Hipótese de Riemann e física

José Carlos Valencia Alvites

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito: 26/03/2012

Assinatura: _____

Hipótese de Riemann e física

José Carlos Valencia Alvites

***Orientador:* Prof. Dr. Paulo Afonso Faria da Veiga**

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências - Matemática . *VERSÃO REVISADA*

USP – São Carlos
Março de 2012

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

V152h Valencia Alvites, José Carlos
 Hipótese de Riemann e física / José Carlos Valencia
 Alvites; orientador Paulo Afonso Faria da Veiga. --
 São Carlos, 2012.
 94 p.

 Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
 Matemática) -- Instituto de Ciências Matemáticas e
 de Computação, Universidade de São Paulo, 2012.

 1. Função zeta de Riemann. 2. Hipótese de Riemann.
 3. Zeros não triviais. 4. Teorema dos Números
 Primos. 5. Função zeta de Riemann e física. I. Faria
 da Veiga, Paulo Afonso, orient. II. Título.

*Aos três pilares da
minha vida, meus pais
Luisa e Rosalio, e meu
grande amor Mary .*

Agradecimentos

Meus mais sinceros agradecimentos, sem dúvida, aos meus pais, Lucy e Rosalio, os amo por acima de tudo, que sempre acreditaram em mim apesar dos meus defeitos, pelo apoio, muito obrigado mamá e papá.

A Mary, meu amor, minha companheira, minha melhor amiga, que sempre leva o melhor de mim, que me ensinou a ser uma pessoa melhor, pelo apoio em tempos difíceis, pelas críticas, para ela com amor e admiração, obrigado bebe.

Ao Professor Paulo, meu orientador, que me apoiou na minha estadia em São Carlos, pela orientação, amizade e por sempre estar disposto a me ajudar no trabalho, este trabalho é em grande parte o produto de suas idéias e sugestões, professor muito obrigado por seu apoio a você e sua família que foram muito gentis comigo.

Aos Professores Edgar Vera, que foi meu orientador na graduação, e Luis Carrillo, professores da Facultad de Ciencias Matemáticas da UNMSM, no Perú.

Ao ICMC, por me dar a oportunidade.

Aos professores do ICMC pela importante formação academica.

À CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho, muito obrigado pelo apoio.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos a função zeta de Riemann $\zeta(s)$, para $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ e apresentamos muito do que é conhecido como justificativa para a hipótese de Riemann. A importância de $\zeta(s)$ para a teoria analítica dos números é enfatizada e fornecemos uma prova conhecida do Teorema dos Números Primos. No final, discutimos a importância de $\zeta(s)$ para alguns modelos físicos de interesse e concluimos descrevendo como a hipótese de Riemann pode ser acessada estudando estes sistemas.

Abstract

In this work, we introduce the Riemann zeta function $\zeta(s)$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ and present much of what is known to support the Riemann hypothesis. The importance of $\zeta(s)$ to the Analytic number theory is emphasized and a proof for the Prime Number Theorem is reviewed. In the end, we report on the importance of $\zeta(s)$ to some relevant physical models and conclude by describing how the Riemann Hypothesis can be accessed by studying these systems.

Sumário

1	Introdução e Motivação	1
2	Preliminares	5
2.1	Função Gama de Euler	5
2.2	A Função Zeta de Riemann	13
2.3	Funções Inteiras de Ordem Um	24
3	A Hipótese de Riemann	33
3.1	Estabelecendo a Hipótese de Riemann	33
3.2	Os Zeros não-triviais de $\zeta(s)$ e a Teoria Analítica dos Números.	41
3.3	A Conjetura de Hilbert-Pólya e a Hipótese de Riemann	55
3.4	Outras Formulações Equivalentes para a Hipótese de Riemann	55
4	Zeta de Riemann e a Física	63
4.1	Regularização Zeta	64
4.2	O Bilhar Circular Aberto	69
4.3	Mecânica Estatística	74
5	Considerações Finais	77
A	Informações Adicionais	79
B	Mais Informações	87
	Índice Remissivo	95

Notação

$\mathbb{C}$	O conjunto dos números complexos.
$\mathbb{Z}$	O conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{N}$	O conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{R}$	O conjunto dos números reais.
$\Gamma(s)$	A função Gama de Euler.
$\zeta(s)$	A função Zeta de Riemann.
$\xi(s)$	A ξ -função de Riemann.
$\mathcal{S}$	A faixa crítica.
$\mathcal{L}$	A reta crítica.
$\Lambda(x)$	A função de von Mangoldt.
$\Psi(x)$	A função de Chebyshev.
$\pi(x)$	A função de contagem de números primos.
γ_E	A constante de Euler-Mascheroni.
$\mathbb{LQ}$	O conjunto dos números livres de quadrados.
$H(\Omega)$	O conjunto das funções analíticas em $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.
$[\cdot]$	A função chão.
$\text{Li}(x)$	A função integral logarítmica Euleriana.

Introdução e Motivação

Em 1737, Euler provou que a série ($\mathbb{P}$ denota o conjunto dos números primos)

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p},$$

diverge, o que implica na existência de infinitos números primos. Um outro resultado importante obtido por Euler é apresentado na seguinte fórmula

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \quad \forall s \in \mathbb{R}, s > 1. \quad (1.1)$$

Euler também calculou a soma da série infinita $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$, para $s = 2$, encontrando o valor

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Um método interessante para calcular o valor de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$, para s par e s inteiro negativo ímpar, é descrito no Apêndice B. A relação expressa na equação (1.1) foi o estímulo inicial para que Riemann iniciasse suas pesquisas envolvendo a série infinita $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$. Na sua célebre publicação de 1859, intitulada *Sobre os Números Primos Menores que uma Magnitude Dada* [20], Riemann considerou a função

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}. \quad (1.2)$$

Que $\zeta(s)$ é facilmente estendida para valores de s complexos localizados no semi-plano complexo $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > 1\}$ é uma consequência imediata do fato que $|n^s| = n^a$, onde $s = a + ib$; $a, b \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, implicando na convergência absoluta da série no lado direito da equação

(1.2), neste domínio. Contudo, neste trabalho, Riemann não apenas considerou o domínio acima, mas a extensão de $\zeta(s)$ no conjunto $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Para ver que $\zeta(s)$ pode ser estendida como uma função meromorfa em $\mathbb{C}$, com uma única singularidade descrita por um polo simples em $s = 1$, não podemos usar a equação (1.2). Ao contrário, nós nos servimos de uma extensão meromorfa da função $\Gamma(s)$ de Euler, que é uma generalização da função fatorial. Ao mesmo tempo, com a ajuda desta função $\Gamma(s)$ obtemos uma relação funcional compatível, que concorda com (1.2) em $\Re(s) > 1$, dada a seguir [10] (Mais adiante no texto, estabeleceremos esta relação!)

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}. \quad (1.3)$$

A extensão meromorfa da função zeta de Riemann, $\zeta(s)$ definida em (1.2), com $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, é o tema central desta dissertação. Esta função é o ingrediente principal de um dos mais complexos e ricos problemas da matemática moderna, conhecido como a “*A Hipótese de Riemann*”, o qual se manifesta e afeta um grande número de áreas da Matemática.

É fácil mostrar, considerando o anulamento da função $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ em (1.3), que $\zeta(s)$ possui raízes triviais em $s = -2, -4, -6, \dots$. A Hipótese de Riemann conjectura que $\zeta(s)$ apresenta também zeros não-triviais na *reta crítica*

$$\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) = \frac{1}{2}\}.$$

Essa conjectura emergiu do fato que Riemann calculou três zeros, usando o que é hoje conhecida como a fórmula de Riemann-Seigel [10]. Outros zeros na reta crítica foram obtidos analiticamente por outros renomados matemáticos (Gram, Backlund, Hutchinson, Titchmarsh, Turing, Lehmer, Meller, Lehman, Rosser, Yohe, Schoenfeld, Brent, van de Lune, te Riele, Winter, Odlyzko, Wedeniowski, Gourdon e Patrick Demichel), e hoje já conhecemos mais de 1,5 bilhões de zeros aproximados na reta crítica, obtidos usando métodos numéricos [27]. Ademais, mostra-se em alguns casos, e há forte indicação nos tratamentos numéricos, que *todos* os zeros são simples, isto é, de multiplicidade um.

A Hipótese de Riemann faz parte da lista dos 23 grandes problemas da Matemática propostos por Hilbert no Congresso Internacional de Matemáticos de Paris, em 1900, sendo ainda um dos poucos por resolver, juntamente com a Conjetura de Goldbach (*Todo número par maior ou igual a 4 é a soma de dois primos.*) e o Teorema de Kronecker-Weber estendido para corpos não-abelianos (No caso abeliano, este teorema estabelece que *um corpo numérico algébrico cujo grupo de Galois sobre $\mathbb{Q}$ seja abeliano, é um subcorpo de um corpo ciclotômico, ou seja, um corpo obtido ao adicionar-se uma raiz complexa da unidade aos números racionais.*).

Como dissemos acima, na Matemática, a função zeta e a Hipótese de Riemann tem consequências em diversas áreas. Um exemplo marcante é a Teoria dos Números, e todos os domínios que se relacionam com ela (Teoria dos Códigos, Geometria Algébrica, etc), onde observamos que $\zeta(s)$ nos fornece uma medida da densidade dos números primos na reta real e tem papel fundamental na formulação do Teorema dos Números Primos, que estabelece

uma “contagem” (estimativa) dos números primos, obtido original e independentemente por Jacques Hadamard e Charles Jean de la Vallée-Poussin. Posteriormente, este teorema foi demonstrado, sem usar a Teoria Analítica dos Números, por Atle Selberg e Paul Erdős. Selberg também obteve uma famosa fórmula de traço com seu nome [22], que apresenta uma relação estreita com os zeros de $\zeta(s)$ (O Teorema dos Números Primos será tratado na seção 3.2). Podemos continuar mencionando também a Teoria de Operadores (Conjetura de Hilbert-Pólya), a Teoria das Matrizes Aleatórias, etc.

A relação de $\zeta(s)$ e da Hipótese de Riemann com temas da Física é também muito vasta. Por exemplo, na Mecânica Clássica, estão associados com o bilhar circular aberto [7], na Mecânica Estatística Clássica, temos o Teorema de Lee-Yang sobre os zeros de funções de partição, as quais determinam as quantidades termodinâmicas de sistemas tais como gases e cadeias de spins [14], [16] e os fenômenos de transições de fase (bifurcações) que podem ocorrer nos mesmos. Na Mecânica Estatística Quântica, os zeros de $\zeta(s)$ aparecem, por exemplo, na descrição do sistema de um gás dito Riemannium [18]. As matrizes aleatórias também são frequente variáveis na Mecânica Estatística e seu espectro importante para descrever as propriedades destes sistemas. Relacionam-se, conforme exposto acima, naturalmente com a Hipótese de Riemann. A função $\zeta(s)$ fornece uma ferramenta muito utilizada para a regularização de operadores, fornecendo um sentido matemático para integrais de caminho utilizadas por Hawking [29]. $\zeta(s)$ também aparece em sistemas dinâmicos recorrentes na teoria do Caos Quântico (fase de Berry) [4] e a fórmula de Selberg relaciona-se, por exemplo, com modelos físicos com espaço tempo do tipo Kaluza-Klein [29].

Curiosamente, embora confirmar ou não a Hipótese de Riemann seja um dos problemas mais importantes da Matemática, entendemos que é muito frequente que profissionais e pesquisadores da Matemática não conhecem seus requisitos mínimos. Entendemos também que essa atitude provém de muitos fatores, até aqueles que fogem do escopo da ciência em si. Contudo, pensamos ser esta uma atitude pouco recomendada aqui.

Neste contexto, decidimos preparar e redigir um texto contendo alguns dos pontos fundamentais para que qualquer estudioso da matemática, a começar por um estudante em vias de se graduar, possa compreender e estabelecer uma idéia geral básica do problema.

De forma alguma deve o leitor concluir que nos tornamos um expert no assunto, sobretudo porque, como frisamos acima, trata-se aqui de um assunto não trivial e extremamente amplo. Nosso texto, esperamos, poderá ser considerado uma porta de entrada no tema.

Com este propósito, procuramos apresentar um texto relativamente auto-contido, com muitas das demonstrações básicas e todos os ingredientes necessários ao tema.

Infelizmente, só tomamos conhecimento do excelente livro [6] quando este trabalho já estava finalizado. Outras excelentes referências no tema de $\zeta(s)$ são [10], [15], [26] e [9]. Sobre o uso extensivo de resultados genéricos de Análise Complexa temos as referências [8] e [1].

Para completar nosso trabalho, realizamos uma discussão breve e pouco aprofundada sobre alguns dos pontos de contato com a Física.

Por fim, vale mencionar que além da solução de um grande problema em si, a confirmação da Hipótese de Riemann trará um aprimoramento do número de primos menores que um número dado x , refinando o resultado atual do Teorema dos Números Primos (ver seção 3.2 do capítulo 3).

Concluindo, esperamos que o leitor interessado consiga aqui se motivar para aprimorar seus conhecimentos no tema e, quiçá, poder juntar algum grão de conhecimento a tudo o que é sabido hoje.

Preliminares

Neste capítulo, apresentamos resultados básicos clássicos e algumas definições a serem utilizados no decorrer do trabalho. Apresentamos algumas provas que, a nosso ver, não são facilmente encontrados na literatura na forma aqui apresentada ou cujas demonstrações trazem algum argumento técnico que seja relevante em algum ponto subsequente do texto.

No que segue, usamos as seguintes notações. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, denotamos

$$\mathbb{H}(a, b) = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z) < b\},$$

e, convencionamos que

$$\mathbb{H}(a, +\infty) = \{z \in \mathbb{C} : a < \Re(z)\} \text{ e } \mathbb{H}(-\infty, b) = \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < b\}.$$

Também, para $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ denotamos por $H(\Omega)$ o conjunto das funções analíticas (holomorfas) em Ω e $B(0; R)$ é o disco em $\mathbb{C}$ com centro em 0 e raio $R > 0$. As notações O , O_ϵ , $\ll$ e $\ll_\epsilon$ serão muito usadas no texto e foram definidas no Apêndice A.

2.1 Função Gama de Euler

A função Gama é a aplicação $\Gamma : \mathbb{H}(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.1)$$

Para ver que a definição acima faz sentido, observamos que se $\mathbb{H}(0, +\infty) \ni z = \sigma + i\tau$, $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$, então

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Analisamos as duas integrais do lado direito:

$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt$: Claramente $\left| \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^1 \left| e^{-t} t^{z-1} \right| dt = \int_0^1 e^{-t} t^{\sigma-1} dt$. Logo como $e^t > 1$, para qualquer $t \in (0, 1)$, então $e^{-t} < 1$, assim

$$\begin{aligned} e^{-t} t^{\sigma-1} &< t^{\sigma-1}, \quad \forall t \in (0, 1) \Rightarrow \int_0^1 e^{-t} t^{\sigma-1} dt < \int_0^1 t^{\sigma-1} dt < \infty \\ &\Rightarrow \left| \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt \right| < \infty. \end{aligned}$$

$\int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$: Análogo ao caso anterior, $\left| \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| \leq \int_1^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt$. Agora, como $e^t = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!}$ então $\frac{t^n}{n!} \leq e^t$ para qualquer $t \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, consideremos $n' \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma < n'$, então $\sigma - (n' + 1) < 0$, logo

$$\begin{aligned} e^{-t} t^{\sigma-1} &\leq t^{\sigma-(n'+1)} n'!, \quad \forall t \geq 1 \Rightarrow \int_1^\infty e^{-t} t^{\sigma-1} dt \leq n'! \left(\frac{t^{\sigma-n'}}{\sigma-n'} \right) \Big|_1^{+\infty} = \frac{n'!}{n'-\sigma} < \infty \\ &\Rightarrow \left| \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \right| < \infty, \quad \forall z \in \mathbb{H}(0, +\infty). \end{aligned}$$

Portanto, $\Gamma(z)$ é bem definida. Além disso, pelo método de integração por partes, é claro que, para $z \in \mathbb{H}(0, +\infty)$, temos a recorrência

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (2.2)$$

Ademais, pelo cálculo direto, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

o que também justifica escrever $0! = 1$.

Agora vamos provar que $\Gamma(z)$ pode ser estendida para uma função meromorfa em $\mathbb{C}$. Para este fim, usamos o seguinte lema.

Lema 2.1 . *Seja $(c_n)_{n=0}^\infty$ uma sequência em $\mathbb{C}$ tal que $\sum_{n \geq 0} |c_n|$ converge e $S = \{-n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ e } c_n \neq 0\}$. Então, $f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{z+n}$ converge absolutamente para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus S$ e uniformemente em subconjuntos limitados de $\mathbb{C} \setminus S$. Além disso, f é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com polos simples no conjunto S e $\text{Res}(f, -n) = c_n$, para qualquer $-n \in S$.*

Demonstração: Seja $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto limitado. Então, existe $R > 0$ tal que $A \subseteq B(0; R)$. Assim, $|z| < R$ para qualquer $z \in A$. Logo, se $n \geq R$ temos $|z+n| \geq n-|z| \geq n-R$. Isto implica que $\left| \frac{1}{z+n} \right| \leq \frac{1}{n-R}$, para $|z| < R$ e $n > R$. Portanto, se $n_0 > R$,

$$\left| \sum_{n=n_0}^m \frac{c_n}{z+n} \right| \leq \sum_{n=n_0}^m \frac{|c_n|}{|z+n|} \leq \sum_{n=n_0}^m \frac{|c_n|}{n-R} \leq \frac{1}{n_0-R} \left(\sum_{n=n_0}^m |c_n| \right), \quad \forall m \geq n_0.$$

Da última desigualdade, temos que a série $\sum_{n > R} \frac{c_n}{z+n}$ converge absolutamente. Ademais, como $\left| \frac{c_n}{z+n} \right| \leq \frac{|c_n|}{n_0-R}$, para qualquer $n > R$, então esta série também converge uniformemente

no conjunto A . Isto implica que a série $\sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{z+n}$ define uma função que tem um número finito de polos simples em S que estão contidos em $B(0; R)$. Portanto, temos que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{z+n},$$

é uma função meromorfa com polos simples em S . Então, para qualquer $-n \in S$ podemos escrever

$$f(z) = \frac{c_n}{z+n} + \sum_{-m \in S - \{-n\}} \frac{c_m}{z+m},$$

onde $\sum_{-m \in S - \{-n\}} \frac{c_m}{z+m}$ é uma função analítica em $z = -n$. Assim, $\text{Res}(f, -n) = c_n$ e como n é arbitrário, temos $\text{Res}(f, -n) = c_n$, $\forall -n \in S$. $\square$

Finalmente, podemos estabelecer o seguinte teorema.

Teorema 2.2. $\Gamma(z)$ pode ser estendida a uma função meromorfa no plano complexo, com polos simples em $0, -1, -2, \dots$. Além disso, vale que

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Demonstração: Para $z \in \mathbb{H}(0, +\infty)$, temos

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (2.3)$$

A segunda integral do lado direito converge para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$. De fato,

$$\left| \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Repetindo o argumento acima, lembrando que, para $t \geq 1$, $\frac{n!}{t^n} \geq e^{-t}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, seja $n_x \in \mathbb{N}$ tal que $n_x > x$, então $x - (n_x + 1) < 0$ assim temos

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \leq n_x! \int_1^\infty t^{x-(n_x+1)} dt = n_x! \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-n_x}}{x-n_x} - \frac{1}{x-n_x} \right) = \frac{n_x!}{n_x - x}.$$

Assim temos que, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, $\int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ converge, então esta integral representa uma função inteira. Por outro lado, como a função exponencial é inteira, a sua série de Taylor converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ e temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt &= \int_0^1 t^{z-1} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^n}{n!} \right) dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{n+z} \right). \end{aligned}$$

Assim, substituindo em (2.3), obtemos

$$\Gamma(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{n+z} \right) + \int_1^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (2.4)$$

para qualquer $z \in \mathbb{H}(0, +\infty)$, logo como $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} < \infty$, pelo Lema 2.1, o lado direito desta última igualdade define uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com polos simples em $0, -1, -2, \dots$ e $\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$. $\square$

No restante deste trabalho, para evitar confusão e para evitar a introdução de novas notações, vamos continuar denotando por $\Gamma(z)$ a extensão meromorfa da função $\Gamma(z)$ definida em (2.1). Agora, é claro que, de (2.2) e do Teorema 2.2, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.3 . *Para qualquer $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Como exemplo, vamos verificar a consistência de (2.4) com o corolário último. Seja $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$, então de (2.4) temos

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{n+1+z} \right) + \int_1^{+\infty} t^z e^{-t} dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(-\frac{n+1}{n+1+z} \right) + (-e^{-t} t^z) \Big|_1^{+\infty} + z \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{z}{n+1+z} - 1 \right) + \frac{1}{e} + z \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \sum_{n+1=m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m+z} \right) - \sum_{n+1=m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m!} + \frac{1}{e} + z \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \left(\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m+z} \right) + \frac{1}{z} \right) - \left(\sum_{m \geq 1} \frac{(-1)^m}{m!} + 1 \right) + \frac{1}{e} + z \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m+z} \right) - \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} + \frac{1}{e} + z \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m+z} \right) - \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + z \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z \left(\sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{1}{m+z} \right) + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right) \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Agora, com ajuda da função $\Gamma(z)$ vamos definir a função Beta que será de utilidade na parte de regularização Zeta (seção 4.1). Observamos que, para $u, v \in \mathbb{H}(0, +\infty)$,

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-t} t^{u-1} dt \quad \text{e} \quad \Gamma(v) = \int_0^\infty e^{-t} t^{v-1} dt.$$

Logo, fazendo a mudança $t = x^2$, temos

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2(u-1)} 2x dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2u-1} dx.$$

Analogamente,

$$\Gamma(v) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2v-1} dx.$$

Multiplicando as duas igualdades anteriores

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 4 \left(\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2u-1} dx \right) \left(\int_0^\infty e^{-y^2} y^{2v-1} dy \right) \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2u-1} y^{2v-1} dx dy. \end{aligned}$$

Considerando a integral dupla e usando coordenadas polares, obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(u)\Gamma(v) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(u+v)-1} \cos^{2u-1} \theta \sin^{2v-1} \theta dr d\theta \\ &= \left(2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(u+v)-1} dr \right) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1} \theta \sin^{2v-1} \theta d\theta \right) \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-r^2} (r^2)^{(u+v)-1} 2r dr \right) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1} \theta \sin^{2v-1} \theta d\theta \right) \\ &\Rightarrow \Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v) \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1} \theta \sin^{2v-1} \theta d\theta \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

A integral da última expressão pode ser calculada como segue:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1} \theta \sin^{2v-1} \theta d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta)^{u-1} (\sin^2 \theta)^{v-1} (2 \cos \theta \sin \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^{u-1} (\sin^2 \theta)^{v-1} (2 \cos \theta \sin \theta) d\theta, \end{aligned}$$

e, fazendo a mudança $s = \sin^2 \theta$, temos

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2u-1} \theta \sin^{2v-1} \theta d\theta = \int_0^1 (1-s)^{u-1} s^{v-1} ds.$$

Então, a função beta $B(v, u)$ é definida como

$$B(v, u) := \int_0^1 (1-s)^{u-1} s^{v-1} ds. \quad (2.6)$$

Logo, de (2.5) temos

$$\Gamma(u)\Gamma(v) = \Gamma(u+v)B(v, u), \quad (2.7)$$

para $u, v \in \mathbb{H}(0, +\infty)$.

Seja $x \in (0, 1)$. Da equação acima temos

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(1)B(x, 1-x) = \int_0^1 (1-s)^{1-x-1} s^{x-1} ds = \int_0^1 (1-s)^{-x} s^{x-1} ds.$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{u}{u+1}$, obtemos

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{u}{u+1}\right)^{-x} \frac{1}{(u+1)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{u+1} du.$$

Agora, usando este resultado, vamos provar uma relação que vai ser de muita utilidade, no que segue, e que nos diz que $\Gamma(z)$ não tem zeros. Para este fim, vamos usar o seguinte lema.

