$ e, para todo $i \in J$, existe um homeomorfismo $\phi_i : U_i \times F \rightarrow p^{-1}(U_i)$ tal que

$p\phi_i(b, s) = b$. O aberto U_i é chamado de *vizinhança coordenada* e a função ϕ_i é chamada de *função coordenada*.

iii. Se a aplicação $\phi_{jb} : F \rightarrow p^{-1}(b)$ é definida por

$$\phi_{jb}(s) = \phi_j(b, s)$$

então, para cada par $i, j \in J$ e $b \in U_{ij} = U_i \cap U_j$, o homeomorfismo

$$\phi_{jb}^{-1}\phi_{ib} : F \rightarrow F$$

coincide com a operação de um elemento de G (único, desde que a ação é efetiva).

iv. Para cada par $i, j \in J$, a aplicação $g_{ji} : U_{ij} \rightarrow G$ definida por

$$g_{ji}(b) = \phi_{jb}^{-1}\phi_{ib}$$

é contínua e a chamamos de *função transição*.

Tais funções são importantes quando trabalhamos com fibrados. Elas satisfazem as seguintes relações, de fácil verificação:

FT1. $g_{ii}(b) = e$, para todo $b \in U_i$.

FT2. $g_{ji}(b) = (g_{ij}(b))^{-1}$, para todo $b \in U_{ij}$.

FT3. $g_{ki}(b) = g_{kj}(b)g_{ji}(b)$, para todo $b \in U_{ijk}$.

Sua importância também aparece na seguinte proposição:

24.7 PROPOSIÇÃO: Seja G um grupo topológico que age efetivamente à esquerda sobre F . Seja B um espaço topológico com uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in J}$ tal que, para todo par $i, j \in J$ no qual $U_{ij} \neq \emptyset$, existem funções $g_{ji} : U_{ij} \rightarrow G$ satisfazendo (FT1), (FT2) e (FT3). Nas condições acima, existe um fibrado $\xi = (E, p, B, F, G)$, com funções *transição* g_{ji} e fibra F .

PROVA: Ver [6], 5.3.2. ■

Em particular, o resultado anterior nos permite construir um G -fibrado com fibra G , a partir de um G -fibrado ξ ; basta observarmos que G age sobre si

mesmo por multiplicação. Tal G -fibrado com fibra G é o G -fibrado principal associado a ξ . Pode-se mostrar que as duas definições coincidem, embora não faremos isso aqui.

Os objetos da categoria $\mathbf{Princ}_G(B)$ são G -fibrados principais sobre o espaço B . Um morfismo $f \in \mathbf{Princ}_G(B)$ é uma aplicação G -equivariante $f : E \rightarrow E'$ que comuta com as projeções p e p' .

24.8 EXEMPLO: O *fibrado tangente* a S^n e o *fibrado normal* a S^n , denotados por $\tau(S^n) = (TS^n, p, S^n, \mathbb{R}^n, O_n(\mathbb{R}))$ e $\nu(S^n) = (NS^n, q, S^n, \mathbb{R}, O_n(\mathbb{R}))$, respectivamente, são fibrados vetoriais cujos espaços totais podem ser descritos como subespaços de $S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$, por

$$\begin{aligned} TS^n &= \{(b, x) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1}; \langle b, x \rangle = 0\}, \\ NS^n &= \{(b, x) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1}; x = \alpha b, \alpha \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Um elemento $(b, x) \in TS^n$ é chamado *vetor tangente* a S^n em b e um elemento de NS^n é chamado *vetor normal* a S^n em b . As fibras $p^{-1}(b)$ e $q^{-1}(b)$ são espaços vetoriais de dimensões n e 1 , respectivamente. Uma secção de $\tau(S^n)$ é chamado de *campo vetorial tangente* em S^n e uma secção de $\nu(S^n)$ é chamado de *campo vetorial normal* em S^n .

25 Classificação homotópica de G -fibrados principais

O objetivo desta seção é mostrar como o processo de classificação de fibrados funciona na teoria de homotopia. Não é possível afirmar um resultado completamente geral, exceto se o restringirmos a alguns tipos de fibrados, como por exemplo, fibrados vetoriais. O mais geral é lidarmos com *fibrados enumeráveis* e isso nos levará ao teorema de classificação, citado mais adiante.