Lema 2.4. Para $y \in (0, 1)$, temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{-y}}{u+1} du = \frac{\pi}{\sin \pi y}.$$

Demonstração: Considere o conjunto $G = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \arg(z) \in (0, 2\pi)\}$, e o ramo do logaritmo seguinte

$$\log(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$$

onde $\theta \in (0, 2\pi)$. Logo, para $z \in G$ seja $f(z) := e^{-y \log z}$. Assim f é um ramo da função exponencial z^{-y} . Agora, considere em $\mathbb{C}$ o caminho dado na Fig. 2.1,

Figura 2.1: Caminho γ usado na integral da Eq. (2.8).

onde $0 < r < 1 < R$. Assim, temos que se $\gamma := C_R + L_2 + C_r + L_1$. Como γ é homotópica a zero e desde que $\lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{f(z)}{z+1} = e^{-\pi i y}$, temos que $\text{Res}\left(\frac{f(z)}{z+1}, -1\right) = e^{-\pi i y}$. Assim, pelo Teorema dos resíduos temos

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z+1} dz = 2\pi i e^{-\pi i y}. \quad (2.8)$$

Agora observemos o que acontece com as integrais $\int_{L_1} \frac{f(z)}{z+1} dz$ e $\int_{L_2} \frac{f(z)}{z+1} dz$:

$$\int_{L_1} \frac{f(z)}{z+1} dz = \int_r^R \frac{f(te^{i\alpha})}{te^{i\alpha} + 1} e^{i\alpha} dt, \quad (2.9)$$

consideremos $g : [r, R] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$g(t, \alpha) = \left| \frac{f(te^{i\alpha})}{te^{i\alpha} + 1} e^{i\alpha} - \frac{t^{-y}}{t+1} \right|.$$

É claro que $g(t, 0) = 0$, para qualquer $t \in [r, R]$. Como $[r, R] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ é compacto, então g é uniformemente contínua. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ de modo que se $(t - t')^2 + (\alpha - \alpha')^2 < \delta_0^2$

$$\Rightarrow |g(t, \alpha) - g(t', \alpha')| < \frac{\varepsilon}{R}.$$

Em particular, se $t' = t$ e $\alpha' = 0$, temos

$$\begin{aligned} g(t, \alpha) &= |g(t, \alpha)| < \frac{\varepsilon}{R}, \quad \forall \alpha < \delta_0 \\ \Rightarrow \int_r^R g(t, \alpha) dt &\leq \frac{\varepsilon(R-r)}{R} < \varepsilon, \quad \forall \alpha < \delta_0 \\ \Rightarrow \left| \int_r^R \frac{f(te^{i\alpha})}{te^{i\alpha} + 1} e^{i\alpha} dt - \int_r^R \frac{t^{-y}}{t+1} dt \right| &< \varepsilon, \quad \forall \alpha < \delta_0 \\ \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{L_1} \frac{f(z)}{z+1} dz &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_r^R \frac{f(te^{i\alpha})}{te^{i\alpha} + 1} e^{i\alpha} dt = \int_r^R \frac{t^{-y}}{t+1} dt. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Similarmente, como $\log(\bar{z}) = \overline{\log(z)} + 2\pi i$, então

$$\begin{aligned} \int_{L_2} \frac{f(z)}{z+1} dz &= \int_R^r \frac{f(te^{-i\alpha})}{te^{-i\alpha} + 1} e^{-i\alpha} dt = \int_R^r \frac{f(\overline{te^{i\alpha}})}{te^{-i\alpha} + 1} e^{-i\alpha} dt = \int_R^r \frac{e^{-y \log(\overline{te^{i\alpha}})}}{te^{-i\alpha} + 1} e^{-i\alpha} dt \\ &= \int_R^r \frac{e^{-y(\log(te^{i\alpha}) + 2\pi i)}}{te^{-i\alpha} + 1} e^{-i\alpha} dt = -e^{-2\pi y i} \int_r^R \frac{e^{-y(\log(te^{i\alpha}))}}{te^{-i\alpha} + 1} e^{-i\alpha} dt \\ \Rightarrow \int_{L_2} \frac{f(z)}{z+1} dz &= -e^{-2\pi y i} \int_r^R \frac{e^{-y(\log(te^{i\alpha}))}}{te^{-i\alpha} + 1} e^{-i\alpha} dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Semelhante ao caso anterior, consideremos $h : [r, R] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$h(t, \alpha) = \left| \frac{e^{-y(\log(te^{i\alpha}))}}{te^{-i\alpha} + 1} e^{-i\alpha} - \frac{t^{-y}}{t+1} \right|.$$

Ainda, como no caso anterior, h é uniformemente contínua e $h(t, 0) = 0$ para qualquer $t \in [r, R]$. Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$ de modo que

$$h(t, \alpha) < \frac{\varepsilon}{R}, \quad \forall \alpha < \delta_1 \Rightarrow \int_r^R h(t, \alpha) dt < \varepsilon, \quad \forall \alpha < \delta_1,$$

e, pela definição de limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{L_2} \frac{f(z)}{z+1} dz = -e^{-2\pi yi} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_r^R \frac{e^{-y(\log(te^{i\alpha}))}}{te^{-i\alpha} + 1} e^{-i\alpha} dt \right) = -e^{-2\pi yi} \int_r^R \frac{t^{-y}}{t+1} dt. \quad (2.12)$$

Nós estimamos agora as integrais $\int_{C_R} \frac{f(z)}{z+1} dz$ e $\int_{C_r} \frac{f(z)}{z+1} dz$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{z+1} \right| &\leq \frac{|z|^{-y}}{|z+1|} \leq \frac{|z|^{-y}}{|1-|z||} \\ \Rightarrow \left| \int_{C_r} \frac{f(z)}{z+1} dz \right| &\leq \frac{2\pi r^{1-y}}{1-r} \quad \text{e} \quad \left| \int_{C_R} \frac{f(z)}{z+1} dz \right| \leq \frac{2\pi R^{1-y}}{R-1} \\ \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{f(z)}{z+1} dz &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z+1} dz = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Agora, da equação (2.8), temos

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \frac{f(z)}{z+1} dz + \int_{L_2} \frac{f(z)}{z+1} dz + \int_{C_r} \frac{f(z)}{z+1} dz + \int_{L_1} \frac{f(z)}{z+1} dz &= \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z+1} dz = 2\pi i e^{-i\pi y} \\ \Rightarrow \int_{C_R} \frac{f(z)}{z+1} dz + \int_{C_r} \frac{f(z)}{z+1} dz &= 2\pi i e^{-i\pi y} - \left(\int_{L_2} \frac{f(z)}{z+1} dz + \int_{L_1} \frac{f(z)}{z+1} dz \right), \end{aligned}$$

então, de (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13) obtemos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\int_{C_R} \frac{f(z)}{z+1} dz + \int_{C_r} \frac{f(z)}{z+1} dz \right) = 2\pi i e^{-i\pi y} - (1 - e^{-2\pi yi}) \int_r^R \frac{t^{-y}}{t+1} dt.$$

Logo, pela definição de limite, para qualquer $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que, se $0 < \alpha < \delta$,

$$\Rightarrow \left| 2\pi i e^{-i\pi y} - (1 - e^{-2\pi yi}) \int_r^R \frac{t^{-y}}{t+1} dt - \left(\int_{C_R} \frac{f(z)}{z+1} dz + \int_{C_r} \frac{f(z)}{z+1} dz \right) \right| < \frac{\eta}{2}.$$

Tomando os limites $R \rightarrow +\infty$ e $r \rightarrow 0$, obtemos

$$\left| 2\pi i e^{-i\pi y} - (1 - e^{-2\pi yi}) \int_0^{+\infty} \frac{t^{-y}}{t+1} dt \right| \leq \frac{\eta}{2} < \eta.$$

Finalmente, como $\eta > 0$ é arbitrário, segue que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{-y}}{t+1} dt = \frac{2\pi i e^{-\pi i y}}{1 - e^{-2\pi i y}} = \frac{\pi}{\sin(\pi y)}.$$

□

Para concluir, conforme foi mencionado antes do Lema 2.4, que $\Gamma(z)$ não possui zeros, estabelecemos a seguinte proposição.

Proposição 2.5. *Para qualquer $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ temos*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Demonstração: Como $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{u+1} du$, para qualquer $x \in (0, 1)$, então pelo lema anterior

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi(1-x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad x \in (0, 1).$$

Além disso, como $(0, 1)$ tem pontos limite em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, então

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

□

Assim, podemos estabelecer agora o teorema que segue.

Teorema 2.6 . *A função $\Gamma(z)$ não tem zeros.*

Demonstração: Pela proposição anterior, para qualquer $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, temos que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Então $\Gamma(z)$ não tem zeros em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, assim os únicos zeros possíveis de $\Gamma(z)$ só podem estar em $\mathbb{Z}$. Mas $\Gamma(z)$ tem polos em $0, -1, -2, \dots$ e $\Gamma(n) = (n-1)!$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Em consequência, $\Gamma(z)$ não tem zeros. □

2.2 A Função Zeta de Riemann

Nesta seção, vamos introduzir a função zeta de Riemann que é o tema central do nosso trabalho. Vamos também fornecer algumas de suas propriedades. Uma delas, o *Produto de Euler* dado no Teorema 2.7, adverte-nos da sua relação com a teoria dos números.

A função Zeta de Riemann é definida como a função $\zeta : \mathbb{H}(1, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}. \quad (2.14)$$

Para ver que esta definição é boa, é suficiente provar que para qualquer $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} < \infty$. Mais geralmente, vamos provar que a série que define $\zeta(s)$ converge absolutamente em $\mathbb{H}(1, +\infty)$. Além disso, mostraremos que $\zeta(s) \in H(\mathbb{H}(1, +\infty))$.

De fato, primeiro vamos provar que a série que define $\zeta(s)$ converge absolutamente em $\mathbb{H}(1, +\infty)$. Seja $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, logo $1 < \sigma$. Como $n^s = n^{\sigma+it} = n^\sigma n^{it} = n^\sigma e^{it \log n}$, temos que para qualquer $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^m \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^\sigma}.$$

Agora consideremos $s = \sigma + it$ fixo em $\mathbb{H}(1, +\infty)$ e definimos $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, do seguinte modo $f(x) = \frac{1}{x^\sigma}$. Claramente, f é decrescente e contínua. Logo, usando o critério da integral, para a série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\sigma}$, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^\sigma} du = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{u^\sigma} du = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{1}{1-\sigma} = \frac{1}{\sigma-1} < \infty.$$

Então, para qualquer $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, a soma $\sum_{n \geq 1} \left| \frac{1}{n^s} \right|$ é convergente, logo $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge absolutamente para todo $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$.

Agora, provaremos que $\zeta(s)$ é uma função analítica em $\mathbb{H}(1, +\infty)$. Para isto, basta provar que a série que define $\zeta(s)$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{H}(1, +\infty)$. Para tal, escrevemos $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} g_n(s)$, onde $\{g_n(s) = \frac{1}{n^s}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq H(\mathbb{H}(1, +\infty))$. Seja $A \subset \mathbb{H}(1, +\infty)$, compacto. Como A é compacto, existe $\sigma_0 > 0$ tal que, para qualquer $s = \sigma + it \in A$, temos que $1 < \sigma_0 \leq \sigma$, e então

$$\left| \frac{1}{n^s} \right| = \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}},$$

para qualquer $s \in A$. Como vimos na demonstração de convergência absoluta, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\sigma_0}} < \infty$. Então, pelo teste de Weierstrass $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente em A e, consequentemente, $\zeta(s)$ é analítica em $\mathbb{H}(1, +\infty)$.

Vamos agora mostrar o primeiro resultado importante envolvendo $\zeta(s)$.

Teorema 2.7 (Produto de Euler). *Para $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(1, +\infty)$. Temos*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

Demonstração: Seja $X \in \mathbb{N}$, com $X \geq 2$, e consideremos a função

$$\zeta_X(s) := \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq X}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}.$$

Observemos que, como $\left| \frac{1}{p^s} \right| = \frac{1}{p^\sigma} < 1$, vale

$$\left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{p^{ks}}.$$

Assim, a convergência da série no lado direito é absoluta. Logo, se $p_1, p_2, \dots, p_m \in \mathbb{P}$, são tais que $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_m \leq X$, então

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq X}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} = \left(\sum_{k_1 \geq 0} \frac{1}{p_1^{k_1 s}} \right) \left(\sum_{k_2 \geq 0} \frac{1}{p_2^{k_2 s}} \right) \cdots \left(\sum_{k_m \geq 0} \frac{1}{p_m^{k_m s}} \right) = \sum_{k_1, \dots, k_m \geq 0} \frac{1}{(p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m})^s}.$$

Agora, notemos que a série múltipla acima não tem termos repetidos, pois, se

$$\frac{1}{(p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m})^s} = \frac{1}{(p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m})^s} \Rightarrow p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m} = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m}.$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, concluímos que $k_1 = r_1, \dots, k_m = r_m$. Além disso, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $n \leq X$, existem $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}$ tais que $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$. Como esta decomposição é única temos que

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq X}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1} = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + \sum'_{n > X} \frac{1}{n^s},$$

onde $\prime$ denota a soma de todos os números naturais maiores que X , de tal forma que seus divisores primos são $\leq X$. Agora, concentremo-nos nesta última soma. Temos

$$\left| \sum'_{n>X} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum'_{n>X} \frac{1}{n^\sigma} < \sum_{n>X} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Novamente, consideremos $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \frac{1}{x^\sigma}$. Assim, dado $M \in \mathbb{N}$ com $M \geq X$, consideremos a partição $Q = \{X < X+1 < \dots < M\}$ de $[X, M]$. Com isso, considerando a soma inferior $s(f, Q)$ de f em relação a Q , podemos escrever

$$\begin{aligned} \underbrace{s(f, Q)}_{f(X+1)+f(X+2)+\dots+f(M)=\sum'_{n>X} \frac{1}{n^\sigma}} &\leq \int_X^M f(u)du = \int_X^M \frac{1}{u^\sigma} du \leq \int_X^M \frac{1}{u^\sigma} du + \frac{1}{X^\sigma} \\ &\Rightarrow \sum'_{n>X} \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{u^{1-\sigma}}{1-\sigma} \Big|_X^M + \frac{1}{X^\sigma} \\ &\Rightarrow \sum'_{n>X} \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{X^{1-\sigma}}{\sigma-1} + \frac{1}{X^\sigma} \leq \frac{1}{X^{\sigma-1}} + \frac{X^{1-\sigma}}{\sigma-1} = \frac{\sigma X^{1-\sigma}}{\sigma-1} \\ &\Rightarrow \left| \sum'_{n>X} \frac{1}{n^s} \right| < \frac{\sigma X^{1-\sigma}}{\sigma-1}. \end{aligned}$$

Assim, $X^{1-\sigma} \rightarrow 0$, quando $X \rightarrow +\infty$, pois $\sigma > 1$. Isso implica que $\sum'_{n>X} \frac{1}{n^s} \rightarrow 0$, quando $X \rightarrow +\infty$. Consequentemente,

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq X}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n \leq X} \frac{1}{n^s} + \sum'_{n>X} \frac{1}{n^s}$$

e, quando $X \rightarrow +\infty$, obtemos o resultado desejado

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}.$$

□

Corolário 2.8. *A função $\zeta(s)$ não tem zeros no conjunto $\mathbb{H}(1, +\infty)$.*

Demonstração: Admitamos que existe $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0 \in \mathbb{H}(1, +\infty)$ tal que $\zeta(s_0) = 0$. Logo para qualquer $p \in \mathbb{P}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right)^{-1} \right| &= \left| 1 + \sum_{j \geq 1} \frac{1}{p^{s_0 j}} \right| \geq 1 - \sum_{j \geq 1} \left| \frac{1}{p^{s_0 j}} \right| = 1 - \sum_{j \geq 1} \frac{1}{p^{\sigma_0 j}} = 1 - \frac{1}{p^{\sigma_0} - 1} \\ &\Rightarrow \left| \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}}\right)^{-1} \right| \geq 1 - \frac{1}{p^{\sigma_0} - 1}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, se $e^{10/\sigma_0} < p$, então $\frac{1}{p^{\sigma_0-1}} < \frac{1}{e^{10-1}} < \frac{1}{10}$, portanto, $\frac{1}{p^{\sigma_0-1}} \in (0, 1/10)$. Logo consideremos a desigualdade $e^{-2x} < 1 - x$, para $x \in (0, 1/10)$, que pode ser comprovada graficamente ou pelo fato seguinte:

Da Desigualdade (2.49), temos que, para qualquer $w \in \mathbb{C}$, com $|w| \leq 1/2$,

$$e^{-2|w|^2} \leq |(1-w)e^w|.$$

Em particular, se $x \in (0, 1/2)$,

$$e^{-2x^2} \leq (1-x)e^x,$$

$$\Rightarrow e^{-2x^2-x} \leq 1-x.$$

Mas, $e^{-2x} < e^{-2x^2-x}$, para $x \in (0, 1/2)$. Em particular para $x \in (0, 1/10)$ também a desigualdade é cumprida.

Assim, como $\frac{1}{p^{\sigma_0-1}} \in (0, 1/10)$ então $e^{-\frac{2}{p^{\sigma_0-1}}} < 1 - \frac{1}{p^{\sigma_0-1}}$. Logo, substituindo em (2.15), temos

$$\begin{aligned} & \left| \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}} \right)^{-1} \right| > e^{-\frac{2}{p^{\sigma_0-1}}} \\ \Rightarrow & \left| \prod_{p \in \mathbb{P}: p > e^{10/\sigma_0}} \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}} \right)^{-1} \right| \geq e^{-2 \left(\sum_{p \in \mathbb{P}: p > e^{10/\sigma_0}} \frac{1}{p^{\sigma_0-1}} \right)} > 0 \\ \Rightarrow & \prod_{p \in \mathbb{P}: p > e^{10/\sigma_0}} \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}} \right)^{-1} \neq 0, \end{aligned}$$

o que implica

$$\zeta(s_0) = \left(\prod_{p \in \mathbb{P}: p \leq e^{10/\sigma_0}} \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}} \right)^{-1} \right) \left(\prod_{p \in \mathbb{P}: p > e^{10/\sigma_0}} \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}} \right)^{-1} \right) \neq 0,$$

que é uma contradição. □

Observação 2.9. *Do Produto de Euler, as duas seguintes observações surgem:*

1. $\zeta(s)$ pode ser definida, em alternativa, usando o Produto de Euler.
2. O Produto de Euler mostra a ligação da função zeta de Riemann com os números primos.

Agora vamos ver que $\zeta(s)$ pode ser estendida para uma função meromorfa em $\mathbb{C}$. Para isso, vamos usar o lema seguinte.

Lema 2.10. *Para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, temos*

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

Demonstração: Para qualquer $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, temos

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Logo, fazendo a mudança de variável $t = nx$, onde $n \in \mathbb{N}$, obtemos

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} (nx)^{s-1} e^{-nx} n dx = n^s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx.$$

Então,

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \frac{1}{n^s} &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx \Rightarrow \Gamma(s) \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-nx} dx \\ \Rightarrow \Gamma(s) \zeta(s) &= \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left(\sum_{n \geq 1} e^{-nx} \right) dx = \int_0^{+\infty} x^{s-1} \left(\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx. \end{aligned}$$

□

Então, nós estamos prontos para provar que $\zeta(s)$ admite uma extensão meromorfa no plano complexo.

Teorema 2.11. *A função $\zeta(s)$ admite a uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com polo simples em $s = 1$ e com $\text{Res}(\zeta, 1) = 1$.*

Demonstração: Pelo Lema 2.10, temos que, para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$,

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

Então,

$$\Gamma(s) \zeta(s) = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \quad (2.16)$$

Vemos que a segunda integral desta última igualdade converge para qualquer $s \in \mathbb{C}$. De fato, se $\sigma = \Re(s)$,

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \right| \leq \int_1^{+\infty} \left| \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \right| dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^{\sigma-1}}{e^t - 1} dt.$$

Observamos que $\frac{t^n}{n!} \leq \sum_{k \geq 1} \frac{t^k}{k!} = e^t - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } t \in [1, +\infty)$. Assim, para $n_s \in \mathbb{N}$ de tal forma que $\sigma - n_s < 0$, como $\frac{t^{n_s}}{n_s!} \leq e^t - 1$, temos

$$\frac{t^{\sigma-1}}{e^t - 1} \leq (n_s!) t^{\sigma-1-n_s} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{t^{\sigma-1}}{e^t - 1} dt \leq n_s! \int_1^{+\infty} t^{\sigma-1-n_s} dt = \frac{n_s!}{n_s - \sigma}.$$

Com isso, temos que, para qualquer $s \in \mathbb{C}$, a integral $\int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$ converge e portanto representa uma função inteira a que denotaremos por $\varphi(s) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$. Por outro lado, para a primeira integral do lado direito de (2.16), consideremos a função $h(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ que tem polo simples em $z = 0$. Ademais, $\text{Res}(h, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$, então

$$h(z) = \frac{1}{z} + G(z)$$

onde G é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com polos de primeira ordem em $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Portanto,

$$h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} c_n z^n, \quad |z| < 2\pi.$$

Mas, como $B(0; 2\pi)$ é limitada, então existe $M > 0$ que satisfaz $|G(z)| < M$, $\forall z \in B(0; 2\pi)$. Então, por estimativas de Cauchy $|G^{(n)}(0)| \leq \frac{Mn!}{(2\pi)^n} < \frac{Mn!}{2^n}$, logo $|c_n| = \left| \frac{G^{(n)}(0)}{n!} \right| < \frac{M}{2^n}$. Finalmente, como $\sum_{n \geq 0} \frac{M}{2^n} < \infty$, segue que $\sum_{n \geq 0} |c_n| < \infty$. Logo para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, como $h(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ converge uniformemente em $[0, 1]$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt &= \int_0^1 t^{s-1} h(t) dt = \int_0^1 t^{s-1} \left(\frac{1}{t} + \sum_{n \geq 0} c_n t^n \right) dt \\ \Rightarrow \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt &= \int_0^1 t^{s-2} dt + \sum_{n \geq 0} c_n \int_0^1 t^{s-1+n} dt = \frac{1}{s-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{s+n}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

E, substituindo $\varphi(s)$ e (2.17) em (2.16), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \frac{1}{s-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{s+n} + \varphi(s), \quad s \in \mathbb{H}(1, +\infty) \\ \Rightarrow \Gamma(s)\zeta(s) &= \frac{1}{s-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{s+n} + \varphi(s), \quad s \in \mathbb{H}(1, +\infty). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Assim, pelo Lema 2.1, esta função pode ser estendida a uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com polo simples em $s = 1$ e/ou polos simples em $s = 0, -1, -2, \dots$ dependendo se $c_n \neq 0$ ou $c_n = 0$. Agora, como $\Gamma(s)$ não tem zeros então $\frac{1}{\Gamma(s)} \in H(\mathbb{C})$, logo de (2.18) para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$ temos

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(s)\zeta(s)}{\Gamma(s)} = \frac{1}{\Gamma(s)} \left(\frac{1}{s-1} + \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{s+n} + \varphi(s) \right).$$

Agora, considerando as extensões meromorfas de $\Gamma(s)\zeta(s)$ e $\Gamma(s)$, temos que, como $\Gamma(1) = 0! = 1$, então $\zeta(s)$ tem um polo simple em $s = 1$ e $\text{Res}(\zeta, 1) = 1$. Além disso, visto que $\Gamma(s)$ tem polos simples em $s = 0, -1, -2, \dots$ então a função $\frac{1}{\Gamma(s)}$ tem zeros simples nestes pontos, assim $\zeta(s)$ tem singularidades removíveis em $s = 0, -1, -2, \dots$. Portanto, $\zeta(s)$ estende-se a uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com polo simples em $s = 1$. $\square$

Análogo ao que foi feito com $\Gamma(s)$ na seção anterior, no que segue, denotamos por $\zeta(s)$ a extensão meromorfa da função $\zeta(s)$ definida em (2.14).

Agora vamos continuar com um resultado que no próximo capítulo vai nos ajudar a analisar os zeros reais de $\zeta(s)$.

Teorema 2.12. *Para qualquer $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, temos*

$$\zeta(s) = \pi^{s-1} 2^s \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s).$$

Demonstração: Consideramos o caminho C dado na Fig. 2.2 abaixo, e, para $s \in \mathbb{C}$, fixo, consideremos a seguinte integral

$$\int_C \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw.$$

Figura 2.2: Caminho C .

Pelo Teorema de Cauchy, é claro que a integral é independente de $0 < \varepsilon < 2\pi$ e da distância das linhas horizontais em relação ao eixo real. Por essa razão, faremos o cálculo desta integral no limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e quando a distância entre as linhas horizontais em relação ao eixo real tende a zero. Assim considerando novamente o ramo do logaritmo $\log(w) = \log|w| + i \arg(w)$, $\arg(w) \in (0, 2\pi)$, temos

$$|w^{s-1}| = \frac{|w|^{\Re(s)-1}}{e^{\arg(w)\Im(s)}}.$$

Como $\arg(w) \in (0, 2\pi)$, então existe $M > 0$ de modo que

$$|w^{s-1}| \leq M|w|^{\Re(s)-1}, \quad (2.19)$$

para qualquer $w \in \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, \arg(z) \in (0, 2\pi)\}$. Agora consideremos a aplicação $\psi(w) = \frac{1}{e^w - 1}$ que claramente tem um polo simples em $w = 0$, então $g(w) = \frac{w}{e^w - 1}$ tem uma singularidade removível em $w = 0$. Assim, podemos estender g de modo que $g(0) := \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{e^w - 1} = 1$. Então, $\frac{1}{g(w)} = \frac{e^w - 1}{w}$, para $w \neq 0$. Logo, como $\frac{1}{g}$ é contínua em $w = 0$, temos, para w suficientemente pequeno e $|w| \neq 0$

$$1 - \left| \frac{1}{g(w)} \right| \leq \left| \frac{1}{g(0)} - \frac{1}{g(w)} \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \left| \frac{e^w - 1}{w} \right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|e^w - 1|} \leq \frac{2}{|w|}.$$

Assim, temos que

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{|e^w - 1|} dw \leq 4\pi,$$

onde C_ε é a porção de circunferência, de raio $\varepsilon > 0$, que faz parte de C . Assim, de (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw \right| &\leq M\varepsilon^{\Re(s)-1} \int_{C_\varepsilon} \frac{1}{|e^w - 1|} dw \leq 4\pi M\varepsilon^{\Re(s)-1} \\ &\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Agora, olhemos para as integrais sobre os caminhos horizontais:

$$\int_{L_1} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = \int_{\varepsilon \cos \theta}^R \frac{(t + (\varepsilon \sin \theta)i)^{s-1}}{e^{t+(\varepsilon \sin \theta)i} - 1} dt.$$

Análogo à demonstração do Lema 2.4 consideremos $g : [\varepsilon, R] \times [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, definido como

$$g(t, \theta) = \left| \frac{(t + (\varepsilon \sin \theta)i)^{s-1}}{e^{t+(\varepsilon \sin \theta)i} - 1} - \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} \right|$$

claramente $g(t, 0) = 0$, $\forall t \in [\varepsilon, R]$. Como g é uniformemente contínua, então dado $\eta > 0$, existe $\delta > 0$ de modo que

$$\begin{aligned} g(t, \theta) < \frac{\eta}{R}, \quad \forall \theta < \delta &\Rightarrow \int_{\varepsilon \cos \theta}^R g(t, \theta) dt \leq \frac{\eta}{R}(R - \varepsilon \cos \theta) < \eta \\ &\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \cos \theta}^R g(t, \theta) dt = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{L_1} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = \int_0^R \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Agora como $\log(\bar{w}) = \overline{\log(w)} + 2\pi i$, então temos que

$$\begin{aligned} \int_{L_2} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw &= \int_R^{\varepsilon \cos \theta} \frac{(t - (\varepsilon \sin \theta)i)^{s-1}}{e^{t-(\varepsilon \sin \theta)i} - 1} dt = \int_R^{\varepsilon \cos \theta} \frac{e^{\log(\overline{t+(\varepsilon \sin \theta)i})(s-1)}}{e^{t-(\varepsilon \sin \theta)i} - 1} dt \\ &= \int_R^{\varepsilon \cos \theta} \frac{e^{(\overline{\log(t+(\varepsilon \sin \theta)i)} + 2\pi i)(s-1)}}{e^{t-(\varepsilon \sin \theta)i} - 1} dt = -e^{2\pi i(s-1)} \int_{\varepsilon \cos \theta}^R \frac{e^{(\log(t+(\varepsilon \sin \theta)i))(s-1)}}{e^{t-(\varepsilon \sin \theta)i} - 1} dt. \end{aligned}$$

Assim, pelos mesmos critérios usados no caminho L_1 , temos que

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{L_2} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = -e^{2\pi i(s-1)} \int_0^R \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \quad (2.22)$$

Logo tomando os limites $R \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$ e de (2.20), (2.21), (2.22) temos

$$\int_C \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt - e^{2\pi i(s-1)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = (1 - e^{2\pi i(s-1)}) \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

$$\Rightarrow \int_C \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = -2ie^{\pi i(s-1)} \sin \pi(s-1) \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

Agora, se $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$ pelo Lema 2.10 temos que $\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$, então

$$\int_C \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = 2ie^{\pi i(s-1)} \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s), \quad \forall s \in \mathbb{H}(1, +\infty). \quad (2.23)$$

Logo, como $\int_C \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw$ tem sentido para qualquer $s \in \mathbb{C}$, então, da igualdade (2.23) considerando continuação analítica, temos que

$$\int_C \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = 2ie^{\pi i(s-1)} \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s), \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (2.24)$$

Agora, vamos calcular a mesma integral usando o Teorema de Resíduos no caminho β descrito na Fig. 2.3. Seja $s \in \mathbb{H}(-\infty, 0)$ fixo e consideremos a função $F(w) = \frac{w^{s-1}}{e^w - 1}$. Pelo

Figura 2.3: Caminho β .

Teorema dos Resíduos,

$$\oint_{\beta} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = 2\pi i \left(\sum_{n=1}^m \text{Res}(F, 2n\pi i) + \sum_{n=1}^m \text{Res}(F, -2n\pi i) \right), \quad (2.25)$$

notemos que $2k\pi i$ é um polo simples de F , $\forall k \in \mathbb{Z}$, pois $\lim_{w \rightarrow 2k\pi i} (w - 2k\pi i)[(w - 2k\pi i)F(w)] = 0$. Assim, temos que:

- Se $k > 0$,

$$\text{Res}(F, 2k\pi i) = \left(2k\pi e^{\frac{\pi}{2}i} \right)^{s-1} = (2k\pi)^{s-1} e^{\frac{\pi}{2}(s-1)i},$$

- Se $-k < 0$,

$$\text{Res}(F, -2k\pi i) = \left(2k\pi e^{\frac{3\pi}{2}i}\right)^{s-1} = (2k\pi)^{s-1} e^{\frac{3\pi}{2}(s-1)i}.$$

Então, calculando o lado direito de (2.25), obtemos

$$\begin{aligned} \oint_{\beta} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw &= 2\pi i \sum_{n=1}^m (2n\pi)^{s-1} (e^{\frac{\pi}{2}(s-1)i} + e^{\frac{3\pi}{2}(s-1)i}) \\ &= 2\pi i \sum_{n=1}^m 2^{s-1} n^{s-1} \pi^{s-1} e^{\pi(s-1)i} (e^{-\frac{\pi}{2}(s-1)i} + e^{\frac{\pi}{2}(s-1)i}) \\ &= -2^{s+1} i \pi^s e^{\pi i s} \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}(s-1)i} + e^{\frac{\pi}{2}(s-1)i}}{2} \right) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{1-s}} \\ &= -2^{s+1} i \pi^s e^{\pi i s} \cos\left(\frac{\pi}{2}(s-1)\right) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{1-s}} = -2^{s+1} i \pi^s e^{\pi i s} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{1-s}} \\ &\Rightarrow \oint_{\beta} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = -2^{s+1} i \pi^s e^{\pi i s} \sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^{1-s}}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Agora, observemos que, se w pertence ao lado vertical direito do quadrado β , então

$$\left| \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} \right| = \frac{|w^{s-1}|}{|e^w - 1|} = \frac{e^{\log|w|(\Re(s)-1) - \arg(w)\Im(s)}}{|e^w - 1|} = \left(\frac{1}{e^{\arg(w)\Im(s)}} \right) \left(\frac{|w|^{\Re(s)-1}}{|e^w - 1|} \right).$$

Logo, como $\arg(w) \in (0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$ (limitado), então existe $M > 0$ tal que

$$\left| \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} \right| \leq M \frac{|w|^{\Re(s)-1}}{|e^w - 1|}.$$

Além disso,

$$|e^{\Re(w)} - 1| = ||e^w| - 1| \leq |e^w - 1| \Rightarrow \frac{1}{|e^w - 1|} \leq \frac{1}{|e^{\Re(w)} - 1|}.$$

Assim, temos

$$\left| \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} \right| \leq M \frac{|w|^{\Re(s)-1}}{|e^{\Re(w)} - 1|} \leq M \frac{|\Re(w)|^{\Re(s)-1}}{|e^{\Re(w)} - 1|}.$$

Logo, se denotamos por L_{VD} o lado direito vertical do quadrado, como a parte real de w é fixo deste lado, temos o seguinte

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_{VD}} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw \right| &\leq M \frac{|\Re(w)|^{\Re(s)-1}}{|e^{\Re(w)} - 1|} \ell(L_{VD}) = M \frac{|\Re(w)|^{\Re(s)-1}}{|e^{\Re(w)} - 1|} (2|\Re(w)|) = \frac{2M|\Re(w)|^{\Re(s)}}{|e^{\Re(w)} - 1|} \\ &\Rightarrow \lim_{\Re(w) \rightarrow +\infty} \int_{L_{VD}} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = 0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde ℓ denota o comprimento. Analogamente, no lado esquerdo vertical L_{VE} temos a mesma estimativa, ou seja existe M' de modo tal que

$$\left| \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} \right| \leq M' \frac{|w|^{\Re(s)-1}}{|e^w - 1|}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left| \int_{L_{VE}} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw \right| \leq \frac{2M' |\Re(w)|^{\Re(s)}}{|e^{\Re(w)} - 1|} \\
&\Rightarrow \lim_{\Re(w) \rightarrow -\infty} \int_{L_{VE}} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = 0.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Agora, vejamos o que acontece nos lados superior e inferior do quadrado, novamente temos que existe $M'' > 0$ tal que

$$\left| \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} \right| \leq M'' \frac{|w|^{\Re(s)-1}}{e^w - 1} \leq M'' \frac{|\Im(w)|^{\Re(s)-1}}{e^w - 1}.$$

Por outro lado, como em linhas horizontais $\lim_{\Re(w) \rightarrow +\infty} \frac{1}{|e^w - 1|} = 0$ e $\lim_{\Re(w) \rightarrow -\infty} \frac{1}{|e^w - 1|} = 1$, então existe $A > 0$ de modo que

$$\frac{1}{|e^w - 1|} \leq A$$

nos lados superior e inferior de qualquer quadrado. Então,

$$\left| \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} \right| \leq M'' A |\Im(w)|^{\Re(s)-1}$$

nos lados superior e inferior de β . Logo, como $\Re(s) < 0$ e o comprimento para ambos lados é descrito por $2|\Im(w)|$, se denotamos como L_S e L_I os lados superior e inferior, temos

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{L_S} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw \right| \leq 2M'' A |\Im(w)|^{\Re(s)} \quad \text{e} \quad \left| \int_{L_I} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw \right| \leq 2M'' A |\Im(w)|^{\Re(s)} \\
&\Rightarrow \lim_{\Im(w) \rightarrow +\infty} \int_{L_S} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = \lim_{\Im(w) \rightarrow -\infty} \int_{L_I} \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Assim, de (2.29), (2.28) e (2.27), considerando os lados de β tendendo ao infinito, e de (2.26) com (2.24), temos

$$\begin{aligned}
2ie^{\pi i(s-1)} \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s) &= \int_C \frac{w^{s-1}}{e^w - 1} dw = -2^{s+1} i \pi^s e^{\pi i s} \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{1-s}} \\
&\Rightarrow 2ie^{\pi i(s-1)} \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s) = -2^{s+1} i \pi^s e^{\pi i s} \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \zeta(1-s) \\
&\Rightarrow \sin(\pi s) \Gamma(s) \zeta(s) = 2^s \pi^s \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \zeta(1-s) \\
&\Rightarrow 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} s\right) \Gamma(s) \zeta(s) = 2^s \pi^s \sin\left(\frac{\pi}{2} s\right) \zeta(1-s) \\
&\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} s\right) \Gamma(s) \zeta(s) = 2^{s-1} \pi^s \zeta(1-s), \quad \forall \Re(s) < 0 \text{ e } s \neq 0, -2, -4, -6, \dots
\end{aligned}$$

e como esta é uma igualdade entre funções meromorfas em $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} s\right) \Gamma(s) \zeta(s) = 2^{s-1} \pi^s \zeta(1-s), \quad \forall s \neq 0.$$

Fazendo a mudança s por $1-s$, temos

$$\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{\pi}{2} (1-s)\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) = 2^{-s} \pi^{1-s} \zeta(s) \\
&\Rightarrow \zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s), \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos a demonstração do Teorema 2.12. $\square$

2.3 Funções Inteiras de Ordem Um

Como vimos na seção anterior, $\zeta(s)$ não é uma função inteira. Mas, como veremos no próximo capítulo, está associada, algebricamente, a uma função inteira. Além disso, esta é uma função inteira de ordem um. Portanto, precisamos introduzir esta definição e desenvolver algumas propriedades em relação a seus zeros. Estas propriedades ajudam a relacionar alguns dos zeros de $\zeta(s)$ com a teoria analítica dos números e encontrar propriedades destes, por exemplo $\zeta(s)$ tem um número infinito enumerável de zeros não reais.

Para uma melhor compreensão desta seção, recomendamos que o leitor faça uma leitura prévia do Apêndice A, na seção de Notação Assintótica.

Definição 2.13. *Uma função inteira $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é de ordem um se*

$$|f(z)| = O_\epsilon(\exp(|z|^{1+\epsilon})),$$

para qualquer $\epsilon > 0$.

Lema 2.14. *Seja $g \in H(\mathbb{C})$ tal que $g(z) \neq 0$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, que verifica*

$$|g(z)| = \exp(O(|z|^{3/2}))$$

para qualquer $z \in \bigcup_{j \geq 1} \partial B(0; R_j)$, onde $\lim_{j \rightarrow +\infty} R_j = +\infty$. Então,

$$g(z) = \exp(Az + B),$$

para algumas constantes A, B .

Demonstração: Como $g(z) \neq 0$ para qualquer z , então existe $h \in H(\mathbb{C})$, tal que

$$g(z) = \exp(h(z)). \quad (2.30)$$

Também, como $|g(z)| = \exp(O(|z|^{3/2}))$, então $|h(z)| = O(|z|^{3/2})$. Agora, seja $z \in \mathbb{C}$. Logo, como $\lim_{j \rightarrow +\infty} R_j = +\infty$, temos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $z \in B(0; R_j)$. Então, pela fórmula integral de Cauchy, temos

$$\begin{aligned} h''(z) &= \frac{1}{\pi i} \int_{\partial B(0; R_j)} \frac{h(w)}{(w-z)^3} dw \\ \Rightarrow |h''(z)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\partial B(0; R_j)} |h(w)| |w-z|^{-3} dw. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Podemos escolher j suficientemente grande tal que $z \in B(0; R_j/2)$. Assim,

$$|z-w| \geq |w| - |z| \geq R_j - \frac{R_j}{2} = \frac{R_j}{2}. \quad (2.32)$$

Usando $|h(w)| = O(|w|^{3/2})$, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|h(w)| \leq M R_j^{3/2}. \quad (2.33)$$

Assim, de (2.32) e (2.33) em (2.31), temos

$$|h''(z)| \leq 16R_j^{-1/2}.$$

Logo, se $j \rightarrow +\infty$, temos $h''(z) = 0$ e como z é qualquer temos que $h(z) = Az + B$, para algumas constantes A, B . Finalmente, usando esse fato em (2.30), obtemos $g(z) = \exp(Az + B)$. $\square$

Teorema 2.15 (Fórmula de Jensen). *Sejam $R, \epsilon > 0$. Admitamos que f é analítica em $B(0; R + \epsilon)$, que $f(z) \neq 0$, para $R \leq |z| < R + \epsilon$ e $z = 0$, e que f tem zeros $z_1, \dots, z_m$ em $B(0; R)$ (contando com as multiplicidades respectivas). Então,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta = \log |f(0)| + \log \left(\frac{R^m}{|z_1| \dots |z_m|} \right).$$

Demonstração: A demonstração pode ser encontrada em [8]. $\square$

Corolário 2.16. *Seja f uma função inteira com $f(0) \neq 0$. Então,*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)| = \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr,$$

onde $n(r) := |\{z \in B(0; r) : f(z) = 0\}|$.

Demonstração: Pela Fórmula de Jensen, só temos que provar que $\int_0^R \frac{n(r)}{r} dr = \log \left(\frac{R^m}{|z_1| \dots |z_m|} \right)$. Para isso, ordenemos os zeros em relação a sua magnitude, isto é, $r_j = |z_j|$, $j = 1, \dots, m$ e $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m$. Por conveniência, seja $r_0 = 0$ e $r_{m+1} = R$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{n(r)}{r} dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{n(r)}{r} dr + \dots + \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{n(r)}{r} dr \\ &= \int_{r_0}^{r_1} \frac{0}{r} dr + \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr + \dots + \int_{r_m}^{r_{m+1}} \frac{m}{r} dr = \sum_{j=1}^m j \log \left(\frac{r_{j+1}}{r_j} \right) = \sum_{j=1}^m \log \left(\frac{r_{j+1}}{r_j} \right)^j \\ &= \log \prod_{j=1}^m \left(\frac{r_{j+1}}{r_j} \right)^j = \log \left(\frac{R^m}{r_1 \dots r_m} \right). \end{aligned}$$

$\square$

Agora passamos a provar uma propriedade importante das funções inteiras de ordem um, que será muito útil no próximo capítulo.

Teorema 2.17. *Seja f uma função inteira de ordem um. Então, para $X > 1$, temos*

(i)

$$\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq X}} |\rho|^{-1-\epsilon} \ll_{\epsilon} X^{-\epsilon/2},$$

para qualquer $\epsilon > 0$.

(ii)

$$\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} |\rho|^{-1-\epsilon} < \infty,$$

para qualquer $\epsilon > 0$.

(iii) f tem a seguinte representação:

$$f(z) = z^r e^{Az+B} \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho}.$$

Demonstração:

(i) Se $z = 0$ é um zero de multiplicidade r de f , então consideremos $g(z) = \frac{f(z)}{z^r}$, que é uma função inteira e verifica $g(0) \neq 0$. Além disso, como f é inteira de ordem um, temos que, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$|f(z)| \ll_{\epsilon} \exp |z|^{\epsilon+1}. \quad (2.34)$$

Logo, como $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|^r} = 0$, então existe $R > 0$ tal que

$$|z| > R \Rightarrow \frac{1}{|z|^r} < \epsilon. \quad (2.35)$$

Assim, de (2.34) e (2.35), temos que

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|^r} \ll_{\epsilon} \exp |z|^{1+\epsilon},$$

o que equivale a dizer que $|g(z)| = O_{\epsilon}(\exp(|z|^{1+\epsilon}))$. Portanto, g é uma função inteira de ordem um. Aplicando agora o Corolário 2.16, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(Re^{i\theta})| d\theta - \log |g(0)| \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(Re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(0)| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{g(Re^{i\theta})}{g(0)} \right| d\theta \\ &\Rightarrow \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| \frac{g(Re^{i\theta})}{g(0)} \right| d\theta. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mas, como $|g(Re^{i\theta})| \ll_{\epsilon} \exp |Re^{i\theta}|^{1+\epsilon} = \exp |R|^{1+\epsilon}$ então $\log |g(Re^{i\theta})| \ll_{\epsilon} |R|^{1+\epsilon}$ e como $\log |g(0)|$ é uma constante, então em (2.36) temos

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r} dr \ll_{\epsilon} R^{1+\epsilon} \quad (2.37)$$

para qualquer $\epsilon > 0$. Denotemos por S_R o número de zeros de f no anel $R \leq |z| < 2R$.

Assim, temos

$$S_R \leq n(2R) = \frac{1}{R} \int_{2R}^{3R} n(2R) dr \leq \frac{1}{R} \int_{2R}^{3R} n(r) dr \leq 3 \int_{2R}^{3R} \frac{n(r)}{r} dr$$

$$= 3 \left(\int_0^{3R} \frac{n(r)}{r} dr - \int_0^{2R} \frac{n(r)}{r} dr \right).$$

Mas, por (2.37), temos que

$$S_R \ll_{\epsilon} R^{1+\epsilon}. \quad (2.38)$$

Logo, se ρ é um zero de f tal que $|\rho| \geq X$, consideremos $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^j \leq |\rho| < 2^{j+1}$. Então, $X < 2^{j+1}$. Assim,

$$\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq X}} |\rho|^{-1-\epsilon} \leq \sum_{j \in \mathbb{N}: 2^{j+1} < X} 2^{-(1+\epsilon)j} S_{2^j}.$$

Mas, por (2.38), $S_{2^j} \ll_{\epsilon} 2^{j(1+\epsilon/2)}$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq X}} |\rho|^{-1-\epsilon} &\leq \sum_{j \in \mathbb{N}: 2^{j+1} < X} 2^{-(1+\epsilon)j} S_{2^j} \ll_{\epsilon} \sum_{j \in \mathbb{N}: 2^{j+1} < X} 2^{-(1+\epsilon)j} 2^{j(1+\epsilon/2)} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}: 2^{j+1} < X} 2^{-\epsilon j/2} = \frac{2^{-\epsilon k_0/2}}{1 - 2^{-\epsilon/2}}, \end{aligned}$$

onde k_0 é o menor número natural tal que $X < 2^{k_0+1}$. Logo, temos $2^{-\epsilon k_0/2} < 2^{\epsilon/2} X^{-\epsilon/2}$ e da última desigualdade segue que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq X}} |\rho|^{-1-\epsilon} &\ll_{\epsilon} \sum_{j \in \mathbb{N}: 2^{j+1} < X} 2^{-(1+\epsilon)j} 2^{j(1+\epsilon/2)} = \frac{2^{-\epsilon k_0/2}}{1 - 2^{-\epsilon/2}} < \frac{2^{\epsilon/2}}{1 - 2^{-\epsilon/2}} X^{-\epsilon/2} \\ &\Rightarrow \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq X}} |\rho|^{-1-\epsilon} \ll_{\epsilon} X^{-\epsilon/2}. \end{aligned}$$

- (ii) Sabemos, a partir do item anterior, que se $X > 1$ então $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq X}} |\rho|^{-1-\epsilon} < \infty$, para qualquer $\epsilon > 0$. Isto implica que $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| > 1}} |\rho|^{-1-\epsilon} < \infty$. Além disso, como f tem um número finito de zeros em $\overline{B}(0; 1)$, então a soma $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ 0 < |\rho| \leq 1}} |\rho|^{-1-\epsilon}$ é finita. Portanto, $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} |\rho|^{-1-\epsilon} < \infty$.

- (iii) Consideremos a função

$$F(z) := \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) e^{z/\rho}.$$

Para ver que $F \in H(\mathbb{C})$, só temos que provar que o produto converge uniformemente sobre qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Assim, tomando um ramo de logaritmo conveniente, isto é equivalente a provar que

$$\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) + \frac{z}{\rho} \right\}$$

converge uniformemente em qualquer subconjunto compacto. Então seja $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Logo, existe $R > 0$ tal que $K \subset B(0; R)$. Assim, para qualquer $z \in K$, temos que

$$\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) + \frac{z}{\rho} \right\} = \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| > 2R}} \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) + \frac{z}{\rho} \right\} + \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ 0 < |\rho| \leq 2R}} \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) + \frac{z}{\rho} \right\}.$$

A segunda soma do lado direito converge pois é uma soma com um número finito de termos. Assim, só temos que provar que a primeira soma converge. De fato, sabemos que

$$\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots, \quad |x| < 1,$$

o que implica que se $|x| \leq \frac{1}{2}$ então

$$|x + \log(1 - x)| = \left| \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots \right| \leq |x|^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = |x|^2. \quad (2.39)$$

Mas, como $|\rho| > 2R$ e $|z| \leq R$ então $\left| \frac{z}{\rho} \right| \leq \frac{1}{2}$ logo por (2.39) temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{\rho} + \log \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) \right| &\leq \left| \frac{z}{\rho} \right|^2 \leq \frac{R^2}{|\rho|^2} \\ \Rightarrow \sup_{|z| \leq R} \left| \frac{z}{\rho} + \log \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) \right| &\leq \frac{R^2}{|\rho|^2} \end{aligned}$$

e, como pelo item anterior, $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|^2} < \infty$, segue que $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| > 2R}} \sup_{|z| \leq R} \left| \frac{z}{\rho} + \log \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) \right| < \infty$. Portanto, $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| > 2R}} \left\{ \log \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) + \frac{z}{\rho} \right\}$ converge uniformemente sobre K . Então $F \in H(\mathbb{C})$.

Agora pela, definição de F , é claro que

$$g(z) := \frac{f(z)}{z^r F(z)}$$

é uma função inteira. Vamos continuar a usar o Lema 2.14 para provar que existem constantes A, B tais que $g(z) = \exp(Az + B)$. Para $j \in \mathbb{N}$, sabemos que, por (2.38), o número de zeros no anel $2^j \leq |z| < 2^{j+1}$ é $O(2^{j(1+\epsilon)})$. Portanto, existe $R \in [2^j, 2^{j+1})$ tal que, para qualquer $z \in \partial B(0; R)$, $|z - \rho| > 0$ para qualquer ρ zero de f . Assim, como $\frac{1}{R} \rightarrow 0$, quando $R \rightarrow +\infty$, temos que

$$|z - \rho| \gg \frac{1}{R}, \quad \forall \rho \text{ zero de } f \text{ e } z \in \partial B(0; R), \quad (2.40)$$

e tomamos $R_j := R$. Agora, seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = R_j$ para algum $j \in \mathbb{N}$. Então, podemos decompor $F(z)$ do seguinte modo

$$F(z) = \underbrace{\left(\prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ 0 < |\rho| < \frac{R_j}{2}}} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right)}_{P_1} \underbrace{\left(\prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \frac{R_j}{2} \leq |\rho| < 2R_j}} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right)}_{P_2} \underbrace{\left(\prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq 2R_j}} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right)}_{P_3}. \quad (2.41)$$

Analisando essa expressão, temos que:

P_1 : Se $0 < |\rho| < \frac{R_j}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right| &\geq \left|1 - \frac{z}{\rho}\right| e^{-|z|/|\rho|} = \left|1 - \frac{z}{\rho}\right| e^{-R_j/|\rho|} \geq \left(\frac{R_j}{|\rho|} - 1\right) e^{-R_j/|\rho|} > e^{-R_j/|\rho|} \\ &\Rightarrow |P_1| > \exp \left(-R_j \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ 0 < |\rho| < \frac{R_j}{2}}} \frac{1}{|\rho|} \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Mas, como $|\rho| < R_j/2$, então $|\rho|^{\epsilon+1} < (R_j/2)^\epsilon |\rho|$ para qualquer $\epsilon > 0$. Assim,

$$\frac{1}{|\rho|} < \left(\frac{R_j}{2}\right)^\epsilon \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}} \Rightarrow \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ 0 < |\rho| < \frac{R_j}{2}}} \frac{1}{|\rho|} \leq \left(\frac{R_j}{2}\right)^\epsilon \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}}.$$

Sabemos pelo item (ii) que $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}} = C'_\epsilon < \infty$. Então,

$$\exp \left(-R_j \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ 0 < |\rho| < \frac{R_j}{2}}} \frac{1}{|\rho|} \right) \geq \exp \left(-\frac{C'_\epsilon}{2^\epsilon} R_j^{\epsilon+1} \right). \quad (2.43)$$

Logo, de (2.42) e (2.43), temos que

$$|P_1| > \exp \left(-\frac{C'_\epsilon}{2^\epsilon} R_j^{\epsilon+1} \right). \quad (2.44)$$

P_2 : Se $\frac{R_j}{2} \leq |\rho| < 2R_j$, vale que $\frac{1}{2R_j} < \frac{1}{|\rho|} \leq \frac{2}{R_j}$. Assim,

$$\left| \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right| = \frac{|\rho - z|}{|\rho|} e^{z/\rho} \geq \frac{|\rho - z|}{2R_j} e^{-R_j/|\rho|} \geq \frac{|\rho - z|}{2R_j} e^{-2}.$$

Mas, pela equação (2.40), $|\rho - z| \gg \frac{1}{R_j}$, então, usando esta desigualdade na desigualdade anterior, obtemos

$$\left| \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right| \gg \frac{1}{2e^2 R_j^2}. \quad (2.45)$$

Novamente, por (2.38) sabemos que $S_{\frac{R_j}{2}} + S_{R_j} \ll_{\epsilon} R_j^{1+\epsilon}$. Então, existe $C''_{\epsilon} > 0$ tal que $S_{\frac{R_j}{2}} + S_{R_j} \leq C''_{\epsilon} R_j^{1+\epsilon}$, para R_j suficientemente grande. Além disso, como $R_j \in [2^j, 2^{j+1})$, temos que $1 < R_j$. Com isso e usando (2.45), temos que

$$|P_2| \gg \left(\frac{1}{2e^2 R_j^2} \right)^{\frac{S_{R_j}}{2} + S_{R_j}} \geq \left(\frac{1}{2e^2 R_j^2} \right)^{C''_{\epsilon} R_j^{1+\epsilon}}. \quad (2.46)$$

Agora, como o crescimento exponencial é superior ao crescimento potencial, temos

$$\left(\frac{1}{2e^2 R_j^2} \right)^{C''_{\epsilon} R_j^{1+\epsilon}} \gg_{\epsilon} e^{-R_j^{1+2\epsilon}}.$$

Logo, desta ultima desigualdade (mudando convenientemente ϵ por $\epsilon/2$) e de (2.46), temos que

$$|P_2| \gg_{\epsilon} \exp(-R_j^{1+\epsilon}). \quad (2.47)$$

P_3 : Primeiro vamos provar que, se $|w| \leq 1/2$, então $|(1-w)e^w| > e^{-2|w|^2}$. De fato, consideremos a série de Taylor $\log(1-w) = -\sum_{m \geq 1} \frac{w^m}{m}$, se $|w| < 1$. Então,

$$(1-w)e^w = \exp\left(-\frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \dots\right), \quad \forall |w| < 1. \quad (2.48)$$

Mas,

$$\left| -\sum_{n \geq 2} \frac{w^n}{n} \right| \leq \sum_{n \geq 2} \frac{|w|^n}{n} = |w|^2 \sum_{k \geq 0} \frac{|w|^k}{k+2}.$$

Assim, se $|w| \leq 1/2$, $|w|^k \leq \frac{1}{2^k}$ o que implica que $\frac{|w|^k}{k+2} \leq \frac{1}{2^k(k+2)} < \frac{1}{2^k}$, para qualquer $k = 0, 1, \dots$. Então, $\sum_{k \geq 0} \frac{|w|^k}{k+2} \leq 2$ usando este e a desigualdade acima, segue que

$$\left| -\sum_{n \geq 2} \frac{w^n}{n} \right| \leq 2|w|^2.$$

Logo, em (2.48), temos

$$\begin{aligned} |(1-w)e^w| &= \left| \exp\left(-\frac{w^2}{2} - \frac{w^3}{3} - \dots\right) \right| \geq \exp\left(-\left| -\sum_{n \geq 2} \frac{w^n}{n} \right| \right) \geq e^{-2|w|^2} \\ &\Rightarrow |(1-w)e^w| \geq e^{-2|w|^2}, \quad \forall |w| \leq 1/2. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Agora, se $|\rho| \geq 2R_j$, temos $\frac{R_j}{|\rho|} \leq \frac{1}{2}$. Logo, pela desigualdade (2.49), temos

$$\begin{aligned} \left| \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right| &\geq e^{-2R_j^2/|\rho|^2} \\ \Rightarrow \left| \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq 2R_j}} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right| &\geq \exp\left(-2R_j^2 \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq 2R_j}} \frac{1}{|\rho|^2}\right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Logo, como $\frac{2R_j}{|\rho|} \leq 1$, para $\epsilon \in (0, 1)$, temos que

$$\frac{2R_j}{|\rho|} \leq \left(\frac{2R_j}{|\rho|} \right)^\epsilon \Rightarrow \frac{1}{|\rho|^2} \leq (2R_j)^{\epsilon-1} \frac{1}{|\rho|^{\epsilon+1}}.$$