Primeiramente, precisamos do conceito de fibrado enumerável e algumas noções de teoria de homotopia. Por fim, provaremos o teorema de classificação, dando assim ao leitor uma noção de como esse procedimento de classificar objetos funciona.

25.1 DEFINIÇÃO: Uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in J}$ de um espaço topológico

B é *enumerável* se existe uma partição da unidade (localmente finita) $\{u_i\}_{i \in J}$ tal que $\overline{u_i^{-1}((0, 1])} \subset U_i$, para cada $i \in J$.

Pode-se provar que um espaço de Hausdorff B é paracompacto se, e somente se, cada cobertura aberta é enumerável.

25.2 DEFINIÇÃO: Um G -fibrado principal ξ sobre um espaço B é *enumerável* se existe uma cobertura enumerável $\{U_i\}_{i \in J}$ de B tal que $\xi|_{U_i}$ é trivial, para cada $i \in J$. Observe que cada G -fibrado principal enumerável é localmente trivial e que cada G -fibrado principal localmente trivial sobre um espaço paracompacto é enumerável.

Seguem dois resultados sobre fibrados enumeráveis. Para a demonstração, ver [6], 4.9.3 e 4.9.9.

25.3 PROPOSIÇÃO: Sejam $f : B' \rightarrow B$ uma aplicação e ξ um fibrado enumerável sobre B . Então $f^*(\xi)$ é enumerável sobre B' .

25.4 TEOREMA: Seja ξ um G -fibrado principal enumerável sobre B e seja $f_t : B' \rightarrow B$ uma homotopia. Então os G -fibrados principais $f_0^*(\xi)$ e $f_1^*(\xi)$ são isomorfos sobre B' .

Para cada espaço B , seja $k_G(B)$ o conjunto das classes de isomorfismos de G -fibrados principais enumeráveis sobre B e denotemos por $[\xi]$ uma tal classe. Dada uma classe de homotopia $[f] : X \rightarrow Y$, definimos uma função

$$k_G([f]) : k_G(Y) \rightarrow k_G(X)$$

pela relação $k_G([f])[\xi] = [f^*(\xi)]$. O elemento $[f^*(\xi)]$ independe do representante da classe $[\xi]$ e pelo teorema 25.4 também independe do representante da classe $[f]$. Portanto, $k_G([f]) : k_G(Y) \rightarrow k_G(X)$ é uma função.

Seja **H** a categoria dos espaços topológicos com classes de aplicações homotópicas e seja **ens** a categoria dos conjuntos com funções.

25.5 TEOREMA: $k_G : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{ens}$ é um cofuntor.

PROVA: Sejam $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ duas aplicações e seja ξ um G -fibrado principal enumerável sobre Z . Então os fibrados $(gf)^*(\xi)$ e $f^*(g^*(\xi))$

são isomorfos sobre X , pela construção usada na proposição 23.6. Portanto temos $k_G([g][f]) = k_G([f])k_G([g])$. Desde que ξ e $\text{Id}_Z^*(\xi)$ são isomorfos sobre Z , a função $k_G([\text{Id}_Z])$ é a identidade em $k_G(Z)$. ■

25.6 COROLÁRIO: Se $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia, $k_G([f]) : k_G(Y) \rightarrow k_G(X)$ é uma bijeção.

Seja $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ um G -fibrado principal enumerável fixado. Dado um espaço X , por 25.4 podemos definir a função

$$T_X : [X, B_0] \rightarrow k_G(X)$$

por $T_X([g]) = [g^*(\omega)]$. Definimos também o funtor $\phi_\omega : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{ens}$ por

$$\phi_\omega(X, Y, [f]) = ([Y, B_0], [X, B_0], \phi_\omega[f]),$$

onde $\phi_\omega[f] : [Y, B_0] \rightarrow [X, B_0]$ é definida por $[u] \mapsto [uf]$. Sendo assim, podemos montar o diagrama abaixo e provar que é comutativo, isto é, $T_X \phi_\omega[f] = k_G[f] T_Y$. Basta observarmos que $(uf)^*(\omega) = f^*(u^*(\omega))$ nos dá a igualdade em

$$[u] \xrightarrow{\phi_\omega[f]} [uf] \xrightarrow{T_X} [(uf)^*(\omega)]$$

$$[u] \xrightarrow{T_Y} [u^*(\omega)] \xrightarrow{k_G[f]} [f^*(u^*(\omega))]$$

A comutatividade nos diz que $T : [-, B_0] \rightarrow k_G(-)$ é um *morfismo de cofuntores*.