Por outro lado, sabemos pelo item (ii) que $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|^{\epsilon+1}} < \infty$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq 2R_j}} \frac{1}{|\rho|^2} &\leq (2R_j)^{\epsilon-1} \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|^{\epsilon+1}} \\ \Rightarrow \exp \left(-(2R_j)^{\epsilon-1} \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|^{\epsilon+1}} \right) &\leq \exp \left(- \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ |\rho| \geq 2R_j}} \frac{1}{|\rho|^2} \right). \end{aligned}$$

Desta última desigualdade e de (2.50), temos que, para $\epsilon \in (0, 1)$,

$$|P_3| \geq \exp \left(- \left(2^\epsilon \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|^{\epsilon+1}} \right) R_j^{\epsilon+1} \right). \quad (2.51)$$

Agora de (2.44), (2.47) e (2.51) em (2.41) temos

$$|F(z)| = |P_1 P_2 P_3| \gg_\epsilon \exp(-C_\epsilon''' R_j^{1+\epsilon}), \quad \forall \epsilon \in (0, 1).$$

Em particular, para $\epsilon = 1/2$, temos que

$$|F(z)| \gg \exp(-C''' R_j^{3/2}). \quad (2.52)$$

Além disso, como f é uma função inteira de ordem um, vale

$$|f(z)| \ll \exp(R_j^{3/2}). \quad (2.53)$$

Portanto,

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|^r |F(z)|} = \frac{|f(z)|}{R_j^r |F(z)|} \ll \exp \left((C''' + 1) R_j^{3/2} \right).$$

Logo, como $|z| = R_j$ e $j \in \mathbb{N}$ é arbitrário, temos que

$$|g(z)| = \exp \left(O(|z|^{3/2}) \right),$$

para qualquer $z \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \partial B(0; R_j)$. Então, pelo Lema 2.14, temos que existem constantes A, B tais que

$$\begin{aligned} g(z) &= Az + B \\ \Rightarrow f(z) &= z^r e^{Az+B} \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\rho} \right) e^{z/\rho}. \end{aligned}$$

E fica provado o Teorema 2.17 □

A partir deste teorema, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.18. *Com as mesmas notações do teorema anterior, se $\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|} < \infty$, então*

$$|f(z)| = \exp O(|z|).$$

Demonstração: Primeiro observemos que, para qualquer $z \in \mathbb{C}$,

$$|(1-z)e^z| \leq e^{2|z|}. \quad (2.54)$$

De fato, $|(1-z)e^z| \leq (1+|z|)e^{|z|} \leq \left(1+|z|+\frac{|z|^2}{2!}+\frac{|z|^3}{3!}+\dots\right)e^{|z|} = e^{2|z|}$. Agora vamos provar o resultado principal. Pelo teorema anterior, sabemos que $f(z) = z^r e^{Az+B} \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho}$. Então,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z|^r |e^{Az+B}| \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left| \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right| = |z|^r |e^{Az+B}| \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left| \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right| \\ &\leq |z|^r e^{|A||z|+|B|} \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left| \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right|. \end{aligned}$$

Assim, usando (2.54) no lado direito da desigualdade acima, temos

$$|f(z)| \leq |z|^r e^{|A||z|+|B|} \prod_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \left| \left(1 - \frac{z}{\rho}\right) e^{z/\rho} \right| \leq |z|^r e^{|A||z|+|B|} e^{2 \left(\sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|} \right) |z|},$$

e, como para $|z|$ suficientemente grande, $|z|^r \leq e^{|z|}$, $e^{|A||z|+|B|} \leq e^{(|A|+|B|)|z|}$, da desigualdade acima segue que

$$|f(z)| \leq \exp \left(\left(1 + |A| + |B| + 2 \sum_{\substack{f(\rho)=0 \\ \rho \neq 0}} \frac{1}{|\rho|} \right) |z| \right),$$

para $|z|$ suficientemente grande,

$$\Rightarrow |f(z)| = \exp O(|z|).$$

□

A Hipótese de Riemann

O objetivo deste capítulo é introduzir a Hipótese de Riemann, dar uma evidência forte dela e apresentar algumas propriedades dos zeros de $\zeta(s)$ em relação à uma região de $\mathbb{C}$ que chamamos faixa crítica. As ferramentas necessárias já foram desenvolvidas no Capítulo 2. Após isso, continuamos a estudar os zeros não-triviais da função $\zeta(s)$, salientando a importância destes na teoria analítica dos números, e depois introduzimos a conjectura de Hilbert-Pólya. No final, apresentamos duas formulações equivalentes da Hipótese de Riemann, um delas importante na Teoria das Cordas.

3.1 Estabelecendo a Hipótese de Riemann

Do Corolário 2.8, vimos que $\zeta(s)$ não tem zeros em $\mathbb{H}(1, +\infty)$. Contudo, do Teorema 2.12, temos que

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s),$$

para $\Re(s) < 0$. Assim, os zeros de $\zeta(s)$ para $\Re(s) < 0$, são os zeros de $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ que são $-2, -4, -6, \dots$. Estes são chamados de *zeros triviais* de $\zeta(s)$. Com isso, os demais zeros de $\zeta(s)$, denominados *zeros não triviais* de $\zeta(s)$ devem estar no conjunto $\overline{\mathcal{S}}$, onde $\mathcal{S} := \{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re(s) < 1\}$ que é a *faixa crítica*. Para poder enunciar a Hipótese de Riemann, vamos precisar do seguinte teorema.

Teorema 3.19. $\zeta(s)$ não tem zeros na fronteira da faixa crítica, isto é, nas retas $\Re(s) = 1$ e $\Re(s) = 0$.

Demonstração: Vamos continuar usando o método indireto. Mas primeiro vamos provar que para $\sigma, t \in \mathbb{R}$, com $\sigma > 1$,

$$|\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2ti)| \geq 1. \quad (3.1)$$

Com efeito, para $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, temos que $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$, então

$$\log(\zeta(s)) = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \quad (3.2)$$

Agora, consideremos a série de Taylor de $\log(1 - x)$ com centro em $x = 0$. Temos

$$\log(1 - x) = - \sum_{m \geq 1} \frac{x^m}{m}, \quad |x| < 1, \quad (3.3)$$

e então, usando (3.3) em (3.2), obtemos a equação

$$\begin{aligned} \log \zeta(s) &= - \sum_{p \in \mathbb{P}} \left(- \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-sm}}{m} \right) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-sm}}{m} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-\sigma m}}{m} e^{-imt \log p} \\ &\Rightarrow \Re(\log \zeta(s)) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-\sigma m}}{m} \cos(mt \log(p)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Agora observemos que, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2(\cos \theta + 1)^2 = 2 \cos^2 \theta - 1 + 3 + 4 \cos \theta = \cos 2\theta + 4 \cos \theta + 3 \\ &\Rightarrow 0 \leq 3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Logo, de (3.4), com $s = \sigma$, $s = \sigma + it$ e $s = \sigma + 2it$, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Re(\log \zeta(\sigma)) &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-\sigma m}}{m}, \\ \Re(\log \zeta(\sigma + it)) &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-\sigma m}}{m} \cos(mt \log p), \\ \Re(\log \zeta(\sigma + 2it)) &= \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-\sigma m}}{m} \cos(2mt \log p). \end{aligned}$$

Então, pela desigualdade (3.5), temos

$$\begin{aligned} 3\Re(\log \zeta(\sigma)) + 4\Re(\log \zeta(\sigma + it)) + \Re(\log \zeta(\sigma + 2it)) &= \\ \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} \frac{p^{-\sigma m}}{m} (3 + 4 \cos(mt \log(p)) + \cos(2mt \log(p))) &\geq 0 \\ \Rightarrow 3\Re(\log \zeta(\sigma)) + 4\Re(\log \zeta(\sigma + it)) + \Re(\log \zeta(\sigma + 2it)) &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Mas, como $\log(z) = \log|z| + i \arg(z)$, então $\Re(\log(z)) = \log|z|$. Usando este resultado em (3.6), temos

$$\begin{aligned} 3 \log |\zeta(\sigma)| + 4 \log |\zeta(\sigma + it)| + \log |\zeta(\sigma + 2it)| &\geq 0 \\ \Rightarrow \log (|\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)|) &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1.$$

Agora, vamos continuar com a demonstração. Como $\zeta(s)$ tem um polo simples em $\sigma = 1$ e $\text{Res}(\zeta, 1) = 1$, segue que

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{\sigma - 1} + g(\sigma), \quad (3.7)$$

onde g é analítica em $s = 1$. Logo, supondo que existe $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\zeta(1 + it) = 0$, então, para $\sigma > 1$ suficientemente próximo de 1, temos

$$|\zeta(\sigma + it)| = |\zeta(\sigma + it) - \zeta(1 + it)| \leq |\sigma - 1| \left(\sup_{0 < l < 1} |\zeta'(1 + l(\sigma - 1) + it)| \right). \quad (3.8)$$

Também, para qualquer $\sigma \in (1, 1 + \delta)$, onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno, existe $A > 0$, que depende de t , tal que $|\zeta(\sigma + 2it)| \leq A$. Logo, deste último resultado, e usando (3.8) e (3.7) em (3.1), resulta que

$$\begin{aligned} 1 \leq |\zeta(\sigma)|^3 |\zeta(\sigma + it)|^4 |\zeta(\sigma + 2it)| &\leq \left| \frac{1}{\sigma - 1} + g(\sigma) \right|^3 |\sigma - 1|^4 \left(\sup_{0 < l < 1} |\zeta'(1 + l(\sigma - 1) + it)| \right)^4 A \\ &\Rightarrow 1 \leq |1 + (\sigma - 1)g(\sigma)|^3 |\sigma - 1| \left(\sup_{0 < l < 1} |\zeta'(1 + l(\sigma - 1) + it)| \right)^4 A. \end{aligned}$$

Com isso, se $\sigma \rightarrow 1^+$, temos $1 \leq 0$, o que é uma contradição. Assim $\zeta(1 + it) \neq 0$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Analogamente, se existe $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\zeta(ti) = 0$, então pela equação funcional para $\zeta(s)$ (Teorema 2.12), temos que

$$0 = \zeta(ti) = 2^{ti} \pi^{ti-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} ti\right) \Gamma(1 - ti) \zeta(1 - ti).$$

Logo, como $2^{ti} \pi^{ti-1} \sin\left(\frac{\pi}{2} ti\right) \Gamma(1 - ti) \neq 0$, segue que $\zeta(1 - ti) = 0$. Mas, isso não pode ser verdade, porque contradiz o que foi feito no caso anterior.

Finalmente mostremos que 0 e 1 não são zeros de $\zeta(s)$. De fato, $s = 1$ não é um zero pois é um polo simples de $\zeta(s)$. Assim, é suficiente provar que $s = 0$ não é um zero de $\zeta(s)$. Como $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ tem um zero simples em $s = 0$ e $\zeta(1 - s)$ tem um polo simples em $s = 0$, então existem funções analíticas h e g com $h(0), g(0) \neq 0$ tais que $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) = sg(s)$ e $\zeta(1 - s) = \frac{h(s)}{s}$. Assim, novamente pela equação funcional de $\zeta(s)$, temos

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= \lim_{s \rightarrow 0} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1 - s) \zeta(1 - s) = \lim_{s \rightarrow 0} 2^s \pi^{s-1} sg(s) \Gamma(1 - s) \frac{h(s)}{s} \\ &\Rightarrow \zeta(0) = \frac{g(0)h(0)}{\pi} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\zeta(s)$ não tem zeros na fronteira da faixa crítica e o Teorema 3.19 fica mostrado. $\square$

Assim, podemos concluir que quaisquer zeros não-triviais estão na faixa crítica $\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re(s) < 1\}$. Riemann calculou três destes zeros usando a fórmula Rieman-Siegel [10] e conjecturou a sua famosa hipótese.

Conjetura 3.20 (Hipótese de Riemann). *Todos os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ estão na reta crítica $\mathcal{L} := \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) = \frac{1}{2}\}$.*

Esta conjetura foi enunciada em 1859 na sua publicação intitulada *Sobre os Números Primos Menores que uma Magnitude Dada* [20].

Continuaremos com alguns resultados importantes para nos ajudar a apresentar algumas propriedades dos zeros de $\zeta(s)$ que também nos deixam o caminho livre para apresentar uma evidência da Hipótese de Riemann.

Agora vamos estudar algumas propriedades dos zeros de $\zeta(s)$. Para tal, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.21. *Para qualquer $x > 0$, temos que*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi \frac{1}{x}} = \sqrt{x} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x} \right).$$

Demonstração: Dado $x > 0$, consideremos a função $\psi(t) = e^{-t^2 \pi x}$. Então, pela Fórmula de Soma de Poisson discutida no Apêndice A (ver Eq. (A.9)), temos que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{2\pi i k t} dt.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 \pi x + 2\pi i k t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 \frac{1}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x (t - \frac{ik}{x})^2} dt \\ &\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 \frac{1}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x (t - \frac{ik}{x})^2} dt. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Logo, para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, consideremos o caminho conectando, na ordem, os pontos a seguir, $[-R - \frac{ik}{x}, R - \frac{ik}{x}, R, -R, -R - \frac{ik}{x}]$. Então, pelo Teorema de Cauchy, segue que

$$\int_{[-R - \frac{ik}{x}, R - \frac{ik}{x}, R, -R, -R - \frac{ik}{x}]} e^{-\pi x z^2} dz = 0. \quad (3.10)$$

Mas, se $z \in [R - \frac{ik}{x}, R]$, então $z = R - i\lambda$ onde $\lambda \in [-\frac{k}{x}, 0]$. Assim, $z^2 = R^2 - \lambda^2 - 2R\lambda i$ e, em consequência, $e^{\pi x z^2} = e^{-\pi x (R^2 - \lambda^2 - 2R\lambda i)}$. Daí, considerando uma parte de (3.10), temos que

$$\begin{aligned} \int_{[R - \frac{ik}{x}, R]} |e^{-\pi x z^2}| dz &= e^{-\pi x R^2} \int_{-\frac{k}{x}}^0 e^{\pi x \lambda^2} d\lambda \\ &\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[R - \frac{ik}{x}, R]} |e^{-\pi x z^2}| dz = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, -R - \frac{ik}{x}]} |e^{-\pi x z^2}| dz = 0.$$

Portanto, considerando (3.10) no limite $R \rightarrow +\infty$ temos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x (t - \frac{ik}{x})^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x t^2} dt.$$

Porém, sabemos que, para qualquer $\varrho > 0$, a integral Gaussiana é calculável e vale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varrho u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\varrho}}$. Então,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x (t - \frac{ik}{x})^2} dt = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Em seguida, usando esse resultado em (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x} &= \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 \frac{1}{x}} \right) \\ \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi k^2 \frac{1}{x}} &= \sqrt{x} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 \pi x} \right). \end{aligned}$$

□

Este resultado é usado para demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.22. *Seja $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(1, +\infty)$. Então,*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}) \omega(x) dx, \quad (3.11)$$

onde $\omega(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 x}$.

Demonstração: Se $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, então, por definição, temos que $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du$. Logo, fazendo a mudança de variável $u = \pi n^2 x$, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} (\pi n^2 x)^{\frac{s}{2}-1} \pi n^2 dx = n^s \pi^{\frac{s}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ \Rightarrow \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \frac{1}{n^s} &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx. \end{aligned}$$

Mas, como $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, da igualdade anterior vemos que

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_0^{+\infty} e^{-\pi n^2 x} x^{\frac{s}{2}-1} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n=1}^N e^{-\pi n^2 x} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 x} - \sum_{n > N} e^{-\pi n^2 x} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx - \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} dx,$$

e, então, que

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx - \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} dx. \quad (3.12)$$

Agora, observemos a seguinte desigualdade, evidente para $x > 0$,

$$\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} \leq \int_N^{+\infty} e^{-\pi u^2 x} du.$$

Fazendo aqui a mudança de variável $v = \pi u^2 x$, temos

$$\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} \leq \int_N^{+\infty} e^{-\pi u^2 x} du = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \int_{\pi N^2 x}^{+\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv.$$

Continuamos a estimativa em duas partes:

- Se $x < \frac{1}{\pi N^2}$, temos

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \int_{\pi N^2 x}^{+\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi x}}.$$

- Se $x > \frac{1}{\pi N^2}$. Logo, se $\pi x N^2 < v$, então, $v^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{N\sqrt{\pi x}}$ e

$$\begin{aligned} \int_{\pi N^2 x}^{+\infty} v^{-\frac{1}{2}} e^{-v} dv &\leq \frac{1}{N\sqrt{\pi x}} \int_{\pi N^2 x}^{+\infty} e^{-v} dv = \frac{e^{-\pi N^2 x}}{N\sqrt{\pi x}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \int_{\pi N^2 x}^{+\infty} v^{-\frac{1}{2}} e^{-v} dv \leq \frac{e^{-\pi N^2 x}}{2N\pi x}. \end{aligned}$$

Também, como

$$\left| \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} \right) dx \right| \leq \int_0^{\frac{1}{\pi N^2}} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} \right) dx + \int_{\frac{1}{\pi N^2}}^{+\infty} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} \right) dx,$$

das duas estimativas anteriores, segue que:

$$\left| \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} \right) dx \right| \leq \int_0^{\frac{1}{\pi N^2}} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi x}} dx + \int_{\frac{1}{\pi N^2}}^{+\infty} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \frac{e^{-\pi N^2 x}}{2N\pi x} dx. \quad (3.13)$$

Em seguida, analisamos as duas integrais do lado direito de (3.13):

$\int_0^{\frac{1}{\pi N^2}} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi x}} dx$: Temos

$$\int_0^{\frac{1}{\pi N^2}} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi x}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\pi N^2}} x^{\frac{\sigma-1}{2}-1} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\sigma-1)} \left(\frac{1}{\pi N^2} \right)^{\frac{\sigma-1}{2}}$$

e, como $\sigma > 1$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{1}{\pi N^2}} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\pi x}} dx = 0.$$

$\int_{\frac{1}{\pi N^2}}^{+\infty} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \frac{e^{-\pi N^2 x}}{2N\pi x} dx$: Fazendo a mudança de variável $u = \pi N^2 x$, temos

$$\int_{\frac{1}{\pi N^2}}^{+\infty} x^{\frac{\sigma}{2}-1} \frac{e^{-\pi N^2 x}}{2N\pi x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-2}}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} du,$$

e consideramos os seguintes casos:

1. Se $\frac{\sigma}{2} - 1 > 0$, então

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-2}}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} du &= \frac{\int_1^{+\infty} e^{-u} u^{(\frac{\sigma}{2}-1)-1} du}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} \leq \frac{\int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(\frac{\sigma}{2}-1)-1} du}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} = \frac{\Gamma(\frac{\sigma}{2} - 1)}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} \\ &\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\pi N}^{+\infty} \frac{e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-2}}{2(\pi N^2)^{\frac{\sigma}{2}}} du = 0. \end{aligned}$$

2. Se $\frac{\sigma}{2} - 1 \leq 0$, então $\frac{\sigma}{2} - 2 < 0$, logo $1 < u$, e então

$$\begin{aligned} u^{\frac{\sigma}{2}-2} < 1 &\Rightarrow e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-2} < e^{-u} \\ &\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-2} du \leq \int_1^{+\infty} e^{-u} du = \frac{1}{e} \\ &\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-2}}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} du \leq \frac{1}{2e\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} \\ &\Rightarrow \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\pi N}^{+\infty} \frac{e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-2}}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} du = 0. \end{aligned}$$

Assim, em qualquer caso, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{\pi N}^{+\infty} \frac{e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-2}}{2\pi^{\frac{\sigma}{2}} N^{\sigma-1}} du = 0$.

Portanto, em (3.13), temos que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 x} \right) dx = 0$. Logo, de (3.12), $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx$. Assim,

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx.$$

Substituindo x^{-1} por x na primeira integral do lado direito, temos

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_1^{+\infty} x^{-(\frac{s}{2}+1)} \omega(x^{-1}) dx + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx.$$

Mas, pelo Lema 3.21, $\omega(x^{-1}) = \sqrt{x} \omega(x) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2}$, e então

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_1^{+\infty} x^{-(\frac{s}{2}+1)} \left(\sqrt{x} \omega(x) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) dx + \int_1^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} \omega(x) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}) \omega(x) dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{+\infty} (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}) \omega(x) dx,$$

e concluímos a demonstração do Teorema 3.22. $\square$

A integral no lado direito de (3.11) existe para qualquer $s \in \mathbb{C}$. Então, esta integral define uma função inteira. Portanto, se $\xi(s)$ é definida como segue

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \quad (3.14)$$

temos, pelo Teorema 3.22, e por esta última afirmação, que $\xi(s) \in H(\mathbb{C})$. Além disso,

$$\xi(1-s) = \frac{1}{2} \left(1 + (1-s)(1-s-1) \int_1^{+\infty} (x^{\frac{1-s}{2}-1} + x^{-\frac{(1-s)}{2}-\frac{1}{2}}) \omega(x) dx \right) = \xi(s).$$

Então, $\xi(s)$ satisfaz a propriedade importante

$$\xi(1-s) = \xi(s). \quad (3.15)$$

Também, novamente pelo Teorema 3.22, é claro que também vale a propriedade

$$\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}. \quad (3.16)$$

Agora, com a ajuda de $\xi(s)$, vamos provar o seguinte teorema.

Teorema 3.23. *Os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ são simétricos com relação ao eixo real e também com relação à reta crítica.*

Demonstração: Claramente os únicos zeros de $\xi(s)$ são os zeros não-triviais de $\zeta(s)$; o recíproco também é verdadeiro, pois de (3.14) os zeros triviais de $\zeta(s)$ são cancelados pelos polos de $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$, $\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) \neq 0$ (pelo Teorema 2.6) e $s-1$ é cancelado pelo polo de $\zeta(s)$. Então, se ρ é um zero não trivial de $\zeta(s)$ temos que também é um zero de $\xi(s)$. Mas, pela equação (3.16), $\bar{\rho}$ também é um zero de $\xi(s)$. Portanto, também é um zero de $\zeta(s)$. Assim, os zeros são simétricos com relação ao eixo real. Analogamente, se escrevermos $\rho = a + ib$, então $\bar{\rho} = a - ib$ também é um zero de $\xi(s)$. Logo, pela equação (3.15), temos que $1 - \bar{\rho} = 1 - a + ib$ também é um zero de $\xi(s)$ portanto é um zero de $\zeta(s)$. Assim, os zeros são simétricos com relação à reta crítica. $\square$

Resumindo, os zeros não-triviais de $\zeta(s)$, além de estarem localizados na faixa crítica $\mathcal{S} = \{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re(s) < 1\}$, satisfazem as propriedades:

- (i) Não existem zeros na fronteira de $\mathcal{S}$.
- (ii) Os zeros não-triviais são simétricos com relação a $\mathcal{L}$ e o eixo real.

Para concluir esta seção, com as ferramentas já adquiridas até aqui, apresentamos uma evidência para a Hipótese de Riemann. Para isso, vamos definir $\Xi(t)$ como segue

$$\Xi(t) := \xi\left(\frac{1}{2} + it\right). \quad (3.17)$$

Usando (3.15) e (3.16) em (3.17), temos, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\Xi(t)} = \overline{\xi\left(\frac{1}{2} + it\right)} = \xi\left(\overline{\frac{1}{2} + it}\right) = \xi\left(\frac{1}{2} - it\right) = \xi\left(1 - \left(\frac{1}{2} - it\right)\right) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \Xi(t).$$

Assim, $\Xi(t) \in \mathbb{R}$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Agora, consideremos o número $N(T)$ de zeros de $\zeta(s)$ contidos na região $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1, 0 \leq \Im(z) \leq T\}$, para $T \geq 0$. Logo, é claro que se consideramos a função $\Xi(t)$ restrita a $t \in \mathbb{R}$, então $\Xi(t)$ é uma função real contínua. Assim, deve ter um zero de ordem ímpar entre dois números reais em que muda de sinal. Além disso, se o número de zeros é igual ao número de mudanças de sinal, então esses zeros são de ordem um, ou seja se escolhermos $T > 0$ de modo conveniente, tal que o número de mudanças de sinal de $\Xi(t)$ em $[0, T]$ é igual a $N(T)$, então estes são zeros simples de $\zeta(s)$ e satisfazem a Hipótese de Riemann. Então, nesse caso, teríamos a garantia de que todos os zeros de $\zeta(s)$ são simples. Para provar a Hipótese de Riemann aqui é suficiente provar que para qualquer $T > 0$ o número de mudanças de sinal de $\Xi(t)$ é igual a $N(T)$, mas não temos certeza de tais informações. No entanto, podemos dizer que os primeiros 1.5 bilhões de zeros de $\zeta(s)$, obtidos numericamente, parecem satisfazer essa propriedade (ver [27]). Em outras palavras corroboram a Hipótese de Riemann.

3.2 Os Zeros não-triviais de $\zeta(s)$ e a Teoria Analítica dos Números.

Aqui, vamos apresentar a importância de os zeros de $\zeta(s)$ na teoria analítica dos números. Esta relação já era previsível, pois como vimos anteriormente no Produto de Euler $\zeta(s)$ já estabelecemos uma relação de $\zeta(s)$ com os números primos. Para obter as propriedades desejadas, vamos usar a teoria das funções inteiras de ordem um, que já vimos no Capítulo 2. Na verdade, vamos provar que $\xi(s)$ é uma função inteira de ordem um.

Como vimos anteriormente, os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ e os zeros de $\xi(s)$, definida em (3.14), são os mesmos. Então, para abreviar notações, vamos denotar por ρ os zeros na linha crítica $\mathcal{S}$ e não vamos especificar se estamos lidando com $\zeta(s)$ ou $\xi(s)$, salvo alguns casos.

Agora, apresentamos o seguinte teorema que vai nos ajudar a estabelecer uma representação de $\zeta(s)$, com s em $\mathcal{S}$.

Lema 3.24 (Fórmula de Soma de Euler). *Seja $\phi \in C^1([a, b])$. Então,*

$$\sum_{n \in (a, b]} \phi(n) = \int_a^b \phi(x) dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx + \left(a - [a] - \frac{1}{2}\right) \phi'(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2}\right) \phi'(b).$$

Demonstração: Por integração por partes

$$\int_a^b \phi(x) d\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) = \phi(x) \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \Big|_a^b - \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \phi'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b \phi(x)dx - \int_a^b \phi(x)d[x] = \phi(x) \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) \Big|_a^b - \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) \phi'(x)dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in (a, b]} \phi(n) &= \int_a^b \phi(x)d[x] \\ &= \int_a^b \phi(x)dx + \int_a^b \left(x - [x] - \frac{1}{2} \right) \phi'(x)dx + \left(a - [a] - \frac{1}{2} \right) \phi'(a) - \left(b - [b] - \frac{1}{2} \right) \phi'(b). \end{aligned}$$

□

Consideremos agora $\phi(x) := n^{-s}$, onde $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$ e a, b em $\mathbb{Z}$. Então, pela Fórmula de Soma de Euler, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{n=a+1}^b \frac{1}{n^s} &= \int_a^b \frac{1}{x^s} ds + s \int_a^b \frac{([x] - x + \frac{1}{2})}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2}(b^{-s} - a^{-s}) \\ &= \frac{b^{1-s} - a^{1-s}}{1-s} + s \int_a^b \frac{([x] - x + \frac{1}{2})}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2}(b^{-s} - a^{-s}). \end{aligned}$$

Agora, tomando $a = 1$ e $b \rightarrow +\infty$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + s \int_1^{+\infty} \frac{([x] - x + \frac{1}{2})}{x^{s+1}} dx - \frac{1}{2}.$$

Então,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + s \int_1^{+\infty} \frac{([x] - x + \frac{1}{2})}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{2},$$

e simplificando a integral, obtemos a representação

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{+\infty} \frac{x - [x]}{x^{s+1}} dx. \quad (3.18)$$

Observe que a integral no lado direito da equação acima existe para qualquer $s \in \mathcal{S}$. Então, (3.18) dá uma representação de $\zeta(s)$ para $s \in \mathcal{S}$.

Agora, com a teoria de funções inteiras de ordem um desenvolvida anteriormente e a equação (3.18), prosseguimos com a prova de algumas propriedades de $\zeta(s)$ e seus zeros.

Teorema 3.25. $\xi(s)$ é uma função inteira de ordem um.

Demonstração: Sabemos que $\xi(s)$ é uma função inteira e que $\xi(s) = \xi(1-s)$ para qualquer $s \in \mathbb{C}$, então só temos que provar que

$$\xi(s) = O_\epsilon(\exp(|s|^{1+\epsilon})), \quad \forall \epsilon > 0,$$

para $\Re(s) \geq \frac{1}{2}$. Consideremos o fato que

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \quad (3.19)$$

e vamos limitar cada um dos fatores que compõem o lado direito de (3.19). Para $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(0, +\infty)$,

$$\left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{s}{2}-1} du \right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\frac{\sigma}{2}-1} du = \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right).$$

Mas, da fórmula de Stirling,

$$\log \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \frac{\sigma-1}{2} \log\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(\sigma^{-1}).$$

Então, na desigualdade anterior temos que

$$\begin{aligned} \left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| &\leq \Gamma\left(\frac{\sigma}{2}\right) = \exp\left(\frac{\sigma-1}{2} \log\left(\frac{\sigma}{2}\right) - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \log 2\pi + O(\sigma^{-1})\right) \ll \exp\left(\frac{\sigma \log \sigma}{2}\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{|s| \log |s|}{2}\right) \\ \Rightarrow \left| \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \right| &= O\left(\exp\left(\frac{|s| \log |s|}{2}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Também, pela equação (3.18), concluímos que

$$\zeta(s) = O(|s|). \quad (3.21)$$

Além disso, é claro que

$$\left| \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \right| = O(\exp(2|s|)). \quad (3.22)$$

Finalmente, das equações (3.20), (3.21) e (3.22) em (3.19) obtemos que $\xi(s)$ é uma função inteira de ordem um, o que prova o Teorema 3.25. $\square$

Corolário 3.26 . A série $\sum_{\xi(\rho)=0} \frac{1}{|\rho|}$ diverge.

Demonstração: Admitamos que $\sum_{\xi(\rho)=0} \frac{1}{|\rho|} < \infty$. Assim, pelo Corolário 2.18, temos que

$$|\xi(s)| = \exp O(|s|). \quad (3.23)$$

Usando $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$, e a fórmula de Stirling, para $x \in \mathbb{R}$, temos que $\log \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{x}{2} \log \frac{x}{2}$ e, por (3.18), $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$. Então, para $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\xi(x) \sim \frac{1}{2} x(x-1) \pi^{-\frac{x}{2}} e^{\frac{x}{2} \log \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} x(x-1) e^{\frac{x}{2} \log \frac{x}{2\pi}}$$

o que contradiz (3.23). Portanto, $\sum_{\xi(\rho)=0} \frac{1}{|\rho|}$ é divergente. $\square$

Corolário 3.27 . $\zeta(s)$ tem um número infinito enumerável de zeros não-triviais.

Demonstração: Sabemos que os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ são os zeros de ξ , então a prova é uma consequência direta do corolário acima. $\square$

Agora, vamos destacar algumas relações entre os zeros de $\zeta(s)$ com a teoria analítica dos números. Pelo Teorema 2.17,

$$\xi(s) = e^{As+B} \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{s/\rho}. \quad (3.24)$$

Também, pelo mesmo teorema, temos que, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\sum_{\rho} \frac{1}{|\rho|^{1+\epsilon}} < \infty. \quad (3.25)$$

Pela equação (3.24),

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = A + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right).$$

Mas, como $\xi(s) = (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\zeta(s)$, então

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Assim, das duas últimas equações segue que

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = A - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.26)$$

Vamos agora definir duas funções, de muita utilidade, para relacionar os zeros de $\zeta(s)$ e números primos e estabelecer o Teorema dos Números Primos, que é a relação entre os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ e a teoria analítica dos números a ser discutida neste trabalho.

Denotamos por Λ a função de von Mangoldt definida como

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & n = p^m \quad \text{para algum } p \in \mathbb{P} \\ 0, & n \neq p^m \quad \forall p \in \mathbb{P}. \end{cases}$$

Uma relação da função de von Mangoldt e $\zeta(s)$, de grande importancia, é a seguinte. Do produto de Euler, resulta que, para qualquer $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$. Logo,

$$\log \zeta(s) = - \sum_{p \in \mathbb{P}} \log \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Usando a série de Taylor, $\log(1-x) = -\sum_{m \geq 1} \frac{x^m}{m}$, $|x| < 1$, temos

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} p^{-sm} m^{-1},$$

e, derivando membro-a-membro,

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{m \geq 1} p^{-sm} \log p.$$

Além disso, pela definição de Λ

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} p^{-sm} \log p &= \frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^{2s}} + \frac{\log p}{p^{3s}} + \dots \\ &= \frac{\Lambda(p)}{p^s} + \frac{\Lambda(p^2)}{p^{2s}} + \frac{\Lambda(p^3)}{p^{3s}} + \dots \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{\Lambda(p^m)}{(p^m)^s}. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad s \in \mathbb{H}(1, +\infty). \quad (3.27)$$

A outra função de extrema importância é a função de Chebyshev, que é definida como

$$\Psi(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}: n \leq x} \Lambda(n).$$

Agora, continuamos com os resultados seguintes, que vão nos auxiliar na demonstração do Teorema dos Números Primos.

Lema 3.28. *Seja $\rho = \beta + i\gamma$, e consideremos $T \geq 1$. Então,*

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} = O(\log T).$$

Demonstração: Do Corolário **A.61**,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \quad (|\arg s| < \pi). \quad (3.28)$$

Agora, consideremos $s = 2 + iT$. Então, por (3.26),

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = A - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.29)$$

Mas, claramente, $A - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \log \pi = O(\log T)$. Além disso, de (3.28), temos que para T suficientemente grande existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} \right| &\leq C \log T \\ \Rightarrow \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} &= O(\log T), \end{aligned} \quad (3.30)$$

e, como $s = 2 + iT$,

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^2} < \infty.$$

Assim, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\left| \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right| \leq C_1. \quad (3.31)$$

Portanto, de (3.30), (3.31) e (3.29), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) &= O(\log T) \\ \Rightarrow \sum_{\rho} \Re \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right) &= O(\log T) \\ \Rightarrow \sum_{\rho} \frac{2 - \beta}{(2 - \beta)^2 + (T - \gamma)^2} &= O(\log T). \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2(1+(T-\gamma)^2)} \leq \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2}$, a prova é concluída. $\square$

Corolário 3.29 . *O número de zeros $\rho = \beta + i\gamma$, tais que $|T - \gamma| \leq 1$, é $O(\log T)$.*

Demonstração: Se $|T - \gamma| \leq 1$, então

$$\begin{aligned} (T - \gamma)^2 + 1 &\leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} |\{\rho = \beta + i\gamma : |T - \gamma| \leq 1\}| &\leq \sum_{\rho: |T - \gamma| \leq 1} \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} \leq \sum_{\rho} \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} = O(\log T). \end{aligned}$$

Assim, o número de zeros $\rho = \beta + i\gamma$, tais que $|T - \gamma| \leq 1$, é $O(\log T)$. $\square$

Lema 3.30 . *Se $t \geq 1$ e $s = \sigma + it$, onde $-1 \leq \sigma \leq 2$. Então*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho: |t - \gamma| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\log t).$$

Demonstração: Pela equação (3.26), para $s = \sigma + it$, com $-1 \leq \sigma \leq 2$, temos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = A - \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \frac{\Gamma' \left(\frac{s}{2} + 1 \right)}{\Gamma \left(\frac{s}{2} + 1 \right)} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right), \quad (3.32)$$

de onde, com $s = 2 + it$, escrevemos

$$\frac{\zeta'(2 + it)}{\zeta(2 + it)} = A - \frac{1}{1 + it} + \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \frac{\Gamma' \left(\frac{2 + it}{2} + 1 \right)}{\Gamma \left(\frac{2 + it}{2} + 1 \right)} + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{2 + it - \rho} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.33)$$

Usando (3.28) em (3.32) e (3.33), além disso, desde que $A - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \log \pi = A - \frac{1}{2+it} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \pi = O(\log t)$ e por (3.31) $\frac{\zeta'(2+it)}{\zeta(2+it)} = O(1)$, subtraindo-se membro a membro (3.32) de (3.33), obtemos a seguinte equação

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t) + \sum_{\rho} \left(\frac{1}{\sigma + it - \rho} - \frac{1}{2 + it - \rho} \right). \quad (3.34)$$

Observando agora que

$$\left| \frac{1}{\sigma + it - \rho} - \frac{1}{2 + it - \rho} \right| = \frac{2 - \sigma}{|(\sigma - \beta) + i(t - \gamma)| |(2 - \beta) + i(t - \gamma)|} \leq \frac{3}{|t - \gamma|^2}, \quad (3.35)$$

e também

$$\sum_{\rho: |t - \gamma| > 1} \frac{1}{|t - \gamma|^2} = O(\log t), \quad (3.36)$$

além do fato que se $|t - \gamma| > 1$, temos

$$1 + (t - \gamma)^2 < 2|t - \gamma|^2 \Rightarrow \frac{1}{|t - \gamma|^2} < \frac{2}{1 + (t - \gamma)^2}.$$

Logo, pelo Lema 3.28,

$$\sum_{\rho: |t - \gamma| > 1} \frac{1}{|t - \gamma|^2} \leq 2 \sum_{\rho: |t - \gamma| > 1} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} \leq 2 \sum_{\rho} \frac{1}{1 + (t - \gamma)^2} = O(\log t).$$

Assim, usando (3.36) em (3.35), temos que

$$\sum_{\rho: |t - \gamma| > 1} \left(\frac{1}{\sigma + it - \rho} - \frac{1}{2 + it - \rho} \right) = O(\log t). \quad (3.37)$$

Além disso, do Corolário 3.29, sabemos que o número de zeros ρ tais que $|\gamma - t| \leq 1$ é $O(\log t)$, e como o conjunto $\{\rho : |\gamma - t| \leq 1\}$ é compacto, então

$$\sum_{\rho: |t - \gamma| \leq 1} \left| \frac{1}{2 + it - \rho} \right| = O(\log t). \quad (3.38)$$

Assim, finalmente, usando (3.37) e (3.38) em (3.34), temos o resultado desejado

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\rho: |t - \gamma| \leq 1} \frac{1}{s - \rho} + O(\log t).$$

□

Teorema 3.31 . *Seja $2 \leq T \leq x$. Então*

$$\Psi(x) = x - \sum_{|\Im(\rho)| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right).$$

Demonstração: Para $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, pelas equações (3.26) e (3.27), temos

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} - \sum_{\rho} \left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right) - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} - A. \quad (3.39)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \frac{|\Lambda(n)|}{n^{\sigma}} &\ll \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^{\sigma}} dx = (\sigma - 1)^{-2} \\ &\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{|\Lambda(n)|}{n^{\sigma}} = O((\sigma - 1)^{-2}). \end{aligned}$$

Portanto, pela fórmula de inversão (Teorema **A.59**), temos, para $b = 1 + \log^{-1} x$,

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{1+\log^{-1} x} \log^2 x}{T} \right) + O\left(\frac{x \log(2x) \log x}{T} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT_1}^{b+iT_1} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \log^2 x}{T} \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $T_1 \in [T, T+1]$ é tomado adequadamente para que a distância da reta $\mathfrak{J}(s) = T_1$ ao zero de $\zeta(s)$ mais próximo seja $\gg \log^{-1} x$ e também para que não haja zero no conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \in (0, 1) \text{ e } \mathfrak{J}(z) \in [T, T_1]\}$. De fato, pelo Corolário 3.29, o número de zeros ρ tais que $T \leq \mathfrak{J}(\rho) \leq T+1$ é $O(\log T)$. Então, existe $T_1 \in [T, T+1]$ tal que $|T_1 - \mathfrak{J}(\rho)| > 0$ para qualquer ρ zero de $\zeta(s)$ tal que $T \leq \mathfrak{J}(\rho) \leq T+1$ (observar que pela finitude dos zeros tais que $|T - \mathfrak{J}(\rho)| \leq 1$, podemos escolher T_1 de modo que não haja zeros no conjunto $(0, 1) \times [T, T_1]$). Logo, consideremos ρ' o zero de $\zeta(s)$ mais próximo da reta $\mathfrak{J}(s) = T_1$. Como $T \in [2, x]$, então $\log T > 0$. Além disso, desde que $\frac{1}{\log T} \rightarrow 0$, quando $T \rightarrow +\infty$, temos

$$|T_1 - \mathfrak{J}(\rho')| \gg \log^{-1} T \geq \log^{-1} x.$$

Agora considerando a integral

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{[b-iT_1, b+iT_1, -\frac{1}{2}+iT_1, -\frac{1}{2}-iT_1, b-iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds,$$

e usando (3.39), é claro que a função $\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s}$ tem polos simples em $s = 0, 1$ e os zeros ρ de $\zeta(s)$ tais que $|\mathfrak{J}(\rho)| \leq T_1$. Assim, pelo teorema de Cauchy, resulta que

$$J = x - \sum_{|\mathfrak{J}(\rho)| \leq T_1} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}. \quad (3.41)$$

Vamos continuar estimando as integrais

$$\begin{aligned} &\int_{[b+iT_1, -\frac{1}{2}+iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds, \\ &\int_{[-\frac{1}{2}+iT_1, -\frac{1}{2}-iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \end{aligned}$$

e

$$\int_{[-\frac{1}{2}-iT_1, b-iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds.$$

A primeira e terceira integrais têm o mesmo módulo. Então, nos limitaremos somente à primeira. Para ela, temos a estimativa

$$\left| \int_{[b+iT_1, -\frac{1}{2}+iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| \leq \int_{-1/2}^b \frac{|x^{\sigma+iT_1}|}{|\sigma+iT_1|} \left| \frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)} \right| d\sigma \leq \frac{x}{T_1} \int_{-1/2}^b \left| \frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)} \right| d\sigma. \quad (3.42)$$

Agora, para a segunda integral, temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{[-\frac{1}{2}+iT_1, -\frac{1}{2}-iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \int_{-T_1}^{T_1} \left| \frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)} \right| \frac{|x^{-1/2+it}|}{|-1/2+it|} dt \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{x}} \int_{-T_1}^{T_1} \left| \frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)} \right| dt. \end{aligned} \quad (3.43)$$

No que segue, vamos utilizar o Lema 3.30, do seguinte modo. Para $\sigma \in (-1/2, b)$ e x suficientemente grande

$$\frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)} = \sum_{\rho: |T_1-\gamma| \leq 1} \frac{1}{(\sigma-\beta)+i(T_1-\gamma)} + O(\log T_1). \quad (3.44)$$

Sabemos, também, pela escolha de T_1 , que $|T_1 - \gamma| \gg \frac{1}{\log T}$ e, pelo Corolário 3.29, que a quantidade de zeros tais que $|T_1 - \gamma| \leq 1$ é $O(\log T_1)$. Então, se $|T_1 - \gamma| \leq 1$, temos

$$\left| \frac{1}{(\sigma-\beta)+i(T_1-\gamma)} \right| \leq \frac{1}{|T_1-\gamma|} \ll \log T$$

de onde

$$\sum_{\rho: |T_1-\gamma| \leq 1} \left| \frac{1}{(\sigma-\beta)+i(T_1-\gamma)} \right| \ll \log T \log T_1 \leq \log T \log(T+1) \leq \log T \log 2T \ll \log^2 T.$$

Portanto, substituindo em (3.44), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)} &= O(\log^2 T) + O(\log T_1) \ll O(\log^2 T) + O(\log(T+1)) \ll O(\log^2 T) + O(\log 2T) \\ &\Rightarrow \frac{\zeta'(\sigma+iT_1)}{\zeta(\sigma+iT_1)} = O(\log^2 T). \end{aligned}$$

Assim, usando este resultado em (3.42), obtemos

$$\left| \int_{[b+iT_1, -\frac{1}{2}+iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| \ll \frac{x}{T} (3/2 + \log^{-1} x) \log^2 T \ll \frac{x \log^2 x}{T}. \quad (3.45)$$

Novamente, pelo Lema 3.25, para $t \geq 1$ temos

$$\frac{\zeta'(-1/2+it)}{\zeta(-1/2+it)} = \sum_{\rho: |t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{(-1/2-\beta)+i(t-\gamma)} + O(\log t),$$

e também, pelo Corolário 3.29, o número de zeros tais que $|t - \gamma| \leq 1$ é $O(\log t)$. Então, a soma do lado direito da igualdade anterior é $O(\log t)$. Portanto, para $1 \leq t \leq T_1$.

$$\frac{\zeta'(-1/2 + it)}{\zeta(-1/2 + it)} = O(\log t) = O(\log T_1),$$

e, usando (3.43),

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}}{2} \left| \int_{[-\frac{1}{2} + iT_1, -\frac{1}{2} - iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds \right| &\leq \int_0^1 \left| \frac{\zeta'(-1/2 - it)}{\zeta(-1/2 - it)} \right| dt + \int_1^{T_1} \left| \frac{\zeta'(-1/2 - it)}{\zeta(-1/2 - it)} \right| dt \\ &\quad + \int_0^1 \left| \frac{\zeta'(-1/2 + it)}{\zeta(-1/2 + it)} \right| dt + \int_1^{T_1} \left| \frac{\zeta'(-1/2 + it)}{\zeta(-1/2 + it)} \right| dt \ll T_1 \log T_1 \\ &\Rightarrow \int_{[-\frac{1}{2} + iT_1, -\frac{1}{2} - iT_1]} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds = O\left(\frac{T_1 \log T_1}{\sqrt{x}}\right) = O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Assim, usando (3.45) e (3.46) em (3.41), e depois em (3.40), segue o resultado enunciado do Teorema 3.31. $\square$

Teorema 3.32. *Existe $c > 0$ tal que, para qualquer zero $\rho = \beta + i\gamma$, temos*

$$\beta < 1 - \frac{c}{\log(|\gamma| + 2)}.$$

Demonstração: De (3.27), temos que, para $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(1, +\infty)$,

$$\begin{aligned} -\Re \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) &= \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t \log n) \\ \Rightarrow -3\Re \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\Re \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} - \Re \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} &= \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-\sigma} (3 + 4 \cos(t \log n) + \cos(2t \log n)). \end{aligned}$$

Mas, como vimos na demonstração do Teorema 3.19, para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$, temos que $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta \geq 0$. Então, na igualdade anterior, temos

$$-3\Re \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - 4\Re \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} - \Re \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \geq 0. \quad (3.47)$$

Logo, se $1 < \sigma \leq 2$, por (3.26), sabemos que $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ tem um polo simples em $s = 1$. Portanto,

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + A_1. \quad (3.48)$$

Ademais, por (3.28), temos que

$$\left| \frac{\Gamma'(\frac{s}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)} \right| \ll \log |t|.$$

Então, de (3.26), para $|t|$ suficientemente grande, existe $A_2 > 0$ tal que

$$-\Re \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \leq A_2 \log |t| - \sum_{\rho} \Re \left(\frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right). \quad (3.49)$$

Como $\Re\left(\frac{1}{s-\rho}\right) = \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} > 0$ e $\Re\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} > 0$, onde $\rho = \beta + i\gamma$, então, da desigualdade anterior, para $|t|$ suficientemente grande, temos que

$$-\Re\frac{\zeta'(\sigma+2it)}{\zeta(\sigma+2it)} \leq A_2 \log |t|. \quad (3.50)$$

Assim, de (3.48), (3.49), (3.50) e usando o fato de que para qualquer ρ , $\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \leq \sum_{\rho} \Re\left(\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right)$, considerando (3.47), temos, para qualquer ρ ,

$$0 \leq \frac{3}{\sigma-1} + 3A_1 + A_4 \log |t| - \frac{4(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2},$$

para $|t|$ suficientemente grande ($A_4 = 5A_2$). Logo, da desigualdade acima, temos que existe $M > 0$ tal que

$$\frac{4(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2} \leq \frac{3}{\sigma-1} + A_5 \log |t|,$$

para $|t| \geq M$ e para alguma constante $A_5 > 0$. Também, sem perda de generalidade, assumimos que $M \geq e$. Assim, tomando $t = \gamma$ e $\sigma = 1 + \frac{1}{2A_5 \log |\gamma|}$, na desigualdade acima, temos

$$\frac{4}{\sigma-\beta} \leq \frac{3}{\sigma-1} + A_5 \log |\gamma|,$$

simplificando

$$\begin{aligned} \beta &\leq 1 - \frac{1}{14A_5 \log |\gamma|} \\ \Rightarrow \beta &< 1 - \frac{1}{14A_5 \log(|\gamma| + 2)}. \end{aligned}$$

Agora consideremos ρ tal que $|\gamma| < M$. Então, como não existem zeros na fronteira da faixa crítica, existe $\delta_\rho > 0$ tal que $\beta < 1 - \delta_\rho$. Pondo $\delta_0 = \min_{\rho \in (0,1) \times (-M,M)} \delta_\rho$, para qualquer $\rho = \beta + i\gamma$ com $|\gamma| < M$, temos

$$\beta < 1 - \delta_0.$$

Assim, basta tomar $c' > 0$ tal que $\frac{c'}{\delta_0} < \log(|\gamma| + 2)$ para qualquer $\rho \in (0,1) \times (-M,M)$, logo considere $c := \min\{\frac{1}{14A_5}, c'\}$. $\square$

Agora, com todos os resultados apresentados acima, estamos prontos para enunciar e provar o Teorema dos Números Primos.

Teorema 3.33 (Teorema dos Números Primos). *Para $x \geq 2$,*

$$\Psi(x) = x + O(x \exp(-\delta \sqrt{\log x})),$$

para alguma constante $\delta > 0$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.31, sabemos que, para $2 \leq T \leq x$,

$$\Psi(x) = x - \sum_{\mathfrak{I}(\rho) \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right). \quad (3.51)$$

Pelo Teorema 3.32, para $|\rho| \leq T$, temos que

$$\Re(\rho) \leq 1 - \frac{c}{\log(|\Im(\rho)| + 2)} \leq 1 - \frac{c/2}{\log T}.$$

Então,

$$\left| \frac{x^\rho}{\rho} \right| = \frac{x^{\Re(\rho)}}{|\rho|} \leq \frac{x \exp\left(-\frac{c \log x}{2 \log T}\right)}{|\rho|},$$

e, como o número de zeros ρ tais que $|\rho| < T$ é $O(T^2)$ (isso é uma consequência da prova de (2.38), porque aqui nós provamos que $n(2R) \ll_\epsilon R^{1+\epsilon}$, para qualquer $\epsilon > 0$, assim tomando $\epsilon = 1$ o resultado é obtido), concluímos que

$$\sum_{\Im(\rho) \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} = O\left(x T^2 \exp\left(-\frac{c \log x}{2 \log T}\right)\right).$$

Agora, tomando $T = \exp\left(\frac{\sqrt{c/2 \log x}}{2}\right)$, temos

$$\sum_{\Im(\rho) \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} = O\left(x \exp\left(-\sqrt{\frac{c}{2}} \sqrt{\log x}\right)\right), \quad (3.52)$$

e, também, que

$$\frac{x \log^2 x}{\exp\left(\frac{\sqrt{c/2 \log x}}{2}\right)} \ll x \exp\left(-\frac{\sqrt{c}}{4} \sqrt{\log x}\right). \quad (3.53)$$

Assim, tomando $\delta = \frac{\sqrt{c}}{4}$ e substituindo (3.52) e (3.53) em (3.51), concluímos a demonstração do Teorema dos Números Primos. $\square$

Observamos que esta não é a versão mais conhecida do Teorema dos Números Primos. Mas, vamos provar que o Teorema 3.33 implica nesta versão. Para isso, lembremos que

$$\Psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

De forma equivalente, o lado direito dessa equação pode ser reescrito como

$$\Psi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}: p \leq x} a_p(x) \log p,$$

onde $a_p(x)$ é o maior inteiro tal que $p^{a_p(x)} \leq x$. Agora, observemos que $p^{a_p(x)} \leq x$ é equivalente a ter $a_p(x) \leq \frac{\log x}{\log p}$. Mas, como $a_p(x)$ é o maior inteiro com esta propriedade, então $a_p(x) = \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor$. Portanto, podemos escrever

$$\Psi(x) = \sum_{p \in \mathbb{P}: p \leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p. \quad (3.54)$$

Agora, definindo a função $\pi(x)$, que conta o número de primos menores que x dado, como

$$\pi(x) := \sum_{p \in \mathbb{P}: p \leq x} 1.$$

Essa é a função envolvida na versão original do teorema dos números primos, que é de grande importância na teoria analítica dos números. Com isso, estamos prontos para provar o seguinte teorema.

Teorema 3.34. $\Psi(x) \sim x$ se e somente se $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Demonstração: De (3.54)

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \sum_{p \in \mathbb{P}: p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p} \right] \log p \leq \sum_{p \in \mathbb{P}: p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \log x \sum_{p \in \mathbb{P}: p \leq x} 1 = \log(x) \pi(x) \\ &\Rightarrow \frac{\Psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Também, se $1 < y < x$,

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \pi(y) + \sum_{p \in \mathbb{P}: y < p \leq x} 1 < y + \sum_{p \in \mathbb{P}: y < p \leq x} \frac{\log p}{\log y} \leq y + \frac{1}{\log y} \Psi(x) \\ &\Rightarrow \pi(x) \leq y + \frac{1}{\log y} \Psi(x). \end{aligned}$$

Agora, seja x suficientemente grande tal que $1 < \frac{x}{\log^2 x}$ e $1 < \log(x)$. Então, tomando $y = \frac{x}{\log^2 x}$, temos na desigualdade acima

$$\begin{aligned} \pi(x) &\leq \frac{x}{\log^2 x} + \frac{1}{\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)} \Psi(x) \\ &\Rightarrow \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\log x}{\log x - 2 \log(\log x)} \left(\frac{\Psi(x)}{x} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

O resultado segue das desigualdades (3.55) e (3.56). $\square$

Portanto, da nossa versão do teorema dos números primos e o teorema último, o seguinte corolário é direto.

Corolário 3.35 (Versão Original do Teorema dos Números Primos).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Agora vejamos quais consequências a Hipótese de Riemann traz ao resultado do Teorema dos Números Primos. Vamos ver, sem entrar em muitos detalhes, que se assumimos a Hipótese de Riemann como verdadeira então temos um comportamento assintótico aprimorado (correção) daquele dado no Corolário 3.35.