$$\begin{array}{ccccc}
 k_G(X) & \xleftarrow{[f^*(\xi)] \leftarrow [\xi]} & & & k_G(Y) \\
 & \searrow k_G & & & \nearrow k_G \\
 & & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \nearrow \phi_\omega & & & \searrow \phi_\omega \\
 [X, B_0] & \xleftarrow{\phi_\omega[f]} & & & [Y, B_0] \\
 & & [uf] \leftarrow [u] & &
 \end{array}$$

Lembramos que $T : [-, B_0] \rightarrow k_G(-)$ é um isomorfismo de cofuntores se, e somente se, cada função $T_X : [X, B_0] \rightarrow k_G(X)$ é uma bijeção. Assim temos:

25.7 DEFINIÇÃO (FIBRADO UNIVERSAL): Dizemos que um G -fibrado principal $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ é *universal* se é enumerável e se $T : [-, B_0] \rightarrow k_G(-)$ é um isomorfismo. Neste caso, B_0 é chamado *espaço classificante* de G .

25.8 PROPOSIÇÃO: Um G -fibrado principal enumerável $\omega = (E_0, p_0, B_0)$ é universal se, e somente se, são válidas:

1. Para cada G -fibrado principal enumerável ξ sobre X existe uma aplicação $f : X \rightarrow B_0$ tal que ξ e $f^*(\omega)$ são isomorfos sobre X .
2. Se $f, g : X \rightarrow B_0$ são duas aplicações tais que $f^*(\omega)$ e $g^*(\omega)$ são isomorfos sobre X então f e g são homotópicas.

PROVA: A prova é direta, basta observarmos que (1) diz que T_X é sobrejetora e (2) diz que T_X é injetora. ■

A existência de um fibrado universal é garantida por um processo conhecido por *construção de Milnor*, onde um fibrado ω_G é construído e as duas condições de 25.8 são satisfeitas. O espaço total de ω_G é denotado por EG e o espaço base por BG . Para maiores detalhes de tal processo, ver [6], 4.11.

Utilizando então o fibrado universal ω_G , podemos enunciar e provar o seguinte *teorema de classificação dos fibrados*:

25.9 TEOREMA: Existe uma bijeção $[X, BG] \approx k_G(X)$.

PROVA: Dada $[f] \in [X, BG]$ basta tomarmos $[f^*(\omega_G)]$ e se ξ representa um G -fibrado principal sobre X , por 25.8 temos que existe $[f] \in [X, BG]$ associada a ξ . ■

Vale ressaltar que, pela observação 24.5, temos uma bijeção entre as classes de isomorfismos de G -fibrados principais sobre X , $k_G(X)$, e as classes de isomorfismos dos fibrados sobre X com fibra F (que é um G -espaço com uma ação à esquerda efetiva) e grupo estrutural G , $k_F(X)$. Portanto, com as devidas hipóteses sobre os fibrados a serem considerados, podemos dizer que

$$[X, BG] \approx k_G(X) \approx k_F(X).$$

ENUMERAÇÃO DOS FIBRADOS PLANOS SOBRE SUPERFÍCIES

Neste último capítulo, utilizaremos os resultados dos capítulos II, III e IV para obtermos relações envolvendo a co-homologia de um certo tipo de superfície $\mathcal{S}$, com coeficientes torcidos, e a classe dos fibrados planos sobre tal superfície. Para isso, precisaremos de algumas considerações e também faremos uso dos conceitos de *classe característica* (ver [8]) e *torre de Postnikov* (ver [4]). As referências para esse capítulo são [4], [7] e [9].