Da demonstração do Teorema 3.25, temos que existe $C > 0$ tal que, para $|s|$ suficientemente grande, vale

$$|\xi(s)| \leq \exp(C|s| \log |s|).$$

Logo, desta última desigualdade e pelo Corolário 2.16, temos que

$$\log(2)n\left(\frac{R}{2}\right) \leq \int_{R/2}^R \frac{n(r)}{r} dr \leq \int_0^R \frac{n(r)}{r} dr + \log |\xi(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\xi(Re^{i\theta})| d\theta < 2CR \log R, \quad (3.57)$$

para R suficientemente grande. Por outro lado, se a hipótese de Riemann é verdadeira, então os zeros não-triviais são da forma $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$, logo de (3.57), temos que o número de zeros não-triviais, tais que $|\gamma| \leq T$ é $O(T \log T)$. Mas, do Teorema 3.31, sabemos que para $2 \leq T \leq x$

$$\Psi(x) = x - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \log^2 x}{T}\right). \quad (3.58)$$

Tomando $T = x^{1/2}$, temos

$$\left| \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} \right| \leq x^{1/2} \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{1}{\gamma}. \quad (3.59)$$

Agora, se denotamos por $N(T)$ o número de zeros na faixa crítica, tais que $|\gamma| \leq T$, então

$$\sum_{0 < |\gamma| \leq T} \frac{1}{\gamma} = \int_0^T \frac{1}{t} dN(t) = \frac{N(T)}{T} + \int_0^T \frac{N(t)}{t^2} dt,$$

e desde que $N(T) = O(T \log T)$

$$\Rightarrow \left| \sum_{0 < |\gamma| \leq T} \frac{1}{\gamma} \right| = O(\log^2 T).$$

Logo, a partir desta última igualdade em (3.59) e, depois em (3.58), temos

$$\Psi(x) = x + O(x^{1/2} \log^2 x). \quad (3.60)$$

Além disso, considerando a *função integral logarítmica Euleriana* $\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$, vale

$$\text{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad (3.61)$$

o que é demonstrado usando a Regra de l'Hôpital. Finalmente usando (3.60) e (3.61), é obtida a seguinte estimativa

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O(x^{1/2} \log x).$$

Assim, vemos que, se a hipótese de Riemann é verdadeira, então isso nos dá uma melhor estimativa para a distribuição de números primos menores que uma quantidade dada.

3.3 A Conjetura de Hilbert-Pólya e a Hipótese de Riemann

Nesta seção vamos discutir, sem entrar em detalhes, a conhecida conjectura de Hilbert-Pólya, que relaciona a zeros não-triviais de $\zeta(s)$ com os autovalores de um operador Hermitiano ilimitado.

Conjetura 3.36 (Conjetura de Hilbert-Pólya). *Existe um operador hermitiano tal que seus autovalores são as partes imaginárias dos zeros não-triviais de $\zeta(s)$.*

Claramente, esta hipótese está intimamente relacionada com a hipótese de Riemann. Com efeito, seja $s = \frac{1}{2} + i\lambda$. Logo, se temos que $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ denota um espaço de Hilbert separável e H um operador hermitiano definido em $\mathcal{H}$ com autovalor λ , então, se f é um autovetor de H associado a λ , temos que

$$Hf = \lambda f.$$

Como H é hermitiano, então $\lambda \in \mathbb{R}$. Como mencionado anteriormente foram calculados 1.5 bilhões de zeros não-triviais de $\zeta(s)$. Quando se fez um estudo probabilístico destes zeros foram encontrados semelhanças entre a distribuição desses zeros e os valores próprios de alguns operadores quânticos. Estas semelhanças apoiam a ideia de Hilbert e Pólya e motiva a busca de um operador hermitiano que esteja ligado a $\zeta(s)$ e à mecânica quântica. A primeira ideia natural é que este operador hermitiano seja definido em um espaço unidimensional. Mas, infelizmente, as tentativas para encontrar este operador cujos autovalores, de alguma forma, explicam ou tenham alguma relação com os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ não tiveram sucesso. Portanto, se houver, este operador pode ser definido em um espaço de dimensão infinita. Para o leitor interessado, recomendamos as referências [4] e [23].

3.4 Outras Formulações Equivalentes para a Hipótese de Riemann

Nesta seção, apresentamos algumas formulações equivalentes da Hipótese de Riemann. A primeira irá considerar uma representação de $\xi(s)$ como um produto infinito. Alternativo à representação como produto infinito, de uma função inteira de ordem um. A segunda é de grande importância na teoria das cordas (ver [12]).

Como vimos anteriormente, $\xi(s)$ é uma função inteira. Então, assumimos que ela pode ser representada como segue

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho} \right), \quad (3.62)$$

este resultado é demonstrável e uma prova completa do mesmo é apresentada em [10]. Agora, definamos ϕ do seguinte modo

$$\phi(s) := \xi \left(\frac{s}{s-1} \right).$$

Então, por (3.15), temos que

$$\begin{aligned}\phi(s) &= \xi\left(1 - \frac{s}{s-1}\right) = \xi\left(\frac{1}{1-s}\right) \\ \Rightarrow \phi(s) &= \xi\left(\frac{s}{s-1}\right) = \xi\left(\frac{1}{1-s}\right).\end{aligned}\tag{3.63}$$

Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 3.37 . *A Hipótese de Riemann é verdadeira se e somente se $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \in H(B(0;1))$.*

Demonstração: Notemos que a aplicação $s \mapsto \frac{s}{s-1}$ mapeia $\mathcal{L}$ em $\partial B(0;1)$ e o conjunto $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \Re(s) < \frac{1}{2}\}$ em $B(0;1)$. Também, pelo Teorema 3.23, os zeros de $\zeta(s)$ são simétricos com relação à reta crítica. Então, se a Hipótese de Riemann é verdadeira, os zeros de $\phi(s)$ estão em $\partial B(0;1)$. Além disso, pelo princípio do argumento, como o número de zeros de $\phi(s)$ em qualquer região triangular $T \subset B(0;1)$ é dado por $\oint_{\partial T} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz$, temos

$$\oint_{\partial T} \frac{\phi'(z)}{\phi(z)} dz = 0,\tag{3.64}$$

então, pelo Teorema de Morera [8], $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \in H(B(0;1))$. Reciprocamente, se $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \in H(B(0;1))$, então vale a equação (3.64). Logo, $\phi(s)$ não tem zeros em $B(0;1)$. Assim, os zeros de $\phi(s)$ estão em $\partial B(0;1)$ e isso implica que os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ estão na reta crítica. $\square$

Agora, se a Hipótese de Riemann é verdadeira do teorema acima sabemos que $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}$ admite uma representação em série de Taylor. Então, podemos ver o que acontece com os coeficientes presentes nessa série ou que propriedades podem ser satisfeitas por eles. A série de Taylor com centro em $s = 0$ e raio conveniente para a função $\frac{\phi'(s)}{\phi(s)}$ é

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \sum_{n \geq 0} k_{n+1} s^n,$$

onde os coeficientes k_n com $n \geq 1$ podem ser calculados por derivação logaritmica de $\phi(s)$. Usando (3.62), temos que

$$\phi(s) = \phi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{(s-1)\rho}\right) = \phi(0) \prod_{\rho} \frac{1 - (1-1/\rho)s}{1-s},$$

e derivando logaritmicamente temos que $k_1 = \sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$. Mas, sabemos pelo Corolário 3.27 que $\sum_{\rho} \left|\frac{1}{\rho}\right|$ diverge, assim temos o seguinte corolário.

Corolário 3.38 . *Se a Hipótese de Riemann é verdadeira, então a série $\sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$ converge condicionalmente.*

Vamos continuar apresentando outra forma equivalente da Hipótese de Riemann. Esta equivalência se deve a Jeffrey C. Lagarias [17]. Para essa equivalência, vamos precisar da constante de Euler-Mascheroni que é definida como

$$\gamma_E := \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \log n),$$

onde $H_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$. Seu valor numérico aproximado é $0,577215664901532860606\dots$. Esta constante tem a peculiaridade de ser um número real que ainda não sabemos se é racional ou irracional.

Vamos precisar também dos resultados apresentados nos teoremas abaixo, onde-como usual-a notação $d|n$ significa que d divide n .

Teorema 3.39 . *Se a Hipótese de Riemann é verdadeira, então para qualquer $n \geq 5041$*

$$\sum_{d|n} d \leq e^{\gamma_E} n \log \log n.$$

Teorema 3.40 . *Se a Hipótese de Riemann é falsa, então existem constantes $0 < \beta < 1/2$ e $C > 0$ tais que*

$$\sum_{d|n} d \geq e^{\gamma_E} n \log \log n + \frac{Cn \log \log n}{(\log n)^\beta},$$

para infinitos valores de n .

As provas destes dois teoremas são bastante técnicas e exigiriam um grande desvio que evitaremos aqui. O primeiro teorema é o Teorema 1 da Ref. [21]. O segundo é uma consequência da Proposição 1 da Seção 4 de [21]. Para mais detalhes remetemos [21] e [17].

Vemos que, nos dois teoremas anteriores os termos do lado direito não diferem muito, isso e o fato que a Hipótese de Riemann está sendo envolvido em cada um dos casos já nos adverte da possibilidade de haver algum resultado muito importante na origem desses resultados. Agora, para continuar buscando mais um equivalente da Hipótese de Riemann, vamos precisar dos dois lemas seguintes.

Lema 3.41 . *Para $n \geq 3$,*

$$\exp(H_n) \log(H_n) \geq e^{\gamma_E} n \log \log n.$$

Demonstração: Primeiro, vamos provar que

$$\int_1^n \frac{1}{t^2} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq t} 1 \right) dt = \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n} \int_r^n \frac{1}{t^2} dt, \quad (3.65)$$

para $n \in \mathbb{N}$. De fato, para $n = 1$, o resultado é evidente, admitamos que $\int_1^n \frac{1}{t^2} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq t} 1 \right) dt = \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n} \int_r^n \frac{1}{t^2} dt$ (hipótese indutiva). Então, para $n + 1$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n+1} \int_r^{n+1} \frac{1}{t^2} dt &= \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n} \int_r^{n+1} \frac{1}{t^2} dt = \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n} \left(\int_r^n \frac{1}{t^2} dt + \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \right) \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n} \int_r^n \frac{1}{t^2} dt + \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n} \int_r^n \frac{1}{t^2} dt + \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq t} 1 \right) dt \\
&= \int_1^n \frac{1}{t^2} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq t} 1 \right) dt + \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq t} 1 \right) dt = \int_1^{n+1} \frac{1}{t^2} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq t} 1 \right) dt,
\end{aligned}$$

onde o penúltimo passo segue da hipótese indutiva.

Agora, vamos provar o resultado principal. Consideremos a seguinte integral

$$\int_1^n \frac{[t]}{t^2} dt = \int_1^n \frac{1}{t^2} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq t} 1 \right) dt.$$

Usando aqui a Eq. (3.65), temos

$$\begin{aligned}
\int_1^n \frac{[t]}{t^2} dt &= \sum_{r \in \mathbb{Z}: 1 \leq r \leq n} \int_r^n \frac{1}{t^2} dt = \sum_{r=1}^n \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{n} \right) = H_n - 1 \\
&\Rightarrow H_n = \log n + 1 - \int_1^n \frac{t - [t]}{t^2} dt. \tag{3.66}
\end{aligned}$$

Desta última igualdade, temos que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \log n) = 1 - \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt$. Então, voltando para a mesma igualdade, temos

$$\begin{aligned}
H_n &= \log n + 1 - \int_1^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt + \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt \\
&= \log n + \gamma_E + \int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt.
\end{aligned}$$

Além disso, é claro que $\int_n^{+\infty} \frac{t - [t]}{t^2} dt \geq 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Então, da igualdade acima

$$\begin{aligned}
H_n &\geq \log n + \gamma_E \\
&\Rightarrow \exp(H_n) \geq e^{\gamma_E} n. \tag{3.67}
\end{aligned}$$

Também, como $H_n \geq \log n$ para $n \geq 3$, então $\log(H_n) \geq \log \log n$ para $n \geq 3$. Assim, desta última desigualdade e de (3.67), multiplicando membro a membro, temos o resultado procurado. $\square$

Lema 3.42 . Para $n \geq 3$,

$$H_n + \exp(H_n) \log(H_n) \leq e^{\gamma_E} n \log \log n + \frac{4n}{\log n}.$$

Demonstração: Para $n \in \mathbb{N}$, seja $R_n := H_n - \log(n+1)$ é claro que R_n pode se escrever da seguinte forma

$$R_n = \int_1^{n+1} \left(\frac{1}{[t]} - \frac{1}{t} \right) dt,$$

de onde vemos que $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de termos não negativos. Também,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n - \log(n+1)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(H_{n+1} - \log(n+1) - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \gamma_E - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= \gamma_E. \end{aligned}$$

Então, temos

$$\begin{aligned} H_n - \log(n+1) &\leq \gamma_E \\ \Rightarrow \exp(H_n) &\leq e^{\gamma_E} (n+1). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Mas, de (3.66), temos para $n \geq 3$

$$\begin{aligned} H_n &\leq \log n + 1 \\ \Rightarrow \log(H_n) &\leq \log(\log n + 1) = \log \left(\left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \log n \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Usando o fato que $\log(1+x) \leq x$, para $x \geq 0$, temos que $\log \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \leq \frac{1}{\log n}$. Então, $\log \left(1 + \frac{1}{\log n} \right) + \log \log n \leq \frac{1}{\log n} + \log \log n$, o que implica $\log \left(\left(1 + \frac{1}{\log n} \right) \log n \right) \leq \log \log n + \frac{1}{\log n}$. Assim, de (3.69) obtemos

$$\log(H_n) \leq \log \log n + \frac{1}{\log n}, \quad (3.70)$$

para $n \geq 3$. Logo de (3.68) e de (3.70), multiplicando membro a membro,

$$\exp(H_n) \log(H_n) \leq e^{\gamma_E} n \log \log n + \frac{e^{\gamma_E} n}{\log n} + e^{\gamma_E} \left(\log \log n + \frac{1}{\log n} \right),$$

para $n \geq 3$. Também, da desigualdade $2x \log x + 2 \leq e^x$, para $x \geq 1$, tomando $x = \log n$ tem-se que, para $n \geq 3$,

$$\log \log n + \frac{1}{\log n} \leq \frac{n}{2 \log n}.$$

Desta última desigualdade e da desigualdade precedente, segue que

$$\exp(H_n) \log(H_n) \leq e^{\gamma_E} n \log \log n + \frac{3e^{\gamma_E} n}{2 \log n}, \quad (3.71)$$

para $n \geq 3$. Agora, considerando a desigualdade $x^2 + x \leq e^x$, para $x \geq \log 3$, e escrevendo $x = \log n$ com $n \geq 3$, temos

$$\log n + 1 \leq \frac{n}{\log n},$$

para $n \geq 3$; assim, de (3.66), $H_n \leq \log n + 1$, para $n \geq 3$, e da desigualdade acima

$$H_n \leq \frac{n}{\log n},$$

para $n \geq 3$. Finalmente, desta desigualdade e de (3.71), somando membro a membro, obtemos

$$H_n + \exp(H_n) \log(H_n) \leq e^{\gamma_E} n \log \log n + \frac{(3e^{\gamma_E}/2 + 1)n}{2 \log n}, \quad n \geq 3.$$

Observando que $1 + 3e^{\gamma_E}/2 < 4$ (isto é devido à que $\gamma_E \approx 0,577215664901532860606\dots$), temos, no lado direito da desigualdade acima, e concluímos a prova. $\square$

Com todos os resultados acima, estamos prontos para demonstrar a seguinte equivalência da Hipótese de Riemann, descrita no seguinte teorema.

Teorema 3.43. *A Hipótese de Riemann é verdadeira se e somente se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n),$$

onde a igualdade só é válida para $n = 1$.

Demonstração: Admitamos que a Hipótese de Riemann é verdadeira. Então, pelo Teorema 3.39 e pelo Lema 3.41, temos que, para $n \geq 5041$,

$$\sum_{d|n} d \leq e^{\gamma_E} n \log \log n \leq \exp(H_n) \log(H_n) < H_n + \exp(H_n) \log(H_n).$$

Agora, para $1 \leq n < 5041$, pode-se verificar a mesma desigualdade calculando os valores para cada termo e comparando.

Reciprocamente, se $\sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n)$, para $n \in \mathbb{N}$, então a Hipótese de Riemann é verdadeira, porque, do contrário pelo Teorema 3.40 e da hipótese, temos que existem $\beta \in (0, 1/2)$ e $C > 0$ tais que

$$\begin{aligned} e^{\gamma_E} n \log \log n + \frac{Cn \log \log n}{(\log n)^\beta} &\leq \sum_{d|n} d \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n) \\ \Rightarrow e^{\gamma_E} n \log \log n + \frac{Cn \log \log n}{(\log n)^\beta} &\leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n), \end{aligned}$$

para infinitos valores de n . Mas, pelo Lema 3.42, e da desigualdade acima, temos que

$$H_n + \exp(H_n) \log(H_n) - \frac{4n}{\log n} + \frac{Cn \log \log n}{(\log n)^\beta} \leq H_n + \exp(H_n) \log(H_n),$$

para infinitos n ; o que implica que

$$\frac{\log n \log \log n}{(\log n)^\beta} \leq \frac{4}{C},$$

para infinitos n , e esta última desigualdade é um absurdo. $\square$

Concluindo, adicionando aos resultados apresentados na Tabela da página 42 os outros resultados aqui obtidos para os zeros não-triviais ρ de $\zeta(s)$.

- (i) Existe um número infinito enumerável de zeros não-triviais.
- (ii) Os zeros não-triviais fornecem uma prova do limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$.
- (iii) Se a Hipótese de Riemann é verdadeira, $\sum_{\rho} \frac{1}{\rho}$ converge condicionalmente.

Zeta de Riemann e a Física

Neste capítulo vamos apresentar algumas relações entre $\zeta(s)$ e seus zeros não-triviais com a Física. Exploraremos essa relação apenas em nível introdutório. Observamos, contudo, que essa relação é bastante vasta. Referências são dadas para os temas tratados aqui. Num aspecto mais geral, sugerimos consultar o site:

<http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin//zeta/physics.htm>

Na primeira seção, apresentamos a regularização zeta, onde aplicaremos os resultados referentes a essa questão para obter os determinantes de uma família de operadores lineares, onde um desses operadores é de grande importância na mecânica quântica (o Hamiltoniano do oscilador harmônico unidimensional). Logo na segunda seção, apresentamos o bilhar circular (clássico) aberto. Neste modelo, vamos ver a relação que temos com algumas funções aritméticas conhecidas (a função totiente de Euler e a função de Möbius) e também o que é de extrema importância para nós, sua relação com $\zeta(s)$ e os zeros desta. Finalmente, na terceira seção, apresentamos dois modelos da mecânica estatística criados por Bernard Julia. O primeiro deles, tem a função $\zeta(s)$ como função de partição e naturalmente se relaciona com os números primos (Primon Gas). Em seguida, apresentamos, sem entrar em muitos detalhes, outro modelo, que é devido a Andreas Knauf. Concluimos revelando uma semelhança entre as funções de partição dos três modelos discutidos.

Como o nosso foco é a função zeta, omitiremos a demonstração de alguns resultados importantes na sequência, nos limitamos a citar referências onde podem ser encontrados.

4.1 Regularização Zeta

Para começar, vamos motivar esta seção introduzindo dois exemplos da ideia de regularização zeta, nos casos em que podemos usar o que foi feito nas seções anteriores.

Em alguns modelos físicos temos a necessidade de calcular a soma dos números naturais, o que obviamente é uma soma divergente. Mas devido a vários fatos físicos envolvidos presume-se que esta soma deva ser regularizada de alguma forma para ser finita. Então, por conveniência, nós podemos escrever esta soma do seguinte modo

$$1 + 2 + 3 + \cdots = \left(\frac{1}{1}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} + \cdots$$

e esta quantidade parece tomar a forma de $\zeta(-1)$. Mas $s = -1$ não está em $\mathbb{H}(1, +\infty)$ onde $\zeta(s)$ é definida (em princípio) como a soma que já conhecemos. Assim, a fim de atribuir um valor finito para esta soma, podemos considerar a extensão meromorfa de $\zeta(s)$ (regularização zeta). Por isso, vamos dar essa soma o valor de $\zeta(-1)$.

Agora, dado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que $n! := n(n-1)(n-2)\cdots 1$ que, obviamente, está bem definido, mas se considerarmos $\prod_{n=1}^{+\infty} n$ este valor não é definido, pois este produto diverge. Vamos ver como este produto pode ser regularizado. Sabemos que, para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$,

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s};$$

e, como $\zeta(s) \in H(\mathbb{H}(1, +\infty))$, então

$$-\zeta'(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\log n}{n^s},$$

para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$. Logo, como $\zeta'(s)$ é definido em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ podemos escrever de forma errada $-\zeta'(0) = \sum_{n \geq 1} \log n$. Portanto,

$$e^{-\zeta'(0)} = e^{\sum_{n \geq 1} \log n} = \prod_{n \geq 1} e^{\log n} = \prod_{n \geq 1} n.$$

Então, agora podemos pensar que o produto infinito dos números naturais (que em realidade é não finito) é finito, atribuindo o valor de $e^{-\zeta'(0)}$ que é finito, pois $\zeta(s)$ admite uma continuação meromorfa com polo simples em $s = 1$.

Este último exemplo de regularização zeta é a chave do método de regularização do determinante de um operador em dimensão infinita. Admitamos ter um operador linear $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, onde $\dim \mathcal{X} = +\infty$. Assumamos que T tem um espectro discreto $\{\lambda_j, n_j\}_{j \geq 0}$ onde a multiplicidade n_j do autovalor λ_j é finita para qualquer $j \geq 0$. Assim, de alguma forma, devemos ter

$$\det T = \prod_{j \geq 0} \lambda_j^{n_j}. \quad (4.1)$$

Mas, novamente, temos um problema pois o produto infinito geralmente diverge. Para regularizar o produto anterior, consideremos a seguinte função

$$\zeta_T(s) := \sum_{j \geq 1} \frac{n_j}{\lambda_j^s}, \quad \Re(s) \gg 0, \quad (4.2)$$

esta função é comumente chamada, em Física, como a *função zeta espectral* de T . Agora, como estamos interessados no caso em que $\lambda_j > 0$, para qualquer $j \geq 0$, prosseguimos formalmente, como foi feito anteriormente (incorretamente) e, temos

$$-\zeta'_T(s) = \sum_{j \geq 0} \frac{n_j \log \lambda_j}{\lambda_j^s}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\zeta'_T(0) &= \sum_{j \geq 0} n_j \log \lambda_j \\ \Rightarrow e^{-\zeta'_T(0)} &= \prod_{j \geq 0} e^{n_j \log \lambda_j} = \prod_{j \geq 0} \lambda_j^{n_j}. \end{aligned}$$

Comparando esta última expressão com (4.1) surge, naturalmente, uma maneira de definir o determinante de T como

$$\det T := e^{-\zeta'_T(0)}, \quad (4.3)$$

sempre que $\zeta_T(s)$ admita uma continuação meromorfa, pelo menos no semi-plano $\mathbb{H}(-\epsilon, +\infty)$, para algum $\epsilon > 0$.

Agora, vamos ver como todos estes resultados podem ser aplicados aos operadores do tipo Schrödinger da forma

$$T_M := -\frac{d^2}{dx^2} + x^{2M}, \quad M = 1, 2, \dots$$

e definidos em $L^2(\mathbb{R})$. No que segue, precisamos dos seguintes teoremas.

Teorema 4.44. T_M verifica as seguintes condições:

- (i) *é positivo,*
- (ii) *tem resolvente compacta,*
- (iii) *tem espectro discreto $\{\lambda_j, n_j\}_{j \geq 0}$ (que depende de M), tal que verifica o seguinte*

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots; \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty,$$

e $n_j = 1$, para qualquer $j \geq 0$.

Demonstração: Seja λ um autovalor de T_M . Então, existe u não nulo, definido em algum intervalo aberto de $\mathbb{R}$, tal que

$$T_M u = \lambda u,$$

mas isto é equivalente a

$$u'' + (\lambda - x^{2M})u = 0.$$

Portanto, como esta última equação é uma equação de Sturm-Liouville, precisamos de recorrer aos resultados da Teoria de Sturm-Liouville. O item primeiro e segundo, são resultados obtidos em [25]. Em relação ao terceiro item, o fato que os autovalores estão em ordem estritamente crescente, é um resultado que pode ser encontrado em qualquer livro de Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais Ordinárias contendo resultados da Teoria de Sturm-Liouville, por exemplo [24]. Os outros resultados deste mesmo item, também são resultados de [25]. $\square$

Como os λ_j dependem de M , no que se segue, serão denotados como $\lambda_j = \lambda_j(M)$. Para M fixo, consideremos para qualquer $n = 0, 1, \dots$, a seguinte equação de autovalores

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\lambda_n(M) - x^{2M})y = 0, \quad (4.4)$$

e admitamos que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$. A equação $x^{2M} = \lambda_n(M)$ claramente tem duas raízes $-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}} < 0 < \lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}$, que satisfazem o seguinte resultado.

Proposição 4.45 .

$$\int_{-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}}^{\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}} (\lambda_n(M) - x^{2M})^{1/2} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

para qualquer $n = 0, 1, 2, \dots$

Demonstração: Este é um caso particular de um teorema mais geral que pode ser encontrado em [19]. $\square$

Teorema 4.46 . $\lambda_n(M)$ tem o seguinte comportamento assintótico

$$\lambda_n(M) \sim \left(\frac{M\sqrt{\pi}(2n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2M}\right)} \right)^{\frac{2M}{M+1}} \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Demonstração: Da Proposição 4.45, temos que

$$\int_{-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}}^{\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}} (\lambda_n(M) - x^{2M})^{1/2} dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4.5)$$

então a integral do lado esquerdo é

$$\begin{aligned} \int_{-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}}^{\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}} (\lambda_n(M) - x^{2M})^{1/2} dx &= 2 \int_0^{(\sqrt{\lambda_n(M)})^{1/M}} \sqrt{(\sqrt{\lambda_n(M)})^2 - x^{2M}} dx \\ &= 2\sqrt{\lambda_n(M)} \int_0^{(\sqrt{\lambda_n(M)})^{1/M}} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{\lambda_n(M)}^{1/M}}\right)^{2M}} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\frac{x}{\sqrt{\lambda_n(M)}^{1/M}} = y$, temos nesta última integral

$$\int_{-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}}^{\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}} (\lambda_n(M) - x^{2M})^{1/2} dx = 2 \left(\sqrt{\lambda_n(M)} \right)^{\frac{M+1}{M}} \int_0^1 \sqrt{1 - y^{2M}} dy.$$

Novamente, fazendo a mudança $y^{2M} = t$, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}}^{\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}} (\lambda_n(M) - x^{2M})^{1/2} dx &= \frac{\left(\sqrt{\lambda_n(M)} \right)^{\frac{M+1}{M}}}{M} \int_0^1 (\sqrt{1-x}) x^{\frac{1}{2M}-1} dx \\ \Rightarrow \int_{-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}}^{\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}} (\lambda_n(M) - x^{2M})^{1/2} dx &= \frac{\left(\sqrt{\lambda_n(M)} \right)^{\frac{M+1}{M}}}{M} \int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}-1} x^{\frac{1}{2M}-1} dx. \end{aligned}$$

Mas, aplicando (2.6) e (2.7) na última integral no lado direito obtemos

$$\int_{-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}}^{\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}} (\lambda_n(M) - x^{2M})^{1/2} dx = \frac{\left(\sqrt{\lambda_n(M)} \right)^{\frac{M+1}{M}} \Gamma\left(\frac{1}{2M}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{M \Gamma\left(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2}\right)},$$

e, usando $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

$$\int_{-\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}}^{\lambda_n(M)^{\frac{1}{2M}}} (\lambda_n(M) - x^{2M})^{1/2} dx = \frac{\left(\sqrt{\lambda_n(M)} \right)^{\frac{M+1}{M}} \Gamma\left(\frac{1}{2M}\right) \sqrt{\pi}}{2M \Gamma\left(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2}\right)}.$$

Assim, por (4.5), temos o seguinte resultado

$$\frac{\left(\sqrt{\lambda_n(M)} \right)^{\frac{M+1}{M}} \Gamma\left(\frac{1}{2M}\right) \sqrt{\pi}}{2M \Gamma\left(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2}\right)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Logo, existe $K > 0$ tal que, para n suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_n(M)^{\frac{M+1}{2M}} \Gamma\left(\frac{1}{2M}\right) \sqrt{\pi}}{2M \Gamma\left(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2}\right)} - \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \right| &\leq \frac{K}{n} \\ \Rightarrow \left| \frac{\lambda_n(M)^{\frac{M+1}{2M}} \Gamma\left(\frac{1}{2M}\right)}{M \sqrt{\pi} (2n+1) \Gamma\left(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2}\right)} - 1 \right| &\leq \frac{2K}{(2n+1)n\pi}, \end{aligned}$$

e, isto completa a prova do Teorema 4.46. $\square$

Se considerarmos a função zeta espectral de T_M , então por (4.2) e do Teorema 4.44, temos que

$$\zeta_{T_M}(s) = \sum_{j \geq 0} \frac{1}{\lambda_j^s}. \quad (4.6)$$

Para continuar, precisamos saber propriedades analíticas de $\zeta_{T_M}(s)$. Portanto, vamos provar o seguinte corolário.

Corolário 4.47. $\zeta_{T_M}(s)$ converge absolutamente em $\mathbb{H}(\frac{M+1}{2M}, +\infty)$, e é também analítica neste conjunto.

Demonstração: Do Teorema 4.46 ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n(M)}{\left(\frac{M\sqrt{\pi}(2n+1)\Gamma(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2M})} \right)^{\frac{2M}{M+1}}} &= 1 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^{\frac{2M}{M+1}}}{\lambda_n(M)} &= \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2M})}{M\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2})} \right)^{\frac{2M}{M+1}}. \end{aligned}$$

Escrevendo $l_M = \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2M})}{M\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{2M} + \frac{3}{2})} \right)^{\frac{2M}{M+1}}$, então da definição de limite temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $n \geq n_0$, então

$$\begin{aligned} \left| \frac{(2n+1)^{\frac{2M}{M+1}}}{\lambda_n(M)} - l_M \right| &< 1 \\ \Rightarrow \frac{(2n+1)^{\frac{2M}{M+1}}}{\lambda_n(M)} &< 1 + l_M \Rightarrow \frac{1}{\lambda_n(M)} < \frac{1 + l_M}{(2n+1)^{\frac{2M}{M+1}}} \\ \Rightarrow \left| \frac{1}{\lambda_n^s(M)} \right| &< \frac{(1 + l_M)^{\Re(s)}}{(2n+1)^{\frac{2M}{M+1}\Re(s)}}. \end{aligned}$$

Mas, como $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^{\frac{2M}{M+1}\Re(s)}}$ converge para qualquer $s \in \mathbb{H}(\frac{M+1}{2M}, +\infty)$, então pelo critério de comparação para séries, temos que $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{1}{\lambda_n^s(M)} \right| < \infty$, para qualquer $s \in \mathbb{H}(\frac{M+1}{2M}, +\infty)$. Agora, constatamos que $\zeta_{T_M}(s)$ é uma função analítica no semiplano $\mathbb{H}(\frac{M+1}{2M}, +\infty)$. De fato, é suficiente provar que a série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n^s(M)}$ converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{H}(\frac{M+1}{2M}, +\infty)$. Para tal, seja $A \subset \mathbb{H}(\frac{M+1}{2M}, +\infty)$, compacto, se $s = \sigma + it \in A$, então como A é compacto, existe $\sigma_0 > 0$ tal que $\frac{M+1}{2M} < \sigma_0 \leq \sigma$, para qualquer $s = \sigma + it \in A$. Logo, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(M) = +\infty$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n(M) \geq 1$ para qualquer $n \geq n_0$. Assim, para $s \in A$, temos $|\lambda_n^s(M)| = \lambda_n^\sigma(M)$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{\lambda_n^s(M)} \right| = \frac{1}{\lambda_n^\sigma(M)} \leq \frac{1}{\lambda_n^{\sigma_0}(M)}, \quad (4.7)$$

para $n \geq n_0$. Mas, pela convergência absoluta de $\zeta_{T_M}(s)$ em $\mathbb{H}(\frac{M+1}{2M}, +\infty)$, já provada, temos que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n^{\sigma_0}(M)} < \infty$, pois $\sigma_0 > \frac{M+1}{2M}$. Então, aplicando o teste de Weierstrass em (4.7), temos que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n^s(M)}$ converge uniformemente em A . Portanto $\zeta_{T_M}(s)$ é analítica neste conjunto e isto completa a prova. $\square$

Para continuar e tentar obter o resultado (4.3) para T_M , é natural perguntar se $\zeta_{T_M}(s)$ admite uma continuação meromorfa em $\mathbb{C}$, de modo que seja analítica em $s = 0$.

Através de exemplo, para exibir a continuação meromorfa de $\zeta_{T_M}(s)$, vamos considerar o caso em que $M = 1$. Neste caso, é bem conhecido na Física (note que T_1 é o Hamiltoniano

de um oscilador harmônico quântico unidimensional) que os autovalores de T_1 são da forma $\lambda_k = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Neste caso particular, temos que

$$\zeta_{T_1}(s) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^s}, \quad s \in \mathbb{H}(1, +\infty),$$

e, desenvolvendo a soma, temos

$$\begin{aligned} \zeta_{T_1}(s) &= \zeta(s) - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \right) = \zeta(s) - \frac{1}{2^s} \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} \right) \\ &= \zeta(s) - \frac{1}{2^s} \zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) \zeta(s) \\ \Rightarrow \zeta_{T_1}(s) &= \left(1 - \frac{1}{2^s} \right) \zeta(s), \quad s \in \mathbb{H}(1, +\infty). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Sabemos que $\zeta(s)$ é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com polo simples em $s = 1$. Então, de (4.8), temos que $\zeta_{T_1}(s)$ admite uma extensão meromorfa em $\mathbb{C}$ com polo simples em $s = 1$.

Consideremos agora M arbitrário. Sabemos, pelo Corolário 4.47, que $\zeta_{T_M}(s)$ é analítica em $\mathbb{H}(\frac{M+1}{2M}, +\infty)$, mas não conhecemos seus autovalores. Felizmente temos o apoio de um teorema devido a André Voros cuja demonstração se encontra em [28].

Teorema 4.48. $\zeta_{T_M}(s)$ é analítica em $s = 0$. Além disso,

$$\zeta'_{T_M}(0) = \log \sin \left(\frac{\pi}{2(M+1)} \right).$$

Portanto, temos o Corolário.

Corolário 4.49.

$$\det T_M = \csc \left(\frac{\pi}{2(M+1)} \right).$$

Demonstração: Do Teorema 4.48 e de (4.3), a prova segue diretamente. $\square$

4.2 O Bilhar Circular Aberto

Nesta seção, apresentamos um exemplo de um bilhar dinâmico, o bilhar circular, e sua relação com a Hipótese de Riemann.

Consideremos uma mesa de bilhar circular de raio unitário. Suponhamos que uma bola comece a se mover com uma velocidade unitária constante e admitamos que as colisões são elásticas, isto implica na conservação da energia cinética e que o ângulo de incidência e reflexão são iguais em cada reflexão nas paredes da mesa. O momento angular com respeito à origem também é preservado. Agora, os parâmetros que fixam a trajetória da bola são o ângulo de incidência ψ e o ângulo β mostrado na Fig. 4.1.

Figura 4.1: Bilhar circular.

Notemos que o período das órbitas determinadas pelas trajetórias da bola dependem de ψ , por exemplo, se $\psi = \frac{m\pi}{n}$ então o período da órbita é n , também observamos que, pelas condições do problema, o tempo entre cada colisão com a borda da mesa é $T = 2 \cos \psi$.

Novamente usando a geometria da figura acima, é claro, que a variação dos parâmetros é dada pela seguinte aplicação

$$(\psi, \beta) \mapsto (\psi, \beta + \pi - 2\psi).$$

Até agora, não há nada de complicado sobre o acima exposto. Com o propósito de introduzir mais um parâmetro para o problema, vamos considerar dois buracos no bordo da mesa, com comprimento ϵ , que dependem de um ângulo θ , como mostrado na Fig. 4.2.

Com essa nova condição, o problema se torna mais complicado, porque pode acontecer que a bola saia da mesa por algum desses buracos. Assim, com todas as condições impostas até agora, a primeira pergunta que propomos é, qual é a probabilidade $P(t)$ de que o escape da bola ocorra pelo menos após de um tempo t ? A primeira coisa a fazer para responder a esta pergunta, é saber as condições iniciais (ψ_0, β_0) para que o tempo de escape seja pelo menos t . Em [7], essas condições são dadas como segue: podemos tomar $\psi_0 = \psi_{m,n} + \eta$, onde $\psi_{m,n} = \pi/2 - m\pi/n$ com $m < n$ primos relativos (i.e. $(m, n) = 1$), $0 < \eta \ll \epsilon$ e β_0 pode-se tomar no seguinte conjunto

$$\beta'_0 \in \left(\epsilon + \frac{\eta t}{\cos \psi_{m,n}}, \theta' \right) \cup \left(\theta' + \epsilon + \frac{\eta t}{\cos \psi_{m,n}}, \frac{2\pi}{n} \right);$$

Figura 4.2: Bilhar circular aberto.

onde $\prime$ indica que os ângulos são tomados congruentes módulo $2\pi/n$. Em seguida, sob essas condições iniciais, temos que $P(t)$ é estimada da seguinte forma

$$P(t) \sim \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\left[\frac{2\pi}{\epsilon}\right]} \frac{n \left(g\left(\frac{2\pi}{n} - \theta' - \epsilon\right) + g(\theta' - \epsilon) \right)}{4\pi} \sum_{\substack{m=0 \\ (m,n)=1}}^{n-1} \sin^2 \frac{\pi m}{n}, \quad (4.9)$$

onde g é definido como segue

$$g(x) := \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Os detalhes de como avaliar $P(t)$ podem ser encontrados em [7].

Até agora, não encontramos nenhuma relação com a teoria dos números. Para ver como ela ocorre, vamos definir duas funções aritméticas de vital importância na teoria dos números, e relacioná-las com (4.9).

Definição 4.50 (Função totiente de Euler).

$$\varphi(n) := \text{Card}\{m \in \mathbb{N} : m < n, (m, n) = 1\}. \quad (4.10)$$

Definição 4.51 (Função de Möbius). Dado $n \in \mathbb{N}$ com decomposição primária $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$, definimos $\mu(n)$ como segue

$$\mu(n) := \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^k, & a_1 = a_2 = \dots = a_k = 1, \\ 0, & \text{outros casos.} \end{cases}$$

Uma das propriedades de μ mais importantes é dada no seguinte teorema.

Teorema 4.52 (Fórmula de inversão de Möbius). *Sejam f e g funções aritméticas tais que $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$. Então, vale que*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right).$$

O inverso também é válido.

Demonstração: Ver [3]. □

Agora para continuar com sucesso o nosso problema e apresentar uma propriedade da função de Möbius fundamental nesta seção, vamos precisar do seguinte teorema:

Teorema 4.53 .

$$\sum_{\substack{m=0 \\ (m,n)=1}}^{n-1} e^{\frac{2\pi im}{n}} = \mu(n).$$

Demonstração: É claro que a afirmação do teorema é equivalente a provar que a soma das raízes primitivas n -ésimas da unidade é $\mu(n)$. As raízes primitivas da unidade foram discutidas no Apêndice A. Então, se S_k (veja a Proposição **A.66**) é a soma das raízes primitivas k -ésimas da unidade, pela proposição **A.66**, se $F(m) := \sum_{d|m} S_d$, temos

$$F(m) = \begin{cases} 1, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1. \end{cases}$$

Logo, pelo Teorema 4.52 ,

$$S_n = \sum_{d|n} F(d) \mu\left(\frac{n}{d}\right) = F(1) \mu(n) = \mu(n).$$

□

A partir deste teorema, o seguinte corolário é óbvio.

Corolário 4.54 .

$$\sum_{\substack{m=0 \\ (m,n)=1}}^{n-1} \cos \frac{2\pi m}{n} = \mu(n).$$

Agora, temos todas as ferramentas para encontrar uma relação entre (4.9) e teoria dos números. Em (4.9), usando a identidade do arco duplo, a definição de φ dada na Eq. (4.10) e o Corolário 4.54 , temos

$$P(t) \sim \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\left[\frac{2\pi}{\epsilon}\right]} \frac{n \left(g\left(\frac{2\pi}{n} - \theta' - \epsilon\right) + g(\theta' - \epsilon) \right)}{8\pi} \sum_{\substack{m=0 \\ (m,n)=1}}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi m}{n} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\left[\frac{2\pi}{\epsilon}\right]} \frac{n \left(g\left(\frac{2\pi}{n} - \theta' - \epsilon\right) + g(\theta' - \epsilon) \right)}{8\pi} \left(\sum_{\substack{m=0 \\ (m,n)=1}}^{n-1} 1 - \sum_{\substack{m=0 \\ (m,n)=1}}^{n-1} \cos \frac{2\pi m}{n} \right) \\
&= \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\left[\frac{2\pi}{\epsilon}\right]} \frac{n \left(g\left(\frac{2\pi}{n} - \theta' - \epsilon\right) + g(\theta' - \epsilon) \right)}{8\pi} (\varphi(n) - \mu(n)) \\
&\Rightarrow P(t) \sim \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\left[\frac{2\pi}{\epsilon}\right]} \frac{n \left(g\left(\frac{2\pi}{n} - \theta' - \epsilon\right) + g(\theta' - \epsilon) \right)}{8\pi} (\varphi(n) - \mu(n)). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Assim, já obtivemos uma relação entre $P(t)$ e duas funções de muita importância na teoria analítica dos números. Mas ainda não temos uma relação do problema com a função $\zeta(s)$, de vital importância neste trabalho. Para esse fim, vamos considerar P_∞ a probabilidade de que as órbitas da bola não escapem da mesa. Por (4.11), P_∞ está dada, por

$$P_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} tP(t) = \frac{1}{8\pi} \sum_{n \geq 1} n(\varphi(n) - \mu(n)) \left(g\left(\frac{2\pi}{n} - \theta' - \epsilon\right) + g(\theta' - \epsilon) \right).$$

Obviamente, P_∞ é uma função de θ e ϵ . Portanto, no que segue, vamos escrever $P_\infty = P_\infty(\epsilon, \theta)$. Agora, se precisamos saber o comportamento de P_∞ como função de ϵ , consideramos a transformada de Mellin de P_∞ , definida por (veja Ref. [11])

$$\tilde{P}(s) := \int_0^\infty P_\infty(\epsilon, \theta) \epsilon^{s-1} d\epsilon,$$

de modo que P_∞ é dado como

$$P_\infty(\epsilon, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \epsilon^{-s} \tilde{P}(s) ds,$$

(transformada inversa de Mellin), onde a constante c é determinada de modo que a integral que define $\tilde{P}$ exista. Assim, usando a transformada de Mellin e analisando os valores de $\tilde{P}(s)$ é onde entra em jogo a função $\zeta(s)$. Bunimovich e Dettman [7], calcularam valores de $\tilde{P}(s)(q/2\pi)^{s+1}$ para $\theta = 2\pi/q$, com $q = 1, 2, 3, 4, 6$; e obtiveram a tabela a seguir

q	$\tilde{P}(s)(q/2\pi)^{s+1}$
1	$\frac{\zeta(s)-1}{2s(s+1)(s+2)\zeta(s+1)}$
2	$\frac{\zeta(s)}{s(s+1)(s+2)\zeta(s+1)}$
3	$\frac{3^s(7\zeta(s)+2^{s+2}(\zeta(s)-1)+2)-\zeta(s)(2^{s+2}+1)}{2s(s+1)(s+2)(3^{s+1}-1)\zeta(s+1)}$
4	$\frac{2^s(13\zeta(s)+3^{s+2}(\zeta(s)-1)+3)-\zeta(s)(3^{s+2}+5)}{4s(s+1)(s+2)(2^{s+1}-1)\zeta(s+1)}$
6	$\frac{(\pi/3)^{s+1}(6^s+8.12^s-25.30^s+(1-3.2^s-13.3^s-8.4^s+25.5^s+27.6^s-25.10^s+8.12^s-25.15^s+25.30^s)\zeta(s))}{2s(s+1)(s+2)(2^{s+1}-1)(3^{s+1}-1)\zeta(s+1)}$

Assim, vemos que este problema está relacionado com $\zeta(s)$. Além disso, na tabela acima, o termo $\zeta(s+1)$ aparece no denominador de cada resultado. Por isso, se considerarmos os zeros não-triviais de $\zeta(s+1)$, eles nos fornecem divergências de $\tilde{P}(s)$, que podem ser interpretadas de alguma forma em P_∞ e assim poderíamos tentar um novo caminho para provar a Hipótese de Riemann.

4.3 Mecânica Estatística

Nesta seção, apresentamos dois modelos, devidos a Bernard Julia [14] (Teoria Estatística dos Números). No primeiro, foi considerado um modelo de gás bosônico (spin inteiro) e no segundo um modelo de gás fermiônico (spin semi-inteiro).

No que segue, vamos considerar os números primos ordenados de modo crescente, ou seja, $\mathbb{P} = \{p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \dots\}$.

Consideramos um gás bosônico, não interagente em que cada partícula que o compõe, tem a sua disposição estados, onde em cada energia E_n é proporcional ao logaritmo de um número primo, i.e. ($E_0 > 0$)

$$E_1 = E_0 \log p_1, E_2 = E_0 \log p_2, \dots, E_j = E_0 \log p_j, \dots$$

Podemos etiquetar um estado por um número natural n , este estado o denotamos como ψ_n . Agora, o teorema fundamental da aritmética estabelece que n pode ser decomposto de maneira única como o produto de elementos de $\mathbb{P}$, i.e.

$$n = \prod_{p_j \in \mathbb{P}} p_j^{\alpha_j}. \quad (4.12)$$

Fisicamente, isso nos diz que no estado ψ_n temos α_j partículas que tem energia E_j e que se r_n é o maior número natural tal que $\alpha_{r_n} \neq 0$ em (4.12), a energia total do estado ψ_n é

$$\mathcal{E}_n := \alpha_1 E_0 \log p_1 + \dots + \alpha_{r_n} E_0 \log p_{r_n} = E_0 \log \left(\prod_{j=1}^{r_n} p_j^{\alpha_j} \right) = E_0 \log n. \quad (4.13)$$

Logo, a grande função de partição deste sistema é

$$\mathcal{Q}_B(T) = \sum_{n \geq 1} \exp \left(-\frac{\mathcal{E}_n}{kT} \right), \quad (4.14)$$

onde T é a temperatura do sistema e $k = 1.380$ Joule/Kelvin, é a constante de Boltzmann. Desenvolvendo (4.14), temos

$$\mathcal{Q}_B(T) = \sum_{n \geq 1} \exp \left(-\frac{E_0 \log n}{kT} \right) = \zeta \left(\frac{E_0}{kT} \right), \quad (4.15)$$

assim, temos que a função zeta de Riemann é a função de partição deste gás. Além disso, este modelo tem potencial químico nulo. Sabemos que, para $T < \frac{E_0}{k}$ não temos problemas com respeito ao comportamento do gás, pois $\zeta(s)$ é analítica nessa região. Fisicamente isso significa que, para baixas temperaturas, o gás tem um bom comportamento. Mas também sabemos que $\zeta(s)$ tem um polo simples em $s = 1$, ou seja em $T = \frac{E_0}{k}$, que é conhecida como

a temperatura de Hagedorn, na qual a função de partição diverge.

Agora, a nossa atenção é focada em saber como interpretar os zeros de $\zeta(s)$ neste modelo. Esses zeros podem ser interpretados como pontos de transições de fase. Isto é, usando algum resultado físico, temos uma relação entre estas transições de fase e a Hipótese de Riemann.

Notemos que o que, a princípio, era encontrar apoio, quanto à possibilidade de encontrar um formalismo matemático para atacar a Hipótese de Riemann, também leva a possíveis progressos na Física.

Na segunda parte dessa seção, ao contrário do modelo anterior, vamos considerar um gás fermiônico. Para continuar precisamos da seguinte definição.

Definição 4.55 . *Um número $n \in \mathbb{N}$ é dito livre de quadrados se não existe $p \in \mathbb{P}$ tal que $p^2 | n$.*

Novamente, vamos considerar um gás em que cada partícula que o compõe, tem à sua disposição estados, onde em cada estado a energia E_n está definida como no modelo anterior, mas como é um gás fermiônico, temos que considerar o princípio de exclusão de Pauli. Então, duas partículas não podem ocupar o mesmo estado. Portanto, os números que devem etiquetar nossos estados devem ser tais que em sua decomposição (4.12) os α_j podem apenas ser 0 ou 1 para qualquer $j \in \mathbb{N}$. Assim, os números livres de quadrados etiquetam os estados neste modelo. Também é claro que a energia total de cada estado é dada como em (4.13). Para conhecer as propriedades deste modelo e ver se ele tem alguma relação com a hipótese de Riemann, o caminho mais lógico a seguir é encontrar sua função de partição, assim para facilitar a notação denotaremos por $\mathbb{LQ}$ ao conjunto dos números livres de quadrados, então a função de partição grande canônica é

$$\mathcal{Q}_F(T) = \sum_{n \in \mathbb{LQ}} \exp\left(-\frac{E_0 \log n}{kT}\right) = \sum_{n \in \mathbb{LQ}} \frac{1}{n^{\frac{E_0}{kT}}}. \quad (4.16)$$

Mas, pelo Produto de Euler, para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{(1 - p^{-2s})}{(1 - p^{-s})} = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s}) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \dots \\ &= \sum_{n \in \mathbb{LQ}} \frac{1}{n^s}. \end{aligned}$$

Desta última igualdade em (4.16) chegamos a

$$\mathcal{Q}_F(T) = \frac{\zeta\left(\frac{E_0}{kT}\right)}{\zeta\left(2\frac{E_0}{kT}\right)}. \quad (4.17)$$

Um dos resultados mais interessantes neste modelo, mostrando uma relação estreita com a teoria analítica dos números, é a seguinte proposição.

Proposição 4.56 .

$$\mathcal{Q}_F(T) = \sum_{n \geq 1} \frac{|\mu(n)|}{n^{\frac{E_0}{kT}}}, \quad T < \frac{E_0}{k}.$$

Demonstração: Do fato de que $\mu(n) = 0$, se $n \in \mathbb{LQ}$, e de (4.16), obtemos o resultado. $\square$

Por fim, outro modelo muito interessante foi proposto por Andreas Knauf [16], onde temos em conta um sistema de spins cuja função de partição é $Q(s) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$. A razão para este modelo é a utilização do Teorema de Lee-Yang, que afirma que todos os zeros da função de partição de um modelo de Ising ferromagnético no plano complexo são unitários (para uma visão mais detalhada do Teorema Lee-Yang e do modelo de Ising ver [13]). Outro fato notável, neste modelo é que a sua função de partição pode ser escrita como

$$Q(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}, \quad s \in \mathbb{H}(2, +\infty),$$

onde φ é a função totiente de Euler. Para uma demonstração detalhada deste resultado, remetemos a [3]. Assim, como uma observação final, vemos que de (4.15), o Teorema 4.56 e a última equação, algumas séries da forma

$$Z(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{g(n)}{n^s},$$

onde g é uma função aritmética, podem ser interpretadas como funções de partição de alguns modelos, essas séries são chamadas Séries de Dirichlet. Para mais detalhes sobre estas recomendamos a Ref. [3].

Concluindo, vimos que a relação entre $\zeta(s)$ e seus zeros, e a Física é muito estreita. O site <http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics.htm> traz muitos outros exemplos.

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos a função zeta de Riemann $\zeta(s)$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Motivamos e justificamos porque é plausível postular a hipótese de Riemann de que os zeros não-triviais de $\zeta(s)$ se encontram na faixa crítica $0 < \Re(s) < 1$ e, mais precisamente, na reta crítica $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Como uma conexão entre $\zeta(s)$ e a teoria analítica dos números, estabelecemos o Teorema dos Números Primos que nos mostra como $\zeta(s)$ nos fornece uma densidade para os números primos em $\mathbb{R}$.

Vimos também diversas formas matemáticas equivalentes para enunciar a hipótese de Riemann.

A importância da função $\zeta(s)$ em alguns sistemas físicos relevantes foi também revisada e equivalentes físicos para a hipótese de Riemann foram estabelecidos.

A relação entre $\zeta(s)$ e a Física é muito vasta.

Esperamos que o presente texto consiga motivar o leitor interessado a prosseguir os passos, aqui descritos, do maravilhoso caminho que constitui esse problema da hipótese de Riemann.