26 Considerações iniciais

Inicialmente observamos que, dada uma representação ρ para $\pi_1(\mathcal{S})$, por definição temos então um homomorfismo $\rho : \pi_1(\mathcal{S}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}_2$, ou seja

$$\rho \in \text{Hom}(\pi_1(\mathcal{S}), \mathbb{Z}_2) \approx \text{Hom}(H_1(\mathcal{S}), \mathbb{Z}_2) \approx H^1(\mathcal{S}; \mathbb{Z}_2).$$

No entanto, por [6], 17.3.4, temos uma bijeção entre $H^1(\mathcal{S}; \mathbb{Z}_2)$ e a classe dos fibrados linha sobre $\mathcal{S}$, $\text{Line}(\mathcal{S})$, onde um *fibrado linha* é um fibrado vetorial real de dimensão um. Portanto, a cada ρ podemos associar um fibrado linha λ , que será trivial e terá a classe de Stiefel-Whitney w_1 nula caso ρ seja trivial. Outro resultado importante envolvendo classe característica é que *uma superfície $\mathcal{S}$ é $\mathbb{Z}$ -orientável se, e somente se, $w_1(\tau(\mathcal{S})) = 0$* . Podemos portanto trocar a notação $\mathbb{Z}_\rho$ por $\mathbb{Z}_\lambda$, caso necessário.

Sendo assim, obtemos o teorema abaixo para superfícies fechadas orientáveis.

26.1 TEOREMA: Seja $\mathcal{S}$ uma superfície fechada orientável. Então

$$H^2(\mathcal{S}; \mathbb{Z}_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } w_1(\tau(\mathcal{S})) = w_1(\lambda) \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se } w_1(\tau(\mathcal{S})) \neq w_1(\lambda) \end{cases}.$$

PROVA:

1. Sabemos que $w_1(\tau(S^2)) = 0$, pois S^2 é orientável, e como $H^1(S^2; \mathbb{Z}_2) = 0$, o único fibrado linha λ sobre S^2 é trivial e assim $w_1(\lambda) = 0$. Portanto $w_1(\tau(S^2)) = w_1(\lambda)$ e como $H^2(S^2; \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$, vale o resultado.
2. Para $\mathcal{S} = gT$, temos $w_1(\tau(gT)) = 0$. Também, pelos cálculos anteriores, provamos que $H^2(gT; \mathbb{Z}_\lambda)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ ou a $\mathbb{Z}_2$, dependendo das hipóteses sobre λ . Mais precisamente, pelos cálculos da seção 19 temos $H^2(gT; \mathbb{Z}_\lambda) \approx \mathbb{Z}$ apenas para λ trivial (onde $w_1(\lambda) = 0$). Portanto, para tal λ temos $w_1(\lambda) = w_1(\tau(gT))$, de onde segue o resultado. ■

26.2 OBSERVAÇÃO: Com os cálculos das seções 20 e 21, pode-se provar o teorema também para $\mathbb{R}P^2$ e K e, em geral, pode-se provar também para uma superfície fechada não-orientável qualquer.

27 Enumeração dos 2-fibrados sobre superfícies fechadas orientáveis

Nosso objetivo agora é enumerar os 2-fibrados vetoriais, também chamados *fibrados planos*, sobre uma superfície fechada orientável $\mathcal{S}$, como antes. Lembramos que o processo pode ser generalizado para as superfícies fechadas não-orientáveis.

Fixemos ξ como sendo um 2-fibrado qualquer sobre $\mathcal{S}$. Sabemos que o grupo estrutural de tais fibrados *pode* ser tomado como sendo $O(2)$, o grupo das matrizes ortogonais de ordem dois.

Por isso, devemos então estudar o conjunto $[\mathcal{S}, BO(2)]$. Sendo assim, tomamos a fibração

$$\mathbb{C}P^\infty \xrightarrow{j} BO(2) \xrightarrow{p} \mathbb{R}P^\infty$$

que dá origem à seqüência exata de conjuntos, com ponto base escolhido,

$$[\mathcal{S}, \mathbb{C}P^\infty]_* \xrightarrow{j_*} [\mathcal{S}, BO(2)]_* \xrightarrow{p_*} [\mathcal{S}, \mathbb{R}P^\infty]_* \longrightarrow 0.$$

Como p_* é sobrejetora, podemos escrever $[\mathcal{S}, BO(2)]_*$ como união da contra-imagem de $[u]_* \in [\mathcal{S}, \mathbb{R}P^\infty]_*$ e para isso precisamos saber a respeito

da contra-imagem de p_* . Obtemos tais informações pelo processo descrito em [7], utilizando *torre de Postnikov* e *seqüência espectral*.

27.1 DEFINIÇÃO (TORRE DE POSTNIKOV): Uma *torre de Postnikov* para um espaço Y é constituída de:

- i. para cada $n \geq 0$, um espaço $(Y)_n$ e uma aplicação $P_n : Y \rightarrow (Y)_n$, que induz um isomorfismo nos grupos de homotopia até a dimensão n e com $\pi_k((Y)_n) = 0$ para $k > n$.
- ii. para cada $n \geq 1$, uma fibração $p_n : (Y)_n \rightarrow (Y)_{n-1}$, com fibra do tipo $K(\pi_n((Y)_n), n)$ e $p_n P_n = P_{n-1}$.

27.2 DEFINIÇÃO: Para $n \geq 1$, definimos $G_n(Y)$ como sendo o “*sheaf*” sobre $(Y)_1$, cujo “*stalk*” sobre $y \in (Y)_1$ é $\pi_n(p^{-1}(y)) = \pi_n(Y)$, onde $p = p_2 \cdots p_n : (Y)_n \rightarrow (Y)_1$. Assim, dada $f : X \rightarrow Y$, definimos o “*sheaf*” $\pi_n(Y, f)$ como sendo a imagem inversa de $G_n(Y)$ por $P_1 f$, $(P_1 f)^{-1} G_n(Y)$, sobre X .

Figura 5.1: Torre de Postnikov para Y .

O diagrama acima é clássico e ajuda a entender o processo de construção da torre e suas propriedades.

27.3 OBSERVAÇÃO: A construção acima pode ser descrita de outro modo. Primeiramente, o “sheaf” $G_n(Y)$ pode ser pensado como um fibrado com base $(Y)_1$, fibra $\pi_n(Y)$ e grupo $\text{Aut}(\pi_n(Y))$, onde a ação do grupo estrutural é definida por uma representação do grupo fundamental da base, ou seja, $\rho : \pi_1((Y)_1) \rightarrow \text{Aut}(\pi_n(Y))$. Desde que $(Y)_1 = K(\pi_1(Y), 1)$ por definição, tais representações são, na verdade, as possíveis ações do grupo fundamental $\pi_1(Y)$ nos grupos de homotopia de dimensões maiores $\pi_n(Y)$, via a composição $p_2 \cdots p_n$, nos dando assim o “sheaf” da definição 27.2. Por fim, suponhamos que $(Y)_1 = B\Gamma$, para Γ um grupo finito. Então, todos os “sheafs” $\pi_n(Y, f)$, como fibrados sobre X , são classificados por (classes de) aplicações em $[X, B\Gamma]$ e desde que $B\Gamma = K(\Gamma, 1)$, o último conjunto corresponde ao conjunto $\text{Hom}(\pi_1(X), \pi_1(B\Gamma)) = \text{Hom}(\pi_1(X), \Gamma)$.

Sendo assim, dada $f_n : X \rightarrow (Y)_n$, para calcularmos $p_{n*}^{-1}(p_{n*}([f_n]_*))$, onde

$$p_{n*} : [X, (Y)_n]_* \rightarrow [X, (Y)_{n-1}]_*,$$

definimos uma *seqüência espectral* por

$$f_n E_2^{p,q} = E_2^{p,q} = \begin{cases} H^p(X; \pi_q(Y, f_n)) & \text{se } 2 \leq q \leq n, 1 \leq p \leq q+1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com um diferencial de bi-grau $(r, r-1)$

$$f_n d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q+r-1}$$

para $r \geq 2$ (definido em [7]) e $E_\infty^{n,n}$ sendo um grupo com uma correspondência bijetiva com o conjunto das classes de homotopia (com ponto base) de aplicações $g_n : X \rightarrow (Y)_n$, tais que $p_n f_n \sim p_n g_n$. Mais precisamente,

$$E_\infty^{n,n} = p_{n*}^{-1}([p_n f_n]_*).$$

Vamos agora adaptar tal técnica para o nosso caso e para isso tomamos $Y = BO(2)$, $X = \mathcal{S}$ e utilizaremos homotopias com ponto base. Para construirmos a torre para $BO(2)$, tomamos $(BO(2))_0 = \text{pt}$, $(BO(2))_1 = \mathbb{R}P^\infty$, $(BO(2))_2 = BO(2)$ e $p_2 = p$, onde p é a aplicação da fibração tomada no início da seção. Para $Y = BO(2)$, a seqüência espectral colapsa (ver [7],