Informações Adicionais

Notação Assintótica

Sejam $f, g : U \subseteq \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Escrevemos

$$f(x) = O(g(x)), \quad (\text{A.1})$$

se existe uma constante positiva M e um $r > 0$ tal que $|f(x)| \leq M|g(x)|$ para $|x| > r$. Outra forma equivalente de escrever (A.1) é a seguinte:

$$|f(x)| \ll |g(x)|. \quad (\text{A.2})$$

A notação última nos ajuda em matéria de cálculo, como é mostrado na seção das funções inteiras de ordem um. Agora, temos que especificar o caso onde a constante M depende de um parâmetro $\epsilon > 0$, por exemplo, na definição de uma função inteira de ordem um, então, as notações de (A.1) e (A.2) são alteradas pelas seguintes:

$$f(x) = O_\epsilon(g(x)) \text{ e } |f(x)| \ll_\epsilon |g(x)|.$$

Finalmente, outra das notações assintóticas que utilizamos neste trabalho, embora não muito frequentemente, mas de grande importância, é a seguinte:

Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Escrevemos

$$f \sim g,$$

se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Algumas Fórmulas Assintóticas

Teorema A.57 (Fórmula de Perron). *Sejam $c \in (1, 2]$, $T > 2$ e $x \neq 1$ um número real positivo. Então*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + O\left(\frac{x^c}{T|\log x|}\right), & x > 1 \\ O\left(\frac{x^c}{T|\log x|}\right), & x < 1. \end{cases}$$

Demonstração: Seja $U \gg c$ e consideremos os seguintes casos

$x < 1$: Seja o retângulo $[c-iT, U-iT, U+iT, c+iT, c-iT]$. Então, pelo teorema de Cauchy,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{[c-iT, U-iT, U+iT, c+iT, c-iT]} \frac{x^s}{s} ds = 0 \\ \Rightarrow & \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{[c-iT, U-iT]} \frac{x^s}{s} ds + \int_{[U-iT, U+iT]} \frac{x^s}{s} ds + \int_{[U+iT, c+iT]} \frac{x^s}{s} ds + \int_{[c+iT, c-iT]} \frac{x^s}{s} ds \right) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Mas

$$\int_{[U-iT, U+iT]} \frac{x^s}{s} ds = \int_{-T}^T \frac{x^{U+it}}{U+it} i dt \rightarrow 0, \text{ se } U \rightarrow +\infty.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{[c-iT, U-iT]} \frac{x^s}{s} ds \right| &= \left| \int_c^U \frac{x^{\sigma-iT}}{\sigma-iT} d\sigma \right| \leq \int_c^U \frac{x^\sigma}{T} d\sigma = \frac{x^U - x^c}{T \log x} \\ \Rightarrow & \int_{[c-iT, U-iT]} \frac{x^s}{s} ds = O\left(\frac{x^c}{T \log x}\right), \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\int_{[c-iT, U-iT]} \frac{x^s}{s} ds = O\left(\frac{x^c}{T \log x}\right).$$

Assim, temos em (A.3) o procurado, e é assim concluída a demonstração para este caso.

$x > 1$: Seja o retângulo $[c-iT, c+iT, -U+iT, -U-iT, c-iT]$. Logo, como a função $\frac{x^s}{s}$ tem um polo simples no origem, então, pelo teorema de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{[c-iT, c+iT, -U+iT, -U-iT, c-iT]} \frac{x^s}{s} ds = 1,$$

e prosseguimos como no caso anterior.

A demonstração é assim concluída. □

Lema A.58. *Seja $x = N + \frac{1}{2}$ ($N \in \mathbb{N}$). Então,*

$$\sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \left| \log\left(\frac{n}{x}\right) \right|^{-1} = O(x \log x).$$

Demonstração: Para $\frac{x}{2} < n < 2x$, claramente $0 < \left|1 - \frac{n}{x}\right| \leq 1$ e $0 < \left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right| \leq \log 2$. Então,

$$\left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right| \gg \left|1 - \frac{n}{x}\right| = \frac{|x - n|}{x}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right|^{-1} &\ll x \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} |x - n|^{-1} \ll x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \leq x \int_1^x \frac{1}{u} du = x \log(x) \\ &\Rightarrow \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \left|\log\left(\frac{n}{x}\right)\right|^{-1} = O(x \log x). \end{aligned}$$

□

Teorema A.59 (Fórmula de Inversão). *Seja $f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ e admitamos que $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} < \infty$, para qualquer $\sigma > 1$. Além disso, $|a_n| \leq A(n)$, onde $A(x)$ é uma função monótona crescente, e*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^\sigma} = O((\sigma - 1)^{-\alpha}),$$

quando $\sigma \rightarrow 1^+$, onde α é uma constante maior que zero. Então, a seguinte fórmula é válida para qualquer $b > 1$, $T \geq 1$, $x = N + \frac{1}{2}$ ($N \in \mathbb{N}$):

$$\Phi(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T(b-1)^\alpha}\right) + O\left(\frac{x A(2x) \log x}{T}\right).$$

Demonstração: Como $x = N + \frac{1}{2}$, então $\frac{x}{n} \neq 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Da hipótese, temos que $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ é absolutamente convergente para $s = b + it$. Então, integrando termo a termo e usando a Fórmula de Perron **A.57**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} f(s) \frac{x^s}{s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq 1} a_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} \right) \\ &= \sum_{n \leq x} a_n + O\left(\sum_{n \geq 1} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1} \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \right). \end{aligned} \tag{A.4}$$

Agora, dividamos a soma de O do seguinte jeito

$$\begin{aligned} &\sum_{n \geq 1} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1} \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \\ &= \sum_{\frac{x}{n} \leq \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{x}{n} \geq 2} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1} \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} + \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1} \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1}. \end{aligned}$$

Na primeira soma,

$$\left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right| \geq \log 2 \Rightarrow \left|\log\left(\frac{x}{n}\right)\right|^{-1} \leq \frac{1}{\log 2},$$

e, como $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^b} = O((b-1)^{-\alpha})$, então

$$\sum_{\frac{x}{n} \leq \frac{1}{2} \text{ ou } \frac{x}{n} \geq 2} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1} \left| \log \left(\frac{x}{n}\right) \right|^{-1} = O(x^b T^{-1} (b-1)^{-\alpha}). \quad (\text{A.5})$$

Na segunda soma, temos

$$\sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1} \left| \log \left(\frac{x}{n}\right) \right|^{-1} \leq A(2x) 2^b T^{-1} \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \left| \log \left(\frac{N+1/2}{n}\right) \right|^{-1},$$

mas é claro que $\left| \log \left(\frac{N+1/2}{n}\right) \right| = \left| \log \left(\frac{n}{N+1/2}\right) \right|$. Então, na desigualdade, temos

$$\sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1} \left| \log \left(\frac{x}{n}\right) \right|^{-1} \leq A(2x) 2^b T^{-1} \sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \left| \log \left(\frac{n}{N+1/2}\right) \right|^{-1}.$$

Além disso, pelo Lema **A.58**, $\sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} \left| \log \left(\frac{n}{N+1/2}\right) \right|^{-1} = O(x \log x)$. Portanto,

$$\sum_{\frac{x}{2} < n < 2x} |a_n| \left(\frac{x}{n}\right)^b T^{-1} \left| \log \left(\frac{x}{n}\right) \right|^{-1} = O(x T^{-1} A(2x) \log x). \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.5) e (A.6) em (A.4), temos o procurado. $\square$

Teorema A.60 (Fórmula de Stirling). *Para $\delta > 0$. Se $z \in \{w \in \mathbb{C} : \arg w \in (-\pi + \delta, \pi - \delta)\}$, $|w| > 1\}$, então*

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + O_\delta(|z|^{-1}).$$

Demonstração: Ver [15]. $\square$

Corolário A.61. *Com as mesmas condições do teorema anterior, temos*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z + O_\delta(|z|^{-1}).$$

Demonstração: Ver [15]. $\square$

Fórmula de Soma de Poisson

Consideremos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, e definamos g do seguinte modo

$$g(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n), \quad (\text{A.7})$$

onde estamos assumindo que a soma definindo g é convergente. Claramente, g tem período $T = 1$. Então, usando a forma complexa da série de Fourier, temos que

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2n\pi xi}, \quad (\text{A.8})$$

onde $c_k = \int_0^1 g(x) e^{-2k\pi xi} dx$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}$. Agora, se substituirmos (A.7) na equação que define aos c_k , temos

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) \right) e^{-2k\pi xi} dx = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) e^{-2k\pi(x+n)i} dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2k\pi yi} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2k\pi yi} dy, \end{aligned}$$

desta última igualdade em (A.8), temos

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2n\pi yi} dy \right) e^{2n\pi xi} \\ \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x+k) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2n\pi(y-x)i} dy. \end{aligned}$$

Agora, se tomamos $x = 0$, na última igualdade, obtemos a Fórmula de Soma de Poisson:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-2n\pi yi} dy. \quad (\text{A.9})$$

Observação A.62. Para que a soma do lado esquerdo da Eq.A.9 exista, precisamos que $f \in \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : h \in C^\infty, \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m f^{(n)}(x) = 0, \text{ para quaisquer inteiros } m, n \geq 1 \text{ fixos}\}$.

Raízes Primitivas da Unidade

Definição A.63. Seja $n \in \mathbb{N}$. $\tau \in \mathbb{C}$ é chamada uma raiz n -ésima da unidade se $\tau^n = 1$. Além disso, se $\tau^k \neq 1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$, com $k < n$, então, τ é chamada uma raiz primitiva n -ésima da unidade.

Teorema A.64. Se τ é uma raiz primitiva n -ésima da unidade. Então, as raízes n -ésimas da unidade são $1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$.

Demonstração: Sejam $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, tais que $0 \leq k_1 < k_2 \leq n-1$, então $1 \leq k_2 - k_1 < n$, logo como τ é uma raiz primitiva n -ésima da unidade, temos que $\tau^{k_2-k_1} \neq 1$, portanto $\tau^{k_1} \neq \tau^{k_2}$. Assim $1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$, são todos diferentes.

Finalmente, como $(\tau^k)^n = 1$, para qualquer $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, então $1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$ são todas as raízes n -ésimas da unidade, e concluímos a prova. $\square$

Lema A.65. *Se τ é uma raiz primitiva n -ésima da unidade. Então $\tau^m = 1$ se e somente se $n|m$.*

Demonstração: Admitamos que $\tau^m = 1$. Então, pelo algoritmo de divisão, existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $m = qn + r$, onde $0 \leq |r| < n$. Logo,

$$1 = \tau^m = \tau^{qn+r} = \tau^r.$$

Assim, como τ é uma raiz primitiva da unidade então $\tau^k \neq 1$, para qualquer $k < n$, e como r só pode tomar os valores $0, \pm 1, \dots, \pm(n-1)$; o único valor que satisfaz a igualdade acima é $r = 0$, o que implica que $n|m$. A recíproca é óbvia. $\square$

Proposição A.66. *Se S_k denota a soma das raízes primitivas k -ésimas da unidade. Então*

$$\sum_{d|n} S_d = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

Demonstração: Sejam R_n o conjunto das raízes n -ésimas da unidade e P_n o conjunto das raízes primitivas n -ésimas da unidade. Assim, pelo Lema A.65, se $\tau \in P_d$, então $\tau^n = 1$ se e somente se $d|n$. Isto implica que $P_d \subseteq R_n$, para qualquer $d|n$

$$\Rightarrow \bigcup_{d|n} P_d \subseteq R_n. \quad (\text{A.10})$$

Agora, se $\tau \in R_n$, então o conjunto $\{k \in \mathbb{N} : k \in [0, n] \text{ e } \tau^k = 1\} \neq \emptyset$, pois n pertence a este conjunto. Logo, pelo princípio da boa ordenação, o conjunto acima tem um menor elemento $d \neq 0$. Assim, $\tau^d = 1$ e $\tau^k \neq 1$, para $1 \leq k < d$. Isto implica que $\tau \in P_d$ e como $\tau^n = 1$, novamente pelo Lema A.65, $d|n$ então $\tau \in P_d \subseteq \bigcup_{d|n} P_d$

$$\Rightarrow R_n \subseteq \bigcup_{d|n} P_d.$$

Desta inclusão e de (A.10) temos que

$$R_n = \bigcup_{d|n} P_d.$$

Notemos que, pelo fato de que os elementos dos P_d são raízes primitivas, a união acima é disjunta. Então, somar os elementos de R_n é equivalente a somar todos os elementos dos P_d ,

onde $d|n$. Assim, seja τ uma raiz primitiva n -ésima da unidade. Logo, pelo Teorema **A.64**, temos que $R_n = \{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}\}$. Então, pelo dito anteriormente, se $n > 1$ temos

$$\sum_{d|n} S_d = 1 + \tau + \tau^2 + \dots + \tau^{n-1} = \frac{1 - \tau^n}{1 - \tau} = 0,$$

e se $n = 1$ é claro que $\sum_{d|n} S_d = 1$, e concluimos a prova. □

Mais Informações

Características de Dirichlet e Funções L de Dirichlet

Definição B.67. *Seja $N \in \mathbb{N}$. Uma Característica de Dirichlet módulo N é uma aplicação $\chi : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $\chi(m) = 0$, para qualquer m tal que $(m, N) > 1$, e $\chi|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}$ é um homomorfismo (não nulo) entre os grupos multiplicativos $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ e $\mathbb{C}^*$.*

Para N natural, pode haver muitas características de Dirichlet módulo N , mas existe uma de vital importância χ_0 tal que $\chi_0(a) = 1$, para qualquer $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Esta é chamada a característica principal módulo N .

Proposição B.68. *Seja $N \in \mathbb{N}$. Se χ é uma característica de Dirichlet módulo N , então $\chi(a)^{\varphi(N)} = 1$, para qualquer $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$.*

Demonstração: Como $|(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*| = \varphi(N)$, então, para qualquer $a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$, temos que $a^{\varphi(N)} = 1$ e como $\chi|_{(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*}$ é um homomorfismo de grupos $\chi(a)^{\varphi(N)} = \chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(1) = 1$.

□

Definição B.69. *Seja χ uma característica de Dirichlet módulo N . Para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, definimos*

$$L(s, \chi) := \sum_{n \geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

$L(s, \chi)$ é chamada função L de Dirichlet.

$L(s, \chi)$ está bem definida, com efeito, pela Proposição **B.68**, $\chi(n)^{\varphi(N)} = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tal que $(n, N) = 1$, logo $|\chi(n)| = 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n, N) = 1$, e $|\chi(n)| = 0$, para qualquer outro caso. Então, para $s = \sigma + it \in \mathbb{H}(1, +\infty)$, temos

$$\left| \frac{\chi(n)}{n^s} \right| \leq \frac{1}{n^\sigma},$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim $L(s, \chi)$ está bem definida.

Vemos que a prova da boa definição de $L(s, \chi)$ é análoga à prova da boa definição de $\zeta(s)$. Então não é estranho ver que tem propriedades análogas a $\zeta(s)$. De fato, ela verifica uma representação análoga ao produto de Euler, como é indicado no seguinte teorema.

Teorema B.70. $L(s, \chi)$ satisfaz

$$L(s, \chi) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1}.$$

Demonstração: A prova é análoga ao produto Euler, a única diferença aqui é o uso da propriedade de multiplicativa de χ (homomorfismo de grupo). $\square$

Alguns valores de $\zeta(n)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$

Definição B.71.

$$h_1(t) := \frac{1+t}{2(1-t)}, \quad h_r(t) := \left(t \frac{d}{dt}\right)^{r-1} h_1(t) \quad (r \geq 2).$$

Teorema B.72.

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Ver [1]. $\square$

Proposição B.73. Seja $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ e $t = e^{2\pi i x}$. Então, valem

1. $h_1(t) = -\frac{1}{4\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \right)$.
2. Se $r \geq 2$, então $h_r(t) = (r-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^r}$.

Demonstração:

1. Do Teorema **B.72**, temos

$$\frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \log \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left(\sum_{n \geq 1} \log \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi \cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{\pi}{\pi x} \right) = \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{x-n} \right) \\
&\Rightarrow \cot \pi x = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{x-n} \right) + \frac{1}{x} \right). \tag{B.1}
\end{aligned}$$

Desta última equação, é claro que

$$\cot \pi x = \frac{1}{\pi} \left(\sum_{n \leq -1} \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{x-n} \right) + \frac{1}{x} \right). \tag{B.2}$$

Assim, adicionando (B.1) e (B.2) membro a membro, temos

$$\begin{aligned}
2 \cot \pi x &= \frac{1}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{x-n} \right) \\
\Rightarrow -2ih_1(t) &= \frac{i(e^{\pi x i} + e^{-\pi x i})}{e^{\pi x i} - e^{-\pi x i}} = \cot \pi x = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{x-n} \right) \\
\Rightarrow h_1(t) &= -\frac{1}{4\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{x-n} \right).
\end{aligned}$$

2. Como $t = e^{2\pi i x}$, então $(t \frac{d}{dt})^{r-1} = (\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx})^{r-1}$. Assim, indutivamente para $r = 2$ por definição e do item anterior, temos

$$\begin{aligned}
h_2(t) &= t \frac{d}{dt} h_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{4\pi i} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{x-n} \right) \right) \\
&= \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(n+x)^2}.
\end{aligned}$$

Admitamos que $h_r(t) = (r-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^r}$. Logo,

$$\begin{aligned}
h_{r+1}(t) &= \left(t \frac{d}{dt} \right)^r h_1(t) = t \frac{d}{dt} \left(t \frac{d}{dt} \right)^{r-1} h_1(t) = t \frac{d}{dt} h_r(t) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \left((r-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^r} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^r (r-1)! \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{-r(x+n)^{r-1}}{(x+n)^{2r}} \\
&= r! \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^{r+1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+n)^{r+1}}.
\end{aligned}$$

□

Teorema B.74. *Seja $N \in \mathbb{N}$, χ uma característica de Dirichlet módulo N e $r \in \mathbb{N}$. Admitamos que $\chi(-1) = (-1)^r$. Logo, se $\zeta_N := e^{2\pi i/N}$, então*

$$L(r, \chi) = \frac{1}{(r-1)!} \left(-\frac{2\pi i}{N} \right)^r \frac{1}{2} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \chi(a) h_r(\zeta_N^a).$$

Demonstração: Pela Proposição B.73, temos

$$\begin{aligned} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \chi(a) h_r(\zeta_N^a) &= \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \chi(a) (r-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(a/N + n)^r} \\ &= (r-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^r \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \frac{\chi(a)}{(a/N + n)^r}. \end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \chi(a) h_r(\zeta_N^a) = (r-1)! \left(-\frac{1}{2\pi i} \right)^r \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \frac{\chi(a)}{(a/N + n)^r} + \sum_{n < 0} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \frac{\chi(a)}{(a/N + n)^r} \right). \quad (\text{B.3})$$

Além disso, se $n \geq 0$,

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \frac{\chi(a)}{(a/N + n)^r} = \sum_{a=1}^{N-1} \frac{\chi(a)}{(a/N + n)^r} = N^r \sum_{a=1}^{N-1} \frac{\chi(a)}{(a + Nn)^r} = N^r \sum_{Nn < m < N(n+1)} \frac{\chi(m)}{m^r}. \quad (\text{B.4})$$

De forma semelhante, se $n < 0$ escrevemos $n' = -(n+1) \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \frac{\chi(a)}{(a/N + n)^r} &= \sum_{a=1}^{N-1} \frac{\chi(a)}{(a/N + n)^r} = \sum_{a=1}^{N-1} \frac{\chi(a)}{(a/N - n' - 1)^r} \\ &= \sum_{a=1}^{N-1} \frac{(-1)^r \chi(a)}{((N-a)/N + n')^r} = N^r \sum_{a=1}^{N-1} \frac{\chi(-a)}{(-a + (n'+1)N)^r} = N^r \sum_{Nn' < m < N(n'+1)} \frac{\chi(m)}{m^r}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Assim, de (B.4) e (B.5) em (B.3), obtemos

$$\sum_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \chi(a) h_r(\zeta_N^a) = (r-1)! \left(-\frac{N}{2\pi i} \right)^r 2 \sum_{n \geq 0} \sum_{Nn < m < N(n+1)} \frac{\chi(m)}{m^r} = 2(r-1)! \left(-\frac{N}{2\pi i} \right)^r L(r, \chi).$$

□

Teorema B.75. *Se $r \in \mathbb{N}$, é par. Então,*

$$\zeta(r) = \frac{1}{(r-1)!} \frac{1}{2^r - 1} (2\pi i)^r \frac{1}{2} h_r(-1).$$

Demonstração: No teorema anterior, tome $N = 2$ e consideremos a característica principal módulo 2, χ_0 . Logo,

$$L(r, \chi_0) = \frac{1}{(r-1)!} (\pi i)^r \frac{1}{2} h_r(-1), \quad (\text{B.6})$$

Mas,

$$L(r, \chi_0) = \sum_{n \geq 1: n \text{ é ímpar}} \frac{1}{n^r} = \zeta(r) - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n)^r} = \zeta(r) \left(1 - \frac{1}{2^r}\right),$$

deste último, em (B.6), conclui a prova. $\square$

Deste último teorema, podemos calcular qualquer valor de $\zeta(n)$ para n par. Por exemplo, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ e $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

Agora, vamos calcular os valores de $\zeta(s)$ nos inteiros negativos. Como vimos anteriormente os pares negativos são os zeros triviais de $\zeta(s)$. Então, nos concentramos em calcular $\zeta(n)$ para n inteiro negativo ímpar.

Definição B.76. Os números de Bernoulli B_n são definidos pela seguinte fórmula:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} x^n.$$

Pelo Lema 2.10, para $s \in \mathbb{H}(1, +\infty)$,

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

Como vimos na demonstração do Teorema 2.11, a integral $\int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$ representa uma função em s , que também é inteira. Então só temos que focalizar nossa atenção na outra integral. Assim, usando a definição dos números de Bernoulli, temos

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^1 \frac{t}{e^t - 1} t^{s-2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^1 \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} t^{s+n-2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s+n-1} + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \end{aligned}$$

Daí, vemos que $\Gamma(s)\zeta(s) \in H(\mathbb{C} \setminus \{1, 0, -1, -2, -3, \dots\})$ e seus polos são simples. Então, para todos os números naturais n

$$\lim_{s \rightarrow 1-n} \Gamma(s)\zeta(s)(s+n-1) = \frac{B_n}{n!}.$$

Mas, pelo Teorema 2.2, $\text{Res}(\Gamma, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$, para $m = 0, 1, 2, \dots$. Então,

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \zeta(1-n) = \left(\lim_{s \rightarrow 1-n} \Gamma(s)(s+n-1) \right) \zeta(1-n) = \lim_{s \rightarrow 1-n} \Gamma(s)\zeta(s)(s+n-1) = \frac{B_n}{n!}.$$

Logo para $n = 2, 4, 6, \dots$

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}.$$

Assim, desta última equação, temos os valores procurados. Por exemplo $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$, $\zeta(-3) = -\frac{1}{120}$, $\zeta(-5) = -\frac{1}{252}$, $\dots$

Referências Bibliográficas

- [1] Ahlfors, L., *Complex Analysis*, G. Springer and E. H. Spanier, Consulting Editors 1979.
- [2] Apostol, T. M., *Mathematical Analysis*, Second edition. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1974.
- [3] Apostol, T. M., *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [4] Berry, M. V., 1986, *Riemann's zeta function: a model for quantum chaos?* in Quantum chaos and statistical nuclear physics, eds. T H Seligman and H Nishioka, Springer Lecture Notes in Physics No. 263, 1-17.
- [5] Bombieri, E., The Riemann Hypothesis, *Clay Mathematics Institute*, 2008-10-25.
- [6] Brochero, F.; Moreira, C. G.; Saldanha, N.; Tengan, E., *teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*, Segunda edição. Projeto Euclides 2011.
- [7] Bunimovich, L. A.; Detteman, C. P., Open circular billiards and the Riemann hypothesis, *Phys. Rev. Lett.*, 2005 (2005)v.
- [8] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, 1978.
- [9] Davenport, H.; *Multiplicative number theory*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [10] Edwards, H. M., *Riemann's Zeta Function*, Harold M. Edwards, 1974.
- [11] Fikioris, G., *Mellin-Transform Method for Integral Evaluation*. Morgan & Claypool, 2007.
- [12] He, Y.-H.; Jejjala, V.; Minic, D., On the Physics of the Riemann Zeros, [arXiv:1004.1172] (Apr 2010) 8p.
- [13] Huang, K., *Statistical Mechanics*, Second edition. John Wiley & Sons, Inc. 1987.

- [14] Julia, B., *Statistical theory of numbers*, in : Luck, J. M.; Mousa, P.; Waldschmidt, M. (Eds.), *Number Theory and Physics*, Springer, Berlin, 1990, p. 276.
- [15] Karatsuba, A. A.; Voronin, S. M. F., *The Riemann Zeta-Function*, Walter de Gruyter & Co, 1992.
- [16] Knauf, A., *On a Ferromagnetic Spin Chain*, Commun. Math. Phys. **153**, 77-115 (1993).
- [17] Lagarias, J. C., An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis, Amer. Math. Monthly **109**, 534(2002).
- [18] Leboeuf, P.; Monastra, A. G.; Bohigas, O., The Riemannium, [arXiv:nlin/0101014v1] (8 Jan 2001) 10p.
- [19] Olver, F. W. J., *Asymptotics and Special Functions*, Computer Science and Applied Math. Series. Academic Press, 1974.
- [20] Riemann, B., Sobre el número de números primos menores que una magnitud dada, Monatsber. Akad. Berlin (1859) 671-680. Traduzido por Juan Arias de Reyna.
- [21] Robin, G., *Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothèse de Riemann*, J. Math. Pures Appl. **63**(1984) 187-213.
- [22] Selberg, A., *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet séries*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20**(1956).
- [23] Sierra, G., General covariant xp models and the Riemann zeros J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 055209 (28pp).
- [24] Sotomayor, J., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.
- [25] Titchmarsh, E. C., *Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations*, Oxford University Press, 1946.
- [26] Titchmarsh, E. C., *The Riemann Zeta-Function*, Second edition, Titchmarsh and D.R. Heath-Brown, 1986.
- [27] van de Lune, J.; te Riele, J. J.; Winter, D. T., *On the zeros of the Riemann zeta function in the critical strip*. IV, Math. of Comp. **46**(1986), 667-681.
- [28] Voros, A., Spectral Zeta Functions, *From Advanced Studies in Pure Math.* **21**, *Zeta Functions in Geometry*, 327-358, Academic Press, 1992.
- [29] Williams, F. L., *Topics in Quantum Mechanics*, Progress in mathematical physics; v.27 2003.
- [30] Li, X.-J., The positivity of a sequence of numbers and the Riemann hypothesis, J. Numb. Th. **65**, 325(1997).

Índice Remissivo

- $B(v, u)$, função beta, 9
- $\Gamma(s)$, função Gama de Euler, 5
- $\Lambda(x)$, função de von Mangoldt, 44
- $\Psi(x)$, função de Chebyshev, 45
- $\mathcal{L}$, reta crítica, 36
- $\mathcal{S}$, faixa crítica, 33
- $\pi(x)$, função de contagem de números primos, 53
- $\xi(s)$, ξ -função de Riemann, 40
- $\zeta(s)$, função Zeta de Riemann, 13
- Conjetura
 - de Hilbert-Pólya, 55
 - Hipótese de Riemann, 36
- Constante de Euler-Mascheroni, 56
- Função
 - totiente de Euler, 71
 - totiente de Möbius, 71
- Função de partição, 74–76
- Função inteira de ordem um, 24
- Função zeta espectral, 65
- $\text{Li}(x)$, função integral logarítmica Euleriana, 54
- Número livre de quadrados, 75
- Séries de Dirichlet, 76
- Teorema
 - dos Números Primos, 51
 - dos Números Primos, versão original, 53
- Fórmula de Inversão, 81
- Fórmula de inversão de Möbius, 72
- Fórmula de Jensen, 25
- Fórmula de Perron, 80
- Fórmula de Soma de Euler, 41
- Fórmula de Stirling, 82
- Transformada de Mellin, 73
- Transformada inversa de Mellin, 73