4.4.1) e portanto $E_{\infty}^{n,n} = E_{\infty}^{2,2}$, ou seja, dada $f : \mathcal{S} \rightarrow (BO(2))_2 = BO(2)$, existe uma bijeção entre o conjunto $p_*^{-1}([pf]_*)$ e $H^2(\mathcal{S}; \pi_2(BO(2), f))$ (observe que utilizamos $[pf]_*$ e que $p = p_2$ e $f = f_2$).

Como $\pi_1(BO(2)) \approx \mathbb{Z}_2$ age não trivialmente em $\pi_2(BO(2)) \approx \mathbb{Z}$, reformulamos o “sheaf” $\pi_2(BO(2), f)$ para levarmos em conta tal ação. Primeiramente, tomamos o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado universal sobre $\mathbb{R}P^{\infty}$, cuja fibra é $\mathbb{Z}_2$ e usamos a ação

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (\pm 1, n) \mapsto \pm n$$

para mudarmos a fibra e obtermos um $\mathbb{Z}_2$ -fibrado $\mathbb{Z}^T$ sobre $\mathbb{R}P^{\infty}$, com fibra $\mathbb{Z}$. A seguir, tomamos alguma $f : \mathcal{S} \rightarrow BO(2)$ correspondendo a $x = w_1(\xi) \in H^1(\mathcal{S}; \mathbb{Z}_2)$ ([9], 3.1), lembrando que ξ é um 2-fibrado qualquer sobre $\mathcal{S}$, e fazemos o “pull back” de $\mathbb{Z}^T$ via pf para obtermos o $\mathbb{Z}_2$ -fibrado $\mathbb{Z}^T[x]$ sobre $\mathcal{S}$. Por fim, observamos que $\pi_2(BO(2), f)$ corresponde ao $\mathbb{Z}_2$ -fibrado $\mathbb{Z}^T[x]$. Portanto, $p_*^{-1}([pf]_*)$ está em correspondência bijetiva com $H^2(\mathcal{S}; \mathbb{Z}^T[x])$.

Note que $p_*^{-1}([pf]_*) \in [\mathcal{S}, BO(2)]_*$ e assim devemos estudar sua classe correspondente em $[\mathcal{S}, BO(2)] \approx [\mathcal{S}, BO(2)]_*/\pi_1(BO(2))$, onde a ação apenas muda o sinal (ver [4], 6.57).

Particularizaremos o processo para as superfícies S^2 , T e gT , lembrando que o mesmo pode ser feito também para o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ e a garrafa de Klein K .

27.1 Fibrados planos sobre S^2

Precisamos saber quantos elementos possui o conjunto $[S^2, \mathbb{R}P^{\infty}]_*$ e para cada um deles tomar a contra-imagem por p_* . Mas tal conjunto é $H^1(S^2; \mathbb{Z}_2)$, já que $\mathbb{R}P^{\infty} = B\mathbb{Z}_2$, e possui apenas o elemento neutro pois $H^1(S^2; \mathbb{Z}_2)$ é trivial. Então

$$[S^2, BO(2)]_* = p_*^{-1}([pf]_*) \approx H^2(S^2; \mathbb{Z}^T[1])$$

que é isomorfo a $\mathbb{Z}$ pois S^2 é orientável e os fibrados linha sobre S^2 são triviais, já que $\mathbf{Line}(S^2) \approx H^1(S^2; \mathbb{Z}_2) = 0$.

Levando em conta a ação de $\pi_1(BO(2)) \approx \mathbb{Z}_2$ teremos então $[S^2, BO(2)] \approx \mathbb{N}$. Interpretamos isso dizendo que existem $\mathbb{N}$ fibrados orientáveis sobre S^2 e

podemos representá-los por

$$1 + n\beta,$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $\beta \in H^2(S^2; \mathbb{Z}^T[1])$ é o gerador.

27.2 Fibrados planos sobre T

Neste caso $H^1(T; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e então temos quatro elementos em $[T, \mathbb{R}P^\infty]_*$, denotados por $1, a_1, a_2, a_1 + a_2$. Calculando as contra-imagens, temos

$$\begin{aligned} H^2(T; \mathbb{Z}^T[1]) &\approx \mathbb{Z} & H^2(T; \mathbb{Z}^T[a_1]) &\approx \mathbb{Z}_2 \\ H^2(T; \mathbb{Z}^T[a_2]) &\approx \mathbb{Z}_2 & H^2(T; \mathbb{Z}^T[a_1 + a_2]) &\approx \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

e portanto, tomando o quociente pela ação de $\mathbb{Z}_2$, temos seis fibrados planos não-orientáveis sobre T e $\mathbb{N}$ orientáveis, denotados por

$$\begin{array}{cc} 1 + n\beta & 1 + a_2 + n(\text{mod}2)\beta \\ 1 + a_1 + n(\text{mod}2)\beta & 1 + (a_1 + a_2) + n(\text{mod}2)\beta \end{array}.$$

27.3 Fibrados planos sobre gT

Como $H^1(gT; \mathbb{Z}_2) \approx \mathbb{Z}_2^{2g}$, podemos dizer que é da forma $\mathbb{Z}_2[a_1, \dots, a_{2g}]$. Também, como $H^2(gT; \mathbb{Z}_\lambda) \approx \mathbb{Z}$ apenas para λ trivial, temos então $\mathbb{N}$ fibrados planos orientáveis sobre gT e para cada elemento y não nulo de $\mathbb{Z}_2[a_1, \dots, a_{2g}]$, temos dois não-orientáveis, todos representados por

$$1 + n\beta \quad \text{e} \quad 1 + y + n(\text{mod}2)\beta.$$

Para finalizarmos o trabalho, apresentamos as conclusões na tabela abaixo, indicando as superfícies (fechadas e orientáveis) e os fibrados vetoriais planos, orientáveis e não-orientáveis, respectivamente.

$\mathcal{S}$	$\text{Vect}_2^+(\mathcal{S})$	$\text{Vect}_2^-(\mathcal{S})$
S^2	$\mathbb{N}[\beta]$	$\emptyset$
T	$\mathbb{N}[\beta]$	$(\mathbb{Z}_2[a_1, a_2] - \{0\}) \times \mathbb{Z}_2[\beta]$
gT	$\mathbb{N}[\beta]$	$(\mathbb{Z}_2[a_1, \dots, a_{2g}] - \{0\}) \times \mathbb{Z}_2[\beta]$

Tabela 5.1: Enumeração dos fibrados planos sobre $\mathcal{S}$.

LISTA DE TABELAS E FIGURAS

TABELAS

2.1	Homologia da S^1	26
2.2	Homologia do toro T	34
2.3	Homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$	36
2.4	Homologia da garrafa de Klein K	40
3.1	Homologia da garrafa de Klein K via resolução.	56
3.2	Co-homologia do plano projetivo $\mathbb{R}P^2$ via resolução.	58
3.3	Co-homologia da garrafa de Klein K via resolução.	59
5.1	Enumeração dos fibrados planos sobre $\mathcal{S}$	78

FIGURAS

2.1	Decomposição simplicial de $\widetilde{S^1}$	23
2.2	Decomposição simplicial do toro T	27
2.3	Decomposição simplicial de $\widetilde{T}$	27
2.4	Decomposição celular da S^2	34
2.5	Decomposição simplicial da garrafa de Klein K	36
2.6	Decomposição simplicial de $\widetilde{K}$	37
5.1	Torre de Postnikov para Y	75

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BREDON, G.E. - *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics No. 139, Springer-Verlag, 1993.
- [2] BROWN, K.S. - *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics No. 87, Springer-Verlag, 1982.
- [3] CARTAN, H. AND EILENBERG, S. - *Homological Algebra*, Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, New Jersey, 1956.
- [4] DAVIS, J.F. AND KIRK, P. - *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Graduate Studies in Mathematics No. 35, AMS, 2001.
- [5] HATCHER, A. - *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] HUSEMOLLER, D. - *Fibre Bundles*, Graduate Texts in Mathematics No. 20, Springer-Verlag, 1993.
- [7] LARMORE, L.L. - *Twisted cohomology and enumerations of vector bundles*, Pacific J. Math. 30, (1969) 437-457.
- [8] MILNOR, J.W. AND STASHEFF, J.D. - *Characteristic Classes*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, New Jersey, 1974.
- [9] MINATTA, A.; PICCININI, R. AND SPREAFICO, M. - *A note about the isotropy groups of 2-plane bundles over closed surfaces*, Collect. Math. 54, 3 (2003) 283-291.

- [10] MIMURA, M. AND TODA, H. - *Topology of Lie Groups, I and II*, Providence, R.I., AMS, 1991.
- [11] MUNKRES, J.R. - *Elements of Algebraic Topology*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., California, 1984.
- [12] ROTMAN, J.J. - *An Introduction to the Theory of Groups*, Graduate Texts in Mathematics No. 148, Springer-Verlag, 1994.
- [13] STEENROD, N. - *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, New Jersey, 1951.
- [14] WHITEHEAD, G.W. - *Elements of Homotopy Theory*, Graduate Texts in Mathematics No. 61, Springer-Verlag, 1978.

ÍNDICE REMISSIVO

SÍMBOLOS

$H_*(X; A_\rho)$, 22

H_{ab} , 47

$\mathbb{Z}_\lambda$, 73

π -módulo, 20

$k_F(X)$, 72

$k_G(B)$, 70

A

ação, 15

órbita da, 15, 61

efetiva, 15, 62

livre, 44, 62

propriamente descontínua, 15

transitiva, 15, 62

anel de grupos, 19

aplicação, 5

G -equivariante, 61

de cadeias, 18

C

categoria

$\mathbf{Bun}_F(X)$, 63

$\mathbf{H}$, 70

$\mathbf{Princ}_G(B)$, 69

$\mathbf{ens}$, 70

$\mathbf{sp}_G$, 61

classe característica, 73

cobertura

enumerável, 70

folhas da, 6

regular, 14

universal, 9

complexo

de cadeias, 17

de cadeias aumentado, 42

comutador, 47

D

derivação, 48

total (livre), 48

derivadas parciais, 48

diferencial d_r , 76

E

equivalência

de homotopia, 18

fraca, 18

estabilizador, 15

F

fibra, 10, 62

fibrado(s), 62

G -, 64

com fibra F , 66, 67

enumerável, 70
grupo estrutural do, 66
induzido, 63
isomorfos, 63
 localmente, 64
linha, 66, 73
morfismo de, 63, 67
normal a S^n , 69
plano, 74
 sobre gT , 78
 sobre S^2 , 77
 sobre T , 78
principal, 65
tangente a S^n , 69
universal, 72
vetorial, 66
função
 transição, 68
 translação τ , 62
G
 G -complexo, 44
 livre, 44
 G -conjunto, 43
 G -espaço, 60
 livre, 62
 G -morfismo, 61
garrafa de Klein, 16, 36, 47, 55
grupo
 estrutural do fibrado, 66
 de isotropia, 15
 topológico, 60

H
homologia, 17
homologia(s)
 com coeficientes locais, 21
 da S^1 , 23, 26
 da garrafa de Klein K , 36, 40
 de um grupo G , 46
 do $\mathbb{R}P^2$, 34, 35
 do toro T , 26, 34, 51
 torcida por ρ , 22

I
isotropia, 11, 15, 44

L
localmente conexo, 5

M
módulo
 de permutação, 43
 graduado, 17

N
normalizador, 13

O
operador bordo, 17

P
plano projetivo, 12, 34, 47, 53, 58
produto tensorial, 21

R
recobrimento, 5
 aplicação de, 5
representação ρ , 20, 73

resolução

de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, 43

livre, 41

unicidade da, 43

S

secção, 63

seqüência espectral, 75, 76

sheaf, 76

T

Teorema

classificação dos fibrados, 72

cobertura de homotopia, 7

levantamento, 8

levantamento de caminhos, 6

toro, 15, 26, 34, 49, 78

torre de Postnikov, 73, 75

transformação deck, 12